ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2023, № 6, с. 3–22

УДК 531.44

О РАВНОВЕСИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ОПИРАЮЩЕГОСЯ ОДНОЙ ТОЧКОЙ НА ШЕРОХОВАТУЮ ПЛОСКОСТЬ

Г. М. Розенблат[a,*]

[a]*Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Москва, Россия*

** e-mail: gr51@mail.ru*

Поступила в редакцию 19.09.2022 г.
После доработки 19.10.2022 г.
Принята к публикации 20.10.2022 г.

Рассматривается задача о возможном и обязательном (в смысле Джеллетта) равновесиях твердого тела, которое контактирует одной своей точкой с шероховатой плоскостью и находится под действием произвольной системы сил. Распределения масс в теле (т.е. центральный тензор инерции и положение центра масс тела относительно точки опоры) предполагаются произвольными. В точке контакта тела с опорой реализуется односторонняя связь и действует сила сухого трения, подчиняющаяся классическому закону Кулона–Эйлера. Получены необходимые и достаточные условия обязательного равновесия. Эти условия выражаются простыми аналитическими формулами. Приводится сравнение с соответствующими результатами, полученными ранее для аналогичной задачи. Рассмотрена задача о возможном и обязательном равновесиях тяжелого эллипсоида на шероховатой наклонной плоскости. Найдены все возможные положения равновесия эллипсоида, а также условия на угол наклона плоскости, при которых такие равновесия возможны и являются обязательными.

Ключевые слова: сухое трение, статическое равновесие, точечный контакт, обязательное равновесие, односторонняя связь, эллипсоид

DOI: 10.31857/S0572329922600748, **EDN:** VEEUEU

1. Введение. Задачи о возможных и обязательных условиях равновесия твердого тела при наличии сухого трения восходят к Дж.Х. Джеллетту [1]. Возможное равновесие означает существование таких сил трения покоя и нормальных реакций связей, подчиняющихся закону Кулона–Эйлера, которые могут статически уравновесить приложенную к телу систему сил, т.е. удовлетворить стандартным уравнениям статики для равновесия твердого тела, в предположениях действия закона Кулона для возникающих сил сухого трения покоя.

Обязательное равновесие (при наличии условий, обеспечивающих возможное равновесие) означает, во-первых, отсутствие возможности начала безотрывного скольжения тела из рассматриваемого состояния покоя (т.е. при нулевых начальных скоростях) с конечными ускорениями. Кроме того, во-вторых, необходимо добавить условия, обеспечивающие отсутствие начала качения и (или) отрыва тела от опоры.

В данной работе изучается равновесие твердого тела, к которому приложена произвольная система сил и которое контактирует одной своей точкой с шероховатой плоскостью, т.е. имеет место односторонний точечный контакт тела с плоскостью при наличии сил сухого трения.

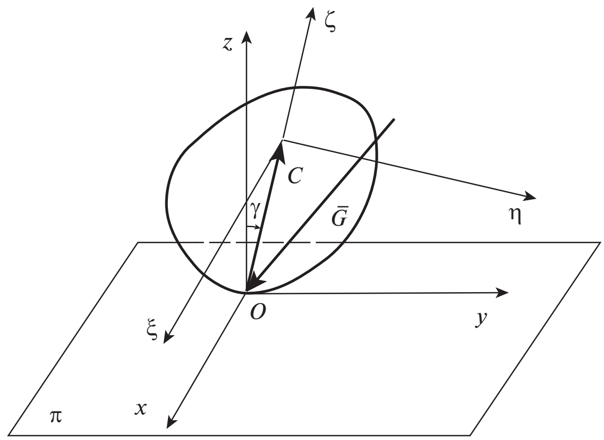

Рис. 1. Твердое тело, опирающееся одной точкой на шероховатую плоскость.

Для рассматриваемой модели задача об обязательном равновесии решается следующим образом. Пусть O – точка контакта тела с опорой (см. рис. 1). На рис. 1 введены следующие обозначения: π – опорная плоскость; O – точка опоры; C – центр масс тела; G – вектор равнодействующей всех активных внешних сил; $Oxyz$ – система координат с началом в опорной точке O, для которой ось Oz направлена по нормали к плоскости π, плоскость Oxy совпадает с плоскостью π, а вектор OC лежит в плоскости Oyz; $C\xi\eta\zeta$ – система координат с началом в центре масс C, для которой ось $C\zeta$ направлена по вектору OC, а ось $C\xi$ параллельна оси Ox; γ – угол, образуемый вектором OC с положительным направлением оси Oz.

Тогда 1-я часть условий обязательного равновесия, соответствующая отсутствию безотрывного скольжения, получается так. Пусть точка O тела начинает двигаться с некоторым вектором ускорения $w_O = (w_{Ox}, w_{Oy}, 0)^{\mathrm{T}}$, лежащим в опорной плоскости Oxy, так, что тело совершает безотрывное ускоренное движение из состояния с нулевыми начальными скоростями. Кроме того, само тело еще и начинает вращаться с некоторым угловым ускорением $\varepsilon = \left(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z\right)^{\mathrm{T}}$.

В результате такого движения со скольжением в точке опоры O возникает сила сухого трения скольжения F_{fr}, которая подчиняется следующему классическому закону Кулона (в модификации Пэнлеве [2] при начале движения из состояния покоя):

$$F_{fr} = -fNw_O/\left|w_O\right|, \quad (w_O \neq 0), \quad \left|F_{fr}\right| < fN, \quad (w_O = 0) \tag{1.1}$$

где f – коэффициент трения, w_O – вектор ускорения точки O, $N > 0$ – нормальная реакция в точке O. Вторая часть условий в (1.1) характеризует силу трения покоя, направление которой может быть произвольным. Отметим, что при наличии вращения тела вокруг нормали к опорной плоскости закон (1.1) является весьма приближенным, а для более точного анализа должны использоваться более совершенные модели (см., например, модель трения Контенсу–Журавлёва [3, 4]).

Вводим неподвижную систему координат $Oxyz$, ось Oz которой направлена в сторону тела по нормали к опорной плоскости, а плоскость Oxy совпадает с опорной плоскостью (см. рис. 1). Далее, при нулевых начальных скоростях точек тела, составляем шесть уравнений динамики для введенных ускорений, которые суть три уравнения для движения центра масс и три уравнения для кинетического момента относительно центра масс тела. В этих уравнениях будут присутствовать ровно шесть неизвестных величин ε_x, ε_y, ε_z, w_{Ox}, w_{Oy}, N. При решении полученной системы необходимо учесть, что должны соблюдаться строгие неравенства $N > 0$, $|w_O| > 0$. Тогда условия, при которых полученная система уравнений, вместе с указанными двумя последними неравенствами, несовместна (при выполнении условий возможного равновесия) и будут представлять собой 1-ю часть условий обязательного равновесия.

2-я часть условий обязательного равновесия соответствует невозможности качения и (или) отрыва тела от опорной плоскости. Отметим, что для рассматриваемого тела с одной точкой контакта, при выполнении условий возможного равновесия, качение заведомо не реализуется. Действительно, из уравнений кинетического момента, составленных для тела относительно (неподвижной при качении) точки контакта O, следует, что $J_O\varepsilon = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$ (J_O – положительно определенная матрица тензора инерции тела относительно точки O), т.е. движение качения не реализуется.

Условия отсутствия отрыва получаются следующим образом. Добавляем к введенному выше (для 1-й части условий обязательного равновесия) ускорению w_O точки контакта O положительную составляющую $w_{Oz} > 0$, необходимо возникающую при отрыве тела, вдоль нормали Oz к опорной плоскости. Затем для шести неизвестных величин ε_x, ε_y, ε_z, w_{Ox}, w_{Oy}, w_{Oz} составляем (аналогично тому, как это было сделано выше в 1-й части) шесть уравнений динамики, в которых, при ослабленной односторонней связи, полагаем $N = 0$, $F_{fr} = 0$. Тогда условия, при которых полученная система уравнений, вместе со строгим неравенством $w_{Oz} > 0$, является несовместной, и будут представлять собой 2-ю часть условий обязательного равновесия.

В настоящей работе такие условия при произвольных параметрах системы получены в рамках классической модели Кулона (1.1). Некоторые результаты решения рассматриваемой задачи для частных случаев распределения масс в твердом теле были получены ранее в работах [5, 6]. Отметим, что вопросы неоднозначности и парадоксальности для задач равновесия и движения в механике твердых тел с сухим трением рассматриваются также, например, в работах [7–11]. Настоящая статья является расширенным и дополненным вариантом ранее опубликованной работы автора [12].

2. Описание модели, основные предположения и постановка задачи. Рассматривается твердое тело в состоянии покоя (см. рис. 1), опирающееся одной своей точкой O на шероховатую плоскость, которая создает силу сухого трения (скольжения или покоя) в соответствие с моделью Кулона (1.1). Пусть к телу приложена произвольная система сил, которая обеспечивает возможное (статическое) его равновесие. Известно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы эта система сил приводилась в точке O к равнодействующей $G = (G_x, G_y, G_z)^{\mathrm{T}}$, линия действия которой проходит через точку контакта O (см. рис. 1) и лежит внутри кругового конуса трения для точки O (O – вершина конуса). Половина угла раствора этого конуса равна углу трения $\varphi_0 = \operatorname{arctg}(f)$, а ось конуса направлена по нормали Oz к опорной плоскости. Причем, так как связь в точке O является односторонней, должно быть выполнено условие $G_z < 0$. Таким образом, сила G удовлетворяет неравенствам

$$G_x^2 + G_y^2 \leq f^2 G_z^2, \quad G_z < 0 \tag{2.1}$$

Далее, для сокращения записи, будем считать, что система единиц выбрана так, что модуль вектора G равен единице.

Пусть C – центр масс тела. Без ограничения общности будем считать, что вектор OC лежит в плоскости Oyz (системы координат $Oxyz$, описанной во Введении).

