

УДК 539.3

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРУГОВОЙ ТРУБЫ, ВЫВЕРНУТОЙ НАИЗНАНКУ

© 2024 г. Г. М. Севастьянов^{a,*}

^aИнститут машиноведения и металлургии ХФИЦ ДВО РАН,
Комсомольск-на-Амуре, Россия

*e-mail: akela.86@mail.ru

Поступила в редакцию 19.06.2023 г.

После доработки 17.07.2023 г.

Принята к публикации 12.11.2023 г.

В работе приведено аналитическое решение задачи о круговой трубе, вывернутой наизнанку в жесткой обойме. Получены формулы для величины радиального напряжения, которое отвечает за сцепление между трубой и обоймой. Решение получено для произвольного несжимаемого гиперупругого материала с упругим потенциалом, который зависит только от первого инварианта левого тензора деформаций Коши–Грина (различные обобщения неогуковского тела) или от второго инварианта логарифмического тензора Генки (различные обобщения несжимаемого материала Генки). Решение учитывает возникновение пластического течения в областях, прилегающих к боковым поверхностям трубы. Рассмотрен как идеально-пластический, так и изотропно упрочняющийся материал общего вида. Для последнего приведена схема решения, в частном случае линейно-упрочняющегося материала получено решение в замкнутом виде. Для идеально-пластического материала решение в замкнутом виде получено для неогуковского тела, несжимаемого материала Генки и для материала Гента.

Ключевые слова: гиперупругость, пластичность, выворачивание трубы, модель Гента

DOI: 10.31857/S1026351924030039, EDN: UIILGM

1. Введение. Выворачивание наизнанку гиперупругой трубы – одно из универсальных решений в нелинейной теории упругости [1–3], то есть решение этой задачи может быть построено для произвольного упругого потенциала несжимаемой среды. Упомянем здесь также исследование [4], в котором рассмотрено выворачивание полый упругой сферы. Ряд исследований посвящен проблеме свободно вывернутой трубы, то есть когда боковые поверхности трубы свободны от напряжений [5, 6]. Эти исследования обусловлены использованием деформации такого типа в различных энергетических демпферах и абсорберах. В частности, в работе [7] проведен

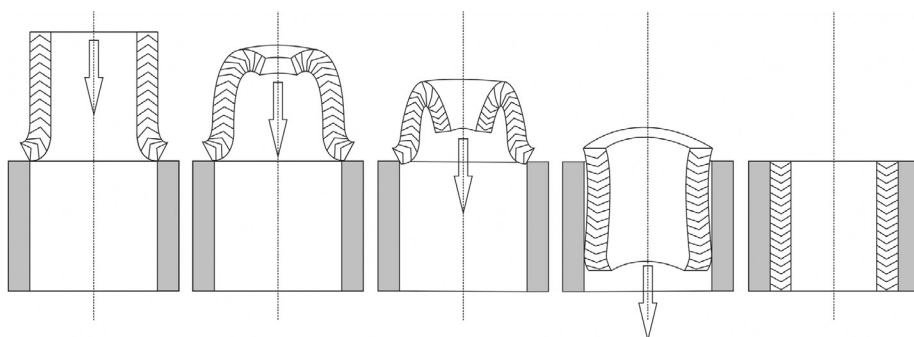


Рис. 1. Выворачивание трубы в жесткой обойме.

анализ упруго-пластического деформирования тонкостенных труб при их выворачивании наизнанку в рамках деформационной теории пластичности Генки, основное внимание уделено определению необходимого для выворачивания осевого усилия.

Выворачивание труб (преимущественно из полимерных материалов) может служить для создания многослойных конструкций, когда внутри жесткой внешней трубы с той или иной целью создается покрытие (рис. 1).

В этом случае ключевыми характеристиками реализующегося напряженного состояния будет натяг между слоями конструкции (величина радиального напряжения на контактной границе), а также величина тангенциального напряжения на внутренней (свободной) поверхности вывернутой трубы, поскольку считается, что создание значительных сжимающих тангенциальных напряжений положительно сказывается на эксплуатации труб под давлением [8].

Нетрудно понять, что максимальная величина тангенциального напряжения на свободной поверхности ограничена пределом текучести материала. То есть максимальный эффект от создания сжимающих тангенциальных напряжений достигается в случае пластического деформирования материала. Этой задаче и посвящено представленное исследование.

2. Модель материала. Мы рассматриваем два варианта задания упругих соотношений материала: один с использованием модели обобщенного неогуковского материала, когда упругий потенциал есть функция только первого инварианта левого тензора (упругой) деформации Коши–Грина $\mathbf{B}^e = (\mathbf{F}^e)(\mathbf{F}^e)^T$, $\mathbf{F}^e$ есть упругая часть градиента деформации $\mathbf{F}$; второй с использованием обобщений несжимаемого материала Генки, когда упругий потенциал есть функция только второго инварианта тензора (упругой) деформации Генки $\mathbf{h}^e = \ln(\mathbf{B}^e)^{1/2}$. Здесь везде индекс “e” означает “упругую часть” соответствующего тензора (подробнее о разделении деформации на упругую и пластическую составляющие см. раздел 6; здесь укажем только, что упругая часть деформации должна совпадать с полной при отсутствии пластического течения). Для инвариантов тензоров подразумеваются определения $I_1(\mathbf{A}) = \text{tr } \mathbf{A}$, $2I_2(\mathbf{A}) = \text{tr}^2 \mathbf{A} - \text{tr } \mathbf{A}^2$.

Итак, упругий закон несжимаемого изотропного тела задан в виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}^e}\mathbf{B}^e = -p\mathbf{I} + 2w_B\mathbf{B}^e, \quad (2.1)$$

где $W = W(I_1(\mathbf{B}^e))$ есть упругий потенциал (удельная по массе свободная энергия Гельмгольца), $w_B = w_B(I_1(\mathbf{B}^e)) = dW/dI_1(\mathbf{B}^e) > 0$; или же в виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{h}^e} = -p\mathbf{I} - w_h\mathbf{h}^e, \quad (2.2)$$

где $W = W(I_2(\mathbf{h}^e))$ есть упругий потенциал, $w_h = w_h(I_2(\mathbf{h}^e)) = dW/dI_2(\mathbf{h}^e) < 0$. В формулах выше p есть скалярная функция добавочного гидростатического давления, обусловленная ограничением несжимаемости материала. При отсутствии деформации $\mathbf{B}^e = \mathbf{I}$, $\mathbf{h}^e = \mathbf{0}$ и функция свободной энергии должна удовлетворять равенствам $W|_{\mathbf{B}^e=\mathbf{I}} = W(I_1(\mathbf{B}^e)|_{\mathbf{B}^e=\mathbf{I}}) = W(3) = 0$ или $W|_{\mathbf{h}^e=\mathbf{0}} = W(I_2(\mathbf{h}^e)|_{\mathbf{h}^e=\mathbf{0}}) = W(0) = 0$. Рассматриваются только упругие потенциалы, представляющие собой функции тензоров обратимых деформаций. Независимость свободной энергии от пластической деформации является распространенным допущением для изотропных пластически несжимаемых материалов [9–12].

