

УДК 539.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ВЯЗКОУПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ИЗГИБАЕМЫХ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН

© 2023 г. А. П. Янковский^{a,*}

^aИнститут теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Россия

* e-mail: lab4nemir@rambler.ru

Поступила в редакцию 26.07.2022 г.

После доработки 11.11.2022 г.

Принята к публикации 20.12.2022 г.

Разработана модель неизо термического вязкоупруго-вязкопластического деформирования многонаправленно армированных гибких пластин. Вязкопластическое деформирование изотропных материалов композиции описывается соотношениями теории течения с изотропным упрочнением, учитывающими зависимости функций нагружения от температуры и интенсивности скоростей деформаций. Вязкоупругое поведение компонентов композиции описывается уравнениями модели Максвелла–Больцмана. Ослабленное сопротивление армированных пластин поперечным сдвигам моделируется соотношениями теории изгиба Амбарцумяна, а геометрическая нелинейность – в приближении Кармана. Учитывается связанность теплофизической и механической составляющих задачи о неупругом динамическом деформировании армированных пластин. Температура по толщине конструкций аппроксимируется полиномом 7-го порядка. Численное решение сформулированной нелинейной двумерной задачи строится с использованием явной схемы шагов по времени. Исследовано вязкоупруго-вязкопластическое динамическое поведение относительно тонкой стеклопластиковой пластины с учетом и без учета теплового отклика в ней. Конструкция нагружается в поперечном направлении воздушной взрывной волной. Показано: неучет теплового отклика в стеклопластиковой пластине может существенно исказить расчетные поля остаточных деформаций компонентов ее композиции, несмотря даже на то, что максимальный нагрев такой конструкции не превышает 10°C. Вязкоупругопластические расчеты, когда чувствительность материалов композиции к скорости их деформирования можно пренебречь, вполне обоснованно допустимо проводить без учета теплового отклика композитной пластины, если отсутствуют внешние источники тепла немеханического происхождения.

Ключевые слова: вязкоупруго-вязкопластическое деформирование, термочувствительность, многонаправленно армирование, гибкая пластина, тепловой отклик, теория изгиба Амбарцумяна, динамическое деформирование, явная численная схема
DOI: 10.31857/S0572329923700071, EDN: GLOLRC

1. Введение. Тонкостенные конструкции из композитных материалов (КМ) находят все более широкое применение в качестве силовых и защитных элементов современных изделий [1–17], которые часто испытывают высокоинтенсивное термосиловое нагружение [2, 6, 11, 13, 14, 17]. При этом материалы составляющих композиции могут деформироваться упругопластически [5, 13, 14, 18–20], поэтому актуальной является

проблема математического моделирования неупругого деформирования КМ-пластин и оболочек, которая в настоящее время находится на стадии становления [5, 9, 13–15, 18, 20–23].

Известно, что пластические свойства материалов зависят от температуры и скорости деформирования [24, 25], поэтому в [23] была разработана модель термоупруго-вязкопластического деформирования многонаправленно армированных сред и проведены соответствующие расчеты для динамически нагружаемых гибких КМ-пластин. Однако в [23] не учитывались вязкоупругие свойства материалов компонентов композиции, что не позволило определить остаточные прогибы и остаточное напряженно-деформированное состояние (НДС) армированных пластин после их пластического неизотермического деформирования. В работе [22] учитывались как вязкопластические, так и вязкоупругие свойства материалов компонентов композиции, но не рассматривался тепловой отклик в КМ-пластинах при динамических нагрузках взрывного типа. Таким образом, модель неизотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования армированных непрерывными волокнами композитных сред до настоящего времени не была разработана. При этом, как и в [23], необходимо учитывать связанность механической и температурной составляющих динамической задачи.

Для расчета волновых процессов, возникающих в тонкостенных элементах КМ-конструкций при их динамическом изгибном нагружении, и для моделирования их слабого сопротивления поперечному сдвигу обычно используют простейшие неклассические теории Рейсснера [2, 5, 10, 14, 26], Редди [8, 11] или Амбарцумяна [1, 22, 23]. Реже применяют более точные теории, основанные на использовании гипотезы ломаной линии [5, 6, 10].

Для численного интегрирования нелинейных задач динамики пластин и оболочек традиционно применяют явные схемы [5, 22, 23] или неявные методы Ньюмарка [13, 27].

Настоящая работа посвящена моделированию неизотермического вязкоупруго-вязкопластического динамического деформирования гибких армированных пластин при учете их ослабленного сопротивления поперечным сдвигам. Численное решение связанной термомеханической задачи строится с использованием явных методов шагов по времени.

2. Численно-аналитическая модель неизотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования многонаправленно армированного материала. Рассматривается КМ-среда, состоящая из матрицы, усиленной N семействами непрерывных волокон с плотностями армирования ω_k ($1 \leq k \leq N$). Как и в работах [22, 23], разложим малые деформации $\epsilon_{ij}^{(k)}$ изотропного однородного материала k -го компонента композиции на вязкоупругие $e_{ij}^{(k)}$, несжимаемые пластические $p_{ij}^{(k)}$ и температурные $\delta_{ij}\epsilon_{\Theta}^{(k)}$ составляющие, поэтому для скоростей этих деформаций справедливо представление

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(k)} = \dot{e}_{ij}^{(k)} + \dot{p}_{ij}^{(k)} + \delta_{ij}\dot{\epsilon}_{\Theta}^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\dot{p}_{ii}^{(k)} = 0, \dot{\epsilon}_{\Theta}^{(k)} = \alpha_k \dot{\Theta}), \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.1)$$

где Θ – температура; α_k – коэффициент линейного температурного расширения k -го материала композиции ($k = 0$ – связующая матрица, $k \geq 1$ – волокна k -го семейства); δ_{ij} – символ Кронекера; точка – производная по времени t . По повторяющимся индексам, если не оговорено, производится суммирование от 1 до 3.

Вязкоупругое поведение k -го компонента композиции моделируется соотношениями тела Максвелла–Больцмана [22, 28]:

$$\dot{e}_{ij}^{(k)} = \frac{\dot{s}_{ij}^{(k)}}{2G_k} + \frac{s_{ij}^{(k)}}{2\eta_k}, \quad \dot{e}_0 = \frac{\dot{\sigma}_0^{(k)}}{3K_k} + \frac{\sigma_0^{(k)}}{3\mu_k}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(k)} &= \sigma_{ij}^{(k)} - \delta_{ij}\sigma_0^{(k)}, \quad \dot{e}_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} - \delta_{ij}\dot{e}_0^{(k)}, \quad \dot{e}_0^{(k)} = \frac{1}{3}\dot{e}_{ll}^{(k)} = \dot{\varepsilon}_0^{(k)} - \dot{\varepsilon}_\Theta^{(k)}, \quad \sigma_0^{(k)} = \frac{1}{3}\sigma_{ll}^{(k)} \\ \dot{\varepsilon}_0^{(k)} &= \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_{ll}^{(k)}, \quad 2G_k = \frac{E_k}{1 + \nu_k}, \quad 3K_k = \frac{E_k}{1 - 2\nu_k}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N \end{aligned} \quad (2.3)$$

$\sigma_{ij}^{(k)}$ – тензор напряжений; $s_{ij}^{(k)}$, $\dot{e}_{ij}^{(k)}$ – девиаторы напряжений и скоростей вязкоупругих деформаций; $\sigma_0^{(k)}$ – среднее напряжение; $\dot{e}_0^{(k)}$ – скорость средней деформации; E_k , ν_k – мгновенные модуль упругости первого рода и коэффициент Пуассона; G_k – мгновенный модуль упругости второго рода; K_k – мгновенный объемный модуль упругости; η_k , μ_k – коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости. Если материал k -го составляющего композиции термочувствителен, то величины E_k , ν_k , G_k , K_k , α_k , η_k и μ_k зависят от температуры ($E_k = E_k(\Theta)$ и т.д.).

Пластическое деформирование k -го компонента композиции ассоциировано с поверхностью текучести $f_k = 0$, обобщающей условие текучести Мизеса [23, 28]:

$$f_k(T_k, \chi_k, H_k, \Theta) \equiv T_k^2 - \tau_s^{(k)2}(\chi_k, H_k, \Theta) = 0, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.4)$$

где

$$T_k = \sqrt{\frac{1}{2}s_{ij}^{(k)}s_{ij}^{(k)}}, \quad \chi_k = \int_0^t \sqrt{2\dot{p}_{ij}^{(k)}\dot{p}_{ij}^{(k)}} dt, \quad H_k = \sqrt{2\xi_{ij}^{(k)}\xi_{ij}^{(k)}}, \quad \xi_{ij}^{(k)} = \dot{e}_{ij}^{(k)} + \dot{p}_{ij}^{(k)} \quad (2.5)$$

$$i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N$$

$\xi_{ij}^{(k)}$ – девиатор скоростей деформаций; $\tau_s^{(k)}$ – мгновенный предел текучести при чистом сдвиге, который равен значению интенсивности касательных напряжений T_k при фиксированных значениях накопленной пластической деформации χ_k (параметра Одквиста), интенсивности скоростей деформаций сдвига H_k и температуры Θ в текущий момент времени t .

