

УДК 531.36

ДВИЖЕНИЕ ИЗМЕНЯЕМОГО ТЕЛА В СИЛОВОМ ПОЛЕ, ЗАВИСЯЩЕМ ОТ ВРЕМЕНИ

© 2024 г. А. А. Буров^{а, *}, В. И. Никонов^{а, **}

^аФедеральный исследовательский центр “Информатика и управление”
Российской Академии Наук, Москва, Россия

*e-mail: jtm@narod.ru, **e-mail: nikon_v@list.ru

Поступила в редакцию 20.10.2023 г.

После доработки 19.12.2023 г.

Принята к публикации 28.12.2023 г.

Рассматривается задача о поступательно-вращательном движении изменяемого тела в предположении о том, что инерциальные свойства тела, а также действующие на него внешние силы и моменты сил явно зависят от времени. Указываются условия, при которых уравнения движения сводятся к классическим уравнениям, описывающим движения твердого тела в силовом поле, не зависящем от времени. Отмечаются случаи, когда уравнения движения сводятся к вполне интегрируемым. Воспроизводятся элементы дискуссии 1920–1930-х гг. об описании движения материальной точки переменной массы в зависящем от времени поле притяжения.

Ключевые слова: поступательно-вращательное движение изменяемого тела, зависящие от времени инерциальные свойства, зависящие от времени силы, замена времени, замена переменных.

DOI: 10.31857/S1026351924030092, EDN: UHUNMR

1. Постановка задачи и уравнения движения. Пусть $OX_\alpha X_\beta X_\gamma$ — абсолютная прямоугольная декартова система отсчета (АСО), $Sx_1x_2x_3$ — подвижная прямоугольная декартова система отсчета (ПСО), начало которой — точка S — совершает движение в трехмерном евклидовом пространстве. Предполагается, что оси ПСО могут быть произвольным образом ориентированы относительно осей АСО. Пусть $P_1, \dots, P_n$ — точки массами $m_1(t), \dots, m_n(t)$, в общем случае зависящими от времени. Положение этих точек задается векторами

$$\overrightarrow{OP_k} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{CP_k}. \quad (1.1)$$

Пусть

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

— ортогональная матрица, по строкам которой записаны единичные векторы $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ АСО, заданные своими проекциями на оси ПСО. Задающая ориентацию матрица S зависит от времени: $S = S(t)$. При этом кососимметричная матрица

$$\hat{\omega} = S^{-1} \frac{dS}{dt} \Leftrightarrow \frac{dS}{dt} = S \hat{\omega} \quad (1.2)$$

называется матрицей угловой скорости:

$$\hat{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

По ее компонентам определяется вектор угловой скорости ПСО относительно АСО

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T,$$

заданный в проекциях на оси ПСО.

В дальнейшем будем обозначать заглавными буквами проекции вектора на оси АСО и такими же строчными буквами — проекции вектора на оси ПСО. Тогда равенство (1.1) можно записать как

$$P_k = R + X_k = R + S \cdot x_k \quad (1.3)$$

Здесь и далее P_k — вектор $\overrightarrow{OP_k}$, заданный в проекциях на оси АСО, R — вектор $\overrightarrow{OP}$, также заданный в проекциях на оси АСО, $X_k = (X_{k\alpha}, X_{k\beta}, X_{k\gamma})^T$ и $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, x_{k3})^T$ — вектор $\overrightarrow{CP_k}$, заданный в проекциях на оси АСО и ПСО соответственно.

