

УДК. 539.374

## О КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ СОЕДИНЕНИЯ ПЛАСТИН ВНАХЛЕСТ

© 2024 г. В. В. Глаголев<sup>а, \*</sup>, А. И. Лутхов<sup>а, \*\*</sup>

<sup>а</sup>Тулский государственный университет, Тула, Россия

\*e-mail: vadim@tsu.tula.ru, \*\*e-mail: tip460@mail.ru

Поступила в редакцию 30.11.2023 г.

После доработки 15.12.2023 г.

Принята к публикации 18.12.2023 г.

На основе экспериментальных данных разрушения адгезионного слоя, сопрягающего по заданному участку две пластины, и соответствующего расчетной схеме известного аналитического решения рассматриваются варианты критерия разрушения, учитывающего гидростатическое давление и инвариантные составляющие упругой энергии. Исследуются одно- и двухпараметрические критерии, в которых произведения энергии деформации объема и формы на толщину слоя формируют критический поток удельной упругой энергии. Показано, что разрыхление тонкого адгезионного слоя при квазилинейном отношении энергии деформации объема двухпараметрическом критерии наиболее точно описывает критическое состояние.

*Ключевые слова:* линейный параметр, энергетическое произведение, энергии деформации объема и формы, соединение внахлест

DOI: 10.31857/S1026351924030079, EDN: UIBBNN

**1. Введение.** Прогнозирование прочности адгезионных соединений внахлест (single-lap joints (SLJ)) связано с определенной моделью представления адгезионного слоя и его взаимодействия с сопрягаемыми материалами. Как правило адгезионные слои имеют реальные толщины при существенных различиях в механических свойствах с несущими слоями композита. В этом случае по границам сопряжения в рамках решения дву- и трехмерных задач линейной теории упругости возможны сингулярные напряжения [1–3]. Одним из подходов решения соответствующих задач, наряду с методами механики квазихрупкого разрушения [4–6], является метод конечных элементов [7], который может быть рассмотрен в совокупности с когезионными элементами [8, 9], использующими билинейный закон распределения взаимодействия в когезионной зоне. Отмечено, что различные законы когезионного взаимодействия существенно влияют на распределение напряженно-деформированного состояния [10].

Наряду с решениями дву- и трехмерных задач для оценки напряженного состояния в адгезионных слоях применяются аналитические решения, построенные на упрощающих гипотезах теории пластин. Аналитические решения нахождения напряженного состояния в адгезионном слое конечной толщины рассмотрены в работах [11–13]. Сравнение ряда моделей приведено в [14]. Отличительной особенностью данных решений является регулярное распределение поля напряжений по длине адгезива при его конечной толщине. Отмечено хорошее соответствие решения [12] конечно-элементному решению двумерной задачи [15], где в адгезионном слое наряду со сдвиговыми напряжениями присутствуют и отрывные напряжения.

В работе [16] для нахождения критического состояния упругого адгезионного слоя при смешанной моде нагружения I+II предложено учитывать влияние гидростатического давления и инвариантных составляющих упругой энергии в критическом состоянии. Отмечено, что влияние гидростатического давления на переход в пластическое состояние рассматривалось в рамках различных критериев [17–21], связанных со вторым инвариантом тензора напряжений или максимальными касательными напряжениями, и исследовалось экспериментально [22]. Критерий работы [16] основывался на представлении J-интеграла при хрупком разрушении слоя конечной толщины в виде произведения толщины слоя и накопленной упругой энергии [23] и включал в себя один параметр разупрочнения. При малой толщине адгезионного слоя, относительно толщин сопрягаемых несущих материалов, предполагалось совпадение критического значения J-интеграла в виде [23] экспериментально найденным значениям J-интегралов для мод нагружения I ( $G_{IC}$ ) и II ( $G_{IIC}$ ), по которым рассчитывался параметр разупрочнения для состояния нормального разрыва адгезива. В этом случае критические значения J-интегралов для смешанных мод нагружения I+II ( $G_{I+IIC}$ ) лежат в диапазоне от  $G_{IC}$  до  $G_{IIC}$ . Однако для ряда случаев экспериментальные значения  $G_{I+IIC}$  могут быть меньше значения  $G_{IC}$  [24]. В данной работе предполагается рассмотреть двухпараметрические критерии разрушения тонкого адгезионного слоя при смешанной моде нагружения, где параметры определяются из анализа критического состояния нормального разрыва и смешанной моды нагружения адгезионного слоя, а также значений  $G_{IC}$  и  $G_{IIC}$ . Смешанная мода нагружения рассматривалась в рамках четырех SLJ соединений согласно экспериментальным данным работы [25]. При этом данные одного эксперимента использовались для нахождения параметров конкретного адгезива, а для других экспериментов проверялась корректность критериев. Для нахождения напряженного состояния в слое использовалось аналитическое решение [15], полученное в рамках теории изгиба пластин для сопрягаемых слоев материалов.

