

УДК 531.36

О РАВНОВЕСИЯХ ТЯЖЕЛОГО ОБРУЧА, ПОДВЕШЕННОГО НА ГВОЗДЕ

© 2024 г. А. А. Буров^{а,*}, В. И. Никонов^{а,**}

*“Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление”
Российской академии наук, Москва, Россия*

**e-mail: jtm@narod.ru*

***e-mail: nikon_v@list.ru*

Поступила в редакцию 07.04.2023 г.

После доработки 22.06.2023 г.

Принята к публикации 02.07.2023 г.

Рассматривается плоская задача о равновесии однородного тяжелого тонкого эллиптического обруча, подвешенного на тонком горизонтальном гвозде. В предположении о том, что между гвоздем и обручем действует сила сухого трения, изучается зависимость множества положений равновесия от коэффициента трения и полуосей эллипса. Полученные результаты распространяются на следующую задачу: описать положения равновесия тяжелого твердого тела (“ружья”), подвешенного на гвозде с помощью веревки, оба конца которой закреплены в теле. Показывается, как такое распространение результатов может быть осуществлено непосредственно в случае, когда центр масс тела располагается посередине между точками подвеса.

Ключевые слова: равновесия тяжелого твердого тела, сухое трение, параметрическая зависимость

DOI: 10.31857/S1026351924010109, EDN: WABISK

1. Введение. Задачи о движении подвешенных объектов представляют собой классический предмет исследования теоретической механики. Речь идет об объектах, размерами которых можно пренебречь (материальных точек), так и о трехмерных объектах. Особый класс составляют задачи, когда материальную точку (бусинку) подвешивают на невесомой нерастяжимой нити, концы которой закреплены. В случае, когда предполагается, что бусинка тяжелая, такая задача рассматривалась, например, в учебниках П. Аппеля [1], раздел 128¹ и Т. Леви-Чивита и У. Амальди [3]². Новый импульс к дальнейшему изучению такого рода систем положили исследования материальных точек, стесненных так называемой леерной связью [5–8] (см. также [9]) в задачах о движении орбитальных тросовых систем.

¹ Раздел 140 в оригинале [2].

² С. 411 в оригинале [5].

Представляет интерес и задача, в определенном смысле двойственная к упомянутой выше: точка (“гвоздь” в используемой ниже терминологии) предполагается неподвижной, а на нее подвешено тело либо с помощью отверстия, либо с помощью тонкой нерастяжимой невесомой нити, прикрепленной к телу двумя концами. В случае плоской задачи, когда отверстие имеет эллиптический профиль, задачи оказываются эквивалентными в силу известного геометрического свойства эллипса. Особый интерес представляет случай, когда нить оказывается шероховатой: между ней и гвоздем действует сила сухого трения. В этом случае именно геометрическая аналогия позволяет разобраться с касательной и нормальной составляющими реакции имеющей место неидеальной связи. Надо заметить, что в упомянутых работах, касающихся леерной связи, наличие сухого трения не предполагается. Это же относится и к недавней публикации [10], в которой исследована плоская задача о существовании и устойчивости равновесий твердого тела, подвешенного на веревке, перекинутой через гвоздь, в предположении об отсутствии трения.

В настоящей работе рассматривается задача о равновесиях в простейшем случае, когда тело — не что иное как тяжелый тонкий однородный эллиптический обруч. В предположении о наличии сухого трения для него исследуется зависимость от параметров свойств семейств неизолированных равновесий. Обсуждается и эквивалентная задача, когда такого рода односторонняя связь реализуется с помощью невесомой нерастяжимой шероховатой нити, к концам которой прикреплено твердое тело.

2. Постановка задачи. На вбитый в вертикальную гладкую стену гвоздь накинута тяжелый однородный обруч, выполненный в форме эллипса. Найти положения равновесия обруча, если его большая и малая полуоси равны a и b ($a \geq b$), а коэффициент трения обруча о гвоздь равен μ . Толщина обруча, равно как и толщина гвоздя, предполагаются пренебрежимо малыми по сравнению с размерами обруча.

3. Решение. Пусть O — геометрический центр обруча, P — гвоздь. В силу симметрии обруча относительно двух взаимно перпендикулярных осей и однородности распределения его массы точка O является центром масс обруча. Условие “накинута” обруча на гвоздь следует трактовать как наличие односторонней связи, такой, что гвоздь может находиться либо внутри обруча, либо на нем самом. Условие наличия гладкой стены определяет ограничение на постановку задачи — рассматривается ее плоский случай.