Дифференцируя равенство (1.3) по времени, выписываем выражение для скорости точки P_k :

$$\dot{P}_k = \dot{R} + \dot{X}_k = \dot{R} + \dot{S} \cdot x_k + S \cdot \dot{x}_k. \quad (1.4)$$

Домножая левую и правую части (1.4) слева на S^{-1} , имеем:

$$S^{-1} \dot{P}_k = S^{-1} \dot{R} + S^{-1} \dot{X}_k = S^{-1} \dot{R} + S^{-1} \dot{S} \cdot x_k + S^{-1} S \cdot \dot{x}_k.$$

Отсюда находим соотношение

$$v_k = v + \omega \cdot x_k + \dot{x}_k \equiv v + \omega \times x_k + \dot{x}_k, \quad (1.5)$$

позволяющее выразить абсолютную скорость v_k точки P_k через абсолютную скорость v точки C , через угловую скорость ω , через вектор x_k , задающий положение точки P_k относительно ПСО, и, наконец, через вектор $\dot{x}_k$, задающий скорость движения точки P_k относительно ПСО.

Будем считать, что законы движения точек относительно ПСО заданы:

$$x_k = x_k(t),$$

где $x_{1k}(t)$, $x_{2k}(t)$, $x_{3k}(t)$ — гладкие функции времени. Тогда кинетическая энергия системы в целом определяется как

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} (m_1 (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + \dots + m_n (\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n)) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_k + \dot{\mathbf{x}}_k, \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_k + \dot{\mathbf{x}}_k) \equiv \\
&\equiv \frac{1}{2} (\mathbf{A}(t) \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{B}(t) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2} (\mathbf{C}(t) \mathbf{v}, \mathbf{v}) + (\mathbf{D}(t), \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{E}(t), \mathbf{v}) + T_0(t),
\end{aligned}$$

где функция $T_0(t)$ зависит только от времени и при дальнейшем составлении уравнений движения роли не играет.

Согласно теоремам об изменении количества движения и момента количества движения уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \right) &= \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) &= \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v} + \mathbf{Q}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}).
\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ и $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ — результирующие внешняя сила и момент внешних сил соответственно. Вводя обозначения

$$\mathbf{p} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{B} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{C} \mathbf{v} + \mathbf{E}, \mathbf{M} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{A} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}^T \mathbf{v} + \mathbf{D},$$

запишем эти уравнения в явном виде¹:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{p} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (1.6)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{p} \times \mathbf{v} + \mathbf{Q}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (1.7)$$

Эти уравнения должны быть дополнены уравнениями Эйлера:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1.8)$$

описывающими изменение вектора $\overline{OC}$ в ПСО, а также уравнениями Пуассона:

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1.9)$$

представляющими собой записанное в векторном виде матричное равенство (1.2). Справедливо

¹ Здесь и далее, где это не приводит к утрате смысла, аргумент (t) при тензорных и векторных величинах опускается.

Утверждение 1. Если существует функция $f(t) > 0 \quad \forall t$, такая, что

$$\mathbf{A}(t) = f(t)\mathbf{A}_*, \quad \mathbf{B}(t) = f(t)\mathbf{B}_*, \quad \mathbf{C}(t) = f(t)\mathbf{C}_*, \quad \mathbf{D}(t) = \mathbf{D}_*, \quad \mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_*, \quad (1.10)$$

$$f(t)\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{F}_*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \quad f(t)\mathbf{Q}(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{Q}_*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (1.11)$$

где тензоры $\mathbf{A}_*$, $\mathbf{B}_*$ и $\mathbf{C}_*$, а также вектор $\mathbf{D}_*$ и $\mathbf{E}_*$ постоянны в осях ПСО, а векторы $\mathbf{F}_*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ и $\mathbf{Q}_*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ не зависят явно от времени, то заменой независимой переменной $t \rightarrow t_*$:

$$f(t) \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt_*} \quad (1.12)$$

и переменных $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{v}_* = f(t)\mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\omega}_* = f(t)\boldsymbol{\omega} \quad (1.13)$$