**2. Постановка задачи.** На рис. 1 две одинаковых пластины 1 и 2 сопрягаются адгезивом 3 на участке длиной  $l$ . Правый торец пластины 2 жестко закреплён от перемещений, а на левый действует горизонтальная сила  $\mathbf{F} = -F\mathbf{e}_1$ .

Решение [15] для средних по толщине слоя напряжений, предполагая слой изотропным, запишем в следующем виде:

$$\bar{\sigma}_{12} = -\frac{Q_1}{8c} \left[ \frac{\beta c}{h} (1+3K) \frac{\cosh(\beta X/h)}{\sinh(\beta c/h)} + 3(1-K) \right]. \quad (2.1)$$

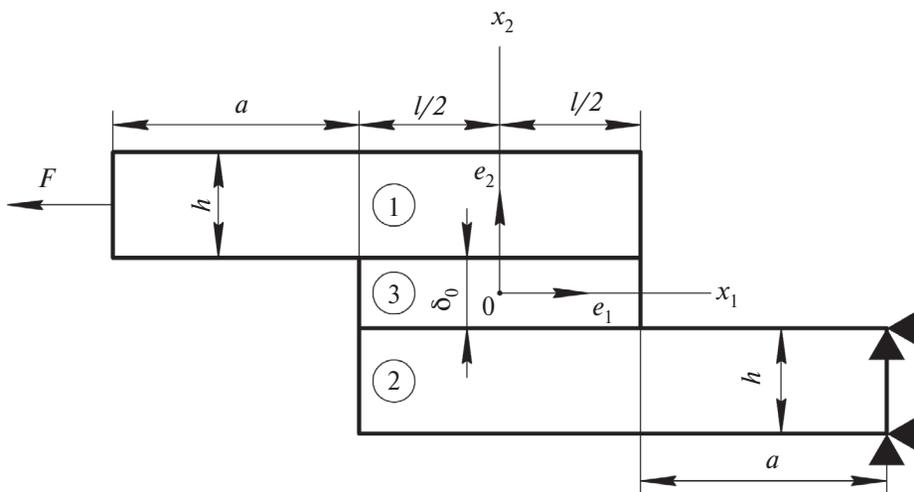


Рис. 1. Схема нагружения SLJ соединения.

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{Q_1 h}{c^2 \Delta} \left[ \left( R_2 \lambda^2 \frac{K}{2} + \lambda K' \cosh \lambda \cos \lambda \right) \cosh \frac{\lambda X}{c} \cos \frac{\lambda X}{c} + \left( R_1 \lambda^2 \frac{K}{2} + \lambda K' \sinh \lambda \sin \lambda \right) \sinh \frac{\lambda X}{c} \sin \frac{\lambda X}{c} \right], \quad (2.2)$$

где

$$X \in [-0.5l; 0.5l], \quad w = \sqrt{\frac{E_3 l^2}{E h \delta_0}}, \quad c = 0.5l.$$

$$K = \frac{\cosh(U_2 c) \sinh(U_1 a)}{\sinh(U_1 a) \cosh(U_2 c) + 2\sqrt{2} \cosh(U_1 a) \sinh(U_2 c)},$$

$$U_1 = \frac{2}{h} \sqrt{\left(1 - \nu^2\right) \frac{3F}{E h B}}, \quad U_2 = \frac{\sqrt{2} U_1}{4}, \quad K' = K c U_1, \quad \beta = 2 \sqrt{\frac{E_3 h}{E \delta_0}}, \quad \gamma = \left( \frac{6 E_3 h}{E \delta_0} \right)^{1/4},$$

...

$$R_1 = \frac{\cosh(\lambda a) \sinh(\lambda c) + \lambda \cosh(\lambda c) \sinh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a) \cosh(\lambda c) + \cosh(\lambda a) \sinh(\lambda c)}, \quad R_2 = \frac{\cosh(\lambda a) \sinh(\lambda c) - \lambda \cosh(\lambda c) \sinh(\lambda a)}{\sinh(\lambda a) \cosh(\lambda c) + \cosh(\lambda a) \sinh(\lambda c)}$$

$$\Delta = 0.5(\sinh(2\lambda) + \sin(2\lambda)), \quad Q_1 = F/B,$$

где  $E$ ,  $\nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона пластин;  $E_3$  – модуль упругости адгезионного слоя;  $B$  – ширина пластины в направлении, ортогональном плоскости  $x_1 O x_2$ .

