

УДК 539.3

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ДИСПЕРСИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ СТЕРЖНЯХ

© 2024 г. А. И. Каракозова^{а,*}

^а *Национальный исследовательский Московский Государственный Строительный
Университет, Москва*

**e-mail: karioca@mail.ru*

Поступила в редакцию 01.02.2023 г.

После доработки 23.02.2023 г.

Принята к публикации 27.02.2023 г.

Гармонические акустические волны в полубесконечном функционально-градиентном (ФГ) одномерном стержне с продольной произвольной неоднородностью анализируются комбинированным методом, основанным на модифицированном формализме Коши и методе экспоненциальных матриц. Построены замкнутые дисперсионные уравнения для гармонических волн, из решения которых получены неявные дисперсионные соотношения для акустических волн в ФГ стержнях. Для продольной неоднородности полиномиального типа соответствующие дисперсионные соотношения строятся в явном виде.

Ключевые слова: акустическая волна, неоднородный стержень, затухание сигнала, магнитуда перемещений, продольная неоднородность

DOI: 10.31857/S1026351924010023, EDN: WAZXAA

1. Введение. *1.1. Акустические волны в ФГ-средах.* Последние исследования поверхностных акустических волн (ПАВ) в функционально-градиентных (ФГ) и слоистых пластинах с поперечной неоднородностью выявили ряд особенностей дисперсионных свойств, так как точки с нулевой групповой скорости (НГВ), принадлежащие фундаментальным ветвям, точки пересечения и расхождения между фундаментальной ветвью и нижними ветвями высших мод и др. [1–10]. Большое количество работ посвящено развитию численных методов решения дисперсионных уравнений для направленных волн в ФГ-пластинах; так, в [11] используются ряды Пеано; проекционный метод Галеркина предложен в [12]; несколько подходов связаны с разложением упругих потенциалов, полей напряжений и перемещений и варьированием свойств материала по полиномам Лежандра [13–15] или применением метода спектральных элементов (СЭМ); см. [16, 17].

Дисперсионные волны Похгаммера–Кри в слоистых и ФГ-стержнях с поперечной неоднородностью изучаются либо с помощью аналитических подходов [18–22], подходящих для некоторых конкретных видов неоднородностей,

либо численно, чаще всего с помощью СЭМ в пользу МКЭ; см. [23] или полиномы Лежандра [24]. Хотя волны в одномерных ФГ-стержнях могут не иметь таких обильных дисперсионных явлений, которые наблюдаются в ФГ-пластинах [25] и трехмерных или аксиально-симметричных ФГ-стержнях, тем не менее, как показано ниже, волны в одномерных стержнях обладают несколькими необычными свойствами в отношении дисперсии и изменения энергии. Достаточно большое количество работ посвящено волновой динамике ФГ-сред с пьезоэлектрическими [26, 27], пористыми пьезоэлектрическими [28, 29] и пьезомагнитными свойствами [30].

1.2. Предмет исследования. Настоящее исследование направлено на: (i) построение определяющего уравнения и его решение для акустических волн в полубесконечном ФГ-стержне 1D с произвольной продольной неоднородностью; (ii) определение пространственного изменения энергии и величины осциллирующих волн; и (iii) получение дисперсионных свойств осциллирующих волн. Предполагается, что пространственная неоднородность относится к классу $C^1(R_+)$, т.е. непрерывно дифференцируема в интервале $x \in (0; +\infty)$; см. рис. 1. Предполагается также, что соответствующие физические свойства удовлетворяют условию сильной эллиптичности по R_+ и имеют конечный и ненулевой пределы при $x \rightarrow +0$ и $x \rightarrow \infty$; более подробно эти условия обсуждаются в следующем разделе. Решение в замкнутой форме для дисперсионного уравнения строится комбинацией шестимерного формализма Коши и экспоненциально-го метода фундаментальных матриц, оба метода ранее были разработаны для дисперсионного анализа направленных волн в слоистых и ФГ-пластинах [25].



Рис. 1. 1D ФГ-стержень; n показывает направление нормали волны и x показывает направление координатной оси вдоль направления распространения волны.

Ниже показано, что пространственные распределения энергии, величин напряжений и перемещений сильно зависят как от частотной, так и от пространственной дисперсии свойств материала, что делает полученные результаты важными для лучшего понимания природы распространения волн в ФГ-средах.

2. Основные уравнения. **2.1. Уравнение движения.** Уравнение движения одномерного упругого стержня с продольной неоднородностью класса $C^1(R_+)$ имеет вид [31]

$$(\rho(x)\partial_t^2 - \partial_x E(x)\partial_x)u(x,t) = 0, \quad (2.1)$$

где $\rho(x)$ – плотность материала; $E(x)$ – модуль упругости; $u(x,t)$ – продольное перемещение; x – пространственная переменная; t – время. Для обеспечения гиперболичности уравнения (2.1) накладываются следующие естественные ограничения

$$\rho(x) > 0, \quad E(x) > 0, \quad (2.2)$$

Чтобы представить уравнение в безразмерной форме, введем безразмерные постоянные ρ_d , E_d , x_d , t_d , имеющие размерность плотности, напряжений, длины и времени соответственно, дающие соответствующие безразмерные функции

$$\rho'(x') = \frac{\rho(x)}{\rho_d}, E'(x') = \frac{E(x)}{E_d}, u'(x', t') = \frac{u(x, t)}{x_d} \quad (2.3)$$

где

$$x' = \frac{x}{x_d}, t' = \frac{t}{t_d}. \quad (2.4)$$

В дальнейшем будем предполагать, что все функции безразмерны; штрих далее будет опущен для краткости.

Введение новой переменной (напряжение)

$$\sigma(x, t) = E(x) \partial_x u(x, t). \quad (2.5)$$

Уравнение (2.1) превращается в систему дифференциальных уравнений первого порядка по переменной x

$$\begin{aligned} \partial_x u(x, t) &= E(x)^{-1} \sigma(x, t) \\ \partial_x \sigma(x, t) &= \rho(x) \partial_t^2 u(x, t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Следуя [32], рассмотрим гармоническую во времени волну с пространственно изменяющимися амплитудами

$$u(x, t) = m(x) e^{i\omega t}, \sigma(x, t) = \tau(x) e^{i\omega t}, \quad (2.7)$$

где $m(x)$ – искомая амплитуда, а ω – безразмерная круговая частота.

