

УДК 539.3

## КЛЕТКИ И ФИГУРЫ НАЯ ДЛЯ АТЕРМИЧЕСКИХ ГЕМИТРОПНЫХ, ИЗОТРОПНЫХ И УЛЬТРАИЗОТРОПНЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

© 2024 г. Е. Ю. Крылова<sup>а, \*</sup>, Е. В. Мурашкин<sup>б, \*\*</sup>, Ю. Н. Радаев<sup>б, \*\*\*</sup>

<sup>а</sup> Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,  
Саратов, Россия

<sup>б</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\* e-mail: kat.krylova@bk.ru, \*\* e-mail: murashkin@ipmnet.ru,

\*\*\* e-mail: radayev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 08.05.2024 г.

После доработки 13.05.2024 г.

Принята к публикации 14.05.2024 г.

В работе рассматривается метод построения фигур Ная для микрополярных упругих тел. Метод представления тензоров четвертого и третьего рангов посредством блоков двумерных матриц и связей между их элементами широко известен в кристаллографии. Указанный подход позволяет простым образом выяснить количество независимых определяющих констант для микрополярных упругих тел и гарантировать отсутствие связей между ними. В рамках настоящего исследования построены двумерные фигуры Ная для ультраизотропного микрополярного упругого тела, исходя из соответствующих фигур для гемитропного и изотропного микрополярных упругих тел. Показано, что определяющие тензоры данного материала содержат лишь 4 независимые определяющие постоянные: модуль сдвига, коэффициент Пуассона, характерная нано/микродлина и еще одна, не имеющая физической размерности, постоянная.

*Ключевые слова:* ультраизотропный микрополярный континуум, потенциал напряжений, определяющий тензор, фигура Ная, клетка Ная, нано/микродлина, нано/микромасштаб.

DOI: 10.31857/S1026351924030124, EDN: UGVSUZ

**1. Введение.** Современный этап развития биоинженерии, трансплантологии, аддитивного производства биоматериалов ставит перед наукой, в частности перед механикой континуума, проблему построения адекватных математических моделей деформирования материалов со сложной внутренней микроструктурой — зернистых, волокнистых, гранулированных, дипольных, полимерных, сотовых и т.д.

Одной из простейших и исторически первой математической моделью, в которой оказывается возможным введение нано/микромасштабной

длины, является модель микрополярного упругого континуума, предложенная в работах Коссера [1]. В микрополярной теории упругости трансляционные перемещения каждого элемента континуума сопровождаются микроповоротами (спинорными перемещениями). Спинорные и трансляционные перемещения считаются независимыми [2–4].

Современные исследования [5] ясно указывают на то, что важной особенностью биоматериалов является чувствительность их определяющих постоянных и тензоров к преобразованиям, изменяющим ориентацию пространства, — инверсиям и зеркальным отражениям. Как следствие, возникает необходимость классификации микрополярных упругих моделей с точки зрения изменения ориентации пространства.

Удобной, легко воспринимаемой формой представления тензоров четвертого и третьего рангов посредством блоков двумерных квадратных и прямоугольных матриц и связей между элементами указанных матриц являются обобщенные фигуры Ная [6, с. 113–115]. Метод построения фигур Ная описан в его классических работах по кристаллографии [6–10]. В цикле статей авторов [11–13] в матричной форме были построены определяющие уравнения для общего анизотропного, гемитропного и изотропного микрополярного упругого континуума. Показано, что определяющие тензоры для анизотропного случая содержат 171 независимую определяющую константу, гемитропного — 9, изотропного — 6. В представляемой работе подход, предложенный Наем, используется для получения определяющих уравнений ультраизотропного микрополярного упругого тела, т.е. такого тела, компоненты определяющих тензоров которого инвариантны относительно любых мыслимых преобразований пространства. Показано, что определяющие тензоры данного материала содержат лишь 4 независимые определяющие постоянные: модуль сдвига, коэффициент Пуассона, характерная нано/микродлина и еще одна, не имеющая физической размерности, постоянная.

**2. Тензоры/псевдотензоры с постоянными компонентами.** Ковариантно постоянные тензорные/псевдотензорные поля играют важную роль как при выводе определяющих уравнений, так и при преобразовании дифференциальных уравнений механики сплошных сред [14–18]. Важным типом ковариантно постоянных тензоров/псевдотензоров являются тензоры/псевдотензоры с постоянными компонентами [19, с. 164].

Тензором/псевдотензором с постоянными компонентами [19, с. 164] называется тензор/псевдотензор, сохраняющий неизменными все свои компоненты при любых линейных преобразованиях координатного репера: самые важные из них — повороты, преобразования гомотетии, центральная инверсия, зеркальные отражения.

В монографии [19, с. 164–176] изложен общий алгоритм построения тензоров/псевдотензоров с постоянными компонентами для целых положительных/отрицательных алгебраических весов. Например, общий вид псевдотензора  $C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s}$  с постоянными компонентами целого отрицательного веса представляется формулой:

$$C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s} = \sum_{P=1}^r \lambda_P \delta_{k_1}^{h_1} \delta_{k_2}^{h_2} \dots \delta_{k_s}^{h_s} \underbrace{m_{k_{s+1} \dots k_{s+N}}^{[-1]} \dots m_{k_{r-N+1} \dots k_r}^{[-1]}}_{|g|} P, \quad (2.1)$$

где  $r$  — число ковариантных индексов,  $s$  — число контравариантных индексов,  $N$  — размерность пространства,  $g$  — вес (целое отрицательное число),  $\lambda_P$  ( $P=1, 2, \dots, r!$ ) — произвольные постоянные (абсолютные инварианты),  $P$  — перестановка в ряде индексов

$$k_1, \dots, k_s, \dots, k_{s+N}, \dots, k_{r-N+1}, \dots, k_r.$$

В формуле (2.1) по ковариантным индексам, заключенным в фигурные скобки, производятся всевозможные перестановки. Число ковариантных, контравариантных индексов и вес псевдотензора должны удовлетворять ограничению

$$r = s + N|g|, \quad (2.2)$$

откуда следует взаимное ограничение

$$r \geq s. \quad (2.3)$$

Если условие (2.2) не выполняется, то псевдотензор  $C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s}$  с постоянными компонентами сводится к нулевому.