В работе [22] не учитывалась зависимость функции f_k от Θ в соотношении (2.4), а в [23] не учитывались вязкие свойства в равенствах (2.2), т.е. было принято $\eta_k = \mu_k \rightarrow \infty$. Повторяя рассуждения из [22, 23], при учете соотношений (2.1)–(2.5) получим искомые определяющие соотношения неизотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования k -го материала композиции, которые для удобства изложения запишем в матричной форме:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{V}_k \sigma_k + \mathbf{Z}_k \dot{\varepsilon}_k + \mathbf{Y}_k \dot{\varepsilon}_k + \beta_k \dot{\Theta}, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.6)$$

Здесь и далее:

$$\begin{aligned} \sigma_k &= (\sigma_1^{(k)} \ \sigma_2^{(k)} \ \sigma_3^{(k)} \ \sigma_4^{(k)} \ \sigma_5^{(k)} \ \sigma_6^{(k)})^T \equiv (\sigma_{11}^{(k)} \ \sigma_{22}^{(k)} \ \sigma_{33}^{(k)} \ \sigma_{23}^{(k)} \ \sigma_{31}^{(k)} \ \sigma_{12}^{(k)})^T \\ \varepsilon_k &= (\varepsilon_1^{(k)} \ \varepsilon_2^{(k)} \ \varepsilon_3^{(k)} \ \varepsilon_4^{(k)} \ \varepsilon_5^{(k)} \ \varepsilon_6^{(k)})^T \equiv (\varepsilon_{11}^{(k)} \ \varepsilon_{22}^{(k)} \ \varepsilon_{33}^{(k)} \ 2\varepsilon_{23}^{(k)} \ 2\varepsilon_{31}^{(k)} \ 2\varepsilon_{12}^{(k)})^T \\ \mathbf{s}_k &= (s_1^{(k)} \ s_2^{(k)} \ s_3^{(k)} \ s_4^{(k)} \ s_5^{(k)} \ s_6^{(k)})^T \equiv (s_{11}^{(k)} \ s_{22}^{(k)} \ s_{33}^{(k)} \ s_{23}^{(k)} \ s_{31}^{(k)} \ s_{12}^{(k)})^T \\ \xi_k &= (\xi_1^{(k)} \ \xi_2^{(k)} \ \xi_3^{(k)} \ \xi_4^{(k)} \ \xi_5^{(k)} \ \xi_6^{(k)})^T \equiv (\xi_{11}^{(k)} \ \xi_{22}^{(k)} \ \xi_{33}^{(k)} \ \xi_{23}^{(k)} \ \xi_{31}^{(k)} \ \xi_{12}^{(k)})^T \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{Z}_k = \bar{\mathbf{Z}}_k - G_k \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k, \quad \mathbf{Y}_k = \tau_H^{(k)} \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.8)$$

$\mathbf{V}_k = (v_{ij}^{(k)})$, $\bar{\mathbf{Z}}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$, $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k = (\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)})$ – симметричные 6×6 -матрицы, $\beta_k = (\beta_i^{(k)})$ – шестикомпонентный вектор-столбец, ненулевые элементы которых определяются так:

$$\begin{aligned}
v_{ij}^{(k)} &= -\frac{K_k}{3\mu_k} + \left(\frac{1}{3} - \delta_{ij}\right) B_k, \quad v_{ll}^{(k)} = -B_k, \quad \bar{z}_{ij}^{(k)} = 2\delta_{ij}G_k + \lambda_k, \quad \bar{z}_{ll}^{(k)} = G_k \\
\beta_i^{(k)} &= \frac{K_\Theta^{(k)}}{3K_k} \sum_{m=1}^3 \sigma_m^{(k)} + 3K_k \alpha_k + \frac{s_i^{(k)}}{G_k} [G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)}(\tau_s^{(k)}G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)}G_k)A_k] \\
\beta_l^{(k)} &= \frac{s_l^{(k)}}{G_k} [G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)}(\tau_s^{(k)}G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)}G_k)A_k] \\
(i, j = \overline{1, 3}, \quad l = \overline{4, 6}), \quad \bar{z}_{ij}^{(k)} &= A_k s_i^{(k)} s_j^{(k)} \\
(i, j = \overline{1, 6}), \quad \lambda_k &= \frac{\nu_k E_k}{(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k)}, \\
A_k &= \frac{c_k G_k}{(G_k + \bar{G}_k) \tau_s^{(k)2}}, \quad B_k = \frac{G_k}{\eta_k} \left(1 - \frac{c_k G_k}{G_k + \bar{G}_k}\right) \\
K_\Theta^{(k)} &= \frac{dK_k}{d\Theta}, \quad G_\Theta^{(k)} = \frac{dG_k}{d\Theta}, \quad \tau_\Theta^{(k)} = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \Theta}, \quad \tau_H^{(k)} = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial H_k}, \quad \bar{G}_k = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \chi_k} \\
c_k &= \begin{cases} 0 & \text{при } T_k < \tau_s^{(k)} \quad \text{или} \quad T_k = \tau_s^{(k)}, \quad W_k \leq 0 \\ 1 & \text{при } T_k = \tau_s^{(k)}, \quad W_k > 0 \end{cases} \\
W_k &= G_k s_k^T \dot{\epsilon}_k + \tau_s^{(k)} G_k^{-1} (\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k) \dot{\Theta} - 2\tau_s^{(k)} \tau_H^{(k)} H_k^{-1} \xi_k^T \ddot{\epsilon}_k - G_k \eta_k^{-1} \tau_s^{(k)2} \\
T_k^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 s_i^{(k)2} + \sum_{i=4}^6 s_i^{(k)2}, \quad H_k^2 = 2 \sum_{i=1}^3 \xi_i^{(k)2} + 4 \sum_{i=4}^6 \xi_i^{(k)2}, \quad 0 \leq k \leq N
\end{aligned} \tag{2.9}$$

\bar{G}_k – касательный модуль сдвига при неупругом деформировании; c_k – параметр переключения, при определении которого использовано равенство (2.4): $c_k = 0$ – термовязкоупругое деформирование, разгрузка или нейтральное нагружение, $c_k = 1$ – активное нагружение при пластическом деформировании материала k -й фазы композиции; индекс “Т” – операция транспонирования. По повторяющимся индексам k и l в равенствах (2.9) суммирование нет.

Если пластические свойства не зависят от температуры ($\tau_\Theta^{(k)} \equiv 0$), то уравнения (2.6) при учете (2.8) и (2.9) редуцируются в определяющие соотношения вязкоупруго-вязкопластического деформирования k -го материала композиции, которые полностью совпадают с уравнениями, полученными в [22]. Если же не учитываются вязкие свойства при упругом деформировании ($\mu_k = \eta_k \rightarrow \infty$), то из соотношений (2.6), (2.8) и (2.9) вытекают определяющие уравнения неизотермического упруговязкопластического деформирования k -го компонента композиции, полностью совпадающие с полученными в [23]. Таким образом, соотношение (2.6) при учете равенств (2.3)–(2.5), (2.8) и (2.9) обобщает определяющие уравнения, полученные в [22, 23].

В разделе 1 уже отмечалось, что численное решение исследуемой задачи предполагается получать на базе явных пошаговых схем [5, 22, 23], т.е. значения неизвестных функций будем определять в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \Delta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где $\Delta = \text{const} > 0$ – шаг по времени. Используя результаты работ [22, 23], считаем, что при $t = t_{n-1}$, t_n уже известны значения величин

$$\begin{aligned}
\sigma_k(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \dot{\sigma}_k(\mathbf{r}) \equiv \dot{\sigma}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \dot{\epsilon}_k(\mathbf{r}) \equiv \dot{\epsilon}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \ddot{\epsilon}_k(\mathbf{r}) \equiv \ddot{\epsilon}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}) \\
\dot{\Theta}(\mathbf{r}) &\equiv \dot{\Theta}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \Theta(\mathbf{r}) \equiv \Theta(t_m, \mathbf{r}), \quad 0 \leq k \leq N, \quad m = n-1, n, \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

где x_i – координаты точек КМ-тела. По аналогии с [22, 23] преобразуем первое, третье и четвертое слагаемые в правой части равенства (2.6), применив формулу трапеций, имеющую второй порядок точности по Δ [29]:

$$\overset{n}{\sigma}_k - \overset{n-1}{\sigma}_k = \frac{\Delta}{2} \left(\overset{n}{\dot{\sigma}}_k + \overset{n-1}{\dot{\sigma}}_k \right), \quad \overset{n}{\dot{\epsilon}}_k - \overset{n-1}{\dot{\epsilon}}_k = \frac{\Delta}{2} \left(\overset{n}{\ddot{\epsilon}}_k + \overset{n-1}{\ddot{\epsilon}}_k \right), \quad \overset{n}{\Theta} - \overset{n-1}{\Theta} = \frac{\Delta}{2} \left(\overset{n}{\dot{\Theta}} + \overset{n-1}{\dot{\Theta}} \right), \quad 0 \leq k \leq N$$

откуда получаем

$$\overset{n}{\sigma}_k = \frac{\Delta}{2} \overset{n}{\dot{\sigma}}_k + \overset{n-1/2}{\sigma}_k, \quad \overset{n}{\dot{\epsilon}}_k = \frac{2}{\Delta} \overset{n}{\dot{\epsilon}}_k - \frac{2}{\Delta} \overset{n-1/2}{\dot{\epsilon}}_k, \quad \overset{n}{\Theta} = \frac{2}{\Delta} \overset{n}{\Theta} - \frac{2}{\Delta} \overset{n-1/2}{\Theta}, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.11)$$

где

$$\overset{n-1/2}{\sigma}_k \equiv \overset{n-1}{\sigma}_k + \frac{\Delta}{2} \overset{n-1}{\dot{\sigma}}_k, \quad \overset{n-1/2}{\dot{\epsilon}}_k \equiv \overset{n-1}{\dot{\epsilon}}_k + \frac{\Delta}{2} \overset{n-1}{\ddot{\epsilon}}_k, \quad \overset{n-1/2}{\Theta} \equiv \overset{n-1}{\Theta} + \frac{\Delta}{2} \overset{n-1}{\dot{\Theta}}, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.12)$$

Из равенств (2.12) при учете предположений (2.10) следует, что шестикомпонентные векторы-столбцы $\overset{n-1/2}{\sigma}_k$, $\overset{n-1/2}{\dot{\epsilon}}_k$ и величины $\overset{n-1/2}{\Theta}$, $\overset{n}{\Theta}$ в выражениях (2.11) при $t = t_n$ уже известны. Подстановка (2.11) в соотношение (2.6) приводит к матричному уравнению

$$\overset{n}{\dot{\sigma}}_k = \mathbf{B}_k \overset{n}{\dot{\epsilon}}_k + \mathbf{p}_k, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.13)$$

где

$$\mathbf{B}_k \equiv \bar{\mathbf{V}}_k^{-1} \left(\mathbf{Z}_k + \frac{2}{\Delta} \mathbf{Y}_k \right), \quad \mathbf{p}_k \equiv \bar{\mathbf{V}}_k^{-1} \left(\mathbf{V}_k \overset{n}{\sigma}_k - \frac{2}{\Delta} \mathbf{Y}_k \overset{n-1/2}{\dot{\epsilon}}_k + \frac{2}{\Delta} \left(\overset{n}{\Theta} - \overset{n-1/2}{\Theta} \right) \overset{n}{\beta}_k \right) \quad (2.14)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_k \equiv \mathbf{I} - \frac{\Delta}{2} \mathbf{V}_k, \quad 0 \leq k \leq N$$

\mathbf{I} – единичная 6×6 -матрица; $\bar{\mathbf{V}}_k^{-1}$ – матрица, обратная 6×6 -матрице $\bar{\mathbf{V}}_k$. В текущий момент времени t_n равенство (2.13) – искомое определяющее соотношение в случае неизотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования k -го компонента композиции.