Принимая во внимание выше сказанное, обруч будет находиться в равновесии относительно стены, если сумма моментов сил, вычисленных относительно точки подвеса, равен нулю. Из этого следует, что точки O и P располагаются на одной вертикали, причем физически реализуем лишь случай, когда точка O располагается ниже точки P . Если указанное требование выполнено, то остается, вообще говоря, определить условие, при котором сила тяжести попадает в угол трения (см., например, [4, 11–13]) с вершиной в точке P , углом раствора $2\alpha_*$: $\operatorname{tg} \alpha_* = \mu$ и биссектрисой, параллельной нормали к эллипсу в точке P . Однако требуемые условия можно вывести и из уравнений равновесия.

Пусть Ox — связанная с обручем система координат, оси Ox и Oy которой направлены, соответственно, по большой и малой полуосям эллипса (рис. 1). В этих осях уравнение обруча имеет вид

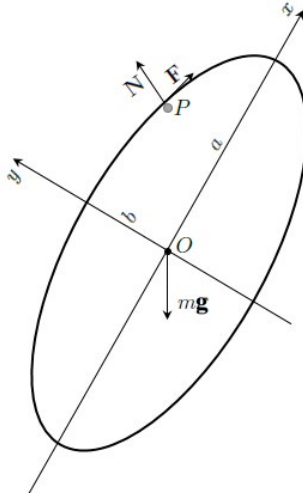


Рис. 1. Тяжелый однородный шероховатый обруч в форме эллипса с полуосями a и b , подвешенный на гвозде P .

$$f(x, y) = 0, f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1. \quad (3.1)$$

Если (x, y) – координаты гвоздя P в этих осях, то этот гвоздь находится внутри обруча или на нем самом при выполнении условия

$$f(x, y) \leq 0.$$

Пусть обруч касается гвоздя. Единичный вектор, направленный из начала координат в точку касания, записывается как

$$\mathbf{e} = \mathbf{r}^{-1}(x, y), \mathbf{r} = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2)$$

Единичный вектор нормаль и единичная касательная к обручу в этой точке записываются как

$$\mathbf{n} = \rho^{-1} \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2} \right), \mathbf{\tau} = \rho^{-1} \left(-\frac{y}{b^2}, \frac{x}{a^2} \right) \quad (3.3)$$

$$\rho = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)^{\frac{1}{2}}$$

соответственно.

Обруч находится под действием трех сил: силы тяжести, нормальной реакции и касательной реакции, именуемой силой трения:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow -m\mathbf{g}\mathbf{e} + N\mathbf{n} + F\mathbf{\tau} = 0, \quad (3.4)$$

здесь m — масса обруча, $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}$ — вектор ускорения свободного падения, записанный в системе координат Oxy .

Домножая скалярно равенство (3.4) на $\mathbf{n}$ и $\mathbf{\tau}$ соответственно, имеем

$$N = mg(\mathbf{e}, \mathbf{n}), F = mg(\mathbf{e}, \mathbf{\tau}). \quad (3.5)$$

Подставляя найденные величины (3.5) в условие равновесия, определяемое законом Кулона—Амонтона

$$|F| \leq \mu |N|,$$

после сокращения на mg имеем

$$|\mathbf{e}, \mathbf{\tau}| \leq \mu |\mathbf{e}, \mathbf{n}|. \quad (3.6)$$

С помощью соотношений (3.2), (3.3) неравенство (3.6) может быть записано в виде

$$\left| xy \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \right| \leq \mu \Leftrightarrow |xy| \leq \mu_* \equiv \mu \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}. \quad (3.7)$$

Параметр μ_* положителен и неограниченно возрастает по мере сближения значений a и b .

Задаваемая неравенством (3.7) область на плоскости (x, y) ограничена парой гипербол. Ее пересечение с задающим обруч эллипсом (3.1) всегда непусто: даже при $\mu = 0$, т.е. когда трение отсутствует, имеют место равновесия на которых обруч подвешен за концы своих полуосей (рис. 2).

Это равновесия можно рассматривать как порождающие для семейств неизолированных равновесий, существующих при $\mu > 0$.

