ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2024, № 4, с. 36–54

УДК 539.3

ХАРАКТЕРНЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ЧИСЛА В ПОЛУИЗОТРОПНОЙ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

 Е. В. Мурашкин[a], *, Ю. Н. Радаев[a], **

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: murashkin@ipmnet.ru, **e-mail: radayev@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 07.06.2024 г.
После доработки 03.07.2024 г.
Принята к публикации 08.07.2024 г.

В механике сплошных сред (особенно в гидроаэромеханике) широко распространены методы моделирования течения (деформации) по характерным числам. Настоящая работа посвящена поиску характерных комбинаций определяющих термоупругих модулей, геометрических и термомеханических параметров краевой задачи. Особенностью моделирования деформирования микрополярных тел по характерным числам является достаточно большое число (13) определяющих модулей. В линейном приближении выводятся определяющие уравнения, уравнения динамики и уравнение теплопроводности полуизотропного микрополярного термоупругого континуума. Проводится размерный анализ основной системы дифференциальных уравнений. Предложен физически согласованный ряд (9 первичных и несколько произвольных) безразмерных характерных комбинаций определяющих постоянных. Выполнен расчет характерных чисел для гармонических волн, распространяющихся вдоль оси свободного теплоизолированного длинного цилиндрического полуизотропного термоупругого волновода.

Ключевые слова: теплопроводность, микрополярное термоупругое тело, полуизотропное тело, характеристическое число, размерный анализ, нано/микродлина, нано/микромасштаб

DOI: 10.31857/S1026351924040035, **EDN:** UDKOJB

1. Введение. Современные экспериментальные исследования [1] отчетливо указывают на то, что важной особенностью многих материалов является чувствительность термомеханических свойств к преобразованиям, изменяющим ориентацию пространства на противоположную — инверсиям и зеркальным отражениям[1]. Одной из простейших математических моделей, в которой оказывается возможным учет указанной чувствительности, является модель полуизотропного микрополярного термоупругого

[1] При этом важна трехмерность пространства.

континуума, предложенная в работах [2–8]. В микрополярной теории термоупругости, как известно, трансляционные перемещения каждого элемента континуума сопровождаются микроповоротами (спинорными перемещениями). Спинорные и трансляционные перемещения считаются кинематически независимыми [9–11][2]. Корректное построение определяющих уравнений и энергетических форм термодинамических потенциалов для полуизотропных микрополярных термоупругих сред требует привлечения аппарата алгебры и анализа псевдотензоров [13–17], исходя из принципа ковариантного постоянства целых степеней псевдотензорных единиц.

Исследование процессов распространения гармонических волн в телах с нано/микроструктурными особенностями является важной в прикладном аспекте задачей современной волновой термомеханики [18, 19]. При исследовании такой задачи, а также при моделировании по характерным числам [20–25] важную роль играют безразмерные комбинации определяющих термоупругих модулей, геометрических и термомеханических параметров краевой задачи. Подобные комбинации хорошо известны в гидромеханике в исследованиях термомеханических особенностей течения жидкостей и газов [20, 25] (число Нуссельта (Nu), число Эйлера (Eu), число Релея (Ra), число Фруда (Fr), число Грасхофа (Gr), число Прандтля (Pr), число Рейнольдса (Re), число Ричардсона (Ri), число Струхала (Sh) и т.д.).

В настоящей работе исследуются характерные комбинации определяющих термоупругих модулей, геометрических и термосиловых параметров краевой задачи. Особенностью моделирования по характерным числам является достаточно большое число (13) определяющих модулей. В линейном приближении выводятся определяющие уравнения, уравнения динамики и уравнение теплопроводности полуизотропного микрополярного термоупругого континуума. Проводится размерный анализ указанной системы уравнений. Предложен физически согласованный ряд (9 первичных и несколько произвольных) безразмерных характерных комбинаций определяющих постоянных. Выполнен расчет характерных чисел для гармонических волн, распространяющихся вдоль оси свободного теплоизолированного длинного цилиндрического полуизотропного термоупругого волновода.

2. Упругий потенциал и определяющие уравнения связанной полуизотропной термоупругости. Примем линеаризованную по функциональным аргументам объемную плотность свободной энергии Гельмгольца для анизотропного микрополярного термоупругого континуума[3] в виде [26]:

$$\Psi = \underset{\mathrm{I}}{\mathrm{E}}^{(ik)(lm)}\,\epsilon_{(ik)}\epsilon_{(lm)} + \underset{\mathrm{II}}{\mathrm{E}}^{(ik)(lm)}\,\kappa_{(ik)}\kappa_{(lm)} + \underset{\mathrm{III}}{\mathrm{E}}^{(ik)(lm)}\,\epsilon_{(ik)}\kappa_{(lm)} + \underset{\mathrm{IV}}{\mathrm{E}}{}^{(ik)\cdot}_{\cdot l}\,\epsilon_{(ik)}\varphi^{l} +$$

[2] Последнее обстоятельство означает, что они могут быть введены в модель микрополярного тела без привлечения метода множителей Лагранжа.

[3] Заметим, что в работах В. Новацкого [10, 11], в записи энергетической формы термоупругого потенциала все слагаемые с температурой введены со знаком минус. Указанное обстоятельство выглядит достаточно неубедительным с точки зрения положительной определенности энергетической квадратичной формы. Поэтому в формуле (1) все слагаемые вводятся с положительным знаком.

$$+\underset{\mathrm{V}}{\mathrm{E}}{}^{(ik)\cdot}_{\cdot l}\,\kappa_{(ik)}\varphi^{l}+\underset{\mathrm{VI}}{\mathrm{E}}{}^{(ik)l}\,\epsilon_{(ik)}\kappa_{l}+\underset{\mathrm{VII}}{\mathrm{E}}{}^{(ik)l}\,\kappa_{(ik)}\kappa_{l}+\underset{\mathrm{VIII}}{\mathrm{E}}{}_{(il)}\,\varphi^{i}\varphi^{l}+\underset{\mathrm{IX}}{\mathrm{E}}{}^{(il)}\,\kappa_{i}\kappa_{l}+$$

$$+\underset{\mathrm{X}}{\mathrm{E}}{}_{i\cdot}^{\cdot l}\,\varphi^{i}\kappa_{l}+\underset{\mathrm{XI}}{\mathrm{E}}{}^{(ik)}\,\epsilon_{(ik)}\theta+\underset{\mathrm{XII}}{\mathrm{E}}{}^{(ik)}\,\kappa_{(ik)}\theta+\underset{\mathrm{XIII}}{\mathrm{E}}{}_{i}\,\varphi^{i}\theta+\underset{\mathrm{XIV}}{\mathrm{E}}{}^{i}\kappa_{i}\theta+\underset{\mathrm{XV}}{\mathrm{E}}\,\theta^{2}, \tag{2.1}$$

