

УДК 531.3

## Т-НАПРЯЖЕНИЯ В ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЕ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ, НАГРУЖЕННОЙ ВДАЛИ ОТ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ

© 2024 г. К. Б. Устинов<sup>а, \*</sup>

<sup>а</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского, РАН, Москва, Россия

\*e-mail: [ustinov@ipmnet.ru](mailto:ustinov@ipmnet.ru)

Поступила в редакцию 29.03.2024 г.

После доработки 17.04.2024 г.

Принята к публикации 21.04.2024 г.

На основании точного аналитического решения двумерной задачи о полосе из ортотропного материала с главными осями тензора упругости направленными параллельно и перпендикулярно ее границам, и центральной полубесконечной трещиной получены выражения для Т-напряжений. Сбалансированная система нагрузок в виде четырех независимых активных мод нагружения предполагается приложенной достаточно далеко от вершины трещины. Показано, что для двух (антисимметричных) мод нагружения Т-напряжения равны нулю, а для двух других (симметричных) — определяются одним либо двумя параметрами, составленными из компонент тензора упругости. Зависимости Т-напряжений для симметричных мод нагружения получены в виде двукратных интегралов от комбинаций элементарных функций, зависящих от одного из безразмерных параметров, второй из безразмерных параметров входит в выражение для Т-напряжений только одной из мод в виде мультипликативного коэффициента.

*Ключевые слова:* Т-напряжения, интегральное преобразование, двустороннее преобразование Лапласа, метод Винера–Хопфа

DOI: 10.31857/S1026351924040104, EDN: UCLGVK

**1. Введение.** Напряженное состояние вблизи вершины трещины определяется в первую очередь главным сингулярным членом, имеющим порядок  $r^{-1/2}$ , где  $r$  — расстояние до вершины трещины. Коэффициенты при этой сингулярности для нормальных и касательных напряжений, носящих название коэффициентов интенсивности напряжений [1], являются главными параметрами, с помощью которых описываются процессы развития трещин, в том числе направление их роста (см., напр., обзор [2]). Следующий член разложения поля напряжения вблизи вершины трещины имеет порядок  $r^0$  (т.е. константы) и носит название Т-напряжения. Для трещин со свободными берегами единственной ненулевой компонентой данного члена разложения тензора напряжений, очевидно, может быть компонента

нормальных напряжений, действующих на площадках перпендикулярных линии трещины. Роль Т-напряжений важна, в частности, в задачах об устойчивости прямолинейного пути распространения трещины при растяжении [3]. Концепция Т-напряжений использовалась также для объяснения других явлений, связанных с распространением трещин [4–7], в том числе в критериях, определяющих направление роста трещин [2]. Вычислению Т-напряжений посвящен большой ряд работ, авторы которых используют аналитические [8], полуаналитические [9] и численные, прежде всего МКЭ, методы [10, 11]. Обзор по Т-напряжениям, их экспериментальному определению, методам расчета и использованию в механике разрушения был дан в работе [12].

Задачи, связанные с распространением трещин в полосе, привлекают внимание как из-за их важности для различных приложений: расчета напряжений, вычисления коэффициентов интенсивности напряжений для стандартных испытаний на разрушение, таких как трех- и четырехточечный изгиб; изучение процессов разрушения в многослойных конструкциях; исследования адгезионных взаимодействий и отслоений покрытий, так и благодаря ее относительной простоте, позволяющей анализировать и выделять особенности процесса распространения трещин в подобных и более сложных системах [13–26].

Среди аналитических подходов к решению задач о полубесконечных трещинах следует отметить применение интегральных преобразований (преобразования Фурье либо двустороннего преобразования Лапласа) с последующим применением метода Винера–Хопфа [27–32]. Достоинством данного подхода является применимость полученных решений для всего диапазона упругих параметров. Данный подход позволяет получить аналитические выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в виде интегралов от алгебраических функций. Аналитическое решение задачи для анизотропной полосы было получено с помощью данного подхода в работе [33] для частного вида нагрузки. В работе [34] было получено удобное для использования численное решение аналогичной задачи, пригодное для диапазона наиболее часто встречающихся упругих свойств, однако не охватывающего всего диапазона. Решение для системы симметрично приложенных на бесконечности нагрузок было получено в работе [35] и обобщено в [36] на случай произвольной системы нагрузок, приложенной на бесконечности. Достоинством решения [35, 36] является его пригодность для всего диапазона термодинамически допустимых значений упругих констант ортотропного тела. Обобщение решения [36] на случай полосы, составленной из двух полуполос равной толщины из одинакового линейно упругого ортотропного материала с главными осями тензора упругости, симметрично наклоненными к границе раздела, было сделано в работе [37]; обобщение на случай полосы, составленной из двух анизотропных полуполос различной толщины и различных свойств для некоторой комбинации параметров путем применения масштабирования, было сделано в работе [38].

Однако в работах [35–38] исследования ограничивались вычислением КИН. В работе [39] для трещины в изотропной полосе данный подход был применен для вычисления Т-напряжений. В настоящей работе этот подход применяется для вычисления Т-напряжений в ортотропной полосе.

В реальных задачах внешние нагрузки действуют на некоторых конечных расстояниях от вершины трещины. Однако если эти расстояния много больше толщины слоя, то согласно принципу Сен-Венана данные нагрузки можно считать приложенными на бесконечности. Относительная погрешность, вызванная использованием данного допущения, экспоненциально убывает с увеличением расстояния между точкой приложения нагрузки и вершиной трещины по сравнению с толщиной слоя. Данное обстоятельство оправдывает использованное ранее [35–39] и в настоящей работе отнесение системы приложенных усилий на бесконечность.

**2. Формулировка задачи.** Рассмотрим линейно упругую ортотропную пластину  $-h < y < h$  с центральной полубесконечной трещиной  $y=0, x < 0$  в декартовой системе координат с началом, совпадающим с вершиной трещины (рис. 1). Без потери общности можно положить  $h = 1$ .