Отметим, что псевдотензорное поле  $C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s}$  с постоянными компонентами является ковариантно постоянным и удовлетворяет псевдотензорному уравнению

$$\nabla_s C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s} = 0, \quad (2.4)$$

при условии, что

$$\nabla_s \lambda_P = 0. \quad (2.5)$$

Обратим внимание, что псевдотензоры вида (2.1) не составляют полного набора ковариантно постоянных абсолютных тензоров. Примеры ковариантно постоянных тензоров и псевдотензоров подробно обсуждались в работах [17–21]. Среди них фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр  $e$  и его алгебраические степени, псевдотензорные единицы  $1^{[g]}$ , обобщенные  $\delta$ -символы,  $\epsilon$ -символы,  $e$ -тензоры, метрические тензоры  $g^{kh}$ ,  $g_{hk}$ , которые часто используются в микрополярных теориях механики сплошных сред [22–26].

Рассмотрим важный для дальнейшего изложения пример. Абсолютный тензор четвертого ранга  $C_{sm}^{il}$  с постоянными компонентами согласно (2.1) можно представить в виде:

$$C_{sm}^{il} = a \delta_s^i \delta_m^l + c \delta_s^l \delta_m^i, \quad (2.6)$$

где  $a = C_{12}^{12}$  и  $c = C_{21}^{12}$  — абсолютные инварианты (абсолютные скаляры).

Уравнение (2.6), справедливое в любой системе координат, в декартовых координатах можно представить следующим образом:

$$C_{ilsm} = a \delta_{is} \delta_{lm} + c \delta_{ls} \delta_{im}. \quad (2.7)$$

Рассмотрим ограничение (2.2). Тогда для тензора четвертого ранга, заданного в  $N$ -мерном пространстве, можно получить систему уравнений для определения числа ковариантных  $r$  и контравариантных  $s$  индексов в виде:

$$\begin{aligned} r - s &= N|g|, \\ r + s &= 4. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Выражая  $r$  и  $s$ , получим:

$$\begin{aligned} 0 \leq 2r &= 4 + N|g|, \\ 0 \leq 2s &= 4 - N|g|. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Решениями системы (2.9) должны быть целые неотрицательные числа, откуда немедленно заключаем, что произведение  $N|g|$  должно быть четным неотрицательным целым числом, удовлетворяющим неравенству

$$N|g| \leq 4. \quad (2.10)$$

Анализируя неравенство (2.10), заинтересованный читатель может заключить, что в трехмерном пространстве и в пространствах с размерностью выше пятой невозможно построить псевдотензор четвертого ранга с постоянными компонентами ненулевого алгебраического веса. Однако в пространствах размерности 2 и 4 такая возможность существует. Все сказанное имеет место только когда  $g = \text{Ent}(g)$ .<sup>1</sup>

**3. Анизотропное микрополярное упругое тело.** В дальнейшем все рассуждения будем проводить в декартовой прямоугольной системе координат. Рассмотрим микрополярный упругий потенциал напряжений  $\mathcal{U}$  в расчете на единицу инвариантного элемента объема  $dt$  [27–32], с естественными асимметричными тензорными аргументами (не разделяя пока на симметричную и антисимметричную конститuenty):

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{ij}, \kappa_{ij}), \quad (3.1)$$

где  $\epsilon_{ij}$  — асимметричный тензор деформации;  $\kappa_{ij}$  — тензор изгиба–кручения.

В случае линейного анизотропного микрополярного упругого тела квадратичная энергетическая форма упругого потенциала напряжений  $\mathcal{U}$  записывается в виде [33–35]:

$$2\mathcal{U} = H_{1\,islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + H_{2\,islm} \kappa_{is} \kappa_{lm} + H_{3\,islm} \epsilon_{is} \kappa_{lm}, \quad (3.2)$$

где  $H_{c\,islm}$  ( $c=1, 2, 3$ ) — определяющие тензоры анизотропного микрополярного упругого тела. Для определяющих тензоров выполняются следующие условия:

1.  $H_{1\,islm}$  и  $H_{2\,islm}$  — симметричны при перестановке пар индексов ( $is \rightleftharpoons lm$ ).
2.  $H_{3\,islm}$  — не симметричен при перестановке пар индексов ( $is \not\rightleftharpoons lm$ ).