где

$$\underset{\mathrm{I}}{\mathrm{E}}{}^{(ik)(lm)},\ \underset{\mathrm{II}}{\mathrm{E}}{}^{(ik)(lm)},\ \underset{\mathrm{III}}{\mathrm{E}}{}^{(ik)(lm)},\ \underset{\mathrm{IV}}{\mathrm{E}}{}^{(ik)\cdot}_{\cdot l},\ \underset{\mathrm{V}}{\mathrm{E}}{}^{(ik)\cdot}_{\cdot l},\ \underset{\mathrm{VI}}{\mathrm{E}}{}^{(ik)l},$$

$$\underset{\mathrm{VII}}{\mathrm{E}}{}_{(ik)l},\ \underset{\mathrm{VIII}}{\mathrm{E}}{}_{(il)},\ \underset{\mathrm{IX}}{\mathrm{E}}{}^{(il)},\ \underset{\mathrm{X}}{\mathrm{E}}{}_{i\cdot}^{\cdot l},\ \underset{\mathrm{XI}}{\mathrm{E}}{}^{(ik)},\ \underset{\mathrm{XII}}{\mathrm{E}}{}^{(ik)},\ \underset{\mathrm{XIII}}{\mathrm{E}}{}_{i},\ \underset{\mathrm{XIV}}{\mathrm{E}}{}^{i},\ \underset{\mathrm{XV}}{\mathrm{E}}$$

— определяющие тензоры анизотропного микрополярного термоупругого континуума; $\theta \to \theta - \theta_0$ — температурный инкремент (считается малой первого порядка); θ_0 — референциальная температура; $\epsilon_{(ik)}$ — симметричная часть асимметричного тензора деформации; $\kappa_{(ik)}$ — симметричная часть тензора изгиба–кручения; φ^i — вектор, сопутствующий антисимметричной части асимметричного тензора деформации; $\kappa_{\underline{i}}$ — вектор, сопутствующий антисимметричной части тензора изгиба–кручения.

Асимметричный тензор деформации, тензор изгиба–кручения, их симметричные части и сопутствующие векторы определяются в терминах векторов трансляционных u^k и спинорных ϕ^k перемещений согласно равенствам:

$$\epsilon_{ij}=\nabla_i u_j-\epsilon_{ijk}\phi^k,\quad \kappa_{i\cdot}^{\cdot s}=\nabla_i\phi^s, \tag{2.2}$$

$$\epsilon_{(kl)}=\frac{1}{2}(\nabla_k u_l+\nabla_l u_k),\quad \kappa_{(kl)}=\frac{1}{2}(\nabla_k\phi_l+\nabla_l\phi_k), \tag{2.3}$$

$$\varphi^i=-\frac{1}{2}\epsilon^{ikl}\epsilon_{[kl]},\quad \kappa_i=\frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\kappa^{[kl]}, \tag{2.4}$$

где $\epsilon^{ikj}=\epsilon_{ikj}$ — символы перестановок, ∇_k — оператор ковариантного дифференцирования. Символы перестановок, как и метрический тензор g_{ij}, считаются физически безразмерными объектами. Круглые и квадратные скобки означают операции симметрирования и альтернирования по заключенным в них индексам.

Следствием второго закона термодинамики для полуизотропных микрополярных термоупругих тел являются определяющие уравнения:

$$\begin{aligned} t^{(ij)}&=\frac{\partial\Psi}{\partial\epsilon_{(ij)}}, &\quad \mu^{(ik)}&=\frac{\partial\Psi}{\partial\kappa_{(ik)}},\\ 2\tau_i&=\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi^i}, &\quad 2\mu^i&=\frac{\partial\Psi}{\partial\kappa_i},\\ S&=-\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}, &\quad J^j&=J^j(\nabla_k\ln\theta). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Приведенное уравнение баланса свободной энергии запишем в форме [27, 28]:

$$-(\partial_{.}\Psi + S\partial_{.}\theta) + t^{(ij)}\partial_{.}\epsilon_{(ij)} + \mu^{(ik)}\partial_{.}\kappa_{(ik)} + \tau_i\partial_{.}\varphi^i + \mu^i\partial_{.}\kappa_i - \theta^{-1}h^i\nabla_i\theta = \Xi\theta. \quad (2.6)$$

Здесь $\partial_{.}$ — производная по времени при фиксированных координатах x^k, S — объемная плотность энтропии, Ξ — неконтролируемое производство энтропии (в единицу времени, в расчете на единицу объема).

Уравнение баланса энтропии в рамках предлагаемой к рассмотрению схемы исследования принимает вид:

$$\partial_{.}S = -\nabla_j J^j + \Sigma + \Xi, \quad (2.7)$$

где J^j — вектор потока энтропии, Σ — объемная плотность контролируемого производства энтропии. В дальнейшем изложении будем полагать отсутствие лучистого тепла, т.е. $\Sigma = 0$.

Для неконтролируемого производства энтропии справедлива следующая цепочка равенств:

$$\Xi = -\theta^{-2}h^j\nabla_j\theta = -\theta^{-1}J^j(\nabla_k \ln\theta)\nabla_j \ln\theta. \quad (2.8)$$

Нелинейное уравнение теплопроводности получим подстановкой определяющих уравнений (2.5) в уравнение баланса энтропии (2.7), учитывая

$$\theta J^j = h^j.$$

В силу абсолютной инвариантности температуры алгебраические веса потока тепла и энтропии совпадают.

В итоге получим:

$$\frac{\partial S}{\partial\epsilon_{(ij)}}\partial_{.}\epsilon_{(ij)} + \frac{\partial S}{\partial\kappa_{(ik)}}\partial_{.}\kappa_{(ik)} + \frac{\partial S}{\partial\varphi^i}\partial_{.}\varphi^i + \frac{\partial S}{\partial\kappa_i}\partial_{.}\kappa_i + \frac{\partial S}{\partial\theta}\partial_{.}\theta = -\theta^{-1}\nabla_j h^j. \quad (2.9)$$

В качестве закона теплопроводности примем линейный закон Фурье:

$$h^k = -\underset{\mathrm{XVI}}{\mathrm{E}}{}^{ki}\nabla_i\theta, \quad (2.10)$$

где $\underset{\mathrm{XVI}}{\mathrm{E}}{}^{ki}$ — определяющий тензор теплопроводности.

После линеаризации уравнения теплопроводности (2.9) с учетом (2.11) и (2.10) окончательно получим:

$$\underset{\mathrm{XI}}{\mathrm{E}}{}^{(ij)}\partial_{.}\epsilon_{(ij)} + \underset{\mathrm{XII}}{\mathrm{E}}{}^{(ij)}\partial_{.}\kappa_{(ij)} + \underset{\mathrm{XIII}}{\mathrm{E}}{}_i\partial_{.}\varphi^i + \underset{\mathrm{XIV}}{\mathrm{E}}{}^i\partial_{.}\kappa_i + \theta_0^{-1}C\partial_{.}\theta = \theta_0^{-1}\underset{\mathrm{XVI}}{\mathrm{E}}{}^{js}\nabla_j\nabla_s\theta,$$

где C — теплоемкость тела в расчете на единицу объема.