Пластическое течение в материале связывается с выполнением условия Треска:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_s$$

где σ_1 и σ_3 есть наибольшее и наименьшее главные напряжения, τ_s — предел текучести материала на сдвиг.

3. Кинематика выворачивания круговой трубы в условиях плоской деформации. С точностью до жестких вращений связь координат материальных точек в начальном состоянии R, θ, Z с координатами в актуальном (деформированном) состоянии r, φ, z есть [2, 3, 6, 7]:

$$R = R(r), \quad \theta = \varphi, \quad Z = z,$$

т.е. подразумевается, что цилиндрическая труба вывернута так, что ее длина осталась неизменной за счет внешних ограничений; при свободном выворачивании происходит увеличение длины трубы вместе с утоньшением стенки и увеличением ее внутреннего диаметра [6]). Задачи о радиальной деформации цилиндрического или сферического слоя — одни из наиболее простых среди упруго-пластических задач и часто имеют замкнутое решение даже в нелинейной постановке [13–16].

Итак, указанная кинематика приводит к тому, что тензора деформации диагональные; ненулевые компоненты левого тензора Коши–Грина $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ есть

$$B_{rr} = (R')^{-2}, \quad B_{\varphi\varphi} = \left(\frac{R}{r}\right)^{-2}, \quad B_{zz} = 1, \quad (3.1)$$

а логарифмического тензора Генки $\mathbf{h} = \ln \mathbf{B}^{1/2}$

$$h_{rr} = -\ln|R'|, \quad h_{\varphi\varphi} = -\ln\frac{R}{r}, \quad h_{zz} = 0, \quad (3.2)$$

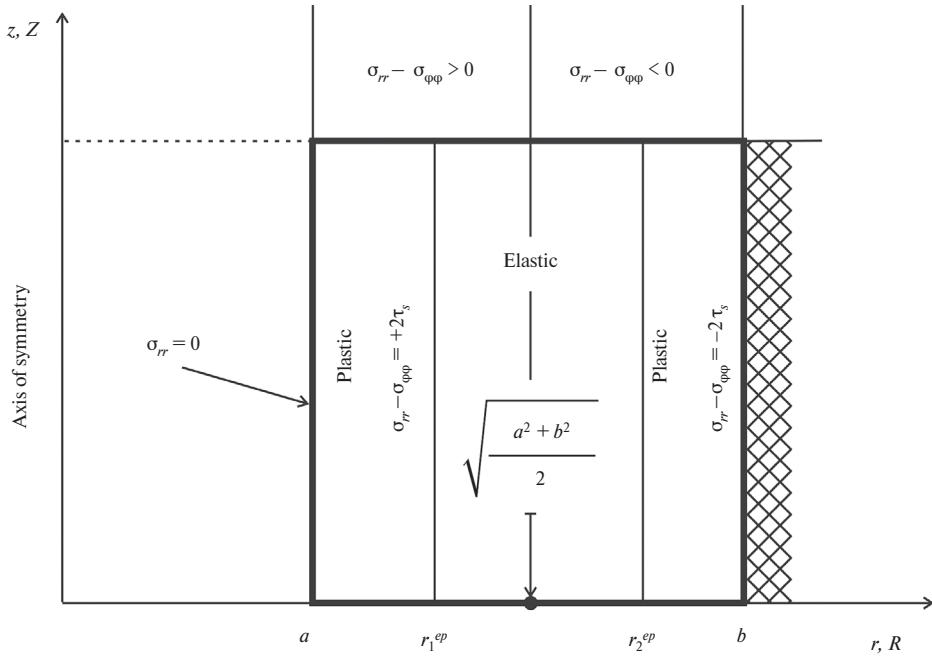


Рис. 2. Расчетная область (вывернутая труба).

здесь $R' = dR/dr$. Условие несжимаемости $\text{tr} \mathbf{h} = 0$ или $\det \mathbf{B} = 1$ приводит к дифференциальному уравнению $R'(R/r) = -1$, откуда $R = (k - r^2)^{1/2}$, где константа $k = a^2 + b^2$ удовлетворяет кинематическим граничным условиям $R(a) = b$, $R(b) = a$ (см. рис. 2).

Введем замену переменных:

$$x = \frac{2r^2}{a^2 + b^2} - 1, \quad r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}(1+x), \quad -1 < -\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \leq x \leq \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} < 1. \quad (3.3)$$

Тогда

$$R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}(1-x), \quad \frac{R}{r} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \text{и} \quad R' = -\frac{r}{R} = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \quad (3.4)$$

Инварианты тензоров деформации в новых обозначениях:

$$I_1(\mathbf{B}) = (R')^{-2} + \left(\frac{R}{r}\right)^{-2} + 1 = \frac{1-x}{1+x} + \frac{1+x}{1-x} + 1, \quad (3.5)$$

$$I_2(\mathbf{h}) = -\frac{1}{2} \left(\ln^2 |R'| + \ln^2 \frac{R}{r} \right) = -\frac{1}{4} \ln^2 \frac{1-x}{1+x}.$$

4. Интегрирование уравнений. 4.1. *Упругое ядро.* В области $r \in (r_1^{ep}, r_2^{ep})$ (см. рис. 2) нет пластического течения, тензоры полных и упругих деформаций тождественны, $\mathbf{h}^e = \mathbf{h}$, $\mathbf{B}^e = \mathbf{B}$. С учетом замены (3.3) правило дифференцирования сложных функций дает:

$$\frac{d}{dr} = \frac{dx}{dr} \frac{d}{dx} = 2\sqrt{\frac{2(1+x)}{a^2 + b^2}} \frac{d}{dx}.$$

Тогда уравнение равновесия $r(d\sigma_{rr}/dr) + \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 0$ принимает вид:

$$2(1+x) \frac{d\sigma_{rr}}{dx} = -(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}). \quad (4.1)$$

Разность координатных напряжений может быть выражена как

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2w_B \cdot (B_{rr}^e - B_{\varphi\varphi}^e)$$

в случае использования упругого закона (2.1); или

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -w_h \cdot (h_{rr}^e - h_{\varphi\varphi}^e),$$

если используется упругий закон (2.2).

