

УДК 539.37, 539.214

**ПРОИЗВОДСТВО ТЕПЛА ЗА СЧЕТ ДЕФОРМАЦИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ
И ПРИСТЕНОЧНОГО ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ
В МАТЕРИАЛЕ ПРОБКИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ПЕРЕМЕННОГО ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ**

© 2024 г. Л. В. Ковтаниук^{a, b, *}, Г. Л. Панченко^{a, b, **},
Е. О. Попова^{a, ***}

^a*Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,
Владивосток, Россия*

^b*Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН,
Комсомольск-на-Амуре, Россия*

^{*}*e-mail: lk@iacp.dvo.ru, **e-mail: panchenko@iacp.dvo.ru, ***e-mail: polenao@bk.ru*

Поступила в редакцию 13.06.2024 г.

После доработки 23.06.2024 г.

Принята к публикации 24.06.2024 г.

Получено решение связанной краевой задачи о неизотермическом деформировании материала, образующего пробку конечной длины в недеформируемой круглой трубе. В условиях жесткого сцепления с поверхностью трубы материал деформируется под действием переменного перепада давления, заданного на торцевых поверхностях пробки. Необратимое деформирование связано и с ползучестью, и с вязкопластическим течением материала и вызывает его разогрев. Дополнительно учитываются зависимости предела текучести, коэффициента вязкости и параметров ползучести материала от температуры. С использованием модели больших деформаций изучаются процессы ползучести и вязкопластического течения при возрастающем и постоянном перепаде давления, торможение течения и разгрузка среды при убывающем давлении, а также остывание материала после полного снятия механической нагрузки.

Ключевые слова: большие деформации, ползучесть, вязкопластическое течение, деформационное теплопроизводство, теплопроводность, связанное термомодеформирование

DOI: 10.31857/S1026351924050054, EDN: UAZOLA

1. Введение. Повышение прочности, пластичности и других механических свойств металлов достигается многими способами, одним из которых является термомеханическая обработка. С другой стороны, многие элементы конструкций работают в условиях циклически изменяющихся нагрузок, вызывающих упругопластическое деформирование. Вследствие этого в элементах конструкций возникают тепловые деформации, которые

могут существенно изменять свойства материала и, как следствие, характер деформирования. Учет связанности полей деформаций и температуры позволяет качественно и количественно точнее описать поведение таких элементов конструкций и выявить при этом новые эффекты, однако и значительно усложняет модельные соотношения. Поскольку в областях течения необратимые деформации необходимо большие, то задачи о неизотермических течениях требуют рассмотрения в рамках модели больших упругопластических деформаций. Подобных подходов к моделированию упругопластических свойств существует достаточно много [1–5]. Здесь будем использовать модель, в которой согласно формализму неравновесной термодинамики, обратимые и необратимые деформации, как термодинамические параметры состояния в процессе деформирования, определяются формулированием для них дифференциальных уравнений их изменения (переноса) [6–8]. Обобщение модели на неизотермический случай содержится в [9], на случай учета вязких свойств материала при его пластическом течении – в [10].

Рост обратимых и необратимых деформаций в среде задают источники в уравнениях изменения деформаций при выборе соответствующих определяющих законов. Здесь будем использовать два определяющих закона, задающих накопление необратимых деформаций: закон ползучести и закон пластического течения. Согласно первому, накопление необратимых деформаций с началом деформирования обусловлено вязкими свойствами деформируемого материала. При достижении напряжениями поверхности нагружения действует второй определяющий закон. Таким образом, в процессе деформирования первоначально накапливаются необратимые деформации ползучести, а затем они продолжают рост за счет развивающегося пластического течения. На границах, отделяющих области течения от областей с деформациями ползучести, происходит смена механизмов накопления необратимых деформаций с медленного вязкого на быстрый пластический и наоборот при разгрузке. Такая последовательная смена механизмов производства необратимых деформаций, требующая согласования законов ползучести и пластического течения на границах, разделяющих области деформирования на части, для обеспечения непрерывности необратимых деформаций рассматривалась в [11–15].