Обозначим через γ – угол, образуемый вектором OC с положительным направлением оси Oz (см. рис. 1). Будем считать, что $\gamma \in (0, \pi/2)$ (это также не умаляет общности). Введем систему координат $C\xi\eta\zeta$, для которой ось $C\zeta$ направлена по вектору OC, плоскость $C\eta\zeta$ совпадает с плоскостью Oyz, а ось $C\xi$ параллельна оси Ox. Таким образом, система координат $C\xi\eta\zeta$ получена из системы $Oxyz$ двумя преобразованиями: (1) поворотом на угол γ вокруг оси Ox по часовой стрелке и (2) параллельным переносом на вектор OC (см. рис. 1).

Пусть ψ – угол отклонения вектора G от плоскости $C\eta\zeta$, отсчитываемый по часовой стрелке, если смотреть с положительного направления оси $C\eta$. Без ограничения общности будем считать, что $\psi \in [0, \pi/2)$. Поясним более подробно: ψ – угол, образуемый вектором G с его ортогональной проекцией на плоскость $C\eta\zeta$. На рис. 1 этот угол не изображен, отметим лишь, что в общем случае (см. рис. 1) угол ψ не совпадает, вообще говоря, с углом между векторами G и CO. Для проекции на ось $C\xi$ вектора G, с учетом его направления (против оси Oz) и условия $\psi \in [0, \pi/2)$ (см. рис. 1), получим

$$G_\xi = \sin\psi \ge 0 \tag{2.2}$$

Для модуля проекции вектора G на плоскость $C\eta\zeta$ имеем $G_{\zeta\eta} = \cos\psi$.

Пусть φ – угол, образуемый направлением проекции $G_{\zeta\eta}$ с отрицательным направлением оси $C\zeta$ (если $\varphi = 0$, то угол ψ совпадает в точности с углом между направлениями векторов G и CO или же векторов $(-G)$ и OC, при этом проекция $G_{\zeta\eta}$ направлена вдоль отрицательного направления оси $C\zeta$). Угол φ считаем положительным при отсчете его от отрицательного направления оси $C\zeta$ для вектора G по часовой стрелке, если смотреть со стороны оси $C\xi$ (или же при отсчете его от положительного направления оси $C\zeta$, но для вектора $(-G)$). При отсчете этого угла против часовой стрелки, в аналогичных условиях, угол φ считаем отрицательным. Тогда получим, с учетом допустимого направления вектора G (должно быть $G_z < 0$), для интервала изменения угла φ и проекций вектора G на оси $C\eta$, $C\zeta$ следующие соотношения

$$|\varphi + \gamma| < \pi/2, \quad G_\eta = -\cos\psi\sin\varphi, \quad G_\zeta = -\cos\psi\cos\varphi \tag{2.3}$$

Запишем условия того, что вектор G принадлежит конусу трения. Для этого в системе координат $C\xi\eta\zeta$ подсчитаем угол δ между единичным вектором e_z оси Oz и единичным вектором e_G оси вектора $(-G)$. Используя (2.2) и (2.3), имеем

$$e_G = (-\sin\psi, \cos\psi\sin\varphi, \cos\psi\cos\varphi)^{\mathrm{T}}, \quad e_z = (0, -\sin\gamma, \cos\gamma)^{\mathrm{T}} \tag{2.4}$$

Перемножая скалярно векторы из (2.4), получаем для косинуса угла δ между векторами e_z, e_G соотношение

$$\cos\delta = \cos\psi\cos(\gamma + \varphi)$$

Из последнего соотношения вытекает, что условие $|\mathrm{tg}\,\delta| < f$ эквивалентно соблюдению следующих друг из друга неравенств

$$\begin{gathered}\cos\psi\cos(\gamma + \varphi) > \cos\varphi_0 = 1\Big/\sqrt{1 + f^2} \Leftrightarrow |\gamma + \varphi| < \sigma_0 = \arccos(\cos\varphi_0/\cos\psi), \\ \text{где } \varphi_0 = \mathrm{arctg}(f), \quad \psi \in [0, \varphi_0), \quad \sigma_0 \in [0, \varphi_0), \quad \gamma \in [0, \pi/2]\end{gathered} \tag{2.5}$$

Отметим, что при $\psi = 0$ (случай расположения равнодействующей G в плоскости Oyz, см. ниже п. 5) из (2.5) следует неравенство $|\gamma + \varphi| < \varphi_0$.

Таким образом, постановка задачи такова. Пусть сила G, приложенная к твердому телу, удовлетворяет условиям (2.1) и проходит через точку контакта O. Тогда углы φ, ψ, γ, которыми задаются, указанным выше образом, линия действия силы G и положение вектора OC центра масс тела, удовлетворяют соотношениям (2.5). В этом случае заведомо реализуется возможное (статическое) равновесие тела. Требуется определить дополнительные условия, которые обеспечивают также и обязательное равновесие тела (т.е. отсутствие возможных скольжения, качения или отрыва тела от опоры), как это было описано выше во Введении.

3. Динамические уравнения в начале скольжения и при отрыве тела. Пусть J – симметричная положительно определенная матрица инерции тела для точки C в системе $C\xi\eta\zeta$, а $B = J^{-1}$ – обратная ей матрица, которая, как известно, также является симметричной и положительно определенной. Элементы матрицы B будем далее обозначать b_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$.

1. Пусть возникает начальное скольжение точки O с вектором ускорения w_O в плоскости Oxy. Обозначим: $w = |w_O| > 0$ – модуль этого ускорения, α – угол, который образует вектор ускорения w_O с положительным направлением оси Ox. Пусть при таком движении ε_ξ, ε_η, ε_ζ – проекции вектора углового ускорения ε тела на оси системы $C\xi\eta\zeta$.

К телу, в процессе возникающего безотрывного движения, будут приложены следующие три силы: (1) – сила нормальной реакции $N > 0$, направленная по оси Oz; (2) сила трения скольжения F_{fr}, направленная против вектора w_O, расположенная в плоскости Oxy и равная по модулю fN; (3) сила G – равнодействующая всех внешних сил, приложенных к телу, которая, при реализации возможного равновесия, проходит через точку контакта O и удовлетворяет условиям (2.1). Тогда уравнения движения центра масс C тела в проекциях на оси системы $C\xi\eta\zeta$ имеют вид (массу тела m, расстояние OC и модуль равнодействующей всех внешних сил G считаем единичными):

$$\begin{gathered}
w\cos\alpha + \varepsilon_\eta = \sin\psi - fN\cos\alpha \\
w\sin\alpha\cos\gamma - \varepsilon_\xi = -\cos\psi\sin\varphi - fN\sin\alpha\cos\gamma - N\sin\gamma \\
w\sin\alpha\sin\gamma = -\cos\psi\cos\varphi - fN\sin\alpha\sin\gamma + N\cos\gamma
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Уравнения теоремы об изменении кинетического момента тела относительно центра масс в системе $C\xi\eta\zeta$ дают следующие выражения для проекций вектора углового ускорения ε тела на оси системы $C\xi\eta\zeta$

$$\begin{gathered}
\varepsilon_\xi = b_{11}M_1 + b_{12}M_2, \varepsilon_\eta = b_{12}M_1 + b_{22}M_2, \varepsilon_\zeta = b_{31}M_1 + b_{32}M_2 \\
M_1 = -N(\sin\gamma + f\sin\alpha\cos\gamma) - \cos\psi\sin\varphi, M_2 = fN\cos\alpha - \sin\psi
\end{gathered} \tag{3.2}$$

В (3.2) параметры b_{ij} суть элементы положительно определенной симметричной матрицы $B = J^{-1}$. Подставляя (3.2) в (3.1) и обозначая

$$g = 1/N, \quad u = f + w/N \tag{3.3}$$

получим систему трех уравнений

$$\begin{gathered}
u\cos\alpha - b_{12}(\sin\gamma + f\sin\alpha\cos\gamma + g\cos\psi\sin\varphi) + b_{22}(f\cos\alpha - g\sin\psi) = g\sin\psi, \\
u\sin\alpha\cos\gamma - b_{12}(f\cos\alpha - g\sin\psi) + b_{11}(\sin\gamma + f\sin\alpha\cos\gamma + g\cos\psi\sin\varphi) = \\
= -g\cos\psi\sin\varphi - \sin\gamma, \\
u\sin\alpha\sin\gamma = \cos\gamma - g\cos\psi\cos\varphi
\end{gathered} \tag{3.4}$$

Так как должны быть выполнены неравенства $w > 0$, $N > 0$, то из (3.3) следует, что выполняются неравенства

$$g > 0, \quad u > f \tag{3.5}$$

Из последнего уравнения системы (3.4) находим g

$$g = \cos\gamma\frac{1 - u\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\gamma}{\cos\psi\cos\varphi} > 0 \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6), в силу обозначений (3.3), определяет нормальную реакцию N. Таким образом, задача сводится к решению двух нелинейных уравнений относительно двух неизвестных u, α

$$\begin{aligned} &(u + b_{22}f)\cos\alpha + (-b_{12}f\cos\gamma)\sin\alpha - g\left[b_{12}\cos\psi\sin\varphi + (1 + b_{22})\sin\psi\right] = b_{12}\sin\gamma \\ &(u + b_{11}f)\sin\alpha\cos\gamma + (-b_{12}f)\cos\alpha + g\left[b_{12}\sin\psi + (1 + b_{11})\cos\psi\sin\varphi\right] = -(1 + b_{11})\sin\gamma \end{aligned} \tag{3.7}$$

В системе (3.7) переменная g дается формулой (3.6), и должны быть выполнены неравенства (3.5). Кроме того, необходимо учитывать, что, в силу положительной определенности матрицы B, еще выполняются следующие неравенства Сильвестра

$$b_{11} > 0, \quad b_{22} > 0, \quad b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0 \tag{3.8}$$