Предполагаются выполненными условия плоской деформации или плоско-го напряженного состояния, так что закон Гука может быть записан в виде [40]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \bar{\beta}_{11}\sigma_{xx} + \bar{\beta}_{12}\sigma_{yy}, \\ \varepsilon_{yy} &= \bar{\beta}_{12}\sigma_{xx} + \bar{\beta}_{22}\sigma_{yy}, \\ 2\varepsilon_{xy} &= \bar{\beta}_{66}\sigma_{xy}.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Здесь  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  — компоненты тензора напряжения;  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$  — компоненты тензора малых деформаций;  $\beta_{jk}$  — компоненты матрицы податливости, либо исходные, либо модифицированные для условий плоской деформации:

$$\bar{\beta}_{jk} = \begin{cases} \beta_{jk} & \text{плоское напряженное состояние,} \\ \beta_{jk} - \frac{\beta_{j3}\beta_{k3}}{\beta_{33}} & \text{плоская деформация.} \end{cases}\quad (2.2)$$

Полный набор уравнений включает также уравнения равновесия:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \quad (2.3)$$

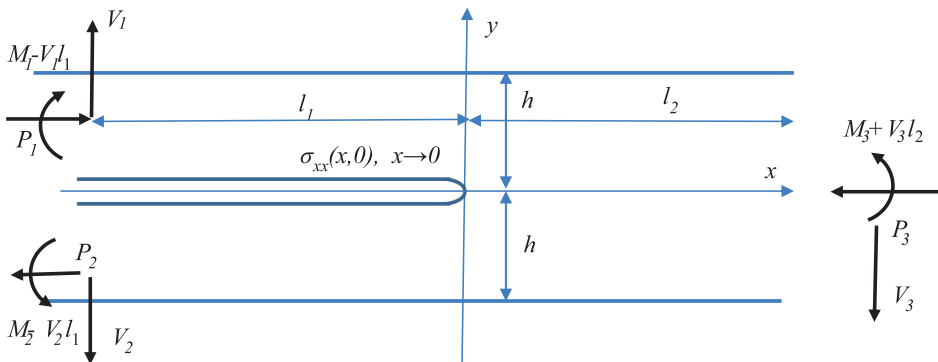


Рис. 1. Геометрия и система приложенных нагрузок.

и уравнение совместности:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \quad (2.4)$$

Граничные условия включают:

– отсутствие напряжений на внешней границе полосы и берегах трещины:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, h) = \sigma_{xy}(x, h) = \sigma_{yy}(x, -h) = \sigma_{xy}(x, -h) = 0, \quad |x| < \infty, \\ \sigma_{yy}^{(u)}(x, 0) = \sigma_{xy}^{(u)}(x, 0) = \sigma_{yy}^{(d)}(x, 0) = \sigma_{xy}^{(d)}(x, 0), \quad x < 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где индексы  $u, d$  соответствуют верхнему и нижнему берегу трещины.

Нагрузки приложены достаточно далеко от вершины трещины так, что их можно рассматривать как приложенные на бесконечности, в виде трех изгибающих моментов,  $M_1, M_2, M_3$ , трех продольных сил,  $P_1, P_2, P_3$ , и трех поперечных сил,  $V_1, V_2, V_3$ , с компенсирующими моментами,  $V_1 l_1, V_2 l_1, V_3 l_2, l_1 \rightarrow \infty, l_2 \rightarrow \infty$  (рис. 1) [41, 42].

Вследствие глобального равновесия только шесть из девяти силовых параметра независимы:

$$P_3 = P_1 - P_2, \quad M_3 = M_1 - M_2 + \frac{P_1 + P_2}{2}, \quad V_3 = V_1 - V_2. \quad (2.6)$$

Таким образом, шесть величин  $P_1, P_2, M_1, M_2, V_1, V_2$  могут быть выбраны в качестве параметров, описывающих внешнюю нагрузку. Ввиду существования двух независимых комбинаций внешних усилий, не приводящих к относительному смещению берегов трещин [14, 15, 20, 42], так называемых “пассивных нагрузок”, можно выделить четыре независимые активные моды нагружения, вызывающие относительные смещения берегов трещины. Следуя работе [41], выберем четыре моды, соответствующие ненулевым значениям соответствующих параметров:

$$\begin{aligned} M = - \int_0^{\infty} x \sigma_{yy}(x, 0) dx, \quad V = \int_0^{\infty} \sigma_{yy}(x, 0) dx, \quad P_K = \int_0^{\infty} \sigma_{xy}(x, 0) dx, \\ \tau_{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_{xy}(x, 0). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Введенные таким образом силовые параметры могут быть выражены через приложенные усилия следующим образом [41]:

$$\begin{aligned} M &= \frac{M_1 + M_2}{2}, \\ P_K &= \frac{3}{4h} (M_2 - M_1) + \frac{P_1 + P_2}{8}, \\ V &= \frac{V_1 + V_2}{2}, \\ \tau_{\infty} &= \frac{3}{4h} (V_2 - V_1). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Задача состоит в нахождении  $\Gamma$ -напряжений, т.е. предела компоненты тензора напряжения  $\sigma_{xx}$  при приближении к вершине трещины двигаясь вдоль ее берегов для четырех мод активного нагружения.

