

УДК 531.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЭКЗОСКЕЛЕТА СИСТЕМОЙ ТРЕХ ЗВЕНЬЕВ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ С РЕГУЛИРУЕМОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

© 2024 г. А. О. Блинов^{а,*}, А. В. Борисов^{а,***},

Р. Г. Мухарлямов^{б,***}, М. А. Новикова^{а,****}

^аФилиал ФГБОУ ВО НИУ «МЭИ» в г. Смоленске, Смоленск, Россия

^бИнститут физических исследований и технологий ФГАОУ ВО Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

*e-mail: alex-blinov67@yandex.ru

**e-mail: borisowandrej@yandex.ru

***e-mail: robgar@mail.ru

****e-mail: mar.novikova@ro.ru

Поступила в редакцию 21.02.2023 г.

После доработки 04.05.2023 г.

Принята к публикации 06.05.2023 г.

В статье предложена пространственная модель экзоскелета для опорно-двигательного аппарата человека, представленная тремя подвижными звеньями переменной длины и двумя точечными массами. Управление жесткостью звеньев осуществляется изменением напряжения, подаваемого на магнитно-реологическую жидкость, заполняющую участки переменной длины. Модель можно использовать для разработки комфортабельных экзоскелетов, кинематические характеристики которых близких к кинематическим характеристикам опорно-двигательного аппарата человека. Уравнения динамики модели составляются с использованием локальных систем координат.

Требуемые законы изменения обобщенных координат задаются уравнениями программных связей, определяющих зависимость дифференцируемых периодических функций от времени. Управляющие моменты и продольные силы определяются методами решения обратных задач динамики и реализуются изменением напряженностей магнитных полей, влияющих на изменение жесткости магнитно-реологической жидкости. Управляющие жесткостью звена напряженности магнитных полей реализуются ступенчатыми функциями. Синтезирована анимация движения механизма, показывающая адекватность предложенной процедуры моделирования. Соединения звеньев моделируются шарнирами и двигателями, реализующими необходимое вращательное движение. Управление динамикой модели осуществляется изменением длин звеньев и углов между звеньями.

Ключевые слова: экзоскелет, звено переменной длины, жесткость, магнитно-реологическая жидкость, система, дифференциальные уравнения, шарнир, управление, динамика, численное решение, анимация

DOI: 10.31857/S1026351924010158, EDN: VZJQFU

1. Введение. Несмотря на значительно увеличивающееся количество публикаций и патентов по теме “экзоскелет” [1], остаются актуальными проблемы их использования. Одной из причин недостаточной комфортабельности является наличие массивных абсолютно твердых звеньев, оказывающих существенное влияние на динамику человеко-машинной системы. В реальном опорно-двигательном аппарате человека расстояния между осями вращения в суставах изменяются [2–4], что должно учитываться при проектировании экзоскелетов. Помимо отсутствия изменения длины звена, сама масса звена экзоскелета, сопоставимая по порядку величины с массой человека, оказывает значительное влияние на движения человека в экзоскелете [5–9]. Поэтому требуется адаптация и обучение человека движениям в экзоскелете. Оценке пользы от применения современных моделей экзоскелетов, затрат энергии у человека и ее экономии от использования экзоскелетов посвящены работы [10–23]. В статье [24] представлен процесс создания структур для отображения необходимых исследований, которые помогут разработчикам экзоскелетов. В данной статье развивается идея применения в конструкции экзоскелетов звеньев переменной длины [1, 5–9]. Предлагается управление длиной участка переменной длины с использованием магнитно-реологической жидкости, путем изменения ее вязкости под действием прилагаемого внешнего магнитного поля. Научных публикаций с описанием применения магнитно-реологических сред в мехатронных антропоморфных устройствах не так много [25–30]. Имеется ряд работ, в которых описываются свойства магнитно-реологических жидкостей и их различные применения [31–45]. В данном списке работы размещены в хронологическом порядке и видно, что первые подходящие модели, которые впоследствии были использованы при описании магнитно-реологических жидкостей, созданы достаточно давно. Константы, необходимые для конструирования модели, рассматриваемой в данной работе, взяты из приведенного списка публикаций. На основе этих данных получена зависимость силы сопротивления магнитно-реологической жидкости от внешнего магнитного поля, необходимая для управления динамикой звена переменной длины с регулируемой жесткостью.

2. Постановка задачи. Основная задача численно-аналитических расчетов, требуемых для создания прототипа, решается в несколько этапов. Прежде всего, следует составить систему дифференциальных уравнений динамики модели экзоскелета, составленной из трех звеньев переменной длины с регулируемой жесткостью. Затем, решая обратную задачу динамики, необходимо найти управляющие моменты и силы, на основе которых определяется закон изменения во времени зависимости внешнего магнитного поля, управляющего свойствами магнитно-реологической жидкости.

3. Модель экзоскелета, состоящая из трех звеньев переменной длины с регулируемой жесткостью. Рассмотрим 3D-модель экзоскелета, состоящего из трех звеньев переменной длины с регулируемой жесткостью в одноопорной фазе движения. Пусть первое, нижнее звено A_0A_1 моделирует голень опорной ноги. Второе, среднее звено A_1A_2 – бедро опорной ноги. Третье, верхнее звено A_2A_3 – корпус экзоскелета. В точках механизма A_2 и A_3 имеются сосредоточенные массы m_p и m_H , приближенно моделирующие переносимую ногу и голову совместно с руками соответственно. Следует отметить, что если представление голени

и бедра опорной ноги экзоскелета тонкими звеньями, является достаточно адекватной аппроксимацией реальных звеньев опорно-двигательного аппарата человека, то моделирование корпуса тонким стержнем, а переносимой ноги, головы и рук точечными массами является весьма грубым приближением, позволяющим провести лишь качественный анализ динамических свойств предлагаемой конструкции экзоскелета. При составлении уравнений движения используем метод, основанный на применении локальных систем координат, предложенный в работе [46]. Введем неподвижную декартову систему координат $A_0x_0y_0z_0$ (рис. 1), с началом в точке A_0 , где закреплен шарнир.

В модели используются различные модели шарниров и их комбинации. Так, в шарнире A_0 имеется комбинация двух цилиндрических шарниров с взаимно

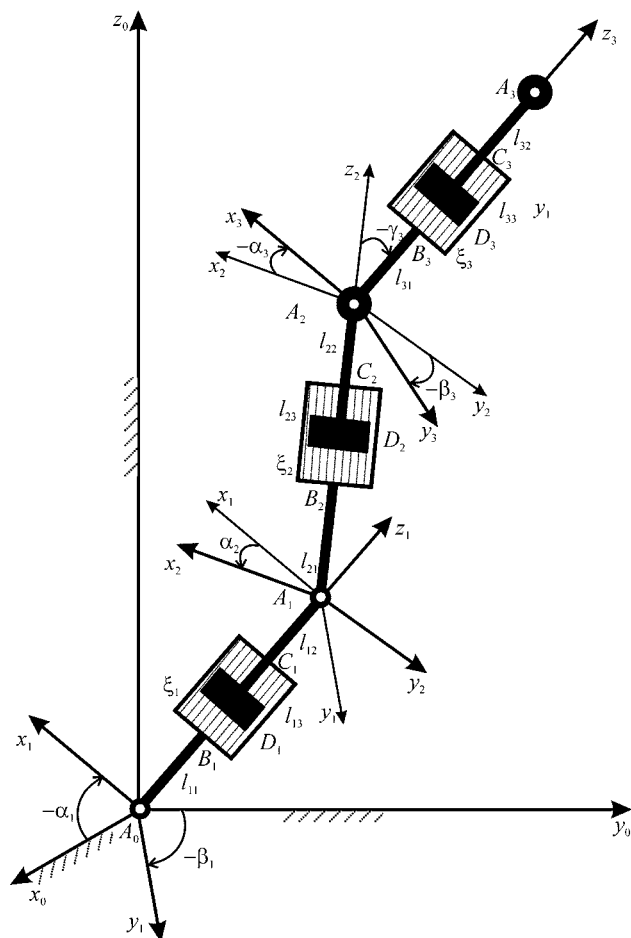


Рис. 1. Пространственная модель трех звеньев экзоскелета переменной длины с регулируемой жесткостью (показано состояние с приложенным внешним магнитным полем, когда магнитные частицы ориентированы вдоль силовых линий поля).