Определяющие уравнения (2.5), соответствующие квадратичной форме свободной энергии Гельмгольца (2.1), принимают вид:

$$
\begin{gathered}
t^{(ik)} = 2\underset{\mathrm{I}}{\mathrm{E}}^{(ik)(lm)}\epsilon_{(lm)} + \underset{\mathrm{III}}{\mathrm{E}}^{(ik)(lm)}\kappa_{(lm)} + \underset{\mathrm{IV}}{\mathrm{E}}^{(ik)\cdot}_{\cdot l}\varphi^l + \underset{\mathrm{VI}}{\mathrm{E}}^{(ik)l}\kappa_l + \underset{\mathrm{XI}}{\mathrm{E}}^{(ik)}\theta,\\
\mu^{(ik)} = 2\underset{\mathrm{II}}{\mathrm{E}}^{(ik)(lm)}\kappa_{(lm)} + \underset{\mathrm{III}}{\mathrm{E}}^{(lm)(ik)}\epsilon_{(lm)} + \underset{\mathrm{V}}{\mathrm{E}}^{(ik)\cdot}_{\cdot l}\varphi^l + \underset{\mathrm{VII}}{\mathrm{E}}^{(ik)l}\kappa_l + \underset{\mathrm{XII}}{\mathrm{E}}^{(ik)}\theta,\\
2\tau_i = 2\underset{\mathrm{VIII}}{\mathrm{E}}_{(il)}\varphi^l + \underset{\mathrm{X}}{\mathrm{E}}_{i\cdot}^{\cdot l}\kappa_l + \underset{\mathrm{IV}}{\mathrm{E}}^{(lm)\cdot}_{\cdot\cdot i}\epsilon_{(lm)} + \underset{\mathrm{V}}{\mathrm{E}}^{(lm)\cdot}_{\cdot\cdot i}\kappa_{(lm)} + \underset{\mathrm{XIII}}{\mathrm{E}}_i\theta, \qquad (2.11)\\
2\mu^i = 2\underset{\mathrm{IX}}{\mathrm{E}}^{(il)}\kappa_l + \underset{\mathrm{X}}{\mathrm{E}}^{\cdot i}_{l\cdot}\varphi^l + \underset{\mathrm{VI}}{\mathrm{E}}^{(lm)i}\epsilon_{(lm)} + \underset{\mathrm{VII}}{\mathrm{E}}^{(lm)i}\kappa_{(lm)} + \underset{\mathrm{XIV}}{\mathrm{E}}^i\theta,\\
S = -\underset{\mathrm{XI}}{\mathrm{E}}^{(ik)}\epsilon_{(ik)} - \underset{\mathrm{XII}}{\mathrm{E}}^{(ik)}\kappa_{(ik)} - \underset{\mathrm{XIII}}{\mathrm{E}}_i\varphi^i - \underset{\mathrm{XIV}}{\mathrm{E}}^i\kappa_i - \underset{\mathrm{XV}}{\mathrm{E}}\theta.
\end{gathered}
$$

Для полуизотропного микрополярного термоупругого тела определяющие тензоры в декартовой системе координат примут вид [29—32]:

$$
\begin{gathered}
\underset{\mathrm{I}}{\mathrm{E}}_{(is)(lm)} = \underset{1}{a}\delta_{is}\delta_{lm} + \frac{1}{2}(\underset{1}{b} + \underset{1}{c})(\delta_{il}\delta_{sm} + \delta_{im}\delta_{sl}),\\
\underset{\mathrm{II}}{\mathrm{E}}_{(is)(lm)} = \underset{2}{a}\delta_{is}\delta_{lm} + \frac{1}{2}(\underset{2}{b} + \underset{2}{c})(\delta_{il}\delta_{sm} + \delta_{im}\delta_{sl}),\\
\underset{\mathrm{III}}{\mathrm{E}}_{(is)(lm)} = \underset{3}{a}\delta_{is}\delta_{lm} + \frac{1}{2}(\underset{3}{b} + \underset{3}{c})(\delta_{il}\delta_{sm} + \delta_{im}\delta_{sl}), \qquad (2.12)\\
\underset{\mathrm{IV}}{\mathrm{E}}_{(kj)} = (\underset{1}{b} - \underset{1}{c})\delta_{kj}, \quad \underset{\mathrm{V}}{\mathrm{E}}_{(kj)} = (\underset{2}{b} - \underset{2}{c})\delta_{kj}, \quad \underset{\mathrm{VI}}{\mathrm{E}}_{kj} = -(\underset{3}{b} - \underset{3}{c})\delta_{kj},\\
\underset{\mathrm{XI}}{\mathrm{E}}^{(ik)} = \underset{1}{d}g^{ik}, \quad \underset{\mathrm{XII}}{\mathrm{E}}^{(ik)} = \underset{2}{d}g^{ik}, \quad \underset{\mathrm{XV}}{\mathrm{E}} = F,\\
\underset{\mathrm{VII}}{\mathrm{E}}_{(is)k} = \underset{\mathrm{VIII}}{\mathrm{E}}_{(is)k} = \underset{\mathrm{IX}}{\mathrm{E}}_{k(lm)} = \underset{\mathrm{X}}{\mathrm{E}}_{(is)j} = \underset{\mathrm{XIII}}{\mathrm{E}}_i = \underset{\mathrm{XIV}}{\mathrm{E}}^i = 0.
\end{gathered}
$$

Кроме того, для полуизотропного тела шаровым оказывается тензор коэффициентов теплопроводности:

$$
\underset{\mathrm{XVI}}{\mathrm{E}}^{js} = \lambda g^{js},
$$

где λ — коэффициент теплопроводности.

Определяющие постоянные удобно выразить в терминах материальных термомеханических параметров в следующем виде [33—35]:

$$
\begin{array}{llll}
\underset{1}{a} = 2G\nu(1-2\nu)^{-1}, & \underset{1}{b}+\underset{1}{c} = 2G, & \underset{1}{b}-\underset{1}{c} = 2Gc_1, & \\
\underset{2}{a} = 2GL^2c_3, & \underset{2}{b}+\underset{2}{c} = 2GL^2, & \underset{2}{b}-\underset{2}{c} = GL^2c_2, & \\
\underset{3}{a} = 2GLc_4, & \underset{3}{b}+\underset{3}{c} = 2GLc_5, & \underset{3}{c}-\underset{3}{b} = GLc_6, & (2.13)\\
\underset{1}{d} = -4G\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\underset{*}{\alpha}, & \underset{2}{d} = -4GL^2\underset{*}{\beta}, & F = \underset{\mathrm{XV}}{E} = -\dfrac{\rho c}{\theta_0}, &
\end{array}
$$

где G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; L — характерная микродлина; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 — не имеющие физической размерности псевдоскаляры; $\underset{*}{\alpha}$ — коэффициент линейного теплового расширения; $\underset{*}{\beta}$ — коэффициент теплового искажения (см. [2, 7]).

3. Уравнения динамики и уравнение теплопроводности связанной полуизотропной микрополярной термоупругости. Уравнения динамики микрополярного континуума выводятся из вариационного принципа виртуальных перемещений в ковариантной форме:

$$\begin{aligned} \nabla_i t^{ik} &= -\rho(f^k - \partial^2_{\cdot\cdot} u^k), \\ \nabla_i \mu^{i\cdot}_{\cdot k} - 2\tau_k &= -\rho(l_k - \Im\partial^2_{\cdot\cdot}\phi_k). \end{aligned} \tag{3.1}$$

где f^i — вектор массовых сил, l_i — вектор массовых моментов.

