

УДК 62-50

О НАИХУДШЕМ ВОЗМУЩЕНИИ ОСЦИЛЛЯТОРА С КВАДРАТИЧНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ ВНЕШНЕЙ СИЛОЙ С ЗАДАННЫМ ИНТЕГРАЛОМ

© 2024 г. Н. Н. Болотник^{а*}, В. А. Корнеев^{а**}

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: bolotnik@ipmnet.ru

**e-mail: korneev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 15.03.2023 г.

После доработки 28.03.2023 г.

Принята к публикации 30.03.2023 г.

Рассматривается задача построения наихудшего возмущения для осциллятора с квадратичным демпфированием. Возмущение осуществляется внешней силой, которая приложена к телу осциллятора, не изменяет направления своего действия и имеет заданный импульс (интеграл по времени). Предполагается, что до начала возмущения осциллятор находится в состоянии равновесия. Наихудшим считается возмущение, при котором абсолютная величина смещения тела осциллятора от положения равновесия достигает максимального значения. В классе возмущений прямоугольного профиля с заданным импульсом найдено наихудшее возмущение и соответствующие ему наибольшее смещение и время его достижения в зависимости от параметров осциллятора.

Ключевые слова: осциллятор с квадратичным демпфированием, оптимальное управление, наихудшие возмущения

DOI: 10.31857/S1026351924010056, EDN: WAMYRK

1. Введение. Исследование, излагаемое в статье, связано с проблемой оптимальной гарантированной изоляции объектов, расположенных на подвижном основании, от ударов, которым может подвергаться основание. Достаточно полное представление о теории оптимальной противоударной изоляции можно почерпнуть из работ [1–6], написанных в разные годы.

Простейшая модель противоударной изоляции показана на рис. 1. Основание (контейнер) считается твердым телом, которое движется поступательно вдоль заданной прямой. Внутри контейнера находится объект, прикрепленный к нему посредством противоударного изолятора, генерирующего силу взаимодействия между объектом и основанием. Объект может перемещаться относительно основания вдоль той же прямой, вдоль которой движется основание. Движение объекта относительно основания подчиняется дифференциальному уравнению

$$m\ddot{x} + u(x, \dot{x}, t) = -ma(t), \quad (1.1)$$

где x — координата, определяющая положение объекта относительно основания, m — масса объекта, $-u(x, \dot{x}, t)$ — управляющая сила, приложенная изолятором к объекту, $a(t)$ — ускорение основания относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета, приобретаемое в результате удара. Функция $a(t)$ в описанной модели играет роль внешнего возмущения. В общем случае управляющая сила зависит от относительных координаты и скорости объекта, а также от времени, и реализуется с помощью системы управления, которая может быть сложной и содержать источник энергии. В инженерной практике широко используются пассивные противоударные изоляторы, состоящие из упругого элемента (пружины) и демпфера. Для таких изоляторов управляющая сила имеет вид

$$u = k\phi(|\dot{x}|)\dot{x} + c\psi(|x|x),$$

где $\phi(|\dot{x}|)$ и $\psi(|x|)$ — неотрицательные и, как правило, монотонно возрастающие функции своих аргументов; k и c — положительные коэффициенты демпфирования и жесткости соответственно. Простейшими и широко распространенными пассивными противоударными изоляторами являются изоляторы с линейной пружиной и демпфером с линейной или квадратичной характеристикой. Для таких изоляторов $\psi(|x|) = 1$, $\phi(|\dot{x}|) = 1$ или $\phi(|\dot{x}|) = |\dot{x}|$, а уравнение (1.1) представляется в виде

$$m\ddot{x} + k|\dot{x}|^n \operatorname{sign} \dot{x} + cx = v(t), \quad v = -ma(t), \quad n = 1, 2. \quad (1.2)$$

Это уравнение можно трактовать как уравнение колебаний демпфированного осциллятора под действием внешней силы $v(t)$.

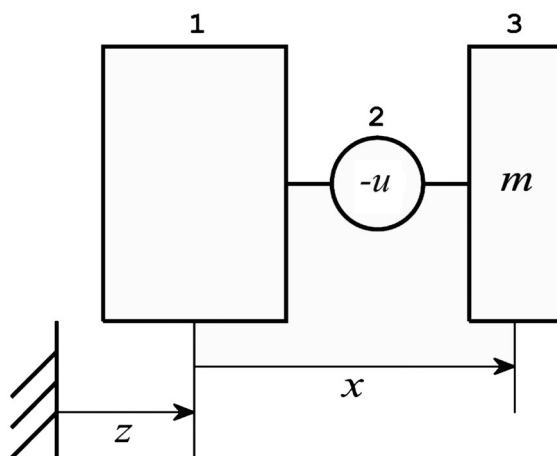


Рис. 1. Схема противоударной изоляции. 1 — основание; 2 — противоударный изолятор; 3 — защищаемый объект; z — смещение основания относительно неподвижной системы отсчета ($\ddot{z} = a$).