Задача об обязательном равновесии тела тогда сводится к поиску условий, при которых система (3.7), вместе с неравенствами (3.5), (3.6) и (3.8), не имеет решений относительно неизвестных α, u. Преобразуем систему (3.7), вводя (для краткости записи формул) обозначения

$$x = \sin\alpha, \quad y = \cos\alpha, \quad v = u/f, \quad a = \operatorname{tg}\gamma, \quad b = \operatorname{tg}\varphi, \quad \varepsilon = \operatorname{tg}\psi/\cos\varphi \tag{3.9}$$

Отметим, что для обозначений (3.9), в силу исходных предположений, должны соблюдаться следующие условия

$$x^2 + y^2 = 1, \quad v > 1, \quad a > 0$$

Подставляя величину g из (3.6) в уравнения (3.7), с учетом обозначений (3.9), получим линейную, относительно x, y, систему уравнений второго порядка

$$xc_{11} + yc_{12} = h_1, \quad xc_{21} + yc_{22} = h_2 \tag{3.10}$$

В (3.10) для краткости записи введены обозначения

$$\begin{gathered} c_{11} = v\left[b_{12}ab + (1 + b_{22})\varepsilon a\right] - b_{12}, \quad c_{12} = (v + b_{22})/\cos\gamma \\ c_{21} = v\left[1 - (1 + b_{11})ab - b_{12}\varepsilon a\right] + b_{11}, \quad c_{22} = -b_{12}/\cos\gamma \\ h_1 = \left[b_{12}(a + b) + (1 + b_{22})\varepsilon\right]/f, \quad h_2 = -\left[(1 + b_{11})(a + b) + b_{12}\varepsilon\right]/f \end{gathered} \tag{3.11}$$

Решение (по формулам Крамера) линейной системы второго порядка (3.10) имеет вид

$$x = \Delta_x(v)/\Delta(v), \quad y = \Delta_y(v)/\Delta(v) \tag{3.12}$$

В (3.12) определитель и миноры для системы (3.10) даются следующими формулами

$$\begin{gathered} \Delta(v) = (k_2v^2 + k_1v + k_0)\big/\cos\gamma \\ k_2 = (1 + b_{11})ab + b_{12}\varepsilon a - 1, \quad k_0 = b_{12}^2 - b_{11}b_{22} \\ k_1 = (b_{22} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2)ab - b_{12}\varepsilon a - b_{11} - b_{22} \end{gathered} \tag{3.13}$$

$$\begin{gathered} \Delta_x(v) = (l_1v + l_0)/\cos\gamma, \quad \Delta_y(v) = (m_1v + m_0) \\ l_1 = [(1 + b_{11})(a + b) + b_{12}\varepsilon]\big/f, \quad l_0 = [(b_{22} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2)(a + b) - b_{12}\varepsilon]\big/f \\ m_1 = -\Big[b_{12}(a + b) + (1 + b_{22})\varepsilon + a^2\varepsilon((1 + b_{11})(1 + b_{22}) - b_{12}^2)\Big]\Big/f \\ m_0 = [b_{12}(a + b) + \varepsilon(b_{12}^2 - b_{11} - b_{11}b_{22})]\,/\,f \end{gathered} \tag{3.14}$$

2. Пусть возникает отрыв тела от опоры. В этом случае, как это было описано во Введении, вводим дополнительное (вертикальное) ускорение $w_{Oz} = w_1 > 0$ и составляем шесть уравнений динамики аналогично тому, как это было сделано в п. 1. В полученных уравнениях, в силу ослабления связи, полагаем $N = 0$, $F_{fr} = 0$. В результате, после исключения угловых ускорений $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, имеем следующую систему трех уравнений

$$
\begin{gathered}
w\cos\alpha = b_{12}\cos\psi\sin\varphi + b_{22}\sin\psi + \sin\psi \\
w\sin\alpha\cos\gamma = w_1\sin\gamma - b_{11}\cos\psi\sin\varphi - b_{12}\sin\psi - \cos\psi\sin\varphi \\
w\sin\alpha\sin\gamma = -w_1\cos\gamma - \cos\psi\cos\varphi
\end{gathered} \tag{3.15}
$$

для трех неизвестных w, w_1, α, для которых, кроме того, должны соблюдаться строгие неравенства

$$
w > 0, \quad w_1 > 0 \tag{3.16}
$$

Исключая $w\sin\alpha$ из второго и третьего уравнений системы (3.15), получим

$$
w_1 = \sin\gamma\left(b_{11}\cos\psi\sin\varphi + b_{12}\sin\psi\right) - \cos\psi\cos(\gamma+\varphi) \tag{3.17}
$$

Поделив второе уравнение системы (3.15) на первое и используя (3.17), получим

$$
\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\left(b_{11}\cos\psi\sin\varphi + b_{12}\sin\psi\right)\cos\gamma + \cos\psi\sin(\gamma+\varphi)}{b_{12}\cos\psi\sin\varphi + b_{22}\sin\psi + \sin\psi} \tag{3.18}
$$

Из первого уравнения системы (3.15) находим w:

$$
w = (b_{12}\cos\psi\sin\varphi + b_{22}\sin\psi + \sin\psi)/\cos\alpha
$$

Из последнего соотношения следует, что, выбирая нужный знак для $\cos\alpha$, в соответствие с (3.18), мы всегда сможем добиться того, чтобы выполнялось неравенство $w > 0$. Таким образом, отрыв невозможен лишь в том и только в том случае, если для w_1 из (3.17) выполнено неравенство $w_1 < 0$. Следовательно, условие отсутствия отрыва, получаемое после деления соотношения (3.17) на $\cos\gamma\cos\psi > 0$ и приведения подобных членов, дается неравенством

$$
(b_{11}+1)\operatorname{tg}\gamma\sin\varphi + b_{12}\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\psi < \cos\varphi \tag{3.19}
$$

Неравенство (3.19) и представляет собой 2-ю часть условий обязательности возможного равновесия. Далее рассмотрим некоторые частные случаи расположения равнодействующей G относительно твердого тела.

4. Равнодействующая G проходит через центр масс тела и точку контакта. В этом случае вектор G направлен по вектору CO. Тогда имеем, с учетом обозначений из (3.9),

$$
\varphi = \psi = 0 \rightarrow b = \varepsilon = 0
$$

Уравнения (3.10) и неравенство (3.6) упрощаются и принимают следующий вид

$$
\begin{gathered}
xc_{11} + yc_{12} = b_{12}a/f, \quad xc_{21} + yc_{22} = -(1+b_{11})a/f \\
g = 1 - vfxa > 0, \quad v > 1
\end{gathered} \tag{4.1}
$$

где, согласно (3.9) и (3.11), введены обозначения

$$
\begin{gathered}
x = \sin\alpha, \quad y = \cos\alpha, \quad c_{11} = -b_{12}, \quad c_{12} = (v + b_{22})/\cos\gamma \\
c_{21} = v + b_{11}, \quad c_{22} = -b_{12}/\cos\gamma
\end{gathered} \tag{4.2}
$$

Решение системы (4.1) относительно неизвестных x, y дается формулами Крамера

$$
x = -\mu_1\left[(1+b_{11})(v+b_{22}) - b_{12}^2\right]/\Delta, \quad y = \mu_2 b_{12}(v-1)/\Delta \tag{4.3}
$$

где обозначено

$$
\mu_1 = (\operatorname{tg}\gamma)/f, \quad \mu_2 = \sin\gamma, \quad v = u/f, \quad \Delta = (v+b_{11})(v+b_{22}) - b_{12}^2 \tag{4.4}
$$

В силу неравенств (2.5), (3.5) и (3.8), для введенных в (4.4) параметров имеют место неравенства

$$
0 < \mu_1 \le 1, \quad 0 < \mu_2 \le 1, \quad v > 1, \quad \Delta > 0 \tag{4.5}
$$

Утверждение 1. Решение (4.3) системы (4.1) при $v > 1$ и выполнении условий статического (возможного) равновесия удовлетворяет строгому неравенству

$$x^2 + y^2 < 1 \tag{4.6}$$

В силу обозначений (4.2) решение системы (4.1) должно удовлетворять равенству $x^2 + y^2 = 1$. Тогда из неравенства (4.6) следует, что система (4.1), в данном случае, не имеет требуемых решений, т.е. реализуется 1-я часть условий обязательного равновесия. Неравенство же (3.19), представляющее собой 2-ю часть условий обязательности равновесия (отсутствие отрыва), выполнено автоматически при $\varphi = \psi = 0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае возможное равновесие одновременно является и обязательным.

Доказательство утверждения 1 сводится к непосредственной проверке неравенства (4.6) для величин x, y, даваемых выражениями (4.3). Приведем кратко основные моменты. Неравенство (4.6) эквивалентно следующему неравенству

$$[(v + b_{11})(v + b_{22}) - b_{12}^2]^2 > \mu_1^2[(1 + b_{11})(v + b_{22}) - b_{12}^2]^2 + \mu_2^2 b_{12}^2 (v - 1)^2, \quad v \in (1, \infty) \tag{4.7}$$

В силу неравенств (4.5), неравенство (4.7) следует из неравенства

$$[(v + b_{11})(v + b_{22}) - b_{12}^2]^2 > [(1 + b_{11})(v + b_{22}) - b_{12}^2]^2 + b_{12}^2 (v - 1)^2, \quad v \in (1, \infty) \tag{4.8}$$

Представляя левую часть неравенства в виде

$$[(v - 1)(v + b_{22}) + (1 + b_{11})(v + b_{22}) - b_{12}^2]^2$$

получим, что (4.8) эквивалентно неравенству

$$(v - 1)(v + b_{22})^2 + 2(v + b_{22})[(1 + b_{11})(v + b_{22}) - b_{12}^2] > (v - 1) b_{12}^2, \quad v \in (1, \infty) \tag{4.9}$$

Неравенство (4.9), с использованием неравенств (3.8), проверяется непосредственным вычислением. Утверждение 1 доказано.