Согласно работе [25], для материала пластин 1 и 2 использовался алюминиевый сплав Al6082-T651 со следующими механическими характеристиками  $E = 70$  ГПа,  $\nu = 0.3$ . Для материала адгезива была выбрана смола Araldite AV138 с механическими свойствами из работы [26]  $E_3 = 4.89$  ГПа. Критические значения для J-интегралов смолы рассматриваются согласно заявленным производителем и экспериментальным данным работы [24]  $G_{IC} = 200(140)$  Н/м до  $G_{IIC} = 380(352)$  Н/м, где значения в скобках брались из статьи [24]. Общая длина образца  $2a + l$  бралась постоянной, равной 180 мм,  $B = 25$  мм, длина сопрягаемого адгезивом участка изменялась от  $l = 12.5$  мм до  $l = 50$  мм с приращением  $\Delta l = 12.5$  мм, толщина пластин  $h = 3$  мм, толщина слоя  $\delta_0 = 0.2$  мм. Значения внешней критической нагрузки при рассматриваемых длинах сопряжения равнялись соответственно:  $F_1 = 5900$  Н,  $F_2 = 7100$  Н,  $F_3 = 8500$  Н,  $F_4 = 9300$  Н, где индекс определяет порядковый номер эксперимента для определенной длины сопрягаемого адгезивом участка.

**3. Формулировка двухпараметрического критерия.** Предельное состояние адгезионного слоя рассмотрено в рамках следующих критериев:

$$(1 + \text{sign}(\bar{\sigma}))\beta \hat{\phi}^\sigma + \hat{\phi}^\tau + \gamma \text{sign}(\bar{\sigma}) \hat{\phi}^\sigma \hat{\phi}^\tau = G_{IIC}, \quad (3.1)$$

$$(1 + \text{sign}(\bar{\sigma}))\hat{a}_1 \hat{\phi}^\sigma + \hat{\phi}^\tau + \tilde{a}_1 \text{sign}(\bar{\sigma}) (\hat{\phi}^\sigma)^2 = G_{IIC}, \quad (3.2)$$

где  $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^\sigma + \bar{\varphi}^\tau = (3\bar{\sigma}^2 + \bar{\tau}^2)/(2E_3)$  – представление средней по толщине адгезива плотности энергии упругой энергии через инвариантные составляющие плотности энергии объема и формы при нулевом коэффициенте Пуассона;  $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{33})/3$  – гидростатическое давление;  $\bar{\tau}^2 = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma}$  – свертка девиаторных составляющих тензора средних напряжений в слое;

$$\hat{\phi}^\sigma = \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} (\delta_0 \bar{\varphi}^\sigma), \quad \hat{\phi}^\tau = \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} (\delta_0 \bar{\varphi}^\tau) -$$

предельные значения энергетических произведений объема и формы, которые будем предполагать независимыми величинами от параметра  $\delta_0$ ;  $\beta$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma_1$  – параметры, учитывающие “разрыхление” адгезива.

Критерий (3.1) является квазилинейным, а критерий (3.2) предполагает квадратичную зависимость относительно энергетического произведения объема.

В критическом состоянии моды II, когда  $\bar{\varphi}_{IIC}^\sigma = 0$ , из (3.1) и (3.2) приходим к тождеству:  $\hat{\phi}_{IIC}^\tau = G_{IIC}$ . Для критического состояния моды I из (3.1) имеем:

$$(1 + \text{sign}(\bar{\sigma}))\beta \hat{\phi}_{IC}^\sigma + \hat{\phi}_{IC}^\tau + \gamma \text{sign}(\bar{\sigma}) \hat{\phi}_{IC}^\sigma \hat{\phi}_{IC}^\tau = G_{IIC}, \quad (3.3)$$

а для критического состояния смешанной моды I+II:

$$(1 + \text{sign}(\bar{\sigma}))\beta \hat{\phi}_{I+II,C}^\sigma + \hat{\phi}_{I+II,C}^\tau + \gamma \text{sign}(\bar{\sigma}) \hat{\phi}_{I+II,C}^\sigma \hat{\phi}_{I+II,C}^\tau = G_{IIC}. \quad (3.4)$$