Анализ взаимного расположения эллипса (3.1) и области (3.7) показывает, что при выполнении условия

$$2\mu_* < ab \Leftrightarrow 2\mu ab < a^2 - b^2 \quad (3.8)$$

обруч может быть подвешен как за точки, прилегающие к короткой оси, для которых выполнено неравенство

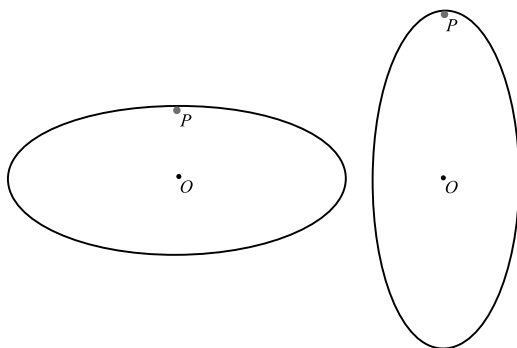


Рис. 2. Частные случаи равновесий при $\mu=0$.

$$y^2 \geq \frac{b^2 \left(a^2 - b^2 + \sqrt{(a^2 - b^2)^2 - 4\mu^2 a^2 b^2} \right)}{2(a^2 - b^2)}, \quad (3.9)$$

так и за точки, прилегающие к длинной оси, для которых выполнено неравенство

$$y^2 \leq \frac{b^2 \left(a^2 - b^2 - \sqrt{(a^2 - b^2)^2 - 4\mu^2 a^2 b^2} \right)}{2(a^2 - b^2)}. \quad (3.10)$$

Этим точкам отвечают семейства неизоллированных равновесий. На рис. 3 соответствующие точки эллипса изображены серым. Между этими областями имеются точки, за которые обруч не может быть подвешен так, чтобы оставаться в равновесии.

При выполнении условия

$$2\mu_* \geq ab \Leftrightarrow 2\mu ab \geq a^2 - b^2 \quad (3.11)$$

обруч может быть подвешен за любую свою точку.

Введем безразмерный параметр

$$p = \frac{b}{a}.$$

Согласно предположениям, этот параметр изменяется между нулем (предельный случай: “сдвоенный отрезок, соединенный в концевых точках”) и единицей (“окружность”). Тогда неравенства (3.8) и (3.11) примут вид

$$2\mu p < 1 - p^2 \Leftrightarrow \mu < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - p \right)$$

и

$$2\mu p \geq 1 - p^2 \Leftrightarrow \mu \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - p \right)$$

соответственно.

Задаваемые этими неравенствами области изображены на рис. 4. Для значений параметров из закрашенной области обруч может быть подвешен за любую его

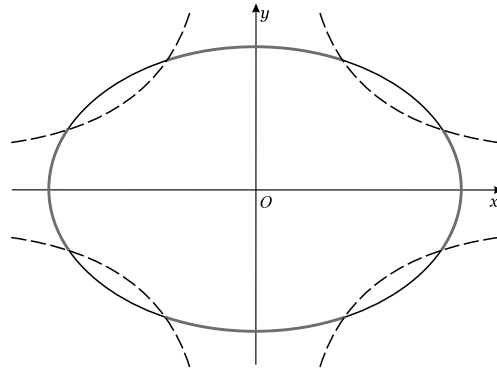


Рис. 3. Семейства неизоллированных равновесий (серый цвет).

точку. Для остальных значений параметров обруч может быть подвешен только за те точки, для которых выполняются неравенства (3.9) и (3.10).

4. Иная интерпретация полученных результатов. Полученные выше результаты допускают применение к следующей задаче, навеянной высказываниями о театральной жизни³.

На вбитый в гладкую вертикальную стену гвоздь повесили за ремень охотничье ружье. Найти положения равновесия ружья, если точки крепления ремня на ружье F' и F'' удалены друг от друга на расстояние $2c$, центр масс ружья — точка O — находится между этими точками посередине, длина ремня равна $2a$, $a \geq c$, а коэффициент трения ремня о гвоздь равен μ . Толщина ремня и толщина гвоздя предполагаются пренебрежимо малыми по сравнению с размерами ружья. Ремень предполагается абсолютно гибким, невесомым и нерастяжимым.

5. Решение. Прежде всего заметим, что в случае, когда ружье находится в подвешенном состоянии, ремень претерпевает излом в точке подвеса, и обе его части между точками крепления и точкой подвеса представляют собой отрезки прямых. При этом в силу нерастяжимости ремня сумма длин этих отрезков не зависит от возможного положения точки подвеса и равна длине этого ремня. Таким образом, опираясь на геометрическое определение эллипса (см., например, [14]), делаем вывод о том, что в системе отсчета, связанном с ружьем, множество точек, в которых может находиться гвоздь в положении равновесия, представляет собой эллипс с фокусами в точках крепления ремня.