Здесь, следуя аналогичному подходу, приведем решение неизотермической краевой задачи о необратимом деформировании материала, образующего пробку конечной длины в круглой недеформируемой трубе. Несжимаемый упруговязкопластический материал находится в условиях жесткого сцепления со стенками трубы и подвергается действию изменяющегося со временем перепада давления, заданного на торцевых поверхностях пробки. Отметим, что связанные задачи о прямолинейных течениях без учета ползучести материала ранее рассматривались в [16–19]. Производство тепла и необратимых пластических деформаций происходило за счет антиплоского деформирования и пристеночного трения. Здесь рассмотрим случай, когда тепло создается внутри только за счет необратимого деформирования (ползучести и пластичности), то есть приток тепла в среду через ее границу отсутствует.

2. Основные соотношения модели больших деформаций. Движение точек деформируемого материала зададим в пространственных переменных Эйлера.

Для термодинамических параметров состояния, которыми полагаем температуру T (или плотность распределения энтропии S), обратимые (термоупругие) \mathbf{m} и необратимые деформации \mathbf{p} согласно математической модели [6–8] справедливы дифференциальные уравнения их изменения:

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{p}}{Dt} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}, \\ \frac{D\mathbf{m}}{Dt} &= \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \frac{1}{2}((\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{z})), \\ \mathbf{v} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}) + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{w}, \\ \mathbf{x} &= -\mathbf{x}^T = \mathbf{w} + \mathbf{z}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{e} + \alpha T_0 \theta \mathbf{I}, \quad \theta = T_0^{-1}(T - T_0), \\ \mathbf{z} &= -\mathbf{z}^T = A^{-1} (B^2(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + B(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m}^2 - \mathbf{m}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m}^2 - \mathbf{m}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m}), \\ A &= 8 - 8L_1 + 3L_1^2 - L_2 - \frac{1}{3}L_1^3 + \frac{1}{3}L_3, \quad B = 2 - L_1, \\ L_1 &= \mathbf{I} \cdot \cdot \mathbf{m}, \quad L_2 = \mathbf{I} \cdot \cdot \mathbf{m}^2, \quad L_3 = \mathbf{I} \cdot \cdot \mathbf{m}^3. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь \mathbf{u} , \mathbf{v} – векторы перемещений и скорости; t – время; \mathbf{I} – единичный тензор второго ранга; T , T_0 – текущая температура и температура свободного состояния (комнатная температура) соответственно; α – коэффициент линейного расширения; D/Dt – объективная производная по времени совершенно определенного вида, полученная при выводе дифференциальных уравнений изменения термодинамических параметров состояния обратимых и необратимых деформаций. От производной Яумана она отличается наличием нелинейной добавки $\mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m})$ в тензоре вращений \mathbf{x} . Согласно первому уравнению (2.1) процессы деформирования, в которых необратимые деформации \mathbf{p} неизменны, определяются равенством нулю источника необратимых деформаций $\boldsymbol{\gamma}$. В таком случае и компоненты тензора необратимых деформаций \mathbf{p} изменяются также как при жестком перемещении тела.

Для тензора полных деформаций Альманси \mathbf{d} из (2.1) получаем

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} - \nabla^T \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{m} + \mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{m}. \tag{2.2}$$

В качестве термодинамического потенциала используется свободная энергия $\Phi(\mathbf{m}, T) = E(\mathbf{d}, S) - TS$, где $E(\mathbf{d}, S)$ – плотность распределения внутренней энергии. Принимая существенно упрощающую математическую модель гипотезу о том, что свободная энергия не зависит от необратимых деформаций, считаем, что консервативная часть процесса деформирования задается упругим потенциалом $W(\mathbf{m}, \theta) = \rho_0 \Phi(\mathbf{m}, T)$ (ρ_0 – плотность материала в свободном состоянии). Далее материал полагаем механически несжимаемым, но изменение его объема возможно за счет линейного расширения. Согласно уравнению неразрывности такое условие записывается в виде

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \sqrt{1 - 2I_1 + 2I_1^2 - 2I_2 - \frac{4}{3}I_1^3 + 4I_1I_2 - \frac{8}{3}I_3} = (1 + 3\alpha T_0 \theta)^{-1},$$

$$I_1 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{d}, \quad I_2 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{d}^2, \quad I_3 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{d}^3. \quad (2.3)$$

