

УДК 531.26

О МАКСВЕЛЛОВОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА СИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА

© 2024 г. Е. А. Никонова^а, *

^аФедеральный исследовательский центр “Информатика и управление”
Российской академии наук, Москва, Россия

*e-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com

Поступила в редакцию 31.12.2023 г.

После доработки 16.02.2024 г.

Принята к публикации 20.02.2024 г.

Обсуждается восходящий к Максвеллу подход к представлению потенциала, в частности потенциала ньютоновского поля тяготения в виде суммы потенциалов мультиполей различных порядков. Указаны критические случаи работы алгоритма по нахождению параметров мультиполя — его осей и момента. Случаи имеют место, когда тело обладает теми или иными симметриями в распределении масс. Сформулированы рекомендации по преодолению выявленных трудностей. Для тела, обладающего трехосным эллипсоидом инерции, приведены явные выражения осей и момента мультиполя второго порядка через интегралы инерции второго порядка. Показано, что оси мультиполя ортогональны круговым сечениям эллипсоида инерции тела. Критические случаи вычисления мультиполя третьего порядка рассмотрены на примере модельного тела с постоянной плотностью, имеющего форму равногранного тетраэдра. Приведен способ вычисления осей и момента мультиполя третьего порядка для такого тела.

Ключевые слова: гравитационный потенциал, моменты инерции высших порядков, максвеллово представление потенциала, мультиполь, спутниковое приближение потенциала, равногранный тетраэдр

DOI: 10.31857/S1026351924040052, EDN: UDEHJE

1. Введение. В работе рассматривается восходящий к Максвеллу подход [1–3] к представлению потенциала, в частности потенциала гравитационного поля в виде суммы последовательных дифференцирований различных порядков функции $1/r$ по направлениям $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_k, \dots$, где $r = (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^{1/2}$ — расстояние от начала системы отсчета, связанной с телом, до пробной точки пространства. Методика, изначально применявшаяся Максвеллом при исследовании ряда задач электростатики [1], находит свое применение как в вопросах земного магнетизма [4], так и при изучении гравитационного поля Земли [5]. Представление гравитационного потенциала тела в виде ряда по шаровым функциям может рассматриваться

как совокупность потенциалов гравитационных полей, каждое из которых связано с определенным распределением масс в теле. Привлечение максвеллова подхода позволяет изучать источники этих полей [5]. Конструктивный алгоритм определения направлений $\mathbf{h}_k$, $k = 1, 2, 3, \dots$ может быть построен на основании теоремы Сильвестра о существовании системы вещественных полюсов сферической функции [2, 6]. Этот алгоритм кратко излагается ниже в форме, опирающейся на интегралы инерции тела, гравитационный потенциал которого предполагается построить. В случае, когда тело обладает теми или иными симметриями в распределении масс, соответствующие интегралы инерции обращаются в ноль и обсуждаемый алгоритм не может быть применен явно. В настоящем исследовании обсуждается ряд таких критических случаев, а также приводятся рекомендации по преодолению трудностей с ними связанных. Рассматривается модельное тело в виде однородного равногранного тетраэдра.

В литературе известно много различных способов моделирования гравитационного поля небесных тел. Помимо разложений потенциала притяжения изучаемого небесного тела в ряды по шаровым функциям, по гармоникам сжатого эллипсоида вращения, а также по функциям Ламе (см. [7]) имеет место представление потенциала тела в рамках наиболее универсального способа описания формы поверхности тела в виде многогранника с треугольными гранями. Модель задается набором всех вершин, выраженных в виде векторов в фиксированной с телом системе координат, и набором граней с согласованной ориентацией. В предположении об однородности небесного тела в работах [8, 9], (см. также [10]) дается явное выражение для его потенциала ньютоновского притяжения. Обобщая предположение об однородности распределения массы тела, подход получил свое развитие в работах, например [11, 12], где обсуждается линейное распределение плотности, и работах [13, 14], где рассматривается распределение плотности полиномиального типа.

Можно указать и иные подходы, опирающиеся, например, на замену исходного тела совокупностью гравитирующих масс с известной структурой поля притяжения. Так, например, поле притяжения тел вытянутой формы зачастую приближается полем притяжения гравитирующей гантели — пары массивных точек, удаленных друг от друга на некоторое фиксированное расстояние (см., например, [15–20]); для сплюснутых тел такие точки наделяются комплексными массами и размещаются в комплексной области, но потенциал такой комплексифицированной гантели остается вещественной функцией (см., например, [21, 22], а также [23]). Анализ многочисленных обобщений классической задачи двух неподвижных центров дается в [24], где отмечается роль интенсивных исследований этой задачи, а также приводится обзор широкого круга публикаций по теме исследования. Для более полного учета особенностей распределения масс тела в экваториальной плоскости в работе [25] предлагается модель небесных тел в виде троек соприкасающихся шаров, параметры которых определяются с помощью так называемой “скелетонизации” области, высекаемой в теле его экваториальной плоскостью, (ср. [26]). Представление распределения масс тела четверкой материальной точек

обсуждается, например, в работах [27, 28]. Представления тела в виде конечного, но большого набора гравитирующих точечных масс рассматривается в [29].