**3. Решение для слоя; вычисление  $\Gamma$ -напряжений.** Распределение нормальных и касательных напряжений вдоль линии продолжения трещины было получено в работе [36] для всех четырех указанных мод нагружения (2.7). Задача была решена путем применения двустороннего преобразования Лапласа к системе уравнений и граничным условиям и использованием метода Винера–Хопфа [43–45]. Выражения для Лаплас-образов нормальных напряжений, действующих вдоль линии продолжения центральной полубесконечной трещины в ортотропной полосе, полученные в работе [36], могут быть записаны следующим образом

$$\hat{\sigma}_{yy}^+ = \frac{\Gamma^3(1/2 + ph\lambda^{-1/4}\pi^{-1})}{\Gamma^3(1 + ph\lambda^{-1/4}\pi^{-1})} J_+^{-1}(p) \Pi(p), \quad \text{Re}(p) > 0, \quad (3.1)$$

$$J_+(p) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ \sqrt{\rho-1} \text{th}^3(\text{sh} \lambda^{-1/4}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\sqrt{\rho+1} \text{sh}(\text{sh} \lambda^{-1/4} \sqrt{2(\rho-1)}) + \sqrt{\rho-1} \text{sh}(\text{sh} \lambda^{-1/4} \sqrt{2(\rho+1)})}{(\rho-1) \text{ch}(\text{sh} \lambda^{-1/4} \sqrt{2(\rho+1)}) - (\rho+1) \text{ch}(\text{sh} \lambda^{-1/4} \sqrt{2(\rho-1)}) + 2} \right] \frac{ds}{is-p} \right\}, \quad (3.2)$$

$$\Pi(p) = \frac{2^{3/4} 3^{1/2}}{\pi^{3/2} (\rho+1)^{1/4}} \left[ V + \left( M + \frac{h}{\lambda^{1/4}} Y(\rho) V \right) p \right], \quad (3.3)$$

где

$$Y(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dL(s)}{ds} \frac{ds}{s} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [L(s) - L(0)] \frac{ds}{s^2}, \quad (3.4)$$

$$L(s) = \ln \left[ s^3 \sqrt{\rho-1} \frac{\sqrt{\rho+1} \text{sh}(s\sqrt{2(\rho-1)}) + \sqrt{\rho-1} \text{sh}(s\sqrt{2(\rho+1)})}{(\rho-1) \text{ch}(s\sqrt{2(\rho+1)}) - (\rho+1) \text{ch}(s\sqrt{2(\rho-1)}) + 2} \right], \quad \rho > 1, \quad (3.5)$$

$$L(s) = \ln \left[ s^3 \sqrt{1-\rho} \frac{\sqrt{\rho+1} \sin(s\sqrt{2(1-\rho)}) + \sqrt{1-\rho} \text{sh}(s\sqrt{2(\rho+1)})}{(\rho-1) \text{ch}(s\sqrt{2(\rho+1)}) - (\rho+1) \cos(s\sqrt{2(1-\rho)}) + 2} \right], \quad -1 < \rho < 1.$$

Здесь  $\Gamma$  – гамма-функция Эйлера. Функция, определяемая (3.1), голоморфна при  $\text{Re}(p) > 0$ , следовательно ее оригинал  $\sigma_{yy}(x, 0)$  тождественно равен нулю при  $x < 0$ , как и должно быть.

Функция  $Y(\rho)$  была вычислена в работе [36] и табулирована в [42].

Прямое и обратное преобразование Лапласа определены следующим образом [45, 46]:

$$\hat{f}(p, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-px} dx, \tag{3.6}$$

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \hat{f}(p, y) e^{px} dp, \tag{3.7}$$

где контур  $L$  соответствует мнимой оси комплексной плоскости  $p$ , а направление обхода – сверху вниз. Здесь и далее циркумфлекс над символом обозначает трансформанту от соответствующей функции.

Знание распределения нормальных и касательных напряжений, действующих на продолжении линии трещины, а следовательно, знание распределения напряжений на границе верхней и нижней полуполос, позволяет сформулировать первую основную задачу для данных областей для нахождения всех интересующих величин, включая Т-напряжение.

Отметим, что, подобно изотропному случаю [39], ненулевые Т-напряжения могут возникнуть только благодаря симметричным модам нагружения (М и Т в рассматриваемом случае). В этой связи распределения напряжений только благодаря этим модам выписаны в (3.1)–(3.5) и будут рассматриваться далее.

Рассмотрим верхний слой. Внутри области справедливы уравнения (2.1)–(2.4), вид граничных условий следует из (2.5) и (3.1)

$$\sigma_{yy}(x, h) = \sigma_{xy}(x, h) = 0, \quad \sigma_{yy}(x, 0) = qy(x), \quad \sigma_{xy}(x, 0) = 0, \quad |x| < \infty. \tag{3.8}$$

Введение функции напряжений Эри  $F$  как

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{3.9}$$

позволяет тождественно удовлетворить уравнения равновесия (2.3). Подстановка (3.9) в (2.1), а затем вводит систему уравнений упругости для двумерного случая к одному уравнению относительно одного неизвестного (функции напряжений), например [40]:

$$\beta_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (\beta_{66} + 2\beta_{12}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \tag{3.10}$$

Уравнение удобно записать, выразив коэффициенты податливости через безразмерные параметры  $0 < \lambda < \infty, -1 < \rho < \infty$  [34]:

$$\lambda = \frac{\beta_{11}}{\beta_{22}}, \quad \rho = \frac{\beta_{66} + 2\beta_{12}}{2\sqrt{\beta_{11}\beta_{22}}}. \tag{3.11}$$

Применение двустороннего преобразования Лапласа (3.6) к уравнению (3.10) с использованием (3.11) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для образа:

$$p^4 \hat{F}(p, y) + 2\sqrt{\lambda} \rho p^2 \frac{\partial^2 \hat{F}(p, y)}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial^4 \hat{F}(p, y)}{\partial y^4} = 0. \quad (3.12)$$