В системе координат, связанной с ружьем, при условии натянутости ремня множество возможных положений гвоздя представляет собой эллипс с центром

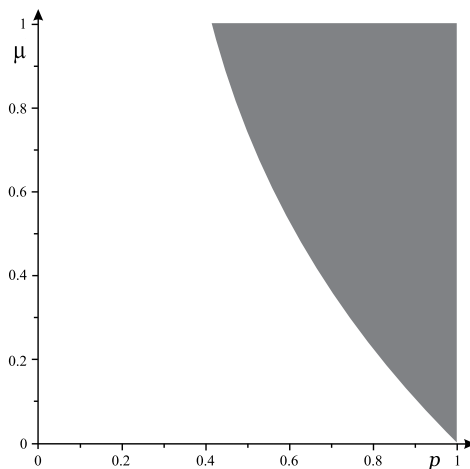


Рис. 4. Темной области на плоскости параметров (p, μ) отвечают точки, для значений которых обруч будет находиться в равновесии при подвешивании за любую его точку.

³ “Если в начале пьесы на стене висит ружье, то (к концу пьесы) оно должно выстрелить”. Известная интерпретация высказывания из письма Антона Павловича Чехова (1860–1904) к литератору Александру Лазареву-Грузинскому от 1 ноября 1889 г.

в точке O , с фокусами в точках F' и F'' , с большой полуосью, равной a , и с малой полуосью $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Тогда решение задачи сводится к решению задачи, разобранному выше после подстановки в него указанного значения величины малой полуоси b . Ответ таков:

Во введенной по аналогии с предыдущей задачей системе координат при выполнении условия

$$\mu < \frac{c^2}{2a\sqrt{a^2 - c^2}} \quad (5.1)$$

охотничье ружье может быть подвешено как за те точки ремня, для которых выполнено неравенство

$$y^2 \geq \frac{(a^2 - c^2)(c^2 + \sqrt{c^4 - 4\mu^2 a^2 (a^2 - c^2)})}{2c^2}, \quad (5.2)$$

так и за точки, для которых

$$y^2 \leq \frac{(a^2 - c^2)(c^2 - \sqrt{c^4 - 4\mu^2 a^2 (a^2 - c^2)})}{2c^2}. \quad (5.3)$$

При выполнении условия

$$\mu \geq \frac{c^2}{2a\sqrt{a^2 - c^2}} \quad (5.4)$$

ружье может быть подвешено за любую точку ремня.

Введем несколько иным способом безразмерный параметр q : положим

$$q = \frac{c}{a}.$$

Согласно предположениям, этот параметр изменяется между нулем (“точки крепления ремня совпадают”) и единицей (“ремень вытянут вдоль ружья”). Тогда если

$$Q(q) = \frac{q^2}{2\sqrt{1 - q^2}},$$

то неравенства (5.1) и (5.4) примут вид

$$\mu < Q(q), \quad \mu \geq Q(q)$$

соответственно.

Задаваемые этими неравенствами области на плоскости (q, μ) изображены на рис. 5. Для значений параметров из закрашенной области ружье может быть подвешено за любую точку ремня. Для остальных значений параметров ружье

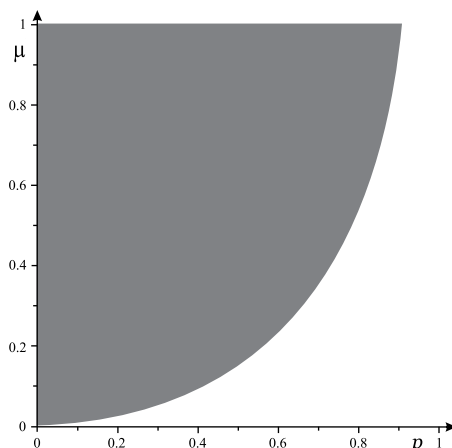


Рис. 5. Темной области на плоскости параметров (q, μ) отвечают точки, для значений которых ружье будет находиться в равновесии при подвешивании за любую ремня.

может быть подвешено только за те точки ремня, для которых выполняются неравенства (5.2) и (5.3).