Элементы матриц \mathbf{V}_k , \mathbf{Z}_k , \mathbf{Y}_k и вектора-столбца $\overset{n}{\beta}_k$ зависят от решения рассматриваемой задачи (см. выражения (2.8) и (2.9)), поэтому равенство (2.13) при учете (2.12) и (2.14) является нелинейным. Как и в [22, 23], линеаризовать это соотношение можно, используя метод, аналогичный методу переменных параметров упругости [30]. При этом в данный момент времени t_n на текущей итерации этого метода 6×6 -матрица $\overset{n}{\mathbf{B}}_k = (b_{ij}^{(k)})$ и шестикомпонентный вектор-столбец $\overset{n}{\mathbf{p}}_k = (p_i^{(k)})$ ($i, j = \overline{1, 6}$) в уравнении (2.13) известны.

Линеаризованное матричное соотношение (2.13) формально совпадает с уравнениями (2.24) в [22] и (1.15) в [23], поэтому, используя результаты работ [22, 23], на базе определяющего равенства (2.13) в момент времени t_n на данной итерации получаем следующее линейное матричное соотношение, характеризующее неизотермическое вязкоупруго-вязкопластическое состояние КМ:

$$\overset{n}{\dot{\sigma}} = \mathbf{B} \overset{n}{\dot{\epsilon}} + \mathbf{p}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

где

$$\mathbf{B} \equiv \left(\omega_0 \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{B}_k \mathbf{E}_k \right) \mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{g}, \quad \mathbf{f} \equiv \omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k (\mathbf{p}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{r}_k) \quad (2.16)$$

$$\mathbf{H} \equiv \omega_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{g} \equiv \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{r}_k, \quad \omega_0 \equiv 1 - \sum_{k=1}^N \omega_k, \quad \mathbf{r}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \boldsymbol{\zeta}_k, \quad \mathbf{E}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k$$

$\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – шестикомпонентные вектор-столбцы усредненных напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} в композиции, которые аналогичны выражениям (2.7); ω_0 – относительное объемное содержание связующего материала в репрезентативной ячейке композиции; \mathbf{B} , \mathbf{E}_k , \mathbf{C}_k – 6×6 -матрицы; \mathbf{D}_k^{-1} , \mathbf{H}^{-1} – матрицы, обратные 6×6 -матрицам \mathbf{D}_k , \mathbf{H} ; \mathbf{p} , \mathbf{f} , \mathbf{g} , \mathbf{r}_k , $\boldsymbol{\zeta}_k$ – шестикомпонентные вектор-столбцы. Элементы матриц $\mathbf{C}_k = (c_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{D}_k = (d_{ij}^{(k)})$ и вектор-столбца $\boldsymbol{\zeta}_k = (\zeta_i^{(k)})$ вычисляются так:

$$c_{1j}^{(k)} = d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)} \quad (2.17)$$

$$\zeta_1^{(k)} = 0, \quad \zeta_i^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} (p_l^{(0)} - p_l^{(k)}), \quad i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}, \quad 1 \leq k \leq N$$

$$g_{11}^{(k)} = q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \dots, g_{16}^{(k)} = 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \dots \quad (2.18)$$

$$2g_{61}^{(k)} = q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \dots, g_{66}^{(k)} = q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq N$$

$$l_{11}^{(k)} = \sin \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_{12}^{(k)} = \sin \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_{13}^{(k)} = \cos \theta_k$$

$$l_{21}^{(k)} = -\sin \varphi_k, \quad l_{22}^{(k)} = \cos \varphi_k, \quad l_{23}^{(k)} = 0 \quad (2.19)$$

$$l_{31}^{(k)} = -\cos \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_{32}^{(k)} = -\cos \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_{33}^{(k)} = \sin \theta_k, \quad 1 \leq k \leq N$$

Не выписанные в выражениях (2.18) элементы $6 \cdot 6$ -матриц $\mathbf{G}_k = (g_{ij}^{(k)})$ и $\mathbf{Q}_k = (q_{ij}^{(k)})$ приведены в табл. (2.1.40) и (2.1.44) в [31]. Матрицы \mathbf{G}_k и \mathbf{Q}_k определяют преобразования векторов-столбцов $\boldsymbol{\sigma}_k$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ (см. равенства (2.7)) при переходе от глобальной ортогональной системы координат x_j к локальной ортогональной системе $x_i^{(k)}$, связанной с арматурой k -го семейства. При этом ось $x_1^{(k)}$ ориентирована вдоль волокна и определяется углами сферической системы координат θ_k и φ_k (рис. 1). Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ между осями $x_i^{(k)}$ и x_j ($i, j = \overline{1, 3}$) задаются равенствами (2.19). (В соотношениях (2.17) и (2.18) опущен верхний индекс n .)

Как и в [22, 23], при выводе равенств (2.15), (2.16) попутно получаются линейризованные матричные соотношения

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \mathbf{H}^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \mathbf{E}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 + \mathbf{r}_k, \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.20)$$

Эти равенства при $t = t_n$ на текущей итерации позволяют последовательно выразить скорости деформаций связующего $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ и волокон k -го семейства $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ через скорости усредненных деформаций композиции $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

Согласно равенствам (2.9) и (2.16)–(2.19), в данный момент времени t_n на рассматриваемой итерации матрицы \mathbf{B} , \mathbf{H}^{-1} , \mathbf{E}_k и векторы-столбцы \mathbf{p} , \mathbf{g} , \mathbf{r}_k в соотношениях (2.15) и (2.20) известны. Если температурное влияние не учитывается ($\dot{\Theta} \equiv 0$), то уравнение (2.15) при учете равенств (2.12), (2.14), (2.16) и (2.17) редуцируется в определяющее соотношение для КМ, полученное в [22] для случая вязкоупруго-вязкопластиче-

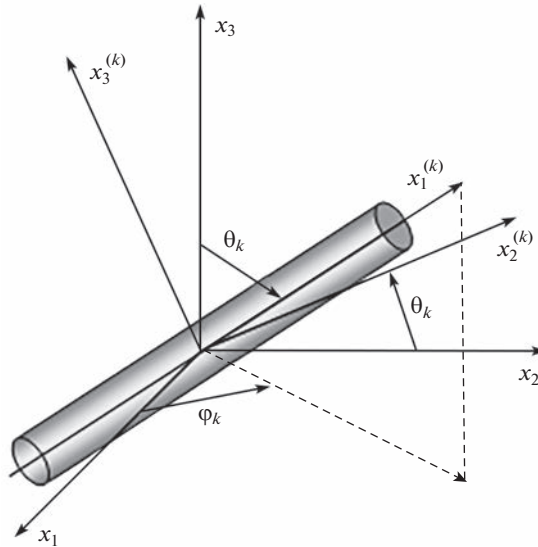


Рис. 1. Локальная система координат, связанная с траекторией волокна k -го семейства.

ского деформирования материалов композиции. Если же в выражениях (2.9) принять $\mu_k = \eta_k \rightarrow \infty$, то уравнение (2.15) вырождается в определяющее соотношение для КМ, полученное в [23] для неизотермического случая упруговязкопластического деформирования составляющих композиции. Таким образом, уравнение (2.15) обобщает структурные соотношения, выведенные в [22, 23].

Пусть в момент времени t_n итерационный процесс сошелся с необходимой точностью, т.е. в соотношении (2.15) известны скорости деформаций композиции $\dot{\epsilon}_k^n$, тогда с помощью (2.20) определяем скорости деформаций компонентов композиции $\dot{\epsilon}_k^n$ (см. (2.7)), а из равенств (2.13) – скорости напряжений $\dot{\sigma}_k^n$ в этих же материалах. После этого, используя (2.2) при учете (2.3), можно вычислить скорости вязкоупругих деформаций $\dot{e}_{ij}^{(k)n}$. Центральные конечные разности на трехточечном шаблоне по времени $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$ дают выражения

$$\frac{1}{2\Delta} \left(\epsilon_{ij}^{(k)n+1} - \epsilon_{ij}^{(k)n-1} \right) = \dot{\epsilon}_{ij}^{(k)n}, \quad \frac{1}{2\Delta} \left(e_{ij}^{(k)n+1} - e_{ij}^{(k)n-1} \right) = \dot{e}_{ij}^{(k)n}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.21)$$

где правые части уже вычислены, а в левых частях деформации $\epsilon_{ij}^{(k)n-1}$ и $e_{ij}^{(k)n-1}$ предполагаются известными из решения задачи в предшествующий момент времени t_{n-1} . Следовательно, соотношения (2.21) позволяют определить $\epsilon_{ij}^{(k)n+1}$ и $e_{ij}^{(k)n+1}$.

