

УДК 539.374

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КЭП-МОДЕЛИ УПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ НЕКОМПАКТНЫХ СРЕД В УСЛОВИЯХ СЖИМАЮЩЕГО СРЕДНЕГО НАПРЯЖЕНИЯ

© 2024 г. А. А. Адамов^{a, *}, И. Э. Келлер^{a, **},
С. Г. Жилин^{b, ***}, Н. А. Богданова^{b, ****}

^aИнститут механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

^bИнститут машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре,
Россия

*e-mail adamov@icmm.ru, ** e-mail kie@icmm.ru, ***e-mail zhilin@imim.ru,
****e-mail joyful289@inbox.ru

Поступила в редакцию 30.01.2024

После доработки 30.01.2024

Принята к публикации 30.01.2024

Предложена программа базовых испытаний и методика идентификации трехмерной модели упругопластического поведения изотропной пористой либо порошкообразной консолидируемой среды, испытывающей произвольное квазистатическое нагружение в условиях сжимающего среднего напряжения при комнатной температуре. Рассматриваемая среда в условиях сжимающих средних напряжений уплотняется при повышении эффективного напряжения, что приводит к нелинейному изменению упругих модулей, упрочнению и дилатансии (связанности сдвиговых и объемных компонент деформаций) в области текучести. Для описания подобного поведения рассматривается кэп-модель Димаджо и Сэндлера, присутствующая в пакетах прикладных программ. В качестве базовых испытаний рассматриваются свободное и стесненное сжатие цилиндрического образца по специальной программе, содержащей этапы нагружки и разгрузки при последовательном повышении амплитудного напряжения. Образцы с заданной пористостью для испытаний на свободное сжатие изготавливаются с помощью оснастки испытаний на стесненное сжатие. По начальному наклону кривых разгрузки определяются значения модулей упругости при свободном и стесненном сжатии в некотором диапазоне изменения пористости, по которым определяется коэффициент Пуассона. Пять констант кэп-модели корректно и явно определяются по кривой деформирования материала при стесненном сжатии в широком диапазоне изменения осевой деформации (и плотности), напряжению течения при свободном сжатии образца при некоторой плотности и предположению о равенстве коэффициента поперечной деформации в области текучести коэффициенту Пуассона. Упругие и пластические константы определены по данным испытаний порошкообразного парафина марки Т1 фракции 0.63 мм. Соответствующую

шая модель применима для численного моделирования процессов экструзии и заполнения формы для литья по выплавляемым моделям, процессов изготовления заготовок неплавких полимерных композитов порошковой технологией, штамповки уплотнительных элементов из гибкого графита и других процессов обработки давлением некомпактных сред.

Ключевые слова: некомпактные среды, уплотнение, кэп-модель пластичности, упругие константы, идентификация, эксперимент, порошкообразный парафин

DOI: 10.31857/S1026351924040046, **EDN:** UDFZLA

1. Введение. Некоторые технологии получения изделий имеют дело с обработкой давлением некомпактных материалов в условиях сжимающих средних напряжений. Примером подобного процесса является штамповка изделий из проката терморасширенного графита (гибкого графита), пористость которого составляет 60–70%, применяемых для изготовления химически инертных прокладок, электродов, датчиков, устройств вибродемпфирования, теплоизоляции, защиты от электромагнитных полей [1, 2]. В литературе предлагается определять механические и прочностные свойства данного материала исключительно из испытаний на одноосное растяжение и индентирование [3–5]. Воспроизводимые в подобных испытаниях напряженно-деформированные состояния не характеризуются сжимающими средними напряжениями и уплотнением и потому не подходят для расчетов рассматриваемых процессов, в которых подобные состояния реализуются во всем объеме изделия. Еще одним примером является процесс экструзии и заполнения формы порошковым воскообразным материалом, который может быть использован в технологии литья по выплавляемым моделям. Этот способ обладает рядом преимуществ по сравнению с традиционной технологией жидкого заполнения формы, требующей применения дорогостоящих литевых восков и керамик для исключения образования усадочных дефектов модели при ее затвердевании и растрескивания керамической оболочки на стадиях выплавления и прокатки [6]. Определение упруговязкопластических свойств подобных порошковых материалов является нетривиальной задачей [7–9]. Порошковые технологии используются при производстве изделий из неплавких полимеров, имеющих очень большую молекулярную массу, и наполненных композитов на их основе [10, 11]. Разработка методики экспериментальной идентификации подходящих моделей упругопластичности для численного расчета процессов обработки давлением некомпактных сред поэтому представляется необходимой и актуальной задачей.

Необратимое изменение плотности (и пористости) исследуемого класса материалов изменяет его упругие, пластические и предельные свойства. Подходящие модели материала встречаются среди уравнений состояния пористых, порошкообразных, геологических и других некомпактных сред и описывают связанность сдвиговых и объемных деформаций (дилатансию), которую они проявляют. Обзоры подобных трехмерных моделей упругопластичности в рамках теории пластического течения приведены в [12–16].

Рассматриваемые в контексте настоящей работы технологические процессы обработки давлением сопровождаются уплотнением, а не разрыхлением, материала, поэтому модель должна иметь замкнутую поверхность текучести в направлении сжимающих средних напряжений при любом значении интенсивности напряжений в пространстве напряжений. Среди подходящих моделей можно выделить кэп-модели, поверхность текучести которых состоит из конической либо пирамидальной части, течение на которой соответствует разрыхлению, и эллиптической крышки, течение на которой соответствует уплотнению материала. Эти модели обладают гибкостью при аппроксимации экспериментальных данных и удобством использования в численных расчетах; две из них, Димаджио—Сэндлера [17] и Швера—Мюррея [18], включены в пакет программ LS-DYNA® [19].

Далее в работе приводится формулировка простейшей кэп-модели Димаджио—Сэндлера, содержащей пять пластических и две упругие константы, и выводятся соотношения, описывающие процессы свободного и стесненного сжатия в рамках этой модели. Также приводится выражение для коэффициента Пуассона через упругие модули при свободном и стесненном сжатии. Представлены результаты испытаний порошкообразного парафина марки Т1 фракции 0.63 мм на свободное и стесненное сжатие по программам монотонного и ступенчатого нагружения с последовательными разгрузками. Далее данные этих базовых экспериментов с различными напряженно-деформированными состояниями со сжимающим средним напряжением используются для калибровки модели, при этом не требуется привлечения каких-либо методов решения обратных некорректных задач. Найденные константы позволяют прогнозировать упругопластическое поведение материала при его нагружении в широком диапазоне напряженных состояний.

2. Кэп-модель пластического течения некомпактных сред. Уравнения пластического течения некомпактных сред записываются в терминах переменных p, s , где $p = -J_1$, $J_1 = \sigma_{ii}$, $\alpha = J_2^{1/2}$, $J_2' = s_{ij}s_{ij}/2$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}/3$, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений. Переменная p равна утроенному среднему напряжению, взятому с противоположным знаком, является положительной при сжимающих средних напряжениях и традиционно используется в механике грунтов и порошкообразных сред. Переменная s с точностью до множителя равняется интенсивности сдвиговых напряжений. Для пластических сред с зависимостью от среднего напряжения рассматривают кривую текучести в полуплоскости $(p, s \geq 0)$, называемой диаграммой Бужинского.