6. Механическая интерпретация. Представляет некоторый интерес механическая интерпретация найденных решений. Обозначим a' и a'' длины частей ремня от точки подвеса до точек F' и F'' соответственно, $a' + a'' = 2a$ (рис. 6). Расстояние от точки подвеса до центра масс O обозначим r . Ружье удерживается за счет сил натяжения ремня T и T' , “противодействующих” силе тяжести mg . Условие равновесия записывается как

$$mg + T + T' = 0,$$

т.е. эти три вектора составляют треугольник сил. Этот треугольник подобен изображенному на рис. 6 треугольнику с вертикальной стороной, равной $2r$, и двумя другими сторонами, равными a' и a'' соответственно. Из теоремы косинусов

$$a'^2 = r^2 - 2rc \cos \alpha + c^2$$

$$a''^2 = r^2 + 2rc \cos \alpha + c^2$$

откуда

$$r = \sqrt{\frac{1}{2}(a'^2 + a''^2) - c^2}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{4rc}(a''^2 - a'^2). \quad (6.1)$$

Из подобия треугольников получается пропорция

$$\frac{T'}{a'} = \frac{T''}{a''} = \frac{mg}{2r}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Том 1. Статика. Динамика точки. М.: Физматлит. 1960. 516 с.
2. *Appell P.* Traité de mécanique rationnelle. Tome premier. Paris: Gauthier-Villars. 1893. 552 p.
3. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Том 1. Часть 2. М.: Иностранная литература. 1952. 326 с.
4. *Levi-Civita T., Amaldi U.* Lezioni di Meccanica Razionale. V. 1, 2d Edition. Bologna: Nicola Zanichelli. 1923. 744 p.
5. *Rodnikov A.V.* The algorithms for capture of the space garbage using “leier constraint” // Regular and Chaotic Dynamics. 2006. V. 11. № 4. P. 483–489. <https://doi.org/10.1070/RD2006v011n04ABEH000366>
6. *Родников А.В.* О влиянии леерной связи на движение гантелевидного тела в центральном ньютоновском силовом поле // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 4. С. 519–533.
7. *Родников А.В.* О движении материальной точки вдоль леера, закрепленного на прецессирующем твердом теле // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 2. С. 295–311.
8. *Rodnikov A.V., Krasil'nikov P.S.* On spacial motions of an orbital tethered system // Rus. J. Nonlinear Dyn. 2017. V. 13. № 4. P. 505–518. <https://doi.org/10.20537/nd1704004>
9. *Буров А.А.* О существовании и устойчивости равновесий механических систем со связями, реализуемыми большими потенциальными силами // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. № 2. С. 222–230.
10. *Genda A., Stepan G.* On the stability of bodies suspended asymmetrically with an inelastic rope // Acta Mech. 2023. V. 234. P. 3009–3018. <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03546-x>
11. *Jellet J.H.* A treatise on the theory of friction. L.: MacMillan. 1872. 220 p.
12. *Иванов А.П.* Основы теории систем с трением. Ижевск: НИЦ “РХД”. 2011. 304 с.
13. *Розенблат Г.М.* Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела. М.: URSS. 2011. 208 с.
14. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии линейной алгебры. М.: Наука. 1979. 512 с.
15. *Стрелков С.П.* Маятник Фроуда // ЖТФ. 1933. Т. 3. С. 563–573.
16. *Баталова З.С., Бирюков В.В., Неймарк Ю.И.* О движениях маятника Фроуда // Изв. вузов. Матем. 1977. № 3. С. 3–8.
17. *Магнус К.* Колебания: Введение в исследование колебательных систем. М.: Мир. 1982. 304 с.
18. *Андронов В.В., Журавлев В.Ф.* Сухое трение в задачах механики. М.—Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. Институт компьютерных исследований. 2010. 184 с.
19. *Awrejcewicz J., Holicke M.* Analytical prediction of chaos in rotated Froude pendulum // Non-linear Dynamics. 2007. V. 47. P. 3–24. <https://doi.org/10.1007/s11071-006-9054-8>
20. *Буров А.А.* Задачник Кванта. Задача Ф2642 // Квант. 2021. № 1. С. 24.
21. *Буров А.А.* Задачник Кванта. Задача Ф2642. Решение // Квант. 2021. № 4. С. 23.
22. *Сумбатов А.С.* Об условиях возникновения скольжения в плоской системе с трением // ПММ. 1995. Т. 59. № 6. С. 887–894.