Считаем, что в начальный момент времени $t = t_0 = 0$ все составляющие композиции находились в естественном состоянии при температуре $\Theta = \Theta^0 = \text{const}$, тогда из соотношений (2.1) имеем

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} + p_{ij}^{(k)} + \delta_{ij} \varepsilon_{\Theta}^{(k)} \quad \left(\varepsilon_{\Theta}^{(k)} = \int_{t_0}^t \alpha_k \dot{\Theta} dt \right)$$

откуда, используя для вычисления интеграла формулу средней точки, получаем

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(k)} &= \varepsilon_{ij}^{(k)} - e_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} \bar{\alpha}_k \left(\Theta - \Theta^0 \right) - \delta_{ij} \varepsilon_{\Theta}^{(k)} \\ \bar{\alpha}_k &\equiv \left(\alpha_k + \alpha_k \right) / 2, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq N \end{aligned} \quad (2.22)$$

где правые части уже известны из равенств (2.21) и предположения о том, что температура Θ заранее вычислена из уравнения теплового баланса для КМ по явной численной схеме (см. ниже), а температурная деформация $\varepsilon_{\Theta}^{(k)}$ определена по решению, полученному в предшествующий момент времени t_{n-1} :

$$\varepsilon_{\Theta}^{(k)} \equiv \int_{t_0}^{t_n} \alpha_k \dot{\Theta} dt = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \alpha_k \dot{\Theta} dt + \varepsilon_{\Theta}^{(k)} \approx \varepsilon_{\Theta}^{(k)} + \bar{\alpha}_k \left(\Theta - \Theta^0 \right), \quad 0 \leq k \leq N$$

Используя второе соотношение (2.5), можно вычислить параметр упрочнения χ_k в следующий момент времени t_{n+1} :

$$\chi_k = \int_0^{t_{n+1}} \sqrt{2 \dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} dt = \chi_k + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sqrt{2 dp_{ij}^{(k)} dp_{ij}^{(k)}} \approx \chi_k + \sqrt{2 \Delta p_{ij}^{(k)} \Delta p_{ij}^{(k)}}, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.23)$$

где

$$\Delta p_{ij}^{(k)} \equiv p_{ij}^{(k)} - p_{ij}^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.24)$$

В правой части равенства (2.24) значения пластических деформаций, согласно (2.22), уже определены, поэтому в выражении (2.23) известно последнее слагаемое. Следовательно, по формуле (2.23) при учете соотношений (2.21), (2.22) и (2.24) можно вычислить величину параметра Одкависта χ_k при $t = t_{n+1}$. Такой способ расчета значения χ_k удобен тем, что в момент времени t_{n+1} не требуется уточнять параметр упрочнения при использовании итерационного процесса по методу переменных параметров упругости.

При моделировании динамического неизотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования КМ нужно учитывать связанность механической и теплофизической составляющих задачи. Поэтому к механическим определяющим уравнениям (2.15) необходимо добавить структурные соотношения закона Фурье для КМ, которые ранее были получены в [32], и определяются матричными равенствами (2.1)–(2.3) из [23].

3. Формулировка задачи неизотермического вязкоупруго-вязкопластического динамического деформирования КМ-пластины при изгибе. Рассмотрим динамический изгиб КМ-пластины толщиной $2h$ (рис. 2), с которой связана прямоугольная декартова си-

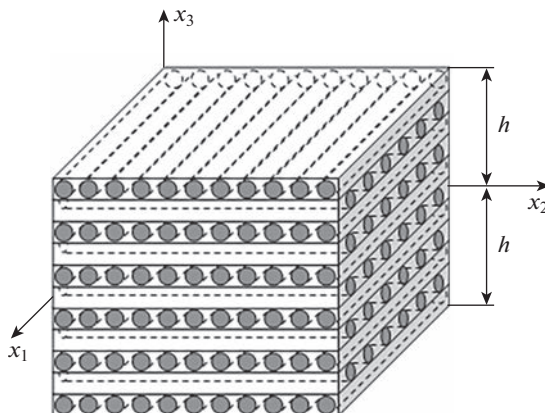


Рис. 2. Элемент пластины с ортогональной плоско-перекрестной структурой армирования.

стема координат x_i так, что плоскость Ox_1x_2 ($x_3 = 0$) – срединная ($|x_3| \leq h$). Конструкция многонправленно армирована (возможно, и пространственно [33]) N семействами волокон. Структура армирования в направлении Ox_3 является однородной.

Для учета возможного ослабленного сопротивления КМ-пластины поперечному сдвигу и моделирования волновых процессов в ней используем теорию изгиба Амбарцумяна [1, 22, 23, 31]. Предполагаем, что внешние касательные силы на лицевых поверхностях конструкции ($|x_3| = h$) не учитываются и в случае пространственной структуры армирования выполняются требования, изложенные в замечании в [23]. (Для плоско-перекрестной структуры, изображенной на рис. 2, эти требования заведомо выполняются.) При этих условиях усредненные деформации композиции ϵ_{ij} и перемещения точек пластины U_i определяются так (геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана):

$$\begin{aligned} \epsilon_{IJ}(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{2}(\partial_I u_J + \partial_J u_I) - x_3 \partial_I \partial_J w + \frac{x_3}{3h^2}(3h^2 - x_3^2)(\partial_I \epsilon_{I3}^0 + \partial_J \epsilon_{I3}^0) + \frac{1}{2} \partial_I w \partial_J w \\ \epsilon_{I3}(t, \mathbf{r}) &= \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \epsilon_{I3}^0(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad I, J = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} U_I(t, \mathbf{r}) &= u_I(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_I w + \frac{2x_3}{3h^2}(3h^2 - x_3^2) \epsilon_{I3}^0 \\ U_3(t, \mathbf{r}) &= w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad I = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

где w – прогиб; u_I – тангенциальные перемещения точек отсчетной плоскости ($x_3 = 0$) в направлениях x_i ; ϵ_{I3}^0 – деформации поперечных сдвигов в точках этой плоскости; ∂_I – оператор частного дифференцирования по координате x_i ; Ω – область, занимаемая пластиной в плане. В соотношениях (3.1) и (3.2) неизвестны двумерные функции u_I , w и ϵ_{I3}^0 ($I = 1, 2$).

В настоящей работе рассматривается динамическое деформирование КМ-пластины как гибкой тонкостенной системы, поэтому нормальное напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ с приемлемой для инженерных приложений точностью можно линейно аппроксимировать по x_3 [2]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) \equiv \sigma_3(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ – известные из силовых граничных условий напряжения на верхней (+) и нижней (–) лицевых плоскостях.

Матричное определяющее соотношение (2.15) состоит из шести алгебраических уравнений. Согласно условиям соответствия, аналогичным (2.7), из третьего равенства этой системы в текущий момент времени t_n можем выразить скорость линейной деформации композиции в поперечном направлении

$$\dot{\epsilon}_{33} \equiv \dot{\epsilon}_3 = \left(b_{33} \right)^{-1} \left(\dot{\sigma}_3 - p_3 - \sum_{i=1}^6 (1 - \delta_{3i}) b_{3i} \dot{\epsilon}_i \right) \quad (3.4)$$

где b_{3i} , p_3 ($i = \overline{1, 6}$) – элементы матрицы \mathbf{B} и вектор-столбца \mathbf{p} в уравнении (2.15); скорость $\dot{\sigma}_3$ получается путем дифференцирования по t выражения (3.3). Скорости $\dot{\epsilon}_i$ в правой части равенства (3.4) определяются за счет дифференцирования по времени соотношений (3.1), т.е. характеризуются функциями w , \dot{w} , \dot{u}_I и $\dot{\epsilon}_{I3}^0$ ($I = 1, 2$).

К кинематическим соотношениям (3.1), (3.2) нужно присоединить двумерные уравнения движения гибкой пластины (см. (3.5) в [22]) и соответствующие граничные и начальные условия (см. (3.8)–(3.10) в [22]).

Как и в [23], температуру Θ по толщине конструкции аппроксимируем полиномом порядка L :

$$\Theta(t, \mathbf{r}) - \Theta^0 = \sum_{l=0}^L \Theta_l(t, \mathbf{x}) x_3^l, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0 \quad (3.5)$$

где Θ_l ($0 \leq l \leq L$) – искомые двумерные функции.

Для замыкания системы разрешающих уравнений неизотермического вязкоупруго-вязкопластического изгибного деформирования КМ-пластины к соотношениям (3.5) необходимо присоединить двумерные (относительно Θ_l , $0 \leq l \leq L$) уравнения теплопроводности (см. (4.11), (4.13) и (4.18) в [23]) и соответствующие им граничные и начальные условия (см. (4.20) и (4.22) в [23]).

4. Метод расчета. Как и в работах [22, 23], для интегрирования сформулированной нелинейной задачи используем явные схемы шагов по времени, определяя неизвестные функции в дискретные моменты времени t_n ($n = 0, 1, 2, \dots$). При этом предполагаем, что при $t = t_m$ кроме функций (2.10) уже известны и значения следующих величин:

$$\begin{aligned} u_I(\mathbf{x}) &\equiv u_I(t_m, \mathbf{x}), & w(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}) \\ \gamma_I(\mathbf{x}) &\equiv \gamma_I(t_m, \mathbf{x}), & \sigma_{ij}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}) \\ \sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), & \sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_n, \mathbf{r}), & \chi_k(\mathbf{r}) &\equiv \chi_k(t_n, \mathbf{r}) \\
 \dot{p}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \dot{p}_{ij}^{(k)}(t_n, \mathbf{r}), & U^{(r)}(\mathbf{x}) &\equiv U^{(r)}(t_n, \mathbf{x}) \\
 q_i(\mathbf{r}) &\equiv q_i(t_n, \mathbf{r}), & \Theta_l(\mathbf{x}) &\equiv \Theta_l(t_n, \mathbf{x}) \\
 q_\infty^{(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv q_\infty^{(\pm)}(t_n, \mathbf{x}), & I &= 1, 2, \quad i, j = \overline{1, 3} \\
 0 \leq r &\leq L-2, \quad 0 \leq l \leq L, & m &= n-1, n \\
 0 \leq k &\leq N, \quad \mathbf{x} \in \Omega, & |x_3| &\leq h
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

где

$$\gamma_I(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{8}{5} \varepsilon_{I3}^0 - \partial_I w, \quad U^{(r)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U(t, \mathbf{r}) x_3^r dx_3, \quad I = 1, 2, \quad 0 \leq r \leq L-2 \tag{4.2}$$

γ_I – введенные для удобства двумерные функции; U – удельная внутренняя энергия КМ; q_i – компоненты вектора теплового потока в КМ; $q_\infty^{(\pm)}$ – заданные тепловые потоки через нижнюю (–) и верхнюю (+) лицевые плоскости.