Замечание 1. Утверждение 1 кажется достаточно очевидным. Однако ниже будет показано, что для сколь угодно малого отклонения равнодействующей G от направления вектора OC существуют такие распределения масс в теле, при которых может начаться проскальзывание, и, следовательно, равновесие не будет обязательным.

Следствие 1. Пусть произвольное твердое тело опирается одной своей точкой на шероховатую плоскость, коэффициент сухого трения которой равен f, а система внешних сил, приложенных к этому твердому телу, удовлетворяет следующим условиям.

1. Система внешних сил приводится в точке опоры к равнодействующей G.

2. Вектор G образует с нормалью к опорной плоскости (а, следовательно, и с нормалью к поверхности границы тела) угол γ, для которого $|\mathrm{tg}\,\gamma| < f$, а проекция вектора G на эту нормаль является отрицательной.

3. Линия действия вектора G проходит через центр масс тела.

Тогда, из утверждения 1 следует, что тело находится в состоянии статического равновесия (возможного равновесия), которое к тому же является и обязательным.

Подчеркнем, что нарушение одного из условий 1 или 2 приводит к нарушению статического равновесия, а нарушение условия 3 может привести к нарушению обязательного равновесия (даже при сохранении возможного равновесия).

Следствие 2. Из утверждения 1 следует также, что положение статического (возможного) равновесия тяжелого твердого тела, опирающегося одной своей точкой на шероховатую наклонную плоскость с углом наклона α, является всегда (т.е. при любом распределении масс в теле) обязательным, если угол наклона плоскости не превосходит угла трения, т.е. выполнено неравенство $\alpha < \varphi_0 = \mathrm{arctg}(f)$. В этом случае заведомо, при возможном равновесии, равнодействующая (т.е. сила тяжести) проходит через центр масс тела и его точку опоры. Однако, для выполнения последнего условия, необходимо еще наложить определенное ограничение на угол наклона α, которое зависит от всей формы поверхности рассматриваемого тела.

Покажем, как получить эти ограничения. Пусть в некоторой (произвольной) декартовой системе координат $Cxyz$ (где C — центр масс тела) уравнение поверхности тела имеет вид $F(x, y, z) = 0$. Тогда ясно, что для реализации указанного условия (сила тяжести проходит через центр масс C и точку опоры O тела, опирающегося на плоскость с углом наклона α) должна существовать такая точка O на поверхности тела с координатами (x, y, z), в которой нормаль к поверхности тела (являющаяся также и нормалью к наклонной плоскости) образует с радиус-вектором CO (в положении равновесия это будет также и вертикаль) угол α.

В аналитическом виде это условие эквивалентно следующим двум равенствам

$$F(x,y,z) = 0, \quad \cos\alpha = \frac{x(\partial F/\partial x) + y(\partial F/\partial y) + z(\partial F/\partial z)}{n\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$\text{где } n = n(x,y,z) = \sqrt{(\partial F/\partial x)^2 + (\partial F/\partial y)^2 + (\partial F/\partial z)^2} \tag{4.10}$$

Если поверхность тела является выпуклой замкнутой и гладкой, то для существования решений уравнений (4.10) необходимо и достаточно выполнения следующего неравенства

$$\alpha < \alpha^*, \quad \cos\alpha^* = \min_{(x,y,z)}\left[\frac{x(\partial F/\partial x) + y(\partial F/\partial y) + z(\partial F/\partial z)}{n(x,y,z)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right] \tag{4.11}$$

В (4.11) операция min берется по всем тройкам (x, y, z), удовлетворяющим уравнению $F(x, y, z) = 0$.

Таким образом, условием возможного и обязательного равновесия тяжелого твердого тела, ограниченного гладкой, замкнутой и выпуклой поверхностью и опирающегося одной своей точкой на шероховатую (с коэффициентом трения f) наклонную плоскость с углом наклона α, является неравенство

$$\alpha < \min\{\varphi_0, \alpha^*\}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg}(f), \tag{4.12}$$

где α^* определяется из (4.11).

Задача о равновесии эллипсоида на шероховатой наклонной плоскости. В качестве примера, в котором будет явно определено значение α^*, необходимое для записи условия (4.12), рассмотрим задачу о возможном и обязательном равновесиях произвольного, тяжелого и уравновешенного (центр тяжести совпадает с центром симметрии) эллипсоида на шероховатой наклонной плоскости. Уточним постановку задачи.

Пусть дано уравновешенное твердое тело, поверхность которого представляет собой эллипсоид с полуосями $a \ge b \ge c$. Помещаем это тело на шероховатую наклонную плоскость с углом наклона α и коэффициентом трения f. Требуется определить, во-первых, все положения возможного равновесия тела, и, во-вторых, ограничения на угол наклона α, при которых равновесие возможно и является обязательным.

Решение поставленной задачи осуществляется следующим образом. Пусть C — центр масс тела и одновременно геометрический центр эллипсоида. Выберем систему координат $Cxyz$ так, что уравнение поверхности эллипсоида имеет канонический вид

$$F(x,y,z) = k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2 - 1 = 0, \quad \text{где} \quad k_1 = 1/a^2, \quad k_2 = 1/b^2, \quad k_3 = 1/c^2 \tag{4.13}$$

По предположению $a \ge b \ge c$. Поэтому для новых обозначений соблюдаются неравенства

$$k_1 \le k_2 \le k_3 \tag{4.14}$$

Для функции $F(x, y, z)$ из (4.13) и $n(x, y, z)$ из (4.10) имеем соотношения

$$x\partial F/\partial x + y\partial F/\partial y + z\partial F/\partial z = 2, \quad n = n(x,y,z) = 2\sqrt{k_1^2x^2 + k_2^2y^2 + k_3^2z^2} \tag{4.15}$$

Из (4.10), используя (4.15), получим для определения положений равновесия эллипсоида два уравнения

$$k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2 = 1, \quad (x^2 + y^2 + z^2)(k_1^2x^2 + k_2^2y^2 + k_3^2z^2) = 1/\cos^2\alpha \tag{4.16}$$

Второе уравнение системы (4.16), с использованием первого уравнения той же системы, может быть преобразовано к виду

$$[xy(k_1 - k_2)]^2 + [yz(k_2 - k_3)]^2 + [xz(k_1 - k_3)]^2 = \operatorname{tg}^2\alpha \tag{4.17}$$

Вводя обозначения

$$x_1 = x^2, \quad x_2 = y^2, \quad x_3 = z^2, \quad (x_1 \in [0, a^2], x_2 \in [0, b^2], x_3 \in [0, c^2]) \tag{4.18}$$

получим из (4.16), (4.17) следующие два уравнения для определения положений возможного равновесия эллипсоида на наклонной плоскости

$$\begin{gathered} k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 = 1, \quad l_{12}x_1x_2 + l_{23}x_2x_3 + l_{13}x_1x_3 = \operatorname{tg}^2\alpha \\ l_{12} = (k_1 - k_2)^2, \quad l_{23} = (k_2 - k_3)^2, \quad l_{13} = (k_1 - k_3)^2 \end{gathered} \tag{4.19}$$

Определим все положения возможного равновесия в вырожденных случаях.

1) Пусть $\alpha = 0$ (опорная плоскость горизонтальна). Тогда система из (4.19) имеет только лишь решения вида: $x_k = x_l = 0$, $x_m = a^2$, или b^2, или c^2 $(k, l, m = 1, 2, 3)$ (две координаты равны нулю, а третья – квадрату одной из полуосей эллипсоида). Эти решения соответствуют опоре эллипсоида на одну из главных его полуосей, которые, очевидно, являются состояниями его возможных равновесий.

2) Пусть $k_1 = k_2 = k_3$. Тогда $a = b = c$, т.е. эллипсоид вырождается в шар. В этом случае, согласно обозначениям из (4.19), имеем $l_{12} = l_{13} = l_{23} = 0$, и уравнения равновесия из (4.19) имеют решения лишь при $\alpha = 0$, т.е. только на горизонтальной плоскости. Таким образом, уравновешенный шар может находиться в возможном равновесии только на горизонтальной плоскости, что, впрочем, очевидно и без вычислений.

3) Пусть $k_1 < k_2 = k_3$, т.е. $a > b = c$ (неравенство $k_1 < k_2$, $(a > b)$ строгое). В этом случае тело является эллипсоидом вращения с осью x (соответствующей большей полуоси a) в качестве оси симметрии (т.е. это – вытянутый эллипсоид типа "веретена"). Согласно (4.19), тогда имеем

$$l_{23} = 0, \quad l_{12} = l_{13} = l = (k_1 - k_2)^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4b^4}$$

Уравнения из (4.19) для определения положений возможных равновесий приобретают более простой вид

$$k_1x_1 + k_2(x_2 + x_3) = 1, \quad lx_1(x_2 + x_3) = \operatorname{tg}^2\alpha, \quad (x_1 \in [0, a^2]) \tag{4.20}$$

Решение уравнений (4.20) сводится к решению квадратного уравнения $x_1 - k_1x_1^2 = k_2(\operatorname{tg}^2\alpha/l)$ и имеет в исходных переменных x, y, z, согласно обозначениям (4.18), следующий вид

$$x^2 = a^2\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{D}\right), \quad y^2 + z^2 = b^2\left(\frac{1}{2} \mp \sqrt{D}\right), \quad \text{где} \quad D = \frac{1}{4} - k_1k_2\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{l} \geq 0 \tag{4.21}$$

Таким образом, в исходных переменных x, y, z, одномерные многообразия (4.21) возможных равновесий эллипсоида вращения на наклонной плоскости с углом наклона

α представляют собой четыре параллельные окружности радиусов $r_{\pm} = b\sqrt{\frac{1}{2} \mp \sqrt{D}}$, которые лежат на эллипсоиде в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, т.е. оси x в системе $Cxyz$ (соответствующей большей полуоси a). Одна пара симметричных, относительно точки C, окружностей радиуса $r_+ = b\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{D}}$ соответствует значениям $x_+ = \pm a\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{D}}$, а другая пара окружностей радиуса $r_- = b\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{D}}$ – для значений $x_- = \pm a\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{D}}$.