Из закона сохранения энергии получаем формулу Мурнагана, связывающую напряжения с обратимыми деформациями, и уравнение баланса энтропии

$$\boldsymbol{\sigma} = -P_1 \mathbf{I} + (1 + 3\alpha T_0 \theta)^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{m}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} = -\text{div} \mathbf{J} - T^{-2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + T^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma}. \quad (2.5)$$

В зависимостях (2.4) и (2.5) P_1 – неизвестное гидростатическое давление, \mathbf{q} и \mathbf{J} – векторы потока тепла и энтропии:

$$\mathbf{J} = \rho S \mathbf{v} - T^{-1} \mathbf{q}, \quad S = -T_0 \rho^{-1} \frac{\partial W}{\partial \theta}.$$

Считая среду изотропной, упругий потенциал $W(J_1, J_2, \theta)$ принимаем в виде разложения этой функции в ряд Тейлора относительно свободного состояния деформируемого материала при комнатной температуре T_0 [20]

$$\begin{aligned} W(J_1, J_2, \theta) = & -2\mu J_1 - \mu J_2 + \kappa J_1^2 + (\kappa - \mu) J_1 J_2 - \chi J_1^3 + \nu_1 J_1 \theta + \\ & + \nu_2 \theta^2 - \nu_3 J_1 \theta^2 - \nu_4 J_1^2 \theta - \nu_5 J_2 \theta - \nu_6 \theta^3 + \dots \quad (2.6) \\ J_1 = & \mathbf{I} \cdot \mathbf{c}, \quad J_2 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{c}^2, \quad \mathbf{c} = \mathbf{m} - 0.5 \mathbf{m}^2. \end{aligned}$$

В (2.6) μ – модуль сдвига, κ, χ – упругие модули более высокого порядка, $\nu_k (k = 1, 2, \dots, 6)$ – термомеханические постоянные.

В этом случае из уравнения баланса энтропии (2.5) следует уравнение теплопроводности в форме

$$\begin{aligned} (1 + \beta_1 \theta + \beta_2 I_1) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta_3 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{c} = & \lambda \Delta \theta - \frac{1}{2\nu_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \\ \beta_1 = \frac{(1 - 3\alpha T_0) \nu_2 - 3\nu_6}{\nu_2}, \quad \beta_2 = & -\frac{\nu_3}{\nu_2}, \quad \beta_3 = -\frac{\nu_1 + \nu_5}{\nu_2}. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Здесь λ – коэффициент температуропроводности.

Зависимость источника $\boldsymbol{\gamma}$ необратимых деформаций в уравнении их изменения от термодинамической силы должна задаваться определяющими законами. Далее полагаем, что необратимые деформации \mathbf{p} накапливаются в материале с начального момента деформирования и за счет вязких свойств материала (ползучесть), и за счет его пластических свойств (течение).

Для конкретизации диссипативного механизма, связанного с накоплением необратимых деформаций, необходимо задать скорость роста необратимых деформаций $\boldsymbol{\gamma}$ в зависимости от напряжений. В случае, пока напряженное состояние не достигло поверхности нагружения, считаем $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^v$, т.е. что на данных стадиях процесса деформирования необратимые деформации производятся в форме деформаций ползучести. В области пластического течения

$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^p$, то есть источник совпадает с тензором скоростей пластических деформаций. Следовательно, в уравнениях изменения необратимые деформации не разделяются на свои составляющие. Их различие состоит в разных механизмах их накопления. В условиях накопления деформаций ползучести выберем классический степенной закон Нортона [21]

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^v = \frac{\partial V(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad V(\boldsymbol{\Sigma}) = B \boldsymbol{\Sigma}^n (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma} = \max |\sigma_i - \sigma_j|. \quad (2.8)$$

В соотношениях (2.8) $V(\boldsymbol{\sigma})$ – термодинамический потенциал; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные значения тензора напряжений; B, n – параметры ползучести материала.