Вводя новую векторную функцию

$$\mathbf{a}(x) = \begin{pmatrix} m(x) \\ \tau(x) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

и подстановка выражения (2.7) в уравнение (2.6) дает следующее матричное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\partial_x \mathbf{a}(x) = \mathbf{G}(x) \cdot \mathbf{a}(x), \quad (2.9)$$

где

$$\mathbf{G}(x) = \begin{pmatrix} 0 & E(x)^{-1} \\ -\omega^2 \rho(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.9) будем использовать для построения общих решений.

Рассматриваемые акустические волны, распространяющиеся в полубесконечном стержне, удовлетворяют следующим начальным и граничным условиям

$$u(x, t)|_{t=0} = 0, \partial_t u(x, t)|_{t=0} = 0, u(x, t)|_{x=0} = u_0 e^{i\omega t}. \quad (2.11)$$

Отметим, что с учетом гармонического во времени колебания (2.7) условие затухания Зоммерфельда становится менее ограничительным, чем для негармонических колебаний [33]:

$$|u(x, t)|_{x \rightarrow +\infty} < \infty. \quad (2.12)$$

Ввиду уравнения (2.7) обеспечение периодичности поля перемещений по переменной во времени, не существует предельных значений для функции $u(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$ и какого-либо конечного x .

2.2. *Общее решение.* Общее решение уравнения (2.9) допускает следующий вид [34, 35]

$$\mathbf{a}(x) = \exp(\mathbf{F}(x)) \cdot \mathbf{a}_0, \quad (2.13)$$

где $\mathbf{F}(x)$ является первообразной $\mathbf{G}(x)$ и \mathbf{a}_0 – вектор, определяемый граничными условиями.

$$\mathbf{F}(x) = \int \mathbf{G}(x') dx'. \quad (2.14)$$

Предполагая матрицу \mathbf{F} полупростой и учитывая ее жорданову нормальную форму, получаем

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{W}(x) \cdot \mathbf{D}(x) \cdot \mathbf{W}^{-1}(x), \quad (2.15)$$

где \mathbf{W} – матрица, составленная из собственных векторов матрицы \mathbf{F} , составленная по столбцам, и \mathbf{D} – диагональная матрица, составленная из собственных векторов матрицы \mathbf{F} . При разложении (2.15) матрица показателей в (2.13) имеет вид

$$\exp(\mathbf{F}(x)) = \mathbf{W}(x) \cdot \exp(\mathbf{D}(x)) \cdot \mathbf{W}^{-1}(x). \quad (2.16)$$

С учетом уравнений (2.10), (2.14), матрицы $\mathbf{W}(x)$ и $\mathbf{D}(x)$ в представляются в следующем виде

$$\mathbf{W}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{a(x)}}{\sqrt{b(x)}} & -\frac{\sqrt{a(x)}}{\sqrt{b(x)}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D}(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{a(x)b(x)} & 0 \\ 1 & -\sqrt{a(x)b(x)} \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

где

$$a(x) = \int \frac{dx'}{E(x')}, b(x) = -\omega^2 \int \rho(x') dx'. \quad (2.18)$$

Отметим, что собственные векторы, расположенные в столбцах матрицы \mathbf{W} , не нормализованы. Случай неполупросто \mathbf{F} приводит к появлению жордановой клетки в разложении и одного собственного и одного обобщенного собственных векторов в матрице \mathbf{W} . Хотя такой случай физически возможен, он очень редок и в данной работе не рассматривается.

Выполняя операцию умножения в разложении (2.16) и учитывая (2.17)

$$\exp(\mathbf{D}(x)) = \begin{pmatrix} \exp(\sqrt{a(x)b(x)}) & 0 \\ 0 & \exp(-\sqrt{a(x)b(x)}) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

получаем

$$\exp(\mathbf{F}(x)) = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{a(x)b(x)}) & \frac{\sqrt{a(x)}}{\sqrt{b(x)}} \sinh(\sqrt{a(x)b(x)}) \\ \frac{\sqrt{b(x)}}{\sqrt{a(x)}} \sinh(\sqrt{a(x)b(x)}) & \cosh(\sqrt{a(x)b(x)}) \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Матрица показателей в (2.20) обладает интересным свойством.

Предложение 2.1. При любых $E(x)$, $\rho(x)$, удовлетворяющих условиям (2.2), матрица показателей $\exp(\mathbf{F}(x))$ не является вырожденной, более того

$$\det(\exp(\mathbf{F}(x))) = 1. \quad (2.21)$$

Доказательство вытекает из рассмотрения правой части уравнения (2.20).

Следствие [36]. Ввиду уравнений (2.10), (2.14) и условия (2.21) экспоненциальное отображение $\exp(\mathbf{F}(x))$ сохраняет площадь.

Отметим, что ввиду отрицательного значения $b(x)$ в уравнении компоненты матрицы (2.17) являются мнимыми. Таким образом, матрица показателей в может быть записана через тригонометрические функции

$$\exp(\mathbf{F}(x)) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{a(x)|b(x)|}) & \frac{\sqrt{a(x)}}{\sqrt{|b(x)|}} \sin(\sqrt{a(x)|b(x)|}) \\ -\frac{\sqrt{|b(x)|}}{\sqrt{a(x)}} \sin(\sqrt{a(x)|b(x)|}) & \cos(\sqrt{a(x)|b(x)|}) \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

2.3. Поля напряжений и перемещений. Граничные условия позволяют записать вектор \mathbf{a}_0 из (2.13) следующим образом

$$\mathbf{a}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Соединяя (2.13), (2.22) и (2.23), запишем выражения для полей напряжений и перемещений

$$u(x, t) = \cos(\sqrt{a(x)|b(x)|}) u_0 e^{i\omega t}, \quad \sigma(x, t) = -\sqrt{\frac{|b(x)|}{a(x)}} \sin(\sqrt{a(x)|b(x)|}) u_0 e^{i\omega t}. \quad (2.24)$$