2. Максвеллово представление гравитационного потенциала. Пусть $\mathcal{B}$ – гравитирующее тело, ограниченное поверхностью $\partial\mathcal{B}$. Потенциал порождаемой им силы притяжения определяется следующим образом [7]. Пусть $OX_1X_2X_3$ – фиксированная в теле $\mathcal{B}$ декартова система отсчета, в осях которой положение произвольной точки тела Q и произвольной точки пространства P , внешней по отношению к телу, определяется радиусами-векторами:

$$\overrightarrow{OQ} = \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T, \quad q = (\mathbf{q}, \mathbf{q})^{1/2}, \quad \overrightarrow{OP} = \mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)^T, \quad r = (\mathbf{r}, \mathbf{r})^{1/2}.$$

Пусть G – гравитационная постоянная, тогда потенциал притяжения тела $\mathcal{B}$ в точке P определяется тройным интегралом:

$$U(\mathbf{r}) = -G \iiint_{\mathcal{B}} \frac{dm(\mathbf{q})}{r_{QP}}, \quad r_{QP} = (\mathbf{r} - \mathbf{q}, \mathbf{r} - \mathbf{q})^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1)$$

где интегрирование распространено по всему телу $\mathcal{B}$. В общем случае $dm(\mathbf{q})$ обозначает элемент массы, сосредоточенной в элементарном объеме $d\mathbf{q} = dq_1 dq_2 dq_3$, окружающем точку Q . Функция $m = m(\mathbf{q})$, вообще говоря, недифференцируема. Поэтому интеграл (2.1) рассматривают как интеграл Римана–Стилтьеса. Если предположить, что масса m – это дифференцируемая функция координат, то $dm = \rho(\mathbf{q})d\mathbf{q}$, где $\rho(\mathbf{q})$ – плотность в точке Q . В этом случае

$$U(\mathbf{r}) = -G \iiint_{\mathcal{B}} \frac{\rho(\mathbf{q})d\mathbf{q}}{r_{QP}}.$$

Во внешних по отношению к телу $\mathcal{B}$ точках пространства потенциал может быть представлен в виде функционального ряда (см., например, [7, 30]):

$$U(\mathbf{r}) = -G \sum_{n=0}^{\infty} U_n,$$

где слагаемые U_n имеют вид:

$$U_n(\mathbf{r}) = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{(-1)^n}{k_1!k_2!k_3!} I_{k_1k_2k_3} \frac{\partial^n}{\partial r_1^{k_1} \partial r_2^{k_2} \partial r_3^{k_3}} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (2.2)$$

здесь k_1, k_2, k_3 – целые неотрицательные числа,

$$I_{k_1k_2k_3} = \iiint_{\mathcal{B}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} dm(\mathbf{x})$$

– моменты инерции (интегралы инерции) порядка n .

Следуя Максвеллу [1] (см. также [2, 3, 30]), функции U_n могут быть представлены в виде:

$$U_n(\mathbf{r}) = (-1)^n \frac{p_n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (2.3)$$

где $\partial/\partial h_k$ — дифференцирование вдоль единичного вектора $\mathbf{h}_k = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)^T$, $\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 = 1$, ($k = 1, 2, \dots, n$), p_n — постоянная положительная величина, характеризующаяся распределением массы в теле $\mathcal{B}$.

Функция $1/r$ — гармоническая, следовательно функция U_n тоже, очевидно, гармоническая, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа. Функция U_n определяет потенциал так называемого мультиполя n -го порядка — предельного точечного объекта, задаваемого определенной конфигурацией материальных точек. Постоянную величину p_n называют моментом мультиполя, а векторы $\mathbf{h}_k$ — его осями. Свойствам мультиполей и их физической интерпретации посвящены многочисленные исследования (см., например, [1–3, 6, 30]).

Согласно Сильвестру [6] (см. также [2]), вычисление осей мультиполя сводится к решению системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} r^{2n+1} \cdot U_n(\mathbf{r}) &= 0, \\ (\mathbf{r}, \mathbf{r}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $r^{2n+1} \cdot U_n(\mathbf{r})$ — однородный гармонический многочлен степени n . В монографии [3] для решения системы (2.4) предлагается выполнить подстановку

$$r_1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}v, \quad r_2 = \frac{2u}{1+u^2}v, \quad r_3 = iv, \quad (2.5)$$

где $u \in (-\infty; +\infty)$ и $v \in (-\infty; +\infty)$, $i = \sqrt{-1}$. В результате такой подстановки второе уравнение системы (2.4) оказывается выполненным тождественно. При этом первое уравнение системы (2.4) принимает вид:

$$\frac{v^n}{(u^2 + 1)^n} \cdot P_{2n}(u) = 0. \quad (2.6)$$

Отбрасывая тривиальное решение $v=0$, встает задача определения корней многочлена $P_{2n}(u)$ степени $2n$ относительно переменной u с комплексными коэффициентами.

Далее, для всех различных пар корней u_1 и u_2 многочлена $P_{2n}(u)$, рассматривают формы:

$$Ar_1 + Br_2 + Cr_3 = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ \xi(u_1) & \eta(u_1) & i \\ \xi(u_2) & \eta(u_2) & i \end{vmatrix} = 0, \quad \xi(u) = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \eta(u) = \frac{2u}{1+u^2}, \quad (2.7)$$

линейные относительно r_1, r_2, r_3 . Выбирают из них лишь те, для которых коэффициенты A, B и C из соотношения (2.7) являются вещественными. Согласно [3, 6], в общем случае таких пар будет ровно n . Пусть отвечающие им

коэффициенты (A_k, B_k, C_k) , $k = 1, \dots, n$, тогда оси мультиполя n -го порядка определяются как

$$\mathbf{h}_k = \left(\frac{A_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2}}, \frac{B_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2}}, \frac{C_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2}} \right)^T, \quad k = 1, \dots, n.$$

Теперь, когда оси мультиполей известны, вычисляют мультипольный момент p_n . Для этого приравнивают правые части соотношений (2.2) и (2.3). Подставляя координаты произвольной точки пространства в получающееся равенство, а также вычисленные оси, приходят к линейному уравнению на величину p_n . Момент p_n считают величиной положительной [2, 3], поэтому в случае необходимости изменяют направление одного из векторов $\mathbf{h}_k$ на противоположное.