В модели Димаджио—Сэндлера [17] поверхность текучести в пространстве главных напряжений описывается правильным круговым конусом текучести Друкера—Прагера, который замыкается эллиптической “крышкой”. Закон пластического течения, ассоциированный с данной поверхностью, описывает пластическое течение на конической части поверхности, сопровождающийся разрыхлением, и пластическое течение на эллиптической части, сопровождаемое уплотнением. Уравнения, задающие поверхность текучести, выглядят следующим образом:

$$f_1(s, p) = s - F_1(p) = 0, \quad F_1(p) = \alpha + \theta p, \quad p < L \quad (2.1)$$

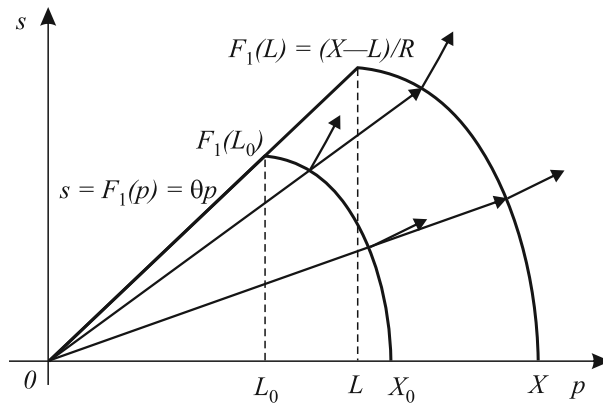


Рис. 1. Кривая текучести в модели Димаджо–Сэндлера на диаграмме Бужинского при равенстве нулю коэффициента сцепления для двух состояний упрочнения и направления нормалей в точках текучести при пропорциональном нагружении.

и

$$f_2(s, p, L) = s - F_1(p, L) = 0,$$

$$F_2(p, L) = \sqrt{(X(L) - L)^2 - (p - L)^2} / R, \quad L \leq p \leq X, \quad (2.2)$$

где α – коэффициент сцепления, θ – угол внутреннего трения и R – суть положительные константы, а $L > 0$ – внутренняя переменная, задающая центр эллипса, $X = X(L)$ – функция, значение которой задает точку на оси p , в которой эту ось пересекает крышка (рис. 1). Уравнение

$$X(L) - L = RF_1(L) \quad (2.3)$$

задает условие стыковки конической и эллиптической частей поверхности текучести и закон эволюции эллиптической части при изменении L . Изменение L в процессе пластического уплотнения среды описывается уравнением:

$$X = X_0 - \frac{1}{D} \ln \left(1 - \frac{\varepsilon_v^p}{W} \right), \quad \varepsilon_v^p = - \int_0^t \dot{\varepsilon}_{kk}^p dt, \quad (2.4)$$

где D , W , X_0 – положительные константы, а ε_v^p – объемная пластическая деформация, взятая с противоположным знаком.

Ассоциированный с функциями (2.1) или (2.2) закон пластического течения

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \partial f_{1,2} / \partial \sigma_{ij} \quad (2.5)$$

принимает вид

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} (s_{ij} + 2(\alpha + \theta p) \theta \delta_{ij}) \quad (2.6)$$

при условии (2.1) течения на конической части поверхности текучести либо

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \left(R^2 s_{ij} - 2(p - L) \delta_{ij} \right) \quad (2.7)$$

при условии (2.2) течения на эллиптической части поверхности текучести. Уравнения (2.6) и (2.7) прогнозируют различные виды дилатансии: пластическое разрыхление

$$\dot{\varepsilon}_v^p = -3\theta \dot{e}^p < 0, \quad (2.8)$$

где $\dot{e}^p = \sqrt{2\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p}$, $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \dot{\varepsilon}_{kk}^p \delta_{ij} / 3$ (при течении на конической части поверхности текучести, когда $p < L$) и пластическое уплотнение

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \frac{3(p - L)}{R^2 s} \dot{e}^p > 0 \quad (2.9)$$

(при течении на эллиптической части поверхности текучести, когда $L \leq p \leq X$) при накоплении сдвиговых деформаций

$$e^p = \int_0^t \dot{e}^p dt.$$

Выражения (2.8) и (2.9) содержат утроенные тангенсы угла наклона нормали к конической либо эллиптической части поверхности текучести, которые можно получить частным дифференцированием (2.1) и (2.2) по s и p . Это означает, что направление течения в плоскости $(\dot{\varepsilon}_v^p, \dot{e}^p)$ совпадает с нормалью к сечению поверхности текучести плоскостью (p, s) , если ось $\dot{e}^p$ растянуть с коэффициентом 3. Чтобы ассоциированный закон выполнялся в плоскости Бужинского, можно переопределить выражения для интенсивностей сдвиговых напряжений $s = (s_{ij}s_{ij}/6)^{1/2}$ и скоростей касательных пластических деформаций $\dot{e}^p = \sqrt{6\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p}$. Однако далее в аналитических выражениях будут оставлены традиционные определения s и $\dot{e}^p$, но значения тангенса угла наклона вектора скоростей пластических деформаций на плоскости Бужинского h будут рассчитываться из условия нормальности к поверхности текучести:

$$h = \frac{3\dot{e}^p}{\dot{\varepsilon}_v^p} = \frac{R^2 s}{p - L}. \quad (2.10)$$

Модель Димаджио—Сэндлера реализована в пакете программ LS-DYNA® под именем MAT_025 [19].

В настоящей работе будут рассматриваться процессы при $L \leq p \leq X$, сопровождающиеся уплотнением материала. Примем упрощенное описание конической части поверхности текучести, не учитывая коэффициент сцепления: (рис. 1). Тогда (2.3) с учетом (2.1) примет вид

$$X(L) - L = R\theta L \quad (2.11)$$

и условие текучести на эллиптической части поверхности текучести запишется следующим образом:

$$R^2 s^2 = R^2 \theta^2 L^2 - (p - L)^2. \quad (2.12)$$

Выражение (2.5) при этом не изменится. Поверхность текучести в таком случае описывается тремя материальными параметрами — θ , R , L_0 (либо X_0), а параметры D , W описывают деформационное упрочнение (уплотнение). Уравнения модели в форме (2.12), (2.7) и (2.4) будут далее рассматриваться для двух видов испытаний.

3. Некоторые соотношения кэп-модели для базовых испытаний. Для идентификации пяти параметров модели Димаджио—Сэндлера по экспериментальным данным выведем ряд соотношений, частично представленных ранее [20].

Свободное сжатие. отождествим радиальную и окружную координаты цилиндра с осями 1 и 2, а направление сжатия — с осью 3. В таком случае $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$, $p = -\sigma_{33} = \sigma > 0$, $s_{11} = s_{22} = \sigma/3$, $s_{33} = -2\sigma/3$, $s = \sigma/\sqrt{3}$. На диаграмме Бужинского данному нагружению соответствует прямая

$$s = p/\sqrt{3}, \quad (3.1)$$

составляющая угол $\pi/6$ с осью p . С учетом соотношения (3.1) из уравнения (2.12) получается линейная связь s , p и σ с L :

$$\sigma = p = \frac{3 + R\sqrt{3[(R^2 + 3)\theta^2 - 1]}}{R^2 + 3} L. \quad (3.2)$$

Условие неотрицательности подкоренного выражения в (3.2) требует, чтобы

$$\theta \geq 1/\sqrt{R^2 + 3}. \quad (3.3)$$

Для этого при любом $R > 0$ достаточно, чтобы $\theta \geq 1/\sqrt{3}$, то есть свободное сжатие соответствовало бы пластическому течению на крышке поверхности текучести.