Выход напряженного состояния на поверхность нагружения приводит к появлению области пластического течения, на границе которой определяющий закон ползучести должен быть заменен на определяющий закон, основанный на законе пластического течения. На такой граничной поверхности напряжения и деформации непрерывны, при таком подходе непрерывны и скорости необратимых деформаций. Тогда скорости пластических деформаций связаны с напряжениями ассоциированным законом пластического течения [22, 23]

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^{v_0} = \varphi \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, k)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{y}) = 0, \quad \varphi > 0. \quad (2.9)$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}^{v_0}$ – тензор скоростей деформаций ползучести в момент начала пластического течения. Накопленные к началу пластического течения деформации ползучести и их скорости $\boldsymbol{\varepsilon}^{v_0}$ являются начальными значениями для накапливающихся далее пластических деформаций.

В качестве поверхности нагружения принимаем условие пластичности Треска с учетом вязкого сопротивления пластическому течению [23]:

$$f(\sigma_i, y_k, k) = \max |\sigma_i - \sigma_j| - 2k - 2\eta \max |y_k|. \quad (2.10)$$

В (2.10) y_k – главные значения тензора \boldsymbol{y} , k – предел текучести, η – вязкость.

При температурном воздействии на материал от нее зависят и параметры материала. Для параметров ползучести B и n принимаем зависимости в форме [24]

$$B = \frac{c_1}{\sigma_0^{n-1}} \exp\left(-\frac{Q}{R_u T_0 (1 + \theta)}\right), \quad n = b_1 + \frac{b_2}{T_0 (1 + \theta)}. \quad (2.11)$$

В (2.11) c_1, σ_0, b_1 и b_2 – постоянные материала, Q – энергия активации, R_u – универсальная газовая постоянная. Для предела текучести и коэффициента вязкости пластического течения будем использовать соотношения [25]

$$k = k_0 (1 - \theta \theta_m^{-1})^2, \quad \eta = \eta_0 \exp(-v T_0 \theta), \quad \theta_m = (T_m - T_0) T_0^{-1}. \quad (2.12)$$

В (2.12) T_m – температура плавления деформируемого материала, k_0, η_0 – предел текучести и вязкость материала при комнатной температуре, ν – экспоненциальная скорость.

Чтобы получить замкнутую систему уравнений квазистационарного неизо-термического деформирования, к выписанным соотношениям необходимо добавить уравнения равновесия $\nabla \sigma = 0$.

3. Постановка задачи и деформирование до вязкопластического течения.

Рассмотрим пробку длины l , которую образует несжимаемый упруговязкопластический материал в круглой трубе радиуса R с недеформируемыми стенками. Боковая поверхность пробки находится в условиях жесткого сцепления со стенками трубы, а верхняя поперечная граничная поверхность пробки нагружается переменным давлением. Задача в цилиндрической системе координат r, ϕ, z решается в классе функций $\theta = \theta(r, t), u = u_z(r, t), v = v_z(r, t), P_1 = P_1(r, z, t)$, где u и v – отличные от нуля компоненты векторов перемещений и скорости. Тогда на граничных поверхностях пробки $z = u(r, t)$ и $z = l + u(r, t)$ краевые условия имеют вид

$$\sigma_{zz}(0, u(0, t), t) = -p(t), \quad \sigma_{zz}(0, l + u(0, t), t) = 0, \tag{3.1}$$

где $r = 0$ – координата максимального перемещения граничных точек пробки, $p(t)$ – задаваемое давление. Согласно второму условию (3.1) принимается, что сопротивление продавливанию на свободном конце пробки при $r = 0$ отсутствует, хотя его можно задать и не равной нулю постоянной величиной. Условия сцепления на боковой поверхности пробки записываются в форме

$$u|_{r=R} = v|_{r=R} = 0. \tag{3.2}$$

Функция $p(t)$, задающая перепад давления, возрастает со временем с нулевого значения, и, пока напряженное состояние не достигло поверхности нагружения, необратимые деформации накапливаются в материале в результате медленного процесса ползучести. Необратимое деформирование приводит к разогреву материала, для его изменяющейся температуры принимаем условия:

$$\theta(r, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \tag{3.3}$$

Для отличных от нуля компонент тензора деформаций Альманси согласно (2.2) получим

$$d_{rr} = -\frac{1}{2}u'^2, \quad d_{rz} = \frac{1}{2}u', \quad u' = \frac{\partial u}{\partial r}. \tag{3.4}$$

Из условия (2.3) и зависимостей (3.4) следует, что в рассматриваемом случае антиплоского движения тепловое расширение в материале отсутствует, таким образом зависимости (2.3), (2.4) и (2.7) справедливы при $\alpha = 0$.