Выделим симметричные и антисимметричные составляющие асимметричных тензоров деформаций и изгиба–кручения в виде суммы, имеем:

<sup>1</sup> Вопрос с целочисленностью алгебраического веса  $g$  в алгебре псевдотензоров к настоящему времени окончательно не решен.

$$\epsilon_{is} = \epsilon_{(is)} + \epsilon_{[is]}, \quad \kappa_{is} = \kappa_{(is)} + \kappa_{[is]}. \quad (3.3)$$

Определим векторы, ассоциированные с антисимметричными составляющими асимметричных тензоров деформаций и изгиба–кручения согласно

$$\varphi_k = -\frac{1}{2}e_{kis}\epsilon_{[is]}, \quad \kappa_k = \frac{1}{2}e_{kis}\kappa_{[is]}. \quad (3.4)$$

Формулы, обратные к (1.4), записываются в виде:

$$\epsilon_{[is]} = -e_{isk}\varphi_k, \quad \kappa_{[is]} = e_{kis}\kappa_k. \quad (3.5)$$

Определяющие тензоры четвертого ранга в представлении (3.2) запишем в виде:

$$H_{islm} = H_{(is)(lm)} + H_{[is](lm)} + H_{(is)[lm]} + H_{[is][lm]}. \quad (3.6)$$

Подстановка соотношений (3.3) с учетом (3.6) в энергетическую форму упругого потенциала (3.2) приводит к формуле:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{U} = & \left( H_{(is)(lm)} + H_{[is](lm)} + H_{(is)[lm]} + H_{[is][lm]} \right) (\epsilon_{(is)} + \epsilon_{[is]}) (\epsilon_{(lm)} + \epsilon_{[lm]}) + \\ & + \left( H_{(is)(lm)} + H_{[is](lm)} + H_{(is)[lm]} + H_{[is][lm]} \right) (\kappa_{(is)} + \kappa_{[is]}) (\kappa_{(lm)} + \kappa_{[lm]}) + \\ & + \left( H_{(is)(lm)} + H_{[is](lm)} + H_{(is)[lm]} + H_{[is][lm]} \right) (\epsilon_{(is)} + \epsilon_{[is]}) (\kappa_{(lm)} + \kappa_{[lm]}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые в (3.7), имеем десяти-членную форму:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{U} = & H_{(is)(lm)}\epsilon_{(is)}\epsilon_{(lm)} + 2H_{(is)[lm]}\epsilon_{(is)}\epsilon_{[lm]} + H_{[is][lm]}\epsilon_{[is]}\epsilon_{[lm]} + \\ & + H_{(is)(lm)}\kappa_{(is)}\kappa_{(lm)} + 2H_{(is)[lm]}\kappa_{(is)}\kappa_{[lm]} + H_{[is][lm]}\kappa_{[is]}\kappa_{[lm]} + \\ & + H_{(is)(lm)}\epsilon_{(is)}\kappa_{(lm)} + H_{[is](lm)}\epsilon_{[is]}\kappa_{(lm)} + H_{(is)[lm]}\epsilon_{(is)}\kappa_{[lm]} + H_{[is][lm]}\epsilon_{[is]}\epsilon_{[is]}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Откуда, учитывая (1.5) и принимая во внимание

$$H_{[is][lm]}e_{lmk}\epsilon_{(is)}\varphi_k = H_{[is](lm)}e_{isk}\epsilon_{(lm)}\varphi_k \quad (c = 1, 2), \quad (3.9)$$

после ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{U} = & H_{(is)(lm)}\epsilon_{(is)}\epsilon_{(lm)} + H_{(is)(lm)}\kappa_{(is)}\kappa_{(lm)} + H_{(is)(lm)}\epsilon_{(is)}\kappa_{(lm)} + \\ & + H_{[is][lm]}e_{isk}e_{lmj}\varphi_k\varphi_j + H_{[is][lm]}e_{isj}e_{lmk}\kappa_j\kappa_k - H_{[is][lm]}e_{isk}e_{lmj}\varphi_k\kappa_j - \\ & - 2H_{[is](lm)}e_{lmk}\epsilon_{(is)}\varphi_k + 2H_{(is)[lm]}e_{lmk}\kappa_{(is)}\kappa_k - H_{[is](lm)}e_{isk}\kappa_{(lm)}\varphi_k + \\ & + H_{(is)[lm]}e_{lmj}\epsilon_{(is)}\kappa_j. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для упрощения дальнейшего изложения материала настоящей статьи введем в рассмотрение следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 E_{I(is)(lm)} &= H_{I(is)(lm)}, & E_{II(is)(lm)} &= H_{II(is)(lm)}, & E_{III(is)(lm)} &= H_{III(is)(lm)}, \\
 E_{IV(kj)} &= H_{I[is][lm]} e_{isk} e_{lmj}, & E_{V(kj)} &= H_{II[is][lm]} e_{isk} e_{lmj}, \\
 E_{VI^{kj}} &= -H_{III[is][lm]} e_{isj} e_{lmk}, & E_{VII(is)k} &= -2H_{I(is)[lm]} e_{lmk}, \\
 E_{VIII(is)k} &= 2H_{II(is)[lm]} e_{lmk}, & E_{IX^k(lm)} &= -H_{III[is](lm)} e_{isk}, \\
 E_{X(is)j} &= H_{III(is)[lm]} e_{lmj}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

В новых обозначениях (3.11) энергетическая форма упругого потенциала (3.10) примет вид:

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{U} &= E_{I(is)(lm)} \epsilon_{(is)} \epsilon_{(lm)} + E_{II(is)(lm)} \kappa_{(is)} \kappa_{(lm)} + E_{III(is)(lm)} \epsilon_{(is)} \kappa_{(lm)} + \\
 &+ E_{IV(is)} \phi_i \phi_s + E_{V(is)} \kappa_i \kappa_s + E_{VI^{is}} \phi_i \kappa_s + E_{VII(is)k} \epsilon_{(is)} \phi_k + \\
 &+ E_{VIII(is)k} \kappa_{(is)} \kappa_k + E_{IX^k(lm)} \kappa_{(lm)} \phi_k + E_{X(is)j} \epsilon_{(is)} \kappa_j.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

**4. Гемитропное микрополярное упругое тело.** Микрополярное тело называется гемитропным, если компоненты трех его определяющих тензоров четвертого ранга не изменяются при поворотах координатного репера, но, вообще говоря, изменяются при зеркальных отражениях и инверсиях трехмерного Евклидова пространства, т.е. полуизотропны.