3. Случай неполного набора корней многочлена P_{2n} . Случай неполного набора корней многочлена P_{2n} из (2.6) является критическим для изложенного выше алгоритма, так как при этом не удастся отыскать полного набора осей мультиполя порядка n .

Заметим, что подстановка (2.5) является примером одной из шести возможных замен переменных, позволяющих упростить систему (2.4). Например, при подстановке

$$r_1 = \frac{2u}{1+u^2}v, \quad r_2 = \frac{1-u^2}{1+u^2}v, \quad r_3 = iv$$

второе уравнение системы (2.4) также окажется выполненным тождественно, а решение первого уравнения системы (2.4) сводится к определению корней многочлена $P_{2n}(u)$, вообще говоря, отличающегося от многочлена из (2.6). Фактически для каждого фиксированного n имеется шесть различных многочленов, которые можно отнести к одному из двух семейств $\{P_{2n}^i\}$, $\{\tilde{P}_{2n}^i\}$, $i = 1, 2, 3$. Циклическая перестановка индексов величин $I_{k_1 k_2 k_3} \rightarrow I_{k_3 k_1 k_2} \rightarrow I_{k_2 k_3 k_1}$ позволяет получить выражения всех многочленов из указанных семейств: $P_{2n}^1 \rightarrow P_{2n}^2 \rightarrow P_{2n}^3$ и $\tilde{P}_{2n}^1 \rightarrow \tilde{P}_{2n}^2 \rightarrow \tilde{P}_{2n}^3$. Приведем явный вид многочленов P_{2n}^1 , $\tilde{P}_{2n}^1$ при $n = 1, 2, 3$, по которым можно восстановить выражения для остальных многочленов из указанных семейств:

$$P_2^1(u) = c_{10}^1 u^2 + c_{11}^1 u - \overline{c_{10}^1} = 0, \quad \tilde{P}_2^1(u) = \overline{c_{10}^1} u^2 + i \cdot c_{11}^1 u + c_{10}^1 = 0,$$

$$c_{10}^1 = -I_{100} + iI_{001}, \quad c_{11}^1 = 2I_{010},$$

$$P_4^1(u) = c_{20}^1 u^4 + c_{21}^1 u^3 + c_{22}^1 u^2 - \overline{c_{21}^1} u + \overline{c_{20}^1} = 0,$$

$$\tilde{P}_4^1(u) = \overline{c_{20}^1} u^4 + i \cdot \overline{c_{21}^1} u^3 - c_{22}^1 u^2 + i \cdot c_{21}^1 u + c_{20}^1 = 0,$$

$$c_{20}^1 = \frac{1}{2}(I_{002} - I_{200}) + iI_{101}, \quad c_{21}^1 = 2(I_{110} - iI_{011}), \quad c_{22}^1 = I_{200} - 2I_{020} + I_{002},$$

$$\begin{aligned}
P_6^1(u) &= c_{30}^1 u^6 + c_{31}^1 u^5 + c_{32}^1 u^4 + c_{33}^1 u^3 - \overline{c_{32}^1} u^2 + \overline{c_{31}^1} u - \overline{c_{30}^1} = 0, \\
\tilde{P}_6^1(u) &= \overline{c_{30}^1} u^6 + i \cdot \overline{c_{31}^1} u^5 - \overline{c_{32}^1} u^4 - i \cdot c_{33}^1 u^3 - c_{32}^1 u^2 + i \cdot c_{31}^1 u + c_{30}^1 = 0, \\
c_{30}^1 &= I_{300} - 3I_{102} + i(I_{003} - 3I_{201}), \quad c_{31}^1 = 6(I_{012} - I_{210} + 2iI_{111}), \\
c_{32}^1 &= 3(4I_{120} - I_{102} - I_{300} + i(-4I_{021} + I_{003} + I_{201})), \quad c_{33}^1 = 4(3I_{012} + 3I_{210} - 2I_{030}).
\end{aligned}$$

Сдвиг индексов коэффициентов позволяет получить, например, такой многочлен:

$$\begin{aligned}
P_4^2(u) &= c_{20}^2 u^4 + c_{21}^2 u^3 + c_{22}^2 u^2 - \overline{c_{21}^2} u + \overline{c_{20}^2}, \\
c_{20}^2 &= \frac{1}{2}(I_{200} - I_{020}) + iI_{110}, \quad c_{21}^2 = 2(I_{011} - iI_{101}), \quad c_{22}^2 = I_{020} - 2I_{002} + I_{200}.
\end{aligned}$$

В зависимости от системы координат, связанной с телом $\mathcal{B}$, а также от его формы и распределения масс, коэффициенты при старших степенях многочленов $P_{2n}^1(u)$ и $\tilde{P}_{2n}^i(u)$, $i = 1, 2, 3$, могут обращаться в ноль, при этом сами многочлены уже не будут обладать $2n$ корнями, что, как отмечалось, является препятствием для определения полного набора из n осей мультиполя n -го порядка приведенным выше способом.

Рассмотрим случаи, когда многочлены $P_{2n}^1(u)$ имеют меньше $2n$ корней для $n = 1, 2, 3$. Многочлены $P_{2n}^2(u)$, $P_{2n}^3(u)$ могут быть исследованы аналогично. Заметим, что старший коэффициент многочлена $\tilde{P}_{2n}^1(u)$, равный $\overline{c_{10}^1}$, обращается в ноль в тех же случаях, что и коэффициент c_{10}^1 .