уравнения (1.6), (1.7), а также уравнения (1.9) и (1.8) приводимы к виду:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_*}{dt_*} &= \mathbf{p}_* \times \boldsymbol{\omega}_* + \mathbf{F}_*, \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt_*} = \mathbf{M}_* \times \boldsymbol{\omega}_* + \mathbf{p}_* \times \mathbf{v}_* + \mathbf{Q}_*, \\ \mathbf{p}_* &= \frac{\partial T_*}{\partial \mathbf{v}_*}, \quad \mathbf{M}_* = \frac{\partial T_*}{\partial \boldsymbol{\omega}_*}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$T_* = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_* \boldsymbol{\omega}_*, \boldsymbol{\omega}_*) + (\mathbf{B}_* \boldsymbol{\omega}_*, \mathbf{v}_*) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}_* \mathbf{v}_*, \mathbf{v}_*) + (\mathbf{D}_*, \boldsymbol{\omega}_*) + (\mathbf{E}_*, \mathbf{v}_*), \quad (1.15)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt_*} = \mathbf{v}_* + \mathbf{r}_* \times \boldsymbol{\omega}_*, \quad (1.16)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt_*} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}_*, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt_*} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}_*, \quad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt_*} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}_*. \quad (1.17)$$

Правые части уравнений (1.14), (1.15) не зависят явно от времени и имеют вид уравнений Кирхгофа–Клебша из динамики твердого тела в жидкости под действием не зависящих явно от времени результирующей силы и результирующего крутящего момента. Уравнения (1.17) и (1.16) отличаются от уравнений (1.9) и (1.8) лишь обозначениями.

Доказательство. Прежде всего подставим условия (1.10) в уравнения (1.14). Имеем

$$\frac{d}{dt}(f\mathbf{B}_*\boldsymbol{\omega} + f\mathbf{C}_*\mathbf{v} + \mathbf{E}_*) = (f\mathbf{B}_*\boldsymbol{\omega} + f\mathbf{C}_*\mathbf{v} + \mathbf{E}_*) \times \boldsymbol{\omega}_* + \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}).$$

Домножая левую и правую части этих уравнений на $f(t)$, выполняя замену времени (1.12) и переменных (1.13), а также используя условие (1.11), после преобразований приходим к (1.14), что и требовалось. Далее, подставляя условия (1.10) в уравнения (1.14), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f\mathbf{A}_*\boldsymbol{\omega} + f\mathbf{B}_*^T\mathbf{v} + \mathbf{D}_*) &= (f\mathbf{A}_*\boldsymbol{\omega} + f\mathbf{B}_*^T\mathbf{v} + \mathbf{D}_*) \times \boldsymbol{\omega} + \\ &+ (f\mathbf{B}_*\boldsymbol{\omega} + f\mathbf{C}_*\mathbf{v} + \mathbf{E}_*) \times \mathbf{v} + \mathbf{Q}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}). \end{aligned}$$

Вновь домножая левую и правую части этих уравнений на $f(t)$, выполняя замену времени (1.12) и переменных (1.13), а также используя условие (1.11), после преобразований приходим к (1.15), что и требовалось.

Наконец, что касается уравнений Эйлера (1.8) и Пуассона (1.9), то также домножая их левые и правые части на $f(t)$ и используя замену переменных (1.13), получаем уравнения (1.16) и (1.17), отличающиеся от уравнений Эйлера (1.8) и уравнений Пуассона (1.9) лишь обозначениями.

2. Случай потенциальных внешних сил. Предположим, что система совершает движение в потенциальном поле внешних сил с потенциалом

$$U = U(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (2.1)$$

выражающим зависимость от времени, от положения и от ориентации тела. При этом результирующая сила и результирующий момент сил, как известно, записываются как

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{Q}(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{r} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}. \quad (2.3)$$

Утверждение 2. Если в условиях утверждения 1 силы потенциальны и потенциал (2.1) имеет вид:

$$f(t)U(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = U_*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (2.4)$$

то уравнения движения сводятся к независимым от времени уравнениям типа уравнений Кирхгофа—Клебша, описывающих поступательно-вращательное движение тела в трехмерном евклидовом пространстве.

Доказательство сводится к непосредственной подстановке условия (2.4) в соотношения (2.2) и (2.3) для результирующей силы и результирующего момента сил соответственно.