Решение уравнения удовлетворяющее граничным условиям есть

$$\hat{F}(p, y) = C_1 \cos(k_1 p y) + C_2 \cos(k_2 p y) + C_3 \sin(k_1 p y) + C_4 \sin(k_2 p y), \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{k_2(k_2 \sin(k_1 p) \sin(k_2 p) + k_1 \cos(k_1 p) \cos(k_2 p) - k_1)}{p^2 \left( (k_1^2 + k_2^2) \sin(k_1 p) \sin(k_2 p) + 2k_1 k_2 (\cos(k_1 p) \cos(k_2 p) - 1) \right)}, \\ C_2 &= \frac{k_1(k_1 \sin(k_1 p) \sin(k_2 p) + k_2 \cos(k_1 p) \cos(k_2 p) - k_2)}{p^2 \left( (k_1^2 + k_2^2) \sin(k_1 p) \sin(k_2 p) + 2k_1 k_2 (\cos(k_1 p) \cos(k_2 p) - 1) \right)}, \\ C_3 &= \frac{k_2(k_1 \sin(k_1 p) \cos(k_2 p) - k_2 \cos(k_1 p) \sin(k_2 p))}{p^2 \left( (k_1^2 + k_2^2) \sin(k_1 p) \sin(k_2 p) + 2k_1 k_2 (\cos(k_1 p) \cos(k_2 p) - 1) \right)}, \\ C_4 &= \frac{k_1(k_2 \cos(k_1 p) \sin(k_2 p) - k_1 \sin(k_1 p) \cos(k_2 p))}{p^2 \left( (k_1^2 + k_2^2) \sin(k_1 p) \sin(k_2 p) + 2k_1 k_2 (\cos(k_1 p) \cos(k_2 p) - 1) \right)}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \lambda^{-1/4} \sqrt{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}}, \quad k_1 \pm k_2 = \lambda^{-1/4} \sqrt{2} \sqrt{\rho \pm 1}, \quad k_1 k_2 = \lambda^{-1/2}, \\ k_1^2 + k_2^2 &= 2\lambda^{-1/2} \rho, \quad k_1^2 - k_2^2 = 2\lambda^{-1/2} \sqrt{\rho^2 - 1}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Применение первой из формул (3.9) к (3.16) дает выражение для трансформанты напряжения  $\sigma_{xx}(x, y)$ . В частности, для  $y = 0$  имеем:

$$\hat{\sigma}_{xx}(p, 0) = (f(p) + 1) \hat{q}_y(p). \quad (3.16)$$

Здесь

$$f(p) = \frac{-\rho \cos(k_1 p) \cos(k_2 p) - \sin(k_1 p) \sin(k_2 p) + \rho}{\sqrt{\lambda} (\rho \sin(k_1 p) \sin(k_2 p) + \cos(k_1 p) \cos(k_2 p) - 1)}. \quad (3.17)$$

Оригинал функции  $q_y(p)$  равен нулю при  $x < 0$ , следовательно, не имеет членов порядка  $x^0$  в степенном разложении возле нуля. Таким образом, для нахождения Т-напряжения, т.е. члена порядка  $x^0$  в степенном разложении напряжения возле нуля, мы можем добавить в выражение (3.16) функцию  $\hat{q}_y(p)$  с произвольным коэффициентом. При этом желательно выбрать данный коэффициент таким образом, чтобы интеграл обратного преобразования Лапласа сходилась по возможности быстрее, что предполагает выбор его значения равным  $-1$ , так что

$$\hat{\sigma}_{xx}(p, 0) = f(p) \hat{q}_y(p). \quad (3.18)$$

Применение обратного преобразования (3.7) к (3.18) дает распределение напряжений  $\sigma_{xx}$  вдоль линии трещины:

$$\sigma_{xx}(x, 0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L f(p) \hat{q}_y(p) e^{px} dp. \tag{3.19}$$

Данное представление справедливо для отрицательных  $x$ . Здесь контур интегрирования – вертикальная линия в комплексной плоскости  $p$ , проходящая между нулем и ближайшем к нулю полюсом  $p_1$  с положительной действительной частью функции (3.17). Для  $x = 0$  формула (3.19) вместе с (3.17), (3.1)–(3.5), где  $\hat{q}_y(p) = \hat{\sigma}_{yy}^+(p)$ , дает выражение для Т-напряжений. Однако наличие двух параметров  $\lambda, \rho$  в подынтегральных выражениях приводит к тому, что использование данных формул становится неудобным. Подстановка  $p = \lambda^{-1/4} p'$  позволяет вынести параметр  $\lambda$  из-под интеграла, после чего выражение для Т-напряжений преобразуется к виду:

$$T = T_M M + \lambda^{-1/4} T_V V, \tag{3.20}$$

здесь  $T_M, T_V$  – величины Т-напряжений, вызванных действием единичного момента  $M$  и единичной пары сил  $V$  с компенсирующим моментом. Подстановка  $p' = \gamma + it, 0 < \gamma < \text{Re } p_1$ , приводит к следующим выражениям для  $T_M, T_V$ :

$$T_M = 6M - \frac{2^{3/4} 3^{1/2}}{\pi^{3/2} (\rho+1)^{1/4}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f'(it+\gamma) \frac{\Gamma^3(1/2+(it+\gamma)\pi^{-1})}{\Gamma^3(1+(it+\gamma)\pi^{-1})} J_+^{-1}(it+\gamma) dt, \tag{3.21}$$

$$T_V = -\frac{2^{3/4} 3^{1/2}}{\pi^{3/2} (\rho+1)^{1/4}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f'(it+\gamma) \frac{\Gamma^3(1/2+(it+\gamma)\pi^{-1})}{\Gamma^3(1+(it+\gamma)\pi^{-1})} \times \\ \times J_+^{-1}(it+\gamma) [1 + (it+\gamma)Y(\rho)] dt. \tag{3.22}$$

В выражении (3.21) внеинтегральный член соответствует вычету подынтегральной функции в нуле, в выражении (3.22) внеинтегральный член отсутствует, поскольку вычет подынтегральной функции в нуле равен нулю.