Сформулируем для системы (1.2) задачу параметрической оптимизации. Пусть $v(t) \in V$, где V — заданный класс допустимых внешних воздействий, и пусть в начальный момент времени $t=0$ осциллятор покоится в положении равновесия ($x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$). Требуется определить параметры k и c так, чтобы гарантированно минимизировать максимум модуля отклонения тела осциллятора от положения равновесия при условии, что сила, действующая на это тело со стороны пружины и демпфера не превышает по абсолютной величине заданного значения. Поставленная задача в математической формулировке записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \max_{v \in V} \max_{t \in [0, \infty)} |x_v(t; m, k, c)| &\rightarrow \min_{k \geq 0, c \geq 0} \\ \max_{v \in V} \max_{t \in [0, \infty)} &\left| k \dot{x}_v(t; m, k, c) \right|^n \operatorname{sign} \dot{x}_v(t; m, k, c) + c x_v(t; m, k, c) \leq A. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $x_v(t; m, k, c)$ — решение уравнения (1.2) с начальными условиями $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$, которое зависит от параметров m , k и c системы и от внешнего возмущения $v(t)$; A — заданная положительная постоянная.

В контексте теории оптимальной противоударной изоляции такая постановка отвечает минимизации максимума модуля отклонения объекта относительно основания при условии, что сила, действующая на объект со стороны изолятора, не превышает заданной величины при всех возможных возмущениях.

Решение задачи (1.3) требует решения задач о наихудшем возмущении по отношению к величинам

$$\begin{aligned} J_1(v) &= \max_{t \in [0, \infty)} |x_v(t; m, k, c)| \\ J_2(v) &= \max_{t \in [0, \infty)} \left| k \dot{x}_v(t; m, k, c) \right|^n \operatorname{sign} \dot{x}_v(t; m, k, c) + c x_v(t; m, k, c) \Big|, \end{aligned} \quad (1.4)$$

характеризующим качество функционирования противоударного изолятора. Под наихудшим возмущением понимается функция $v(t) \in V$, доставляющая максимум соответствующему функционалу, $J_1(v)$ или $J_2(v)$.

В теории противоударной изоляции ударное воздействие часто моделируется функцией $v(t)$, которая постоянна по знаку и имеет ограниченный интеграл по времени. Класс V таких функций определяется следующим образом:

$$V = \left\{ v(t): v(t) \geq 0, \int_0^\infty v(\tau) d\tau \leq v_0 \right\}, \quad (1.5)$$

где v_0 — заданная положительная величина. Требование $v(t) \geq 0$ не ограничивает общности, поскольку уравнение (1.2) инвариантно к одновременной замене $x \rightarrow -x$, $v \rightarrow -v$, и при нулевых начальных условиях решения уравнения (1.2), отвечающие возмущениям $v(t)$ и $-v(t)$, отличаются только знаком.

Известно, что для линейного осциллятора ($n=1$) наихудшее возмущение из класса (1.5) по отношению к обоим функционалам $J_1(v)$ и $J_2(v)$ есть мгновенный удар, в результате которого тело осциллятора (защищаемый объект) в начальный момент времени приобретает импульс, равный v_0 . Мгновенный удар моделируется дельта-функцией Дирака, умноженной на приобретенный в результате удара импульс:

$$v(t) = v_0 \delta(t). \quad (1.6)$$

Ввиду простоты и краткости доказательства этого факта приведем его полностью. Запишем решение уравнения (1.2) при нулевых начальных условиях в форме интеграла Коши:

$$x_v(t) = \int_0^t G(t-\tau)v(\tau)d\tau, \quad (1.7)$$

где $G(t)$ — решение однородного (для $v(t) \equiv 0$) уравнения при начальных условиях $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/m$. Из соотношений (1.7) и (1.5) вытекает оценка

$$J_1(v) \leq \max_{t \in [0, \infty)} |G(t)| \int_0^t |v(\tau)| d\tau \leq \max_{t \in [0, \infty)} |v_0 G(t)| = J_1(v_0 \delta(t)),$$

поскольку функция $v_0 G(t)$ есть отклик системы (1.2) на импульсное возмущение (1.6). Таким образом, импульсное воздействие (1.6) является наихудшим возмущением по отношению к функционалу $J_1(v)$.