Или же с учетом равенств (3.1), (3.2), (3.4):

- для упругого закона (2.1) $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2w_B \cdot \left[\frac{1-x}{1+x} - \frac{1+x}{1-x} \right],$
- для упругого закона (2.2) $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -w_h \ln \frac{1-x}{1+x}.$

Интегрируя уравнение равновесия в упругой области $r \in (r_1^{ep}, r_2^{ep})$:

— для упругого закона (2.1)

$$\sigma_{rr} = \int_{x_1^{ep}}^x \frac{w_B(\xi)}{1+\xi} \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} - \frac{1-\xi}{1+\xi} \right) d\xi + C, \quad (4.2)$$

— для упругого закона (2.2)

$$\sigma_{rr} = \int_{x_1^{ep}}^x \frac{w_h(\xi)}{2(1+\xi)} \ln \frac{1-\xi}{1+\xi} d\xi + C, \quad (4.3)$$

где $x_1^{ep} = 2(r_1^{ep})^2/(a^2 + b^2) - 1$, константа интегрирования C определяется из условия непрерывности радиального напряжения на упруго-пластической границе $r = r_1^{ep}$; $w_B(x)$ и $w_h(x)$, как указано ранее, есть функции инвариантов

$$I_1(\mathbf{B}^e) = \frac{1-x}{1+x} + \frac{1+x}{1-x} + 1 \text{ и } I_2(\mathbf{h}^e) = -\frac{1}{4} \ln^2 \frac{1-x}{1+x} \text{ соответственно.}$$

4.2. *Внутренняя пластическая область* $r \in [a, r_1^{ep}]$. Здесь условие пластичности Треска выполняется в виде $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2\tau_s$, следовательно, радиальное напряжение в этой области, удовлетворяющее уравнению равновесия (4.1) с граничным условием

$$\sigma_{rr} \Big|_{x=-\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}} = 0,$$

имеет выражение

$$\sigma_{rr} = -\tau_s \ln \frac{(1+x)(a^2+b^2)}{2a^2}.$$

Тогда константа интегрирования в формулах (4.2), (4.3) есть $C = -\tau_s \ln \left[(1+x_1^{ep})(a^2+b^2) / (2a^2) \right]$.

4.3. *Внешняя пластическая область* $r \in [r_1^{ep}, b]$. Здесь условие пластичности Треска выполняется в виде $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -2\tau_s$. Уравнение равновесия (4.1) интегрируется в виде:

$$\sigma_{rr} = \tau_s \ln(1+x) + K. \quad (4.4)$$

Константа интегрирования K обеспечивает непрерывность радиального напряжения на упруго-пластической границе $r = r_2^{ep}$:

$$K = \int_{x_1^{ep}}^{x_2^{ep}} \frac{w_B(\xi)}{1+\xi} \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} - \frac{1-\xi}{1+\xi} \right) d\xi - \tau_s \ln \frac{(1+x_1^{ep})(1+x_2^{ep})(a^2+b^2)}{2a^2} \quad (4.5)$$

для упругого закона (2.1) и

$$K = \int_{x_1^{ep}}^{x_2^{ep}} \frac{w_h(\xi)}{2(1+\xi)} \ln \frac{1-\xi}{1+\xi} d\xi - \tau_s \ln \frac{(1+x_1^{ep})(1+x_2^{ep})(a^2+b^2)}{2a^2} \quad (4.6)$$

для упругого закона (2.2).

4.4. *Положение упруго-пластических границ.* Из упругого анализа в области $r \in (r_1^{ep}, r_2^{ep})$ имеем на упруго-пластических границах следующие равенства.

Для упругого закона (2.1):

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \Big|_{r=r_1^{ep}} &= 2\tau_s = 2w_B \Big|_{x=x_1^{ep}} \cdot \left[\frac{1-x_1^{ep}}{1+x_1^{ep}} - \frac{1+x_1^{ep}}{1-x_1^{ep}} \right], \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \Big|_{r=r_2^{ep}} &= -2\tau_s = 2w_B \Big|_{x=x_2^{ep}} \cdot \left[\frac{1-x_2^{ep}}{1+x_2^{ep}} - \frac{1+x_2^{ep}}{1-x_2^{ep}} \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для упругого закона (2.2):

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \Big|_{r=r_1^{ep}} &= 2\tau_s = -w_h \Big|_{x=x_1^{ep}} \ln \frac{1-x_1^{ep}}{1+x_1^{ep}}, \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \Big|_{r=r_2^{ep}} &= -2\tau_s = -w_h \Big|_{x=x_2^{ep}} \ln \frac{1-x_2^{ep}}{1+x_2^{ep}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Эти уравнения определяют значения x_1^{ep} и x_2^{ep} как функции от механических параметров материала. Из (4.7), (4.8) следует, что $x_1^{ep} = -x_2^{ep} < 0$.

Если по (4.7), (4.8) оказывается, что

$$x_2^{ep} \geq \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} = \frac{1 - \delta^2}{1 + \delta^2}, \quad (4.9)$$

то упругое ядро занимает всю толщину трубы, которая после выворачивания деформирована чисто упруго. Безразмерная ширина упругой области определяется как

$$\frac{r_2^{ep} - r_1^{ep}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{1 + x_2^{ep}}{2}} - \sqrt{\frac{1 + x_1^{ep}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + x_2^{ep}}{2}} - \sqrt{\frac{1 - x_2^{ep}}{2}}.$$

Из (4.7), (4.8) следует, что ширина упругой зоны ненулевая, то есть упругое ядро всегда присутствует в вывернутой трубе. Это отличает представленную постановку задачи от исследования [7], которое подразумевает, что труба целиком находится в пластическом состоянии.