Ясно, что многообразия (4.21) не пусты только при соблюдении неравенства $D \geq 0$. Отсюда, в соответствие с обозначением из (4.21), следует, что возможные положения равновесия на наклонной плоскости с углом наклона α для эллипсоида вращения существуют лишь при выполнении неравенства

$$\operatorname{tg}\alpha \leq \sqrt{\frac{l}{4k_1k_2}} = (a^2 - b^2)\big/(2ab) \to \alpha \leq \alpha^* = \operatorname{arctg}\frac{a^2 - b^2}{2ab} = \arccos\frac{2ab}{a^2 + b^2} \qquad (4.22)$$

Предельные положения равновесия даются уравнениями (4.21), в которых следует положить $D = 0$.

Итак, в предельном случае угла наклона опорной плоскости, при $\alpha = \alpha^*$, имеем $D = 0$. Тогда две пары окружностей из (4.21) сливаются в одну пару симметричных (относительно точки C) окружностей радиуса $r = b/\sqrt{2}$, уравнение которых, в переменных x, y, z, имеет вид

$$x^2 = a^2/2, \quad y^2 + z^2 = b^2/2 \qquad (4.23)$$

Несложно подсчитать, используя (4.23), что в этом случае ось симметрии эллипсоида (т.е. ось x, соответствующая большей полуоси a эллипсоида) образует с вертикалью (при возможном равновесии вертикаль – это радиус-вектор точки опоры с координатами x, y, z в системе $Cxyz$) угол δ такой, что

$$\cos\delta = a\big/\sqrt{a^2 + b^2}$$

Для дополнительного угла $\gamma = \pi/2 - \delta$, который образует в этой ситуации ось симметрии x с горизонтом будем иметь формулу

$$\cos\gamma = b\big/\sqrt{a^2 + b^2} \qquad (4.24)$$

Замечание 2. Можно аналитически показать, что в состояниях возможных равновесий эллипсоида (для любого допустимого угла $\alpha \in [0, \alpha^*]$ наклонной плоскости), описываемых многообразиями из формул (4.21), соблюдается следующее свойство. Ось симметрии x эллипсоида вращения и соответствующая экваториальная плоскость, содержащая ось x и радиус-вектор точки контакта, располагаются в вертикальной плоскости, параллельной линии наибольшего ската наклонной опорной плоскости и, соответственно, перпендикулярной линии откоса, т.е. прямой, являющейся пересечением наклонной и горизонтальной плоскостей. В учебнике [13, стр. 115], при рассмотрении аналогичной задачи о равновесии эллипсоида вращения на шероховатой наклонной плоскости, этот факт предполагался самоочевидным в момент предельного наклона плоскости при $\alpha = \alpha^*$. На наш взгляд, этот факт необходимо доказывать, так как в случае невырожденного эллипсоида (при $a > b > c$ и $\alpha < \alpha^*$) приведенное утверждение, вообще говоря, неверно (см. ниже доказательство в п. 5 и замечание 4 к этому пункту).

Замечание 3. Отметим, что в учебнике [13, стр. 115], где рассматривалась аналогичная задача о предельном угле наклона для равновесия эллипсоида вращения на шероховатой наклонной плоскости, было ошибочно указано, что угол между осью симметрии и горизонтом, при предельном наклоне $\alpha = \alpha^*$ опорной плоскости, равен $\gamma = \pi/4$. Это, очевидно, не совпадает с полученной нами формулой (4.24), так как $a > b$ (строго) и, следовательно, из (4.24) вытекает, что $\gamma > \pi/4$ (строго).

Источник этой ошибки заключается в том, что угол φ, фигурирующий в использованных авторами учебника [13] параметрических уравнениях эллипса (т.е. вертикального сечения эллипсоида вращения, например, при $z = 0$)

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi \tag{4.25}$$

принимался за упомянутый угол γ (или ему дополнительный). На самом деле, ясно, что φ является только параметром для описания контура упомянутого вертикального сечения и поэтому, вообще говоря, имеем $\varphi \neq \gamma$. Однако, для рассматриваемого предельного положения равновесия (когда $\alpha = \alpha^*$ и поэтому $x = \pm a/\sqrt{2}$, $y = \pm b/\sqrt{2}$, $z = 0$), имеем $\varphi = \pi/4$ или же $\varphi = 5\pi/4$. Именно это значение и было ошибочно принято авторами [13] за величину упомянутого выше угла γ. Кроме того, авторы учебника [13] почему-то параметрические уравнения эллипса (4.25) трактуют, как "...уравнение эллипса в центральной полярной системе координат..." (см. стр. 115 учебника [13]). На самом деле, как известно (см., например, [14], стр. 145), уравнениями эллипса в центральной полярной системе координат $\{\rho, \psi\}$ принято называть уравнения

$$x = \rho(\psi)\cos\psi, \quad y = \rho(\psi)\sin\psi, \quad \text{где} \quad \rho(\psi) = \left(\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}\right)^{-1/2}$$

Тогда угол ψ, фигурирующий в последних равенствах, действительно является углом между осью симметрии x эллипсоида и радиусом-вектором текущей точки опоры (т.е. вертикалью), а в положении предельного возможного равновесия, когда $x^2 = a^2/2$, $y^2 = b^2/2$, имеем $\rho^2 = x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)/2$, и, следовательно, получаем

$$\psi = \delta = \arccos\left(a\big/\sqrt{a^2 + b^2}\right) \to \gamma = \pi/2 - \delta = \arccos\left(b\big/\sqrt{a^2 + b^2}\right)$$

Этот результат уже в точности совпадает с формулой (4.24).

4) Пусть $k_1 = k_2 < k_3$, тогда $a = b > c$. В этом случае тело является эллипсоидом вращения с осью z (соответствующей малой полуоси c) в качестве оси симметрии (т.е. это — сплюснутый эллипсоид типа "блина" или "патиссона"). Согласно (4.19), тогда имеем

$$l_{12} = 0, \quad l_{23} = l_{13} = l = (k_1 - k_3)^2 = [(a^2 - c^2)\big/(a^2c^2)]^2$$

Уравнения из (4.19) для определения положений возможных равновесий приобретают вид

$$k_1(x_1 + x_2) + k_3x_3 = 1, \quad lx_3(x_1 + x_2) = \operatorname{tg}^2\alpha, \quad (x_3 \in [0, c^2])$$

Таким образом, дело опять же сводится к решению квадратного уравнения. Дальнейшие рассуждения и выводы получаются аналогичными предыдущему п. 3).

5) Рассмотрим общий невырожденный случай, когда

$$0 < k_1 < k_2 < k_3 \quad (a > b > c > 0) \tag{4.26}$$

Неравенства в (4.26) являются строгими. В соответствие с (4.16), для определения максимального угла α^* наклона опорной плоскости будем решать следующую задачу Лагранжа на условный экстремум

$$\sigma = 1/\cos^2\alpha = (x^2 + y^2 + z^2)(k_1^2x^2 + k_2^2y^2 + k_3^2z^2) = H(x,y,z) \to \max \tag{4.27}$$

при условии $F(x,y,z) = k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2 - 1 = 0$

Для введенного в (4.27) параметра σ имеем следующие границы изменения $\sigma \in [1,+\infty)$ (причем $\alpha \in [0,\pi/2]$).

Используя метод Лагранжа, будем искать стационарные точки функции Лагранжа

$$L(x,y,z) = H(x,y,z) - \lambda F(x,y,z)$$

где $\lambda \neq 0$ — неопределенный множитель Лагранжа. В результате получаем следующую систему трех уравнений

$$\begin{aligned} 2x[k_1^2x^2 + k_2^2y^2 + k_3^2z^2 + k_1^2(x^2 + y^2 + z^2) - \lambda k_1] = 0 \\ 2y[k_1^2x^2 + k_2^2y^2 + k_3^2z^2 + k_2^2(x^2 + y^2 + z^2) - \lambda k_2] = 0 \\ 2z[k_1^2x^2 + k_2^2y^2 + k_3^2z^2 + k_3^2(x^2 + y^2 + z^2) - \lambda k_3] = 0 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Для решения системы (4.28) рассмотрим следующие случаи.

5.1. $x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$. Тогда из (4.28) получаем систему

$$\begin{aligned} k_1^2x^2 + k_2^2y^2 + k_3^2z^2 + k_1^2(x^2 + y^2 + z^2) - \lambda k = 0 \\ k_1^2x^2 + k_2^2y^2 + k_3^2z^2 + k_2^2(x^2 + y^2 + z^2) - \lambda k_2 = 0 \\ k_1^2x^2 + k_2^2y^2 + k_3^2z^2 + k_3^2(x^2 + y^2 + z^2) - \lambda k_3 = 0 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Вычитая в системе (4.29) поочередно из первого уравнения второе, затем третье уравнение, а затем из второго уравнения вычитая третье уравнение, получаем, что решения (при выполнении условий (4.26)) могут существовать лишь при $k_1 + k_2 = k_1 + k_3 = k_2 + k_3 \to k_1 = k_2 = k_3$ $(a = b = c)$, что противоречит условию (4.26). Таким образом, в этом случае стационарных точек нет.