Компоненты тензора скоростей пластических деформаций (2.7) для данного вида нагружения примут вид

$$\dot{\varepsilon}_{11}^p = \dot{\varepsilon}_{22}^p = \dot{\lambda} \left(\left(\frac{R^2}{3} - 2 \right) \sigma + 2L \right), \quad \dot{\varepsilon}_{33}^p = \dot{\lambda} \left(-2 \left(\frac{R^2}{3} + 1 \right) \sigma + 2L \right),$$

откуда с учетом (3.2) и интегрирования по времени можно получить связь объемной ε_v^p и осевой $\varepsilon^p \equiv -\varepsilon_{33}^p$ пластических деформаций:

$$\varepsilon_v^p = 9 \frac{-R + \sqrt{3[(R^2 + 3)\theta^2 - 1]}}{(R^2 + 3)\sqrt{3[(R^2 + 3)\theta^2 - 1]}} \varepsilon^p. \quad (3.4)$$

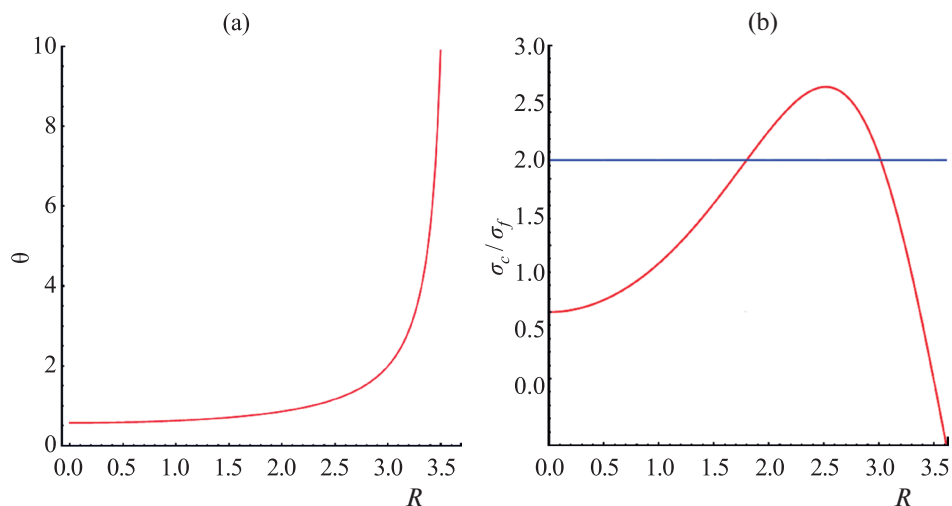


Рис. 2. Зависимости θ (а) и σ/σ_f (б) от R при $\nu=0.22$.

При ограничениях на константы $R > 0$ и (3.3) коэффициент в (3.4) имеет положительный знак, что согласно (2.4) означает уплотнение. С помощью (2.9), (3.2) и (2.10) можно показать, что в рамках модели траектория деформаций в плоскости (ε_0^p, e^p) при свободном сжатии также оказывается прямой линией с тангенсом угла наклона:

$$h = \frac{R \left(3 + R \sqrt{3 \left((R^2 + 3) \theta^2 - 1 \right)} \right)}{\sqrt{3} \left(\sqrt{3 \left((R^2 + 3) \theta^2 - 1 \right)} - R \right)}. \quad (3.5)$$

Можно найти выражение для коэффициента поперечной деформации (“пластического коэффициента Пуассона”)

$$\nu_p = - \frac{\dot{\varepsilon}_{11}^p}{\dot{\varepsilon}_{33}^p} = \frac{9R + (R^2 - 6) \sqrt{3 \left((R^2 + 3) \theta^2 - 1 \right)}}{2(R^2 + 3) \sqrt{3 \left((R^2 + 3) \theta^2 - 1 \right)}}, \quad (3.6)$$

который при испытании на свободное сжатие в рамках модели оказывается константой и изменяется в пределах от -1 до 0.5 , если изменять параметры R , θ в разрешенных пределах. Равенство (3.6) устанавливает зависимость $\theta(R)$ при заданном значении ν_p :

$$\theta^2 = \frac{1}{R^2 + 3} \left(1 + \frac{27R^2}{(2\nu_p - 1)R^2 + 6(1 + \nu_p)} \right). \quad (3.7)$$

При этом параметр R ограничен и не может превышать значения

$$R_* = \sqrt{\frac{6(1 + \nu_p)}{1 - 2\nu_p}}. \quad (3.8)$$

График зависимости $\theta(R)$ при $\nu = 0.22$ ($R_* = 3.62$) приведен на рис. 2, а. С учетом (3.6) направление вектора (ε_v^p, e^p) в плоскости Бужинского, задаваемое выражением (3.5), не зависит от $R \in [0, R_*]$ и $q [1/(R^2 + 3)^{1/2}, +\alpha]$ по отдельности, а зависит только от ν_p :

$$h = \frac{2\sqrt{3}(1 + \nu_p)}{1 - 2\nu_p}. \quad (3.9)$$

При $\nu_p = 0.22$ коэффициент h приблизительно равен 7.55. Доля осевой пластической деформации в объемной пластической деформации (3.9) при свободном сжатии в силу (3.6) также оказывается функцией только ν_p :

$$\varepsilon_v^p = (1 - 2\nu_p)\varepsilon^p. \quad (3.10)$$

При $\nu_p = 0.22$ эта доля составляет 0.56.

Значение коэффициента поперечной деформации можно оценить по изменению поперечного размера образца при испытании на свободное сжатие. Поскольку трудно обеспечить точность подобных измерений в пределах изменения осевых деформаций порядка 10% и более вследствие неизбежного искривления боковой поверхности, рассматривается альтернативное соображение. В упругом диапазоне коэффициент поперечной деформации переходит в коэффициент Пуассона ν , который можно определить более точно (см. ниже), не прибегая к измерению поперечного размера образца. Поскольку рассматриваемая модель не способна описывать изменение формы эллиптической части поверхности текучести (определяемой константами R и θ) в процессе уплотнения, и ν_p является константой, для совместности значения коэффициента поперечной деформации при переходе от упругого поведения к упругопластическому необходимо потребовать

$$\nu_p = \nu. \quad (3.11)$$

Линейность соотношений между σ и L , а также e^p и e_v^p , пропорциональность траектории деформаций и постоянство коэффициента поперечной деформации обусловлены истокообразным видом функции (2.1) при $\alpha = 0$.

Уравнение (2.4) с учетом (2.11) позволяет связать L с ε_v^p :

$$L = \frac{1}{1 + R\theta} \left(X_0 - \frac{1}{D} \ln \left(1 - \frac{\varepsilon_v^p}{W} \right) \right). \quad (3.12)$$

Стесненное сжатие. Для данного испытания контролируется напряжение $\sigma_{33} = -\sigma$, $\sigma_{11} = \sigma_{22}$, $p = \sigma - 2\sigma_{11}$, $\sigma_{33} = -2(\sigma + \sigma_{11})/3$, $s_{11} = s_{22} = (\sigma + \sigma_{11})/3$, $s = (\sigma + \sigma_{11})/3^{1/2}$. Из кинематических ограничений стесненного сжатия $\dot{\varepsilon}_{11}^p = \dot{\varepsilon}_{22}^p = 0$ и уравнений пластического течения (2.7) следует $s_{11} = s_{22} = 2(p$