Откуда получим величины напряжений и перемещений

$$|m(x)| = \left| \cos(\sqrt{a(x)|b(x)|}) u_0 \right|, \quad |\tau(x)| = \left| \sqrt{\frac{|b(x)|}{a(x)}} \sin(\sqrt{a(x)|b(x)|}) u_0 \right|. \quad (2.25)$$

2.4. *Кинетическая и потенциальная энергия.* Введем безразмерный период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2.26)$$

Выражения (2.24) дают удельную кинетическую энергию и энергию деформации за период T :

$$\begin{aligned} E_k &\equiv \frac{1}{2} \rho(x) \int_0^T |\partial_t u(x,t)|^2 dt = \frac{\pi}{\omega} \rho(x) \cos^2 \left(\sqrt{a(x)|b(x)} \right) u_0^2 \\ E_s &\equiv \frac{1}{2} (E(x))^{-1} \int_0^T |\sigma(x,t)|^2 dt = \frac{\pi}{\omega E(x)} \frac{|b(x)|}{a(x)} \sin^2 \left(\sqrt{a(x)|b(x)} \right) u_0^2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

3. Полиномиальные неоднородности. 3.1. Общие биномы. Класс положительных полиномов R может быть представлен в виде суммы двух квадратов [37].

$$\rho(x) = \left(\sum_{k=1}^n \rho_k x^k \right)^2 + \rho_0, \quad E(x) = \left(\sum_{k=1}^n E_k x^k \right)^2 + E_0 \quad (3.1)$$

с реальными коэффициентами $\rho_k, k=1, \dots, n$; $E_k, k=1, \dots, m$ и положительными ρ_0 и E_0 .

Здесь рассматривается менее ограничительный класс положительных многочленов от R_+ , это генерируется следующими биномами [38]

$$\rho(x) = \rho_n x^n + \rho_0, \quad E(x) = E_m x^m + E_0 \quad (3.2)$$

с неотрицательными коэффициентами $\rho_n, E_m \geq 0$ и положительными $\rho_0, E_0 > 0$.

Подставляя биномы (3.2) в уравнение (2.18), получаем

$$a(x) = \frac{1}{mE_0} \Phi \left(-\frac{E_m}{E_0} x^m; 1; \frac{1}{m} \right), \quad b(x) = -\omega^2 \left(\frac{\rho_n}{n+1} x^{n+1} + \rho_0 x \right). \quad (3.3)$$

где Φ — Φ -функция Лерча, см. [39, 40]. Учитывая эти выражения, амплитуды в (2.25) будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} |m(x)| &= \left| \cos \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{mE_0} \left(\frac{\rho_n}{n+1} x^{n+1} + \rho_0 x \right)} \Phi \left(-\frac{E_m}{E_0} x^m; 1; \frac{1}{m} \right) \right) u_0 \right| \\ |\tau(x)| &= \left| \frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{mE_0} \left(\frac{\rho_n}{n+1} x^{n+1} + \rho_0 x \right)}}{\sqrt{\frac{1}{mE_0} \Phi \left(-\frac{E_m}{E_0} x^m; 1; \frac{1}{m} \right)}} \sin \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{mE_0} \left(\frac{\rho_n}{n+1} x^{n+1} + \rho_0 x \right)} \Phi \left(-\frac{E_m}{E_0} x^m; 1; \frac{1}{m} \right) \right) u_0 \right|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Аналогично, уравнения удельной энергии (2.27):

$$E_k = \frac{\pi}{\omega} (\rho_n x^n + \rho_0) \cos^2 \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{mE_0} \left(\frac{\rho_n}{n+1} x^{n+1} + \rho_0 x \right)} \Phi \left(-\frac{E_m}{E_0} x^m; 1; \frac{1}{m} \right) \right) u_0^2$$

$$E_s = \frac{\pi}{\omega(E_m x^m + E_0)} \times \frac{\omega^2 \left(\frac{\rho_n}{n+1} x^{n+1} + \rho_0 x \right)}{mE_0 \Phi \left(-\frac{E_m}{E_0} x^m; 1; \frac{1}{m} \right)} \times$$

$$\times \sin^2 \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{mE_0} \left(\frac{\rho_n}{n+1} x^{n+1} + \rho_0 x \right)} \Phi \left(-\frac{E_m}{E_0} x^m; 1; \frac{1}{m} \right) \right) u_0^2. \quad (3.5)$$

3.2. *Линейные биномы.* Рассмотрим теперь линейное изменение акустических свойств

$$\rho(x) = \rho_1 x + \rho_0, E(x) = E_1 x + E_0 \quad (3.6)$$

с положительными коэффициентами ρ_0, E_0 и неотрицательными ρ_1, E_1 . Подстановка линейных членов (3.2) в уравнение (2.18) дает

$$a(x) = \frac{1}{E_0} \ln(E_1 x + E_0), b(x) = -\omega^2 \left(\frac{\rho_1}{2} x^2 + \rho_0 x \right), \quad (3.7)$$

откуда получаем

$$|m(x)| = |\cos \eta(x)| u_0, |\tau(x)| = \left| \frac{\omega^2 \left(\frac{\rho_1}{2} x^2 + \rho_0 x \right)}{\frac{1}{E_0} \ln(E_1 x + E_0)} \sin \eta(x) \right| u_0, \quad (3.8)$$

где

$$\eta(x) = \sqrt{\frac{\omega^2}{E_0} \left(\frac{\rho_1}{2} x^2 + \rho_0 x \right)} \ln(E_1 x + E_0). \quad (3.9)$$