Производные по времени в механической составляющей рассматриваемой неизо-термической вязкоупруго-вязкопластической задачи (за исключением второго соотношения (2.11)) аппроксимируем центральными конечными разностями на трехточечном шаблоне $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$, что позволяет разработать явную численную схему. После замены в уравнениях движения гибкой КМ-пластины вторых производных по времени от кинематических переменных w, u_I и γ_I их конечно-разностными аналогами при учете выражения (3.3), первого соотношения (4.2) и обозначений, аналогичных (4.1), получим [22, 23]

$$\begin{aligned}
 \frac{2h\rho}{\Delta^2} \left(w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \sum_{S=1}^2 \partial_S \left(F_{S3} + \sum_{J=1}^2 F_{SJ} \partial_J w \right) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \\
 \frac{2h\rho}{\Delta^2} \left(u_I^{n+1} - 2u_I^n + u_I^{n-1} \right) &= \sum_{J=1}^2 \partial_J \left(F_{IJ} - F_{J3} \partial_J w \right) - \left(\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \right) \partial_I w \\
 \frac{2h^3\rho}{3\Delta^2} \left(\gamma_I^{n+1} - 2\gamma_I^n + \gamma_I^{n-1} \right) &= \sum_{J=1}^2 \partial_J M_{IJ} - F_{I3}, \quad I = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad n = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

где

$$\begin{aligned}
 \rho &\equiv \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^N \rho_k \omega_k, & F_{IJ} &\equiv \int_{-h}^h \sigma_{IJ} dx_3 \\
 F_{I3} &\equiv \int_{-h}^h \sigma_{I3} dx_3, & M_{IJ} &\equiv \int_{-h}^h \sigma_{IJ} x_3 dx_3, \quad I, J = 1, 2
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

ρ_0, ρ_k – объемные плотности материалов связующего и волокон k -го семейства. Внешние массовые силы в равенствах (4.3) не учитываются.

Используя предположения (4.1), по формулам (4.4) в текущий момент времени t_n можно определить все силовые факторы F_{IJ}, F_{I3} и M_{IJ} , входящие в правые части уравнений (4.3). Поэтому при учете необходимых граничных условий [22] из уравнений (4.3) по явной схеме можно вычислить значения неизвестных функций w, u_I и γ_I в

момент времени t_{n+1} . Затем по формулам (3.1) при учете первого равенства (4.2) определяем усредненные деформации композиции ε_{ij}^{n+1} . На основании равенств (3.1), (4.1) при $t = t_{n-1}$ деформации ε_{ij}^{n-1} уже известны, поэтому, используя численное дифференцирование по времени (аналогичное (2.21)), и учитывая соотношение (3.4), в данный момент времени t_n можем вычислить и скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^n$ в каждой точке КМ-конструкции. После этого по формулам (2.20) с учетом соответствий (2.7) получаем скорости деформаций фаз композиции $\dot{\varepsilon}_k^n$, а по формулам (2.13) с учетом (2.14) – скорости напряжений $\dot{\sigma}_k^n$ в тех же компонентах. Далее, из равенств (2.21) и

$$\frac{1}{2\Delta} \left(\sigma_{ij}^{(k)n+1} - \sigma_{ij}^{(k)n-1} \right) = \dot{\sigma}_{ij}^{(k)n}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N$$

в которых правые части уже известны, при учете предположений (4.1) определяем напряжения $\sigma_{ij}^{(k)n+1}$, полные $\varepsilon_{ij}^{(k)n+1}$ и упругие $e_{ij}^{(k)n+1}$ деформации в k -м компоненте композиции, а по формулам (2.22) и (2.23) при учете (2.24) – пластические деформации $p_{ij}^{(k)n+1}$ и параметр Одвишта χ_k^{n+1} в том же компоненте в следующий момент времени t_{n+1} . Усредняя по правилу смеси (аналогично первой формуле (4.4)) известные напряжения $\sigma_{ij}^{(k)n+1}$, получим напряжения в композиции σ_{ij}^{n+1} ($i, j = \overline{1, 3}$) при $t = t_{n+1}$.

Согласно формулам (2.9) при учете (2.11), в рассматриваемый момент времени t_n параметр переключения c_k зависит от скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_k$, поэтому определяющее уравнение (2.15) при $t = t_n$ нужно уточнять, используя итерации метода переменных параметров упругости [30]. Предварительно выполненные расчеты показали, что для достижения приемлемой в инженерных приложениях точности на каждом шаге по времени вполне достаточно использовать две таких итерации.

Для интегрирования теплофизической составляющей исследуемой задачи используем явную схему, но построенную на двухточечном шаблоне по времени $\{t_n, t_{n+1}\}$. При этом двумерные уравнения теплопроводности с учетом (3.5), (4.2) и обозначений, аналогичных (4.1), примут вид [23]:

$$\frac{\rho}{\Delta} \left(U^{(m)n+1} - U^{(m)n} \right) = -\partial_1 Q_1^{(m)n} - \partial_2 Q_2^{(m)n} - \overline{Q_3^{(m)n}} + W^{(m)n} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \leq m \leq L-2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$-\sum_{l=0}^L (-1)^l h^{l-1} (l\lambda_{33}^{(-)} + h\alpha^{(-)}) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(-)} (\Theta_\infty^{(-)} - \Theta^0) + q_\infty^{(-)}(t, \mathbf{x}) \quad (4.6)$$

$$\sum_{l=0}^L h^{l-1} (l\lambda_{33}^{(+)} + h\alpha^{(+)}) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(+)} (\Theta_\infty^{(+)} - \Theta^0) - q_\infty^{(+)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0$$

$$\begin{aligned}
 & C_0 \sum_{i=0}^L H(i+m) \Theta_i + \frac{C_1}{2} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L H(i+j+m) \Theta_i \Theta_j + \\
 & + \frac{C_2}{3} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L \sum_{l=0}^L H(i+j+l+m) \Theta_i \Theta_j \Theta_l = U^{(m)}(t, \mathbf{x}) \quad (4.7) \\
 & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq L-2
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 H(s) & \equiv \frac{h^{s+1}}{s+1} [1 - (-1)^{s+1}], \quad Q_i^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \\
 & \equiv \int_{-h}^h q_i(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad \bar{Q}_3^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \\
 & \equiv \int_{-h}^h \partial_3 q_3(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 = h^m [q_3^{(+)} - (-1)^m q_3^{(-)}] - m Q_3^{(m-1)}(t, \mathbf{x}) \quad (4.8) \\
 W^{(m)}(t, \mathbf{x}) & \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} x_3^m dx_3
 \end{aligned}$$

$$C_l(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^N c_l^{(k)} \rho_k \omega_k(\mathbf{x}) \quad (l = 0, 1, 2), \quad \lambda_{33}^{(\pm)} \equiv \lambda_{33}|_{\Theta=\Theta(t, \mathbf{x}, \pm h)}, \quad q_3^{(\pm)} \equiv q_\infty^{(\pm)}$$

λ_{33} – коэффициент теплопроводности КМ в направлении Ox_3 , который вычисляется по структурным соотношениям из [32] (см. (2.2) в [23]); $\alpha^{(\pm)}$ – коэффициент теплоотдачи со стороны нижней (–) и верхней (+) лицевых поверхностей; $\Theta_\infty^{(\pm)}$ – температуры окружающей среды со стороны тех же плоскостей; $c_l^{(k)}$ – коэффициент разложения удельной теплоемкости k -го материала композиции $c_k(\Theta - \Theta^0)$ по формуле (в случае термочувствительности):

$$c_k(\Theta - \Theta^0) = c_0^{(k)} + c_1^{(k)}(\Theta - \Theta^0) + c_2^{(k)}(\Theta - \Theta^0)^2, \quad 0 \leq k \leq N \quad (4.9)$$

Соотношения (4.6) – тепловые граничные условия, заданные на лицевых поверхностях КМ-конструкции и преобразованные с учетом выражения (3.5). Уравнения (4.7) определяют связь между двумерными величинами $U^{(m)}$ (см. (4.2)) и коэффициентами разложения температуры (3.5) при выполнении равенств (4.9). Соотношения (4.6) и (4.7) выполняются в каждый момент времени t .

Используя формулы (4.8) и предположения (4.1), в данный момент времени t_n можем вычислить правые части в уравнениях (4.5), из которых при учете соответствующих начальных и граничных тепловых условий, заданных на контуре Γ , ограничиваю-

щем область Ω , по явной схеме определяем значения функций $U^{(m)}$ в последующий момент времени t_{n+1} . Затем из уравнения (4.6) и (4.7) с учетом (4.8) вычисляем коэф-

фициенты разложения температуры $\Theta_l(\mathbf{x})$ ($0 \leq l \leq L$) в формуле (3.5). Далее, с помощью закона теплопроводности Фурье для композиции пластины (см. (3.1)–(3.3) в

[23]) при уже известной из (3.5) температуре $\Theta(\mathbf{r})$ определяем компоненты вектора

теплового потока $q_i(\mathbf{r})$ ($i = \overline{1, 3}$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $|x_3| \leq h$), после чего все функции, указанные в

(4.1), становятся известными при $t = t_{n+1}$ и можно повторить описанную выше процедуру для построения решения на следующем шаге по времени.