Определяющие уравнения полуизотропной микрополярной среды, учитывая замену (2.13), записываются в форме:

$$\begin{aligned} t^{(is)} =& 2G\left(\nu(1-2\nu)^{-1} g^{is} g^{lm} + g^{il} g^{sm}\right)\epsilon_{(lm)} + \\ &+ GL(c_4 g^{is} g_{lm} \kappa^{(lm)} + c_5 \kappa^{(is)}) - 2G\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu} g^{is}\theta, \\ \mu_{(is)} =& 2GL^2(c_3 g_{is} g_{lm} + g_{il} g_{sm})\kappa^{(lm)} + GL(c_4 g_{is} g^{lm}\epsilon_{(lm)} + c_5\epsilon_{(is)}) - 2GL^2\underset{*}{\beta} g_{is}\theta, \\ \tau_i =& 2Gc_1 g_{is}\varphi^s + \frac{1}{2}GLc_6\kappa_i, \\ \mu^i =& 2GL^2 c_2\, g^{is}\kappa_s + \frac{1}{2}GLc_6\varphi^i, \end{aligned} \tag{3.2}$$

Возвращаясь к записи в терминах асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений, получим:

$$\begin{aligned} t_{is} =& G\Big[(1+c_1)\nabla_i u_s + (1-c_1)\nabla_s u_i + 2\nu(1-2\nu)^{-1} g_{is}\nabla_k u^k - \\ &- 2c_1 e_{isl}\phi^l + Lc_4 g_{is}\nabla_l\phi^l + Lc_5\nabla_{(i}\phi_{s)} - \frac{1}{2}Lc_6\nabla_{[i}\phi_{s]} - 2\underset{*}{g_{is}}\alpha\frac{1+\nu}{1-2\nu}\theta\Big], \\ \mu_{is} =& GL^2\Big[(1+c_2)\nabla_i\phi_s + (1-c_2)\nabla_s\phi_i + 2c_3 g_{is}\nabla_l\phi^l + \\ &+ L\left(c_4 g_{is}\nabla_l u^l + c_5\nabla_{(i}u_{s)} - \frac{1}{2}c_6\nabla_{[i}u_{s]} + \frac{1}{2}c_6\grave{o}_{isl}\phi^l\right) - 2\underset{*}{\beta} g_{is}\theta\Big]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Подставив полученные определяющие уравнения (3.3) в уравнения динамики (3.1), дополнив их уравнением теплопроводности [27, 28] для полуизотропного микрополярного тела, получим замкнутую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &GL^2[(1+c_2)\nabla^s\nabla_s\phi_i + (1-c_2+2c_3)\nabla_i\nabla_k\phi^k + \\ &+ L^{-1}c_4'\nabla_i\nabla^k u_k + L^{-1}c_5'\nabla^k\nabla_k u_i + L^{-1}c_6'\epsilon_{isl}\nabla^s\phi^l] - \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$
\begin{gathered}
-2Gc_1(2\phi_i - e^2\epsilon_{ikl}g^{ks}\nabla_s u^l) - 2GL^2 \underset{*}{\beta}\nabla_i\theta = -\rho(l_i - \Im\partial_{\cdot\cdot}\phi_i),\\
\lambda\nabla_s\nabla^s\theta - C\partial_{\cdot}\theta - 2G\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\theta_0\nabla_s\partial_{\cdot}u^s - 2GL^2\underset{*}{\beta}\theta_0\nabla_s\partial_{\cdot}\phi^s = 0,
\end{gathered}
$$

где приняты следующие обозначения:

$$
c_4' = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c_5' = \frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c_6' = -c_6. \tag{3.5}
$$

Размерности основных тензорных величин и определяющих постоянных микрополярной термомеханики в системе СИ представлены в табл. 1 и 2. Кроме того, в табл. 1 и 2 приводятся алгебраические веса, соответствующие используемым псевдоинвариантным элементам объема и площади [36–38].

4. Размерный анализ связанной системы уравнений динамики полуизотропного микрополярного термоупругого тела. Здесь и далее введем в рассмотрение функцию d.i.m, действующую на физическое поле и равную значению его размерности в системе СИ. Для безразмерного физического поля φ функция d.i.m принимает пустое значение:

$$
\text{d.i.m}(\varphi) = \text{null}. \tag{4.1}
$$

Криволинейные координаты не всегда имеют одинаковую размерность. Поэтому, при анализе размерностей следует преобразовать метрическую форму так чтобы криволинейные координаты имели одну и ту же размерность. После чего необходимо осуществить переход к безразмерным криволинейным координатам с помощью размерного множителя. Схематически это можно представить следующим образом:

$$
\text{d.i.m}(x^i) = \text{var} \to \text{d.i.m}(x^i) = \text{м} \to \text{d.i.m}(x^i) = \text{null}. \tag{4.2}
$$

Следуя предложенной процедуре, заменим размерные физические поля и геометрические объекты их безразмерными аналогами с помощью масштабирующей замены переменных и физических полей:

$$
\begin{array}{llll}
x^i & \to l_1 x^i, & t & \to \tau t,\\
\theta & \to \theta_0\theta, & \partial_{\cdot} & \to \tau^{-1}\partial_{\cdot},\\
\mathbf{u} & \to l_2\mathbf{u}, & \nabla & \to l_1^{-1}\nabla,\\
\underset{(2)}{\mathbf{t}} & \to G\underset{(2)}{\mathbf{t}}, & \underset{(2)}{\boldsymbol{\mu}} & \to GL\underset{(2)}{\boldsymbol{\mu}},
\end{array} \tag{4.3}
$$

где x^i — координаты; l_1 и l_1 — масштабные факторы длины ($\text{d.i.m}(l_1) = \text{d.i.m}(l_2) = \text{м}$); τ — масштабный фактор времени ($\text{d.i.m}(\tau) = \text{с}$), G — масштабный фактор силовых напряжений ($\text{d.i.m}(G) = \text{кг}\cdot\text{м}^{-1}\cdot\text{с}^{-2}$); GL — масштабный фактор моментных напряжений ($\text{d.i.m}(GL) = \text{кг}\cdot\text{с}^{-2}$). В схеме (21) безразмерные переменные, находящиеся в правых частях соотношений, следует отличать от размерных, например с помощью волны сверху корневого символа, что неизбежно приведет к усложнению записи дифференциальных уравнений. Поэтому для упрощения записи формул в дальнейшем опустим указанное обозначение и будем вести изложение в безразмерных переменных.