ON THE EQUILIBRIA OF A HEAVY HOOP SUSPENDED ON A NAIL

A. A. Burov^{a,*}, and V. I. Nikonov^{a,**}^a Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333 Russia

*e-mail: jtm@narod.ru

**e-mail: nikon_v@list.ru

Received 07.04.2023

Revised 22.06.2023

Accepted 02.07.2023

Abstract — We consider the plane problem of the equilibrium of a homogeneous heavy thin elliptical hoop suspended on a thin horizontal nail. Under the assumption that a dry friction force acts between the nail and the hoop, the dependence of the set of equilibrium positions on the friction coefficient and the semi-axes of the ellipse is studied. The results obtained apply to the following problem: to describe the equilibrium positions of a heavy solid (“gun”) suspended on a nail using a rope, both ends of which are fixed in the body. It is shown how such a distribution of results can be carried out directly in the case when the center of mass of the body is located in the middle between the suspension points.

Keywords: equilibrium of a heavy solid, dry friction, parametric dependence

REFERENCES

1. P. Appell, *Theoretical Mechanics*, Vol. 1: *Statics. Dynamics Points* (Fizmatlit, Moscow, 1960) [in Russian].
2. P. Appell, *Traité de Mécanique Rationnelle*. Tome I (Gauthier-Villars, Paris, 1893).
3. T. Levi-Civita and U. Amaldi, *Theoretical Mechanics Course*, Vol. 1, Part. 2 (Inostr. Lit., Moscow, 1952) [in Russian].
4. T. Levi-Civita and U. Amaldi, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Vol. 1, 2nd ed. (Nicola Zanichelli, Bologna, 1923).
5. A. V. Rodnikov, “The algorithms for capture of the space garbage using “leier constraint,” *Reg. Chaot. Dyn.* **11** (4), 483–489 (2006). <https://doi.org/10.1070/RD2006v011n04ABEH000366>
6. A. V. Rodnikov, “On the leier influence on a dumbbell motion in the central Newtonian force field,” *Nelin. Dinam.* **5** (4), 519–533 (2009). <https://doi.org/10.20537/nd0904005>
7. A. V. Rodnikov, “On a particle motion along the leier fixed in a precessing rigid body,” *Nelin. Dinam.* **7** (2), 295–311 (2011). <https://doi.org/10.20537/nd1102007>
8. A. V. Rodnikov and P. S. Krasil’nikov, “On spacial motions of an orbital tethered system,” *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2017. V. **13** (4), 505–518 (2017). <https://doi.org/10.20537/nd1704004>

9. A. A. Burov, "The existence and stability of the equilibria of mechanical systems with constraints produced by large potential forces," J. Appl. Math. Mech. **67** (2), 193–200 (2003). [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(03\)90005-0](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(03)90005-0)
10. A. Genda and G. Stepan, "On the stability of bodies suspended asymmetrically with an inelastic rope," Acta Mech. **234**, 3009–3018 (2023). <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03546-x>
11. J. H. Jellet, *A Treatise on the Theory of Friction* (MacMillan, London, 1872).
12. A. P. Ivanov, *Fundamentals of the Theory of Systems with Friction* (Reg. Khaot. Dyn., Moscow, 2011) [in Russian].
13. G. M. Rosenblat, *Dry Friction and Unilateral Constraints in Solid Mechanics* (URSS, Moscow, 2011) [in Russian].
14. P. S. Aleksandrov, *Course of Analytic Geometry and Linear Algebra* (Nauka, Moscow, 1979) [in Russian].
15. S. P. Strelkov, "Froude's pendulum," Zh. Tekhn. Fiz. **3**, 563–573 (1933).
16. Z. S. Batalova, V. V. Biryukov, and Y.I. Neimark, "On the motions of the Froude pendulum," Izv. Vuzov. Mat., No. 3, 3–8 (1977).
17. K. Magnus, *Oscillations: Introduction to Research of Oscillatory Systems* (Mir, Moscow, 1982) [in Russian].
18. V. V. Andronov and V. Ph. Zhuravlev, *Dry Friction in Problems of Mechanics* (IKI, NITs "Regular and Chaotic Dynamics," Moscow-Izhevsk, 2010) [in Russian].
19. J. Awrejcewicz and M. Holicke, "Analytical prediction of chaos in rotated Froude pendulum," Nonlin. Dyn. **47**, 3–24 (2007). <https://doi.org/10.1007/s11071-006-9054-8>
20. A. A. Burov, "Task F2642," Kvant, No. 1, 24 (2021).
21. A. A. Burov, "Task F2642. Solution," Kvant, No. 4, 23 (2021).
22. A. S. Sumbatov, "Conditions for the onset of sliding in a plane system with friction," J. Appl. Math. Mech. **59** (6), 845–852 (1995). [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(95\)00117-4](https://doi.org/10.1016/0021-8928(95)00117-4)