

УДК 539.374

ХРУПКОЕ РАЗРУШЕНИЕ УПРУГОГО СЛОЯ С ДЕФЕКТОМ В ВИДЕ ОКРУЖНОСТИ ПРИ ЕГО ДВУХОСНОМ НАГРУЖЕНИИ

© 2024 г. В. В. Глаголев^{а*}, А. А. Маркин^{а**}

^аТульский государственный университет,
Тула, Россия

^{*}*e-mail: vadim@tsu.tula.ru*

^{**}*e-mail: markin-nikram@yandex.ru*

Поступила в редакцию 29.05.2023 г.

После доработки 04.07.2023 г.

Принята к публикации 08.07.2023 г.

На основе экспериментальных данных по комбинированному нагружению бесконечного слоя, ослабленного круговым отверстием в хрупком материале, моделируется его критическое состояние, определяемое энергетическим критерием. Критерий разрушения связан с потоком удельной свободной энергии через дугу взаимодействия и линейным размером. Предлагаемый подход позволяет отразить зависимость критической внешней нагрузки от радиуса кривизны. Предложена и реализована процедура определения значения линейного размера. Используя известные экспериментальные результаты, получена оценка введенного линейного параметра для слоя из гипса марки ГВВС-16.

Ключевые слова: линейная упругость, линейный размер, энергетическое произведение

DOI: 10.31857/S1026351924010126, EDN: VZPHXQ

Введение. Для плоской задачи о нагружении материального слоя с отверстиями возможно получение аналитических решений [1–3], среди которых выделим задачу о нагружении кругового отверстия в бесконечной среде. Рассматривая одноосное нагружение на бесконечности, приходим к задаче Кирша [4] решение которой приводит к нахождению коэффициента концентрации напряжений равному трем, который не зависит от радиуса отверстия. Принимая максимальное главное напряжение в качестве критерия разрушения приходим к тому, что вне зависимости от радиуса отверстия разрушение образца должно происходить при одной нагрузке. Однако экспериментальные данные свидетельствуют о существенной нелинейной зависимости [5–7], при которой для малых значений радиуса отверстия образец практически не реагирует на дефект, а при увеличении радиуса отверстия имеет место асимптотическая сходимость к постоянному значению. Объяснение данному экспериментальному факту в работах [6–8] дается

посредством введения в модель сплошной среды линейного размера (ЛР). В статьях [6, 7] ЛР определяется исходя из решений механики трещин. В статье [8] относительно ЛР рассматривается влияние радиуса кривизны кругового отверстия на эффективный поток энергии растягивающих напряжений. Поток энергии в рамках дуги взаимодействия (ДВ) приводит к разрушению для относительно больших радиусов кривизны при значении внешней нагрузки, найденной по классическому решению задачи Кирша. В данной работе предлагается рассмотреть комбинированное нагружение [9] бесконечного материального слоя с круговым отверстием. На основе экспериментальных данных статьи [7] по критическому значению параметра нагружения для различных круговых вырезов определен ЛР исследуемого материала.

1. Постановка задачи. Рассматривается комбинированное нагружение линейно упругой среды с круговым отверстием согласно схеме рис. 1.

Сжимающая распределенная нагрузка $P_2 = -k_2 p$ вдоль оси x_2 и растягивающая распределенная нагрузка $P_1 = k_1 p$ вдоль оси x_1 линейно связаны с параметром нагружения p , принимаемым положительной величиной. Соответствующая схема нагружения была реализована для материала дигидрат сульфата кальция (двухводного гипса) приготовленного из водного раствора высокопрочного гипса марки ГВС-16 в работе [7] для отверстий диаметра $2a$, равных 1, 2, 5, 10, 15 и 20 мм при $k_1 = 0.143$, $k_2 = 0.764$. Методика эксперимента представлена в работе [9]. Предел прочности бездефектного исследуемого материала при сжатии составил $S_0 = 34.11$ МПа, а при растяжении — $S_1 = 5.38$ МПа [7]. Результаты эксперимента показывают влияние диаметра отверстия на локальную прочность материала. В работе [7] объяснение данного результата строится на основе подхода механики конечных трещин. Рассмотрим полученный результат исходя из анализа потока удельной свободной энергии через ДВ [8], определив при этом соответствующий ЛР — δ_0 исследуемого материала.

Напряженное состояние на контуре кругового отверстия $r = a$ при двухосном растяжении запишем в виде [10]:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0; \sigma_{\theta\theta} = P_1 + P_2 - 2(P_1 - P_2)\cos 2\theta, \quad (1.1)$$

где r, θ — полярные координаты, показанные на рис. 1.