– L/R^2 , откуда $s_{33} = -4(p - L)/R^2$, $s = 2\sqrt{3}(p - L)/R^2$, и из критерия текучести (2.12) вытекает

$$p = \left(1 + \frac{\theta R^2}{\sqrt{R^2 + 12}} \right) L. \quad (3.13)$$

Кроме того, из $s_{11} = \sigma_{11} + p/3 = 2(p - L)/R^2$ и определения $p = \sigma - 2\sigma_{11}$ следует $p = (3R^2\sigma + 12L)/(R^2 + 12)$. Из (3.13) с учетом последнего равенства следует соотношение

$$\sigma = \frac{1 + \theta\sqrt{R^2 + 12}}{3} L. \quad (3.14)$$

Из (3.14) следует, что при стесненном сжатии на диаграмме Бужинского реализуется прямолинейная траектория нагружения:

$$s = \frac{2\sqrt{3}\theta}{\sqrt{R^2 + 12} + \theta R^2} p, \quad (3.15)$$

наклон которой с осью p определяется константами θ и R (при условии (3.11) – только R). Зависимость внутренней переменной L от осевой пластической деформации $\varepsilon^p = -\varepsilon_{33}^p$ определяется законом (3.12) с учетом равенства

$$\varepsilon_v^p = \varepsilon^p. \quad (3.16)$$

В сравнении со свободным сжатием (3.10) стесненное сжатие (3.16) в $1/(1 - 2\nu_p)$ раз более интенсивно уплотняет материал при одинаковой осевой пластической деформации. Из (2.9) с учетом (3.13) и (3.15) можно показать, что траектория пластических деформаций в плоскости (ε_v^p, e^p) при стесненном сжатии оказывается прямой линией

$$e^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_v^p \quad (3.17)$$

с тангенсом угла наклона (2.10) $h = 2\sqrt{3}$, приблизительно равным 3.46. При условии (3.7) из равенств (3.2) и (3.14) можно определить зависимость отношения напряжений течения при стесненном и свободном сжатии от параметра R при заданном значении ν_p , которая приведена на рис. 2, б.

Линейность связи σ с L и пропорциональность траектории напряжений при стесненном сжатии, а также пропорциональность траектории пластических деформаций при свободном сжатии в плоскости Бужинского обусловлены истокообразным видом функции (2.1) при $\alpha = 0$ (пропорциональность траектории пластических деформаций при стесненном сжатии и пропорциональность траектории напряжений при свободном сжатии в плоскости Бужинского имеет место независимо от значения $\alpha \geq 0$). Более сложные виды описания конической части поверхности текучести [19] существенно обогащают поведение материала при пластическом течении на эллиптической части поверхности текучести. При $\alpha \neq 0$ в (2.1) траектория напряжений при

стесненном сжатии остается прямолинейной, но не пропорциональной, а траектория деформаций при свободном сжатии отличается и от прямолинейной вблизи начала координат в плоскости Бужинского.

Таким образом, процессы пластического течения материала при свободном и стесненном сжатии согласно модели Димаджо—Сэндлера с нулевым коэффициентом сцепления в обоих случаях сопровождаются пропорциональным ростом сдвиговой и объемной компонент пластических деформаций. Но при стационарном процессе экструзии кинематика требует эволюции состояния материала, описываемой расширением эллиптической части поверхности текучести вследствие уплотнения и перемещением напряженного состояния вдоль поверхности текучести в верхнюю ее точку, в которой реализуется сдвиговое течение. Взаимное течение этих процессов может быть определено в процессе решения краевой задачи.

Определение упругих модулей и пластических деформаций. Будем описывать упругие свойства рассматриваемой среды соотношениями обобщенного закона Гука для изотропного материала

$$3p = K\varepsilon_v^e, \quad s_{ij} = 2Ge_{ij}^e \quad (3.18)$$

с модулями $K(\varepsilon_v^p)$, $G(\varepsilon_v^p)$, зависящими от объемной пластической деформации, рассматриваемой в качестве меры уплотнения материала (в (3.18) полагается $\varepsilon_v^e > 0$ при сжатии). Эти величины проще всего вычислить по экспериментально определенным модулям упругости E и M при свободном и стесненном сжатии следующим образом. Из связи $M = E(1-\nu)/(1+\nu)/(1-2\nu)$ с учетом обозначения $\varphi = E/M \leq 1$ следует выражение для коэффициента Пуассона:

$$\nu = \frac{\varphi - 1 + \sqrt{(\varphi - 1)(\varphi - 9)}}{4}. \quad (3.19)$$

Далее находятся модули:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (3.20)$$

При нахождении зависимостей $E(\varepsilon_v^p)$, $M(\varepsilon_v^p)$ по экспериментальным данным следует принимать во внимание соответствующую связь объемной пластической деформации ε_v^p и осевой пластической деформации ε^p (3.14) или (3.16) для свободного либо стесненного сжатия.

Для перестроения кривых упрочнения, полученных в результате испытаний на свободное либо стесненное сжатие, с полных на пластические осевые деформации используются равенства:

$$\varepsilon_v^p = \varepsilon_v - \frac{\sigma}{E(\varepsilon_v)}, \quad \varepsilon_v^p = \varepsilon_v - \frac{\sigma}{M(\varepsilon_v)}. \quad (3.21)$$

4. Испытания материала и идентификация модели. Испытания на свободное и стесненное сжатие были выполнены для порошка парафина марки Т1 фракции 0.63 мм. Использовалась универсальная испытательная машина Zwick

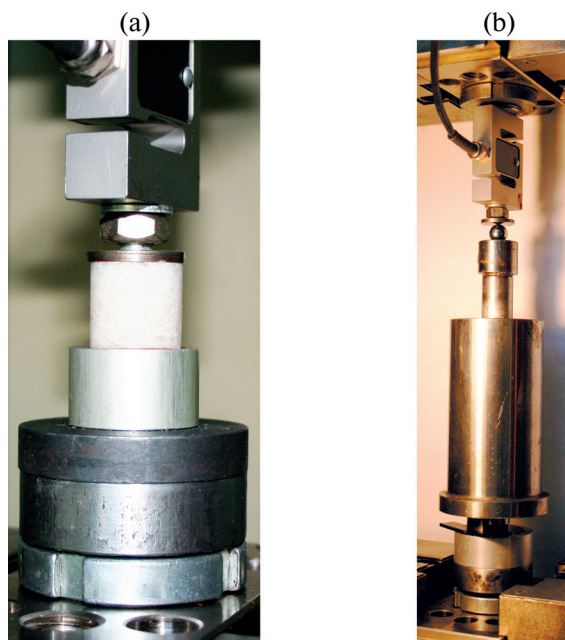


Рис. 3. Оснастка для испытаний на свободное (а) и стесненное (б) сжатие.

Z100SN5A с датчиком силы 1 кН и управлением по датчику перемещения траверсы, скорость перемещения траверсы при нагружении во всех испытаниях составляла 3 мм/мин. Испытания выполнялись при температуре 25 °С. Для изготовления цилиндрических образцов на свободное сжатие диаметром 20 мм использовалась оснастка для испытаний на стесненное сжатие — толстостенная труба с двумя подвижными штоками, поверхности скольжения которых были отполированы. Каждый образец прессовался из 5.5 ± 0.01 г порошка до высоты 21 либо 22 мм. Данные значения обеспечивали вариацию начальной пористости и степень консолидации порошка, достаточную для целостности образца при 4% деформации при испытании на свободное сжатие. На свободное сжатие также испытано несколько образцов после испытания на стесненное сжатие. Всего на свободное сжатие испытано 8 образцов с диапазоном значений начальной плотности 0.79–0.86 г/см³. Для испытаний на стесненное и свободное сжатие использовалась оснастка, приведенная на рис. 3. Все поверхности трения и контакта оснастки с образцом при испытании на стесненное сжатие были обработаны смазкой ЦИАТИМ-221Ф. Для исключения трения на плоскостях контакта торцов образцов с оснасткой при испытании на свободное сжатие использована та же смазка и два слоя тонкой фторопластовой пленки.