При учете термочувствительности компонентов композиции система уравнений (4.6) и (4.7), в которой правые части при $t = t_{n+1}$ уже известны, нелинейна. Линеаризовать ее можно, применяя метод переменных теплофизических параметров, формально аналогичный методу переменных параметров упругости [30]. Как показали расчеты, для достижения приемлемой в приложениях точности достаточно применять две–три итерации такого процесса.

Анализ структуры левых частей равенств (4.3) и (4.5) показывает, что для начала проведения расчетов по разработанной схеме следует предварительно определить

функции w , u_I , γ_I ($m = 0, 1$) и $U^{(l)}$. При $t = t_0$ значения функций w , u_I , γ_I и $U^{(l)}$ ($0 \leq l \leq L - 2$) получаются из начальных условий (см. (3.10) в [22] и (4.22) в [23]). Если

в момент времени t_0 внешние нагрузки отсутствуют ($\sigma_{33}^{(+)} = \sigma_{33}^{(-)} \equiv 0$) и КМ-конструкция покоится в естественном состоянии, то, используя начальные условия и уравнения движения, по формуле Тейлора получим $w \approx u_I \approx 0$, $\gamma_I \approx 0$ ($I = 1, 2$) с точностью Δ^3 [23].

После замены в равенствах (4.3), (4.5) производных $\partial_I(\bullet)$ их конечно-разностными аналогами и присоединения к этим соотношениям необходимых граничных условий (см. (3.8), (3.9) в [22] и (4.20) в [23]) окончательно получаем явную численную схему для интегрирования нелинейной связанной начально-краевой задачи неизоэтермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования гибкой армированной пластины. В случае неканонической формы области Ω , занимаемой конструкцией в плане, дискретизацию по пространственным переменным x_1 и x_2 можно проводить с использованием вариационно-разностного подхода, предложенного в [5]. В работе [23] показано, что шаг по времени Δ в уравнениях (4.3) и (4.5) следует выбирать, исходя из критерия устойчивости Куранта для уравнений (4.3) (см. анализ соотношений (6.3) в [23]).

5. Обсуждение результатов расчетов. Исследуем неизоэтермическое вязкоупруго-вязкопластическое деформирование относительно тонкой прямоугольной пластины (Ω : $|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$; $a = 3b$, $b = 50$ см, $2h = 2$ см; $2h/2b = 1/50$), которая по всей кромке жестко закреплена ($w = u_I = 0$, $\gamma_I = 0$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, $t \geq t_0$) и до момента времени $t = t_0 = 0$ покоится ($w = u_I \equiv 0$, $\gamma_I \equiv 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $t = t_0$ $I = 1, 2$) при температуре естественного состояния $\Theta = \Theta^0 = 20^\circ\text{C}$ ($\mathbf{x} \in \Omega$, $|x_3| \leq h$, $t = t_0$). Конструкция нагружается со стороны нижней лицевой плоскости давлением p , вызванным воздушной взрывной волной [27]:

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max} \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max} \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\alpha = -\ln(0.01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} < t_{\max}$$

где смысл параметров p_{\max} , t_{\max} , t_{\min} и α очевиден и описан в [22]. На основании экспериментальных данных [27] примем $t_{\max} = 0.1$ мс, $t_{\min} = 2$ мс и $p_{\max} = 3$ МПа.

На лицевых плоскостях ($x_3 = \pm h$) теплообмен с окружающей средой реализуется в условиях естественной конвекции ($q_\infty^{(\pm)} \equiv 0$, $\alpha^{(\pm)} = 30$ Вт/(м² · К) [34]) при температуре воздуха $\Theta_\infty^{(\pm)} = \Theta^0$ (см. соотношения (4.6) и (4.8)). На торцевых поверхностях кон-

Таблица 1. Физико-механические характеристики компонентов композиции [25, 35]

Характеристика материала	Эпоксидная смола		Стекловолокно	
	$\Theta = 20^\circ\text{C}$	$\Theta = 40^\circ\text{C}$	$\Theta = 20^\circ\text{C}$	$\Theta = 80^\circ\text{C}$
$\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-4} \text{ c}^{-1}$				
ρ , кг/м ³	1210.0	1208.0	2520.0	2519.6
E , ГПа	2.8	2.3	86.8	86.3
N	0.330	0.333	0.250	0.254
η , МПа · с	340	300	1250	1200
σ_s , МПа	20	18	4500	4400
E_s , ГПа	1.114	0.783	6.230	5.168
λ , Вт/(м К)	0.243	0.240	0.89	0.86
$\alpha \times 10^6$, К ⁻¹	68.1	70.3	2.5	2.6
c , кДж/(кг К)	1.54	1.60	0.800	0.839
$\dot{\epsilon} = 104.0 \text{ c}^{-1}$				
σ_s , МПа	22.0	19.5	4600	4550
E_s , ГПа	1.238	0.853	6.314	5.458

струкции заданы тепловые граничные условия I рода, и температура поддерживается равной Θ^0 .

Конструкция изготовлена из эпоксисвязующего [35] и усилена стекловолокнами [25]. Пластическое поведение компонентов композиции при активном нагружении и постоянстве температуры Θ и скорости деформации $\dot{\epsilon}$ описывается зависимостью

$$\sigma = \text{sign}(\epsilon_p) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} \epsilon_p, \quad 0 \leq k \leq N \quad (5.2)$$

где σ , ϵ_p – осевое напряжение и пластическая составляющая соответствующей линейной деформации ϵ ; $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\dot{\epsilon}, \Theta)$ – модуль упрочнения k -го материала композиции; $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\dot{\epsilon}, \Theta)$ – условный предел текучести того же материала. Физико-механические характеристики компонентов композиции представлены в табл. 1. Объемная вязкость материалов не учитывалась: $\mu_k \rightarrow \infty$, $0 \leq k \leq N$ (см. (2.2) и (2.9)). Во второй части табл. 1 (для $\dot{\epsilon} = 104 \text{ c}^{-1}$) приведены только те значения характеристик материалов, которые отличаются от данных, представленных в первой части (при $\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-4} \text{ c}^{-1}$). Зависимости всех физико-механических характеристик от температуры Θ и скорости деформирования $\dot{\epsilon}$ в расчетах аппроксимировались линейно по данным, приведенным в табл. 1.

При проведении расчетов по пространственным переменным x_1 и x_2 вводилась равномерная сетка с шагом $\Delta x_1 = \Delta x_2 = b/50 = 1 \text{ см}$, а шаг по времени $\Delta t = 1 \text{ мкс}$. При этом необходимое условие устойчивости численной схемы (критерий Куранта) с запасом выполняется для каждого из компонентов композиции, а значит и для композиции в целом.

Конструкция армирована двумя ($N = 2$) семействами волокон, которые уложены в направлениях Ox_1 и Ox_2 (рис. 2) с плотностями $\omega_1 = 0.1$ и $\omega_2 = 0.3$ соответственно. Согласно рис. 1, в этом случае в формулах (2.19) следует принять $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi/2$.

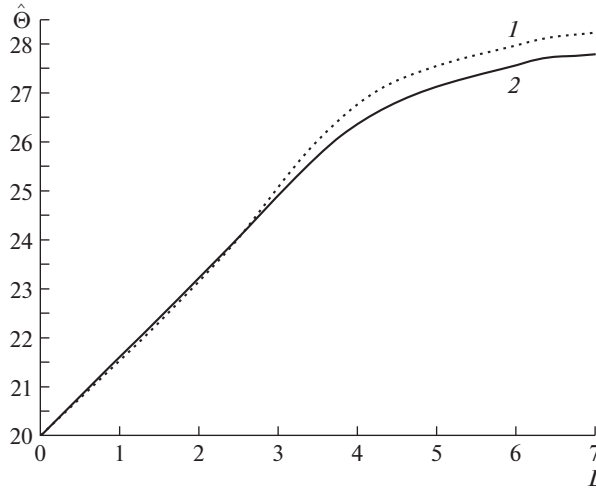


Рис. 3. Зависимости наибольшего значения температуры в КМ-пластине от порядка ее аппроксимирующего полинома в поперечном направлении, рассчитанные по разным теориям.

Для того чтобы определить порядок полинома L в разложении (3.5), при котором аппроксимация температуры Θ имеет приемлемую точность, исследуем зависимость от L наибольшего значения $\hat{\Theta}(L) = \max_{t,r} \Theta(t, \mathbf{r}; L)$, $|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$ и $|x_3| \leq h$ (расчетный интервал времени $0 \leq t \leq 0.5$ с). На рис. 3 представлены зависимости $\hat{\Theta}(L)$ (в $^{\circ}\text{C}$), полученные при учете (кривая 1) и неучете (кривая 2) чувствительности пластических свойств материалов композиции к скорости их деформирования. В последнем случае (см. (2.9) при $\tau_H^{(k)} \equiv 0$, $0 \leq k \leq N$) расчет проводился по данным табл. 1, которые соответствуют скорости деформации $\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$.

На рис. 3 значению $L = 0$ соответствует случай, когда тепловой отклик в КМ-конструкции вообще не учитывается, поэтому условно принято $\hat{\Theta}(0) = \Theta^0 = 20^{\circ}\text{C}$. Поведение обеих кривых показывает, что приращение величины $\hat{\Theta}$ при переходе от значения $L = 6$ к значению $L = 7$ пренебрежимо мало с практической точки зрения. При значениях $L \geq 8$ система линеаризованных уравнений (4.6) и (4.7) при учете (4.8), из которой в данный момент времени вычисляются коэффициенты полиномиального представления температуры (3.5), становится плохо обусловленной, поэтому зависимость $\hat{\Theta}(L)$ получается расходящейся. В силу этого обстоятельства соответствующие участки кривых при $L \geq 8$ на рис. 3 не изображены.