Рассмотрим некоторые известные специальные случаи такого потенциала, для которых предлагаемая замена переменных и времени приводит к классическим задачам механики твердого тела.

3. Свободное движение системы. Пусть выполнено условие

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) \equiv 0, \quad \mathbf{Q}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) \equiv 0. \quad (3.1)$$

В этом случае при выполнении условий утверждения 1 возникающие динамические уравнения (1.14), (1.15) отделяются от кинематических уравнений (1.16), (1.17) и всегда обладают тремя первыми интегралами:

$$\mathcal{J}_0 = (\mathbf{p}_*, \mathbf{v}_*) + (\mathbf{M}_*, \boldsymbol{\omega}_*) - T_*, \quad \mathcal{J}_1 = (\mathbf{p}_*, \mathbf{M}_*), \quad \mathcal{J}_2 = (\mathbf{p}_*, \mathbf{p}_*),$$

причем вектор $\mathbf{p}$ остается неизменным в абсолютном пространстве.

В случае, когда условия (3.1) выполнены, четвертый, дополнительный интеграл, знание которого достаточно для интегрирования уравнений движения в квадратурах, существует в ряде случаев при выполнении дополнительных условий, таких как условия Клебша, Кирхгофа, Стеклова, Ляпунова, Чаплыгина и др. (см., например, [1]).

Замечание 1. Изучаемые уравнения (1.6)–(1.9) при выполнении условий существования потенциала (2.1) посредством преобразования Лежандра по скоростям и угловым скоростям в общем случае приводятся к виду:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{p} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \\ \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \mathbf{p} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}\end{aligned}$$

с функцией Гамильтона

$$f(t)H(t, \mathbf{M}, \mathbf{p}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = H_*(\mathbf{M}, \mathbf{p}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}).$$

Для таких систем замена независимой переменной $t \mapsto t_*$ вида (1.12) выглядит вполне естественной и очевидной.

4. О движении точки переменной массы в ньютоновском поле сил. Обратим внимание на то обстоятельство, что задача о движениях материальной точки переменной массы в центральном ньютоновском поле сил была объектом активного изучения в работах Т. Леви-Чивита, Г.Н. Дубошина и В.В. Степанова [2–10]. В частности, в этой задаче имеется случай, когда уравнения движения сводятся к классическим уравнениям движения в задаче Кеплера.

4.1. Сведение к задаче Кеплера. На самом деле, пусть P — материальная точка, масса которой зависит от времени: $m = m(t)$. Предполагается, что движение совершается в центральном поле ньютоновского притяжения с центром в точке O , интенсивность которого также зависит от времени и определяется множителем $f = f(t)$. Пусть $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ — радиус-вектор точки P , $r = |\overrightarrow{OP}|$ — расстояние от точки P до притягивающего центра. Здесь и далее все векторы заданы своими проекциями на оси абсолютной системы отсчета. Для описания движения естественно воспользоваться подходом И.В. Мещерского, предложенным для описания движения систем переменной массы [11]. В рамках этого подхода уравнения движения принимают вид:

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = -fm \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.1)$$

Введение нового времени

$$t = t(t_*) : \frac{d}{dt_*} = m(t) \frac{d}{dt} \quad (4.2)$$

позволяет переписать эти уравнения в виде:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt_*^2} = -f_* \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad f_*(t_*) \equiv [f(t) \cdot m^2(t)]_{t=t(t_*)}. \quad (4.3)$$

Если величина f_* постоянна, то (4.3) — не что иное, как классические уравнения Кеплера, возникающие в случае, когда и масса точки, и интенсивность поля притяжения постоянны.

Замечание 2. Величина $f(t)$ представляет собой произведение гравитационной постоянной G и массы притягивающего тела: $f(t) = GM(t)$. В то время как трудно представить себе гравитационную постоянную, меняющуюся со временем, масса притягивающего тела $M(t)$ может со временем меняться за счет поглощения и испускания материи.