Приняв во внимание, что при нагружении по моде I и смешанной моде I+II гидростатическое напряжение положительно, а  $\hat{\phi}_{IC}^\sigma + \hat{\phi}_{IC}^\tau = G_{IC}$ ,  $\hat{\phi}_{I+II,C}^\sigma + \hat{\phi}_{I+II,C}^\tau = G_{I+II,C}$  из (3.3) и (3.4) приходим к системе линейных уравнений относительно параметров “разрыхления”:

$$\beta \hat{\phi}_{IC}^{\sigma} + \gamma \hat{\phi}_{IC}^{\sigma} \hat{\phi}_{IC}^{\tau} = G_{IIIC} - G_{IC}, \quad (3.5)$$

$$\beta \hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} + \gamma \hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} \hat{\phi}_{I+II,C}^{\tau} = G_{IIIC} - G_{I+II,C}. \quad (3.6)$$

Решение системы (3.5) и (3.6) запишем в виде:

$$\beta = \frac{\hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} \hat{\phi}_{I+II,C}^{\tau} (G_{IIIC} - G_{IC}) - \hat{\phi}_{IC}^{\sigma} \hat{\phi}_{IC}^{\tau} (G_{IIIC} - G_{I+II,C})}{\hat{\phi}_{IC}^{\sigma} \hat{\phi}_{I+II,C}^{\tau} (\hat{\phi}_{I+II,C}^{\tau} - \hat{\phi}_{IC}^{\tau})}, \quad (3.7)$$

$$\gamma = \frac{\hat{\phi}_{IC}^{\sigma} (G_{IIIC} - G_{I+II,C}) - \hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} (G_{IIIC} - G_{IC})}{\hat{\phi}_{IC}^{\sigma} \hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} (\hat{\phi}_{I+II,C}^{\tau} - \hat{\phi}_{IC}^{\tau})}. \quad (3.8)$$

Аналогичным образом определяем постоянные в критерии (3.2):

$$\beta_1 = \frac{\hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} \hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} (G_{IIIC} - G_{IC}) - \hat{\phi}_{IC}^{\sigma} \hat{\phi}_{IC}^{\tau} (G_{IIIC} - G_{I+II,C})}{\hat{\phi}_{IC}^{\sigma} \hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} (\hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} - \hat{\phi}_{IC}^{\tau})}, \quad (3.9)$$

$$\gamma_1 = \frac{\hat{\phi}_{IC}^{\sigma} (G_{IIIC} - G_{I+II,C}) - \hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} (G_{IIIC} - G_{IC})}{\hat{\phi}_{IC}^{\sigma} \hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} (\hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} - \hat{\phi}_{IC}^{\tau})}. \quad (3.10)$$

Наряду с критериями (3.1) и (3.2) из работы [16] приведен однопараметрический критерий разрушения адгезионного слоя:

$$(1 + \text{sign}(\bar{\sigma})\beta') \hat{\phi}^{\sigma} + \hat{\phi}^{\tau} = G_{IIIC}, \quad (3.11)$$

где  $\beta' = (G_{IIIC} - G_{IC}) / \hat{\phi}_{IC}^{\sigma}$  – параметр, характеризующий “разрыхление” адгезива.

Для нахождения постоянных  $\beta, \beta_1, \gamma, \gamma_1, \beta'$  необходимы данные критических значений J-интегралов для мод нагружения I, II. Кроме того, при нахождении  $\beta, \beta_1, \gamma, \gamma_1$  необходимы значения предельных энергетических произведений энергий объема и формы для критической внешней нагрузки при нагружении по моде I и смешанной моде I+II. Для постоянной  $\beta'$  наряду с характеристиками  $G_{IC}$  и  $G_{IIIC}$  достаточно знание предельного значения энергетического произведения энергии объема для критической внешней нагрузки при нагружении адгезива по моде I.

**4. Нахождение критических состояний.** Для нахождения напряженного состояния в тонком адгезионном слое при его смешанной моде нагружения воспользуемся решением [12] (2.1), (2.2). При определении энергетических произведений при нормальном разрыве адгезива принимаем решение в рамках теории пластин, полученное в работе [27] на основе деформирования ДКБ-образца, консоли которого сопрягаются адгезивом толщиной  $\delta_0$ . В силу того, что в решении [12] отсутствуют напряжения вдоль оси  $Ox_1$ , напряженное состояние в адгезиве при нормальном разрыве будет определяться одной компонентой тензора напряжений. Значение напряжения в вершине адгезионного слоя будет равно:

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{2(Q_2)\sqrt{6(1+\nu)}}{\sqrt{\delta_0 h}} \sqrt{\frac{E_3}{E}} \left( \frac{a_1}{h} \sqrt{(1-\nu)} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right), \quad (4.1)$$

где  $a_1, h$  – длина свободной консоли и ее толщина в ДКБ-образце.