Из (1.1) выпишем отличную от нуля компоненту тензора напряжений с учетом рассматриваемых граничных условий:

$$\sigma_{\theta\theta} = p((k_1 - k_2) - 2(k_1 + k_2)\cos 2\theta) = p(b_1 + b_2\cos 2\theta), \quad (1.2)$$

где $b_1 = -0.621$; $b_2 = -1.814$.

Из (1.2) приходим к двум экстремальным значениям, соответствующим четырем значениям полярного угла $\sigma_{\theta\theta}(0) = \sigma_{\theta\theta}(\pi) = -2.435p$; $\sigma_{\theta\theta}(\pi/2) = \sigma_{\theta\theta}(3\pi/2) = cp = 1.193p$, где $c = b_1 - b_2$. С учетом заявленных прочностных характеристик материала, при которых предел прочности на сжатие более чем в шесть раз превышает предел прочности на растяжение, получаем, что процесс разрушения на окружном вырезе будет локализоваться в окрестности значений полярного угла $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$. Без ограничения общности рассмотрим ДВ в окрестности значения $\theta = \pi/2$, определяемую углом раствора α , согласно рис. 1.

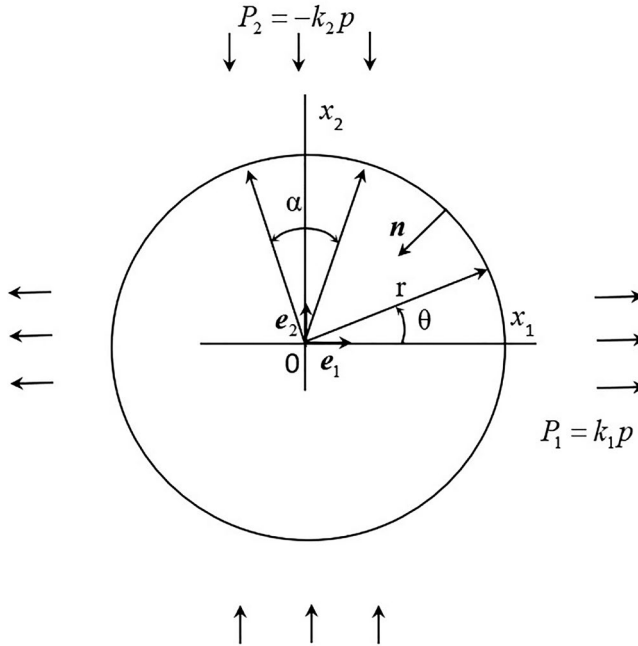


Рис. 1. Схема нагружения кругового отверстия.

2. Нахождение потока энергии через дугу взаимодействия. Следуя работе [8], определим угол раствора следующим образом

$$\alpha = 2\arcsin \delta_0/2a, \quad (2.1)$$

где δ_0 – линейный размер.

Распределение удельной свободной энергии вдоль контура отверстия согласно (1.2) запишем в виде

$$\Psi = \frac{p^2}{2\hat{E}}(b_1 + b_2 \cos 2\theta)^2, \quad (2.2)$$

где $\hat{E} = E$ в случае плоского напряженного состояния; $\hat{E} = E(1 - \nu^2)$ при плоской деформации; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона.

Определим поток удельной свободной энергии через дугу взаимодействия в направлении вектора $\mathbf{e}_2$ в виде:

$$2\gamma = - \int_{(\pi-\alpha)/2}^{(\pi+\alpha)/2} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n} \Psi a d\theta = \int_{(\pi-\alpha)/2}^{(\pi+\alpha)/2} a \Psi \sin \theta d\theta, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к дуге взаимодействия; $\cdot$ — скалярное умножение.

В результате интегрирования (2.3) получаем

$$2\gamma = \frac{p^2 \delta_0 c^2}{2\hat{E}} \left(1 + \frac{b_2}{3c} \left(\frac{\delta_0}{a} \right)^2 + \frac{1}{20} \left(\frac{b_2}{c} \right)^2 \left(\frac{\delta_0}{a} \right)^4 \right). \quad (2.4)$$

Из (2.4) при $\delta_0 = 2a$ получаем $2\gamma = 0.8222 \frac{p^2 \delta_0 c^2}{2\hat{E}}$, в случае $\delta_0 \ll a$ — $2\gamma = \frac{p^2 \delta_0 c^2}{2\hat{E}}$.

Таким образом при одинаковом значении параметра нагружения поток удельной свободной энергии в случае $\delta_0 = 2a$ практически на 20% меньше потока в случае $\delta_0 \ll a$.