Замечание 3. Уравнения (4.3) относятся к классу знаменитых уравнений Гильдена–Мещерского [12, 13]. В многочисленных работах, восходящих к основополагающим публикациям [4, 13, 14], были развиты подходы к их интегрированию (см. обзоры в [15, 16]).

4.2. Дискуссии. В свое время уравнения (4.1) и (4.3) были предметом оживленной дискуссии. Сравнивая такие уравнения, проф. Г.Н. Дубошин в своей работе [10], в частности, пишет: *“В общем случае, когда масса m есть функция времени (например, рассматриваемая нами задача), можно исходить, как делают некоторые авторы, из другого, более общего закона и писать вместо формулы (4)² следующую³*

$$\frac{d(mv)}{dt} = F, \quad (5)$$

выражающую, что “изменение количества движения = силе”.

Так как формулы (4) и (5) обе представляют собой принятые определения, то они обе одинаково аксиоматичны и, следовательно, нет никаких оснований предпочесть одну другой.

Следуя примеру большинства исследователей, я также выбрал из этих двух аксиом — первую, как более простую и позволяющую вместе с тем вести исследование в рамках классической механики”.

По мнению авторов, предложенная замена независимой переменной (4.2) указывает на то, что в противопоставлении двух типов аксиоматик, выделенных проф. Г.Н. Дубошиным, нет особой необходимости.

Представляется поучительным привести здесь продолжение той же цитаты из публикации [10]. После нее проф. Г.Н. Дубошин пишет: *“Однако необходимо отметить, что ЛЕВИ-ЧИВИТА (T. Levi-Civita) пытался⁴ доказать формулу (5), рассматривая изменение массы тела m , как налипание на него со всех сторон малых материальных частиц космической пыли в случае увеличения массы, и как выбрасывание частиц (émission) в случае ее уменьшения.*

² Аналог уравнений (4.3), примечание авторов.

³ Аналог уравнений (4.1), примечание авторов.

⁴ Вероятно, имеются в виду публикации [2, 3], присутствующие в списке литературы работы.

Но гипотезы, положенные Леви-Чивита в основу этого вывода, вызывают ряд недоумений и возражений, а потому формула (5) не может считаться доказанной и остается по-прежнему аксиомой⁵. Остается лишь сожалеть о том, что детали упоминаемого обсуждения остались за рамками цитируемого текста. Ведь обсуждаемые уравнения весьма близки уравнениям И.В. Мещерского для систем переменной массы, изложенные, в частности, в его цитируемой, но не обсуждаемой работе [11].

Замечание 4. В работе фактически не обсуждаются физически мотивированные источники изменения массы и формы. Среди них могут быть, например, как испарение и сублимация, так и налипание пыли (см., например, [17]). Общие подходы к исследованию таких систем предложены в работе [18] (см. также [19]).

5. Выводы. Среди систем с изменением распределения масс надо прежде всего выделить так называемые подобно-деформируемые тела, исследование движения которых восходит к публикации Д.Н. Зейлигера [20]. Эти исследования, продолженные Н.Г. Четаевым [21] (см. также [22]), получили развитие в ряде работ, посвященных решению задач теории групп, дифференциальной геометрии и математической физики [23–26]. Примеры использования аффинно-деформируемых тел и особенности их динамики в задачах орбитальной динамики обсуждаются в работе [27].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А.В. Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.
2. Levi-Civita T. Sul moto di un corpo di massa variabile // Rendiconti delle Sedute della Reale Accademia dei Lincei. 1928. V. 8. P. 329–333.
3. Levi-Civita T. Ancora sul moto di un corpo di massa variabile // Rendiconti delle Sedute della Reale Accademia dei Lincei. 1930. V. 11. P. 626–632.
4. Doubochine G. Mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force qui dépend du temps // Русский астрономический журнал. 1925. Т. 2. № 4. С. 5–11.
5. Doubochine G. Mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force qui dépend du temps. II // Русский астрономический журнал. 1927. Т. 4. № 2. С. 123–141.
6. Дубошин Г.Н. Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени. II // Русский астрономический журнал. 1927. Т. 4. № 2. С. 141–142.
7. Дубошин Г.Н. Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени. III. Исследование одного частного случая // Русский астрономический журнал. 1928. Т. 5. № 2–3. С. 138–151.