Для $n = 1$ старший коэффициент c_{10}^1 обращается в ноль, если $I_{100} = 0$ и $I_{001} = 0$. Тогда $P_2^1(u)$ принимает вид $c_{11}^1 u = 0$ и имеет корень $u = 0$. Дополнительно при $I_{010} = 0$ многочлен $P_2^1(u)$ обращается тождественно в ноль, что имеет место в случае, когда начало системы координат совпадает с центром масс тела: $I_{100} = I_{010} = I_{001} = 0$ и $P_2(u) \equiv 0$. В этом случае $U_1(\mathbf{r}) \equiv 0$, а мультиполя первого порядка не существует.

Для $n = 2$ старший коэффициент c_{20}^1 обращается в ноль, если $I_{002} = I_{200}$ и $I_{101} = 0$, т.е. тело $\mathcal{B}$ является динамически симметричным с осью динамической симметрии OX_2 , а начало системы координат лежит на этой оси. В этом случае многочлен примет вид: $P_4^1(u) = c_{21}^1 u^3 + c_{22}^1 u^2 - c_{21}^1 u = 0$. Корни такого многочлена имеют вид:

$$u_1 = 0, \quad u_{2,3} = \frac{I_{200} - I_{020} \pm \sqrt{4I_{110}^2 + 4I_{011}^2 + (I_{200} - I_{020})^2}}{-2I_{110} + 2I_{011}i}.$$

Подставляя в соотношение (2.7) различные пары корней u_1 , u_2 и u_3 , можно определить лишь одну ось мультиполя:

$$\mathbf{h}_1 = \frac{1}{\sqrt{(I_{200} - I_{020})^2 + 4I_{110}^2 + 4I_{011}^2}} \cdot (2I_{110}, I_{020} - I_{200}, 2I_{011})^T.$$

Чтобы отыскать вторую ось, предлагается сделать следующее. Полагая $\mathbf{h}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, подставим найденную ось $\mathbf{h}_1$ в соотношение (2.3). Приравняв коэффициенты в $U_2(\mathbf{r})$ из соотношений (2.2) и (2.3) при одинаковых степенях r_1, r_2, r_3 , получаем вторую ось и момент мультиполя:

$$\mathbf{h}_2 = (0, 1, 0), \quad p_2 = \sqrt{(I_{200} - I_{020})^2 + 4I_{110}^2 + 4I_{011}^2}.$$

Отметим, что вторая ось оказывается сонаправленной с осью динамической симметрии тела $\mathcal{B}$.

Если тензор инерции тела не является шаровым, то выберем такую замену переменных (2.5), которая приводит к случаю, когда $c_{20}^2 = (I_{200} - I_{020})/2 + iI_{110} \neq 0$, а многочлен $P_4^1(u)$ обладает четырьмя корнями, что позволяет найти обе оси мультиполя.

Рассмотрим случай, когда тело $\mathcal{B}$ обладает трехосным эллипсоидом инерции, а связанная с ним система координат совпадает с его главными центральными осями инерции. В этом случае коэффициент $c_{21}^1 \equiv 0$, и многочлен имеет вид:

$$P_4^1(u) = c_{20}^1 u^4 + c_{22}^1 u^2 + c_{20}^1, \quad c_{20}^1 = (I_{002} - I_{200})/2, \quad c_{22}^1 = I_{200} - 2I_{020} + I_{002}.$$

Полагая для определенности $I_{200} > I_{020} > I_{002}$, корни $P_4^1(u) = 0$ имеют вид:

$$u_1 = -u_2 = \sqrt{\frac{I_{002} + I_{200} - 2I_{020} - 2i\sqrt{(I_{200} - I_{020})(I_{020} - I_{002})}}{I_{200} - I_{002}}},$$

$$u_3 = -u_4 = \sqrt{\frac{I_{002} + I_{200} - 2I_{020} + 2i\sqrt{(I_{200} - I_{020})(I_{020} - I_{002})}}{I_{200} - I_{002}}},$$

а оси мультиполя второго порядка при этом записываются как

$$\mathbf{h}_1 = \left(\frac{\sqrt{I_{200} - I_{020}}}{\sqrt{I_{200} - I_{002}}}, 0, -\frac{\sqrt{I_{020} - I_{002}}}{\sqrt{I_{200} - I_{002}}} \right)^T, \quad \mathbf{h}_2 = \left(\frac{\sqrt{I_{200} - I_{020}}}{\sqrt{I_{200} - I_{002}}}, 0, \frac{\sqrt{I_{020} - I_{002}}}{\sqrt{I_{200} - I_{002}}} \right)^T,$$

момент мультиполя равен $p_2 = I_{200} - I_{002}$.

Укажем геометрический смысл полученных осей. Рассмотрим круговые сечения эллипсоида инерции $J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 = 1$, где $J_x = I_{020} + I_{002}$, $J_y = I_{200} + I_{002}$, $J_z = I_{200} + I_{020}$ тела $\mathcal{B}$. Имеются два таких сечения, они лежат в пересечениях эллипсоида плоскостями, проходящими через его среднюю ось [31]. Вычисления показывают, что найденные оси $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ ортогональны этим круговым сечениям.

Замечание. Мультипольное представление потенциала спутникового приближения, нашедшего широкое применение в небесной механике и динамике космического полета [7], имеет вид:

$$U_{\text{спутник}} = -G \left(\frac{p_0}{r} + \frac{p_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial h_1 \partial h_2} \left(\frac{1}{r} \right) \right).$$

Если тело обладает шаровым тензором инерции, то $U_2(\mathbf{r}) \equiv 0$ и мультиполя второго порядка не существует.

Особый случай вычисления мультиполя третьего порядка рассмотрим на примере однородного тела, имеющего форму равногранного тетраэдра. В общем случае такое тело обладает трехосным эллипсоидом инерции, а в главных центральных осях инерции из десяти моментов инерции третьего порядка лишь один не является тождественным нулем.