5.2. $x = 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$. Решая при этих условиях систему (4.28), совместно с равенством $F(x,y,z) = k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2 - 1 = 0$, получаем

$$\lambda = (k_2 + k_3)^2/(2k_2k_3),\ y^2 = 1/(2k_2),$$
$$z^2 = 1/(2k_3), \quad H = H_{23} = (k_2 + k_3)^2/(4k_2k_3)$$

5.3. $x \neq 0,\ y = 0,\ z \neq 0$. Аналогично случаю 5.2 получаем

$$\lambda = (k_1 + k_3)^2/(2k_1k_3), \quad x^2 = 1/(2k_1)$$
$$z^2 = 1/(2k_3), \quad H = H_{13} = (k_1 + k_3)^2/(4k_1k_3)$$

5.4. $x \neq 0,\ y \neq 0,\ z = 0$. Аналогично случаям 5.2 и 5.3 получаем

$$\lambda = (k_1 + k_2)^2/(2k_1k_2), \quad x^2 = 1/(2k_1), \quad y^2 = 1/(2k_2)$$
$$H = H_{12} = (k_1 + k_2)^2/(4k_1k_2)$$

5.5. $x = 0, y = 0, z \neq 0$. В этом случае из системы (4.28) получим $z^2 = \lambda/(2k_3)$. Используя условие $F = 0$, имеем $\lambda = 2$, $z^2 = 1/k_3$. Тогда функция H принимает в полученной точке значение $H = 1$, что соответствует очевидному минимуму (при этом, согласно (4.27), имеем $\sigma = 1 \to \alpha = 0$). Аналогичный результат мы получаем и в двух других возможных случаях $x \neq 0,\ y = 0,\ z = 0$ и $x = 0,\ y \neq 0,\ z = 0$.

Подводя итоги, получаем, что случаи 5.2–5.4 соответствуют локальным условным максимумам, а случаи из 5.5 дают локальные условные минимумы для функции $H(x,y,z)$. Далее, непосредственной проверкой нетрудно установить, что при выполнении неравенств (4.26), соблюдаются также неравенства $H_{13} > H_{12}$, $H_{13} > H_{23}$ (эти величины определены выше в пп. 5.2–5.4).

Таким образом, абсолютный условный максимум функции $H(x, y, z)$ в общем невырожденном случае (4.26) реализуется лишь в рассмотренном случае 5.3, когда $x = \pm a/\sqrt{2}$, $y = 0$, $z = \pm c/\sqrt{2}$. В этом случае, используя (4.27), имеем

$$H_{\max} = (a^2 + c^2)^2 \big/ (4a^2c^2) = \sigma^* = 1/\cos^2\alpha^* \Rightarrow \alpha^* = \arccos[2ac\big/(a^2 + c^2)] \tag{4.30}$$

Замечание 4. Пусть угол наклона α опорной плоскости удовлетворяет условию $\alpha \in [0, \alpha^*]$, где α^* определяется из (4.30). Обозначим через x, y, z координаты точки поверхности эллипсоида, в которой реализуется возможное равновесие тела. В этом случае соблюдаются уравнения (4.16). Тогда косинусы углов ε_1, ε_2, ε_3, которые образуют, соответственно, оси Cx, Cy, Cz эллипсоида с прямой откоса, являющейся прямой пересечения наклонной и горизонтальной плоскостей, даются следующими формулами (доказательство см. ниже)

$$\cos\varepsilon_1 = (k_3 - k_2)yz/\operatorname{tg}\alpha, \quad \cos\varepsilon_2 = (k_1 - k_3)xz/\operatorname{tg}\alpha, \quad \cos\varepsilon_3 = (k_2 - k_1)xy/\operatorname{tg}\alpha \tag{4.31}$$

Из первой формулы (4.31), в частности, следует, что при $k_1 < k_2 = k_3$ (см. случай 3 и замечание 2) получим $\cos\varepsilon_1 = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 = \pi/2$, и утверждение из замечания 2 обосновано. Кроме того, в общем случае, в положении предельного равновесия при $\alpha = \alpha^*$, согласно п. 5.3 и (4.30), имеем

$$x = a/\sqrt{2}, \quad y = 0, \quad z = c/\sqrt{2}, \quad \operatorname{tg}\alpha^* = (a^2 - c^2)\big/(2ac)$$

Тогда из (4.31) получим

$$\cos\varepsilon_1 = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 = \pi/2, \quad |\cos\varepsilon_2| = 1 \Rightarrow \varepsilon_2 = 0$$
$$\text{или} \quad \varepsilon_2 = \pi, \quad \cos\varepsilon_3 = 0 \Rightarrow \varepsilon_3 = \pi/2$$

Таким образом, в момент предельного положения равновесия, при $\alpha = \alpha^*$, эллипсоид располагается так, что ось Cx направлена вдоль прямой наибольшего ската, ось Cz перпендикулярна наклонной плоскости, а ось Cy направлена параллельно прямой откоса.

Соотношения (4.31) доказываются следующим образом. В положении равновесия вектор нормали наклонной плоскости параллелен вектору $N = (k_1x, k_2y, k_3z)^{\mathrm{T}}$, а вектор нормали к горизонтальной плоскости параллелен радиус-вектору точки опоры $r = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$. Следовательно, прямая откоса, которая является пересечением этих плоскостей, перпендикулярна одновременно обоим векторам N и r, т.е. параллельна их векторному произведению

$$l = [N \cdot r] = \big(yz(k_3 - k_2), xz(k_1 - k_3), xy(k_2 - k_1)\big)^{\mathrm{T}}$$

Учитывая, что модуль последнего вектора, согласно равенству (4.17), равен $\operatorname{tg}\alpha$, получаем формулы (4.31).

5. Плоский случай расположения равнодействующей G. В этом случае считаем, что нормаль Oz к опорной плоскости, вектор OC и равнодействующая G, линия действия которой проходит через точку O, лежат в одной плоскости (т.е. в плоскости $C\eta\zeta$ или, что равнозначно, в плоскости Oyz). Подчеркнем, что в этих предположениях задача все равно остается пространственной, так как возможные движения тела, при исследовании обязательности равновесия, могут происходить и не параллельно плоскости Oyz.

В рассматриваемом случае имеем $\psi = 0$ и $\varepsilon = \operatorname{tg}\psi/\cos\varphi = 0$. Уравнения (3.10) и неравенства (2.5), (3.6), с учетом обозначений (3.11), приобретают вид

$$
\begin{aligned}
&x\left[v(abb_{12})-b_{12}\right]+y\left(\frac{v+b_{22}}{\cos\gamma}\right)=b_{12}d\\
&x\left\{v\left[1-ab(1+b_{11})\right]+b_{11}\right\}+y\left(-\frac{b_{12}}{\cos\gamma}\right)=-(1+b_{11})d
\end{aligned}
\qquad (5.1)
$$

Из (2.5) в этом случае получаем

$$
|\gamma+\varphi|<\varphi_0=\operatorname{arctg}(f),\quad g=\frac{\cos\gamma}{\cos\varphi}(1-vxfa)>0 \qquad (5.2)
$$

В (5.1), (5.2), как и ранее, введены обозначения

$$
x=\sin\alpha,\quad y=\cos\alpha,\quad v=u/f,\quad a=\operatorname{tg}\gamma,\quad b=\operatorname{tg}\varphi,\quad d=(a+b)/f \qquad (5.3)
$$

Решая линейную систему (5.1) относительно x, y, получим в данном случае из (3.12)–(3.14) следующие выражения

$$
\begin{gathered}
x=\frac{l_1v+l_0}{k_2v^2+k_1v+k_0},\quad y=\frac{m_1v+m_0}{k_2v^2+k_1v+k_0}\\
k_2=(1+b_{11})ab-1,\quad k_1=(b_{22}+b_{11}b_{22}-b_{12}^2)ab-b_{11}-b_{22},\ k_0=b_{12}^2-b_{11}b_{22}\\
l_1=(1+b_{11})d,\quad l_0=(b_{22}+b_{11}b_{22}-b_{12}^2)d,\quad m_1=-b_{12}d\cos\gamma,\quad m_0=b_{12}d\cos\gamma
\end{gathered}
\qquad (5.4)
$$

Решение (5.4) является корректным для тех $v\in(1,+\infty)$, при которых выполнено тригонометрическое равенство $x^2+y^2=1$ и соблюдаются неравенства (5.2). Из (5.4) получим

$$
F(v)=x^2+y^2=\frac{(l_1v+l_0)^2+(m_1v+m_0)^2}{(k_2v^2+k_1v+k_0)^2} \qquad (5.5)
$$

Таким образом, дело сводится к возможности решения уравнения

$$
F(v)=1,\quad v\in(1,+\infty) \qquad (5.6)
$$

где $F(v)$ определяется формулой (5.5), при обозначениях (5.4). При этом должны выполняться еще и неравенства (5.2).

Утверждение 2. Уравнение (5.6), где $F(v)$ определяется формулами (5.5), (5.4), при условиях возможного равновесия из (5.2), имеет решения на интервале $v\in(1,+\infty)$ тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$
1/(1+b_{11})<ab<1,\quad (a=\operatorname{tg}\gamma, b=\operatorname{tg}\varphi) \qquad (5.7)
$$

Замечание 5. Из утверждения 1 следует, что 1-я часть условий обязательности равновесия (отсутствие решений уравнения (5.6), эквивалентное отсутствию скольжений в условиях возможного равновесия) в рассматриваемом плоском случае равносильна отрицанию неравенств (5.7), т.е. одному из следующих двух неравенств

$$
ab<1/(1+b_{11}),\quad \text{либо}\quad ab>1,\quad \text{где}\quad a=\operatorname{tg}\gamma>0,\quad b=\operatorname{tg}\varphi \qquad (5.8)
$$

Кроме того, должно соблюдаться первое неравенство из (5.2) – условие возможного равновесия.

2-я часть условий обязательности равновесия (условие отсутствия отрыва тела от опоры) следует из неравенства (3.19) при $\psi=0$ и имеет вид

$$
(1+b_{11})\operatorname{tg}\gamma\sin\varphi<\cos\varphi \qquad (5.9)
$$

Отметим, что для случая из пункта 4 (равнодействующая G проходит через центр масс тела) имеем $b=\operatorname{tg}\varphi=0$, и первое из неравенств (5.8) и неравенство (5.9) обязательного возможного равновесия выполнено заведомо. Таким образом, подтвержден результат из пункта 4.