Это же возмущение оказывается наихудшим и по отношению к функционалу $J_2(v)$. Подстановка выражения (1.7) в уравнение (1.2) приводит к равенствам

$$k\dot{x}_v(t) + cx_v(t) = v(t) - m\ddot{x}_v(t) = -m \int_0^t \ddot{G}(t-\tau)v(\tau)d\tau,$$

откуда с учетом определения (1.4) для функционала $J_2(v)$ в случае $n=1$ следует оценка

$$J_2(v(t)) \leq |k\dot{x}_v(t) + cx_v(t)| \leq \max_{t \in [0, \infty)} |m v_0 \ddot{G}(t)| = J_2(v_0 \delta(t)),$$

из которой вытекает, что импульсное воздействие (1.6) есть наихудшее возмущение по отношению к функционалу $J_2(v)$.

В теории оптимальной противоударной изоляции изолятор с квадратичным демпфированием играет особую роль. Он реализует предельные возможности защиты объекта от мгновенного удара [3, 4]. Если внешнее возмущение задано выражением (1.6), а коэффициенты k и c определены равенствами

$$k = \frac{m^2 A}{v_0^2}, \quad c = 2 \frac{mA^2}{v_0^2},$$

то изолятор с квадратичным демпфированием обеспечивает абсолютный минимум максимального модуля относительного смещения изолируемого объекта $J_1(v)$ при ограничении $J_2(v) \leq A$, наложенном на абсолютную величину силы, приложенной изолятором к объекту. Значения функционалов $J_1(v)$ и $J_2(v)$ при этом суть

$$J_1 = \frac{v_0^2}{2mA}, \quad J_2 = A.$$

Если бы, как это имеет место в случае изолятора, пружина и демпфер которого обладают линейными характеристиками, мгновенный удар максимально допустимого импульса был бы наихудшим возмущением из класса (1.5) для изолятора с линейной пружиной и демпфером с квадратичной характеристикой, то этот изолятор обеспечивал бы гарантированный (рассчитанный на наихудшее

возмущение) минимум функционала J_1 при условии, что неравенство $J_2(v) \leq A$ выполняется для любого допустимого возмущения. Отмеченное обстоятельство обуславливает актуальность решения задач о наихудшем возмущении осциллятора с квадратичным демпфированием по отношению к функционалам $J_1(v)$ и $J_2(v)$. Эти задачи интересны и с математической точки зрения, так как являются задачами оптимального управления нелинейной системой с неаддитивным функционалом.

Задачи о наихудшем возмущении по отношению к функционалам (1.4) для осциллятора с квадратичным демпфированием значительно труднее аналогичных задач для линейного осциллятора и до сих пор не решены. В данной статье для осциллятора с квадратичным демпфированием решается задача о наихудшем возмущении по отношению к максимальному модулю отклонения осциллятора от положения равновесия. Наихудшее возмущение ищется в классе V_b возмущений прямоугольного профиля следующего вида

$$v_b(t) = \begin{cases} b, & t \in [0, v_0 / b] \\ 0, & t > v_0 / b. \end{cases}$$

Все функции этого класса имеют один и тот же интеграл по времени, равный v_0 :

$$\int_0^{\infty} v_b(t) dt = v_0.$$

2. Постановка задачи. Будем решать следующую задачу о наихудшем возмущении осциллятора с линейной пружиной и демпфером с квадратичной характеристикой по отношению к максимальному модулю отклонения от положения равновесия.

Задача 1. Для механической колебательной системы (осциллятора), описываемой дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + k|\dot{x}| + cx = v(t), \quad m > 0, \quad k > 0, \quad c > 0 \quad (2.1)$$

с нулевыми начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (2.2)$$

найти функцию $v(t)$, которая принадлежит классу

$$V_1 = \left\{ v(t): v(t) \geq 0, \int_0^{\infty} v(\tau) d\tau = v_0 \right\} \quad (2.3)$$

и максимизирует функционал

$$J_1(v) = \max_{t \in [0, \infty)} |x_v(t)|. \quad (2.4)$$

Здесь x — координата, описывающая отклонение тела осциллятора от положения равновесия, m — масса тела осциллятора, k и c — коэффициенты демпфирования и жесткости соответственно, v — внешняя сила, приложенная к осциллятору и рассматриваемая как возмущение, v_0 — заданный импульс внешнего воздействия, $x_v(t)$ — решение уравнения (2.1) при начальных условиях (2.2) и заданном

возмущении $v = v(t)$. Класс V_1 определяет множество сил, не изменяющих направления своего действия и характеризующихся заданным импульсом v_0 .

Для уменьшения числа определяющих параметров введем безразмерные (штрихованные) переменные

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{mc}}{v_0} x, \quad t' = \sqrt{\frac{c}{m}} t, \quad v'(t') = \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{m}{c}} v \left(\sqrt{\frac{m}{c}} t' \right) \\ k' &= \frac{v_0}{m\sqrt{mc}} k. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Замена переменных (2.5) в соотношениях (2.1)–(2.4) после опускания штрихов приводит к соотношениям того же вида, в которых следует положить $m=1$, $c=1$, $v_0=1$. В дальнейшем используются только безразмерные переменные.