4. Мультиполь третьего порядка однородного равногранного тетраэдра. Пусть твердое тело B – однородный равногранный тетраэдр массы m , а $Ox_1x_2x_3$ – связанная с ним система отсчета, оси которой направлены вдоль его бимедиан. Эти оси – главные оси инерции тетраэдра [32] (см. также [28, 33, 34]). Если $2a_1, 2a_2, 2a_3$ – длины бимедиан, то вершины тетраэдра P_1, P_2, P_3 и P_4 в этой системе отсчета задаются радиусами-векторами:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP_1} &= (a_1, -a_2, -a_3)^T, & \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OP_2} &= (-a_1, -a_2, a_3)^T, \\ \mathbf{r}_3 = \overrightarrow{OP_3} &= (-a_1, a_2, -a_3)^T, & \mathbf{r}_4 = \overrightarrow{OP_4} &= (a_1, a_2, a_3)^T. \end{aligned}$$

Для вычисления величин $I_{k_1k_2k_3}$ определим границы интегрирования. Так, например, полагая $-a_3 \leq x_3 \leq a_3$, область, по которой берется оставшийся двойной интеграл, представим в виде объединения трех областей со следующими границами:

$$\begin{aligned} -a_1 \leq x_1 \leq -a_1 \cdot x_3 / a_3 & \text{ и } x_{23} \leq x_2 \leq x_{21} \\ -a_1 \cdot x_3 / a_3 \leq x_1 \leq a_1 \cdot x_3 / a_3 & \text{ и } x_{22} \leq x_2 \leq x_{21} \\ a_1 \cdot x_3 / a_3 \leq x_1 \leq a_1 & \text{ и } x_{22} \leq x_2 \leq x_{24}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} x_{21}(x_1, x_3) &= a_2 \cdot x_1 / a_1 - a_2 \cdot x_3 / a_3 + a_2, & x_{22}(x_1, x_3) &= a_2 \cdot x_1 / a_1 + a_2 \cdot x_3 / a_3 - a_2, \\ x_{23}(x_1, x_3) &= -a_2 \cdot x_1 / a_1 - a_2 \cdot x_3 / a_3 - a_2, & x_{24}(x_1, x_3) &= -a_2 \cdot x_1 / a_1 + a_2 \cdot x_3 / a_3 + a_2, \end{aligned}$$

причем имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} x_{21}(x_1, -x_3) &= -x_{23}(x_1, x_3), & x_{22}(x_1, -x_3) &= -x_{24}(x_1, x_3), \\ x_{23}(x_1, -x_3) &= -x_{21}(x_1, x_3), & x_{24}(x_1, -x_3) &= -x_{22}(x_1, x_3). \end{aligned}$$

Утверждение. Если индексы $k_i, k_j, i \neq j, i, j = 1, 2, 3$ имеют различную четность, то коэффициент $I_{k_1k_2k_3} = 0$.

Доказательство этого факта техническое и заключается в том, что если найдутся два индекса $k_i, k_j, i \neq j, i, j = 1, 2, 3$ разной четности, то двойной интеграл по x_1 и x_2 является нечетной функцией переменной x_3 . Интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю.

Ненулевые моменты инерции вплоть до третьего порядка имеют следующий вид:

$$I_{000} = m, \quad I_{200} = ma_1^2/5, \quad I_{020} = ma_2^2/5, \quad I_{002} = ma_3^2/5, \quad I_{111} = ma_1a_2a_3/15.$$

В осях $Ox_1x_2x_3$ главные центральные моменты инерции, отнесенные к массе тетраэдра, имеют вид:

$$J_{200} = (a_2^2 + a_3^2)/5, \quad J_{020} = (a_1^2 + a_3^2)/5, \quad J_{002} = (a_1^2 + a_2^2)/5.$$

Замечание. Моменты инерции также могут быть вычислены с помощью их производящей функции. В осях $Ox_1x_2x_3$ производящая функция моментов инерции I_{abc} однородного равногранного тетраэдра имеет вид [35] (см. также [36]):

$$F(\mathbf{t}; a_1, a_2, a_3) = 4a_1a_2a_3 \sum_{(1,2,3)} \frac{e^{a_1t_1} \operatorname{ch}(a_2t_2 + a_3t_3) - e^{-a_1t_1} \operatorname{ch}(a_2t_2 - a_3t_3)}{(a_1^2t_1^2 - a_2^2t_2^2)(a_3^2t_3^2 - a_1^2t_1^2)} a_1t_1.$$

В частном случае однородного правильного тетраэдра с бимедианами длины $2a$ эта функция записывается как

$$F(\mathbf{t}; a) = 4 \sum_{(1,2,3)} \frac{e^{at_1} \operatorname{ch}((t_2 + t_3)a) - e^{-at_1} \operatorname{ch}((t_2 - t_3)a)}{(t_1^2 - t_2^2)(t_3^2 - t_1^2)} t_1.$$

Для нахождения осей мультиполя третьего порядка выпишем многочлен $P_6^1(u)$. Подставляя найденные моменты инерции для равногранного тетраэдра, получим:

$$c_{30}^1 = c_{32}^1 = c_{33}^1 = 0, \quad c_{31}^1 = 12i \cdot ma_1a_2a_3/15, \quad P_6^1(u) = c_{31}^1u^5 + \overline{c_{31}^1}u = 0.$$

Паре корней $u = \pm 1$ отвечает ось мультиполя $\mathbf{h}_1 = (1; 0; 0)$, паре корней $u = \pm i$ отвечает ось мультиполя $\mathbf{h}_3 = (0; 0; 1)$. Приравнявая коэффициенты при соответствующих слагаемых в (2.2) и (2.3), находим третью ось $\mathbf{h}_2 = (0; 1; 0)$, а также момент мультиполя, который оказывается равным $p_3 = 6I_{111} = 2m \cdot a_1a_2a_3/5$.