Программа испытаний включала в себя свободное сжатие образца до высоты 21 либо 20 мм, в результате чего достигалась фиксированная остаточная пористость и плотность массы соответственно 0.83 либо 0.86 г/см³, и разгрузку из данного состояния. На рис. 4, а приведены кривые деформирования трех образцов при изменении их высоты от 20.78 ± 0.08 до 20 мм, что соответствует

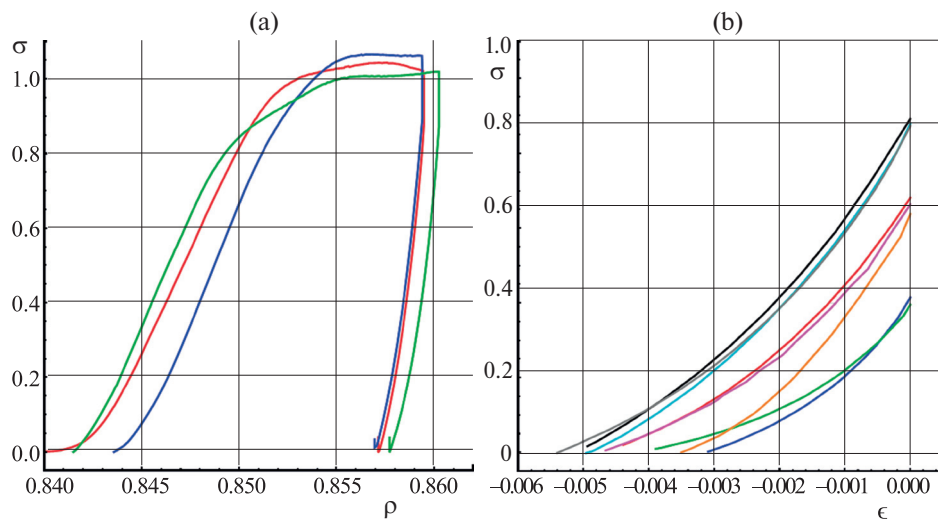


Рис. 4. Кривые деформирования (а) и разгрузки (б) образцов при свободном сжатии. Напряжения в МПа, плотность в г/см³.

деформации 4% и изменению плотности массы приблизительно от 0.84 до 0.86 г/см³. Среднее значение напряжения течения при плотности 0.86 г/см³ составляет приблизительно 1.05 МПа.

На рис. 4, б приведены кривые разгрузки всех восьми образцов в зависимости от осевой компоненты логарифмической деформации, отсчитываемой от точки начала разгрузки и взятой (как принято для деформаций в настоящей работе) с противоположным знаком. Видно, что разгрузка исследуемого материала сопровождается обратной ползучестью. Каждая кривая была аппроксимирована кубической функцией с четырьмя параметрами, с помощью которой была определена производная в точке начала разгрузки – модуль Юнга. Эта величина зависит от плотности, что можно увидеть на рис. 5. Если не учитывать выброс (связанный с бочкообразованием образца при деформации около 8%), то $E = 270$ МПа при $\rho = 0.82$ г/см³ и $E = 310$ МПа при $\rho = 0.85$ г/см³.

Испытание на стесненное сжатие при монотонном нагружении начиналось с состояния порошка с насыпной плотностью и заканчивалось при положениях траверсы, соответствующих высоте образца 22, 21 и 20 мм. Один образец был сжат до 19 мм, при этом была достигнута плотность массы 0.92 г/см³. На рис. 6, а приведены деформационные кривые и их аппроксимация законом

$$\sigma_c = \gamma - \delta \ln \left(1 - \frac{\epsilon}{W} \right) \quad (4.1)$$

с параметрами $\gamma = 0.02$ МПа, $\delta = 0.73$ МПа, $W = 0.63$. При аппроксимации учитывалось, что при стесненном сжатии полные объемная и осевая деформации равны между собой и равны пластическим составляющим, поскольку упругая деформация в испытаниях не превышает $3 \text{ МПа} / 300 \text{ МПа} = 1\%$, что намного

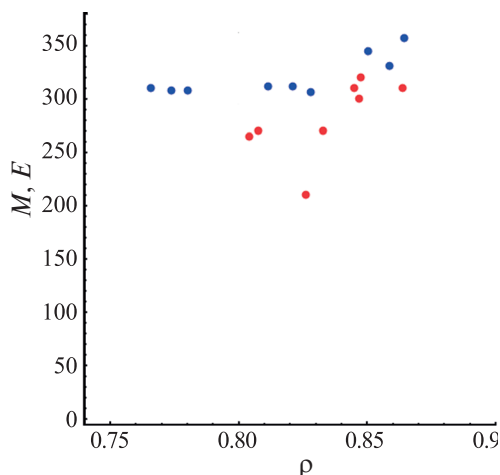


Рис. 5. Упругие модули при свободном (красный) и стесненном (синий) сжатии в зависимости от плотности. По вертикальной оси отложены МПа, по горизонтальной — г/см³.

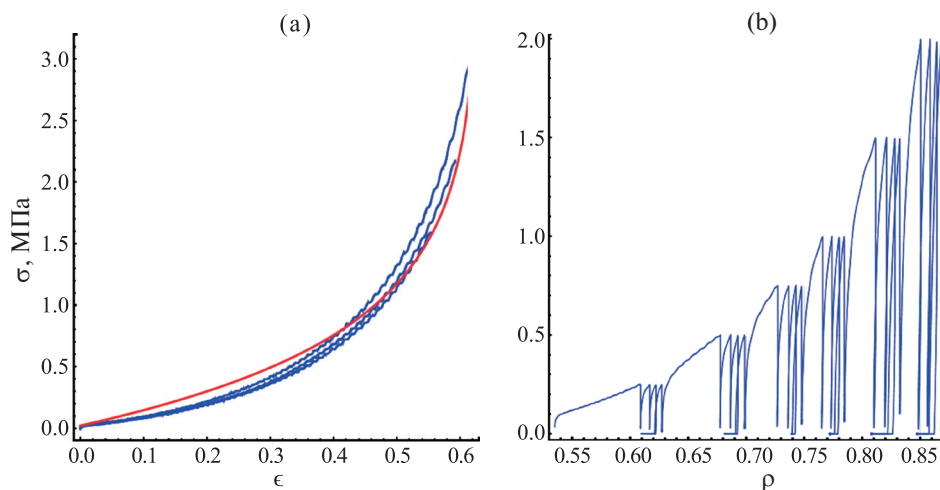


Рис. 6. Кривые деформирования при стесненном сжатии: а) монотонное нагружение, б) нагружение с разгрузками (синий — эксперимент, красный — аппроксимация). По вертикальной оси отложены МПа.

меньше характерных деформаций в данном испытании, составляющих около 60% (рис. 6, а).

В отличие от свободного сжатия, которое можно выполнять при плотностях 0.83–0.86 г/см³, испытание на стесненное сжатие позволяет охватить весь диапазон — от насыпной плотности до плотности литого материала и даже выше. Поэтому было выполнено испытание на стесненное сжатие со ступенчатым нагружением и промежуточными разгрузками (рис. 6, б), чтобы найти

зависимость модуля упругости при стесненном сжатии от плотности. Результат для трех последних блоков нагружения приведен на рис. 5. Были получены значения $M = 310$, $E = 270$ МПа при $\rho = 0.76\text{--}0.83$ г/см³ и $M = 345$, $E = 310$ МПа при $\rho = 0.85\text{--}0.87$ г/см³. Для сравнимых значений плотности можно оценить диапазон значений параметра $\varphi = E/M = 0.87\text{--}0.90$ и по (3.19) — диапазон значений коэффициента Пуассона $\nu = 0.20\text{--}0.22$. Отметим, что данный метод не нуждается в измерении поперечных деформаций образца при свободном сжатии, которое не отличается точностью. Далее (и выше — в числовых оценках и данных на рис. 2) используется значение $\nu = 0.22$. Упругие константы сведены в табл. 1.