Таким образом, по (4.4)–(4.6) натяг $-\sigma_{rr}(b)/\tau_s$ можно представить в виде суммы двух функций, одна из которых S_g зависит только от геометрической характеристики вывернутой трубы – соотношения ее диаметров $\delta = a/b < 1$, вторая, S_m – только от механических характеристик материала:

$$-\sigma_{rr}(b)/\tau_s = S_g + S_m,$$

где $S_g(\delta) = 2 \ln \frac{\delta + \delta^{-1}}{2} > 0$ и

$$\begin{aligned} S_m &= \ln \left[(1 + x_1^{ep})(1 + x_2^{ep}) \right] + \int_{x_1^{ep}}^{x_2^{ep}} \frac{w_B(\xi)}{\tau_s} \left(\frac{1 - \xi}{1 + \xi} - \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right) \frac{d\xi}{1 + \xi} = \\ &= \ln \left[1 - (x_2^{ep})^2 \right] + \int_0^{x_2^{ep}} \left[\frac{w_B(-\xi)}{1 - \xi} - \frac{w_B(\xi)}{1 + \xi} \right] \left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi} - \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \right) \frac{d\xi}{\tau_s} = \\ &= \ln \left[1 - (x_2^{ep})^2 \right] + 8 \int_0^{x_2^{ep}} \frac{w_B(\xi)}{\tau_s} \left(\frac{\xi}{1 - \xi^2} \right)^2 d\xi \end{aligned} \quad (4.10)$$

для упругого закона (2.1),

$$\begin{aligned} S_m &= \ln \left[(1 + x_1^{ep})(1 + x_2^{ep}) \right] + \int_{x_1^{ep}}^{x_2^{ep}} \frac{-w_h(\xi)}{2\tau_s} \ln \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \frac{d\xi}{1 + \xi} = \\ &= \ln \left[1 - (x_2^{ep})^2 \right] + \int_0^{x_2^{ep}} \left[\frac{-w_h(-\xi)}{1 - \xi} - \frac{-w_h(\xi)}{1 + \xi} \right] \ln \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \frac{d\xi}{2\tau_s} = \\ &= \ln \left[1 - (x_2^{ep})^2 \right] + \int_0^{x_2^{ep}} \frac{-w_h(\xi)}{\tau_s} \frac{\xi}{1 - \xi^2} \ln \frac{1 + \xi}{1 - \xi} d\xi \end{aligned} \quad (4.11)$$

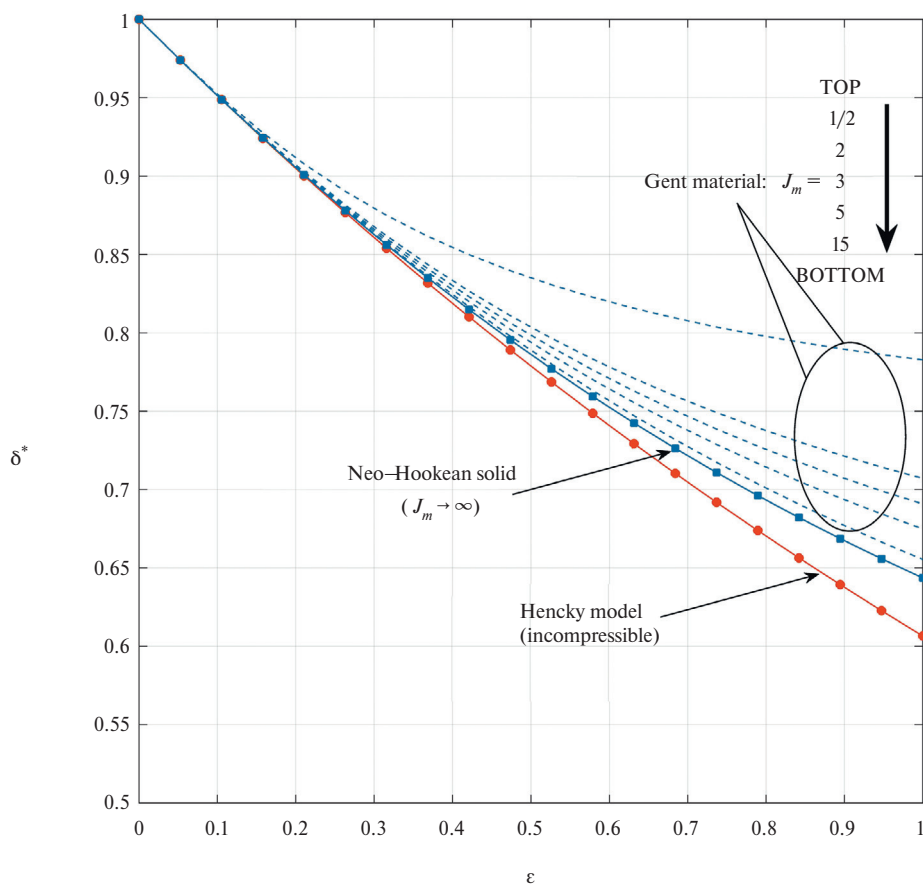


Рис. 3. Предельная величина геометрического параметра для упругих моделей Генки, неогукковского тела и Гента: если $\delta = a/b \geq \delta^*$, то вывернутая труба деформирована упруго, если $\delta = a/b < \delta^*$, то упруго-пластически.

для упругого закона (2.2). Здесь, как уже упоминалось, $w_B(x)$ и $w_h(x)$ есть функции инвариантов

$$I_1(\mathbf{B}^e) = \frac{1-x}{1+x} + \frac{1+x}{1-x} + 1 \quad \text{и} \quad I_2(\mathbf{h}^e) = -\frac{1}{4} \ln^2 \frac{1-x}{1+x}$$

соответственно. В выражениях выше учтено, что $x_1^{ep} = -x_2^{ep} \leq 0$ и указанные инварианты есть четные функции x .

5. Частные случаи. Введем механический параметр $\varepsilon = \tau_s/\mu$, где μ – нелинейный аналог модуля сдвига.

5.1. Несжимаемый материал Генки. Модель Генки задается упругим потенциалом:

$$W = -2\mu I_2(\mathbf{h}^e), \quad w_h = \frac{dW}{dI_2(\mathbf{h}^e)} = -2\mu = \text{const.}$$

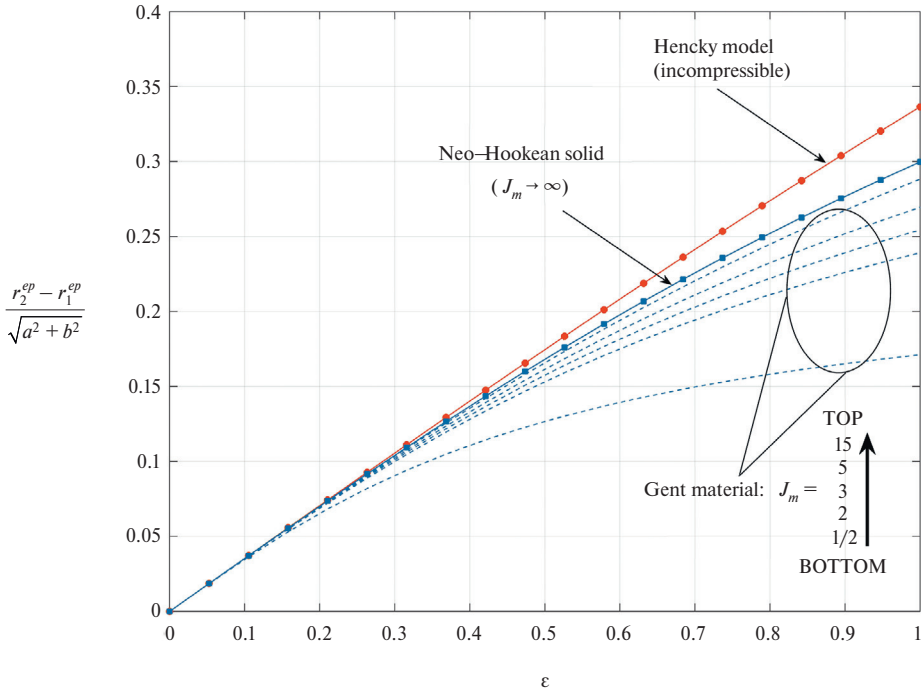


Рис. 4. Ширина упругой зоны.