В этом случае определяющие тензоры гемитропного микрополярного упругого тела могут быть представлены в виде [36, с. 70]:

$$H_{\epsilon islm} = a \delta_{is} \delta_{lm} + b \delta_{sm} \delta_{il} + c \delta_{im} \delta_{ls} \tag{4.1}$$

или

$$H_{\epsilon islm} = a \delta_{is} \delta_{lm} + \frac{1}{2}(b - c)(\delta_{il} \delta_{sm} - \delta_{im} \delta_{sl}) + \frac{1}{2}(b + c)(\delta_{il} \delta_{sm} + \delta_{im} \delta_{sl}), \tag{4.2}$$

где  $a, b, c$  ( $c = 1, 2, 3$ ) — определяющие постоянные.

С учетом представлений (4.2) соотношения (3.11) запишутся в форме:

$$\begin{aligned}
 E_{I(is)(lm)} &= a \delta_{is} \delta_{lm} + \frac{1}{2}(b + c)(\delta_{il} \delta_{sm} + \delta_{im} \delta_{sl}), \\
 E_{II(is)(lm)} &= a \delta_{is} \delta_{lm} + \frac{1}{2}(b + c)(\delta_{il} \delta_{sm} + \delta_{im} \delta_{sl}), \\
 E_{III(is)(lm)} &= a \delta_{is} \delta_{lm} + \frac{1}{2}(b + c)(\delta_{il} \delta_{sm} + \delta_{im} \delta_{sl}), \\
 E_{IV^{(kj)}} &= (b - c) \delta_{kj}, & E_{V^{(kj)}} &= (b - c) \delta_{kj}, \\
 E_{VI^{kj}} &= -(b - c) \delta_{kj}, & E_{VII(is)k} &= E_{VIII(is)k} = E_{IX^k(lm)} = E_{X(is)j} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

**5. Изотропное микрополярное упругое тело.** Микрополярное тело называется изотропным, если компоненты его определяющих тензоров не изменяются не только при поворотах координатного репера, но и при зеркальных отражениях и инверсиях трехмерного Евклидова пространства. Последнее означает, что

$$\begin{aligned} H_{1 islm} &= a\delta_{is}\delta_{lm} + b\delta_{sm}\delta_{il} + c\delta_{im}\delta_{ls}, \\ H_{2 islm} &= a\delta_{is}\delta_{lm} + b\delta_{sm}\delta_{il} + c\delta_{im}\delta_{ls}, \\ H_{3 islm} &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Тогда для определяющих тензоров (3.11) получим:

$$\begin{aligned} E_{I(is)(lm)} &= a\delta_{is}\delta_{lm} + \frac{1}{2}(b+c)(\delta_{il}\delta_{sm} + \delta_{im}\delta_{sl}), \\ E_{II(is)(lm)} &= a\delta_{is}\delta_{lm} + \frac{1}{2}(b+c)(\delta_{il}\delta_{sm} + \delta_{im}\delta_{sl}), \\ E_{IV(kj)} &= (b-c)\delta_{kj}, \quad E_{V(kj)} = (b-c)\delta_{kj}, \\ E_{III(is)(lm)} &= E_{VI kj} = E_{VII(is)k} = E_{VIII(is)k} = E_{IX k(lm)} = E_{X(is)j} = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

**6. Ультразотропное микрополярное упругое тело.** Изотропное микрополярное упругое тело назовем ультразвуотропным, если компоненты двух его определяющих тензоров вообще не изменяются ни при каких преобразованиях трехмерного Евклидова пространства, т.е. являются тензорами с постоянными компонентами.

Учитывая представление (2.7) для тензоров четвертого ранга с постоянными компонентами, определяющие тензоры (5.1) можно представить в виде:

$$H_{c islm} = a\delta_{is}\delta_{lm} + c\delta_{im}\delta_{ls} \quad (c=1, 2) \quad (6.1)$$

или

$$H_{c islm} = a\delta_{is}\delta_{lm} - \frac{1}{2}c(\delta_{il}\delta_{sm} - \delta_{im}\delta_{sl}) + \frac{1}{2}c(\delta_{il}\delta_{sm} + \delta_{im}\delta_{sl}) \quad (c=1, 2). \quad (6.2)$$

В обозначениях (3.11) имеем:

$$\begin{aligned} E_{I(is)(lm)} &= a\delta_{is}\delta_{lm} + \frac{1}{2}c(\delta_{il}\delta_{sm} + \delta_{im}\delta_{sl}), \\ E_{II(is)(lm)} &= a\delta_{is}\delta_{lm} + \frac{1}{2}c(\delta_{il}\delta_{sm} + \delta_{im}\delta_{sl}), \\ E_{IV(kj)} &= -c\delta_{kj}, \quad E_{V(kj)} = -c\delta_{kj}, \\ E_{III(is)(lm)} &= E_{VI kj} = E_{VII(is)k} = E_{VIII(is)k} = E_{IX k(lm)} = E_{X(is)j} = 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

**7. Матричное представление определяющих тензоров микрополярного упругого тела.** Удобной, легко воспринимаемой формой представления тензоров

четвертого, третьего и второго рангов посредством блоков двумерных квадратных и прямоугольных матриц и связей между элементами указанных матриц являются обобщенные фигуры Ная [6, с. 113–115]. Метод построения фигур Ная подробно описан в классических монографиях и физических стандартах по кристаллографии [6–10]. Указанный метод позволяет без труда установить количество независимых определяющих постоянных, характеризующих микрополярный континуум, и возможных наличия/отсутствия алгебраических связей между ними.