Будем искать наихудшее возмущение в более узком классе функций по сравнению с V_1 , а именно, в однопараметрическом классе V_b возмущений “прямоугольного” профиля следующего вида:

$$v(t) = \begin{cases} b, & t \in [0, 1/b], \\ 0, & t > 1/b, \end{cases} \quad b > 0, \quad (2.6)$$

где b — параметр, подлежащий выбору из условия максимизации функционала J_1 .

3. Предварительный анализ и методика решения задачи.

Утверждение. Для возмущений класса V_b максимум по времени модуля отклонения осциллятора достигается в момент первого после начала движения обращения в нуль его скорости, т.е.

$$\begin{aligned} J_1 &= \max_{t \in [0, \infty)} |x_v(t)| = x_v(t_*), \quad \dot{x}_v(t_*) = 0 \\ \dot{x}_v(t) &> 0 \quad \text{при } t \in (0, t_*). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Доказательство. Пусть

$$\dot{x}_v(t) > 0 \quad \text{при } t \in (0, 1/b],$$

т.е. на интервале действия постоянного возмущения скорость осциллятора в нуль не обращается. Тогда при $t > 1/b$ осциллятор будет свободно колебаться в соответствии с уравнением (2.1) при $v(t) \equiv 0$. В некоторый момент времени $t_* > 1/b$ скорость $\dot{x}$ обратится в нуль и отклонение x достигнет своего первого локального максимума, равного $x_v(t_*)$, и в дальнейшем будет выполнено неравенство $|x_v(t)| < x_v(t_*)$. Это неравенство вытекает из диссипативности рассматриваемой колебательной системы. Свойство диссипативности заключается в монотонном убывании механической энергии системы

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}_v^2 + x_v^2)$$

на любом ее движении. Поскольку $\dot{x}_v(t_*)=0$, имеем $E(t_*)=x_v^2(t_*)/2$. Из монотонного убывания энергии вытекает неравенство $\dot{x}_v^2(t)+x_v^2(t)<x_v^2(t_*)$ для $t>t_*$, из которого следует неравенство $|x_v(t)|<x_v(t_*)$ для $t>t_*$.

Пусть теперь

$$\dot{x}_v(t_*)=0, \quad t_* \in (0, 1/b), \quad \dot{x}_v(t)>0 \quad \text{при } t \in (0, t_*),$$

т.е. первое после начала движения обращение в нуль скорости осциллятора происходит до окончания действия постоянной возмущающей силы, равной b .

Перейдем в уравнении (2.1) при $v(t) \equiv b$ и в начальных условиях (2.2) к новой переменной $y = x - b$. Переменная y подчиняется уравнению (в безразмерных переменных $m=1, c=1$)

$$\ddot{y} + k|\dot{y}|\dot{y} + y = 0 \quad (3.2)$$

и начальным условиям

$$y(0) = -b, \quad \dot{y}(0) = 0. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.2) описывает свободные колебания осциллятора с квадратичным демпфированием. В момент времени t_* выполнено равенство $\dot{y}(t_*)=0$.

Отметим, что $y(t_*)>0$. Действительно, из (3.2) и (3.3) при $b>0$ следует, что $\dot{y}(t)>0$ при $t \in (0, t_*)$, и точка $t=t_*$ не может быть точкой локального минимума функции $y(t)$. Если бы имело место неравенство $y(t_*)<0$, то выполнялись бы соотношения $\dot{y}(t_*)=0$, $\ddot{y}(t_*)>0$, и тогда точка $t=t_*$ была бы точкой локального минимума функции $y(t)$. При $y(t_*)=0$ были бы выполнены равенства $y(t_*)=0$, $\dot{y}(t_*)=0$, и тогда уравнение (3.2) наряду с ненулевым решением $y(t)$ имело бы также нулевое решение $y(t) \equiv 0$, что противоречит теореме единственности.

В силу диссипативности системы имеем неравенство

$$\dot{y}(t)^2 + y(t)^2 \leq y^2(t_*), \quad t > t_*, \quad (3.4)$$

которое эквивалентно неравенству

$$\dot{x}^2(t) + x^2(t) \leq x^2(t_*) - 2b(x(t_*) - x(t)), \quad t_* < t < 1/b. \quad (3.5)$$

для переменной $x(t)$. Из неравенств (3.4) и $y(t_*)>0$ вытекает, что $y(t_*) \geq y(t)$ и, следовательно, $x(t_*) \geq x(t)$. Из последнего неравенства и (3.5) получаем

$$\dot{x}^2(t) + x^2(t) \leq x^2(t_*), \quad t_* < t < 1/b. \quad (3.6)$$

В силу диссипативности свободных колебаний осциллятора с квадратичным демпфированием неравенство (3.6) будет выполнено и при $t > 1/b$, откуда следует, что $|x(t)| \leq x(t_*)$ при $t > t_*$. Утверждение доказано.