Функции (3.17) и (3.2) для  $\lambda = 1$  преобразуется следующим образом:

$$f'(p) = \frac{\rho \left( -\left( \cos(\sqrt{2}p\sqrt{\rho-1}) + \cos(\sqrt{2}p\sqrt{\rho+1}) \right) - \cos(\sqrt{2}p\sqrt{\rho-1}) + \cos(\sqrt{2}p\sqrt{\rho+1}) + 2\rho \right)}{\cos(\sqrt{2}p\sqrt{\rho-1}) + \cos(\sqrt{2}p\sqrt{\rho+1}) - \rho \left( \cos(\sqrt{2}p\sqrt{\rho+1}) - \cos(\sqrt{2}p\sqrt{\rho-1}) \right) - 2}, \tag{3.23}$$

$$J'_+(p) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ \sqrt{\rho-1} \text{th}^3(s) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\sqrt{\rho+1} \text{sh}(s\sqrt{2(\rho-1)}) + \sqrt{\rho-1} \text{sh}(s\sqrt{2(\rho+1)})}{(\rho-1) \text{ch}(s\sqrt{2(\rho+1)}) - (\rho+1) \text{ch}(s\sqrt{2(\rho-1)}) + 2} \right] \frac{ds}{is-p} \right\}. \tag{3.24}$$



Функция  $Y(\rho)$  по-прежнему определяется формулами (3.4), (3.5).

**4. Численные результаты.** Величины  $T_M, T_V$  как функции  $\rho$  рассчитывались для значений  $\gamma > 0$ , не превышающих действительной части ближайшего нуля знаменателя функции (3.23), уменьшающегося с ростом  $\rho$ . Результаты вычислений приведены в табл. 1. Из представленных результатов видно, что обе функции  $T_M, T_V$  возрастают с увеличением  $\rho$ , причем функция  $T_V$  меняет знак.

**Таблица 1.** Т-напряжения, вызванные действием изгибающего момента и пары поперечных сил (с компенсирующим моментом)

$\rho$	$Y$	$T_V$	$T_M$
-0.99	0.173	-1.27535	3.97972
-0.9	0.246	-1.26183	4.11123
-0.4	0.415	-1.19768	4.47525
-0.2	0.462	-1.16935	4.5786
0	0.504	-1.13935	4.66992
0.4	0.578	-1.07563	4.827
0.9	0.658	-0.99112	4.99027
1		<b>-0.9748</b>	<b>5.0196</b>
1.1	0.691	-0.95989	5.048067
2	0.806	-0.79592	5.270964
5	1.111	-0.24484	5.774636
10	1.458	0.644107	6.280166
20	2.036	2.319428	6.873
40	2.832	5.276163	7.5276
70	3.719	9.141553	8.087
100	4.432	12.59656	8.455

Величина для  $\rho = 1$  взята соответствующей изотропному телу [39].

В настоящее время получил распространение другой набор независимых мод нагружения расслаиваемый полосы [14, 15, 20], а именно:

1. Симметричное нагружение изгибающими моментами (совпадает с одним из рассмотренных случаев):

$$(M_1 = M_2 = M, M_3 = P_1 = P_2 = P_3 = V_1 = V_2 = V_3 = 0). \quad (4.1)$$

2. Нагружение одинаковыми по величине и разнонаправленными продольными силами и компенсирующим моментом, приложенным к нижней отслаиваемой части полосы:

$$(P_1 = P_2 = P_3, M_2 = P_1, M_1 = M_3 = P_3 = V_1 = V_2 = V_3 = 0). \quad (4.2)$$

3. Нагружение парой поперечных сил с компенсирующими моментами, приложенными к обоим отслаиваемым частям полосы (совпадает с одним из рассмотренных случаев):

$$(V_1 = V_2 = D, M_1 = M_2 = M_3 = P_1 = P_2 = P_3 = V_3 = 0). \quad (4.3)$$

4. Нагружение двумя одинаковыми по абсолютной величине и разнонаправленными поперечными силами с компенсирующими моментами, одна из которых приложена к верхней отслаиваемой полуполосе, а другая – к цельной части:

$$(V_1 = V_3 = S, M_1 = M_3 = M_2 = V_2 = P_1 = P_2 = P_3 = 0). \quad (4.4)$$

Сравнение данных мод с модами, рассмотренными выше, приводит к следующему представлению эквивалентному (3.20) :

$$T = T_M \left( M + \frac{P_S}{2} \right) + T_V \left( D + \frac{S}{2} \right). \quad (4.5)$$

**Заключение.** Рассмотрена задача о полосе из ортотропного материала с главными осями тензора упругости, направленными параллельно и перпендикулярно ее границам и центральной полубесконечной трещиной. Сбалансированная система нагрузок в виде четырех независимых активных мод нагружения предполагается приложенной достаточно далеко от вершины трещины. На основании точного аналитического решения данной задачи получены выражения для Т-напряжений, т.е. главного несингулярного члена в разложении вблизи вершины трещины нормального напряжения, действующего по нормали к линии трещины.

Показано, что для двух (антисимметричных) мод нагружения Т-напряжения равны нулю, а для двух других (симметричных) – определяются одним либо двумя безразмерными параметрами, составленными из компонент тензора упругости.

Зависимости Т-напряжений для симметричных мод нагружения получены в виде двукратных интегралов от комбинаций элементарных функций, зависящих от одного из безразмерных параметров, при этом второй безразмерный параметр входит в выражение для Т-напряжений только одной из мод в виде мультипликативного коэффициента.

Работа выполнена при финансовой поддержке госзадания (№ госрегистрации 124012500441-6).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Irwin G.R.* Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // *J. App. Mech.* 1957. V. 24. № 3. P. 361–364.  
<https://doi.org/10.1115/1.4011547>
2. *Ярема С.Я., Иваницкая Г.С.* Предельное равновесие и развитие косых трещин. Обзор критериев // *Физ.-хим. механика материалов.* 1986. Т. 22. № 1. С. 45–57.
3. *Cotterell B.* Notes on paths and stability of cracks // *Int. J. Fract. Mech.* 1966. V. 2. P. 526–533.  
<https://doi.org/10.1007/BF00193691>