С учетом масштабирующей замены (4.3) запишем уравнения (3.4) в векторном виде:

$$
\begin{gathered}
(1+c_1)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}+(1-c_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}+2l_1l_2^{-1}c_1\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}+\\
+Ll_2^{-1}c_4'\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}+Ll_2^{-1}c_5'\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi}-2l_1l_2^{-1}\theta_0\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{\nabla}\theta=\rho G^{-1}l_1^2\tau^{-2}\ddot{\mathbf{u}},\\
(1+c_2)\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{\phi}+(1-c_2+2c_3)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}+L^{-1}l_2c_4'\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+\\
+L^{-1}l_2c_5'\nabla\cdot\nabla\mathbf{u}+L^{-1}l_1c_6'\nabla\times\boldsymbol{\phi}-2L^{-2}l_1^2c_1(2\boldsymbol{\phi}-l_1l_2^{-1}\nabla\times\mathbf{u})-\\
-2l_1\theta_0\underset{*}{\beta}\nabla\theta=\rho\Im G^{-1}L^{-2}l_1^2\tau^{-2}\ddot{\boldsymbol{\phi}},\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta-C\lambda^{-1}l_1^2\tau^{-1}\partial_{\cdot}\theta-2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}l_1l_2\tau^{-1}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{\nabla}\cdot\partial_{\cdot}u-\\
-2G\lambda^{-1}L^2l_1\tau^{-1}\underset{*}{\beta}\boldsymbol{\nabla}\cdot\partial_{\cdot}\boldsymbol{\phi}=0.
\end{gathered}
\tag{4.4}
$$

Анализируя систему дифференциальных уравнений (4.4), можно выделить следующие характерные комбинации определяющих постоянных и масштабирующих параметров:

$$
\begin{aligned}
&\underset{1}{\mathrm{Ch}}=Ll_2^{-1}, &&\underset{2}{\mathrm{Ch}}=\rho G^{-1}l_1^2\tau^{-2}, &&\underset{3}{\mathrm{Ch}}=\rho\Im G^{-1}L^{-2}l_1^2\tau^{-2},\\
&\underset{4}{\mathrm{Ch}}=l_1l_2^{-1}, &&\underset{5}{\mathrm{Ch}}=C\lambda^{-1}l_1^2\tau^{-1}, &&\underset{6}{\mathrm{Ch}}=2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}l_1l_2\tau^{-1},\\
&\underset{7}{\mathrm{Ch}}=2\underset{*}{\beta}\theta_0l_1, &&\underset{8}{\mathrm{Ch}}=2\underset{4}{\mathrm{Ch}}h\theta_0\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}, &&\underset{9}{\mathrm{Ch}}=2G\lambda^{-1}\underset{*}{\beta}L^2l_1\tau^{-1}.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Отметим, что характерное число $\underset{1}{\mathrm{Ch}}$ чувствительно к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства. Указанное обстоятельство говорит об исключительной важности данного числа при моделировании процессов деформирования полуизотропных микрополярных термоупругих тел.

Кроме 9 характерных чисел (4.5), характерным числом может являться комбинация физически безразмерных определяющих модулей, т.е.

$$
\mathrm{Ch}=F_P(\nu,c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6),
\tag{4.6}
$$

а также совместные комбинации характерных чисел (4.5) и (4.6). Функция F_P вычисляется согласно правилу:

$$
F_P(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,\nu)=\sum_{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6,p_7}A_{p_1p_2\ldots p_7}c_1^{p_1}c_2^{p_2}c_3^{p_3}c_4^{p_4}c_5^{p_5}c_6^{p_6}\nu^{p_7},
\tag{4.7}
$$

где $p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6,p_7$ — целые числа, связанные соотношением

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = P. \tag{4.8}$$

После подстановки характерных чисел (4.5) в систему (4.4) получим:

$$\begin{gathered}
(1 + c_1)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (1 - c_1 + 2\nu(1-2\nu)^{-1})\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} + 2\underset{4}{\mathrm{Ch}}\, c_1\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi} + \\
+\underset{1}{\mathrm{Ch}}\, c_4'\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi} + \underset{1}{\mathrm{Ch}}\, c_5'\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi} - \underset{8}{\mathrm{C}h}\boldsymbol{\nabla}\theta = \underset{2}{\mathrm{Ch}}\,\ddot{\mathbf{u}}, \\
(1 + c_2)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi} + (1 - c_2 + 2c_3)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi} + \underset{1}{\mathrm{Ch}}^{-1} c_4'\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} + \\
+ \underset{1}{\mathrm{Ch}}^{-1} c_5'\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + 2\underset{1}{\mathrm{Ch}}^{-1}\underset{4}{\mathrm{Ch}}^{-1} c_6'\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi} - \\
-2\underset{1}{\mathrm{Ch}}^{-2}\underset{4}{\mathrm{Ch}}^{-2} c_1(2\boldsymbol{\phi} - \underset{4}{\mathrm{Ch}}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) - \underset{7}{\mathrm{Ch}}\boldsymbol{\nabla}\theta = \underset{3}{\mathrm{Ch}}\ddot{\boldsymbol{\phi}}, \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta - \underset{5}{\mathrm{Ch}}\,\partial_{.}\theta - \underset{6}{\mathrm{Ch}}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{\nabla}\partial_{.}u - \underset{9}{\mathrm{Ch}}\boldsymbol{\nabla}\cdot\partial_{.}\boldsymbol{\phi} = 0.
\end{gathered} \tag{4.9}$$

5. Распространение связанных гармонических волн полей температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в цилиндрическом волноводе. Рассмотрим задачу о распространении связанной гармонической волны с частотой ω вдоль оси свободного теплоизолированного длинного цилиндрического волновода радиуса a. В этом случае поля температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений можно представить в форме:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}e^{-i\omega t}, \quad \boldsymbol{\phi} = \mathbf{S}e^{-i\omega t}, \quad \theta = Be^{-i\omega t}, \tag{5.1}$$

где ω — циклическая частота гармонической волны; $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ — (комплексные) векторы пространственной поляризации волны; B — (комплексная) амплитуда температурного инкремента. Поиск решения удобно проводить в цилиндрической системе координат (r, φ, z).

В рассматриваемом случае удобно принять $l_1 = l_2 = l$. Тогда в качестве масштабных факторов линейного размера и времени примем радиус цилиндра $l = a$ и циклическую частоту $\tau = \omega^{-1}$. Замену переменных произведем согласно

$$\begin{aligned}
&r \to ar, \quad z \to az, \quad t \to \omega^{-1}t, \\
&\theta \to \theta_0\theta, \quad \partial_{.} \to \omega\partial_{.}, \\
&\mathbf{u} \to a\mathbf{u}, \quad \nabla \to a^{-1}\nabla, \\
&\underset{(2)}{\mathbf{t}} \to G\underset{(2)}{\mathbf{t}}, \quad \boldsymbol{\mu} \to GL\underset{(2)}{\boldsymbol{\mu}}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

В этом случае характерные числа (23) примут вид:

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{\mathrm{Ch}} = La^{-1}, \quad \underset{2}{\mathrm{Ch}} = \rho G^{-1}a^2\omega^2, \quad \underset{3}{\mathrm{Ch}} = \rho\Im G^{-1}L^{-2}a^2\omega^2, \\
&\underset{4}{\mathrm{Ch}} = 1, \quad \underset{5}{\mathrm{Ch}} = C\lambda^{-1}a^2\omega^1, \quad \underset{6}{\mathrm{Ch}} = 2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}\, a^2\omega^1, \\
&\underset{7}{\mathrm{Ch}} = 2\underset{*}{\beta}\,\theta_0 a, \quad \underset{8}{\mathrm{Ch}} = 2\theta_0\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}, \quad \underset{9}{\mathrm{Ch}} = 2G\lambda^{-1}\underset{*}{\beta}\, L^2 a\omega^1.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Анализируя выражения (5.3), можно заключить следующее:

$$\underset{1}{\mathrm{Ch}} \ll 1 \tag{5.4}$$

или

$$L \ll a, \tag{5.5}$$

т.е. характерный линейный размер (радиус цилиндрического волновода) существенно больше характерной нано/микродлины.