ортогональными осями вращения. Такая конструкция соответствует движениям в голеностопном суставе человека, в котором при ходьбе практически не наблюдается поворота голени вокруг своей продольной оси. Поэтому в модели голеностопного сустава не используется сферический шарнир. В точке A_1 находится цилиндрический шарнир, моделирующий коленный сустав человека. Тазобедренный сустав человека является сферическим шарниром, поэтому в точке A_2 расположен сферический шарнир, моделирующий все имеющиеся реальные степени подвижности. При составлении системы дифференциальных уравнений применим подвижные локальные системы координат $A_0x_1y_1z_1$, $A_1x_2y_2z_2$ и $A_2x_3y_3z_3$, жестко связанные с шарнирами A_0 , A_1 и A_2 , в которых реализуются повороты звеньев. Такой способ описания использует углы между звеньями, соответствующие режиму работы реальных приводов роботизированного экзоскелета, посредством которых изменяются относительные углы. Оси z_1 , z_2 и z_3 направим вдоль подвижных звеньев A_0A_1 , A_1A_2 и A_2A_3 . На (рис. 1) показаны углы поворотов, предусмотренные в модели.

Звенья одинаковой конструкции A_0A_1 , A_1A_2 и A_2A_3 состоят из абсолютно твердых штоков A_1D_1 , A_2D_2 и A_3D_3 с поршнями D_1 , D_2 и D_3 , находящимися внутри корпусов B_1C_1 , B_2C_2 и B_3C_3 . Корпуса являются тонкостенными цилиндрами с намотанными на них электромагнитными катушками. Цилиндры внутри заполнены магнитно-реологической жидкостью. Снизу к цилиндрам жестко прикреплены абсолютно твердые стержни A_0B_1 , A_1B_2 и A_2B_3 , на концах которых расположены шарниры. В шарнирах предполагается возможность создания необходимых управляющих моментов.

Каждое звено имеет по два весомих абсолютно жестких стержня: $A_0B_1 = l_{11}$, $D_1A_1 = l_{12}$, $A_1B_2 = l_{21}$, $D_2A_2 = l_{22}$, $A_2B_3 = l_{31}$, $D_3A_3 = l_{32}$, где первый индекс равен номеру звена, второй – номеру участка на звене. Длины цилиндров с магнитно-реологической жидкостью: $B_1C_1 = l_{13}$, $B_2C_2 = l_{23}$, $B_3C_3 = l_{33}$. Их диаметры будем считать пренебрежимо малыми в сравнении с длиной, т.е. допустим, что цилиндр с магнитно-реологической жидкостью моделируется стержнем. Массы отдельных элементов звеньев равны: m_{11} , m_{12} , m_{13} соответственно. Моменты инерции стержней относительно осей вращений соответственно равны I_{11} , I_{12} , I_{13} . В первом приближении допустим, что сами поршни D_1 , D_2 и D_3 имеют пренебрежимо малую массу и моменты инерции по сравнению со стержнями D_1A_1 , D_2A_2 и D_3A_3 . Вычисление тензора инерции цилиндра с поршнем, заполненного магнитно-реологической жидкостью, требует отдельного исследования, в данной работе ограничимся существенно приближенным моделированием в целом цилиндра стержнем. Длины звеньев изменяются вследствие относительного движения поршней со штоками D_1A_1 , D_2A_2 и D_3A_3 внутри цилиндров с магнитно-реологической жидкостью B_1C_1 , B_2C_2 и B_3C_3 вдоль направлений звеньев A_0A_1 , A_1A_2 и A_2A_3 . Магнитно-реологическая жидкость реализует силы сопротивления F_1 , F_2 и F_3 , действующие вдоль штоков с поршнями. В результате действия внешнего магнитного поля магнитные частицы частично ориентируются вдоль силовых линий магнитного поля, причем с увеличением напряженности магнитного поля, доля ориентированных частиц увеличивается, тем самым увеличивается сила сопротивления магнитно-реологической жидкости движению поршня. Следовательно, обеспечивается

управляемое изменение длины звена в соответствии с фазой ходьбы и нагрузкой от соседних звеньев.

Положения звеньев экзоскелета однозначно определяются углами $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$, $\beta_3(t)$, $\gamma_3(t)$ и переменными длинами участков звеньев между поршнем и дном цилиндра $B_1D_1 = \xi_1(t)$, $B_2D_2 = \xi_2(t)$ и $B_3D_3 = \xi_3(t)$ (рис. 1). Следовательно, модель имеет девять степеней свободы. Управляющие моменты, развиваемые в шарнирах A_0 , A_1 и A_2 с идеальными связями, обозначим $M_{1\alpha}$, $M_{1\beta}$, $M_{2\alpha}$, $M_{3\alpha}$, $M_{3\beta}$, $M_{3\gamma}$ и будем считать мгновенно развивающими требуемое усилие.

Кинетическая энергия рассматриваемого механизма вычисляется путем интегрирования по всем весомым участкам A_0B_1 , B_1C_1 , D_1A_1 , A_1B_2 , B_2C_2 , D_2A_2 , A_2B_3 , B_3C_3 , D_3A_3 .

$$T = \frac{1}{2} \left(m_p V_{A_2}^2 + m_H V_{A_3}^2 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_0^{l_{ij}} \rho_{ij} V_{ij}^2 d\zeta_{ij} \right). \quad (3.1)$$

Здесь: i – номер звена ($i = 1, 2, 3$); j – номер участка на звене, причем $j = 1$ соответствует нижним участкам A_0B_1 , A_1B_2 и A_2B_3 , $j = 2$ соответствует штокам с поршнями D_1A_1 , D_2A_2 и D_3A_3 , $j = 3$ соответствует цилиндрам B_1C_1 , B_2C_2 и B_3C_3 ; ζ_{ij} – координата бесконечно малой частицы j -того инерционного участка i -того звена, ρ_{ij} – плотность j -того участка i -того звена, при этом $m_{ij} = \rho_{ij} l_{ij}$, $I_{ij} = \rho_{ij} l_{ij}^3 / 3$, l_{ij} , m_{ij} , I_{ij} – длина, масса, момент инерции j -того участка i -того звена, m_p – масса переносимой ноги, расположенная в точке A_2 , $V_{A_2}^2$ – квадрат скорости точки A_2 , моделирующей тазобедренный сустав, m_H – масса головы и рук, расположенная в точке A_3 , $V_{A_3}^2$ – квадрат скорости точки A_3 , моделирующей голову человека, V_{ij}^2 – квадрат скорости бесконечно малой частицы j -того участка i -того звена.

Кинетическая энергия (3.1) предложенной модели громоздка, вследствие того, что звенья совершают сложное движение вокруг шарниров, поэтому приведем формулу кинетической энергии первого звена

$$T_1 = \frac{1}{2} \left[(I_{11} + I_{12} + I_{13} + (l_{11}^2 + l_{11}l_{12} + 2l_{11}\xi_1 + l_{12}\xi_1 + \xi_1^2)m_{12} + (l_{11}^2 + l_{11}l_{13})m_{13}) \times \right. \\ \left. \times (\dot{\alpha}_1^2 \cos^2 \beta_1 + \dot{\beta}_1^2) + m_{12} \dot{\xi}_1^2 \right].$$

С использованием уравнений Лагранжа второго рода была составлена система дифференциальных уравнений движения для предложенной на (рис. 1) модели опорной ноги экзоскелета в виде трех звеньев переменной длины с регулируемой жесткостью. Система дифференциальных уравнений движения является слишком громоздкой и в тексте статьи не приводится.