Положим, что разрушение охватывает ДВ, когда поток удельной свободной энергии через нее достигает критического значения [8]

$$2\gamma = 2\gamma_c. \quad (2.5)$$

Из (2.4) и (2.5) приходим к выражению для критического значения параметра нагружения

$$p_c = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{\hat{E}}{\delta_0}} \left(1 + \frac{b_2}{3c} \left(\frac{\delta_0}{a} \right)^2 + \frac{1}{20} \left(\frac{b_2}{c} \right)^2 \left(\frac{\delta_0}{a} \right)^4 \right)^{-1/2}. \quad (2.6)$$

Критическое значение параметра нагружения найдем из решения (1.2) положив достижение окружного напряжения при $\theta = \pi/2$ равным пределу прочности на растяжение $p_c = C_1 / c$. Приравняв последнее выражение к значению (2.6) в случае $\delta_0 \ll a$ приходим к выражению критического потока через энергетическое произведение [11]

$$2\gamma_c = \frac{C_1^2}{2\hat{E}} \delta_0. \quad (2.7)$$

Из (2.6), (2.7) получаем

$$\hat{p}_c = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{b_2}{3c} \left(\frac{\delta_0}{a} \right)^2 + \frac{1}{20} \left(\frac{b_2}{c} \right)^2 \left(\frac{\delta_0}{a} \right)^4 \right)^{-1/2}, \quad (2.8)$$

где $\hat{p}_c = p_c / C_1$.

В случае $\delta_0 = 2a$ $\hat{p}_c \approx 0.92$, а в случае $\delta_0 \ll a$ $\hat{p}_c \approx 0.83$. Экстремальное максимальное значение функции (10) $\hat{p}_c \approx 1.26$ находится в точке $\delta_0 / a = \sqrt{-10A/3b_2} \approx 1.48$. Используем точку экстремума функции (10) для определения ЛР.

3. Нахождение линейного размера. На рис. 2 приведем экспериментальные данные работы [7], отнеся их к пределу прочности при растяжении образца. На рис. 2 непрерывной линией приведена аппроксимирующая кривая, построенная

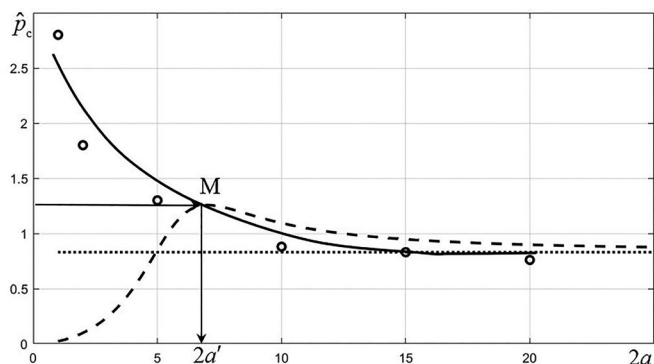


Рис. 2. Данные эксперимента и их интерпретация. Размерность оси абсцисс в мм.

на основе экспоненциальной функции $n_1 e^{n_2 x_1} + n_3$, где n_1, n_2, n_3 — постоянные, определяемые методом наименьших квадратов. Экспериментальные данные работы [7] на рис. 2 выделены кругами. Точечной линией построена прямая $\hat{p}_c = 0.83$.

Для нахождения ЛР проведем прямую $\hat{p}_c = 1.26$ пересечения с аппроксимирующей кривой. Из точки пересечения М опустим перпендикуляр до пересечения с осью абсцисс. Данное значение диаметра $2a'$ отверстия после нормирования будет определять ЛР материала

$$\delta_0 = \sqrt{(-10c / (3b_2))} (2a') / 2.$$

По представленной на рис. 2 зависимости находим $2a' \approx 4$ мм. Таким образом получаем $\delta_0 = 3$ мм. На рис. 2 пунктирной линией построена кривая (2.8) с найденным ЛР. В этом случае допустимый радиус отверстия, для которого возможно проводить расчет предельной нагрузки в рамках предложенного критерия разрушения будет определяться диапазоном $0 \geq a'$.

Заключение. Показано, что формулировка условия прочности в виде достижения потоком удельной свободной энергии через ДВ критического значения позволяет получить зависимость критического состояния от радиуса отверстия и ЛР в упругом слое при комбинированном нагружении на бесконечности. При этом ЛР является характеристикой материала, связывающей предложенный критерий прочности с классическими критериями.