Преобразование определяющих тензоров четвертого, третьего и второго рангов, участвующих в записи микрополярного упругого потенциала (3.12), к виду двумерных матриц можно произвести при помощи соответствующей замены индексов согласно правилу (см. табл. 1), предложенному в монографии [6, с. 113–115], т.е. каждой паре тензорных индексов соответствует матричный индекс, обозначенный прописной латинской буквой:

$$\begin{aligned}(is) &\leftrightarrow K, \\(lm) &\leftrightarrow N, \\(is)(lm) &\leftrightarrow KN.\end{aligned}\tag{7.1}$$

Следует помнить, что метainдексы  $a$  и  $b$  не являются тензорными индексами, а нумеруют определяющие тензоры.

**Таблица 1.** Соответствие пар тензорных и матричных индексов.

| пары тензорных индексов ( $is, lm$ ) | 11 | 22 | 33 | 23, 32 | 31, 13 | 12, 21 |
|--------------------------------------|----|----|----|--------|--------|--------|
| матричные индексы ( $K, N$ )         | 1  | 2  | 3  | 4      | 5      | 6      |

|              | $\epsilon_N$          | $\phi_s$              | $k_N$                  | $k_s$                  |
|--------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|
| $\epsilon_K$ | $E_{\text{I}}^{KN}$   | $E_{\text{VII}}^{Ks}$ | $E_{\text{III}}^{KN}$  | $E_{\text{X}}^{Ks}$    |
| $\phi_i$     | $E_{\text{VII}}^{iN}$ | $E_{\text{IV}}^{is}$  | $E_{\text{IX}}^{iN}$   | $E_{\text{VI}}^{is}$   |
| $k_K$        | $E_{\text{III}}^{KN}$ | $E_{\text{IX}}^{Ks}$  | $E_{\text{II}}^{KN}$   | $E_{\text{VIII}}^{Ks}$ |
| $k_i$        | $E_{\text{X}}^{iN}$   | $E_{\text{IV}}^{is}$  | $E_{\text{VIII}}^{iN}$ | $E_{\text{V}}^{is}$    |

**Рис. 1.** Ансамбль блоков Ная для общих анизотропных микрополярных упругих определяющих тензоров

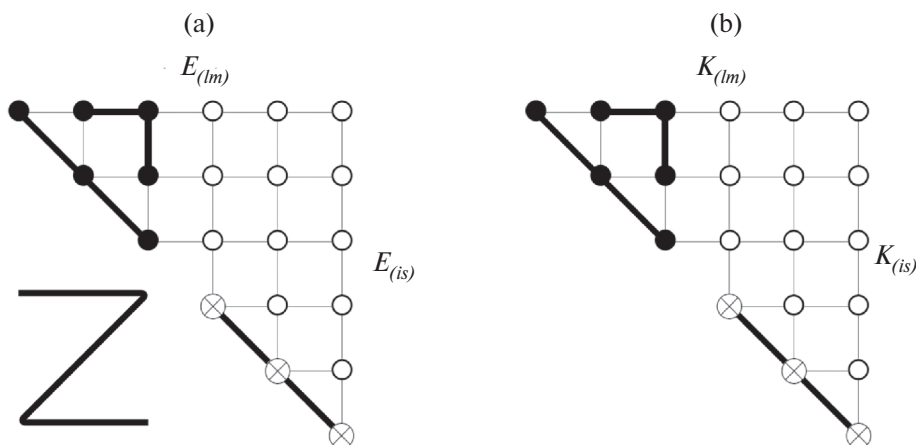


Рис. 2. Клетки Ная определяющих тензоров ультраизотропного микрополярного упругого континуума: а)  $E_{KN}$ , б)  $E_{IIKN}$ .

Ансамбль двумерных матричных блоков Ная для определяющих тензоров линейного анизотропного микрополярного упругого тела представлен на рис. 1.

Фигуры Ная для определяющих тензоров анизотропного, гемитропного и изотропного микрополярных упругих тел приведены в работе [11].