Второе характерное число можно преобразовать, вспоминая, что волновое число, соответствующее распространению поперечной/продольной волны, связано с циклической частотой и скоростями соотношениями:

$$\omega^2 = k_\perp^2 c_\perp^2 = k_\mathrm{P}^2 c_\mathrm{P}^2. \tag{5.6}$$

Кроме того, учитывая, что квадраты скоростей поперечной и продольной волн равны соответственно:

$$c_\perp^2 = G\rho^{-1}, \quad c_\mathrm{P}^2 = G\rho^{-1}(1-\nu)(1-2\nu)^{-1}, \tag{5.7}$$

получим

$$\underset{2}{\mathrm{Ch}} = a^2 k_\mathrm{P}^2 c_\mathrm{P}^2 c_\perp^{-2} = a^2 k_\perp^2. \tag{5.8}$$

Отметим, что в качестве масштабных факторов длины можно было бы выбрать волновые числа k_P или $k_\perp$, что говорит о гибкости методов моделирования по характерным числам.

Заключение. Настоящая работа посвящена моделированию деформирования микрополярных тел по характерным числам. Метод впервые появился в задачах гидроаэромеханики.

1. Развита 13-константная модель полуизотропного микрополярного термоупругого тела в терминах конвенциональных упругих модулей, характерной нано/микродлины, безразмерных микрополярных модулей и термических модулей.

2. Базовая энергетическая квадратичная форма выбрана как анизотропное E-представление свободной энергии Гельмгольца, найденная в результате определенного алгоритма.

3. Рассмотрена “прямая” форма уравнений динамики и уравнения теплопроводности полуизотропного микрополярного термоупругого тела.

4. Выполнен размерный анализ системы дифференциальных уравнений полуизотропного микрополярного термоупругого тела.

5. Предложен физически обоснованный перечень безразмерных характерных чисел, сформированный из микрополярных упругих и термических модулей.

6. Анализ размерностей выполнен исходя из метрической формы, преобразованной так, чтобы криволинейные координаты имели одну и ту же размерность. Затем осуществлен переход к безразмерным криволинейным координатам с помощью размерного множителя.

7. В качестве примера рассмотрено гармоническое волновое поле в длинном теплоизолированном цилиндрическом полуизотропном термоупругом волноводе. Перечень включает характерные комбинации с радиусом волновода, характерными фазовыми скоростями и волновыми числами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 23-21-00262.

Таблица 1. Основные тензоры и псевдотензоры микрополярной термомеханики

Терминологическое обозначение	Символьное обозначение	Размерность СИ	Алгебраический вес		
			$\overset{[-1]}{d\tau}$	$d\tau$	$\overset{[+1]}{d\tau}$
вектор трансляционных перемещений	$\mathbf{u}$	м	0	0	0
псевдовектор спинорных перемещений	$\boldsymbol{\phi}$	null	+1		+1
псевдовектор вихря поля	$\boldsymbol{\omega}$	null	+1	+1	+1
псевдовектор относительного микроповорота	$\boldsymbol{\varphi}$	null	+1	+1	+1
псевдотензор деформации изгиба—кручения	$\underset{(2)}{\boldsymbol{\kappa}}$	$м^{-1}$	+1	+1	+1
сопутствующий вектор деформации изгиба—кручения	$\underset{(1)}{\boldsymbol{\kappa}}$	$м^{-1}$	0	0	0
ассимметричный тензор деформаций	$\underset{(2)}{\boldsymbol{\epsilon}}$	null		0	0
плотность	ρ	$кг \cdot м^{-3}$	+1	−1	0
термодинамическая температура	θ	$кг \cdot м^{2} \cdot с^{-2}$	0	0	0
лучистое тепло в расчете на единицу объема	Q	$кг \cdot м^{-1} \cdot с^{-2}$	0	0	0
работа	A	$кг \cdot м^{2} \cdot с^{-2}$	0	0	0
псевдовектор потока энтропии	$\mathbf{J}$	$м^{-2} \cdot с^{-1}$	+1	−1	0
псевдовектор потока тепла	$\mathbf{h}$	$кг \cdot с^{-3}$	+1	−1	0
объемная плотность внутренней энергии	U	$кг \cdot м^{-1} \cdot с^{-2}$	+1	−1	0
объемная плотность свободной энергии Гельмгольца	Ψ	$кг \cdot м^{-1} \cdot с^{-2}$	+1	−1	0
объемная плотность энтропии	S	$м^{-3}$	+1	−1	0
объемная плотность контролируемого производства энтропии	Σ	$м^{-3} \cdot с^{-1}$	+1	−1	0

Окончание табл. 1

Терминологическое обозначение	Символьное обозначение	Размерность СИ	Алгебраический вес		
			$\overset{[-1]}{d\tau}$	$d\tau$	$\overset{[+1]}{d\tau}$
объемная плотность неконтролируемого производства энтропии	Ξ	$м^{-3} \cdot с^{-1}$	+1	–1	0
псевдовектор поверхностных сил	$\underset{(1)}{\mathbf{t}}$	$кг \cdot м^{-3} \cdot с^{-2}$	+1	–1	0
тензор силовых напряжений	$\underset{(2)}{\mathbf{t}}$	$кг \cdot м^{-3} \cdot с^{-2}$	+1	–1	0
псевдовектор объемных сил	$\mathbf{X}$	$кг \cdot м^{-2} \cdot с^{-2}$	+1	–1	0
вектор массовых сил	$\mathbf{f}$	$м \cdot с^{-2}$	0	0	0
псевдовектор поверхностных моментов	$\mathbf{m}$	$кг \cdot с^{-2}$	0	–2	–1
тензор моментных напряжений	$\underset{(2)}{\boldsymbol{\mu}}$	$кг \cdot с^{-2}$	0	–2	–1
сопутствующий псевдовектор моментных напряжений	$\underset{(1)}{\boldsymbol{\mu}}$	$кг \cdot с^{-2}$	+1	–1	0
сопутствующий псевдовектор силовых напряжений	$\boldsymbol{\tau}$	$кг \cdot м^{-1} \cdot с^{-2}$	0	–2	–1
псевдовектор объемных моментов	$\mathbf{Y}$	$кг \cdot м^{-1} \cdot с^{-2}$	0	–2	–1
псевдовектор массовых моментов	$\mathbf{l}$	$м^2 \cdot с^{-2}$	–1	–1	–1
коэффициент микроинерции	$\mathfrak{I}$	$м^2$	–2	–2	–2

Таблица 2. Определяющие псевдотензоры и псевдоскаляры полуизотропной микрополярной термоупругости

Терминологическое обозначение	Символьное обозначение	Размерность СИ	Алгебраический вес		
			$\overset{[-1]}{d\tau}$	$d\tau$	$\overset{[+1]}{d\tau}$
определяющий тензор I	$\underset{\mathrm{I}}{\mathrm{E}}^{(ik)(lm)}$	$кг \cdot м^{-1} \cdot с^{-2}$	+1	0	–1
определяющий тензор II	$\underset{\mathrm{II}}{\mathrm{E}}^{(ik)(lm)}$	$кг \cdot м \cdot с^{-2}$	–1	–2	–3
определяющий тензор III	$\underset{\mathrm{III}}{\mathrm{E}}^{(ik)(lm)}$	$кг \cdot с^{-2}$	0	–1	–2
определяющий тензор IV	$\underset{\mathrm{IV}}{\mathrm{E}}^{(ik)}$	$кг \cdot м^{-1} \cdot с^{-2}$	0	–1	–2