На основе известных экспериментальных данных о критическом состоянии слоев с круговыми отверстиями различных радиусов предложена процедура нахождения ЛР. Проведена оценка ЛР высокопрочного гипса марки ГВВС-16.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00017, <https://rscf.ru/project/23-21-00017/>, в Тульском государственном университете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
2. Inglis C.E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners // Transactions of the Royal Institute of Naval Architects. 1913. V. 55. P. 219–230.
3. Угодчиков А.Г. Решение задач теории упругости методами функций комплексного переменного: Учебное пособие. Н. Н.: Издательство ННГУ, 2001. 396 с.
4. Kirsch G. Die Theorie d. Elastizitat u.d. Bedurfnisse d. Festigkeitslehre // Zeitschrift des Vereines deutscher Ing. 1898. V. 42. P. 797–807.
5. Li. J., Zhang X.B. A criterion study for non-singular stress concentrations in brittle or quasi-brittle materials // Eng. Fract. Mech. 2006. V. 73. № 4. P. 505–523.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2005.09.001>
6. Zhang X.B., Li. J. A failure criterion for brittle and quasi-brittle materials under any level of stress concentration // Eng. Fract. Mech. 2008. V. 78. № 17. P. 4925–4932.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2008.06.020>
7. Сукнев С.В. Применение подхода механики конечных трещин для оценки разрушения квазихрупкого материала с круговым отверстием // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 3. С. 13–25. <http://doi.org/10.31857/S0572329921020161>
8. Глаголев В.В., Маркин А.А. Влияние линейного параметра на хрупкое разрушение упругого слоя с круговым отверстием // ПМТФ. 2023. Т. 64. Вып. 5. С. 159–165.
<http://doi.org/10.15372/PMTF202315252>
9. Сукнев С.В. Разрушение хрупкого геоматериала с круговым отверстием при двухосном нагружении // ПМТФ. 2015. Т. 56. № 6. С. 166–172.
<http://doi.org/10.15372/PMTF20150618>
10. Макаров Е.В., Монахов И.А., Нефедова И.В. Двухосное растяжение пластины с круговым отверстием // Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования. 2015. № 3. С. 17–22.
11. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // Int. J. Solids Struct. 2019. V. 158. P. 141–149.
<http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002>

BRITTLE FRACTURE OF AN ELASTIC LAYER WITH A DEFECT IN THE FORM OF A CIRCLE UNDER BIAXIAL LOADING

V. V. Glagolev^{a*}, and A. A. Markin^{a**}

^aTula State University, Tula, 300012 Russia

*e-mail: vadim@tsu.tula.ru

**e-mail: markin-nikram@yandex.ru

Received 29.05.2023

Revised 04.07.2023

Accepted 08.07.2023

Abstract – Based on experimental data on the combined loading of an infinite layer weakened by a circular hole in a brittle material, its critical state, determined by the energy criterion, is modeled. The failure criterion is related to the free energy flow through the interaction arc and the linear size. The proposed approach allows us to reflect the dependence of the critical external load on the radius of curvature. A procedure for determining the value of the linear size is proposed and implemented. Using known experimental results, an estimate of the introduced linear parameter for a layer of GVV5-16 gypsum was obtained.

Keywords: linear elasticity, linear size, energy product

REFERENCES

1. N. I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity* (Nauka, Moscow, 1966; Noordhoff, Leyden 1975).
2. C. E. Inglis, "Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners," *Trans. Roy. Inst. Naval Archit.* **55**, 219–230 (1913).
3. A. G. Ugodchikov, *Solution of the Theory of Elasticity Problems by Functions of a Complex Variable Methods* (NNGU, N. Novgorod, 2001) [in Russian].
4. G. Kirsch, "Die Theorie der Elastizität und Bedürfnisse der Festigkeitslehre," *Z. Ver. Dtsch. Ing.* **42**, 797–807 (1898).
5. J. Li and X. B. Zhang, "A criterion study for non-singular stress concentrations in brittle or quasi-brittle materials," *Eng. Fract. Mech.* **73** (4), 505–523 (2006).
<https://doi.org/10.1016/j.engfractmech.2005.09.001>
6. X. B. Zhang and J. Li, "A failure criterion for brittle and quasi-brittle materials under any level of stress concentration," *Eng. Fract. Mech.* **78** (17), 4925–4932 (2008).
<https://doi.org/10.1016/j.engfractmech.2008.06.020>
7. S. V. Suknev, "Application of the finite fracture mechanics approach to assess the failure of a quasi-brittle material with a circular hole," *Mech. Solids* **56** (3), 301–311 (2021).
<https://doi.org/10.3103/S0025654421030110>
8. V. V. Glagolev and A. A. Markin, "Effect of a linear parameter on the brittle fracture of an elastic layer with a circular hole," *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **64**, 871–877 (2023).
<https://doi.org/10.1134/S0021894423050164>
9. S. V. Suknev, "Fracture of brittle geomaterial with a circular hole under biaxial loading," *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **56**, 1078–1083 (2015).
<https://doi.org/10.1134/S0021894415060188>
10. E. V. Makarov, I. A. Monakhov, and I. V. Nefedova, "Biaxial stretching of the plate a circular hole," *RUDN J. Eng. Res.*, No. 3, 17–22 (2015).
11. V. V. Glagolev and A. A. Markin, "Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter," *Int. J. Solids Struct.* **158**, 141–149 (2019).
<http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002>