⁵ Подстрочник под цитатой: “Работы Леви-Чивиты по этому вопросу были подвергнуты критическому обсуждению на одном из заседаний отдела Теоретической астрофизики при Государственном Астрофизическом институте, где членами Отдела и были сделаны упомянутые возражения. 27 мая 1930 г. на научном собрании института заведующий отделом Теоретической астрофизики проф. В.В. Степанов изложил эти возражения, дополненные и развитые более детально им лично”.

8. *Doubochine G.* Mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force qui dépend du temps. IV. Une méthode nouvelle pour la resolution du problème // Русский астрономический журнал. 1929. Т. 6. № 2. С. 162–179.
9. *Stepanoff W.* Sur la forme de trajectoires d'un point matériel dans le cas de l'attraction Newtonienne d'une masse variable // Русский астрономический журнал. 1930. Т. 7. № 2. С. 73–80.
10. *Doubochine G.* Sur la forme de trajectoires dans le problème des deux corps de masse variables. // Астрономический журнал. 1930. Т. 7. № 3–4. С. 153–172.
11. *Мещерский И.* Динамика точки переменной массы. СПб.: Тип. Имп. АН, 1897. 160 с.
12. *Gyldén H.* Die Bahnbewegungen in einem Systeme von zwei Körpern in dem Falle, dass die Massen Veränderungen unterworfen sind // Astronomische Nachrichten. 1884. V. 109. № 1–2. P. 1–6.
<https://doi.org/10.1002/asna.18841090102>
13. *Mestschersky J.* Ein Specialfall des Gyldén'schen Problems. (A. N.2593) // Astronomische Nachrichten. 1893. V. 132. № 9. P. 3153 (129–130).
14. *Mestschersky J.* Über die Integration der Bewegungsgleichungen im Probleme zweier Körper von veränderlicher Masse // Astronomische Nachrichten. 1902. V. 159. № 15. P. 229–242.
15. *Беркович Л.М.* Задача Гильдена–Мещерского и законы изменения массы // Докл. АН СССР. 1980. Т. 250. № 5. С. 1088 – 1091.
16. *Беков А.А.* Динамика двойных нестационарных гравитирующих систем. Алматы: Гылым, 2013. 170 с.
17. *Ong J.J., O'Reilly O.M.* On the equations of motion for rigid bodies with surface growth // Int. J. Eng. Science. 2004. V. 42. № 19-20. P. 2159–2174.
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2004.07.010>
18. *Irschik H., Humer A.* A rational treatment of the relations of balance for mechanical systems with a time-variable mass and other non-classical supplies // Dynamics of Mechanical Systems with Variable Mass. International Centre for Mechanical Sciences Courses and Lectures. 2014. V. 557. P. 1–50.
https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1809-2_1
19. *Cveticanin L.* Dynamics of machines with variable mass. 1st edition. London: Routledge, 1998. 300 p.
<https://doi.org/10.1201/9780203759066>
20. *Зейлигер Д.Н.* Теория движения подобно-изменяемого тела. Казань: тип. Имп. Казан. ун-та. 1892. 105 с.
21. *Четаев Н.Г.* Об уравнениях движения подобно-изменяемого тела // Учен. зап. Казан. ун-та. 1954. Т. 114. № 8. С. 5–7.
22. *Четаев Н.Г.* Теоретическая механика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1987. 368 с.
23. *Ślawianowski J.J.* The mechanics of the homogeneously-deformable body. Dynamical models with high symmetries // ZAMM. 1982. V. 62. № 6. P. 229–240.
<https://doi.org/10.1002/zamm.19820620604>
24. *Ślawianowski J.J.* Affinely rigid body and Hamiltonian systems on $GL(n, \mathbb{R})$ // Rep. on Math. Phys. 1988. V. 26. № 1. P. 73 – 119.
[https://doi.org/10.1016/0034-4877\(88\)90006-7](https://doi.org/10.1016/0034-4877(88)90006-7)
25. *Ślawianowski J.J., Kovalchuk V., Golubowska B. et al.* Mechanics of affine bodies. Towards affine dynamical symmetry // J. Math. Anal. Appl. 2017. V. 446. № 1. P. 493–520.
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.08.042>