Уравнения (4.8) приводят к следующим выражениям: $x_2^{ep} = (1 - e^{-\varepsilon}) / (1 + e^{-\varepsilon})$, $x_1^{ep} = -x_2^{ep}$. Ограничение (4.9) приводит к неравенству $\delta < \delta^* = e^{-\varepsilon/2}$, при выполнении которого труба деформирована упругопластически. Безразмерная ширина упругой зоны:

$$\frac{r_2^{ep} - r_1^{ep}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1 - e^{-\varepsilon/2}}{\sqrt{1 + e^{-\varepsilon}}}.$$

По (4.11):

$$\begin{aligned} S_m &= -\varepsilon - 2 \ln \frac{1 + e^{-\varepsilon}}{2} + \frac{2}{\varepsilon} \int_0^{(1 - e^{-\varepsilon}) / (1 + e^{-\varepsilon})} \frac{\xi}{1 - \xi^2} \ln \frac{1 + \xi}{1 - \xi} d\xi = \\ &= \ln 4 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{2}{\varepsilon} \left[\frac{\pi^2}{12} + \text{Li}_2(-e^{-\varepsilon}) \right] < 0, \end{aligned}$$

где $\text{Li}_2(\zeta) = -\int_0^\zeta \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

5.2. Неогукковский материал. Модель неогукковского тела задается упругим потенциалом:

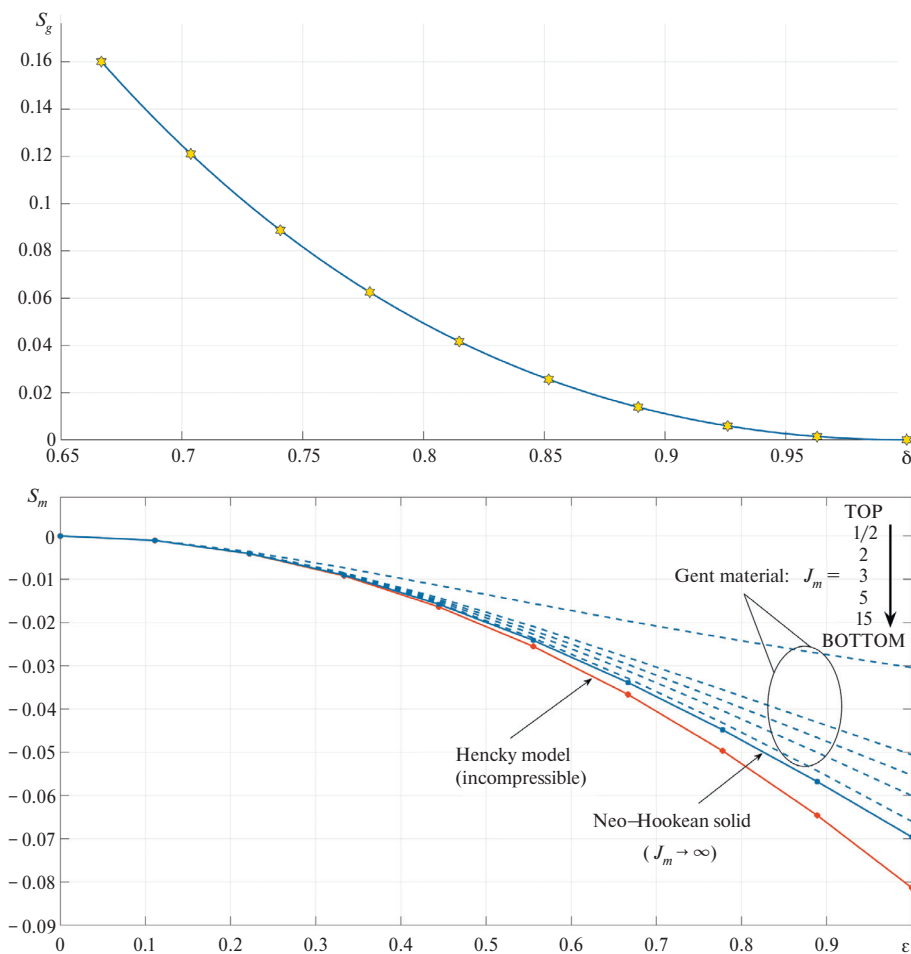


Рис. 5. Величина натяга есть сумма “геометрического” и “механического” слагаемых $-\sigma_r(b)/\tau_s = S_g + S_m$; $S_m = S_m(\epsilon)$, $\epsilon = \tau_s/\mu$, $S_g = S_g(\delta)$, $\delta = a/b$.

$$W = \frac{\mu}{2} [I_1(\mathbf{B}^e) - 3], \quad w_B = \frac{dW}{dI_1(\mathbf{B}^e)} = \frac{\mu}{2} = \text{const.}$$

Уравнения (4.7) приводят к следующим выражениям: $x_2^{ep} = \sqrt{1 + \epsilon^{-2}} - \epsilon^{-1}$, $x_1^{ep} = -x_2^{ep}$. Ограничение (4.9) приводит к неравенству $\delta < \delta^* = \sqrt{\epsilon^2 + 1} - \epsilon$, при выполнении которого труба деформирована упругопластически. Безразмерная ширина упругой зоны:

$$\frac{r_2^{ep} - r_1^{ep}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{\epsilon - 1 + \sqrt{1 + \epsilon^2}}{2\epsilon}} - \sqrt{\frac{\epsilon - \sqrt{1 + \epsilon^2} + 1}{2\epsilon}}.$$