Решение (4.1) получено при допущении  $\delta_0/h \ll 1$  и приводит к следующему значению для J-интеграла:

$$G_I = \frac{\bar{\sigma}_{22}^2}{2E_3} \delta_0 = \frac{12Q_2^2(1-\nu_1^2)}{hE_1} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5(1-\nu_1)}} \left(\frac{h}{a}\right)\right)^2, \quad (4.2)$$

которое совпадает с выражением, полученным в работах [28, 29], и предполагает существование относительно малого значения толщины слоя, при котором значения энергетических произведений не зависят от толщины слоя. Для случая рассматриваемого диапазона малых значений относительных толщин слоя напряжение на его торце в критическом состоянии при нормальном разрыве может быть найдено в виде:

$$\bar{\sigma}_{22} = \sqrt{\frac{2G_{IC}E_3}{\delta_0}}. \quad (4.3)$$

Из (4.3) приходим к выражениям для энергетических произведений при нормальном разрыве слоя:  $\hat{\phi}_{IC}^\sigma = G_{IC}/3$ ,  $\hat{\phi}_{IC}^\tau = 2G_{IC}/3$ . В этом случае параметр разупрочнения в (3.11) будет равен  $\beta' = 3(G_{IIIC}/G_{IC} - 1)$ .

Для нахождения значений (3.7)–(3.10) воспользуемся решениями (2.1), (2.2) для нахождения величин  $\hat{\phi}_{I+II,C}^\sigma, \hat{\phi}_{I+II,C}^\tau$  с учетом критической нагрузки  $F^1$ . При этом будем использовать как толщину адгезива, заданную в экспериментальном образце, так и толщину на два порядка меньшую при значениях  $G_{IC}$  и  $G_{IIIC}$  согласно заявленному производителем и работы [24]. Рассмотрим погрешности  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  выполнения критериев (3.1), (3.2), (3.11) в виде отношения расчетного значения правой части соответствующего критерия к величине  $G_{IIIC}$ . Результаты расчетов при значении линейного параметра  $\delta_0$ , равном 200 мкм, поместим в табл. 1, а для величины, равной 2 мкм, в табл. 2. Значения в скобках соответствуют величинам  $G_{IC}$  и  $G_{IIIC}$ , полученным в работе [24].

**Таблица 1.** Погрешности выполнения критериев разрушения при  $\delta_0 = 200$  мкм

$F$ (Н)	5900	7100	8500	9300
$\Delta_1$	1	1.01(0.99)	1.03(0.96)	0.96(0.98)
$\Delta_2$	1	1.05(1.06)	1.14(1.16)	1.06(0.99)
$\Delta_3$	1.41(1.81)	1.46(1.87)	1.55(1.97)	1.46(1.84)

И результатов табл. 1 и табл. 2 видим, что двухпараметрические критерии наиболее близки к экспериментальным данным по сравнению с однопараметрическим критерием. При этом квазилинейный относительно энергии деформации объема двухпараметрический критерий (3.1) имеет меньшую

**Таблица 2.** Погрешности выполнения критериев разрушения при  $\delta_0 = 2$  мкм

$F$ (Н)	5900	7100	8500	9300
$\Delta_1$	1	1.02(0.99)	1.05(0.99)	1.02(0.99)
$\Delta_2$	1	1.04(1.04)	1.11(1.11)	1.05(1.01)
$\Delta_3$	1.23(1.58)	1.27(1.62)	1.34(1.69)	1.27(1.58)

погрешность по сравнению с критерием (3.2), которая при определенных данных критических значений  $J$ -интегралов не превосходит 1%. Уменьшение значения линейного параметра стабилизирует расчетные значения и уменьшает погрешность, что оказалось более существенным для однопараметрического критерия.