Из доказанного утверждения вытекает, что для решения поставленной задачи о наихудшем возмущении достаточно ограничиться решением уравнения (2.1) с начальными условиями (2.2) при $v(t)$, заданном выражением (2.6), на интервале времени $[0, t_*]$, где $t_* > 0$ — момент первого после начала движения обращения

в нуль скорости осциллятора. На этом интервале скорость $\dot{x}$ неотрицательна, и уравнение (2.1) упрощается, принимая в безразмерных переменных вид

$$\ddot{x} + k\dot{x}^2 + x = v(t).$$

Наибольшее смещение тела осциллятора при постоянном возмущении. Поведение осциллятора при $v \equiv 0$ и при $v \equiv b$ на интервале $[0, t_*]$ описывается одним и тем же уравнением

$$\ddot{y} + k\dot{y}^2 + y = 0, \quad (3.7)$$

где

$$y = x, \text{ если } v \equiv 0; \quad y = x - b, \text{ если } v \equiv b. \quad (3.8)$$

Свойства решений уравнения свободных колебаний осциллятора с квадратичным демпфированием (3.2), а также уравнения (3.7), исследованы с исчерпывающей полнотой (см., например, [7]).

Приведем решение уравнения (3.7) при начальных условиях

$$y(t_0) = y_0, \quad \dot{y}(t_0) = u_0, \quad t_0 \in [0, t_*], \quad u_0 \geq 0 \quad (3.9)$$

на интервале времени $[t_0, t_*]$, где t_* — момент первого после начала движения обращения переменной $\dot{y}$ в нуль.

Поскольку на интервале (t_0, t_*) функция $y(t)$ монотонно возрастает, можно перейти в уравнении (3.7) к независимой переменной y и понизить его порядок. В результате получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка с начальным условием

$$\frac{dw}{dy} + 2kw + 2y = 0, \quad w(y_0) = u_0^2; \quad w = \dot{y}^2. \quad (3.10)$$

Решение задачи Коши (3.10) представляется следующим выражением:

$$\begin{aligned} w(y) &= Ce^{-(2ky-1)} - \frac{1}{2k^2}(2ky-1) \\ C &= \left[u_0^2 + \frac{1}{2k^2}(2ky_0-1) \right] e^{2ky_0-1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Теперь для того, чтобы найти функцию $y(t)$ надо решить нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка с начальным условием

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{Ce^{-(2ky-1)} - \frac{1}{2k^2}(2ky-1)}, \quad y(t_0) = y_0.$$

Решение этого уравнения не выражается в элементарных функциях или известных специальных функциях, и его надо интегрировать численно.

Выражение (3.11) позволяет найти максимальное значение переменной $y = y_* = y(t_*)$, не находя самого момента времени t_* . Так как $w(t_*) = 0$, из (3.11) получаем

$$y_* = \frac{1 + W_+(2k^2C)}{2k}, \quad (3.12)$$

где $W_+(\xi)$ — “верхняя” ветвь функции $W(\xi)$, обратной функции $\xi(z) = ze^z$, $z \in (-\infty, +\infty)$.

В настоящее время за функцией $W(\xi)$ закрепляется название W -функции Ламберта [8, 9].

Область определения $D[W]$ функции $W(\xi)$ совпадает с областью $R[\xi] = [-1/e, +\infty)$ значений функции $\xi(z)$. При $\xi > 0$ функция $W(\xi)$ однозначна, а при $-1/e < \xi < 0$ она имеет два значения, $W_-(\xi)$ и $W_+(\xi)$, которые удовлетворяют неравенствам $W_-(\xi) < -1$ и $W_+(\xi) > -1$.

Анализ выражения (3.11) для C показывает, что при всех значениях y_0 выполняется неравенство $2k^2C \geq -e^{-(1+k^2u_0^2)} \geq -1/e$. Следовательно, $2k^2C \in D[W]$, и формула (3.12) имеет смысл.

Процедура вычисления наибольшего смещения тела осциллятора при возмущениях V_b . Введем величину $J(k, b) = J_1(v_b)$ и опишем процедуру ее вычисления при фиксированных k и b . (Напомним, что в безразмерных переменных $m = 1$, $c = 1$, $v_0 = 1$.)

Для расчета этой величины уравнение

$$\ddot{x} + k|\dot{x}|\dot{x} + x = b \quad (3.13)$$

с нулевыми начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (3.14)$$

численно интегрируется на интервале $[0, 1/b]$. Решение задачи Коши (3.13), (3.14) описывает (в безразмерных переменных) движение осциллятора под действием постоянной силы b .