Рассмотрим поведение магнитно-реологической жидкости. Вследствие приложения сил со стороны соседних стержней, действия реакции со стороны неподвижной опоры и силы тяжести происходит относительное движение поршней D_1 , D_2 и D_3 в цилиндрах B_1C_1 , B_2C_2 и B_3C_3 , содержащих магнитно-реологическую жидкость, которая, вследствие изменения вязкости оказывает различное сопротивление движению поршня. В отсутствие внешнего магнитного поля поведение частиц магнитно-реологической жидкости хаотичное. При этом

магнитно-реологическая жидкость не оказывает значительного сопротивления движению поршня. На (рис. 1) показаны ориентированные магнитные частицы в случае приложения внешнего магнитного поля. Изменением вязкости магнитно-реологической жидкости управляет внешнее магнитное поле, реализуемое при помощи намотанных на цилиндр катушек. При приложении внешнего магнитного поля жидкость оказывает сопротивление движению поршня, которое тем больше, чем больше ориентированных частиц в ней содержится. Становится возможным регулировать жесткость звеньев A_0A_1 , A_1A_2 и A_2A_3 при изменении их длины. Управление изменением вязкости магнитно-реологической жидкости реализуется с использованием внешнего магнитного поля, что приводит к изменению силы сопротивления движению поршня внутри цилиндра. Зависимость силы сопротивления, реализуемой магнитно-реологической жидкостью от напряженности магнитного поля, имеет следующий вид [35,37]:

$$F = \pi r^2 \left\{ \left[1 + \phi_L \left(\alpha_n + \frac{(\zeta_n + \beta_n \lambda_n + \beta_n \cos 2\theta)}{2} + (\chi_n - 2\beta_n \lambda_n) \frac{\sin^2 2\theta}{4} \right) \right] \eta_f \dot{\gamma} + \frac{9\phi_L \mu_0 H^2 (n-1)(\chi_f + 1) \sin 2\theta}{16n_c} \right\}. \quad (3.2)$$

Здесь: ϕ_L — объемная доля микронных частиц, равная $\phi_L = 0.0127$, n_c — максимальное число частиц в цепочке $n_c = 50$, $\alpha_n, \dots, \lambda_n$ — кинетические коэффициенты, v_L — объем микронной частицы, $\dot{\gamma}$ — скорость сдвига, η_f — вязкость магнитно-реологической жидкости $\eta_f = 1.36$ Па с, θ — угол между вектором, направленным вдоль прямой, соединяющей центры двух микронных частиц и вектором напряженности внешнего магнитного поля $\theta = 0.37$ рад [35, 37].

Далее получим зависимости управляющих моментов, продольных сил, напряженностей внешних магнитных полей, управляющих движением предложенной модели трех звеньев опорной ноги экзоскелета с переменной длиной и регулируемой жесткостью.

4. Определение управляющих воздействий в модели опорной ноги экзоскелета.

Для определения управляющего момента и продольной силы управляющих движением модели опорной ноги экзоскелета, состоящей из звеньев переменной длины с регулируемой жесткостью, зададим углы поворота и изменение длин звеньев непрерывными дважды дифференцируемыми функциями, синтезирующими близкое к антропоморфному движение модели.

$$\alpha_1(t) = a_1 \pi + b_1 c_1 \sin[d_1 - \pi(1 - \cos \omega t)/2] \quad (4.1)$$

$$\alpha_2(t) = a_2 \pi + b_2 c_2 \sin[d_2 - \pi(1 - \cos \omega t)/2] \quad (4.2)$$

$$\alpha_3(t) = a_3 \pi + b_3 c_3 \sin[d_3 - \pi(1 - \cos \omega t)/2] \quad (4.3)$$

$$\beta_1(t) = a_4 \pi + b_4 c_4 \sin[d_4 - \pi(1 - \cos \omega t)/2] \quad (4.4)$$

$$\beta_3(t) = a_5\pi + b_5c_5 \sin[d_5 - \pi(1 - \cos\omega t)/2] \quad (4.5)$$

$$\gamma_3(t) = a_6\pi + b_6c_6 \sin[d_6 - \pi(1 - \cos\omega t)/2] \quad (4.6)$$

$$\xi_1(t) = e_1l_1 - l_{11} - l_{12} + l_1l_\xi \cos 2\omega t \quad (4.7)$$

$$\xi_2(t) = e_2l_2 - l_{21} - l_{22} + l_2l_\xi \cos 2\omega t \quad (4.8)$$

$$\xi_3(t) = e_3l_3 - l_{31} - l_{32} + l_3l_\xi \cos 2\omega t. \quad (4.9)$$

Параметры механизма и ходьбы приняты равными: $t_k = 0.36$ с – время одноопорной фазы движения, $\omega = \pi/t_k \approx 8.73$ рад/с – угловая скорость, параметры ходьбы $a_1 = a_4 = a_5 = a_6 = 1$, $a_2 = 0.9$, $a_3 = 0.5$, $b_1 = b_6 = 0.1$, $b_2 = 0.12$, $b_3 = 0.2$, $b_4 = 1.0$, $b_5 = 0.5$, $c_1 = c_3 = c_4 = 0.25$, $c_2 = c_5 = c_6 = 0.279$, $d_i = \pi/2$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) выби-
рались из условия синтеза движения звеньев экзоскелета, близкого к антропоморфному; $e_1 = e_2 = 1.3$, $e_3 = 1.2$, $l_\xi = 0.05$ – коэффициенты изменения длины звена, $l_1 = 0.385$ м, $l_2 = 0.477$ м, $l_3 = 0.771$ м – длины звеньев: голени, бедра, корпуса, соответствующие реальным данным человека [47]. Длины на звене распределялись следующим образом: $l_{11} = l_{12} = l_1/2$, $l_{21} = l_{22} = l_2/2$, $l_{31} = l_{32} = l_3/2$.

Параметры механизма, используемые в уравнениях движения следующие [47]: массы звеньев $m_1 = 2.91$ кг, $m_2 = 8.93$ кг, $m_3 = 23.86$ кг распределялись поровну между двумя весомыми абсолютно твердыми участками звеньев, т.е. $m_{i1} = m_{i2} = m_i/2$ ($i = 1, 2, 3$). Массы цилиндров с магнитно-реологической жидкостью считаем одинаковыми и равными: $m_{i3} = 1.6$ кг ($i = 1, 2, 3$). Точечную массу, расположенную в шарнире A_2 и моделирующую переносимую ногу с учетом стопы примем равной $m_p = 18.62$ кг, а расположенную в точке A_3 массу головы и рук $m_H = 10.62$ кг. Моменты инерции весомых участков звеньев относительно осей, проходящих через их нижние точки равны: $I_{11} = 0.018$ кг м², $I_{21} = 0.085$ кг м², $I_{31} = 0.591$ кг м², $I_{i1} = I_{i2}$ ($i = 1, 2, 3$). Длины цилиндров с магнитно-реологической жидкостью для расчета момента инерции принимались равными $l_{i3} = 0.15$ м, а моменты инерции $I_{i3} = 0.012$ кг м² ($i = 1, 2, 3$). Ускорение свободного падения $g = 9.81$ м/с².

Графики зависимостей первых производных от времени, задаваемых формулами (4.1)–(4.9) представлены на рис. 3.