26. *Burov A. A., Chevallier D. P.* Dynamics of affinely deformable bodies from the standpoint of theoretical mechanics and differential geometry // Reports on Math. Phys. 2008. V. 62. № 3. P. 283–321.
[https://doi.org/10.1016/S0034-4877\(09\)00003-2](https://doi.org/10.1016/S0034-4877(09)00003-2)
27. *Burov A., Guerman A., Kosenko I.* Satellite with periodical mass redistribution: relative equilibria and their stability // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2019. V. 131. P. 1–12.
<https://doi.org/10.1007/s10569-018-9874-0>

MOTION OF A VARIABLE BODY IN A TIME-DEPENDENT FORCE FIELD

A. A. Burov^{a, *}, V. I. Nikonov^{a, **}

^a *Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^{*}*e-mail: jtm@narod.ru*, ^{**}*e-mail: nikon_v@list.ru*

The problem of translational-rotational motion of a variable body is considered under the assumption that the inertial properties of the body, as well as the external forces acting on it and the moments of forces clearly depend on time. The conditions under which the equations of motion are reduced to classical equations describing the motion of a solid body in a force field independent of time are indicated. There are cases when the equations of motion are reduced to completely integrable ones. The elements of the discussion of the 1920–1930 on the description of the motion of a material point of variable mass in a time-dependent field of attraction are reproduced.

Keywords: translational-rotational motion of a variable body, time-dependent inertial properties, time-dependent forces, time substitution, variable substitution

REFERENCES

1. *Borisov, A.V. and Mamaev, I.S.* Rigid Body Dynamics. Hamiltonian Methods, Integrability, Chaos. Institute of computer Science, Moscow, 2005. 576 p.
2. *Levi-Civita T.* Sul mote di un corpo di massa variabile // Rendiconti delle Sedute della Reale Accademia dei Lincei. 1928. V. 8. P. 329–333.
3. *Levi-Civita T.* Ancora sul moto di un corpo di massa variabile // Rendiconti delle Sedute della Reale Accademia dei Lincei. 1930. V. 11. P. 626 – 632.
4. *Dobochine G.* Mouvement d’un point matériel sous l’action d’une force qui dépend du temps // Russian Astronomical Journal. 1925. V. 2. № 4. P. 5–11.
5. *Dobochine G.* Mouvement d’un point matériel sous l’action d’une force qui dépend du temps. II // Russian Astronomical Journal. 1927. V. 4. № 2. P. 123–141.
6. *Dobochine G.N.* On the motion of a material point under the action of a time-dependent force. II // Russian Astronomical Journal. 1927. V. 4. № 2. P. 141–142.