Если на интервале $t \in (0, 1/b]$ скорость $\dot{x}$ не обращается в нуль, то величина $J = J(k, b)$ определяется формулой

$$J(k, b) = \frac{1 + W_+(2k^2C)}{2k} \quad (3.15)$$

$$C = \left[\dot{x}^2(1/b) + \frac{1}{2k^2}(2kx(1/b) - 1) \right] e^{2kx(1/b) - 1},$$

где значения $x(1/b)$ и $\dot{x}(1/b)$ находятся в результате численного решения задачи Коши (3.13), (3.14).

Если на интервале $t \in (0, 1/b]$ скорость обращается в нуль, то величина $J = J(k, b)$ определяется формулой

$$J(k, b) = \frac{1 + W_+(2k^2C)}{2k} \quad (3.16)$$

$$C = -\frac{1}{2k^2}(2kb + 1)e^{-(2kb+1)}.$$

Факт обращения скорости осциллятора в нуль на интервале $t \in (0, 1/b]$ устанавливается в ходе численного решения задачи Коши (3.13), (3.14).

Формулы (3.15) и (3.16) получены на основе выражений (3.12) и (3.11) с учетом связи между основной переменной x и вспомогательной переменной y , введенной равенствами (3.8).

Выражения (3.15) и (3.16) — аналитические, однако их применение требует численного интегрирования уравнений движения. Выражение (3.15) содержит

значения $x(1/b)$ и $\dot{x}(1/b)$, которые определяются численно. В формулу (3.16) величины, рассчитываемые численно, явно не входят, но численный расчет требуется для определения того факта, что на интервале $t \in (0, 1/b)$ скорость $\dot{x}$ обращается в нуль.

Можно было бы вообще не пользоваться формулами (3.15) и (3.16), а решать численно задачу Коши

$$\ddot{x} + k|\dot{x}|\dot{x} + x = v(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

где $v(t)$ определено равенством (2.6), на интервале $t \in [0, t_*]$, t_* — момент первого после начала движения обращения скорости осциллятора в нуль ($x(t_*) = 0$). Величина t_* заранее не известна и находится в процессе численного интегрирования уравнения движения. При таком способе расчета величина $J(k, b)$ задается равенством $J(k, b) = x(t_*)$. Прямой численный расчет позволяет определить время $t_* = t_*(k, b)$, в который достигается максимум отклонения осциллятора от положения равновесия. Если этого не требуется, то комбинированный способ, сочетающий численный расчет с использованием аналитических выражений, представляется предпочтительным.

Теперь решение задачи о наихудшем возмущении сводится к максимизации функции $J(k, b)$ по параметру $b > 0$ при каждом фиксированном $k > 0$ и исследованию зависимостей $b^*(k)$ и $J(k, b^*(k))$, где через $b^*(k)$ обозначено значение b , соответствующее наихудшему возмущению для заданного k .

Наибольшее смещение тела осциллятора при мгновенном ударе. Приведем отдельно выражение для $J_1(\delta)$, отвечающее мгновенному удару, который обладает единичным импульсом и происходит в начальный момент времени $t = 0$. Такое возмущение моделируется дельта-функцией Дирака $v(t) = \delta(t)$ и может трактоваться как предельный случай возмущения (2.6) при $b \rightarrow \infty$. Действие мгновенного удара приводит к мгновенному приобретению телом осциллятора единичного импульса в начальный момент времени, и поэтому движение осциллятора, подвергнувшегося мгновенному удару, описывается уравнением (3.2), в котором y надо заменить на x , с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$. В этом случае величина $J_1(\delta)$ определяется формулой (3.12), где $2k^2C = (2k^2 - 1)/e$. Введя обозначение $x_\delta(k)$ для максимума отклонения осциллятора в случае мгновенного удара, получаем

$$x_\delta(k) = \frac{1 + W_+((2k^2 - 1)e^{-1})}{2k}.$$

Анализ показывает (детали опускаются), что функция $x_\delta(k)$ монотонно убывает при $k \in (0, +\infty)$ и выполняются предельные соотношения

$$\lim_{k \rightarrow 0} x_\delta(k) = 1, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} x_\delta(k) = 0.$$

Предел при $k \rightarrow 0$ соответствует максимальному отклонению линейного недемпфированного осциллятора в ответ на мгновенный удар.

4. Численное решение задачи о наихудшем возмущении в классе функций $v(t) \in V_b$. Значение параметра $b^*(k)$, максимизирующее функцию $J(k, b)$, методика расчета которой описана в разделе 3, определялось численно для каждого

фиксированного значения коэффициента демпфирования k из некоторого заданного интервала.