**5. Заключение.** Рассмотрены двухпараметрические критерии, учитывающие влияние инвариантных составляющих плотности упругой энергии и гидростатическое давление на разрушение тонких адгезионных слоев. На основе аналитического решения и критических значений  $J$ -интегралов для моды I и II адгезива Araldite AV138 найдены коэффициенты для предложенных критериев. По известным данным разрушения SLJ соединений проведено тестирование предложенных критериев для смешанной моды нагружения I+II. Показано их хорошее соответствие экспериментальным результатам, при этом квазилинейный относительно плотности энергии деформации объема критерий наиболее близко описывает критическое состояние.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00017, <https://rscf.ru/project/23-21-00017/>, в Тульском государственном университете.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Steven R.A., Stefan H. Strength prediction of beams with bi-material butt-joints // Eng. Fract. Mech. 2003. V. 70. № 12. P. 1491–1507. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(02\)00149-2](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00149-2)
2. Labossiere P.E.W., Dunn M.L. Fracture initiation at three-dimensional bimaterial interface corners // J. Mech. Phys. Solids. 2001. V. 49. № 3. P. 609–634. [https://doi.org/10.1016/s0022-5096\(00\)00043-0](https://doi.org/10.1016/s0022-5096(00)00043-0)
3. Wu Z., Tian S., Hua Y., Gu X. On the interfacial strength of bonded scarf joints // Eng. Fract. Mech. 2014. V. 131. P. 142–149. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.07.026>
4. Устинов К.Б. О расслоении полосы по границе раздела упругих свойств. Часть 2. Случай сдвиговой трещины // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2016. № 2. С. 131–142. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.2.09>
5. Ustinov K.B., Massabo R., Lisovenko D.S. Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution // Engineering Failure Analysis. 2020. V. 110. 104410. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2020.104410>
6. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Изд-во Самарского университета, 2001. 632 с.
7. Nakano N., Sekiguchi Y., Sawa T. FEM stress analysis and strength prediction of scarf adhesive joints under static bending moments // Int. J. Adhes. Adhes. 2013. V. 44. P. 166–173. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2013.02.010>

8. *Campilho R.D.S.G., Banea M.D., Neto J.A.B.P., da Silva L.F.M.* Modelling of single-lap joints using cohesive zone models: Effect of the cohesive parameters on the output of the simulations // *The Journal of Adhesion*. 2012. V. 88 № 4–6. P. 513–533. <https://doi.org/10.1080/00218464.2012.660834>
9. *De Moura M.F.S.F., Goncalves J.P.M.* Cohesive zone model for high-cycle fatigue of adhesively bonded joints under mode I loading // *Int. J. Solids Struct.* 2014. V. 51. № 5 P. 1123–1131. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.12.009>
10. *Panettieri E., Fanteria D., Danzi F.* Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results // *Compos. Struct.* 2016. V. 137. P. 140–147. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.11.018>
11. *Volkersen O.* Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten nietverbindungen mit konstanten laschenquerschnitten // *Luftfahrtforschung*. 1938. V. 15. P. 41–47.
12. *Goland M., Reissner E.* The stresses in cemented joints // *J. Appl. Mech.* 1944. V. 11. № 1. P. 17–27. <https://doi.org/10.1115/1.4009336>
13. *Adams R.D., Peppiatt N.A.* Stress analysis of adhesive-bonded lap joints // *J. Strain Anal.* 1974. V. 9. № 3. P. 185–196. <https://doi.org/10.1243/03093247V093185>
14. *da Silva L.F.M., das Neves P.J.C., Adams R.D., Wang A., Spelt J.K.* Analytical models of adhesively bonded joints – Part II: Comparative study // *Int. J. Adhes. Adhes.* 2009. V. 29. № 3. P. 331–341. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2008.06.007>
15. *Carpenter W.C.* Goland and Reissner were correct // *J. Strain Anal. Eng. Design.* 1989. V. 24. № 3. P. 185–187. <https://doi.org/10.1243/03093247V243185>
16. *Глаголев В.В., Маркин А.А.* Предельные состояния адгезионных слоев при комбинированном нагружении // *Изв. РАН. МТТ*. 2023. № 6. С. 39–46. <https://doi.org/10.31857/S0572329923600019>
17. *Novozhilov V.V.* On plastic cavitation // *J. Appl. Math. Mech.* 1965. V. 29. № 4. P. 811–819. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(65\)90090-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(65)90090-0)
18. *Prandtl L.* Spannungsverteilung in plastischen korpern // *Proc. 1st Internat. Congr. Appl. Mech.* 1924. P. 43–54.
19. *Guest J.J.* Yield surface in combined stress // *Phil. Mag. Ser.7*. 1940. V. 30. P. 349–369.
20. *Schleicher F.* Der spannungszustand an der fließgrenze (Plastizitätsbedingung) // *ZAMM*. 1926. V. 6. № 3. P. 199–216. <https://doi.org/10.1002/zamm.19260060303>
21. *Толоконников Л.А., Толоконников О.Л., Султанов И.С.* Осесимметричные пластические деформации при условии пластичности, зависящем от гидростатического напряжения // *Прикладная механика*. 1976. Т. XII. № 8. С. 43–48.
22. *Толоконников О.Л.* Установка для испытаний трубчатых образцов материалов в среде высокого давления // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1985. № 3. С. 185–188.
23. *Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A.* Relationship between  $J_c$  and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite // *Int. J. Fract.* 2020. V. 224. № 2. P. 277–284. <https://doi.org/10.1007/s10704-020-00464-0>
24. *Santos M.A.S., Campilho R.D.S.G.* Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility // *Int. J. Fract.* 2017. V. 207. P. 55–71. <https://doi.org/10.1007/s10704-017-0219-x>
25. *Dionisio J.M.M., Ramalho L.D.C., Sanchez-Arce I.J., Campilho R.D.S.G., Belinha J.* Fracture mechanics approach to stress singularity in adhesive joints // *Int. J. Fract.* 2021. V. 232. P. 77–91. <https://doi.org/10.1007/s10704-021-00594-z>
26. *De Sousa C.C.R.G., Campilho R.D.S.G., Marques E.A.S., Costa M., da Silva L.F.M.* Overview of different strength prediction techniques for single-lap bonded joints // *Proc. Inst. Mech. Eng. Part L*. 2017. V. 231. № 1–2. P. 210–223.