По (4.10):

$$S_m = -\ln \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}+1}{2} + \frac{4}{\varepsilon} \int_0^{\sqrt{1+\varepsilon^2}-\varepsilon^{-1}} \left(\frac{\xi}{1-\xi^2} \right)^2 d\xi = 1 - \ln \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}+1}{2} - \varepsilon^{-1} \ln(\varepsilon + \sqrt{1+\varepsilon^2}) < 0.$$

5.3. Упругий материал Гента. Модель Гента [17] с упругим потенциалом

$$W = -\frac{\mu}{2} J_m \ln \left(1 - \frac{I_1(\mathbf{B}^e) - 3}{J_m} \right),$$

где $J_m = (I_1(\mathbf{B}^e))_{\max} - 3$ есть константа материала, $(I_1(\mathbf{B}^e))_{\max}$ есть предельное значение первого инварианта левого тензора Коши–Грина,

$$w_B = \frac{dW}{dI_1(\mathbf{B}^e)} = \frac{\mu}{2} \frac{J_m}{J_m - [I_1(\mathbf{B}^e) - 3]}$$

описывает полимерные материалы с ограниченной растяжимостью полимерных цепей.

Уравнения (4.7) с учетом (3.5) приводят к следующим выражениям:

$$x_2^{ep} = \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2(1+4/J_m)}-1}{\varepsilon(1+4/J_m)}, \quad x_1^{ep} = -x_2^{ep}. \quad (5.1)$$

Ограничение (4.9) приводит к неравенству

$$\delta < \delta^* = \frac{\sqrt{(1+4/J_m)\varepsilon+1} - \sqrt{(1+4/J_m)\varepsilon^2+1}}{\sqrt{(1+4/J_m)\varepsilon-1} + \sqrt{(1+4/J_m)\varepsilon^2+1}},$$

при выполнении которого труба деформирована упругопластически. При $J_m \rightarrow \infty$ это неравенство совпадает с неравенством, полученным для неогукковского материала $\delta < \delta^* = \sqrt{\varepsilon^2+1} - \varepsilon$.

Формула (4.10) с учетом (3.5) дает:

$$\begin{aligned} S_m &= \ln \left[1 - (x_2^{ep})^2 \right] + \frac{4}{\varepsilon} \int_0^{x_2^{ep}} \frac{\xi^2}{1-\xi^2} \frac{d\xi}{1 - (1+4/J_m)\xi^2} = \\ &= \ln \left[1 - (x_2^{ep})^2 \right] + \frac{J_m}{\varepsilon} \left[\frac{\operatorname{arth} \left(x_2^{ep} \sqrt{1+4/J_m} \right)}{\sqrt{1+4/J_m}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x_2^{ep}}{1+x_2^{ep}} \right]. \end{aligned}$$

Здесь x_2^{ep} определяется по формуле (5.1).

На рис. 3 представлены графики $\delta^*(\varepsilon)$ для всех трех моделей. При $\delta \geq \delta^*$ вывернутая труба деформирована чисто упруго, при $\delta < \delta^*$ — упругопластически.

Безразмерная ширина области приведена на рис. 4 как функция от механического параметра $\varepsilon = \tau_s/\mu$. Чем шире диапазон упругих деформаций материала (т.е. чем выше $\varepsilon = \tau_s/\mu$), тем шире упругая область в вывернутой

трубе и меньше натяг. Предельная величина натяга при $\varepsilon \rightarrow 0$ (т.е. $\varepsilon \rightarrow 0$) есть $-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_{rr}(b)/\tau_s = S_g$, что совпадает с решением для жестко-пластического материала.

Действительно, в вывернутой трубе из жестко-пластического материала в области $r \in [a, (a^2 + b^2)/2]$ $\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi} = 2\tau_s$, а в области $r \in [(a^2 + b^2)/2, b]$ $\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi} = 2\tau_s$; интегрируя уравнение равновесия с учетом непрерывности σ_{rr} на границе между областями, имеем:

$$\sigma_{rr}(b) = -2\tau_s \ln \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \right] = -2\tau_s \ln \frac{\delta + \delta^{-1}}{2}.$$

Для материала Гента, чем выше ограничение растяжимости полимерных цепей (т.е., чем ниже параметр модели J_m), тем меньше упругая область в вывернутой трубе и тем выше натяг при одной и той же величине параметра $\varepsilon = \tau_s/\mu$.

На рис. 5 представлены графики функций $S_g = S_g(\delta)$ и $S_m = S_m(\varepsilon)$, в сумме составляющих натяг между вывернутой трубой и облоймой.

6. Учет изотропного деформационного упрочнения материала в пластических областях. Зависимость предела текучести от накопленной пластической деформации может существенно сказываться на напряженном состоянии, особенно при больших деформациях. Корректный подход к учету эффекта упрочнения подразумевает введение в модель законов упрочнения вида $\tau_s = \tau_s(q)$, основанных на параметре накопленной пластической деформации q , который определяется интегрированием дифференциального уравнения $\dot{q} = \sqrt{(2/3)\text{tr}(\mathbf{D}^p)^2}$ по всему пути деформирования. Здесь точка над символом означает материальную производную по времени, $\mathbf{D}^p$ – тензор скорости пластической деформации.

В представленной задаче путь деформирования, приводящий к выворачиванию трубы, как и в соответствующей задаче нелинейной теории упругости, остается вне рассмотрения. Мы имеем дело только с начальным и конечным положением точек материала в пространстве. Для учета эффектов упрочнения в этом случае можно использовать вместо накопленной пластической деформации параметр интенсивности пластической деформации [7], который может быть введен, например, определением $h_{\text{int}} = (h_1^p - h_3^p)/2$, где h_1^p и h_3^p – наибольшее и наименьшее собственные значения логарифмического тензора пластической деформации $\mathbf{h}^p$.