На рис. 2 изображены график функции $x_{opt}(k) = J(k, b^*(k))$, выражающий максимум модуля отклонения осциллятора при наихудшем возмущении в зависимости от коэффициента демпфирования, и график функции $x_\delta(k)$, выражающий аналогичную зависимость в случае мгновенного удара единичного импульса. Обе функции монотонно убывают с ростом параметра k . При $k \rightarrow 0$ функции $x_{opt}(k)$ и $x_\delta(k)$ стремятся к единичному значению, отвечающему максимальному отклонению осциллятора в ответ на мгновенный удар $v(t) = \delta(t)$. При $k > 0$ график функции $x_{opt}(k)$ лежит выше графика функции $x_\delta(k)$. Это означает, что, в отличие от линейного демпфированного осциллятора, для осциллятора с квадратичным демпфированием мгновенный удар не является наихудшим возмущением, причем “преимущество” возмущения конечной длительности перед мгновенным ударом возрастает с ростом коэффициента демпфирования k .

График функции $b^*(k)$ изображен на рис. 3. Эта функция монотонно убывает и стремится к бесконечности при $k \rightarrow 0$. Такой результат ожидаем, поскольку при $k = 0$ (линейный гармонический осциллятор) наихудшим возмущением из класса функций V_b является мгновенный удар, отвечающий бесконечно большому значению b в выражении (2.6).

На рис. 4 показано время $t_*(k)$ достижения первого максимума отклонения осциллятора при наихудшем возмущении как функция параметра k . Функция $t_*(k)$ монотонно возрастает с ростом k , а при $k \rightarrow 0$ стремится к значению $\pi/2$, отвечающему отклику гармонического осциллятора на мгновенный удар единичного импульса.

5. Заключение. Для осциллятора с демпфером, создающим силу трения, величина которой пропорциональна квадрату скорости тела осциллятора, поставлена задача о наихудшем возмущении, создаваемом внешней силой, приложенной к телу осциллятора. Наихудшим считается возмущение, максимизирующее максимум модуля отклонения осциллятора от положения равновесия.

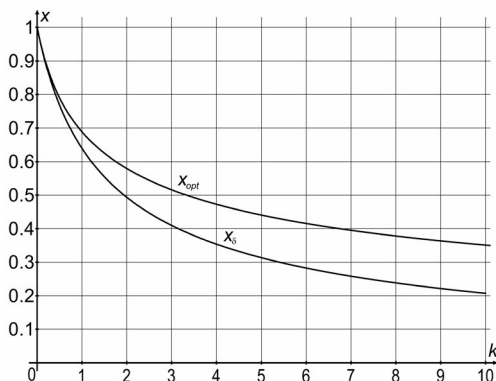


Рис. 2. Зависимость наибольшего смещения x_{opt} и смещения x_δ при дельта-возмущения от параметра k .

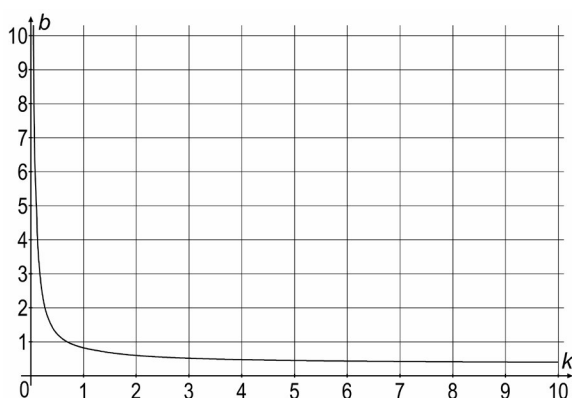


Рис. 3. Зависимость оптимального параметра b при наибольшем смещении x_{opt} от параметра k .

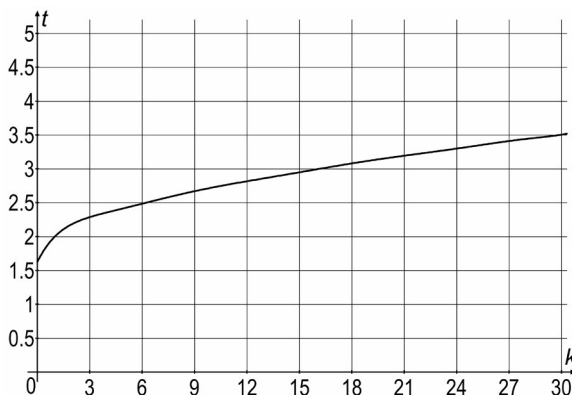


Рис. 4. Время достижения t наибольшего смещения x_{opt} в зависимости от параметра k .