Легко убедиться, что для любой из шести замен переменных типа (2.5) коэффициент при старшей степени многочлена $P_6^1(u)$ всегда обращается в ноль.

5. Выводы. В работе рассмотрен восходящий к Максвеллу подход к представлению гравитационного потенциала тела в виде суммы потенциалов мультиполей различных порядков. Определены критические случаи работы алгоритма по нахождению параметров мультиполя – его осей и момента, основанного на теореме Сильвестра о существовании системы вещественных полюсов сферической функции. Такие случаи имеют место, когда тело обладает теми или иными симметриями в распределении масс. В исследовании приведены рекомендации по преодолению трудностей с ними связанными.

В случае тела, обладающего трехосным эллипсоидом инерции, получены явные выражения для осей и момента мультиполя второго порядка. Вычисления показали, что оси мультиполя ортогональны круговым сечениям эллипсоида инерции тела.

Рассмотрено модельное тело с постоянной плотностью, имеющее форму равногранного тетраэдра. В общем случае такое тело имеет трехосный эллипсоид инерции, а в главных центральных осях инерции из десяти моментов инерции третьего порядка лишь один не обращается в ноль тождественно. Приведен способ вычисления осей и момента мультиполя третьего порядка такого тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Maxwell J.C.* A treatise on electricity and magnetism. V. 1. Oxford: Clarendon Press, 1873. [Максвелл Дж. К. Трактат об электричестве и магнетизме. Т. 1. М.: Наука, 1989. 415 с.]
2. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Издательство иностранной литературы, 1952. 476 с. [*Hobson E.W.* The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. Cambridge: Cambridge University Press, 1931.]
3. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.-Л.: Государственное технико-теоретическое издательство, 1933. 525 с. [*Courant R., Hilbert D.* Methoden der mathematischen Physik. I. Berlin: Verlag von Julius Springer, 1931.]
4. *Умов Н.А.* Построение геометрического образа потенциала Гаусса как прием изыскания законов земного магнетизма // Тр. отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. 1904. Т. 12. Вып. 1. С. 1–26.
5. *Мещеряков Г.А.* Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. М.: Наука, 1991. 214 с.
6. *Sylvester J.J.* Note on spherical harmonics // Philosophical Magazine. 1876. V. 2. P. 291–307.
7. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 800 с.
8. *Werner R.A.* The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1994. V. 59. № 3. P. 253–278. <https://doi.org/10.1007/BF00692875>
9. *Werner R.A., Scheeres D.J.* Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1996. V. 65. № 3. P. 313–344. <https://doi.org/10.1007/BF00053511>
10. *Werner R.A.* Spherical harmonic coefficients for the potential of a constant-density polyhedron // Computers and Geosciences. 1997. V. 23. № 10. P. 1071–1077. [https://doi.org/10.1016/S0098-3004\(97\)00110-6](https://doi.org/10.1016/S0098-3004(97)00110-6)
11. *Pohánka V.* Optimum expression for computation of the gravity field of a polyhedral body with linearly increasing density // Geophysical Prospecting. 1998. V. 46. № 4. P. 391–404. <https://doi.org/10.1046/j.1365-2478.1998.960335.x>
12. *D'Urso M.G.* Gravity effects of polyhedral bodies with linearly varying density. // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2014. V. 120. P. 349–372. <https://doi.org/10.1007/s10569-014-9578-z>
13. *Ren Z., Chen C., Zhong Y., Chen H., Kalscheuer T., Maurer H., Tang J., Hu X.* Recursive analytical formulae of gravitational fields and gradient tensors for polyhedral bodies with polynomial density contrasts of arbitrary non-negative integer orders // Surveys in Geophysics. 2020. V. 41. P. 695–722. <https://doi.org/10.1007/s10712-020-09587-4>