Принимая во внимание уравнения (3.8), где $\eta(x)$ представляет собой аргумент тригонометрической функции, и согласно [41, 42], представим так называемую пространственную частоту

$$\Omega_\eta(x) \equiv \partial_x \eta(x) = \frac{\sqrt{2}\omega}{4} \frac{2 \left(\ln(E_1 x + E_0) \right) (\rho_1 x + \rho_0) (E_1 x + E_0) + x E_1 (\rho_1 x + 2\rho_0)}{\sqrt{\left(\ln(E_1 x + E_0) \right) x (\rho_1 x + 2\rho_0) E_0 (E_1 x + E_0)}}. \quad (3.10)$$

Для предполагаемого случая, выражение для удельной энергии (2.27) представим в виде

$$E_k = \frac{\pi}{\omega} (\rho_1 x + \rho_0) (\cos^2 \eta) u_0^2, E_s = \frac{\pi \omega E_0 \left(\frac{\rho_1}{2} x^2 + \rho_0 x \right) (\sin^2 \eta) u_0^2}{(E_1 x + E_0) \ln(E_1 x + E_0)}. \quad (3.11)$$

Типичные графики вариаций магнитуд и энергии показаны на рис. 1 и 2. Графики на рис. 1 соответствуют возрастающей с расстоянием фазовой скорости $c(x) = \sqrt{E(x)/\rho(x)}$ и следующим безразмерным параметрам материала модели:

$$\rho_0 = 1, \rho_1 = 0.005, E_0 = 1, E_1 = 0.01. \quad (3.12)$$

Графики на рис. 2 показывают, что (i) величина смещения не меняется с расстоянием, что связано с наложенным граничным условием Дирихле на левом конце стержня; (ii) величина напряжения увеличивается (почти линейно в рассматриваемых полулогарифмических координатах), что в основном связано с увеличением модуля упругости; (iii) удельная энергия деформации нелинейно увеличивается с расстоянием, то есть опять же в основном за счет увеличения модуля упругости; и (iv) удельная кинетическая энергия медленно увеличивается в основном за счет увеличения плотности.

Графики на рис. 3 соответствуют убывающей с расстоянием фазовой скорости и следующим безразмерным параметрам модельного материала

$$\rho_0 = 1, \rho_1 = 0.01, E_0 = 1, E_1 = 0.005. \quad (3.13)$$

Графики на рис. 3 демонстрируют почти такое же поведение, как и графики на рис. 2. Таким образом, оба рассмотренных случая, связанные как с увеличением, так и с уменьшением фазовой скорости, не приводят к существенным изменениям вариаций величин и энергий.

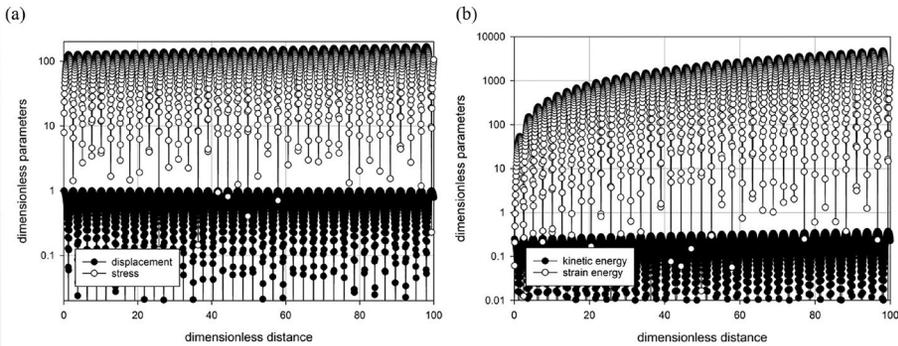


Рис. 2. Вариации величин и удельных энергий с расстоянием для линейного бинорма при гармоническом по времени возбуждении 2 Гц и возрастающей фазовой скорости; (а) величины; (б) удельные энергии.

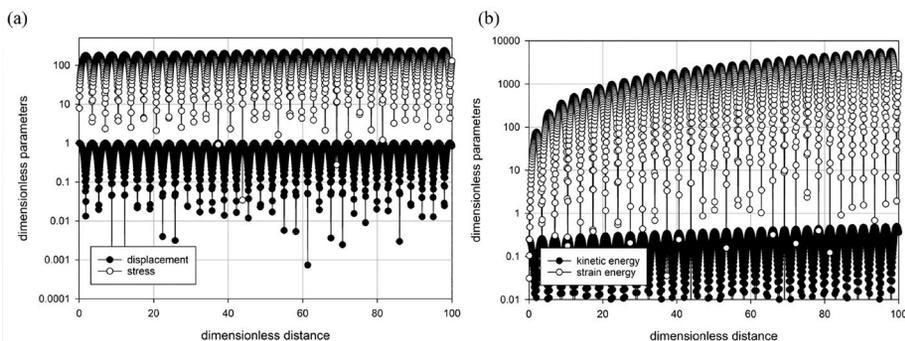


Рис. 3. Изменения модулей и удельных энергий с расстоянием для линейного бинома при гармоническом по времени возбуждении 2 Гц и убывающей фазовой скорости; (a) величины; (b) удельные энергии.

4. Заключение. Сравнение величин напряжений и перемещений, показанных для линейных (рис. 2,а, 3,а) биномиальных вариаций соответствующей плотности материала и модуля упругости, показывает, что во всех рассмотренных случаях наблюдаются более выраженные колебания с гораздо меньшей видимой частотой относительно к линейным биномам; это связано с гораздо меньшей пространственной частотой Ω_η , чем Ω_ξ . В то же время величина смещения остается практически стабильной независимо от биномиала, а величина напряжения демонстрирует относительно небольшой рост с расстоянием. Анализ изменения удельной энергии показывает, что в случаях линейных биномов энергия деформации увеличивается нелинейно, тогда как кинетическая энергия остается практически стабильной (рис. 2,б, 3,б).

Полученные результаты могут иметь различные приложения, начиная от микро- и наномеханики при нахождении полей напряжений и смещений и пространственной частоты акустических волн, распространяющихся в микро- и нанотрубках, до геофизических приложений, особенно при количественной оценке неизвестных физических свойств земной коры. Следует также отметить, что, согласно обзору литературы, ни величины полей перемещений, ни пространственное изменение энергии для случая гармонических волн в одномерных ФГ-стержнях не изучались. Однако изменение скорости определяется простой формулой для скорости стержня или, в более общем случае, длинноволновой предельной скоростью, см. [45–47].