7. *Doubochine G.N.* On the motion of a material point under the action of a time-dependent force. III. Investigation of a particular case // Russian Astronomical Journal. 1928. V. 5. № 2–3. P. 138–151.
8. *Doubochine G.* Mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force qui dépend du temps. IV. Une méthode nouvelle pour la resolution du problème // Russian Astronomical Journal. 1929. V. 6. № 2. P. 162–179.
9. *Stepanoff W.* Sur la forme de trajectoires d'un point matériel dans le cas de l'attraction Newtonienne d'une masse variable // Russian Astronomical Journal. 1930. V. 7. № 2. P. 73–80.
10. *Doubochine G.* Sur la forme de trajectoires dans le problème des deux corps de masse variables. // Astronomical Journal. 1930. V. 7. № 3–4. P. 153–172.
11. *Mestschersky I.* The dynamics of a point of variable mass. St. Petersburg: Type. Imp. AN. 1897. 160 p.
12. *Gyldén H.* Die Bahnbewegungen in einem Systeme von zwei Körpern in dem Falle, dass die Massen Veränderungen unterworfen sind // Astronomische Nachrichten. 1884. V. 109. № 1. P. 2593–2594 (1–4).
13. *Mestschersky J.* Ein Specialfall des Gyldén'schen Problems. (A. N.2593) // Astronomische Nachrichten. 1893. V. 132. № 9. P. 3153 (129–130).
14. *Mestschersky J.* Über die Integration der Bewegungsgleichungen im Probleme zweier Körper von veränderlicher Masse // Astronomische Nachrichten. 1902. V. 159. № 15. P. 3807 (231–242).
15. *Berkovich L.M.* The Gilden–Meshchersky problem and the laws of mass change // Dokl. USSR Academy of Sciences. 1980. V. 250. № 5. C. 1088 – 1091.
16. *Bekov A.A.* Dynamics of double nonstationary gravitational systems. Almaty: Gylm. 2013. 170 c.
17. *Ong J.J., O'Reilly O.M.* On the equations of motion for rigid bodies with surface growth // Int. J. Eng. Science. 2004. V. 42. № 19–20. P. 2159–2174.
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2004.07.010>.
18. *Irschik H., Humer A.* A rational treatment of the relations of balance for mechanical systems with a time-variable mass and other non-classical supplies // Dynamics of Mechanical Systems with Variable Mass. International Centre for Mechanical Sciences Courses and Lectures. V. 557. 2014. P. 1–50.
https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1809-2_1.
19. *Cveticanin L.* Dynamics of Machines with Variable Mass. 1st edition. London: Routledge. 1998. 300 p.
<https://doi.org/10.1201/9780203759066>
20. *Zeiliger D.N.* Theory of motion of a similarly changeable body. Kazan: type. Kazan Imperial University. 1892. 105 p.
21. *Chetaev N.G.* On the equations of motion of a similarly variable body // Scientific notes of the Kazan University. 1954. Vol. 114. P. 5–7.
22. *Chetaev N.G.* Theoretical mechanics. M.: Nauka. 1987. 368 p.
23. *Stawianowski J.J.* The mechanics of the homogeneously-deformable body. Dynamical models with high symmetries // ZAMM. 1982. V. 62. № 6. P. 229–240.
<https://doi.org/10.1002/zamm.19820620604>.
24. *Stawianowski J.J.* Affinely rigid body and Hamiltonian systems on $GL(n, \mathbb{R})$ // Reports on Mathematical Physics. 1988. V. 26. № 1. P. 73–119.
[https://doi.org/10.1016/0034-4877\(88\)90006-7](https://doi.org/10.1016/0034-4877(88)90006-7).

-
25. *Sławianowski J.J., Kovalchuk V., Golubowska B. et al.* Mechanics of affine bodies. Towards affine dynamical symmetry // J. Math. Anal. Appl. 2017. V. 446. № 1.
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.08.042>.
 26. *Burov A.A., Chevallier D.P.* Dynamics of affinely deformable bodies from the standpoint of theoretical mechanics and differential geometry // Reports on Math. Phys. 2008. V. 62. № 3. P. 283–321.
[https://doi.org/10.1016/S0034-4877\(09\)00003-2](https://doi.org/10.1016/S0034-4877(09)00003-2)
 27. *Burov A., Guerman A., Kosenko I.* Satellite with periodical mass redistribution: relative equilibria and their stability // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2019. V. 131. P. 1 (1–12).
<https://doi.org/10.1007/s10569-018-9874-0>