Рассмотрим преобразование определяющих тензоров ультраизотропного микрополярного тела к виду двумерных матриц. В этом случае ненулевыми оказываются два тензора четвертого ранга  $E_{I(is)(lm)}$ ,  $E_{II(is)(lm)}$  и два тензора второго ранга  $E_{IV(is)}$ ,  $E_{V(is)}$ . Заменяя пары индексов у тензоров  $E_{\alpha(is)(lm)}$  ( $\alpha = I, II$ ) согласно табл. 1, получим:

$$E_{\alpha}^{KN} = \begin{bmatrix} a+c & a & a & 0 & 0 & 0 \\ a & a+c & a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & a+c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

Матрицы ненулевых определяющих тензоров второго ранга  $E_{b(is)}$  ( $b = IV, V$ ) для ультраизотропного микрополярного упругого тела примут вид:

$$E_{is}^b = \text{diag}(-c, -c, -c). \quad (7.3)$$

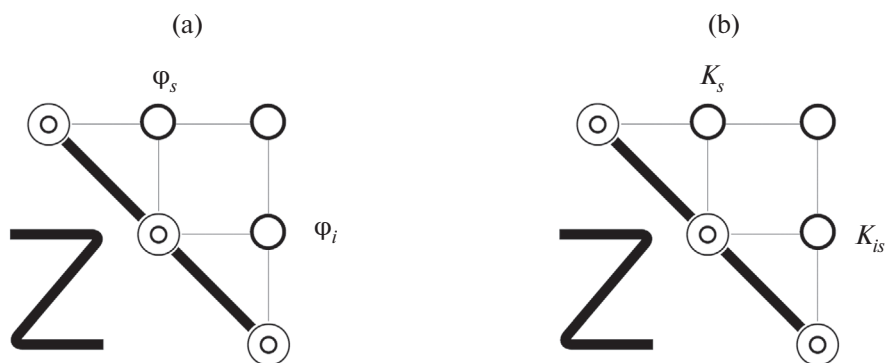


Рис. 3. Клетки Ная определяющих тензоров ультраизотропного микрополярного упругого континуума: а)  $\mathbb{E}_{IV(is)}$ , б)  $\mathbb{E}_{\sqrt{is}}$ .

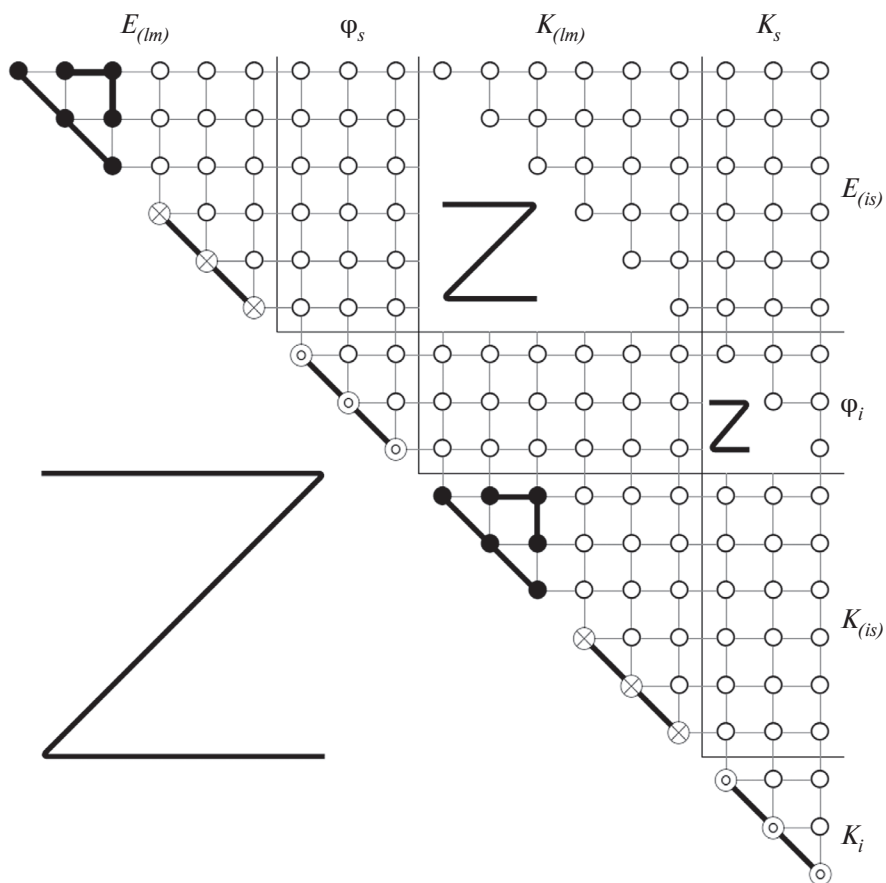


Рис. 4. Сборка Ная для ультраизотропного микрополярного тела.

Метаиндексы  $a$  и  $b$  в (7.3) связаны соотношением  $a = b - III$ .

Двумерные клетки Ная определяющих тензоров ультраизотропного микрополярного упругого тела:

1.  $E_{\alpha}^{(is)(lm)}$  ( $\alpha = I, II$ ) представлены на рис. 2.

2.  $E_{\beta}^{(is)}$  ( $\beta = IV, V$ ) представлены на рис. 3.

Фигура Ная для ультраизотропного микрополярного упругого тела составляется из клеток (см. рис. 2 и 3). В результате несложных геометрических преобразований получим фигуру Ная (см. рис. 4).

Обозначения на фигурах Ная: жирными отрезками соединены равные компоненты,  $Z$  означает симметрию числовых значений элементов фигуры относительно главной диагонали,  $\bullet$  — отличные от нуля компоненты,  $\otimes$  — компоненты, вычисляемые по следующему правилу  $0.5(E_{\alpha}^{(11)(11)} - E_{\alpha}^{(11)(12)})$ ,  $\odot$  — компоненты, вычисляемые по следующему правилу  $(E_{\alpha}^{(11)(22)} - E_{\alpha}^{(11)(11)})$ ,  $\circ$  — нулевые компоненты.