В квазистатических расчетах традиционно принято аппроксимировать температуру по толщине тонкостенной конструкции полиномом первого ($L = 1$) или второго ($L = 2$) порядка [1, 5, 10, 11]. Однако сопоставление ординат точек на обеих кривых рис. 3 при значениях $L = 1$ или $L = 2$ и при $L = 7$ свидетельствует о том, что при динамическом упругопластическом деформировании гибких КМ-пластин линейная или квадратичная аппроксимация температуры по их толщине приводит к значительному занижению наибольших значений расчетной температуры. Для адекватного же расчета температурного поля в случаях такого нагружения КМ-конструкции температуру по ее толщине целесообразно аппроксимировать полиномом 7-го порядка (см. (3.5) при $L = 7$).

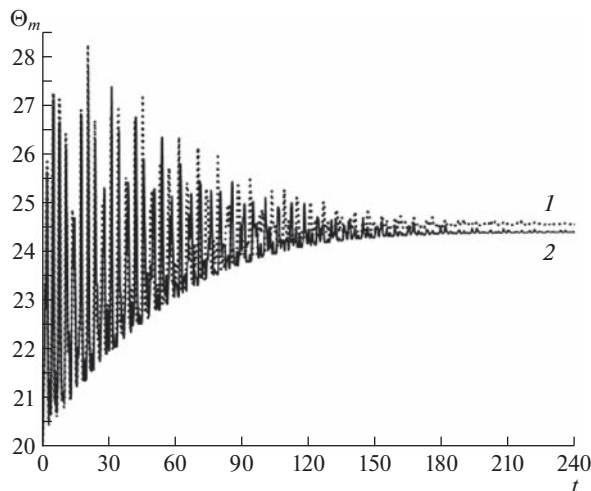


Рис. 4. Зависимости от времени максимальных значений температуры в КМ-пластине, рассчитанные с использованием разных теорий неупругого деформирования компонентов ее композиции.

На рис. 4 изображены зависимости осцилляций наибольших значений температуры Θ_m (в $^{\circ}\text{C}$) в КМ-пластине от времени t (в мс): $\Theta_m(t) = \max_{\mathbf{r}} \Theta(t, \mathbf{r})$, $|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$ и $|x_3| \leq h$. При этом, согласно полученным выше результатам, в формуле (3.5) было принято $L = 7$. Кривые 1 и 2 на рис. 4 рассчитаны при тех же условиях, что и аналогичные кривые на рис. 3. Поведение кривых на рис. 4 показывает, что к моменту времени $t \approx 220$ мс осцилляции функции $\Theta_m(t)$ в обоих расчетах практически прекращаются. При этом наибольшее значение температуры $\hat{\Theta} = \max_{t \geq 0} \Theta_m(t) = \Theta_m(28.25 \times 10^{-3}) \approx 28^{\circ}\text{C}$ в обоих случаях превышает температуру естественного состояния Θ^0 примерно на 8°C . К моменту же времени $t = 220$ мс зависимости $\Theta_m(t)$ стабилизируются и имеют значения, близкие к 24.4°C . Как видно из сравнения кривых 1 и 2, при учете зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования (кривая 1) значения $\hat{\Theta}$ и $\Theta_m(t)$ при $t \geq 220$ мс получаются несколько большими, чем в случае расчета, не учитывающем эту зависимость (кривая 2). Об этом же свидетельствует и поведение кривых 1 и 2 на рис. 3.

На рис. 5 изображены зависимости остаточных прогибов w (в мм) от координаты x_2 (в м), определенные в центральном поперечном сечении ($x_1 = 0$) при $t = 500$ мс, когда КМ-пластина практически перестала колебаться. Кривые 1 и 2 на рис. 5 получены при тех же условиях, что и кривые на рис. 3 и 4. Штриховые кривые 1' и 2' на рис. 5 приведены для сравнения и рассчитаны при тех же данных, что и сплошные кривые 1 и 2, но без учета теплового отклика (т.е. кривая 1' определена по теории, разработанной в [22]). Поведение кривых 1 и 1' свидетельствует о том, что при учете чувствительности пластических свойств материалов композиции к скорости их деформирования остаточный прогиб КМ-конструкции имеет традиционный \cap -образный вид. Поведение же кривых 2 и 2' показывает, что при неучете указанной зависимости остаточный прогиб имеет М-образный вид, т.е. согласно таким расчетам КМ-пластина после динамического пластического деформирования приобретает гофрированную остаточную

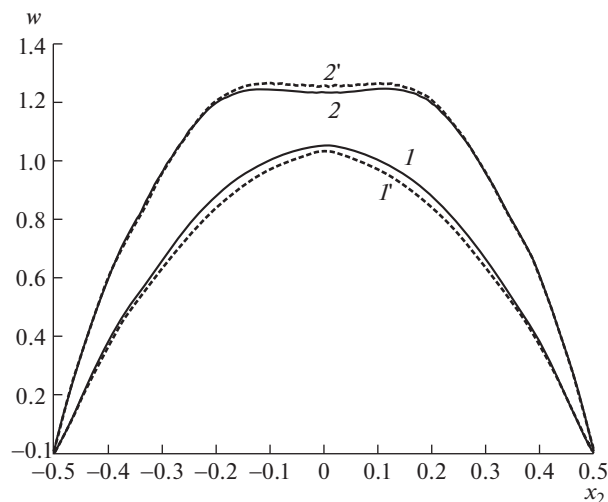


Рис. 5. Зависимости остаточного прогиба в центральном сечении прямоугольной удлиненной КМ-пластины, рассчитанные по разным теориям с учетом и без учета теплового отклика.

форму со складками, ориентированными в продольном направлении Ox_1 . Следовательно, расчеты, проводимые без учета чувствительности пластических свойств компонентов композиции к скорости их деформирования, могут приводить к качественно неверным представлениям о форме остаточных прогибов КМ-пластины (даже в тех случаях, когда такая зависимость является весьма слабой, как в рассматриваемом случае стеклопластиковой конструкции).

Сравнение максимальных значений ординат точек на кривых 1 и 2 на рис. 5 демонстрирует, что наибольший остаточный прогиб, вычисленный без учета чувствительности пластических свойств материалов композиции к скорости их деформирования (кривая 2), на 17% больше, чем в случае учета этой чувствительности (кривая 1). Если тепловой отклик КМ-конструкции не принимается во внимание, то такое различие в величинах максимальных остаточных прогибов составляет 22% (см. кривые 1' и 2').

Сравнение же наибольших значений ординат точек на кривых 1 и 1' (при $x_2 = 0$) показывает, что в случае неучета теплового отклика (кривая 1') максимальный остаточный прогиб КМ-пластины всего на 1.9% меньше, чем в неизотермическом случае (кривая 1). Для кривых же 2 и 2' это различие, наоборот, на 2.4% больше. Очевидно: такое малое различие максимальных значений остаточных прогибов, рассчитанных с учетом и без учета температурных полей в КМ-пластине, объясняется тем, что рассматриваемая стеклопластиковая конструкция в процессе осцилляций нагревается незначительно как при учете, так и неучете зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования (см. рис. 4). Однако несмотря на это, неучет теплового отклика в динамически нагружаемой тонкостенной конструкции может привести к существенному искажению полей остаточных деформаций компонентов композиции.

Так, на рис. 6 изображены осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций $\varepsilon_*^{(k)}$ ($\varepsilon_m^{(k)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \varepsilon_*^{(k)}(t, \mathbf{r})$) материалов композиции рассматриваемой пластины от времени t (в мс) в окрестности начального момента (рис. 6,а) и в окрестности $t = 500$ мс (рис. 6,б). Номера кривых на рис. 6 соответствуют номеру k -го компонента

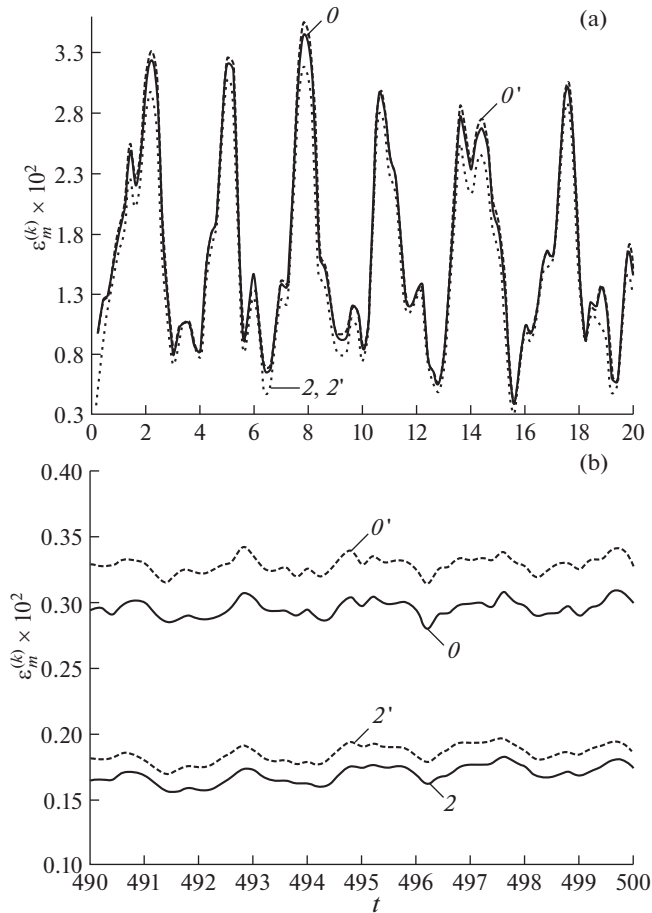


Рис. 6. Зависимости от времени наибольших значений интенсивности деформаций материалов композиции пластины, рассчитанные по вязкоупруго-вязкопластической теории в окрестности начального момента времени (а) и при $t \approx 500$ мс (б) с учетом и без учета теплового отклика.

композиции: $k = 0$ – связующая матрица, $k = 2$ – волокна второго семейства, уложенные в направлении Ox_2 и испытывающие наибольшее деформирование. Штрих у номера кривой имеет тот же смысл, что и на рис. 5. Кривые на рис. 6 получены при учете зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования. Для сравнения аналогичные зависимости изображены и на рис. 7, но они получены без учета указанной зависимости. Кривые 2, 2' на рис. 6,а и рис. 7 визуально практически не различаются. Кривые 0' и 2' на рис. 6 рассчитаны по теории, разработанной в [22].