Таблица 1. Упругие константы парафина марки Т1 в зависимости от плотности

ρ , г/см ³	E , МПа	M , МПа	ν
0.76–0.83	270	310	0.22
0.85–0.87	310	345	0.20

На заключительном этапе идентификации модели необходимо по имеющимся данным определить константы закона упрочнения (3.12), а также R и θ . Можно сказать, что кривая упрочнения при свободном сжатии представлена лишь значением напряжения течения $\sigma_f^* = 1.05$ МПа, соответствующем плотности $\rho = 0.86$ г/см³. При той же плотности напряжение течения при стесненном сжатии равно $\sigma_c^* = 2.25$ МПа. Аргумент в (3.12) означает именно состояние (плотность, пористость), поэтому при одинаковой плотности в испытаниях на свободное и стесненное сжатие будут равны значения внутренней переменной L в (3.2) и (3.14), поэтому отношение $\sigma_c/\sigma_f = \sigma_c^*/\sigma_f^* = 2.14$ является константой и определяет при известном значении $\nu_p = \nu = 0.22$ постоянную R , которая определяется неединственным образом: $R = 1.8$ либо 3.0 (рис. 2, б). При этом среди ориентаций траекторий напряжения или деформации в плоскости Бужинского для рассматриваемых испытаний изменяется лишь коэффициент в (3.14), задающий ориентацию траектории напряжения при стесненном сжатии: 0.42 при $R = 1.8$ либо 0.31 при $R = 3.0$. Далее из (3.2) и (3.12) получаем

$$X_0 = \frac{3(1 + R\theta)}{1 + \theta\sqrt{R^2 + 12}}\gamma \quad (4.2)$$

при условии (3.7) и

$$D = \frac{\gamma}{X_0\delta}, \quad (4.3)$$

где γ , δ — параметры аппроксимации (4.1). Получаем $\theta = 0.79$, $X_0 = 0.036$ МПа и $D = 0.77$ МПа^{−1} при $R = 1.8$ и $\theta = 1.99$, $X_0 = 0.041$ МПа и $D = 0.66$ МПа^{−1} при $R = 3.0$. Оба набора констант сведены в табл. 2 и дают одинаковые пары кривых упрочнения при свободном и стесненном сжатии (рис. 7), при построении которых использованы выражения (3.2), (3.10), (3.12) и (3.14), (3.16), (3.12) соответственно. Кривая при стесненном сжатии точно соответствует

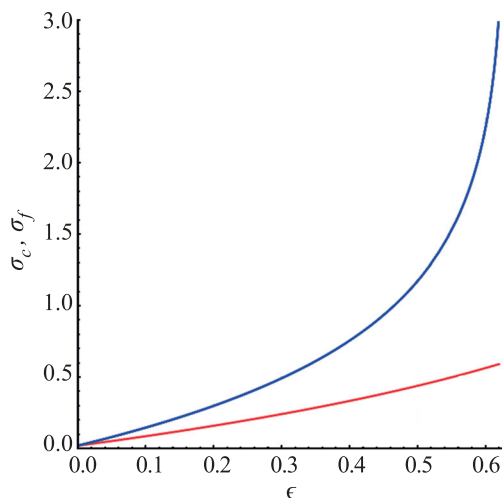


Рис. 7. Кривые упрочнения при свободном (красный) и стесненном (синий) сжатии, описываемые моделью. По вертикальной оси отложены МПа.

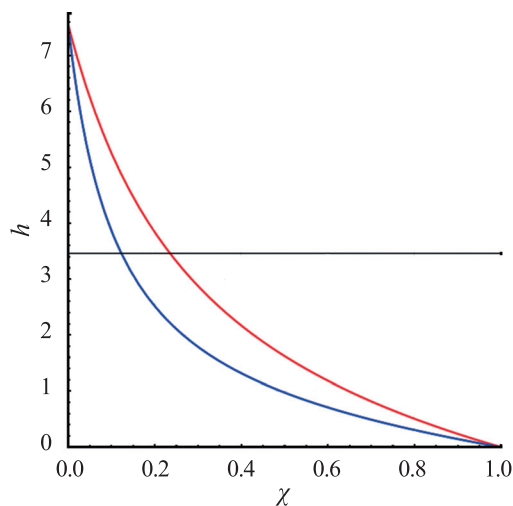


Рис. 8. Тангенс угла наклона направления вектора деформации в плоскости Бужинского в зависимости от отношения сжимающих напряжений при трехосном сжатии для двух наборов констант (табл. 2): первый — красная кривая, второй — синяя кривая.

аппроксимации экспериментальных данных (рис. 6, а), а кривая при свободном сжатии проходит через единственную экспериментальную точку, которая на рис. 7 вышла за пределы отрезка осевых деформаций, поскольку согласно (3.10) объемные деформации растут по мере увеличения осевых деформаций приблизительно вдвое медленнее при свободном сжатии по сравнению со стесненным сжатием. Если отсчетную конфигурацию образца связывать со

свободно насыпанным порошком (как при испытании на стесненное сжатие), то в указанном диапазоне осевых деформаций кривую упрочнения при свободном сжатии невозможно определить экспериментально, поскольку в этих условиях порошок не способен выступать образцом.

Таблица 2. Константы кэп-модели порошкообразного парафина марки Т1

R	θ	X_0 , МПа	D , МПа ⁻¹	W
1.8	0.79	0.036	0.77	0.63
3.0	1.99	0.041	0.66	0.63

Можно теоретически исследовать, как изменяется ориентация вектора скоростей деформаций в плоскости Бужинского при обоих наборах констант в широком диапазоне изменения наклона прямолинейной траектории нагружения в плоскости Бужинского. Такой диапазон реализуется в испытании на трехосное сжатие по схеме Кармана [20], для которого $\sigma_{33} = -\sigma$, $\sigma_{11} = \sigma_{22} = -\chi\sigma$. Примем $0 \leq \chi \leq 1$, тогда $s_{11} = s_{22} = (1 - \chi)\sigma/3 \geq 0$, $s_{33} = -2(1 - \chi)\sigma/3$, $p = (2\chi + 1)\sigma$, $s = (1 - \chi)\sigma/\sqrt{3}$, и из условия текучести можно получить:

$$\sigma = \frac{3(2\chi + 1) + R\sqrt{3[(1 - \chi)^2(R^2\theta^2 - 1) + 3\theta^2(2\chi + 1)^2]}}{R^2(1 - \chi)^2 + 3(2\chi + 1)} L. \quad (4.4)$$

Далее согласно (2.10) можно определить коэффициент h :

$$h = \frac{R^2(\chi - 1)}{\sqrt{3}} \left(2\chi + 1 - \frac{R^2(1 - \chi)^2 + 3(2\chi + 1)^2}{3(2\chi + 1) + R\sqrt{3[(1 - \chi)^2(R^2\theta^2 - 1) + 3\theta^2(2\chi + 1)^2]}} \right)^{-1}. \quad (4.5)$$

Изменение тангенса угла наклона направления деформации в плоскости Бужинского в зависимости от отношения сжимающих напряжений в испытании на трехосное сжатие по схеме Кармана приведено на рис. 8. Граничные значения $\chi = 0$ и 1 соответствуют свободному и всестороннему сжатию (χ для стесненного сжатия располагается между этими значениями). В этих точках оба набора констант прогнозируют совпадающие направления вектора скоростей деформаций, но при любом значении χ из интервала между граничными точками направления вектора скоростей деформаций для рассматриваемых наборов констант различаются. Для стесненного сжатия $\chi = (\sigma/p - 1)/2$ и с учетом (2.10), (3.14) можно убедиться, что оба набора констант соответствуют одному и тому же направлению вектора скоростей деформаций (со значением $h = 2\sqrt{3}$, которому соответствует черная прямая на рис. 8). Поэтому выбрать какой-то один из двух наборов на основании только данных свободного и стесненного сжатия невозможно. Для описания довольно тонкой характеристики отношения объемной и сдвиговой деформаций в зависимости от отношения объемного и сдвигового напряжений, более точного, чем представлено

на рис. 8, необходимо дополнительное испытание (трехосное сжатие, сжатие в упругой оболочке, сжатие в канале и др. [20]).

