

УДК 539.3

СОВМЕСТИНОСТЬ ДЕФОРМАЦИЙ И ТРИЖДЫ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ПОЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

© 2024 г. Д. В. Георгиевский^{а, в, с, *}

^аМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

^вИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

^сМосковский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 17.08.2023 г.

После доработки 01.09.2023 г.

Принята к публикации 04.09.2023 г.

Обсуждается вопрос о необходимом классе гладкости решений квазистатических задач механики деформируемого твердого тела в терминах перемещений. Показывается, что для того чтобы уравнения совместности деформаций при подстановке в них перемещений стали тождествами, требуется существование некоторых третьих смешанных производных перемещений. Для линейно упругой сжимаемой изотропной упругой среды приводится контрпример, в котором поле перемещений, будучи дважды дифференцируемым решением краевой задачи для системы уравнений Ламе во всей области, не является решением задачи в перемещениях во всех точках этой области.

Ключевые слова: постановка в перемещениях, деформация, напряжение, уравнения совместности, непрерывность, дифференцируемость, объемные силы, поверхностные нагрузки

DOI: 10.31857/S1026351924020112, EDN: uvtjmp

1. Постановка в перемещениях. Как известно, постановка в перемещениях квазистатической задачи механики деформируемого твердого тела при малых деформациях включает в себя три уравнения равновесия в трехмерной области Ω :

$$\sigma_{ij}[\varepsilon(u)]_j + X_i = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.1)$$

где $\varepsilon = \text{Def } \mathbf{u}$, с объемными силами $\mathbf{X}(\mathbf{x})$, а также граничные условия на границе $\partial\Omega = \Sigma_u \cup \Sigma_\sigma$:

$$u_i = u_i^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Sigma_u; \quad \sigma_{ij}[\varepsilon(u)]n_j = P_i^0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_\sigma \quad (1.2)$$

с заданными перемещениями $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ и нагрузками $\mathbf{P}^0(\mathbf{x})$. Векторные поля $\mathbf{X}$, $\mathbf{u}^0$ и $\mathbf{P}^0$ обычно называют внешними данными задачи. Если оператор

определяющих соотношений $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ таков, что каждое из уравнений (1.1) второго порядка, то решение задачи (1.1), (1.2) при непрерывных внешних данных ищется в классе гладкости $C_2(\bar{\Omega})$ [1].

Так как тензор ε является деформатором векторного поля, шесть уравнений совместности:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha,\beta\beta} + \varepsilon_{\beta\beta,\alpha\alpha} = 2\varepsilon_{\alpha\beta,\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta,\gamma\gamma} + \varepsilon_{\gamma\gamma,\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\gamma,\gamma\beta} + \varepsilon_{\beta\gamma,\gamma\alpha}, \quad (1.3)$$

эквивалентные равенству нулю всех компонент симметричного тензора несовместности Кр  нера $\text{Ink } \varepsilon$ [2], будут выполнены автоматически в силу тождества

$$\text{Ink Def } \mathbf{u} \equiv 0. \quad (1.4)$$

В уравнениях (1.3) по повторяющимся греческим индексам суммирование не производится. Разным греческим индексам обязательно соответствуют различные числовые значения от 1 до 3.

Наличие тождеств (1.4) дает основание не включать условия совместности деформаций (или выведенные из них условия совместности напряжений) в постановку задачи в перемещениях. Однако шесть уравнений (1.3) станут тождествами при подстановке в них перемещений, только если каждое из слагаемых в (1.3) будет существовать во всех точках, принадлежащих Ω . Для этого требуется, чтобы существовали некоторые смешанные производные от $\mathbf{u}$ третьего порядка, что, вообще говоря, не гарантировано требованием $\mathbf{u} \in C_2(\bar{\Omega})$.