4. Larsson S.G., Carlsson A.J. Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials // *J. Mech. Phys. Solids*. 1973. V. 21. № 4. P. 263–77.  
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(73\)90024-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(73)90024-0)
5. Zhou R., Zhu P., Li Z. The shielding effect of the plastic zone at mode-II crack tip // *Int. J. Fract.* 2011. V. 171. P.195–200.  
<https://doi.org/10.1007/s10704-011-9627-5>
6. Williams J, Ewing P.D. Fracture under complex stress – angled crack problem // *Int. J. Fract. Mech.* 1972. V. 8. P. 441–446.  
<https://doi.org/10.1007/BF00191106>
7. Finnie I., Saith A. A note on the angled crack problem and the directional stability of cracks // *Int. J. Fract.* 1973. V. 9. P. 484–486.  
<https://doi.org/10.1007/BF00036331>
8. Kfoury A.P. Some evaluations of the elastic T-term using Eshelby’s method // *Int. J. Fract.* 1986. V. 30. P. 301–315.  
<https://doi.org/10.1007/BF00019710>
9. Kim J.-H., Vlassak J.J. T-stress of a bi-material strip under generalized edge loads // *Int. J. Frac.* 2006. V. 142. P. 315–322.  
<https://doi.org/10.1007/s10704-006-9033-6>
10. Кургузов В.Д., Демешкин А.Г., Кузнецов Д.А. Трехточечный изгиб образцов с эксцентричной краевой трещиной при смешанном нагружении // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2023. Т. 16. № 3. С. 345–357.  
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.3.29>
11. Ayatollahi M.R., Pavier M.J., Smith D.J. Determination of T-stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading // *Int. J. Fract.* 1998. V. 91. P. 283–298.  
<https://doi.org/10.1023/A:1007581125618>
12. Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture mechanics // *Eng. Frac. Mech.* 2015. V. 134. P. 218–241.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.10.013>
13. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
14. Suo Z., Hutchinson J.W. Interface crack between two elastic layers // *Int. J. Fract.* 1990. V. 43. P. 1–18.  
<https://doi.org/10.1007/BF00018123>
15. Hutchinson, J.W., Suo, Z. Mixed mode cracking in layered materials // *Adv. Appl. Mech.* 1991. V. 29. P. 63–191.  
[https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70164-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70164-9)
16. Andrews M.G., Massabò R. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // *Eng. Fract. Mech.* 2007. V. 74. № 17. P. 2700–2720.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2007.01.013>
17. Li S., Wang J., Thouless M.D. The effects of shear on delamination in layered materials // *J. Mech. Phys. Solids*. 2004. V. 52. № 1. P. 193–214.  
[https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00070-X](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00070-X)
18. Massabò R., Brandinelli L., Cox B.N. Mode I weight functions for an orthotropic double cantilever beam // *Int. J. Eng. Sci.* 2003. V. 41. № 13–14. P. 1497–1518.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(03\)00029-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(03)00029-6)
19. Ustinov K.B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // *Eng. Failure Anal.* 2015. V. 47. Part B. P. 338–344.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2013.09.022>

20. *Begley M.R., Hutchinson J.W.* The mechanics and reliability of films, multilayers and coatings. Cambridge University Press. 2017.  
<https://doi.org/10.1017/9781316443606>
21. *Banks-Sills L.* Interface fracture and delaminations in composite materials. Springer Briefs in Applied Sciences and Technology. Springer, International Publishing, Cham. 2018.
22. *Глаголев В.В., Маркин А.А.* Влияние модели поведения тонкого адгезионного слоя на значение  $j$ -интеграла // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 2. С. 90–98.  
<http://doi.org/10.31857/S0572329922020118>
23. *Глаголев В.В., Маркин А.А.* Предельные состояния адгезионных слоев при комбинированном нагружении // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 6. С. 39–46.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329923600019>
24. *Кургузов В.Д.* Моделирование отслоения тонких пленок при сжатии // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7. № 1. С. 91–99.  
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.10>
25. *Ватульян А.О., Морозов К.Л.* Об исследовании отслоения от упругого основания на основе модели с двумя коэффициентами постели // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 2. С. 64–76.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329920020130>
26. *Ватульян А.О., Морозов К.Л.* Исследование процесса отслоения неоднородного покрытия // Прикладная механика и техническая физика. 2021. 62. № 6 (370). С. 138–145.  
<http://doi.org/10.15372/PMTF20210616>
27. *Попов Г.Я.* Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 2. С. 342–355.
28. *Салганик Р.Л.* О хрупком разрушении склеенных тел // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 5. С. 957–962.
29. *Fichter W.B.* The stress intensity factor for the double cantilever beam // Int. J. Fract. 1983. V. 22. P.133–143.  
<http://doi.org/10.1007/BF00942719>
30. *Foote R.M.L., Buchwald V.T.* An exact solution for the stress intensity factor for a double cantilever beam // Int. J. Fract. 1985. V. 29. P. 125–134.  
<http://doi.org/10.1007/BF00034313>
31. *Златин А.Н., Храпков А.А.* Полубесконечная трещина, параллельная границе упругой полуплоскости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 31. С. 1009–1010.
32. *Салганик Р.Л., Устинов К.Б.* Задача о деформировании упруго заделанной пластины, моделирующей частично отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация) // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 4. С. 50–62.
33. *Georgiadis H.G., Papadopoulos G.A.* Elastostatics of the orthotropic double-cantilever-beam fracture specimen // Z. Angew. Math. Phys. 1990. V. 41. P. 889–899.  
<http://doi.org/10.1007/BF00945841>
34. *Suo Z.* Delamination specimens for orthotropic materials // J. Appl. Mech. 1990. V. 57. № 3. P. 627–634.  
<https://doi.org/10.1115/1.2897068>
35. *Устинов К.Б., Лисовенко Д.С., Ченцов А.В.* Ортотропная полоса с центральной полубесконечной трещиной под произвольными нормальными нагрузками, приложенными вдали от вершины трещины // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23. № 4. С. 657–670.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1736>