14. *D'Urso M.G., Di Lieto D.* Gravitational fields of polyhedral bodies with 3D polynomial density contrast // *Surveys in Geophysics*. 2024. V. 45. P. 887–975.
<https://doi.org/10.1007/s10712-023-09822-8>
15. *Белецкий В.В., Пономарева О.Н.* Параметрический анализ устойчивости относительного равновесия в гравитационном поле // *Космические исследования*. 1990. Т. 28. № 5. С. 664–675.
16. *Белецкий В.В.* Обобщенная ограниченная круговая задача трех тел как модель динамики двойных астероидов // *Космические исследования*. 2007. Т. 45. № 5. С. 435–442.
17. *Zeng X., Jiang F., Li J., Baoyin H.* Study on the connection between the rotating mass dipole and natural elongated bodies // *Astrophysics and Space Science*. 2015. V. 356. № 1. P. 29–42.
<https://doi.org/10.1007/s10509-014-2187-1>
18. *Zeng X., Baoyin H., Li J.* Updated rotating mass dipole with oblateness of one primary: 1. Equilibria in the equator and their stability. // *Astrophysics and Space Science*. 2016. V. 361. № 1. Article 14. P. 1–12.
<https://doi.org/10.1007/s10509-015-2598-7>
19. *Zeng X., Baoyin H., Li J.* Updated rotating mass dipole with oblateness of one primary: 2. Out-of-plane equilibria and their stability. // *Astrophysics and Space Science*. 2016. V. 361. № 1. Article 15. P. 1–9.
<https://doi.org/10.1007/s10509-015-2599-6>
20. *Буров А.А., Герман А.Д., Распопова Е.А., Никонов В.И.* О применении к-средних для определения распределения масс гантелеобразных небесных тел. // *Нелинейная динамика*. 2018. Т. 14. № 1. С. 45–52.
<https://doi.org/10.20537/nd1801004>
21. *Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г.* Общее решение задачи о движении искусственного спутника Земли в нормальном поле притяжения Земли // *Искусственные спутники Земли*. М.: Изд-во АН СССР. 1961. Вып. 8. С. 64–71.
22. *Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г.* Применение обобщенной задачи двух неподвижных центров в теории движения ИСЗ // *Проблемы движения искусственных небесных тел* М.: Изд-во АН СССР. 1963. С. 92–98.
23. *Баландин Д.В., Никонов В.И.* О точках либрации вращающегося “комплексифицированного” треугольника // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. 2016. Т. 71. № 3. С. 25–31.
24. *Аниковский В.В., Журавлев С.Г.* Задача Эйлера и ее приложения в небесной механике и космодинамике // *ПММ*. 2011. Т. 75. № 6. С. 940–950.
25. *Herrera-Sucarrat E., Palmer P. L., Roberts R. M.* Modeling the gravitational potential of a nonspherical asteroid // *J. Guidance, Control, Dynamics*. 2013. V. 36. № 3. P. 790–798.
<https://doi.org/10.2514/1.58140>
26. *Буров А.А., Герман А.Д., Никонов В.И.* Использование метода К-средних для агрегирования масс продолговатых небесных тел // *Космические исследования*. 2019. Т. 57. № 4. С. 283–289.
<https://doi.org/10.1134/S0023420619040022>
27. *Burov A. A., Guerman A. D., Nikonova E. A., Nikonov V. I.* Approximation for attraction field of irregular celestial bodies using four massive points // *Acta Astronautica*. 2019. V. 157. P. 225–232.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.11.030>
28. *Никонова Е.А.* Равногранный тетраэдр и система точечных масс, равномоментная твердому телу // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия*. 2023. Т. 10. № 1. С. 155–164.
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.113>

29. Chanut T. G. G., Aljbaae S., Carruba V. Mascon gravitation model using a shaped polyhedral source // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2015. V. 450. № 4. P. 3742–3749.
<https://doi.org/10.1093/mnras/stv845>
30. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. М.: Высшая школа, 1970. 713 с.
31. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.-Л.: Главная редакция общетехнической литературы и номографии, 1936. 302 с. [Hilbert D., Cohn-Vossen S. Anschauliche geometrie. Berlin: Verlag von J. Springer, 1932.]
32. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. Стереометрия. Сер. “Библиотечка Квант”. Вып. 31. М.: Наука, 1984. 160 с.
33. Никонова Е.А. О стационарных движениях равногранного тетраэдра с неподвижной точкой в центральном поле сил // ПММ. 2022. Т. 86. № 2. С. 153–168.
<https://doi.org/10.31857/S0032823522020096>
34. Никонова Е.А. О стационарных движениях равногранного тетраэдра, близкого к правильному, с неподвижной точкой в центральном ньютоновском поле сил // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 5. С. 120–129.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922050117>
35. Буров А.А., Никонова Е.А. Производящая функция компонент тензора Эйлера-Пуансо // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2021. Т. 498. С. 53–56.
<https://doi.org/10.31857/S2686740021030068>
36. Burov A.A., Nikonova E.A. Generating function of the inertial integrals for small celestial bodies // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2022. V. 134. № 4. Article 37.
<https://doi.org/10.1007/s10569-022-10087-3>

ON THE MAXWELL REPRESENTATION OF THE GRAVITATIONAL POTENTIAL FOR A SYMMETRIC BODY

E. A. Nikonova^a, *

^a*Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

**e-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com*

Abstract — The article analyzes an approach that goes back to Maxwell to the representation of a potential, in particular, the potential of the Newtonian field of gravity as a sum of potentials of multipoles of different orders. Critical cases of the algorithm for finding the parameters of a multipole, namely, its axes and moment, are indicated. The cases take place when the body has certain symmetries in the mass distribution. Recommendations for overcoming the identified difficulties are formulated. For a body with a triaxial ellipsoid of inertia, explicit expressions for the axes and moment of a second-order multipole that are expressed via second-order inertia integrals are given. It is shown that the axes of the multipole are orthogonal to the circular cross-sections of the ellipsoid of inertia of the body. Critical cases of calculating a third-order multipole are considered using the example of a model

body with constant density, that has the shape of an equihedral tetrahedron. A method for calculating the axes and moment of a third-order multipole for such a body is given.

Keywords: gravitational potential, moments of inertia integrals of higher orders, Maxwell representation of potential, multipole, isosceles tetrahedron