Окончание табл. 2

Терминологическое обозначение	Символьное обозначение	Размерность СИ	Алгебраический вес		
			$\overset{[-1]}{d\tau}$	$d\tau$	$\overset{[+1]}{d\tau}$
определяющий тензор V	$\underset{\mathrm{V}}{\mathrm{E}}{}^{(ik)}_{\cdot\, l}$	$кг \cdot с^{-2}$	–1	–2	–3
определяющий тензор VI	$\underset{\mathrm{VI}}{\mathrm{E}}{}^{(ik)l}$	$кг \cdot м^{-2} \cdot с^{-2}$	+1	0	–1
определяющий тензор VII	$\underset{\mathrm{VII}}{\mathrm{E}}{}_{(ik)l}$	$кг \cdot м^{-1} \cdot с^{-2}$	0	–1	–2
определяющий тензор VIII	$\underset{\mathrm{VIII}}{\mathrm{E}}{}_{(il)}$	$кг \cdot м^{-1} \cdot с^{-2}$	–1	–2	–3
определяющий тензор IX	$\underset{\mathrm{IX}}{\mathrm{E}}{}^{(il)}$	$кг \cdot м^{-1} \cdot с^{-2}$	+1		–1
определяющий тензор X	$\underset{\mathrm{X}}{\mathrm{E}}{}^{\cdot\, l}_{i\, \cdot}$	$кг \cdot с^{-2}$	0	–1	–2
определяющий тензор XI	$\underset{\mathrm{XI}}{\mathrm{E}}{}^{(ik)}$	$м^{-3}$	+1	0	–1
определяющий тензор XII	$\underset{\mathrm{XII}}{\mathrm{E}}{}^{(ik)}$	$м^{-2}$	0	–1	–2
определяющий тензор XIII	$\underset{\mathrm{XIII}}{\mathrm{E}}{}_{i}$	$м^{-3}$	0	–1	–2
определяющий тензор XIV	$\underset{\mathrm{XIV}}{\mathrm{E}}{}^{i}$	$м^{-2}$	+1	0	–1
определяющий тензор XV	$\underset{\mathrm{XV}}{\mathrm{E}}$	$с^{-1}$	+1	0	–1
модуль сдвига	G	$кг \cdot м^{-1} \cdot с^{-2}$	+1	0	–1
коэффициент Пуассона	ν	null	0	..	0
характерная микродлина	L	м	–1	–1	–1
определяющий скаляр i	c_1	null		0	0
определяющий скаляр ii	c_2	null	0	0	0
определяющий скаляр iii	c_3	null	0	0	0
определяющий скаляр iv	c_4	null	0	0	0
определяющий скаляр v	c_5	null	0	0	0
определяющий скаляр vi	c_6	null	0	0	0
коэффициент линейного теплового расширения	$\underset{*}{\alpha}$	$кг^{-1} \cdot м^{-2} \cdot с^{2}$	0	0	0
коэффициент теплового искажения	$\underset{*}{\beta}$	$кг^{-1} \cdot м^{-3} \cdot с^{2}$	+1	+1	+1
коэффициент теплопроводности	λ	$м^{-1} \cdot с^{-1}$	+1	0	–1
теплоемкость на единицу объема	C	$кг \cdot м^{2} \cdot с^{-3}$	+1	0	–1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lakes R.* Composites and metamaterials. Singapore: World Scientific, 2020.
2. *Радаев Ю.Н.* Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. № 3. С. 504–517. https://doi.org/10.14498/vsgtu1635
3. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* К теории линейных гемитропных микрополярных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4(46). С. 16–24. https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.89.81.031
4. *Murashkin E.V., Radaev Y.N.* Coupled thermoelasticity of hemitropic media. pseudotensor formulation // Mechanics of Solids. 2023. V. 58. № 3. P. 802–813. http://dx.doi.org/10.3103/s0025654423700127
5. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 3(57). С.112–128. http://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.010
6. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 4(58). С. 86–120. http://doi.org/10.37972/chgpu.2023.58.4.010
7. *Радаев Ю.Н.*, *Мурашкин Е.В.* Псевдотензорная формулировка механики полуизотропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 4. С. 399–412. https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412
8. *Murashkin E.V., Radaev Y.N.* On a micropolar theory of growing solids // Вестник Самарско-го государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020. Т. 24. № 3. С. 424–444. https://doi.org/10.14498/vsgtu1792
9. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. Paris: Herman et Fils, 1909. vi+226 p.
10. *Nowacki W.* Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972. 285 p.
11. *Nowacki W.* Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
12. *Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. V. 24. № 4. P. 752–761. https://doi.org/10.14498/vsgtu1799
13. *Гуревич Г.Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. 408 с. [*G.B. Gurevich* Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen: Noordhoff, 1964. 429 p.]
14. *McConnell A.J.* Application of tensor analysis. New York: Dover Publications Inc., 1957. 318 p.

15. *Сокольников И.С.* Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с. [*Sokolnikoff I.S.* Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p.]
16. *Схоутен Я.А.* Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. 456 с. [*Schouten J*.A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 p.]
17. *Synge J.L., Schild A.* Tensor calculus. V. 5. Courier Corporation, 1978. 324 p.
18. *Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.* Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: Физматлит, 2009. 156 с.
19. *Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Сарат. ун-т, 2010. 328 с.
20. *Биркгоф Г.* Гидродинамика: Методы, факты: подобие. М.: Иностранная литература, 1963. 246 с.
21. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 440 с.
22. *Кутателадзе С.С.* Анализ подобия и физические модели. 1986.
23. *Barenblatt G.I.* Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics: dimensional analysis and intermediate asymptotics. Cambridge: Cambridge University Press, 1996. https://doi.org/10.1017/CBO9781107050242
24. *Zohuri B.* Similitude Theory and Applications. In: Dimensional Analysis and Self-Similarity Methods for Engineers and Scientists. Cham: Springer, 2015. https://doi.org/10.1007/978-3-319-13476-5_2
25. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1950.
26. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 4 (58). С. 86–120. http://doi.org/10.37972/chgpu.2023.58.4.010
27. *Murashkin E.V., Radaev Y.N.* Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. V. 58. № 9. P. 802–813. http://dx.doi.org/10.3103/s0025654423700127
28. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Теплопроводность микрополярных тел, чувствительных к зеркальным отражениям пространства // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2023. Т. 165. № 4. С. 389–403. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.389-403
29. *Jeffreys H.* Cartesian Tensors. Cambridge University Press. 1931. 101 p.
30. *Radaev Y. N.* Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. V. 58. № 5. P. 1517–1527. https://doi.org/10.3103/S0025654423700206
31. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 106–117. https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012
32. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127. https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013

33. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Приведение естественных форм полуизотропных энергетических потенциалов к конвенциональным // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 4(54). С. 108–115.
http://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009
34. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике полуизотропных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 3(53). С. 86–100.
http://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010
35. *Мурашкин Е.В.* О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 1(55). С. 110–121.
http://doi.org/10.37972/chgpu.2023.55.1.012
36. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2021. Т. 25. № 4. С. 776–786.
http://doi.org/10.14498/vsgtu1883
37. *Murashkin E.V., Radaev Y.N.* On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // Mechanics of Solids. 2022. V. 57. № 2. P. 205–213.
http://doi.org/10.3103/s0025654422020108
38. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* The schouten force stresses in continuum mechanics formulations // Mechanics of Solids. 2023. V. 58. № 1. P. 153–160.
http://doi.org/10.3103/s0025654422700029

CHARACTERISTIC CONSTITUTIVE NUMBERS IN SEMI ISOTROPIC COUPLED THERMOELASTICITY

E. V. Murashkin[a, *] and Y. N. Radayev[a, **]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

**e-mail: murashkin@ipmnet.ru, **e-mail: radayev@ipmnet.ru*

Abstract – In continuum mechanics (especially in hydroaeromechanics), methods of modeling flow (deformation) by characteristic numbers are widely used. The present study is devoted to the search for characteristic combinations of constitutive thermoelastic modules, geometric and thermomechanical parameters of the boundary value problem. Modeling the micropolar solids deformation by characteristic numbers is characterized by a sufficiently large number (13) of constitutive modules. The constitutive equations, the dynamic equations and the heat conduction equation for a semi-isotropic micropolar thermoelastic continuum are derived in a linear approximation. A dimensional analysis of the governing system of differential equations is carried out. A physically consistent series (9 primary and several arbitrary) of dimensionless characteristic combinations of constitutive constants is proposed. The characteristic numbers for harmonic waves propagating along the axis of a stress free thermally insulated long cylindrical semi-isotropic thermoelastic waveguide are obtained and discussed.

Keywords: thermal conductivity, micropolar thermoelastic solid, semi-isotropic solid, characteristic number, dimensional analysis, nano/microlength, nano/microscale

REFERENCES

1. *Lakes R.* Composites and Metamaterials. Singapore: World Scientific, 2020.
2. *Radayev Y.N.* The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2018. V. 22. № 3. P. 504–517.
https://doi.org/10.14498/vsgtu1635
3. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On the theory of linear micropolar hemitropic media // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2020. V. 4. № 46. P. 16–24.
https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.89.81.031
4. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Coupled thermoelasticity of hemitropic media. pseudotensor formulation // Mech. Solids. 2023. V. 58. № 3. P. 802–813.
http://doi.org/10.3103/s0025654423700127
5. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On the polyvariance of the base equations of coupled micropolar thermoelasticity // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2023. V. 3. № 57. P. 112–128.
https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.010
6. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Multiweights thermomechanics of hemitropic micropolar solids // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2023. V. 4. № 58. P. 86–120.
https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.58.4.010
7. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Probl. Prochn. Plastichn. 2020. V. 82. № 4. P. 399–412.
https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412
8. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On a micropolar theory of growing solids // Vestn. Samarsk. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2020. V. 24. № 3. P. 424–444.
https://doi.org/10.14498/vsgtu1792
9. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des Corps Déformables. Paris: Herman et Fils, 1909. vi+226 p.
10. *Nowacki W.* Theory of Micropolar Elasticity. Berlin: Springer, 1972. 285 p
11. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
12. *Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On the Neuber theory of micropolarelasticity. A pseudotensor formulation // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2020. V. 24. № 4. P. 752–761.
https://doi.org/10.14498/vsgtu1799
13. *Gurevich G.B.* Foundations of the Theory of Algebraic Invariants. M., L.: GITTL, 1948; Groningen: Noordhoff, 1964.

14. *McConnell A.J.* Application of Tensor Analysis. NY: Dover Publ. Inc., 1957.
15. *Sokolnikoff I.S.* Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964; M.: Nauka, 1971.
16. *Schouten J.A.* Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965.
17. *Synge J.L., Schild A.* Tensor Calculus. Courier Corporation, 1978.
18. *Kovalev V.A., Radayev Y.N.* Elements of the Classical Field Theory: Variational Symmetries and Geometric Invariants. M.: Fizmatlit, 2009 [in Russian].
19. *Kovalev V.A., Radayev Y.N.* Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics. Saratov: Saratov Univ., 2010 [in Russian].
20. *Birkhoff G.* Hydrodynamics: A Study in Logic, Fact, and Similitude. Dover Publications, 1955.
21. *Sedov L.I.* Similarity and Dimensional Methods in Mechanics. M.: Nauka, 1977; Boca Raton: CRC Press, 1993.
https://doi.org/10.1201/9780203739730
22. *Kutateladze S.S.* Analysis of Similarity and Physical Models. Novosibirsk: Nauka, 1986 [in Russian].
23. *Barenblatt G.I.* Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics: Dimensional Analysis and Intermediate Asymptotics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
https://doi.org/10.1017/CBO9781107050242
24. *Zohuri B.* Similitude theory and applications. In: Dimensional Analysis and Self-Similarity Methods for Engineers and Scientists. Cham: Springer, 2015. P. 93–193.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-13476-5_2
25. *Loitsyansky L.G.* Mechanics of Liquids and Gases. M.: Nauka, 1950; NY: Begell House, 1995.
26. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Multiweights thermomechanics of hemitropic micropolar solids // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2023. V. 4. № 58. P. 86–120.
https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.58.4.010
27. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Coupled thermoelasticity of hemitropic media. pseudotensor formulation // Mech. Solids. 2023. V. 58. № 9. P. 802–813.
http://doi.org/10.3103/s0025654423700127
28. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Heat conduction of micropolar solids sensitive to mirror reflections of three-dimensional space // Uch. Zap. Kazan. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2023. V. 165. № 4. P. 389–403.
https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.389-403
29. *Jeffreys H.* Cartesian Tensors. Cambridge Univ. Press, 1931.
30. *Radayev Y.N.* Tensors with constant components in the constitutive equations of hemitropic micropolar solids // Mech. Solids. 2023. V. 58. № 5. P. 1517–1527.
https://doi.org/10.3103/S0025654423700206
31. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Elements of the theory // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2022. V. 2. № 52. P. 106–117.
https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012
32. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Applications to continuum mechanics // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2022. V. 2. № 52. P. 118–127.
https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013

33. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Reducing natural forms of hemitropic energy potentials to conventional ones // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2022. V. 4. № 54. P. 108–115.
https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009
34. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On two base natural forms of asymmetric force and couple stress tensors of potential in mechanics of hemitropic solids // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2022. V. 3. № 53. P. 86–100.
https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010
35. *Murashkin E.V.* On the relationship of micropolar constitutive parameters of thermodynamic state potentials // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2023. V. 1. № 55. P. 110–121.
https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.55.1.012
36. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On a ordering of area tensor elements orientations in a micropolar continuum immersed in an external plane space // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2021. V. 25. № 4. P. 776–786.
https://doi.org/10.14498/vsgtu1883
37. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // Mech. Solids. 2022. V. 57. № 2. P. 205–213.
http://doi.org/10.3103/s0025654422020108
38. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* The schouten force stresses in continuum mechanics formulations // Mech. Solids. 2023. V. 58. № 1. P. 153–160.
http://doi.org/10.3103/s0025654422700029