36. *Ustinov K.B., Massabò R., Lisovenko D.* Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution // *Eng. Failure Analysis*. 2020. V. 110. P. 104410.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2020.104410>
37. *Устинов К.Б., Борисова Н.Л.* Расслоение полосы состоящей из двух одинаковых ортотропных полуполос с осями изотропии симметрично наклоненными к границе раздела // *Изв. РАН МТТ*. 2024. № 5.
38. *Ustinov K.B., Idrisov D.M.* On delamination of bi-layers composed by orthotropic materials: exact analytical solutions for some particular cases // *ZAMM. Z. Angew. Math. Mech.* 2021. V. 101. № 4. e202000239.  
<https://doi.org/10.1002/zamm.202000239>
39. *Ustinov K.B., Monetto I., Massabò R.* Analytical solutions for an isotropic strip with a central semi-infinite crack: T-stresses, displacements of boundaries, stress intensity factor due to a force acting at the crack // to be published 2024
40. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
41. *Ustinov K.* On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer // *Eur. J. Mech. A Solids*. 2019. V. 75. P. 56–69.  
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.01.013>
42. *Ustinov K., Massabò R.* On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers // *Int. J. Sol. Struct.* 2022. V. 248. P. 111600.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111600>
43. *Noble B.* Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations. 1959. [Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.]
44. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
45. *Khrapkov A.* Winer-Hopf Method in Mixed Elasticity Theory Problems. В.Е. Vedeneev VNIIG Publishing House, 2001.
46. *Doetsch G.* Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-transformations und der Z-transformations, Oldenbourg, München, 1956. [Дёч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. 207 с.]

## T-STRESS IN AN ORTHOTROPIC STRIP WITH A CENTRAL SEMI-INFINITE CRACK LOADED FAR FROM THE CRACK TIP

К. В. Устинов<sup>a, \*</sup>

<sup>a</sup>*A. Yu. Ishlinsky Institute for problem in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: ustinov@ipmnet.ru*

**Abstract** – Based on an exact analytical solution to the two-dimensional problem of a strip of orthotropic material with the main axes of the elasticity tensor directed parallel and perpendicular to its boundaries and a central semi-infinite crack, expressions for T-stresses are obtained. A balanced load system in the form of four independent active loading modes is assumed to be applied sufficiently far from the crack tip. It is shown that for two (antisymmetric) loading modes the T-stresses are equal to zero, and for the other two (symmetric) they are determined by one or two parameters composed of components of the elasticity tensor. The

dependences of T-stresses for symmetric loading modes are obtained in the form of double integrals from combinations of elementary functions depending on one of the dimensionless parameters; the second of the dimensionless parameters is included in the expression for T-stresses of only one of the modes in the form of a multiplicative coefficient.

*Keywords:* T-stress, integral transforms, bi-lateral Laplace transform, method of Wiener-Hopf

## REFERENCES

1. *Irwin G.R.* Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate // *J. Appl. Mech.* 1957. V. 24. P. 361–364.  
<https://doi.org/10.1115/1.4011547>
2. *Yarema S.Ya., Ivanitskaya G.S.* Limit equilibrium and development of oblique cracks. Review of criteria // *Phys.-Chem. mechanics of materials.* 1986. V. 1. P. 45–57 [In Russian].
3. *Cotterell B.* Notes on Paths and Stability of Cracks // *Int. J. Fract. Mech.* 1966. V. 2. № 3. P. 526–533.  
<https://doi.org/10.1007/BF00193691>
4. *Larsson S.G., Carlsson A.J.* Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials // *J. Mech. Phys. Solids.* 1973. V. 21. № 4. P. 263–277.  
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(73\)90024-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(73)90024-0)
5. *Zhou R., Zhu P., Li Z.* The Shielding Effect of the Plastic Zone at Mode-II Crack Tip // *Int. J. Fract.* 2011. V. 171. № 2. P. 195–200.  
<https://doi.org/10.1007/s10704-011-9627-5>
6. *Williams J., Ewing P.D.* Fracture Under Complex Stress – Angled Crack Problem // *Int. J. Fract. Mech.* 1972. V. 8. № 4. P. 441–446.  
<https://doi.org/10.1007/BF00191106>
7. *Finnie I., Saith A.* A note on the angled crack problem and the directional stability of cracks // *Int. J. Fract.* 1973. V. 9. № 4. P. 484–486.  
<https://doi.org/10.1007/BF00036331>
8. *Kfoury A.P.* Some evaluations of the elastic T-term using Eshelby's method // *Int. J. Fract.* 1986. V. 30. P. 301–315.  
<https://doi.org/10.1007/BF00019710>
9. *Kim J.-H., Vlassak J.J.* T-stress of a bi-material strip under generalized edge loads // *Int. J. Frac.* 2006. V. 142. P. 315–322.  
<https://doi.org/10.1007/s10704-006-9033-6>
10. *Kurguzov V.D., Demeshkin A.G., Kuznetsov D.A.* Three-point bending of eccentric edge crack specimens under mixed mode loading // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* 2023. V. 16. № 3. P. 345–357.  
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.3.29>
11. *Ayatollahi M.R., Pavier M.J., Smith D.J.* Determination of T-stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading // *Int. J. Fract.* 1998. V. 91. P. 283–298.  
<https://doi.org/10.1023/A:1007581125618>
12. *Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R.* A review of T-stress and its effects in fracture mechanics // *Eng. Frac. Mech.* 2015. V. 134. P. 218–241.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.10.013>