REFERENCES

1. *Maxwell J.C.* A treatise on electricity and magnetism. V. 1. Oxford: Clarendon Press, 1873.
2. *Hobson E.W.* The Theory of spherical and ellipsoidal harmonics. Cambridge: Cambridge University Press, 1931.
3. *Courant R., Hilbert D.* Methoden der mathematischen Physik. I. Berlin: Verlag von Julius Springer, 1931.
4. *Umov N.A.* The construction of a geometric image of the Gauss potential as a method of exploring the laws of terrestrial magnetism // Proceedings of department of Physics science of the lovers of natural science. 1904. V. 12. № 1. P. 1–26.
5. *Meshcheryakov G.A.* Problems of potential theory and generalized Earth. M.: Nauka, 1991. [in Russian].
6. *Sylvester J.J.* Note on spherical harmonics // Philosophical Magazine. 1876. V. 2. P. 291–307.
7. *Duboshin G.N.* Celestial mechanics. Basic problems and methods. M.: Nauka, 1975. [in Russian].
8. *Werner R.A.* The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1994. V. 59. No. 3. P. 253–278.
9. *Werner R.A., Scheeres D.J.* Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1996. V. 65. № 3. P. 313–344.
10. *Werner R. A.* Spherical harmonic coefficients for the potential of a constant-density polyhedron // Computers and Geosciences. 1997. V. 23. № 10. P. 1071–1077.
11. *Pohánka V.* Optimum expression for computation of the gravity field of a polyhedral body with linearly increasing density // Geophysical Prospecting. 1998. V. 46. № 4. P. 391–404.
12. *D'Urso M.G.* Gravity effects of polyhedral bodies with linearly varying density. // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2014. V. 120. P. 349–372.
13. *Ren Z., Chen C., Zhong Y., Chen H., Kalscheuer T., Maurer H., Tang J., Hu X.* Recursive Analytical Formulae of Gravitational Fields and Gradient Tensors for Polyhedral Bodies with Polynomial Density Contrasts of Arbitrary Non-negative Integer Orders // Surveys in Geophysics. 2020. V. 41. P. 695–722.
14. *D'Urso M.G., Di Lieto D.* Gravitational Fields of Polyhedral Bodies with 3D Polynomial Density Contrast // Surveys in Geophysics. 2024. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10712-023-09822-8> (Date: 15.02.2024).
15. *Beletsky V.V., Ponomareva O.N.* A parametric Analysis of Relative Equilibrium Stability in the Gravitational Field // Space Researches. 1990. V. 28. № 5. P. 664–675.
16. *Beletsky V.V.* Generalized restricted circular three-body problem as a model for dynamics of binary asteroids // Cosmic Research. 2007. V. 45. № 5. P. 408–416.

17. Zeng X., Jiang F., Li J., Baoyin H. Study on the connection between the rotating mass dipole and natural elongated bodies // *Astrophysics and Space Science*. 2015. V. 356. № 1. P. 29–42.
18. Zeng X., Baoyin H., Li J. Updated rotating mass dipole with oblateness of one primary: 1. Equilibria in the equator and their stability. // *Astrophysics and Space Science*. 2016. V. 361. № 1. Article 14. P. 1–12.
19. Zeng X., Baoyin H., Li J. Updated rotating mass dipole with oblateness of one primary: 2. Out-of-plane equilibria and their stability. // *Astrophysics and Space Science*. 2016. V. 361. № 1. Article 15. P. 1–9.
20. Burov A.A., Guerman A.D., Raspopova E.A., Nikonov V.I. On the use of the K-means algorithm for determination of mass distributions in dumbbell-like celestial bodies // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2018. V. 14. № 1. P. 45–52.
21. Aksenov E.P., Grebenikov E.A., Demin V.G. General solution of the problem of the motion of an artificial satellite in the normal field of the Earth's attraction // *Planetary and Space Science*. 1962. V. 9. № 8. P. 491–498.
22. Aksenov E.P., Grebenikov E.A., Demin V.G. Application of the Generalized Problem of Two Fixed Centers in the Theory of Motion of Artificial Earth Satellites // *Problems of Motion of Artificial Celestial Bodies (Izv. Akad. Nauk SSSR, Moscow)*. 1963. P. 92–101.
23. Balandin D.V., Nikonov V.I. Libration points of a rotating complexified triangle // *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2016. V. 71. № 3. P. 51–57.
24. Anikovskii V.V., Zhuravlev S.G. Euler's problem and its applications in celestial mechanics and space dynamics // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2011. V. 75. № 6. P. 660–666.
25. Herrera-Sucarrat E., Palmer P.L., Roberts R.M. Modeling the Gravitational Potential of a Nonspherical Asteroid // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2013. V. 36. № 3. P. 790–798.
26. Burov A.A., Guerman A.D., Nikonov V.I. Using the K-means method for aggregating the masses of elongated celestial bodies // *Cosmic Research*. 2019. V. 57. № 4. P. 266–271.
27. Burov A.A., Guerman A.D., Nikonova E.A., Nikonov V.I. Approximation for attraction field of irregular celestial bodies using four massive points // *Acta Astronautica*. 2019. V. 157. P. 225–232.
28. Nikonova E.A. Isosceles Tetrahedron and an Equipomental System of a Rigid Body // *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*. 2023. V. 10. № 1. P. 156–165.
29. Chanut T.G.G., Aljbaae S., Carruba V. Mascon gravitation model using a shaped polyhedral source // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015. V. 450. № 4. P. 3742–3749.
30. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Partial differential equations of mathematical physics. Moscow: Higher school, 1970. [in Russian].
31. Hilbert D., Cohn-Vossen S. Anschauliche geometrie. Berlin: Verlag von J. Springer, 1932.
32. Sharygin I.F. Problems in Solid Geometry (Science for Everyone). Moscow: Mir Publishers, 1986.
33. Nikonova E.A. On Stationary Motions of an Isosceles Tetrahedron with a Fixed Point in the Central Field of Forces // *Mechanics of Solids*. 2022. V. 57. № 7. P. 1620–1632.
34. Nikonova E.A. Stationary Motions of a Close to Regular Isosceles Tetrahedron with a Fixed Point in the Central Newtonian Force Field // *Mechanics of Solids*. 2022. V. 57. № 5. P. 1059–1067.
35. Burov A.A., Nikonova E.A. The Generating Function for the Components of the Euler–Poinsoit Tensor // *Doklady Physics*. 2021. V. 66. № 5. P. 139–142.
36. Burov A.A., Nikonova E.A. Generating function of the inertial integrals for small celestial bodies // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2022. V. 134. № 4. Article 37.