**Заключение.** В работе выполнено обобщение метода построения двумерных фигур Ная для микрополярных упругих тел. Указанный подход позволяет наиболее простым образом выяснить количество независимых определяющих констант для микрополярных упругих тел и установить возможные связи между ними. В рамках настоящего исследования построены двумерные фигуры Ная для ультраизотропного микрополярного упругого тела. Показано, что определяющие тензоры данного материала содержат лишь 4 независимые определяющие постоянные: модуль сдвига, коэффициент Пуассона, характерная нано/микродлина и еще одна, не имеющая физической размерности, постоянная.

**Финансирование.** Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500437-9).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. Paris: Herman et Fils, 1909. vi+226 p.
2. *Besdo D.* Ein beitrag zur nichtlinearen theorie des Cosserat-kontinuums // *Acta Mechanica*. 1974. V. 20. №. 1. P. 105–131.
3. *Nowacki W.* Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972. 285 p.
4. *Nowacki W.* Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
5. *Lakes R.* Composites and metamaterials. Singapore: World Scientific, 2020.
6. *Nye J.F.* Physical Properties of Crystals: their representation by tensors and matrices. Oxford: Clarendon Press, 1957. 322+xv p.
7. *Wooster W.A.* Experimental crystal physics. Oxford: Clarendon Press, 1957. 116+vi p.
8. *Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluss der Kristalloptik). Fachmedien, Wiesbaden: Springer, 1966. XXVI. 979 p.
9. Standards on piezoelectric crystals. New York: Proceedings of the I.R.E., 1949. 18 p.
10. *Zheng Q.S., Spencer A.J.M.* On the canonical representations for Kronecker powers of orthogonal tensors with application to material symmetry problems // *Int. J. Engng Sci.* 1993. V. 31. № 4. P. 617–435.  
[https://doi.org/10.1016/0020-7225\(93\)90054-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(93)90054-X)

11. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Two-dimensional nye figures for some micropolar elastic solids // *Mech. Solids*. 2023. V. 58. P. 2254–2268.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654423700243>
12. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Двумерные фигуры Ная для гемитропных микрополярных упругих тел // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*. 2024. Т. 24. Вып. 1. С. 109–122.  
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122>
13. *Мурашкин Е.В.* Об одном способе построения фигур Ная в асимметричных теориях демитропной микрополярной упругости // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2023. № 3 (57). С. 100–111.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.009>
14. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* К теории ковариантного дифференцирования двухточечных псевдотензорных полей // *Изв. РАН. МТТ*. 2022. № 6. С. 104–113.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329922060149>
15. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2022. № 2 (52). С. 106–117.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>
16. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2022. № 2 (52). С. 118–127.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>
17. *Radayev Yu.N., Murashkin E.V.* Generalized pseudotensor formulations of the Stokes' integral theorem // *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2022. V. 22. № 2. P. 205–215.  
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-205-215>
18. *Radayev Yu.N., Murashkin E.V., Nesterov T.K.* On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2022. V. 26. № 1. P. 36–47.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1891>
19. *Гуревич Г.Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. 408 с. [*G.B. Gurevich*. Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen: Noordhoff, 1964. 429 p.]
20. *McConnell A.J.* Application of tensor analysis. New York: Dover Publications Inc., 1957. 318 p.
21. *Сокольников И.С.* Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с. [*Sokolnikoff I.S.* Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p.]
22. *Радаев Ю.Н.* Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2018. Т. 22. № 3. С. 504–517.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>

23. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25. № 3. С. 457–474.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1870>
24. *Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В.* Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 4. С. 399–412.  
<https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>
25. *Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. V. 24. № 3. P. 424–444.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>
26. *Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. V. 24. № 4. P. 752–761.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>
27. *Схоутен Я.А.* Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. 456 с. [*Schouten J. A.* Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.]
28. *Synge J.L., Schild A.* Tensor calculus. V. 5. Courier Corporation, 1978. 324 p.
29. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2021. Т. 25. № 4. С. 776–786.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>
30. *Murashkin E.V., Radaev Y.N.* On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // Mech. Solids. 2022. V. 57. P. 205–213.  
<https://doi.org/10.3103/s0025654422020108>
31. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* The schouten force stresses in continuum mechanics formulations // Mech. Solids. 2023. V. 58. P. 153–160.  
<https://doi.org/10.3103/s0025654422700029>
32. *Radaev Y.N.* Tensors with constant components in the constitutive equations of hemitropic micropolar solids // Mech. Solids. 2023. V. 58. P. 1517–1527.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654423700206>
33. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 4 (54). С. 108–115.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009>
34. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 3 (53). С. 86–100.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010>
35. *Мурашкин Е.В.* О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // Вестник Чувашского государственного

педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1 (55). С. 110–121. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.55.1.012>  
 36. *Jeffreys H.* Cartesian Tensors. Cambridge University Press, 1931. 101 p.

## THE NYE CELLS AND FIGURES FOR ATHERMIC HEMITROPIC, ISOTROPIC AND ULTRAISOTROPIC MICROPOLAR ELASTIC SOLIDS

**Krylova E. Yu.<sup>a, \*</sup>, Murashkin E. V.<sup>b, \*\*</sup>, and Radaev Yu. N.<sup>b, \*\*\*</sup>**

<sup>a</sup> *Saratov, Saratov State University,*

<sup>b</sup> *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526 Russia*

*\*e-mails: kat.krylova@bk.ru, \*\*murashkin@ipmnet.ru, \*\*\*radaev@ipmnet.ru*

**Abstract** – The paper deals with a method of the Nye figures construction for micropolar elastic solids. The method of tensors of the 4th and 3rd ranks representations by means of blocks of two-dimensional matrices and relationships between their elements is widely known in crystallography. Such approach makes it possible to simply determine the number of independent constitutive constants for micropolar elastic solids and guarantee the absence of relationships between them. In frameworks of the present study, the two-dimensional Nye figures for an ultrasotropic micropolar elastic solid were figured out based on the corresponding figures for hemitropic and isotropic micropolar elastic solids. It is shown that the constitutive tensors of ultrasotropic material characterized by only 4 independent constitutive constants: shear modulus of elasticity, Poisson's ratio, characteristic nano/microlength and another dimensionless constant.