13. *Aleksandrov V.M., Mkhitarian S.M.* Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers. M.: Nauka, 1983. 487 p. [In Russian].
14. *Suo Z., Hutchinson J.W.* Interface crack between two elastic layers // *Int. J. Fract.* 1990. V. 43. P. 1–18.  
<https://doi.org/10.1007/BF00018123>
15. *Hutchinson, J.W., Suo, Z.* Mixed Mode Cracking in Layered Materials // *Adv. Appl. Mech.* Ed. J.W. Hutchinson, T.Y. Wu. 1992. V. 29. P. 63–191.  
[https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70164-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70164-9)
16. *Andrews M.G., Massabò R.* The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // *Eng. Fract. Mech.* 2007. V. 74. № 17. P. 2700–2720.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2007.01.013>
17. *Li S., Wang J., Thouless M.D.* The effects of shear on delamination in layered materials // *J. Mech. Phys. Solids* 2004. V. 52. № 1. P. 193–214.  
[https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00070-X](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00070-X)
18. *Massabò R., Brandinelli L., Cox B.N.* Mode I weight functions for an orthotropic double cantilever beam // *Int. J. Eng. Sci.* 2003. V. 41. № 13–14. P. 1497–1518.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(03\)00029-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(03)00029-6)
19. *Ustinov K.B.* On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // *Eng. Failure Anal.* 2015. V. 47. № 14. P. 338–344.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2013.09.022>
20. *Begley M.R., Hutchinson J.W.* *The Mechanics and Reliability of Films, Multilayers and Coatings.* Cambridge University Press, 2017.  
<https://doi.org/10.1017/9781316443606>
21. *Banks-Sills L.* *Interface Fracture and Delaminations in Composite Materials,* Springer Briefs in Applied Sciences and Technology. Cham: Springer, International Publishing, 2018.
22. *Glagolev V.V., Markin A.A.* Influence of the model of the behavior of a thin adhesion layer on the value of the  $J$ -integral // *Mech. Solids.* 2022. V. 57. № 2. P. 278–285.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654422020169>
23. *Glagolev V.V., Markin A.A.* Limit States of Adhesive Layers under Combined Loading // *Mech. Solids.* 2023. V. 58. № 6. P. 1960–1966.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654423600204>
24. *Kurguzov V.D.* Modeling of delamination of thin films under compression // *Computational continuum mechanics.* 2014. V. 7. № 1. P. 91–99 [In Russian].
25. *Vatulyan A.O., Morozov K.L.* Investigation of Delamination from an Elastic Base Using a Model with Two Coefficients of Subgrade Reaction // *Mech. Solids.* 2020. № 2. P. 207–217.  
<https://doi.org/10.3103/S002565442002017X>
26. *Vatulyan A.O., Morozov K.L.* Study of the process of delamination of a non-uniform coating // *Appl. Mech. Tech. Phys.* 2021. V. 62. № 6 (370). P. 138–145 [In Russian].
27. *Popov G.Ya.* Bending of a semi-infinite slab lying on a linearly deformable base // *PMM.* 1961. V. 2. P. 342–355 [In Russian].
28. *Salganik R.L.* On brittle fracture of glued bodies // *PMM.* 1963. V. 27. № 5. P. 957–962 [In Russian].
29. *Fichter W.B.* The stress intensity factor for the double cantilever beam // *Int. J. Fract.* 1983. V. 22. № 2. P. 133–143.  
<https://doi.org/10.1007/BF00942719>

30. *Foot R.M.L., Buchwald V.T.* An exact solution for the stress intensity factor for a double cantilever beam // *Int. J. Fract.* 1985. V. 29. № 3. P. 125–134.  
<https://doi.org/10.1007/BF00034313>
31. *Zlatin A.N., Khrapkov A.A.* A Semi-Infinite Crack Parallel to the Boundary of the Elastic Half-Plane // *Sov. Phys. Dokl.* 1986. V. 31. P. 1009–1010.
32. *Салганик Р.Л., Устинов К.Б.* Задача о деформировании упруго заделанной пластины, моделирующей частично отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация) // *Изв. РАН. МТТ.* 2012. № 4. С. 50–62.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654412040061>
33. *Georgiadis H.G., Papadopoulos G.A.* Elastostatics of the orthotropic double-cantilever-beam fracture specimen // *Z. Angew. Math. Phys.* 1990. V. 41. № 6. P. 889–899.  
<https://doi.org/10.1007/BF00945841>
34. *Suo Z.* Delamination specimens for orthotropic materials // *J. Appl. Mech.* 1990. V. 57. № 3. P. 627–634.  
<https://doi.org/10.1115/1.2897068>
35. *Ustinov K.B., Lisovenko D.S., Chentsov A.V.* Orthotropic strip with a central semi-infinite crack under arbitrary normal loads applied far from the crack tip // *Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Physical and mathematical sciences.* 2019. V. 23. № 4. P. 657–670 [In Russian].  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1736>
36. *Ustinov K.B., Massabò R., Lisovenko D.* Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution // *Eng. Failure Analysis* 2020. V. 110. P. 104410.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2020.104410>
37. *Ustinov K.B., Borisova N.L.* Splitting of a strip consisting of two identical orthotropic half-strips with isotropy axes symmetrically inclined to the interface // *Mech. Solids*, submitted. 1990. V. 41. P. 889–899.
38. *Ustinov K.B., Idrisov, D.M.* On delamination of bi-layers composed by orthotropic materials: exact analytical solutions for some particular cases // *ZAMM. Z. Angew. Math. Mech.* 2021. V. 101. № 4. P. e202000239.  
<https://doi.org/10.1002/zamm.202000239>
39. *Ustinov K.B., Monetto I., Massabò R.* Analytical solutions for an isotropic strip with a central semi-infinite crack: T-stresses, displacements of boundaries, stress intensity factor due to a force acting at the crack // to be published 2024.
40. *Lekhnitsky.* Theory of elasticity of an anisotropic elastic body 1963c
41. *Ustinov K.* On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer // *Eur. J. Mech. A Solids.* 2019. V. 75. P. 56–69.  
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.01.013>
42. *Ustinov K., Massabò R.* On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers // *Int. J. Sol. Struct.* 2022. 248 P. 111600 [doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111600](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111600)
43. *Noble B.* Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. *Physics Today.* 1959. 12, 9, 50.  
<https://doi.org/10.1063/1.3060974>
44. *Gakhov F.D.* Boundary Value Problems. 1966. Pergamon Press.
45. *Khrapkov A.* Winer-Hopf Method in Mixed Elasticity Theory Problems. 2001. В.Е. Веденеев VNIIG Publishing House.
46. *Doetsch G.* Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-transformationen und der Z-transformationen, Oldenbourg, München, 1956.