Нетрудно видеть, что в число упомянутых смешанных производных третьего порядка входят по шесть производных вида $u_{\alpha,\alpha\beta\beta}$ и $u_{\alpha,\beta\beta\gamma}$, а также три производных вида $u_{\alpha,\alpha\beta\gamma}$, т.е. всего 15 из 30 возможных комбинаций. При этом производные вида $u_{\alpha,\alpha\alpha\alpha}$, $u_{\alpha,\beta\beta\beta}$ и $u_{\alpha,\alpha\alpha\beta}$ (их всего также 15) в выражениях (1.3) не встречаются.

Таким образом, дополнительным условием, налагаемым на поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ в постановке задачи в перемещениях, является существование во всей области Ω третьих смешанных производных:

$$u_{\alpha,\alpha\beta\beta}, \quad u_{\alpha,\beta\beta\gamma}, \quad u_{\alpha,\alpha\beta\gamma}. \quad (1.5)$$

2. Контрпример. Приведем пример квазистатической задачи в перемещениях с непрерывными внешними данными, решение которой всюду принадлежит классу гладкости C_2 , но в некоторых точках области слагаемые, входящие в уравнения совместности (1.3), не существуют, а значит, эти уравнения не выполняются.

Рассмотрим плоскую деформацию линейно упругой сжимаемой изотропной среды с постоянными Ламе λ , μ и коэффициентом Пуассона $\nu < 1/2$ в квадрате

$$\Omega = \{-l < x_1 < l, -l < x_2 < l\} \quad (2.1)$$

с границей $\partial\Omega = \Sigma_\sigma = \Sigma_{1+} \cup \Sigma_{2+} \cup \Sigma_{1-} \cup \Sigma_{2-}$, где

$$\Sigma_{1\pm} = \{x_1 = \pm l, -l < x_2 < l\}, \quad \Sigma_{2\pm} = \{-l < x_1 < l, x_2 = \pm l\}. \quad (2.2)$$

Обозначим $y = x_1 + x_2$ и введем дважды дифференцируемую в Ω функцию $f(y)$:

$$f(y) = y^2|y|, \quad f'(y) = 3y|y|, \quad f'' = 6|y|. \quad (2.3)$$

Зададим объемные силы в виде:

$$X_1 = -\frac{\mu}{1-2\nu}[(3-4\nu)a_1 + a_2]f'', \quad X_2 = -\frac{\mu}{1-2\nu}[a_1 + (3-4\nu)a_2]f'', \quad (2.4)$$

где a_1 и a_2 — некоторые постоянные с размерностью L^{-2} . На всей границе Σ_σ зададим вектор напряжений с компонентами

$$P_1^0 = 3[(\lambda+2\mu)a_1 + \lambda a_2](l \pm x_2)^2, \quad P_2^0 = 3\mu(a_1 + a_2)(l \pm x_2)^2, \quad x \in \Sigma_{1\pm}$$

$$P_1^0 = 3\mu(a_1 + a_2)(l \pm x_1)^2, \quad P_2^0 = 3[\lambda a_1 + (\lambda + 2\mu)a_2](l \pm x_1)^2, \quad x \in \Sigma_{2\pm}. \quad (2.5)$$

Точное решение уравнений Ламе:

$$\frac{1}{1-2\nu}u_{j,ij} + u_{i,jj} + \frac{X_i}{\mu} = 0, \quad x \in \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (2.6)$$

удовлетворяющее граничным условиям (2.5), запишется следующим образом:

$$u_i = a_i f(y), \quad i = 1, 2. \quad (2.7)$$

Ненулевые деформации и напряжения, вычисленные по перемещениям (2.7),

$$\varepsilon_{11} = a_1 f'(y), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)f'(y), \quad \varepsilon_{22} = a_2 f'(y), \quad (2.8)$$

$$\sigma_{11} = [(\lambda+2\mu)a_1 + \lambda a_2]f'(y), \quad \sigma_{12} = \mu(a_1 + a_2)f'(y),$$

$$\sigma_{22} = [\lambda a_1 + (\lambda + 2\mu)a_2]f'(y), \quad \sigma_{33} = \lambda(a_1 + a_2)f'(y), \quad (2.9)$$