Заключение. В рамках модели Димаджио—Сэндлера упругопластического поведения некомпактных сред выведены вспомогательные соотношения, связывающие регистрируемые величины в базовых экспериментах на свободное и стесненное сжатие. Разработаны программы базовых экспериментов, включающие монотонное и ступенчатое с промежуточными разгрузками нагружение, позволяющие идентифицировать изотропные упругие и пластические свойства исследуемых материалов. Эти программы предусматривают стесненное сжатие в широком диапазоне изменения пористости (и плотности) материала и свободное сжатие материала в весьма узком диапазоне изменения этих переменных состояния. Последнее представляется рациональным для образцов, отштампованных из порошковых материалов, с низкой степенью консолидации. При этом также не возникает избыточных данных, а задача идентификации рассматриваемой модели оказывается корректной. Кривая упрочнения при свободном сжатии получается масштабированием по независимой и зависимой переменным функции упрочнения при стесненном сжатии. Рассматриваемая трехмерная модель способна описывать кривые упрочнения при пластическом течении в других напряженных состояниях, находящемся на эллиптической части поверхности текучести, и изменении напряженного состояния. В рамках рассматриваемой модели из базовых экспериментов на сжатие одновременно находится один параметр (угол внутреннего трения) конической части поверхности текучести в предположении отсутствия сцепления. Разумеется, прогнозные возможности модели при условиях, выходящих за пределы базовых экспериментов, нуждаются в экспериментальной проверке. По упругим модулям, определяемым по начальным участкам разгрузки при испытаниях на свободное и стесненное сжатие, вычисляется коэффициент Пуассона, при этом не требуется связываться с измерениями поперечного размера образца, не лишенными определенных недостатков. Полагается, что коэффициент поперечной деформации, постоянный для свободного сжатия в области пластичности в рамках рассматриваемой модели, не претерпевает разрыва в точке текучести и равен коэффициенту Пуассона. Разработанная методика позволяет определить две упругие константы и пять констант кэп-модели пластичности для достаточно широкого круга некомпактных сред.

Разработанная расчетно-экспериментальная методика использована для определения констант модели упругопластичности Димаджио—Сэндлера порошкообразного парафина марки Т1 фракции 0.63 мм. Для этого выполнены указанные выше базовые эксперименты в условиях квазистатического нагружения при комнатной температуре. Это позволит использовать стандартные возможности пакета программ LS-DYNA® для расчета процессов экструзии порошкообразного литейного воска и заполнения формы для отработки перспективных технологий литья по выплавленному моделям.

Исследование выполнено в рамках госзадания по темам Пермского федерального исследовательского центра УрО РАН (А.А. Адамов и И.Э. Келлер) и

Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН (С.Г. Жилин и Н.А. Богданова).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калашиник Н.А., Ионов С.Г.* Механические и теплофизические свойства фольг на основе низкоплотных углеродных материалов // Известия высших учебных заведений. Серия: Химия и химическая технология. 2017. Т. 9. Вып. 60. С. 11–16. <https://doi.org/10.6060/tcct.2017609.4y>
2. *Chung D.D.L.* Flexible graphite for gasketing, adsorption, electromagnetic interference shielding, vibration damping, electrochemical applications, and stress sensing // J. Mater. Eng. Perform. 2000. № 9. P. 161–163. <https://doi.org/10.1361/105994900770346105>
3. *Dowell M.B., Howard R.A.* Tensile and compressive properties of flexible graphite foils // Carbon. 1986. V. 24. № 3. P. 311–323.
4. *Leng Y., Gu J., Cao W., Zhan T.Y.* Influences of density and flake size on the mechanical properties of flexible graphite // Carbon. 1998. V. 36. № 7–8. P. 875–881. [https://doi.org/10.1016/S0008-6223\(97\)00196-6](https://doi.org/10.1016/S0008-6223(97)00196-6)
5. *Khelifa M., Fierro V., Macutkevic J., Celzard A.* Nanoindentation of flexible graphite: Experimental versus simulation studies // Advanced Material Science. 2018. № 3 (2). P. 2–11. <https://doi.org/10.15761/AMS.1000142>
6. *Сапченко И.Г., Жилин С.Г., Комаров О.Н.* Управление структурой и свойствами пористых комбинированных удаляемых моделей. Владивосток: Дальнаука, 2007. 138 с.
7. *Жилин С.Г., Богданова Н.А., Комаров О.Н.* Влияние параметров уплотнения порошкового тела из воскообразного материала на формирование остаточных напряжений прессовки // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 3(41). С. 110–121. <https://doi.org/10.26293/chgpu.2019.41.3.009>
8. *Жилин С.Г., Богданова Н.А., Комаров О.Н., Соснин А.А.* Снижение упругого отклика при уплотнении порошковой парафиностеариновой композиции // Деформация и разрушение материалов. 2020. № 1. С. 29–33. <https://doi.org/10.31044/1814-4632-2020-1-29-33>
9. *Жилин С.Г., Богданова Н.А., Комаров О.Н.* Исследование процессов формирования пористых выплавляемых моделей, применяемых для изготовления высокоточного литья // Известия высших учебных заведений. Цветная металлургия. 2023. № 3(29). С. 54–66. <https://doi.org/10.17073/0021-3438-2023-3-54-66>
10. *Пугачев А.К., Росляков О.А.* Переработка фторопластов в изделия. Л.: Химия, 1987. 168 с.
11. *Люшкин Б.А., Шилько С.В., Панин С.В. и др.* Дисперсно-наполненные полимерные композиты технического и медицинского назначения // Plasticity of Pressure-Sensitive Materials, Engineering Materials. Под ред. А.В. Герасимова. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2017. 311 с.
12. *Aubertin M., Li L.* A porosity-dependent inelastic criterion for engineering materials // Int. J. Plast. 2004. V. 20. № 12. P. 2179–2208. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2004.05.004>

13. Altenbach H., Bolchoun A., Kolupaev V.A. Phenomenological yield and failure criteria // *Plasticity of Pressure-Sensitive Materials, Engineering Materials*. Eds. A. Öchsner, H. Altenbach. Berlin, Heidelberg: Springer. 2014. P. 49–152.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-40945-5_2
14. Kolupaev V.A., Yu M.-H., Altenbach H. Fitting of the strength hypotheses // *Acta Mechanica*. 2016 V. 227. P. 1533–1556.
<https://doi.org/10.1007/s00707-016-1566-9>
15. Khoei A.R., DorMohammadi H. A three-invariant cap plasticity with isotropic–kinematic hardening rule for powder materials: Model assessment and parameter calibration // *Comput. Mater. Sci*. 2007. № 41. № 1. P. 1–12.
<https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2007.02.011>
16. Келлер И.Э., Петухов Д.С. Критерии прочности и пластичности. Пермь: Изд-во Пермского национального исследовательского политехнического университета. 2020. 157 с.
17. DiMaggio F.L., Sandler I.S. Material models for granular soils // *J. Eng. Mech. Division ASCE*. 1971. № 97. P. 935–950.
18. Schwer L.E., Murray Y.D. A three-invariant smooth cap model with mixed hardening // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 1994. V. 18. № 10. P. 657–688.
<https://doi.org/10.1002/nag.1610181002>
19. LS-DYNA® Keyword User's Manual. Volume II. Material Models. Version R10.0. Livermore Software Technology Corporation. 2017.
20. Адамов А.А., Келлер И.Э., Подкина Н.С. Базовые эксперименты для идентификации кэп-модели пластичности гибкого графита // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния*. 2020. № 3 (45). С. 131–142.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.20.13.013>