- <https://doi.org/10.1177/1464420716675746>
27. *Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A.* On the influence of the mechanical characteristics of a thin adhesion layer on the composite strength. Part 1. Elastic deformation // PNRPU Mechanics Bulletin. 2022. № 3. P. 116–124. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.3.12>
  28. *Bruno D., Greco F., Lonetti P.* Computation of energy release rate and mode separation in delaminated composite plates by using plate and interface variables // Mech. Adv. Mater. Struct. 2005. V. 12. № 4. P. 285–304. <https://doi.org/10.1080/15376490590953563>
  29. *Bruno D., Greco F.* Mixed-mode delamination in plates: a refined approach // Int. J. Solids Struct. 2001. V. 38. № 50–51. P. 9149–9177. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(01\)00179-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00179-2)

## ON THE CRITERION OF STRENGTH OF SINGLE-LAP PLATE JOINTS

V. V. Glagolev<sup>a, \*</sup>, A. I. Lutkhov<sup>a, \*\*</sup>

<sup>a</sup> Tula State University, Tula, Russia

\*e-mail: [vadim@tsu.tula.ru](mailto:vadim@tsu.tula.ru), \*\*e-mail: [tip460@mail.ru](mailto:tip460@mail.ru)

**Abstract** – On the basis of experimental data on the fracture of an adhesive layer mating two plates along a given section and the known analytical solution corresponding to the calculation scheme, variants of the fracture criterion that take into account hydrostatic pressure and invariant components of elastic energy are considered. One- and two-parameter criteria are investigated, in which the products of volume and shape deformation energy per layer thickness form the critical flow of elastic energy density. It is shown that the loosening of a thin adhesive layer under a two-parameter criterion quasilinear with respect to the volume strain energy most accurately describes the critical state.

**Keywords:** linear parameter, energy product, volume and shape deformation energies, single-lap joint

## REFERENCES

1. *Steven R.A., Stefan H.* Strength prediction of beams with bi-material butt-joints // Eng. Fract. Mech. 2003. V. 70. № 12. P. 1491–1507. [https://doi.org/10.1016/s0013-7944\(02\)00149-2](https://doi.org/10.1016/s0013-7944(02)00149-2)
2. *Labossiere P.E.W., Dunn M.L.* Fracture initiation at three-dimensional bimaterial interface corners // J. Mech. Phys. Solids. 2001. V. 49. № 3. P. 609–634. [https://doi.org/10.1016/s0022-5096\(00\)00043-0](https://doi.org/10.1016/s0022-5096(00)00043-0)
3. *Wu Z., Tian S., Hua Y., Gu X.* On the interfacial strength of bonded scarf joints // Eng. Fract. Mech. 2014. V. 131. P. 142–149. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.07.026>
4. *Ustinov K.B.* On delamination of a stripe along the boundary between two elastic layers. Part 2. Case of shear crack // PNRPU Mechanics Bulletin. 2016. № 2. P. 131–142. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.2.09>