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu)(a_1 + a_2)f'(y)$$

непрерывно дифференцируемы во всем квадрате (2.1), но не имеют вторых производных при $y = 0$, т. е. на диагонали $x_2 = -x_1$. Следовательно, в точках этой диагонали единственное в плоской задаче уравнение совместности деформаций $\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}$ не выполняется. Поэтому поле перемещений (2.7), принадлежащее классу $C_2(\bar{\Omega})$, несмотря на удовлетворение уравнениям равновесия (2.6) и граничным условиям с нагрузками (2.5), является решением задачи в перемещениях не во всей области Ω , а только вне точек отрезка $x_2 = -x_1$.

Суть приведенного контрпримера, очевидно, в том, что заданные объемные силы (2.4) непрерывны, но не непрерывно дифференцируемы во всей области Ω . Действительно, обратимся к постановке той же самой задачи, но в напряжениях

(постановке Победри [3]). Она включает в себя четыре нетождественных уравнения Бельтрами–Мичелла:

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{\sigma_{kk,ij}}{1+\nu} = -(X_{i,j} + X_{j,i}) - \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \mathbf{X} \delta_{ij}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.10)$$

а также выполненные на границе $\partial\Omega$ уравнения равновесия и граничные условия, в которых заданы нагрузки (2.5).

Правые части уравнений (3.1) в случае объемных сил (2.4) не определены на диагонали $x_2 = -x_1$, поэтому точное решение (2.9) задачи в напряжениях заведомо не имеет места в точках данной диагонали. Но постановки одной и той же краевой задачи в терминах напряжений и перемещений, как известно, должны быть эквивалентны в том числе и касательно того, что относится к классам гладкости разыскиваемых векторных и тензорных полей. Поэтому все решение $\{\mathbf{u}(\mathbf{x}), \varepsilon(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x})\}$ не существует в точках $x_2 = -x_1$ (еще раз подчеркнем, несмотря на принадлежность поля $\mathbf{u}$ классу $\tilde{C}_2$ во всей области Ω с замыканием).

Кажущееся противоречие устраняется дополнительным требованием в постановке задачи в перемещениях того, чтобы существовали третьи смешанные производные вида (1.5), хотя формально постановка (1.1), (1.2) таких требований не предполагает.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 24-21-20008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nowacki W. Teoria sprężystości. Warszawa: PWN, 1973. [Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 832 с].
2. Георгиевский Д.В. Деформаторы высоких рангов и тензоры несовместности Крёнера с двумерной структурой индексов // Докл. РАН. 2019. Т. 486. № 4. С. 430–432.
3. Победра Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 368 с.

*UDC 539.3***COMPATIBILITY OF STRAINS AND THE THREE-FOLD
DIFFERENTIABILITY OF THE DISPLACEMENT FIELD****© 2024 г. D. V. Georgievskii^{a, b, c, *}***^aLomonosov Moscow State University, Moscow, Russia**^bIshlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia**^cMoscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia***e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

Abstract — The problem of the necessary class of smoothness of solutions to quasi-static problems of deformable solid mechanics in terms of displacements was discussed. It is shown that in order for the equations of compatibility of deformations to become identities when displacements are substituted in them, the existence of some third mixed derivatives of displacements is required. A counterexample for a linearly elastic compressible isotropic elastic medium was given. In this counterexample, the displacement field, being a doubly differentiable solution to the boundary value problem for the system of Lamé equations in the entire domain, is not a solution to the displacement problem at all points in this domain.

Keywords: displacement formulation, deformation, stress, joint equation, continuity, differentiability, volume force, surface load

REFERENCES

1. Nowacki W. Teoria sprężystości. Warszawa: PWN, 1973.
2. Georgievskii D.V. High-rank deformators and the Kroener incompatibility tensors with two-dimensional structure of indices // Doklady Physics. 2019. V. 64. № 6. P. 256–257.
3. Pobedria B.E. Numerical Methods in Theory of Elasticity and Plasticity. Moscow: Moscow Univ., 1995. [in Russian]