Сравнение кривых 0 и 0' на рис. 6,а показывает, что максимальное значение $\epsilon_{\max}^{(0)} = \max_{t \geq 0} \epsilon_m^{(0)}(t) = \epsilon_m^{(0)}(7.8 \times 10^{-3})$ в связующем материале при неучете теплового отклика КМ-конструкции (кривая 0') всего на 2.9% больше, чем в случае учета температурного поля в пластине (кривая 0). Для арматуры второго семейства это различие еще меньше (см. кривые 2 и 2'). Однако сравнение кривых 0, 0' и 2, 2' на рис. 6,б свидетель-

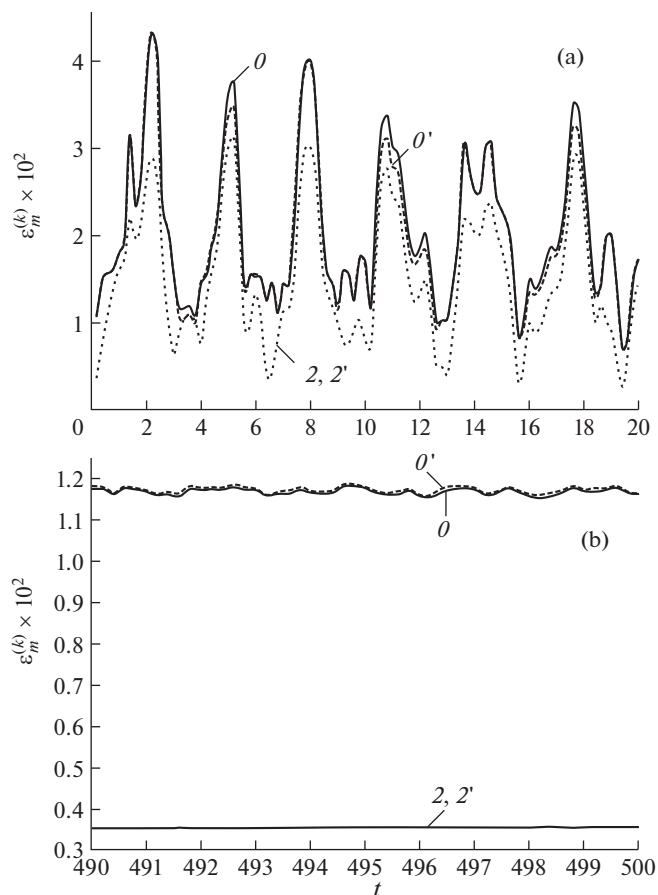


Рис. 7. Зависимости от времени наибольших значений интенсивности деформаций материалов композиции пластины, рассчитанные по вязкоупругопластической теории в окрестности начального момента времени (а) и при $t \approx 500$ мс (б) с учетом и без учета теплового отклика.

стует о том, что в момент времени $t = 500$ мс, когда конструкция практически перестала осциллировать, значение $\epsilon_m^{(0)}$, полученное без учета теплового воздействия (кривая 0), уже на 9.7% больше такой же величины, рассчитанной в неизотермическом случае (кривая $0'$). Для кривых же 2 и $2'$ на рис. 6,б аналогичные значения $\epsilon_m^{(2)}$, определенные при $t = 500$ мс, различаются еще больше – на 10.9%. Таким образом, в случае учета чувствительности пластических свойств компонентов композиции к скорости их деформирования расчет, выполненный без учета теплового отклика КМ-конструкции (т.е. по теории, разработанной в [22]), может привести к существенному искажению остаточных деформаций материалов композиции.

Аналогичное сравнение кривых 0 , $0'$ и 2 , $2'$ на рис. 7 демонстрирует, что в случае неучета зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования максимальные значения интенсивности деформаций (см. рис. 7,а) и остаточное деформированное состояние (см. рис. 7,б) компонентов композиции можно вполне обоснованно определять без учета теплового отклика в КМ-конструкции.

Однако интенсивности остаточных деформаций компонентов композиции при таких расчетах оказываются в несколько раз большими, чем в вязкоупруго-вязкопластическом случае (ср. ординаты точек на кривых с одинаковыми номерами на рис. 6,b и 7,b).

6. Заключение. Разработанная модель неизоотермического вязкоупруго-вязкопластического поведения многонаправленно армированных пластин позволяет рассчитывать остаточные перемещения и остаточное НДС в компонентах композиции после интенсивного динамического нагружения при учете теплового отклика КМ-конструкций и зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования.

Анализ вязкоупругопластического и вязкоупруго-вязкопластического динамического поведения стеклопластиковой пластины (компоненты композиции которой слабо чувствительны к скорости их деформирования) при учете и без учета теплового отклика в ней показал, что в случае учета зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования необходимо проводить неизоотермический расчет динамики таких КМ-конструкций даже при отсутствии внешних источников тепла немеханического происхождения. Если вязкоупруго-вязкопластический расчет проводить без учета теплового отклика КМ-пластины, то остаточное деформированное состояние компонентов композиции может существенно (на десятки процентов) отличаться от случая неизоотермического расчета. Если же чувствительностью материалов композиции к скорости их деформирования можно пренебречь (вязкоупругопластичность), то при отсутствии внешних источников тепла немеханического происхождения динамический расчет тонкостенной КМ-пластины можно проводить без учета теплового отклика в ней, так как нагрев такой конструкции незначителен (порядка 4–8°C).

Вязкоупругопластический расчет динамики относительно тонкой стеклопластиковой удлиненной пластины как в изотермическом, так и неизоотермическом случаях предсказывает, что после затухания осцилляций такая КМ-конструкция приобретает гофрированную остаточную форму с ориентацией складок в продольном направлении. Аналогичные же расчеты, проведенные по вязкоупруго-вязкопластической модели показывают, что как при учете, так и неучете теплового отклика КМ-конструкции в остаточном состоянии гофрированная форма не образуется. Таким образом, расчеты, выполненные по вязкоупругопластической модели деформирования материалов композиции, приводят не только к количественно, но и качественно неверным представлениям об остаточном состоянии КМ-конструкции после ее интенсивного динамического нагружения.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030900260-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987. 360 с.
2. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
3. Bannister M. Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective // Compos. Part A Appl. 2001. V. 32. № 7. P. 901–910.
[https://doi.org/10.1016/S1359-835X\(01\)00008-2](https://doi.org/10.1016/S1359-835X(01)00008-2)
4. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // Compos. Struct. 2001. V. 53. № 1. P. 21–42.
[https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(00\)00175-6](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(00)00175-6)
5. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н. Новгород: ННГУ, 2002. 391 с.

6. Куликов Г.М. Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 2. С. 33–42.
7. Soutis C. Fibre reinforced composites in aircraft construction // Prog. Aerosp. Sci. 2005. V. 41. № 2. P. 143–151.
<https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2005.02.004>
8. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. N.Y.: CRC Press, 2004. 831 p.
9. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // Compos. Struct. 2010. V. 93. P. 14–31.
10. Vasiliev V.V., Morozov E. Advanced mechanics of composite materials and structural elements. Amsterdam: Elsevier, 2013. 412 p.
11. Андреев А. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. Saarbrucken (Deutschland): Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 с.
12. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P.S. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass fiber reinforced plastic composites // Front. Mech. Eng. 2013. V. 8. P. 187–200.
<https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x>
13. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // Int. J. Non Linear Mech. 2011. V. 46. № 5. P. 807–817.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>
14. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андришин В.А. Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: Физматлит, 2014. 407 с.
15. Moriniere F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review // Int. J. Impact Eng. 2014. V. 67. P. 27–38.
<https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004>
16. Gibson R.F. Principles of composite material mechanics. Taylor & Francis Group, LLC, 2015. 815 p.
17. Димитриенко Ю.И. Механика композитных конструкций при высоких температурах. М.: Физматлит, 2018. 447 с.
18. Vena P., Gastaldi D., Contro R. Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites // Int. J. Plast. 2008. V. 24. № 3. P. 483–508.
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.07.001>
19. Leu S.-Y., Hsu H.-C. Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders // Int. J. Mech. Sci. 2010. V. 52. № 12. P. 1579–1587.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.07.006>
20. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle // Int. J. Plast. 2012. V. 36. P. 86–112.
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.010>
21. Ахундов В.М. Инкрементальная каркасная теория сред волокнистого строения при больших упругих и пластических деформациях // Мех. композ. материалов. 2015. Т. 51. № 3. С. 539–558.
22. Янковский А.П. Моделирование вязкоупруго-вязкопластического поведения гибких армированных пластин // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 5. С. 27–44.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921040140>
23. Янковский А.П. Моделирование термоупруговязкопластического деформирования гибких армированных пластин // ПММ. 2022. Т. 86. № 1. С. 121–150.
<https://doi.org/10.31857/S003282352201009X>
24. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. М.: Машиностроение, 1965. 566 с.
25. Композиционные материалы. Справочник. Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
26. Reissner E. The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech. 1945. V. 12. № 2. P. 69–77.
27. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // Comput. Struct. 1987. V. 26. № 1–2. P. 1–15.
[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X)

28. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
29. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 332 с.
30. *Хажинский Г.М.* Модели деформирования и разрушения металлов. М.: Научный мир, 2011. 231 с.
31. *Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.* Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 498 с.
32. *Янковский А.П.* Моделирование процессов теплопроводности в пространственно-армированных композитах с произвольной ориентацией волокон // Прикладная физика. 2011. № 3. С. 32–38.
33. Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник / *Ю.М. Тарнопольский, И.Г. Жигун, В.А. Поляков.* М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
34. *Луканин В.Н., Шатров М.Г., Камфер Г.М. и др.* Теплотехника. М.: Высш. шк., 2003. 671 с.
35. Справочник по композитным материалам. Кн. 1. М.: Машиностроение, 1988. 448 с.