Замечание 6. Из (5.2), (5.8), (5.9), путем несложного перебора возможных ситуаций, получаем следующие условия обязательности возможного равновесия в рассматриваемом плоском случае:

$$1.\ \operatorname{tg}\varphi < \operatorname{ctg}\gamma/(1+b_{11}),$$
$$\text{при } \max\{-\pi/2, -(\varphi_0+\gamma)\} < \varphi < \varphi_0 - \gamma, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg}(f)$$
$$2.\ \operatorname{tg}\varphi > \operatorname{ctg}\gamma, \quad \text{при } \pi/2 < \varphi_0 + \gamma < \pi, \quad \text{и} \quad -(\varphi_0+\gamma) < \varphi < -\pi/2$$

то возможное равновесие является обязательным.

Переформулируем полученные условия обязательного равновесия в проекциях векторов G и OC на оси системы координат $Oxyz$.

Пусть $X = 0$, $Y = -\sin(\gamma+\varphi)$, $Z = -\cos(\gamma+\varphi) < 0$, $(\gamma \in [0, \pi/2])$ суть проекции равнодействующей G (напомним, что модуль этого вектора был принят за единицу) на оси Ox, Oy, Oz системы координат $Oxyz$, $x_C = 0$, $y_C = \sin\gamma > 0$, $z_C = \cos\gamma > 0$ суть проекции вектора OC на те же оси (модуль этого вектора был также принят за единицу). Используя приведенные обозначения, получаем следующие соотношения

$$\operatorname{tg}\gamma = \varepsilon = y_C/z_C, \quad \operatorname{tg}\varphi = (\xi - \varepsilon)/(1+\xi\varepsilon), \quad \text{где} \quad \xi = Y/Z$$

Несложный анализ позволяет тогда установить следующие условия обязательности равновесия в проекциях, которые следуют, соответственно, из неравенств вышеприведенных пунктов 1 и 2. Напомним, что $y_C > 0$, $z_C > 0$, $Z < 0$.

1. Если $\max\{-f, -z_C/y_C\} < \dfrac{Y}{Z} < \min\{f, \xi_1\}$, где $\xi_1 = \dfrac{k^2 + y_C^2}{y_C z_C}$, $k^2 = \dfrac{1}{b_{11}}$, то возможное равновесие является обязательным.

2. Если $-f < \dfrac{Y}{Z} < -\dfrac{z_C}{y_C}$, при $0 < \dfrac{z_C}{y_C} < f$, то возможное равновесие также является обязательным.

Объединение полученных в 1 и 2 неравенств приводит к следующему окончательному условию обязательного возможного равновесия в плоском случае:

$$-f < \frac{Y}{Z} < \min\{f, \xi_1\}, \quad \text{где} \quad \xi_1 = \frac{k^2 + y_C^2}{y_C z_C}, \quad k^2 = \frac{1}{b_{11}}$$

Отметим, что полученное условие по виду совпадает с соответствующим условием, полученным другим способом в [6], где рассматривалась аналогичная задача для плоского твердого тела. Однако, в [6] величина k^2 представляла собой радиус инерции тела относительно центра масс, т.е. относительно оси, проходящей через центр масс C тела и перпендикулярной плоскости тела. В полученном же нами неравенстве эта величина, вообще говоря, не является таковой, т.е. радиусом инерции тела относительно оси $C\xi$ (исключение составляет случай, когда ось $C\xi$ является главной осью инерции тела). Более подробное обсуждение представлено в Замечании 7 ниже (после доказательства утверждения 2).

Доказательство утверждения 2. Основная идея доказательства состоит в следующем. Уравнение (5.6), где функция $F(v)$ определяется соотношениями (5.5) и (5.4), имеет решения тогда и только тогда, когда квадратный трехчлен $Q(v) = k_2 v^2 + k_1 v + k_0$, стоящий в знаменателе выражения (5.5), имеет хотя бы один вещественный корень на интервале $1 < v < +\infty$. Действительно, пусть $v_1 > 1$ — вещественный корень функции $Q(v) = k_2 v^2 + k_1 v + k_0$. Несложная проверка, с учетом 1-го неравенства из (5.2) (т.е. $|\operatorname{tg}(\gamma+\varphi)| < f$), позволяет установить следующие свойства функции $F(v)$:

$$F(1) = \frac{(a+b)^2}{f^2(1-ab)^2} < 1, \quad F(v_1 - 0) = +\infty, \quad F(v_1 + 0) = +\infty, \quad F(+\infty) = 0 \tag{5.10}$$

Из (5.10) и свойств решений, даваемых формулами (5.4), следует, что уравнение (5.6) имеет, как минимум, два решения на интервалах $(1, v_1 - 0)$ и $(v_1 + 0, +\infty)$. Причем, на этих решениях величина x из формул (5.4) принимает значения разных знаков. Таким образом, на одном из этих значений будет заведомо выполнено второе неравенство из (5.2). Отметим, что трехчлен $Q(v) = k_2v^2 + k_1v + k_0$ не может иметь два корня на указанном интервале изменения v, так как меньший корень всегда меньше единицы. Функция $Q(v) = k_2v^2 + k_1v + k_0$ обладает следующими свойствами:

$Q(0) = k_0 = b_{12}^2 - b_{11}b_{22} < 0$, в силу неравенств Сильвестра (3.8),

$$Q(1) = k_2 + k_1 + k_0 = (ab-1)c, \qquad c = 1 + b_{11} + b_{22} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0,$$

$Q(+\infty) = +\infty$, при $k_2 = (1 + b_{11})ab - 1 > 0$, $Q(+\infty) = -\infty$, при $k_2 = (1 + b_{11})ab - 1 < 0$

Далее, несложный анализ графика (который здесь опускается) квадратного трехчлена $Q(v) = k_2v^2 + k_1v + k_0$, где коэффициенты задаются формулами из (5.4), и с использованием приведенных свойств функции $Q(v) = k_2v^2 + k_1v + k_0$, показывает, что при выполнении неравенств (5.7), рассматриваемое квадратное уравнение $Q(v) = k_2v^2 + k_1v + k_0 = 0$ заведомо имеет в точности один корень на интервале $1 < v < +\infty$, и обязательное равновесие не реализуется.

Если же неравенства (5.7) нарушены, то несложно показать, используя приведенные выше свойства функции $Q(v) = k_2v^2 + k_1v + k_0$, что корней квадратного уравнения $Q(v) = k_2v^2 + k_1v + k_0 = 0$ на рассматриваемом интервале $1 < v < +\infty$ нет. Действительно, точка экстремума параболы $Q(v)$ дается уравнением

$$v_* = \frac{ab(b_{22} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2) - b_{11} - b_{22}}{2\left[1 - (1 + b_{11})ab\right]}$$

Непосредственная проверка показывает, что при нарушении неравенств (5.7) соблюдается неравенство $v_* < 1$. Таким образом, при нарушении неравенств (5.7) функция $Q(v) = k_2v^2 + k_1v + k_0$ является при $v > 1$ монотонной. Это и означает, с учетом приведенных выше свойств, что в этом случае функция $Q(v)$ при $v > 1$ корней не имеет.

Нам осталось показать, что в этих случаях уравнение (5.6) также не имеет решений. Неравенства (5.7) нарушаются в следующих двух случаях:

$$(1 + b_{11})ab < 1 \quad \text{или} \quad ab > 1$$

Пусть выполнено первое неравенство $(1 + b_{11})ab < 1$. Покажем, что в этом случае производная функции $F(v)$ в указанном интервале является строго отрицательной. Это будет означать монотонное убывание функции $F(v)$ от положительного значения $F(1) < 1$ до значения $F(+\infty) = 0$. Таким образом, уравнение (5.6) заведомо не будет иметь решений и реализуется обязательное равновесие. Вычисляем производную от функции $F(v)$ из (5.5).

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\frac{dF}{dv} = \frac{g_3 v^3 + g_2 v^2 + g_1 v + g_0}{(k_2 v^2 + k_1 v + k_0)^3} \\
g_3 = -k_2(l_1^2 + m_1^2), \quad g_2 = -3k_2\left(l_1 l_0 + m_1 m_0\right) \\
g_1 = k_0(l_1^2 + m_1^2) - 2k_2(l_0^2 + m_0^2) - k_1\left(l_1 l_0 + m_1 m_0\right) \\
g_0 = k_0\left(l_1 l_0 + m_1 m_0\right) - k_1(l_0^2 + m_0^2)
\end{gathered} \tag{5.11}
$$

Используя формулы (5.4) и неравенство (5.8), можно показать (подробности здесь опускаем, в силу громоздкости выкладок), что все коэффициенты g_k, $(k = 0, 1, 2, 3)$ кубического полинома из (5.11) являются строго положительными. Заметим, что справедливость неравенств $g_3 > 0$, $g_2 > 0$ следует из неравенств $k_2 < 0$, $l_1 l_0 + m_1 m_0 > 0$, справедливых для величин из (5.4) в рассматриваемом случае $(1 + b_{11})ab < 1$ и неравенств Сильвестра (3.8). Неравенства же $g_1 > 0$, $g_0 > 0$ получаются непосредственной проверкой, с учетом неравенства $(1 + b_{11})ab < 1$ и неравенств Сильвестра (3.8).

Далее, в рассматриваемом случае $(1 + b_{11})ab < 1$ функция $Q(v) = k_2 v^2 + k_1 v + k_0$, в силу отсутствия корней и неравенства

$$
Q(1) = k_2 + k_1 + k_0 = (ab - 1)c < 0, \quad (c = 1 + b_{11} + b_{22} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0)
$$

является строго отрицательной на всем интервале $v \in (1, +\infty)$. Таким образом, производная из (5.11) является в итоге отрицательной, а функция $F(v)$ монотонно убывает от значения $F(1) < 1$ до значения $F(+\infty) = 0$. Следовательно, уравнение (5.6) решений не имеет и в этом случае реализуется обязательное равновесие.