5. *Ustinov K.B., Massabo R., Lisovenko D.S.* Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution // *Engineering Failure Analysis*. 2020. V. 110. 104410. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2020.104410>
6. *Astafiev V.I., Radayev Y.N., Stepanova L.V.* Non-linear fracture mechanics. Samara: Samara State University publishing house, 2001. 632 p.
7. *Nakano N., Sekiguchi Y., Sawa T.* FEM stress analysis and strength prediction of scarf adhesive joints under static bending moments // *Int. J. Adhes. Adhes.* 2013. V. 44. P. 166–173. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2013.02.010>
8. *Campilho R.D.S.G., Banea M.D., Neto J.A.B.P., da Silva L.F.M.* Modelling of single-lap joints using cohesive zone models: Effect of the cohesive parameters on the output of the simulations // *The Journal of Adhesion*. 2012. V. 88(4-6). P. 513–533. <https://doi.org/10.1080/00218464.2012.660834>
9. *De Moura M.F.S.F., Goncalves J.P.M.* Cohesive zone model for high-cycle fatigue of adhesively bonded joints under mode I loading // *Int. J. Solids Struct.* 2014. V. 5. P. 1123–1131. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.12.0>
10. *Panettieri E., Fanteria D., Danzi F.* Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results // *Composite Structures*. 2016. V. 137. P. 140–147. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.11.018>
11. *Volkersen O.* Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten nietverbindungen mit konstanten laschenquerschnitten // *Luftfahrtforschung*. 1938. V. 15. P. 41–47.
12. *Goland M., Reissner E.* The stresses in cemented joints // *J. Appl. Mech.* 1944. V. 11 (1). P. 17–27. <https://doi.org/10.1115/1.4009336>
13. *Adams R.D., Peppiatt N.A.* Stress analysis of adhesive-bonded lap joints // *Journal of Strain Analysis*. 1974. V. 9. № 3. P. 185–196. <https://doi.org/10.1243/03093247V093185>
14. *da Silva L.F.M., das Neves P.J.C., Adams R.D., Wang A., Spelt J.K.* Analytical models of adhesively bonded joints – Part II: Comparative study // *Int. J. Adhes. Adhes.* 2009. V. 29 (3). P. 331–341. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2008.06.007>
15. *Carpenter W.C.* Goland and Reissner were correct // *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 1989. V. 24. № 3. P. 185–187. <https://doi.org/10.1243/03093247V243185>
16. *Glagolev V.V., Markin A.A.* Limit states of adhesive layers under combined loading // *Mechanics of Solid*. 2023. № 6. P. 39–46. <https://doi.org/10.31857/S0572329923600019>
17. *Novozhilov V.V.* On plastic cavitation // *J. Appl. Math. Mech.* 1965. V. 29(4). P. 811–819. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(65\)90090-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(65)90090-0)
18. *Prandtl L.* Spannungsverteilung in plastischen korpern // *Proc. 1st Internat. Congr. Appl. Mech.* 1924. P. 43–54.
19. *Guest J.J.* Yield surface in combined stress // *Phil. Mag. Ser. 7*. 1940. V. 30. P. 349–369.
20. *Schleicher F.* Der spannungszustand an der fließgrenze (Plastizitätsbedingung) // *ZAMM*. 1926. V. 6 (3). P. 199–216.
21. *Tolokonnikov L.A., Tolokonnikov O.L., Sultanov I.S.* Axisymmetric plastic deformations under the condition of plasticity depending on hydrostatic stress // *International applied mechanics*. 1976. V. XII. № 8. P. 43–48.
22. *Tolokonnikov O.L.* Installation for testing tubular samples of materials in a high-pressure environment // *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*. 1985. № 3. P. 185–188.
23. *Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A.* Relationship between  $J_c$  and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite // *Int. J. Fract.* 2020. V. 224. № 2. P. 277–284. <https://doi.org/10.1007/s10704-020-00464-0>

24. Santos M.A.S., Campilho R.D.S.G. Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility // Int. J. Fract. 2017. V. 207. P. 55–71. <https://doi.org/10.1007/s10704-017-0219-x>
25. Dionisio J.M.M., Ramalho L.D.C., Sanchez-Arce I.J., Campilho R.D.S.G., Belinha J. Fracture mechanics approach to stress singularity in adhesive joints // Int. J. Fract. 2021. V. 232. P. 77–91. <https://doi.org/10.1007/s10704-021-00594-z>
26. De Sousa C.C.R.G., Campilho R.D.S.G., Marques E.A.S., Costa M., da Silva L.F.M. Overview of different strength prediction techniques for single-lap bonded joints // Proc. Inst. Mech. Eng. Part L. 2017. V. 231. P. 210–223. <https://doi.org/10.1177/1464420716675746>
27. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. On the influence of the mechanical characteristics of a thin adhesion layer on the composite strength. Part 1. Elastic deformation // PNRPU Mechanics Bulletin. 2022. № 3. P. 116–124. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.3.12>
28. Bruno D., Greco F., Lonetti P. Computation of energy release rate and mode separation in delaminated composite plates by using plate and interface variables // Mech. Adv. Mater. Struct. 2005. V. 12. № 4. P. 285–304. <https://doi.org/10.1080/15376490590953563>
29. Bruno D., Greco F. Mixed-mode delamination in plates: a refined approach // Int. J. Solids Struct. 2001. V. 38. № 50–51. P. 9149–9177. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(01\)00179-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00179-2)