Зависимости вторых производных от времени, задаваемые формулами (4.1)–(4.9) представлены на рис. 4.

В результате алгебраического решения относительно управляющих моментов и продольных сил системы уравнений движения для рассматриваемой модели (рис. 1) при задании движения выражениями (4.1)–(4.9), найдены зависимости управляющих моментов от времени, представленные на рис. 5. Момент $M_{3\gamma} = 0$ во все время движения, т.к. при моделировании тонким стержнем и отсутствии звена сверху не возникает усилий при вращении стержня вокруг продольной оси.

Зависимости управляющих продольных сил от времени представлены на рис. 6.

Анализируя полученные графики, следует отметить, что, несмотря на задание движения периодическими функциями синусоидального типа,

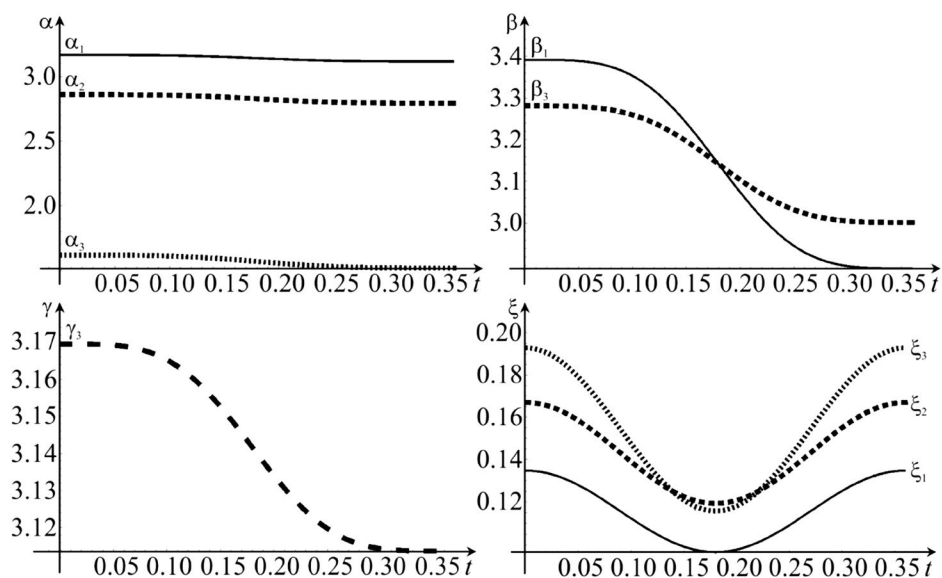


Рис. 2. Зависимости задаваемых формулами (4.1)–(4.9) обобщенных координат от времени.

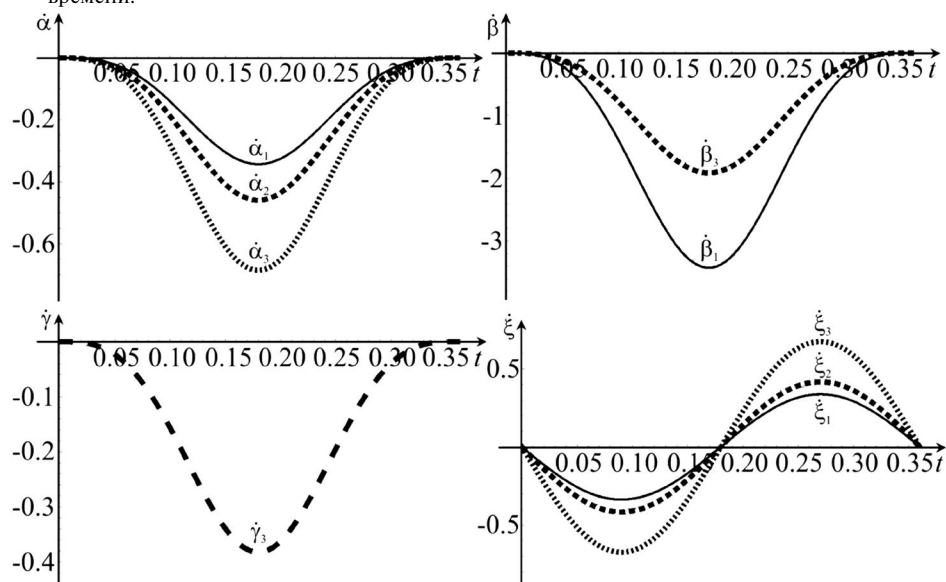


Рис. 3. Зависимости обобщенных скоростей от времени.

управляющие моменты и силы представляют собой более сложные зависимости с несколькими максимумами и минимумами, что связано со сложностью и нелинейностью модели.

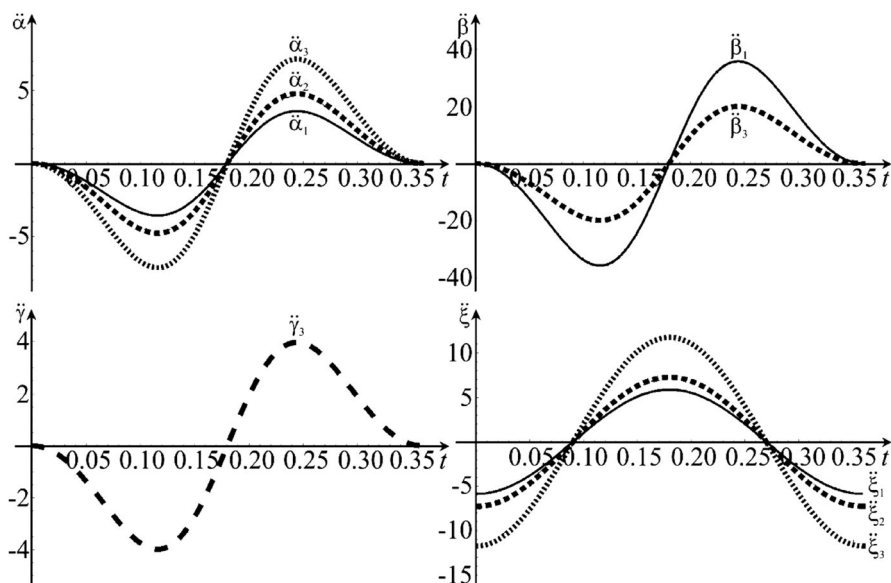


Рис. 4. Зависимости обобщенных ускорений от времени.

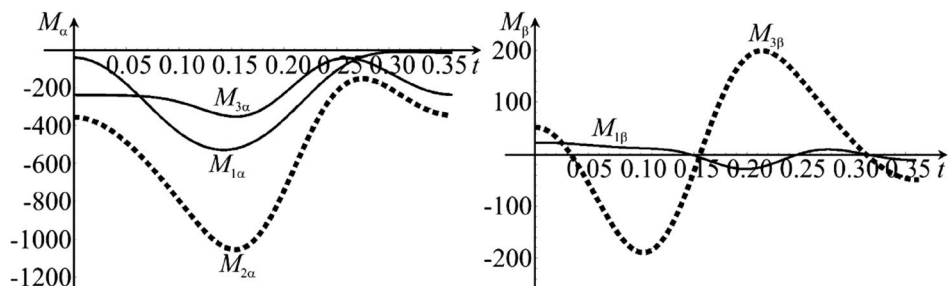


Рис. 5. Зависимости управляющих моментов в шарнирах экзоскелета от времени.

Используя (3.2) и аппроксимируя ступенчатыми функциями, представленную на (рис. 6) силу, находим взятую по модулю напряженность внешнего магнитного поля которую необходимо создать для управления жесткостью звеньев для их функционирования в экзоскелете (рис. 7).