Случай $ab > 1$ рассматривается аналогично. В этом случае функция $Q(v) = k_2 v^2 + k_1 v + k_0$, в силу отсутствия корней и неравенства

$$
Q(1) = k_2 + k_1 + k_0 = (ab - 1)c > 0, \quad (c = 1 + b_{11} + b_{22} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0)
$$

является строго положительной на всем интервале $v \in (1, +\infty)$. Знаменатель же дроби для выражения производной функции $F(v)$ из (5.11) является отрицательным на всем интервале $v \in (1, +\infty)$. Это следует из неравенства, справедливого в данном случае:

$$
\begin{gathered}
-k_2(l_1^2 + m_1^2)v^3 - 3k_2(l_1 l_0 + m_1 m_0)v^2 + k_0(l_1^2 + m_1^2)v - 2k_2(l_0^2 + m_0^2)v - \\
- k_1(l_1 l_0 + m_1 m_0)v + k_0(l_1 l_0 + m_1 m_0) - k_1(l_0^2 + m_0^2) < \\
< -(l_0^2 + m_0^2)(2k_2 v + k_1) - v(l_1 l_0 + m_1 m_0)(3k_2 v + k_1) < 0
\end{gathered}
$$

Положительность скобок в последнем неравенстве доказывается непосредственным вычислением. Утверждение 2 доказано.

Замечание 7. Условия обязательного равновесия, представленные в заключительной части Замечания 6, формально эквивалентны аналогичным условиям, полученным в работе [6] для плоского случая твердого тела (расположенного вместе с внешними силами в плоскости Oyz), где проскальзывание точки опоры допускалось лишь вдоль оси Oy. В данной пространственной задаче это соответствует случаю возможных скольжений при условии $\alpha = \pm\pi/2$ (тогда $x = \pm 1$, $y = 0$). Несложно показать, используя уравнения (5.1), что при $b_{12} \neq 0$ и $v > 1$ таких решений быть не может. В рассматриваемой пространственной задаче (для такого специального "плоского" расположения равнодействующей G) при нарушении условий обязательности равновесия может возникнуть лишь такое проскальзывание точки опоры, которое не совпадает с осью Oy (т.е. вектор w_O не принадлежит плоскости Oyz). Причина этого несоответствия такова. В работе [6], на самом деле, рассмотрена задача об обязательности возможного равновесия цилиндрического тела, которое опирается на шероховатую плоскость не одной точкой, а целой прямой (т.е. образующей цилиндра, которым на самом деле в данном случае является рассматриваемое в [6] твердое тело). Однако, при $b_{12} = 0$ и условиях (5.7) система (5.1) имеет лишь решение $x = -1$, $y = 0$ ($\alpha = -\pi/2$). Таким образом, только в этом специальном случае (когда $b_{12} = 0$) имеется согласованность и аналогия между пространственной задачей настоящей статьи и плоской задачей, рассмотренной в [6].

6. Произвольное расположение равнодействующей G. Пусть равнодействующая G проходит через точку опоры O, но, вообще говоря, не принадлежит плоскости Oyz. Тогда угол $\psi \neq 0$. В этом случае результат аналогичен утверждению 2 из пункта 5, но является более громоздким. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. Обязательное равновесие может быть нарушено в том и только в том случае, когда квадратный трехчлен $\Delta(v)$ из (3.13) имеет хотя бы один вещественный корень на интервале $v \in (1, +\infty)$. Это эквивалентно следующим двум вариантам совокупностей неравенств.

$$1.\ 1 - b_{12}\varepsilon a < (1 + b_{11})ab < 1 + b_{11} \tag{6.1}$$

$$2.\ \left(2 + b_{11} + b_{22} - b_{12}\varepsilon a\right)/s_2 < ab < \min\left\{1, \frac{1 - b_{12}\varepsilon a}{1 + b_{11}}\right\} \tag{6.2}$$

$$\begin{gathered} \left(abs_2 - 2 - b_{11} - b_{22} + b_{12}\varepsilon a\right)^2 - 4\left[(1 + b_{11})ab + b_{12}\varepsilon a - 1\right] s_1(ab - 1) > 0 \\ s_1 = (1 + b_{11})(1 + b_{22}) - b_{12}^2 > 0, \quad s_2 = (1 + b_{11})(2 + b_{22}) - b_{12}^2 > 0 \end{gathered} \tag{6.3}$$

Напомним, что в (6.1)–(6.3) приняты обозначения $a = \operatorname{tg}\gamma > 0$, $b = \operatorname{tg}\varphi$, $\varepsilon = \operatorname{tg}\psi/\cos\varphi$.

Таким образом, 1-я часть условий обязательного равновесия (отсутствие скольжения) состоит в том, что нарушены, во-первых, неравенства (6.1) и, во-вторых, нарушается хотя бы одно из неравенств (6.2) или (6.3). Кроме того, должно быть выполнено неравенство (2.5) – условие возможного равновесия.

2-я часть условий обязательного равновесия получается из неравенства (3.19), гарантирующего отсутствие отрыва тела от опоры. В результате получаем следующие неравенства

$$(1 + b_{11})ab < 1 - b_{12}\varepsilon a, \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0, \quad (1 + b_{11})ab > 1 - b_{12}\varepsilon a, \quad \text{при } \varepsilon < 0$$

Отметим, что области параметров, удовлетворяющих либо неравенствам (6.1), либо неравенствам (6.2) и (6.3), являются непустыми.

Доказательство утверждения 3 аналогично доказательству утверждения 2. Как и выше, при доказательстве утверждения 2, покажем сначала, что при наличии вещественного корня квадратного уравнения $\Delta(v) = 0$ из (3.13) при $v > 1$, уравнение $x^2 + y^2 = 1$, где x, y определяются формулами (3.12)–(3.14), заведомо имеет решения при $v > 1$. Далее, определим условия, при которых уравнение $\Delta(v) = 0$ имеет решения при $v > 1$. Для этого введем переменную $z = v - 1$ и воспользуемся тождеством

$$\begin{gathered} \Delta(v) = \left(q_2 z^2 + q_1 z + q_0\right)\Big/\cos\gamma \\ q_0 = s_1(ab - 1), \quad q_1 = s_2 ab - 2 - b_{11} - b_{22} + b_{12}\varepsilon a, \quad q_2 = (1 + b_{11})ab + b_{12}\varepsilon a - 1 \end{gathered} \tag{6.4}$$

В (6.4) параметры s_1, s_2 введены в формулах (6.3).

Тогда несложно получаются условия (6.1)–(6.3), представляющие собой условия наличия при $z > 0$ вещественных корней квадратного уравнения $q_2 z^2 + q_1 z + q_0 = 0$ (при введенных в (6.4) обозначениях для q_0, q_1, q_2).

Если же условия (6.1)–(6.3) нарушаются, как это было указано в формулировке утверждения 3, то мы вычисляем производную по v от выражения $x^2 + y^2$, согласно формуле (5.11), где параметры k, l, m определяются формулами (3.13), (3.14). Затем показываем, что все коэффициенты полинома 3-го порядка $g_3v^3 + g_2v^2 + g_1v + g_0$ имеют знак противоположный знаку трехчлена $\Delta(v)$ при нарушении неравенств (6.1)–(6.3). Подробности здесь опускаются ввиду громоздкости выкладок.

Замечание 8. Области параметров задачи, в которых нарушаются неравенства (6.1) или (6.2) (т.е. области обязательного равновесия) могут быть определены численно с использованием стандартных компьютерных приложений. В общем случае для любых конкретных значений параметров задачи с помощью формул (6.1) или (6.2) можно определить является рассматриваемое положение возможного равновесия обязательным или нет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джеллетт Д.Х.* Трактат по теории трения. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2009. 264 с.

2. *Пенлеве П.* Лекции о трении. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1954. 316 с.

3. *Журавлёв В.Ф.* Закономерности трения при комбинации скольжения и верчения // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 4. С. 81–88.

4. *Андронов В.В., Журавлёв В.Ф.* Сухое трение в задачах механики. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2010. 184 с.

5. *Розенблат Г.М.* Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела. М.: ЛИБРОКОМ, 2010. 205 с.

6. *Иванов А.П.* Основы теории систем с трением. М.: Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2011. 304 с.

7. *Mamaev I.S., Ivanova T.B.* The dynamics of a rigid body with a sharp edge in contact with an inclined surface in the presence of dry friction // Regul. Chaot. Dyn. 2014. V. 19. B. 1. P. 116–139. https://doi.org/10.1134/S1560354714010080

8. *Vaganian A.* On generalized Coulomb-Amonton’s law in the context of rigid body dynamics // Nonlinear Dyn. 2020. V. 101. P. 2145–2155. https://doi.org/10.1007/s11071-020-05948-1

9. *Журавлев В.Ф., Розенблат Г.М.* Парадоксы, контрпримеры и ошибки в механике. М.: URSS, 2017. 235 с.

10. *Иванов А.П.* О равновесии систем с сухим трением // ПММ. 2015. Т. 79. В. 3. С. 317–333.

11. *Розенблат Г.М.* О равновесии скамейки Жуковского // Докл. РАН. 2017. Т. 472. № 6. С. 659–665. https://doi.org/10.7868/S0869565217060111

12. *Розенблат Г.М.* О равновесии твердого тела, опирающегося одной точкой на шероховатую плоскость // Докл. РАН. Физика, техн. науки. 2021. Т. 500. № 1. С. 57–64. https://doi.org/10.31857/S2686740021050096

13. *Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В.* Теоретическая механика: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования. М.: Академия, 2010. 432 с.

14. *Lowrence J.D.* A catalog of special plane curves. N.-Y.: Dover Publications, 1972. 382 p.