И последнее замечание касается сравнения изменений величины и энергии в полиномиально неоднородных стержнях со стержнями, имеющими периодическую неоднородность [48]; если рассматриваемая полиномиальная неоднородность приводит к различным пространственным частотам, которые могут меняться с расстоянием, как это наблюдалось в [48], то периодическая неоднородность не приводит к такому изменению. Кроме того, пространственное распределение энергии зависит от типа неоднородности; например, в исследованных случаях полиномиальной неоднородности и кинетическая энергия, и энергия деформации изменяются с расстоянием нелинейно, в то время как в случае периодически неоднородного стержня и кинетическая энергия, и энергия

деформации колеблются с расстоянием с постоянным пространственным периодом, но их величины остаются почти постоянны; см. [48].

Работа финансировалась Министерством науки и высшего образования РФ, проект № FSWG-2023-0004 “Система территориальной сейсмической защиты критически важных объектов инфраструктуры на основе гранулированных метаматериалов, обладающих свойствами широкодиапазонных фононных кристаллов”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baron C. & Naili S.* Propagation of elastic waves in a fluid-loaded anisotropic functionally graded waveguide: application to ultrasound characterization // *J. Acoust. Soc. Am.* 2010. V. 127(3). P. 1307–1317. <https://doi.org/10.1121/1.3292949>
2. *Bendenia N. et al.* Deflections, stresses and free vibration studies of FG-CNT reinforced sandwich plates resting on Pasternak elastic foundation // *Comp. Concrete.* 2020. V. 26. № 3. P. 213–226. <https://doi.org/10.12989/cac.2020.26.3.213>
3. *Gupta A. & Talha M.* Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures // *Prog. Aersp. Sci.* 2015. V. 79. P. 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2015.07.001>
4. *Han X. et al.* A quadratic layer element for analyzing stress waves in FGMs and its application in material characterization // *JSV.* 2000. V. 236(2). P. 307–321. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.2966>
5. *Ilyashenko A.V. et al.* SH waves in anisotropic (monoclinic) media // *Z. Angew. Math. Phys.* 2018. 69(17). P. 17. <https://doi.org/10.1007/s00033-018-0916-y>
6. *Kuznetsov S.V.* Cauchy formalism for Lamb waves in functionally graded plates // *J. Vibr. Control.* 2019. V. 25. № 6. P. 1227–1232. <https://doi.org/10.1177/1077546318815376>
7. *Kuznetsov S.V.* Lamb waves in stratified and functionally graded plates: discrepancy, similarity, and convergence // *Waves Rand. Complex Media.* 19. V. 31(6). P. 1–10. <https://doi.org/10.1080/17455030.2019.1683257>
8. *Li Z., Yu J., Zhang X. & Elmaimouni L.* Guided wave propagation in functionally graded fractional viscoelastic plates: A quadrature-free Legendre polynomial method // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2020. V. 29(16). P. 1–21. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1860273>
9. *Menasria A. et al.* A four-unknown refined plate theory for dynamic analysis of FG-sandwich plates under various boundary conditions // *Steel Comp. Struct.* 2020. V. 36(3). P. 355–367. <https://doi.org/10.12989/scs.2020.36.3.355>
10. *Vlasie V. & Rousseau M.* Guide modes in a plane elastic layer with gradually continuous acoustic properties // *NDT&E Int.* 2004. V. 37(8). P. 633–644. <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2004.04.003>
11. *Amor M.B. & Ghazlen M.H.B.* Lamb waves propagation in functionally graded piezoelectric materials by Peano-series method // *Ultrasonics.* 2015. V. 55. P. 10–14. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2014.08.020>
12. *Chikr S.C. et al.* A novel four-unknown integral model for buckling response of FG sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions using Galerkin's approach // *Geomech. Eng.* 2020. V. 21. № 5. P. 471–487. <https://doi.org/10.12989/gae.2020.21.5.471>
13. *Lefebvre J.E. et al.* Acoustic wave propagation in continuous functionally graded plates: an extension of the Legendre polynomial approach // *IEEE T Ultrason. Ferr.* 2001. V. 48(5). P. 1332–1340. <https://doi.org/10.1109/58.949742>
14. *Othmani C. et al.* Numerical simulation of lamb waves propagation in a functionally graded piezoelectric plate composed of GaAs-AlAs materials using Legendre polynomial approach // *Optik.* 2017. V. 142. P. 401–411.