Здесь требуется указать разделение деформаций на упругую и пластическую составляющие. Используя мультипликативное разложение градиента деформации $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$ и учитывая, что все тензорные величины в рассматриваемой задаче диагональные, можно записать:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p (\mathbf{F}^p)^T (\mathbf{F}^e)^T = \mathbf{F}^e (\mathbf{F}^e)^T \mathbf{F}^p (\mathbf{F}^p)^T = \mathbf{B}^e \mathbf{B}^p,$$

$$\mathbf{h} = \ln \mathbf{B}^{1/2} = \ln (\mathbf{B}^e)^{1/2} + \ln (\mathbf{B}^p)^{1/2} = \mathbf{h}^e + \mathbf{h}^p.$$

Далее, поскольку мы используем пластический потенциал Треска, можно заключить, что осевая компонента скорости пластической деформации, соответствующая промежуточному главному напряжению, отсутствует, $D_{zz}^p = 0$, следовательно, $h_{zz}^p = 0$ и $h_{rr}^p = -h_{\varphi\varphi}^p$. Тогда $h_{\text{int}} = -h_{\varphi\varphi}^p > 0$ во внутренней пластической области $r \in [a, r_1^{ep}]$ и $h_{\text{int}} = h_{\varphi\varphi}^p > 0$ во внешней пластической области $r \in [r_2^{ep}, b]$. Приравняв разницу главных напряжений, выраженную с использованием условия текучести и с использованием упругого закона (2.1), имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} &= \begin{cases} +2\tau_s(h_{\text{int}}), & r \in [a, r_1^{ep}] \\ -2\tau_s(h_{\text{int}}), & r \in [r_2^{ep}, b] \end{cases} = \\ &= -w_h \cdot (h_{rr}^e - h_{\varphi\varphi}^e) = 2w_h h_{\varphi\varphi}^e = 2w_h \cdot (h_{\varphi\varphi} - h_{\varphi\varphi}^p) = \\ &= \begin{cases} +2w_h \cdot \left(h_{\text{int}} - \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} \right), & r \in [a, r_1^{ep}]; \\ -2w_h \cdot \left(h_{\text{int}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} \right), & r \in [r_2^{ep}, b]. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} w_h &= w_h(I_2(\mathbf{h}^e)), \\ I_2(\mathbf{h}^e) &= -(1/2) \text{tr} \mathbf{h}^e = -\left(h_{\varphi\varphi}^e\right)^2 = -\left(h_{\varphi\varphi} - h_{\varphi\varphi}^p\right)^2 = \\ &= \begin{cases} -\left(h_{\text{int}} - \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}\right)^2, & r \in [a, r_1^{ep}]; \\ -\left(h_{\text{int}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}\right)^2, & r \in [r_2^{ep}, b]. \end{cases} \end{aligned}$$

Из (6.1) с учетом последних равенств можно выразить интенсивность пластической деформации h_{int} как функцию переменной x . И далее в обеих пластических областях можно проинтегрировать уравнения равновесия (4.1) и получить в конечном итоге искомый натяг. Интегрирование в упругой области, равно как и определение положения упруго-пластических границ, остаются такими же, как и в предыдущих разделах для идеально-пластического (неупрочняемого) материала.

В качестве примера рассмотрим несжимаемый материал, линейно-упрочняющийся в пластическом диапазоне с функцией упрочнения $\tau_s(h_{\text{int}}) = \tau_{s0}(1 + \chi h_{\text{int}})$, τ_{s0} и χ — материалы константы, и описывающийся законом Генки в упругом диапазоне. По (6.1) с $w_h = -2\mu$ имеем:

$$h_{\text{int}} = \begin{cases} \frac{\ln[(1-x)/(1+x)] - \tau_{s0}/\mu}{2 + \chi \tau_{s0}/\mu}, & r \in [a, r_1^{ep}], \\ \frac{\ln[(1+x)/(1-x)] - \tau_{s0}/\mu}{2 + \chi \tau_{s0}/\mu}, & r \in [r_2^{ep}, b]. \end{cases}$$

Отсюда следует, что интенсивность пластической деформации максимальна на боковых поверхностях трубы при

$$x = \pm \frac{1 - \delta^2}{1 + \delta^2}, \text{ а именно } h_{\text{int}}^{\text{max}} = \frac{2\mu \ln \delta^{-1} - \tau_{s0}}{2\mu + \chi \tau_{s0}}.$$

Уравнение равновесия в пластических областях:

$$2(1+x) \frac{d\sigma_{rr}}{dx} = \begin{cases} -2\tau_{s0} \left(1 + \chi \frac{\ln[(1-x)/(1+x)] - \tau_{s0}/\mu}{2 + \chi \tau_{s0}/\mu} \right), & r \in [a, r_1^{ep}], \\ +2\tau_{s0} \left(1 + \chi \frac{\ln[(1+x)/(1-x)] - \tau_{s0}/\mu}{2 + \chi \tau_{s0}/\mu} \right), & r \in [r_2^{ep}, b]. \end{cases}$$

Интегрируя уравнение равновесия по всей расчетной области, можно получить величину натяга:

$$-\frac{\sigma_{rr}|_{r=b}}{\tau_{s0}} = \frac{S_g + S_m - \chi \Phi}{1 + \chi \varepsilon / 2},$$

$$S_g(\delta) = 2 \ln \frac{\delta + \delta^{-1}}{2} > 0, \quad S_m(\varepsilon) = \ln 4 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{2}{\varepsilon} \left[\frac{\pi^2}{12} + \text{Li}_2(-e^{-\varepsilon}) \right] < 0,$$

$$\Phi(\delta) = \text{Li}_2 \frac{1}{1 + \delta^2} - \frac{\pi^2}{12} - \ln^2 \delta + \frac{1}{2} \ln^2(1 + \delta^2) < 0.$$

При $\chi = 0$ это выражение совпадает с результатом предыдущего раздела для неупрочняющегося материала $-\sigma_{rr}|_{r=b}/\tau_{s0} = S_g + S_m$, а при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\mu \rightarrow \infty$) можно получить с помощью правила Лопитала выражение натяга $-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_{rr}|_{r=b}/\tau_{s0} = S_g - \chi \Phi$, который соответствует жестко-пластическому материалу. Увеличение параметра упрочнения ведет к увеличению натяга.

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМиМ ДВО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1949. V. 242. P. 173–195. <https://doi.org/10.1098/rsta.1949.0009>
2. Gent A.N., Rivlin R.S. Experiments on the mechanics of rubber I: Eversion of a tube // Proceedings of the Physical Society. Section B. 1952. V. 65 (2). P. 118–121. <https://doi.org/10.1088/0370-1301/65/2/305>
3. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.