Полученные значения напряженности прилагаемого внешнего магнитного поля можно развивать при помощи катушек, намотанных на цилиндр с магнитно-реологической жидкостью.

5. Оценка энергетических затрат при движении модели опорной ноги экзоскелета. Определяем энергетические затраты в шарнирных приводах механизма как работу управляющих моментов в предположении об отсутствии сил сопротивления и рекуперации энергии при торможении звена.

$$A = \sum_{i=1}^k \int_0^T |M_i \dot{\phi}_i| dt \quad (5.1)$$

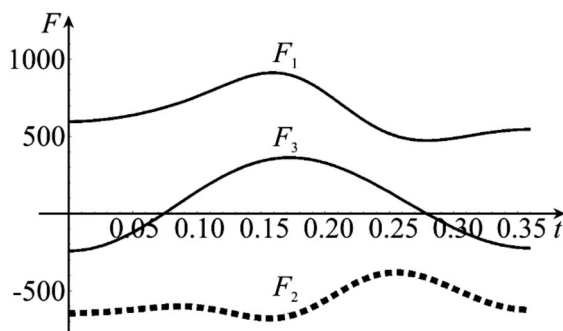


Рис. 6. Зависимости управляющих продольных сил в звеньях экзоскелета от времени.

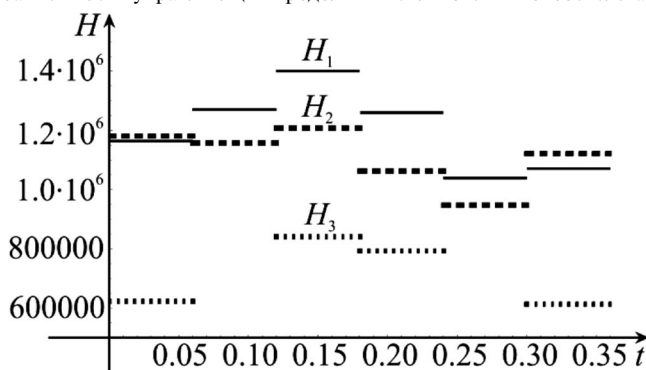


Рис. 7. Зависимость управляющей жесткостью звена напряженности внешнего магнитного поля.

$$A = \int_0^T \sum_{i=1}^n |Q_i \dot{q}_i| dt. \quad (5.2)$$

Здесь T — время движения ($T = t_k$), M_i — моменты, развиваемые приводами аппарата, k — количество независимых приводов в шарнирах ($k = 6$), Q_i , $\dot{q}_i$ — обобщенные силы и обобщенные скорости, n — количество участков переменной длины ($n = 3$). Знак модуля используется вследствие отсутствия механизма рекуперации энергии. Так как затраты энергии подсчитываются как интегралы, т.е. суммы бесконечно малых работ, то, если бы не было знака модуля, отрицательные работы при торможении звеньев вычитались бы так, если бы приводы работали в режиме генераторов энергии, что не предусмотрено конструкцией данной модели экзоскелета.

В результате применения формул (5.1)–(5.2) к расчету энергетических затрат приводов, осуществляющих повороты звеньев при найденных управляющих моментах и силах, получаем: $A = 260.1$ Дж, являющиеся суммарными энергозатратами механизма.

6. Анимационная визуализация движения модели опорной ноги экзоскелета.

Для наглядного представления о движении модели полезно строить анимацию движения механизма. Для предложенной модели приведем несколько кадров

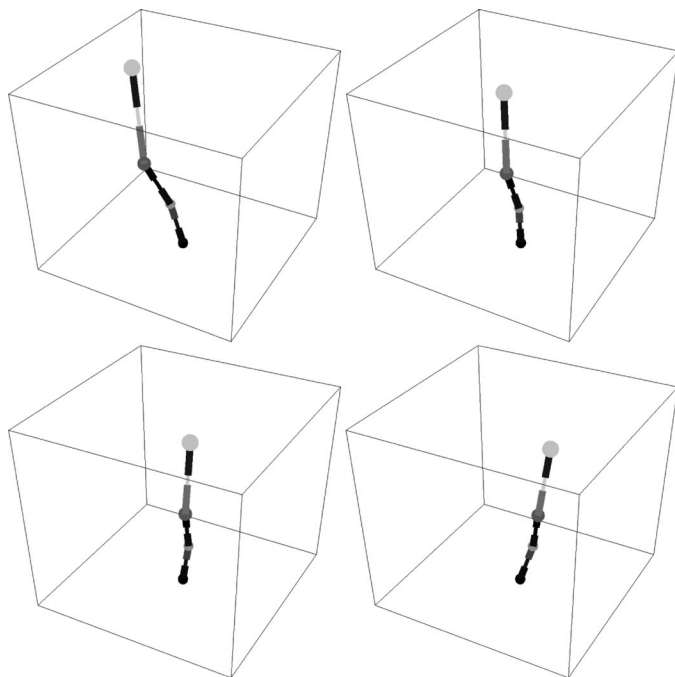


Рис. 8. Кадры анимации движения механизма.

(рис. 8) из анимационного ролика, в котором механизм движется в соответствии с тем, как заданы изменения углов и длин звеньев формулами (4.1)–(4.9).

Представленные кадры анимации демонстрируют приблизительно антропоморфное движение опорной ноги экзоскелета от момента постановки ноги на опору до ее отрыва от поверхности.

Заключение. Проведено моделирование движения опорной ноги экзоскелета в виде трех звеньев с использованием аналитически задаваемых углов и изменения длин звеньев дифференцируемыми функциями, задающими антропоморфное периодическое движение. Определены управляющие моменты и силы, необходимые для реализации заданного движения модели. Знание продольной силы, действующей вдоль звена, позволяет вычислить зависимость напряженности магнитного поля от времени, необходимой для управляемого изменения жесткости звеньев экзоскелета при заданном движении. На основании проведенного исследования установлено, что возможно осуществлять управление жесткостью звеньев переменной длины экзоскелета с помощью внешнего магнитного поля. Модель может найти применение при создании комфортабельных экзоскелетов с регулируемой жесткостью звеньев для широкого круга пользователей.