15. Yu J.G. et al. Propagating and non-propagating waves in infinite plates and rectangular cross section plates: orthogonal polynomial approach // *Acta Mech.* 2017. V. 228(11). P. 3755–3769. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1917-1>
16. Gopalakrishnan S., Ruzene M. & Hanagud S. Spectral Finite Element Method. In: *Computational Techniques for Structural Health Monitoring*. In: Springer Series in Reliability Engineering. London: Springer, 2011. 440 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-85729-284-1>
17. Nanda N. & Kapuria S. Spectral finite element for wave propagation analysis of laminated composite curved beams using classical and first order shear deformation theories // *Composite Struct.* 2015. V. 132. № 3. P. 310–320. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.04.061>
18. Baron C. Propagation of elastic waves in an anisotropic functionally graded hollow cylinder in vacuum // *Ultrasonics.* 2011. V. 51. № 2. P. 123–130. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2010.07.001>
19. Honarvar F., Enjilela E., Sinclair A. & Mirnezami S. Wave propagation in transversely isotropic cylinders // *Int. J. Solids and Struct.* 2007. V. 44. № 16. P. 5236–5246. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.12.029>
20. Ilyashenko A.V. et al. Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // *Arch. Appl. Mech.* 2018. V. 88. P. 1385–1394. <https://doi.org/10.1007/s00419-018-1377-7>
21. Rigby S.E., Barr A.D. & Clayton M. A review of Pochhammer–Chree dispersion in the Hopkinson bar // *Proc. Inst. Civil Eng. – Eng. Comp. Mech.* 2018. V. 171. № 1. P. 3–13. <https://doi.org/10.1680/jencm.16.00027>
22. Wu B., Su Y.P., Liu D.Y., Chen W.Q. & Zhang C.Z. On propagation of axisymmetric waves in pressurized functionally graded elastomeric hollow cylinders // *J. Sound Vibr.* 2018. V. 412. № 12. P. 17–47. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.01.055>
23. Xu Ch. & Yu Z. Numerical simulation of elastic wave propagation in functionally graded cylinders using time-domain spectral finite element method // *Adv. Mech. Eng.* 2017. 9 (11). P. 1–17. <https://doi.org/10.1177/1687814017734457>
24. Zhang B. et al. Axial guided wave characteristics in functionally graded one-dimensional hexagonal piezoelectric quasi-crystal cylinders // *Math. Mech. Solids.* 2022. V. 27. № 1. P. 125–143. <https://doi.org/10.1177/10812865211013458>
25. Kuznetsov S.V. Abnormal dispersion of flexural Lamb waves in functionally graded plates // *Z. Angew. Math. Phys.* 2019. V. 70 (89). P. 1–8. <https://doi.org/10.1007/s00033-019-1132-0>
26. Guha S. & Singh A.K. Influence of varying fiber volume fractions on plane waves reflecting from the stress-free/rigid surface of a piezoelectric fiber-reinforced composite half-space // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2022. V. 29. № 27. P. 5758–5772. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1964046>
27. Singh A.K., Rajput P., Guha S. & Singh S. Propagation characteristics of love-type wave at the electro-mechanical imperfect interface of a piezoelectric fiber-reinforced composite layer overlying a piezoelectric half-space // *Europ. J. Mech. – A/Solids.* 2022. V. 93. P. 104527. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104527>
28. Singh S., Singh A.K. & Guha S. Shear waves in a piezo-fiber-reinforced-poroelastic composite structure with sandwiched functionally graded buffer layer: Power series approach // *Europ. J. Mech. – A/Solids.* 2022. V. 92. P. 104470. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104470>
29. Singh S., Singh A.K., & Guha S. Impact of interfacial imperfections on the reflection and transmission phenomenon of plane waves in a porous-piezoelectric model // *Appl. Math. Model.* 2021. V. 100. P. 656–675. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.08.022>
30. Singh A.K., Mahto S. & Guha S. Analysis of plane wave reflection and transmission phenomenon at the interface of two distinct micro-mechanically modeled rotating initially stressed piezomagnetic fiber-reinforced half-spaces // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2022. V. 29. № 28. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.2003490>
31. Gurtin M.E. *The Linear Theory of Elasticity*. Verlag, Berlin: Springer, 1976.
32. Rauch J. & Reed M. Nonlinear microlocal analysis of semilinear hyperbolic systems in one space dimension // *Duke Math. J.* 1982. V. 49. P. 397–475.

33. *Hartman Ph.* Ordinary Differential Equations (Classics in Applied Mathematics) 2nd Ed. Philadelphia: SIAM, 1987.
34. *Higham N.J.* Functions of Matrices: Theory and Computation. N.Y.: SIAM, 2008.
35. *Kuznetsov S.V.* Love waves in layered anisotropic media // *J. Appl. Math. Mech.* 2006. V. 70(1). P. 116–127. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2006.03.004>
36. *Gómez, A. & Meiss J.D.* Volume-preserving maps with an invariant // *Chaos: Int. J. Nonlinear Sci.* 2002. V. 12(2). P. 289–299. <https://doi.org/10.1063/1.1469622>
37. *Benoist O.* Writing positive polynomials as sums of (few) squares // *EMS Newsletter.* 2017. V. 9(105). P. 8–13. <https://doi.org/10.4171/NEWS/105/4>
38. *Handelman D.* Representing polynomials by positive linear functions on compact convex polyhedral // *Pacific J. Math.* 1988. V. 132(1). P. 35–62. <https://doi.org/10.2140/pjm.1988.132.35>
39. *Ivic A.* The Riemann Zeta-Function, Wiley: New York, 1985.
40. *Kuznetsov S.V.* Fundamental and singular solutions of Lamé equations for media with arbitrary elastic anisotropy // *Quart. Appl. Math.* 2005, V. 63. P. 455–467. <https://doi.org/10.1090/S0033-569X-05-00969-X>
41. *Hörmander L.* The Analysis of Linear Partial Differential Operators III: Pseudo-Differential Operators. N.Y.: Springer: 2007.
42. *Boreman G.D.* Modulation Transfer Function in Optical and Electro-Optical Systems. Bellingham, WA.: SPIE Press, 2001.
43. *Ziegler P.A., Schumacher M.E., Dezes P., van Wees J.-D. & Cloetingh S.* Post-Variscan evolution of the lithosphere in the area of the European Cenozoic Rift System. London: Mem. Geol. Soc., 2006. P. 97–112. <https://doi.org/10.1144/GSL.MEM.2006.032.01.06>
44. *Loup B. & Wildi W.* Subsidence analysis in the Paris Basin: a key to Northwest European intracontinental basins? // *Basin Res.* 1994. V. 6. № 2–3. P. 159–177. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2117.1994.tb00082.x>
45. *Goldstein R.V. et al.* Long-wave asymptotics of Lamb waves // *Mech. Solids.* 2017. V. 52. P. 700–707. <https://doi.org/10.3103/S0025654417060097>
46. *Abers G.A.* Seismic low-velocity layer at the top of subducting slabs: Observations, predictions, and systematic // *Phys. Earth Planet. Inter.* 2005. V. 149. № 1–2. P. 7–29. <https://doi.org/10.1016/j.pepi.2004.10.002>
47. *Nakanishi A. et al.* Crustal evolution of the southwestern Kuril Arc, Hokkaido Japan, deduced from seismic velocity and geochemical structure // *Tectonophysics.* 2009. V. 472. № 1–4. P. 105–123. <https://doi.org/10.1016/j.tecto.2008.03.003>
48. *Kuznetsov S.V.* Acoustic waves in functionally graded rods with periodic longitudinal inhomogeneity // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2022. <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2032888>