4. *Ericksen J.L.* Inversion of a perfectly elastic spherical shell // *ZAMM*. 1955. V. 35. № 9–10. P. 382–385.
<https://doi.org/10.1002/zamm.19550350909>
5. *Orr A.* The eversion and bifurcation of elastic cylinders. PhD Thesis. University of Glasgow, 1995.
6. *Baaser H., Nedjar B., Martin R.J., Neff P.* Eversion of tubes: Comparison of material models. In: *Constitutive Models for Rubber X*. CRC Press, 2017.
<http://dx.doi.org/10.1201/9781315223278-20>
7. *Gao X.-L., Atluri S.N.* An exact finite deformation elasto-plastic solution for the outside-in free eversion problem of a tube of elastic linear-hardening material // *IMA J. Appl. Math.* 1997. V. 58. № 3. P. 259–275.
<https://doi.org/10.1093/imamat/58.3.259>
8. *Shufen R., Dixit U.S.* A review of theoretical and experimental research on various autofrettage processes // *J. Press. Vessel Technol.* 2018. V. 140. № 5. 050802.
<https://doi.org/10.1115/1.4039206>
9. *Левунас В.И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наукова думка, 1987. 228 с.
10. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В.* Большие необратимые деформации и упругое последействие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 311 с.
11. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л.* Моделирование больших упруговязкопластических деформаций с учетом теплофизических эффектов // *Изв. РАН. МТТ*. 2010. № 4. С. 107–120.
12. *Feng B., Levitas V.I., Hemley R.J.* Large elastoplasticity under static megabar pressures: Formulation and application to compression of samples in diamond anvil cells // *Int. J. Plast.* 2016. V. 84. P. 33–57.
<https://doi.org/10.1016/j.jplas.2016.04.017>
13. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В.* Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды // *ПММ*. 2003. Т. 67. № 2. С. 315–325.
14. *Александров С.Е., Гольдштейн Р.В.* Расчет толщины стенки трубопровода под внутренним давлением при произвольном законе упрочнения // *Деформация и разрушение материалов*. 2011. № 9. С. 15–20.
15. *Александров С.Е., Гольдштейн Р.В.* Напряженно-деформированное состояние в упругопластической цилиндрической трубе со свободными торцами. 1. Общее решение // *Изв. РАН. МТТ*. 2013. № 5. С. 67–76.
16. *Sevastyanov G.M.* Adiabatic heating effect in elastic-plastic contraction / expansion of spherical cavity in isotropic incompressible material // *Eur. J. Mech. A Solids*. 2021. V. 87. 104223.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104223>
17. *Gent A.N.* A new constitutive relation for rubber // *Rubber Chemistry and Technology*. 1996. V. 69. № 1. P. 59–61.
<https://doi.org/10.5254/1.3538357>

ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF A CIRCULAR PIPE TURNED INSIDE OUT

G. M. Sevastyanov^{a, *}

^a*Institute of Machinery and Metallurgy, KhFRC FEBRAS, Komsomolsk-on-Amur*

^{*}*e-mail: akela.86@mail.ru*

Abstract — The paper presents an analytical solution to the problem of a circular pipe turned inside out in a rigid gasket. Formulas were obtained for the magnitude of the radial stress, which is responsible for the adhesion between the pipe and the gasket. The solution is obtained for an arbitrary incompressible hyperelastic material with a hyperelastic potential that depends only on the first invariant of the left Cauchy – Green deformation tensor (various generalizations of the neo-Hookean solid) or on the second invariant of the logarithmic Hencky strain tensor (various generalizations of the incompressible Hencky material). The solution takes into account the occurrence of plastic flow in areas adjacent to the lateral surfaces of the pipe. Both ideally plastic and isotropically hardening materials of a general type are considered. For the latter, a solution scheme is given; in the particular case of a linearly hardening material, a closed-form solution is obtained. For the perfect plasticity model, a closed-form solution was obtained for the neo-Hookean solid, for an incompressible Hencky material, and for the Gent material.

Keywords: hyperelasticity, plasticity, pipe eversion, Gent model

REFERENCES

1. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials. VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1949. Vol. 242. P. 173–195. <https://doi.org/10.1098/rsta.1949.0009>
2. Gent A.N., Rivlin R.S. Experiments on the mechanics of rubber. I: Eversion of a tube // Proceedings of the Physical Society. Section B. 1952. Vol. 65 (2). P. 118–121. <https://doi.org/10.1088/0370-1301/65/2/305>
3. Lurie A.I. Nonlinear theory of elasticity. † North Holland, New York, 1990.
4. Ericksen J.L. Inversion of a perfectly elastic spherical shell // ZAMM. 1955. V. 35 (9–10). P. 382–385. <https://doi.org/10.1002/zamm.19550350909>
5. Orr A. The eversion and bifurcation of elastic cylinders. PhD Thesis. University of Glasgow, 1995.
6. Baaser H., Nedjar B., Martin R.J., Neff P. Eversion of tubes: Comparison of material models. In: *Constitutive Models for Rubber X*. CRC Press, 2017. <http://dx.doi.org/10.1201/9781315223278-20>
7. Gao X.-L., Atluri S.N. An exact finite deformation elasto-plastic solution for the outside-in free eversion problem of a tube of elastic linear-hardening material // IMA Journal of Applied Mathematics. 1997. Vol. 58. P. 259–275. <https://doi.org/10.1093/imamat/58.3.259>

8. *Shufen R., Dixit U.S.* A review of theoretical and experimental research on various autofrettage processes // *Journal of Pressure Vessel Technology*. 2018. V. 140. № 5. 050802. <https://doi.org/10.1115/1.4039206>
9. *Levitas V.I.* Large deformation of materials with complex rheological properties at normal and high pressure. Nova Science Publishers, New York. 1996
10. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Large irreversible deformations and elastic aftereffects. Dal'nauka, Vladivostok, 2013 (*in Russian*)
11. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* Modeling of large elastoviscoplastic deformations with thermophysical effects taken into account // *Mechanics of Solids*. 2010. V. 45. P. 583–594. <https://doi.org/10.3103/S0025654410040084>
12. *Feng B., Levitas V.I., Hemley R.J.* Large elastoplasticity under static megabar pressures: Formulation and application to compression of samples in diamond anvil cells // *International Journal of Plasticity*. 2016. Vol. 84. P. 33–57. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2016.04.017>
13. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Polonik M.V.* The forming of one-dimensional residual strain field in the vicinity of a cylindrical continuum defect in an elastic-plastic medium // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2003. V. 67 (2). P. 315–325 (*in Russian*)
14. *Aleksandrov S.E., Goldstein R.V.* Calculation of the wall thickness of a pipeline under internal pressure with an arbitrary hardening law // *Deformation and Fracture of Materials*. 2011. P. 15–20 (*in Russian*)
15. *Aleksandrov S.E., Goldstein R.V.* Stress-strain state in an elastoplastic cylindrical tube with free ends. I. General solution // *Mechanics of Solids*. 2013. V. 48. P. 537–545. <https://doi.org/10.3103/S0025654413050099>
16. *Sevastyanov G.M.* Adiabatic heating effect in elastic-plastic contraction / expansion of spherical cavity in isotropic incompressible material // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2021. V. 87. 104223. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104223>
17. *Gent A.N.* A new constitutive relation for rubber // *Rubber Chemistry and Technology*. 1996. V. 69 (1). P. 59–61. <https://doi.org/10.5254/1.3538357>