Работа выполнена при финансовой поддержке за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00491, <https://rscf.ru/project/22-21-00491/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисов А.В., Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г.* О математическом моделировании динамики многосвязных систем и экзоскелетов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2021. № 5. С. 162–176. <https://doi.org/10.31857/S0002338821040028>
2. *Borisov A.V., Chigarev A.V.* The causes of a change in the length of a person's link and their consideration when creating an exoskeleton // Biomed. J. Sci. Tech. Res. 2020. V. 25. P. 18769–18771. <https://doi.org/10.26717/BJSTR.2020.25.004137>
3. *Piña-Martínez E., Rodríguez-Leal E.* Inverse modeling of human knee joint based on geometry and vision systems for exoskeleton applications // Math. Probl. Eng. 2015. V. 2015. P. 145734. <http://dx.doi.org/10.1155/2015/145734>
4. *Nordin M., Frankel H.* Basic biomechanics of the musculoskeletal system. Lippincott–London: Williams & Wilkins, 2001. 467 p.
5. *Borisov A.V., Chigarev A.V.* Mathematical models of exoskeleton. Dynamics, strength, control. Springer, 2022. 232 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-97733-7>
6. *Борисов А.В., Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г., Филиппенков К.Д.* Роботизированная управляемая электромеханическая модель двух звеньев переменной длины аэрокосмического назначения // Известия ВУЗов. Авиационная техника. 2022. № 1. С. 60–69.
7. *Борисов А.В., Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г.* Управление динамикой составной конструкции со звеньями переменной длины // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 2. С. 72–87. <https://doi.org/10.31857/S0572329921020057>
8. *Blinov A., Borisov A., Konchina L., Kulikova M., Maslova K.* Simulation of the movement of the supporting leg of an exoskeleton with two links of variable length in 3D // J. Appl. Informatics. 2021. V. 16. № 4. P. 122–134. <https://doi.org/10.37791/2687-0649-2021-16-4-122-134>
9. *Blinov A., Borisov A., Filippenkov K., Konchina L., Maslova K.* Modeling the dynamics of an exoskeleton link of variable length using the Lagrange – Maxwell system of differential equations of motion // J. Appl. Informatics. 2022. V. 17. № 3. P. 117–130. <https://doi.org/10.37791/2687-0649-2022-17-3-117-130>
10. *Franks P.W., Bryan G.M., Martin R.M., Reyes R., Lakmazaheri A.C., Collins S.H.* Comparing optimized exoskeleton assistance of the hip, knee, and ankle in single and multi-joint configurations // Wearable Technologies. 2021. V. 2. e16. <https://doi.org/10.1017/wtc.2021.14>
11. *Das Gupta S., Bobbert M.F. and Kistemaker D.A.* The metabolic cost of walking in healthy young and older adults – A systematic review and meta analysis // Sci. Rep. 2019. V. 9. P. 9956. <https://doi.org/10.1038/s41598-019-45602-4>
12. *Sanchez N., Simha S.N., Donelan J.M. and Finley J.M.* Using asymmetry to your advantage: Learning to acquire and accept external assistance during prolonged split-belt walking // J. Neurophysiol. 2020. V. 125. № 2. P. 344–357. <https://doi.org/10.1152/jn.00416.2020>
13. *Young A.J. and Ferris D.P.* State of the art and future directions for lower limb robotic exoskeletons // IEEE Trans. Neural Syst. Rehabil. Eng. 2017. V. 25. № 2. P. 171–182. <https://doi.org/10.1109/TNSRE.2016.2521160>
14. *Sawicki G.S., Beck O.N., Kang I. and Young A.J.* The exoskeleton expansion: Improving walking and running economy // J. Neuroeng. Rehabilitation. 2020. V. 17. P. 25. <https://doi.org/10.1186/s12984-020-00663-9>
15. *Ding Y., Kim M., Kuindersma S., Walsh C.J.* Human-in-the-loop optimization of hip assistance with a soft exosuit during walking // Sci. Robot. 2018. V. 3. № 15. P.5438. <https://doi.org/10.1126/scirobotics.aar5438>
16. *Lee S., Kim J., Baker L., Long A., Karavas N., Menard N., Galiana I., Walsh C.J.* Autonomous multi-joint soft exosuit with augmentation-power-based control parameter tuning reduces energy cost of loaded walking // J. Neuroeng. Rehabilitation. 2018. V. 15. P. 66. <https://doi.org/10.1186/s12984-018-0410-y>
17. *Malcolm P., Galle S., Derave Wand De Clercq D.* Bi-articular knee-ankle-foot exoskeleton produces higher metabolic cost reduction than weight-matched mono-articular exoskeleton // Front. Neurosci. 2018. V. 12. P. 69. <https://doi.org/10.3389/fnins.2018.00069>

18. *Lim B., Lee J., Jang J., Kim K., Park Y.J., Seo K., Shim Y.* Delayed output feedback control for gait assistance with a robotic hip exoskeleton // IEEE Trans. Robot. 2019. V. 35. № 4. P. 1055–1062. <https://doi.org/10.1109/TRO.2019.2913318>
19. *MacLean M.K. and Ferris D.P.* Energetics of walking with a robotic knee exoskeleton // J. Appl. Biomech. 2019. V. 35. № 5. P. 320–326. <https://doi.org/10.1123/jab.2018-0384>
20. *Cao W., Chen C., Hu H., Fang K., Wu X.* Effect of hip assistance modes on metabolic cost of walking with a soft exoskeleton // IEEE Trans. Autom. Sci. Eng. 2020. V. 18. № 2. P. 426–436. <https://doi.org/10.1109/TASE.2020.3027748>
21. *Medrano R.L., Thomas G.C., Rouse E.J.* Methods for measuring the just noticeable difference for variable stimuli: Implications for perception of metabolic rate with exoskeleton assistance // 8th IEEE RAS/EMBS International Conference for Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob). NY.: IEEE. 2020. P. 483–490. <https://doi.org/10.1109/BioRob49111.2020.9224374>
22. *Franks P.W., Bianco N.A., Bryan G.M., Hicks J.L., Delp S.L., Collins S.H.* Testing simulated assistance strategies on a hipknee-ankle exoskeleton: A case study // 8th IEEE RAS/EMBS International Conference for Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob). NY.: IEEE. 2020. P. 700–707. <https://doi.org/10.1109/BioRob49111.2020.9224345>
23. *Bryan G.M., Franks P.W., Klein S.C., Peuchen R.J., Collins S.H.* A hip–knee–ankle exoskeleton emulator for studying gait assistance // Int. J. Robot. Res. 2020. V. 40. № 4–5. P. 722–746. <https://doi.org/10.1177/0278364920961452>
24. *Bengler K., Harbauer C.M., Fleischer M.* Exoskeletons: A challenge for development // Wearable Tech. 2023. V. 4. e1. <https://doi.org/10.1017/wtc.2022.28>
25. *Carlson J.* Magnetorheological Fluid Actuators // Adaptronics and Smart Structures: Basics, Materials, Design, and Applications. Saarbrücken: Springer, 1999. P. 180–195.
26. *Laflamme S.* Online learning algorithm for structural control using magnetorheological actuators. Massachusetts institute of technology, 2007. 88 p.
27. *Ahmadkhanlou F., Zite J.L., Washington G.N.* A magnetorheological fluid-based controllable active knee brace // Proc. SPIE. 2007. V. 6527. P. 652700. <https://doi.org/10.1117/12.715902>
28. *Chen J., Liao W.* Design, testing and control of a magnetorheological actuator for assistive knee braces // Smart Mater. Struct. 2010. V. 19. № 2. P. 035029. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/19/3/035029>
29. *Bougrinat Y.* Design and development of a lightweight ankle exoskeleton for human walking augmentation // Mechatronics. 2019. V. 64. P. 102297. <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2019.102297>
30. *Blinov A., Borisov A., Konchina L., Novikova M.* Applying the models of magneto- rheological substances in the study of exoskeleton variable-length link with adjustable stiffness // J. Appl. Inform. 2022. V. 17. № 2. P. 133–142. <https://doi.org/10.37791/2687-0649-2022-17-2-133-142>
31. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М. Наука, 1970. 492 с.
32. *Покровский В.Н.* Статистическая механика разбавленных суспензий. М.: Наука, 1978. 136 с.
33. *Лактина Е.В., Пшеничников А.Ф.* Дисперсия магнитной восприимчивости и микроструктура магнитной жидкости // Коллоидный журнал. 2006. Т. 68. № 3. С. 327–337.
34. *Коновалова Н.И., Мартынов С.И.* Динамика магнитных частиц в вязкой жидкости // Изв. вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2009. № 3. С. 3–11.
35. *Чириков Д.Н.* Вязкоупругие свойства магнитных жидкостей. Дисс. канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 2012. 102 с.
36. *Jason P. Rich, Patrick S. Doyle, Gareth H. McKinley* Magnetorheology in an aging, yield stress matrix fluid // Rheol. Acta. 2012. V. 51. P. 579–593. <https://doi.org/10.1007/s00397-012-0632-z>
37. *Чириков Д.Н.* Теоретическое исследование реологических свойств бидисперсных магнитных жидкостей: заключительный отчет о НИР. Екатеринбург, 2013. 17 с.
38. *Новопашин С.А., Серебрякова М.А., Хмель С.Я.* Методы синтеза магнитных жидкостей // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22. № 4. С. 411–427.
39. *Lebedev A.V.* Viscosity of magnetic fluids must be modified in calculations of dynamic susceptibility // J. Magn. Magn. Mater. 2017. V. 431. P. 30–32. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2016.09.110>