SPATIAL DISPERSION OF ACOUSTIC WAVES IN FUNCTIONALLY GRADED RODS

A. I. Karakozova^{a,*}

^a National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, 129337 Russia

*e-mail: karioca@mail.ru

Received 01.02.2023

Revised 23.02.2023

Accepted 27.02.2023

Abstract – Harmonic acoustic waves in a semi-infinite functional-gradient (FG) one-dimensional rod with arbitrary longitudinal inhomogeneity are analyzed by a combined method based on the modified Cauchy formalism and the method of exponential

matrices. Closed dispersion equations for harmonic waves are constructed, from the solution of which implicit dispersion relations for acoustic waves in FG rods are obtained. For longitudinal heterogeneity of polynomial type, the corresponding dispersion relations are constructed explicitly.

Keywords: acoustic wave; heterogeneous rod; signal attenuation; displacement magnitude; longitudinal heterogeneity

REFERENCES

1. *Baron C., Naili S.* Propagation of elastic waves in a fluid-loaded anisotropic functionally graded waveguide: application to ultrasound characterization // *J. Acoust. Soc. Am.* 2010. V. 127 (3). P. 1307–1317. <https://doi.org/10.1121/1.3292949>
2. *Bendenia N. et al.* Deflections, stresses and free vibration studies of FG-CNT reinforced sandwich plates resting on Pasternak elastic foundation // *Comp. Concrete.* 2020. V. 26. № 3. P. 213–226. <https://doi.org/10.12989/cac.2020.26.3.213>
3. *Gupta A., Talha M.* Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures // *Prog. Aerosp. Sci.* 2015. V. 79. P. 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2015.07.001>
4. *Han X. et al.* A quadratic layer element for analyzing stress waves in FGMs and its application in material characterization // *JSV.* 2000. V. 236 (2). P. 307–321. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.2966>
5. *Ilyashenko A.V. et al.* SH waves in anisotropic (monoclinic) media // *Z. Angew. Math. Phys.* 2018. 69 (17). P. 17. <https://doi.org/10.1007/s00033-018-0916-y>
6. *Kuznetsov S.V.* Cauchy formalism for Lamb waves in functionally graded plates // *J. Vibr. Control.* 2019. V. 25. № 6. P. 1227–1232. <https://doi.org/10.1177/1077546318815376>
7. *Kuznetsov S.V.* Lamb waves in stratified and functionally graded plates: discrepancy, similarity, and convergence // *Waves Rand. Complex Media.* 19. V. 31 (6). P. 1–10. <https://doi.org/10.1080/17455030.2019.1683257>
8. *Li Z., Yu J., Zhang X., Elmaimouni L.* Guided wave propagation in functionally graded fractional viscoelastic plates: A quadrature-free Legendre polynomial method // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2020. V. 29 (16). P. 1–21. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1860273>
9. *Menasria A. et al.* A four-unknown refined plate theory for dynamic analysis of FG-sandwich plates under various boundary conditions // *Steel Comp. Struct.* 2020. V. 36 (3). P. 355–367. <https://doi.org/10.12989/scs.2020.36.3.355>
10. *Vlasie V., Rousseau M.* Guide modes in a plane elastic layer with gradually continuous acoustic properties // *NDT&E Int.* 2004. V. 37 (8). P. 633–644. <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2004.04.003>
11. *Amor M.B., Ghozlen M.H.B.* Lamb waves propagation in functionally graded piezoelectric materials by Peano-series method // *Ultrasonics.* 2015. V. 55. P. 10–14. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2014.08.020>
12. *Chikr S.C. et al.* A novel four-unknown integral model for buckling response of FG sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions using Galerkin's approach // *Geomech. Eng.* 2020. V. 21. № 5. P. 471–487. <https://doi.org/10.12989/gae.2020.21.5.471>
13. *Lefebvre J.E. et al.* Acoustic wave propagation in continuous functionally graded plates: an extension of the Legendre polynomial approach // *IEEE T Ultrason. Ferr.* 2001. V. 48 (5). P. 1332–1340. <https://doi.org/10.1109/58.949742>
14. *Othmani C. et al.* Numerical simulation of lamb waves propagation in a functionally graded piezoelectric plate composed of GaAs-AlAs materials using Legendre polynomial approach // *Optik.* 2017. V. 142. P. 401–411.