Предполагается, что в начальный момент времени осциллятор находится в положении равновесия и покоится. Требуется найти наихудшее возмущение в классе знакопостоянных функций, интеграл по времени которых не превышает по абсолютной величине заданного значения. Задача решена для возмущений прямоугольного профиля, постоянных на начальном интервале времени и равных нулю вне этого интервала. Доказано, что при таких возмущениях модуль первого локального экстремума смещения тела осциллятора является глобальным максимумом модуля смещения осциллятора. Численно получена зависимость величины внешней силы на интервале времени, где она не равна нулю, от параметров осциллятора для наихудшего возмущения. Определены значения максимального смещения осциллятора и времени его достижения в зависимости от параметров осциллятора. Из полученных результатов, в частности, следует, что, в отличие от линейного осциллятора, мгновенный удар

максимального импульса не является наихудшим возмущением для осциллятора с квадратичным демпфированием.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500443-0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sevin E. and Pilkey W.* Optimum Shock and Vibration Isolation. Washington DC: Shock and Vibration Information Analysis Center, 1971. 162 с.
2. *Коловский М.З.* Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 320 с.
3. Болотник Н.Н. Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 257 с.
4. *Balandin D.V., Bolotnik N.N., and Pilkey W.D.* Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science, 2001. 440 p.
5. *Pilkey W.D., Balandin D.V., Bolotnik N.N., Crandal J.R., and Purtsezov S.V.* Injury Biomechanics and Control: Optimal Protection from Impact. Wiley and Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2010. 286 p.
6. *Ledezma-Ramirez D.F., Tapia-Gonzalez P.E., Ferguson N, Brennan M., Tang B.* Recent advances in shock vibration isolation: an overview and future possibilities // Appl. Mech.Rev. 2019. V. 71. № 6. P. 060802. <https://doi.org/10.1115/1.4044190>
7. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 567 с.
8. *Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., Knuth D.E.* On the Lambert W function // Adv. Comput. Math. 1996. Vol. 5. P. 329–359. <https://doi.org/10.1007/BF02124750>
9. *Mezo I.* The Lambert W Function: Its Generalizations and Applications. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2022. 252 p.

ON THE WORST-CASE DISTURBANCE OF AN OSCILLATOR WITH QUADRATIC DAMPING BY AN EXTERNAL FORCE WITH A GIVEN INTEGRAL

N. N. Bolotnik^{a*} and V. A. Korneev^{a**}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526 Russia*

^{*}*e-mail: bolotnik@ipmnet.ru*

^{**}*e-mail: korneev@ipmnet.ru*

Received 15.03.2023

Revised 28.03.2023

Accepted 30.03.2023

Abstract – The problem of constructing the worst-case disturbance for an oscillator with quadratic damping is considered. The disturbance is carried out by an external force, which is applied to the oscillator body, does not change the direction of its action and has a given impulse (time integral). It is assumed that before the onset of the disturbance the oscillator is in a state of equilibrium. The worst disturbance is considered to be one in which the absolute value of the displacement of the oscillator body from the equilibrium position reaches its maximum value. In the class of disturbances of a rectangular profile with a given impulse, the worst disturbance and the corresponding largest displacement and the time to reach it were found, depending on the parameters of the oscillator.

Keywords: oscillator with quadratic damping, optimal control, worst-case disturbances

REFERENCES

1. *E. Sevin and W. Pilkey*, Optimum Shock and Vibration Isolation (Shock and Vibration Information Analysis Center, Washington DC, 1971).
2. *M. Z. Kolovsky*, Automatic Control of Vibration Protection Systems (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
3. *N. N. Bolotnik*, Optimization of Shock and Vibration Isolation Systems (Nauka, Moscow, 1983) [in Russian].
4. *D. V. Balandin, N. N. Bolotnik, and W. D. Pilkey*, Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration (Gordon and Breach Science, Amsterdam, 2001).
5. *W. D. Pilkey, D. V. Balandin, N. N. Bolotnik, et al.*, *Injury Biomechanics and Control: Optimal Protection from Impact* (Wiley and Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2010).
6. *D. F. Ledezma-Ramirez, P. E. Tapia-Gonzalez, N. Ferguson, et al.*, “Recent advances in shock vibration isolation: an overview and future possibilities,” *Appl. Mech. Rev.* **71** (6), 060802 (2019). <https://doi.org/10.1115/1.4044190>
7. *A. A. Andronov, A. A. Witt, and S. E. Khaikin*, Theory of Oscillators (Nauka, Moscow, 1981; Pergamon Press, Oxford, 1966).
8. *R. M. Corless, G. H. Gonnet, D.E. G. Hareet et al.*, “On the Lambert W function,” *Adv. Comput. Math.* **5**, 329–359 (1996). <https://doi.org/10.1007/BF02124750>
9. *I. Mezo*, *The Lambert W Function: Its Generalizations and Applications* (Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2022).