IDENTIFICATION OF THE CAP MODEL OF ELASTOPLASTICITY OF NON-COMPACT MEDIA UNDER COMPRESSIVE MEAN STRESS

A. A. Adamov^a, I. E. Keller^a, S. G. Zhilin^b, N. A. Bogdanova^b

^a *Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science, Perm, Russia*

^b *Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

*e-mail adamov@icmm.ru, ** e-mail kie@icmm.ru, ***e-mail zhilin@imim.ru,
****e-mail joyful289@inbox.ru

Abstract — A program of basic tests and a method for identifying a three-dimensional model of the elastoplastic behavior of an isotropic porous or powdery consolidated medium experiencing arbitrary quasi-static loading under compressive medium stress at room temperature are proposed. The medium under consideration under compressive medium stresses is compacted with increasing effective stress, which leads to a nonlinear change in elastic modules, hardening and dilat-

ancy (coupling of shear and volumetric components of deformations) in the yield region. To describe this behavior, the cap model of DiMaggio and Sandler, which is present in application software packages, is considered. As basic tests, the free and constrained compression of a cylindrical sample is considered according to a special program containing the stages of loading and unloading with a sequential increase in the amplitude voltage. Samples with a given porosity for free compression tests are manufactured using a tight compression test rig. According to the initial slope of the discharge curves, the values of the elastic modulus for free and constrained compression are determined in a certain range of porosity changes, according to which the Poisson's ratio is determined. The five constants of the cap model are correctly and explicitly determined by the deformation curve of the material under constrained compression over a wide range of changes in axial deformation (and density), the flow stress under free compression of the sample at some density, and the assumption that the coefficient of transverse deformation in the yield region is equal to the Poisson's ratio. The elastic and plastic constants were determined according to the test data of powdered paraffin grade T1 with a fraction of 0.63 mm. The corresponding model is applicable for numerical simulation of extrusion processes and mold filling for casting by melting models, processes for manufacturing blanks of non-melting polymer composites by powder technology, stamping sealing elements from flexible graphite and other pressure treatment processes of non-compact media.

Keywords: non-compact media, densification, cap models of plasticity, elastic constants, identification, experiment, powdered paraffin

REFERENCES

1. *Kalashnik N.A., Ionov S.G.* Mechanical and thermophysical properties of graphite foils based on low-density carbon materials // *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Khim. Khim. Tekhnol.* 2017. V. 9. № 60. P. 11–16. [in Russian]
<https://doi.org/10.6060/tcct.2017609.4y>
2. *Chung D.D.L.* Flexible graphite for gasketing, adsorption, electromagnetic interference shielding, vibration damping, electrochemical applications, and stress sensing // *Journal of Materials Engineering and Performance.* 2000. № 9. P. 161–163.
<https://doi.org/10.1361/105994900770346105>
3. *Dowell M.B., Howard R.A.* Tensile and compressive properties of flexible graphite foils // *Carbon.* 1986. № 24. P. 311–323.
4. *Leng Y., Gu J., Cao W., Zhan T.Y.* Influences of density and flake size on the mechanical properties of flexible graphite // *Carbon.* 1998. № 36. P. 875–881.
5. *Khelifa M., Fierro V., Macutkevic J., Celzard A.* Nanoindentation of flexible graphite: Experimental versus simulation studies // *Advanced Material Science.* 2018. V. 3. № 2. P. 2–11.
<https://doi.org/10.15761/AMS.1000142>
6. *Sapchenko I.G., Zhilin S.G., Komarov O.N.* Controlling the structure and properties of porous combined removable models. Vladivostok: Dal'nauka, 2007. 138 p. [in Russian].
7. *Zhilin S.G., Bogdanova N.A., Komarov O.N.* Influence of parameters of the compacting of powder body from wax-like material on the forming of residual stresses of pressing.

- Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2019. V. 3. № 41. P. 110–121. [in Russian].
<https://doi.org/10.26293/chgpu.2019.41.3.009>
8. *Zhilin S.G., Bogdanova N.A., Komarov O.N., Sosnin A.A.* Decrease in the elastic response in compacting a paraffin-stearin powder composition // Russian Metallurgy (Metally). 2020. V. 1. P. 29–33. [in Russian].
<https://doi.org/10.31044/1814-4632-2020-1-29-33>
 9. *Zhilin S.G., Bogdanova N.A., Komarov O.N.* Porous wax patterns for high-precision investment casting // Izvestiya. Non-Ferrous Metallurgy. 2023. V. 3. № 29. P. 54–66.
<https://doi.org/10.17073/0021-3438-2023-3-54-66>
 10. *Pugachev A.K., Roslyakov O.A.* Processing of Fluoroplastics into Products. L.: Khimiya, 1987. 168 p.
 11. *Lyukshin B.A. et al.* Dispersedly-Filled Polymer Composites for Technical and Medical Purposes. In: Plasticity of Pressure-Sensitive Materials, Engineering Materials (Ed. A.V. Gerasimov). Novosibirsk: Publishing House of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2017. 311 p.
 12. *Aubertin M., Li L.* A porosity-dependent inelastic criterion for engineering materials // Int. J. Plasticity. 2004. V. 12. № 20. P. 2179–2208.
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2004.05.004>
 13. *Altenbach H., Bolchoun A., Kolupaev V.A.* Phenomenological Yield and Failure Criteria // Plasticity of Pressure-Sensitive Materials, Engineering Materials. Eds. A. Öchsner, H. Altenbach. Berlin, Heidelberg: Springer. 2014. P. 49–152.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-40945-5_2
 14. *Kolupaev V.A., Yu M.-H., Altenbach H.* Fitting of the strength hypotheses // Acta Mechanica. 2016. V. 6. № 227. P. 1533–1556.
<https://doi.org/10.1007/s00707-016-1566-9>
 15. *Khoei A.R., DorMohammadi H.* A three-invariant cap plasticity with isotropic–kinematic hardening rule for powder materials: Model assessment and parameter calibration // Computational Materials Science. 2007. № 41. P. 1–12.
<https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2007.02.011>
 16. *Keller I.E., Petukhov D.S.* Criteria of Strength and Plasticity. Perm: Perm National Research Polytechnical University Press, 2020. 157 p. [in Russian].
 17. *DiMaggio F.L., Sandler I.S.* Material models for granular soils // J. Eng. Mech. Div. ASCE. 1971. № 97. P. 935–950.
 18. *Schwer L.E., Murray Y.D.* A three-invariant smooth cap model with mixed hardening // Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech. 1994. № 18. P. 657–688.
 19. LS-DYNA® Keyword User's Manual. Volume II. Material Models. Version R10.0. Livermore Software Technology Corporation, 2017.
 20. *Adamov A.A., Keller I.E., Podkina N.S.* Basic experiments for identification of the cap model of flexible graphite plasticity // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University I.Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State. 2020. V. 3. № 45. P. 131–142 [in Russian].
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.20.13.013>