15. Yu J.G. et al. Propagating and non-propagating waves in infinite plates and rectangular cross section plates: orthogonal polynomial approach // *Acta Mech.* 2017. V. 228 (11). P. 3755–3769. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1917-1>
16. Gopalakrishnan S., Ruzzene M., Hanagud S. Spectral Finite Element Method. In: Computational Techniques for Structural Health Monitoring. In: Springer Series in Reliability Engineering. London: Springer, 2011. 440 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-85729-284-1>
17. Nanda N., Kapuria S. Spectral finite element for wave propagation analysis of laminated composite curved beams using classical and first order shear deformation theories // *Composite Struct.* 2015. V. 132. № 3. P. 310–320. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.04.061>
18. Baron C. Propagation of elastic waves in an anisotropic functionally graded hollow cylinder in vacuum // *Ultrasonics.* 2011. V. 51. № 2. P. 123–130. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2010.07.001>
19. Honarvar F., Enjilela E., Sinclair A., Mirnezami S. Wave propagation in transversely isotropic cylinders // *Int. J. Solids and Struct.* 2007. V. 44. № 16. P. 5236–5246. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.12.029>
20. Ilyashenko A.V. et al. Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // *Arch. Appl. Mech.* 2018. V. 88. P. 1385–1394. <https://doi.org/10.1007/s00419-018-1377-7>
21. Rigby S.E., Barr A.D., Clayton M. A review of Pochhammer–Chree dispersion in the Hopkinson bar // *Proc. Inst. Civil Eng. – Eng. Comp. Mech.* 2018. V. 171. № 1. P. 3–13. <https://doi.org/10.1680/jencm.16.00027>
22. Wu B., Su Y.P., Liu D.Y., Chen W.Q., Zhang C.Z. On propagation of axisymmetric waves in pressurized functionally graded elastomeric hollow cylinders // *J. Sound Vib.* 2018. V. 412. № 12. P. 17–47. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.01.055>
23. Xu Ch., Yu Z. Numerical simulation of elastic wave propagation in functionally graded cylinders using time-domain spectral finite element method // *Adv. Mech. Eng.* 2017. 9 (11). P. 1–17. <https://doi.org/10.1177/1687814017734457>
24. Zhang B. et al. Axial guided wave characteristics in functionally graded one-dimensional hexagonal piezoelectric quasi-crystal cylinders // *Math. Mech. Solids.* 2022. V. 27. № 1. P. 125–143. <https://doi.org/10.1177/10812865211013458>
25. Kuznetsov S.V. Abnormal dispersion of flexural Lamb waves in functionally graded plates // *Z. Angew. Math. Phys.* 2019. V. 70 (89). P. 1–8. <https://doi.org/10.1007/s00033-019-1132-0>
26. Guha S., Singh A.K. Influence of varying fiber volume fractions on plane waves reflecting from the stress-free/rigid surface of a piezoelectric fiber-reinforced composite half-space // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2022. V. 29. № 27. P. 5758–5772. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1964046>
27. Singh A.K., Rajput P., Guha S., Singh S. Propagation characteristics of love-type wave at the electro-mechanical imperfect interface of a piezoelectric fiber-reinforced composite layer overlying a piezoelectric half-space // *Europ. J. Mech. – A/Solids.* 2022. V. 93. P. 104527. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104527>
28. Singh S., Singh A.K., Guha S. Shear waves in a piezo-fiber-reinforced-poroelastic composite structure with sandwiched functionally graded buffer layer: Power series approach // *Europ. J. Mech. – A/Solids.* 2022. V. 92. P. 104470. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104470>
29. Singh S., Singh A.K., Guha S. Impact of interfacial imperfections on the reflection and transmission phenomenon of plane waves in a porous-piezoelectric model // *Appl. Math. Model.* 2021. V. 100. P. 656–675. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.08.022>
30. Singh A.K., Mahto S., Guha S. Analysis of plane wave reflection and transmission phenomenon at the interface of two distinct micro-mechanically modeled rotating initially stressed piezomagnetic fiber-reinforced half-spaces // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2022. V. 29. № 28. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.2003490>
31. Gurtin M.E. *The Linear Theory of Elasticity.* Verlag, Berlin: Springer, 1976.
32. Rauch J., Reed M. Nonlinear microlocal analysis of semilinear hyperbolic systems in one space dimension // *Duke Math. J.* 1982. V. 49. P. 397–475.

33. *Hartman Ph.* Ordinary Differential Equations (Classics in Applied Mathematics) 2nd Ed. Philadelphia: SIAM, 1987.
34. *Higham N.J.* Functions of Matrices: Theory and Computation. N.Y.: SIAM, 2008.
35. *Kuznetsov S.V.* Love waves in layered anisotropic media // *J. Appl. Math. Mech.* 2006. V. 70 (1). P. 116–127. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2006.03.004>
36. *Gómez, A., Meiss J.D.* Volume-preserving maps with an invariant // *Chaos: Int. J. Nonlinear Sci.* 2002. V. 12 (2). P. 289–299. <https://doi.org/10.1063/1.1469622>
37. *Benoist O.* Writing positive polynomials as sums of (few) squares // *EMS Newsletter.* 2017. V. 9 (105). P. 8–13. <https://doi.org/10.4171/NEWS/105/4>
38. *Handelman D.* Representing polynomials by positive linear functions on compact convex polyhedral // *Pacific J. Math.* 1988. V. 132 (1). P. 35–62. <https://doi.org/10.2140/pjm.1988.132.35>
39. *Ivic A.* The Riemann Zeta-Function, Wiley: New York, 1985.
40. *Kuznetsov S.V.* Fundamental and singular solutions of Lamé equations for media with arbitrary elastic anisotropy // *Quart. Appl. Math.* 2005, V. 63. P. 455–467. <https://doi.org/10.1090/S0033-569X-05-00969-X>
41. *Hörmander L.* The Analysis of Linear Partial Differential Operators III: Pseudo-Differential Operators. N.Y.: Springer: 2007.
42. *Boreman G.D.* Modulation Transfer Function in Optical and Electro-Optical Systems. Bellingham, WA.: SPIE Press, 2001.
43. *Ziegler P.A., Schumacher M.E., Dezes P., van Wees J.-D., Cloetingh S.* Post-Variscan evolution of the lithosphere in the area of the European Cenozoic Rift System. London: Mem. Geol. Soc., 2006. P. 97–112. <https://doi.org/10.1144/GSL.MEM.2006.032.01.06>
44. *Loup B., Wildi W.* Subsidence analysis in the Paris Basin: a key to Northwest European intracontinental basins? // *Basin Res.* 1994. V. 6. № 2–3. P. 159–177. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2117.1994.tb00082.x>
45. *Goldstein R.V. et al.* Long-wave asymptotics of Lamb waves // *Mech. Solids.* 2017. V. 52. P. 700–707. <https://doi.org/10.3103/S0025654417060097>
46. *Abers G.A.* Seismic low-velocity layer at the top of subducting slabs: Observations, predictions, and systematic // *Phys. Earth Planet. Inter.* 2005. V. 149. № 1–2. P. 7–29. <https://doi.org/10.1016/j.pepi.2004.10.002>
47. *Nakanishi A. et al.* Crustal evolution of the southwestern Kuril Arc, Hokkaido Japan, deduced from seismic velocity and geochemical structure // *Tectonophysics.* 2009. V. 472. № 1–4. P. 105–123. <https://doi.org/10.1016/j.tecto.2008.03.003>
48. *Kuznetsov S.V.* Acoustic waves in functionally graded rods with periodic longitudinal inhomogeneity // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2022. <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2032888>