**Keywords:** ultrasotropic micropolar continuum, stress state potential, constitutive tensor, Nye's figure, Nye's cell, nano/microlength, nano/microscale

## REFERENCES

1. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. Paris: Herman et Fils, 1909. vi+226 p.
2. *Besdo D.* Ein beitrag zur nichtlinearen theorie des Cosserat-kontinuums // *Acta Mechanica*. 1974. Vol. 20. №. 1. P. 105–131.
3. *Nowacki W.* Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972. 285 p.
4. *Nowacki W.* Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
5. *Lakes R.* Composites and metamaterials. Singapore: World Scientific, 2020.
6. *Nye J.F.* Physical Properties of Crystals, their representation by tensors and matrices. Oxford: Clarendon Press, 1957. 322+xv p.
7. *Wooster W.A.* Experimental Crystal Physics. Oxford: Clarendon Press, 1957. 116+vi p.
8. *Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluss der Kristalloptik). Fachmedien, Wiesbaden: Springer, 1966. XXVI+979 p.
9. Standards on Piezoelectric Crystals. New York: Proceedings of the I.R.E., 1949. 18 p.
10. *Zheng Q. S., Spencer A. J. M.* On the canonical representations for Kronecker powers of orthogonal tensors with application to material symmetry problems // *Int. J. Engng Sci.* 1993. V. 31. Iss. 4. pp. 617–435.  
[https://doi.org/10.1016/0020-7225\(93\)90054-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(93)90054-X)

11. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Two-dimensional nye figures for some micropolar elastic solids // *Mechanics of Solids*. 2023. V. 58. № 6. P. 2254–2268.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654423700243>
12. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Two-dimensional Nye figures for hemitropic micropolar elastic solids // *Izvestiya of saratov university. Mathematics. Mechanics. Informatics* 2024. V. 24. № 1. P. 109–122.  
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122>
13. *Murashkin E.V.* On a method of constructing Nye figures for asymmetric theories of micropolar elasticity // *Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.* 2023. № 3 (57). P. 100–111.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.009>
14. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On the Theory of covariant differentiation of two point pseudotensor fields // *Mechanics of Solids*. 2022. V. 57. № 6. P. 1365–1373.  
<https://doi.org/10.3103/s0025654422060255>
15. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Elements of the theory // *Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.* 2022. № 2 (52). P. 106–115.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>
16. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Applications to continuum mechanics, // *Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.* 2022. № 2 (52). P. 118–127.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>
17. *Radayev Yu.N., Murashkin E.V.* Generalized pseudotensor formulations of the Stokes' integral theorem // *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2022. V. 22. № 2. P. 205–215.  
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-205-215>
18. *Radayev Yu.N., Murashkin E.V., Nesterov T.K.* On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2022. V. 26. № 1. P. 36–47.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1891>
19. *Gurevich G.B.* Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen: Noordhoff, 1964. 429 p.
20. *McConnell A.J.* Application of Tensor Analysis. New York: Dover Publications Inc., 1957. xii+38 p.
21. *Sokolnikoff I.S.* Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p.
22. *Radayev Yu.N.* The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2018. V. 22. № 3. P. 504–517.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>
23. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On the constitutive pseudoscalars of hemitropic micropolar media in inverse coordinate frames // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*. 2021. Vol. 25. № 3. P. 457–474.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1870>
24. *Radayev Y.N., Murashkin E.V.* Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // *Probl. Prochn. Plastichn.* 2020. V. 82. № 4. P. 399–412.  
<https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>

25. *Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. V. 24. № 3. P. 424–444.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>
26. *Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. V. 24. № 4. P. 752–761.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>
27. *Schouten J.A.*, Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 p.
28. *Synge J.L., Schild A.* Tensor calculus. V. 5. Courier Corporation, 1978. 334 p.
29. *Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* On a ordering of area tensor elements orientations in a micropolar continuum immersed in an external plane space // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2021. V. 25. № 4. P. 776–786.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>
30. *Murashkin E.V., Radaev Y.N.* On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // Mechanics of Solids. 2022. V. 57. №. 2. P. 205–213. <https://doi.org/10.3103/s0025654422020108>
31. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* The schouten force stresses in continuum mechanics formulations // Mechanics of Solids. 2023. V. 58. №. 1. P. 153–160.  
<https://doi.org/10.3103/s0025654422700029>
32. *Radaev Y.N.* Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. V. 58. № 5. P. 1517–1527.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654423700206>
33. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Reducing natural forms of hemitropic energy potentials to conventional ones // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2022. № 4 (54). P. 108–115.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009>
34. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On two base natural forms of asymmetric force and couple stress tensors of potential in mechanics of hemitropic solids // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2022. № 3 (53). P. 86–100.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010>
35. *Murashkin E.V.* On the relationship of micropolar constitutive parameters of thermodynamic state potentials // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2023. № 1 (55). P. 110–121.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.55.1.012>
36. *Jeffreys H.* Cartesian Tensors. Cambridge University Press, 1931. 101 p.