40. Магнитореологические жидкости: технологии создания и применение: монография / Е.С. Беляев и др. под ред. А.С. Плехова. Ниж. Новгород.: Нижегородский гос. техн. ун-т им. Р.Е. Алексеева, 2017. 94 с.
41. Alekhina Y.A., Makarova L.A., Rusakova T.S., Semisalova A.S., Perov N.S. Properties of magnetorheological elastomers in crossed AC and DC magnetic fields // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. 2017 Т. 10. № 1. С. 45–50.
<https://doi.org/10.17516/1997-1397-2017-10-1-45-50>
42. Пучков П.В. О применении магнитных жидкостей в качестве смазочного материала в узлах трения машин и механизмов // Технические науки. 2018. Т. 1. № 78. С. 95–99.
43. Макарова Л.А. Исследование магнитных и электрических свойств композитных реологических материалов на основе ферромагнитных и сегнетоэлектрических наполнителей. Дисс. канд. физ.-мат. наук, МГУ. 2018. 182 с.
44. Юсупбеков Х.А., Собиров М.М., Юлдашев А.Р. Активные подвески автомобиля с амортизаторами переменной жесткости // Наука, техника и образование. 2020. № 2(66). С. 18–27.
45. Найдерт К.В., Целищев В.А. Прикладные свойства магнитореологических жидкостей. Уфа.: УГАТУ, 2021. 118 с.
46. Черноусько Ф.Л., Афаньевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
47. Борисов А.В. Моделирование опорно-двигательного аппарата человека и применение полученных результатов для разработки модели антропоморфного робота. М.: Спутник +, 2009. 212 с.

EXOSKELETON DYNAMICS SIMULATION WITH THE SYSTEM OF THREE VARIABLE-LENGTH LINKS OF ADJUSTABLE STIFFNESS

A. O. Blinov^{a,*}, A. V. Borisov^{a,**}, R. G. Mukharlyamov^{b,***},
and M. A. Novikova^{a,****}

^a Smolensk Branch, Moscow Power Engineering Institute, Smolensk, 214013 Russia

^b People's Friendship University of Russia (RUDN), Moscow, 117198 Russia

*e-mail: alex-blinov67@yandex.ru

**e-mail: borisowandrej@yandex.ru

***e-mail: robgar@mail.ru

****e-mail: mar.novikova@ro.ru

Received 21.02.2023

Revised 04.05.2023

Accepted 06.05.2023

Abstract – The article proposes a spatial model of an exoskeleton for the human musculoskeletal system, represented by three movable links of variable length and two-point masses. The stiffness of the links is controlled by changing the voltage supplied to the magnetic rheological fluid, which fills sections of variable length. The model can be used to develop comfortable exoskeletons, the kinematic characteristics of which are close to the kinematic characteristics of the human musculoskeletal system. The model dynamics equations are constructed using local coordinate systems.

The required laws of change of generalized coordinates are specified by the equations of program connections that determine the dependence of differentiable periodic functions on time. Control moments and longitudinal forces are determined

by methods of solving inverse dynamics problems and are realized by changing the magnetic field strengths, which affect the change in the stiffness of the magnetic-rheological fluid. The magnetic field strengths that control the stiffness of the link are implemented by step functions. An animation of the movement of the mechanism has been synthesized, showing the adequacy of the proposed modeling procedure. The connections of the links are modeled by joints and motors that implement the necessary rotational motion. The dynamics of the model is controlled by changing the lengths of the links and the angles between the links.

Keywords: exoskeleton, variable-length link, stiffness, magnetic-rheological fluid, system, differential equations, joint, control, dynamics, numerical solution, animation

REFERENCES

1. A. V. Borisov, I. E. Kaspirovich, and R. G. Mukharlyamov, "On mathematical modeling of the dynamics of multilink systems and exoskeletons," *J. Comput. Syst. Sci. Int.* **60**, 827–841 (2021). <https://doi.org/10.1134/S106423072104002X>
2. A. V. Borisov and A. V. Chigarev, "The causes of a change in the length of a person's link and their consideration when creating an exoskeleton," *Biomed. J. Sci. Tech. Res.* **25**, 18769–18771 (2020). <https://doi.org/10.26717/BJSTR.2020.25.004137>
3. E. Piña-Martínez and E. Rodríguez-Leal, "Inverse modeling of human knee joint based on geometry and vision systems for exoskeleton applications," *Math. Probl. Eng.* **2015**, 145734 (2015). <http://dx.doi.org/10.1155/2015/145734>
4. M. Nordin and H. Frankel, *Basic Biomechanics of the Musculoskeletal System* (Williams & Wilkins, Lippicott –London, 2001).
5. A. V. Borisov and A. V. Chigarev, *Mathematical Models of Exoskeleton. Dynamics, Strength, Control* (Springer, 2022). <https://doi.org/10.1007/978-3-030-97733-7>
6. A. V. Borisov, I. E. Kaspirovich, R. G. Mukharlyamov, and K. D. Filippenkov, "Robotic controlled electromechanical model of two links of variable length for aerospace purposes," *Izv. VUZov. Aviats. Tekhn.*, No. 1, 60–69 (2022).
7. A. V. Borisov, I. E. Kaspirovich, and R. G. Mukharlyamov, "Dynamic control of compound structure with links of variable length," *Mech. Solids* **56**, 197–210 (2021). <https://doi.org/10.3103/S0025654421020059>
8. A. Blinov, A. Borisov, L. Konchina, et al., "Simulation of the movement of the supporting leg of an exoskeleton with two links of variable length in 3D," *J. Appl. Inform.* **16** (4), 122–134 (2021). <https://doi.org/10.37791/2687-0649-2021-16-4-122-134>
9. A. Blinov, A. Borisov, K. Filippenkov, et al., "Modeling the dynamics of an exoskeleton link of variable length using the Lagrange – Maxwell system of differential equations of motion," *J. Appl. Inform.* **17** (3), 117–130 (2022). <https://doi.org/10.37791/2687-0649-2022-17-3-117-130>
10. P. W. Franks, G. M. Bryan, R. M. Martin, et al., "Comparing optimized exoskeleton assistance of the hip, knee, and ankle in single and multi-joint configurations," *Wearable Technol.* **2**, e16 (2021). <https://doi.org/10.1017/wtc.2021.14>
11. S. Das Gupta, M. F. Bobbert, and D. A. Kistemaker, "The metabolic cost of walking in healthy young and older adults – A systematic review and meta analysis," *Sci. Rep.* **9**, 9956 (2019). <https://doi.org/10.1038/s41598-019-45602-4>
12. N. Sanchez, S. N. Simha, J. M. Donelan, and J. M. Finley, "Using asymmetry to your advantage: Learning to acquire and accept external assistance during prolonged split-belt walking," *J. Neurophysiol.* **125** (2), 344–357 (2020). <https://doi.org/10.1152/jn.00416.2020>

13. A. J. Young and D. P. Ferris, "State of the art and future directions for lower limb robotic exoskeletons," *IEEE Trans. Neural Syst. Rehabil. Eng.* **25** (2), 171–182 (2017). <https://doi.org/10.1109/TNSRE.2016.2521160>
14. G. S. Sawicki, O. N. Beck, I. Kang, and A. J. Young, "The exoskeleton expansion: Improving walking and running economy," *J. Neuroeng. Rehabil.* **17**, 25 (2020). <https://doi.org/10.1186/s12984-020-00663-9>
15. Y. Ding, M. Kim, S. Kuindersma, and C. J. Walsh, "Human-in-the-loop optimization of hip assistance with a soft exosuit during walking," *Sci. Robot.* **3** (15), eaar5438 (2018). <https://doi.org/10.1126/scirobotics.aaar5438>
16. S. Lee, J. Kim, L. Baker, et al., "Autonomous multi-joint soft exosuit with augmentation-power-based control parameter tuning reduces energy cost of loaded walking," *J. Neuroeng. Rehabil.* **15**, 66 (2018). <https://doi.org/10.1186/s12984-018-0410-y>
17. P. Malcolm, S. Galle, W. Derave, and D. De Clercq, "Bi-articular knee-ankle-foot exoskeleton produces higher metabolic cost reduction than weight-matched mono-articular exoskeleton," *Front. Neurosci.* **12**, 69 (2018). <https://doi.org/10.3389/fnins.2018.00069>
18. B. Lim, J. Lee, J. Jang, et al., "Delayed output feedback control for gait assistance with a robotic hip exoskeleton," *IEEE Trans. Robot.* **35** (4), 1055–1062 (2019). <https://doi.org/10.1109/TRO.2019.2913318>
19. M. K. MacLean and D. P. Ferris, "Energetics of walking with a robotic knee exoskeleton," *J. Appl. Biomech.* **35** (5), 320–326 (2019). <https://doi.org/10.1123/jab.2018-0384>
20. W. Cao, C. Chen, H. Hu, et al., "Effect of hip assistance modes on metabolic cost of walking with a soft exoskeleton," *IEEE Trans. Autom. Sci. Eng.* **18** (2), 426–436 (2020). <https://doi.org/10.1109/TASE.2020.3027748>
21. R. L. Medrano, G. C. Thomas, and E. J. Rouse, "Methods for measuring the just noticeable difference for variable stimuli: Implications for perception of metabolic rate with exoskeleton assistance," in *Proc. of 8th IEEE RAS/EMBS Int. Conf. for Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob)* (IEEE, New York, 2020), pp. 483–490. <https://doi.org/10.1109/BioRob49111.2020.9224374>
22. P. W. Franks, N. A. Bianco, G. M. Bryan, et al., "Testing simulated assistance strategies on a hipknee-ankle exoskeleton: A case study," in *Proc. of 8th IEEE RAS/EMBS Int. Conf. for Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob)* (IEEE, New York, 2020), pp. 700–707. <https://doi.org/10.1109/BioRob49111.2020.9224345>
23. G. M. Bryan, P. W. Franks, S. C. Klein, et al., "A hip–knee–ankle exoskeleton emulator for studying gait assistance," *Int. J. Robot. Res.* **40** (4-5), 722–746 (2020). <https://doi.org/10.1177/0278364920961452>
24. K. Bengler, C. M. Harbauer, and M. Fleischer, "Exoskeletons: A challenge for development," *Wearable Tech.* **4**, e1 (2023). <https://doi.org/10.1017/wtc.2022.28>
25. J. Carlson, "Magnetorheological Fluid Actuators," in *Adaptronics and Smart Structures: Basics, Materials, Design, and Applications* (Springer, Saarbrücken, 1999), pp. 180–195.
26. S. Laflamme, *Online Learning Algorithm for Structural Control Using Magnetorheological Actuators* (MIT, Cambridge, 2007).
27. F. Ahmadvanlou, J. L. Zite, and G. N. Washington, "A magnetorheological fluid-based controllable active knee brace," *Proc. SPIE* **6527**, 652700 (2007). <https://doi.org/10.1117/12.715902>
28. J. Chen and W. Liao, "Design, testing and control of a magnetorheological actuator for assistive knee braces," *Smart Mater. Struct.* **19** (2), 035029 (2010). <https://doi.org/10.1088/0964-1726/19/3/035029>
29. Y. Bougrinat, "Design and development of a lightweight ankle exoskeleton for human walking augmentation," *Mechatron.* **64**, 102297 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2019.102297>
30. A. Blinov, A. Borisov, L. Konchina, and M. Novikova, "Applying the models of magnetorheological substances in the study of exoskeleton variable-length link with adjustable stiffness," *J. Appl. Inform.* **17** (2), 133–142 (2022). <https://doi.org/10.37791/2687-0649-2022-17-2-133-142>
31. L. I. Sedov, *Continuum Mechanics*, Vol. 1 (Nauka, Moscow, 1970) [in Russian].
32. V. N. Pokrovskii, *Statistical Mechanics of Dilute Suspensions* (Nauka, Moscow 1978) [in Russian].

33. E. V. Lakhtina and A. F. Pshenichnikov, "Dispersion of magnetic susceptibility and the microstructure of magnetic fluid," *Colloid J.* **68** (3), 294–303 (2006). <https://doi.org/10.1134/S1061933X06030057>
34. N. I. Konovalova and S. I. Martynov, "Dynamics of magnetic particles in a viscous liquid," *Izv. VU-Zov. Povolzh. Reg. Fiz.-Mat. Nauki*, No. 3, 3–11 (2009).
35. D. N. Chirikov, Candidate's Dissertation in Mathematics and Physics (UrFU, Ekaterinburg, 2012).
36. J. P. Rich, P. S. Doyle, and G. H. McKinley, "Magnetorheology in an aging, yield stress matrix fluid," *Rheol. Acta.* **51**, 579–593 (2012). <https://doi.org/10.1007/s00397-012-0632-z>
37. D. N. Chirikov, *Theoretical Study of Rheological Properties of Bidisperse Magnetic Fluids: Final Research Report* (UrFU, Ekaterinburg, 2013) [in Russian].
38. S.A. Novopashin, M.A. Serebryakova, and S. Ya. Khmel, "Methods of magnetic fluid synthesis (review)," *Thermophys. Aeromech.* **22** (4), 397–412 (2015). <https://doi.org/10.1134/S0869864315040010>
39. A. V. Lebedev, "Viscosity of magnetic fluids must be modified in calculations of dynamic susceptibility," *J. Magn. Magn. Mater.* **431**, 30–32 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2016.09.110>
40. E. S. Belyaev et al., *Magnetorheological Fluids: Technologies of Creation and Application*, Ed. by A. S. Plekhov (NGTU im E. Alekseeva, Nizhnii Novgorod, 2017) [in Russian].
41. Y. A. Alekhina, L. A. Makarova, T. S. Rusakova, et al., "Properties of magnetorheological elastomers in crossed AC and DC magnetic fields," *Zh. Sib. Federal. Univ. Ser.: Mat. Fiz.* **10** (1), 45–50 (2017). <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2017-10-1-45-50>
42. P. V. Puchkov, "On the use of magnetic fluids as a lubricant in friction units of machines and mechanisms," *NovaInfo* **1** (78), 95–99 (2018).
43. L. A. Makarova, Candidate's Dissertation in Mathematics and Physics (MGU, Moscow, 2018).
44. H. A. Yusupbekov, M. M. Sobirov, and A. R. Yuldashev, "Active suspension of a car with variable shock absorbers," *Nauka Tekhn. Obraz.*, No. 2(66), 18–27 (2020).
45. K. V. Naigert and V. A. Tselishchev, *Applied Properties of Magnetorheological Fluids* (UGATU, Ufa, 2021) [in Russian].
46. F. L. Chernousko, I. M. Ananyevsky, S. A. Reshmin, *Control of Nonlinear Dynamical Systems. Methods and Applications* (Fizmatlit, Moscow, 2006; Springer, Berlin, 2008).
47. A. V. Borisov, *Modeling of the Human Musculoskeletal System and the Application of the Results Obtained to Develop a Model of an Anthropomorphic Robot* (Sputnik+, Moscow, 2009) [in Russian].