Согласно соотношениям (2.4) и (2.6) для отличных от нуля компонент тензора напряжений получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{\phi\phi} &= -(P_1 + 2\mu) + 2(\kappa - \nu_4\theta)(m_{rr} + m_{zz}) - 2(\mu - \nu_4\theta)m_{rz}^2 + \nu_1\theta - \nu_3\theta^2 = -p_1, \\ \sigma_{rz} &= 2(\mu - l_1\theta)m_{rz}, \quad \sigma_{rr} = -p_1 + 2(\mu - l_1\theta)m_{rr} + (3\mu + l_1\theta)m_{rz}^2, \\ \sigma_{zz} &= -p_1 + 2(\mu - l_1\theta)m_{zz} + (3\mu + l_1\theta)m_{rz}^2, \quad l_1 = \nu_1 + \nu_5.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Данные соотношения записаны с точностью до слагаемых первого порядка малости по компонентам обратимых деформаций m_{rr} и m_{zz} и второго – по компоненте m_{rz} [16–19].

Уравнения равновесия в рассматриваемом случае принимают форму

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0. \quad (3.6)$$

Интегрируя второе уравнение (3.6) с учетом зависимостей для напряжений (3.5), получаем

$$p_1 = c(t)z + p_0(r, t), \quad \sigma_{rz} = \frac{c(t)r}{2} + \frac{c_1(t)}{r}. \quad (3.7)$$

Из первой формулы (3.7) следует, что p_1 является линейной функцией координаты z . Функцию интегрирования $c_1(t)$ полагаем равной нулю, чтобы напряжение σ_{rz} имело конечное значение при $r=0$, $c_1(t)$ найдем из граничных условий (3.1). Тогда компонента σ_{rz} тензора напряжений принимает окончательный вид

$$\sigma_{rz} = -\frac{pr}{2l}, \quad p = p(t). \quad (3.8)$$

Потенциал ползучести (2.8) перепишем в следующей форме $V(\sigma_{ij}) = B((\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{rz}\sigma_{rz})^{n/2}$. Ограничимся в нем слагаемыми до порядка n по напряжению, тогда для скоростей деформаций ползучести из (2.8), (3.5) и (3.8) найдем

$$\varepsilon_{rz}^v = -Bn\left(\frac{pr}{l}\right)^{n-1}, \quad \varepsilon_{rr}^v = -\varepsilon_{zz}^v = \frac{\varepsilon_{rz}^v m_{rr} - m_{zz}}{2m_{rz}}. \quad (3.9)$$

Уравнение теплопроводности (2.7) при учете соотношений (3.5), (3.8) и (3.9) примет форму

$$\left(1 + \beta_1\theta + \frac{\beta_3 l_1 p^2 r^2}{8l^2(\mu - l_1\theta)^3}\right) \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\beta_3 pr^2}{8l^2(\mu - l_1\theta)^2} \frac{\partial p}{\partial t} = q\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\theta}{\partial r}\right) - \frac{Bn}{2\nu_2} \left(\frac{pr}{l}\right)^n. \quad (3.10)$$

Дифференциальное уравнение в частных производных (3.10) при условии зависимости параметров ползучести материала от температуры (2.11) и начальном и граничных условиях для температуры (3.3) решено численно.

Кинематика среды в рассматриваемом случае описывается зависимостями, следующими из соотношений (2.1), (2.2):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rz} &= \frac{dd_{rz}}{dt} = \frac{\partial d_{rz}}{\partial t} = \frac{1}{2}v' = \varepsilon_{rz}^e + \gamma_{rz} = \frac{\partial m_{rz}}{\partial t} + \frac{\partial p_{rz}}{\partial t}, \\
 x_{rz} = -x_{zr} &= \frac{2\varepsilon_{rz}(1 - m_{zz})}{m_{rr} + m_{zz} - 2}, \quad \gamma_{rr} = \frac{dp_{rr}}{dt} + 2p_{rz}(r_{zr} + \gamma_{rz}), \\
 \gamma_{zz} &= \frac{dp_{zz}}{dt} + 2p_{rz}(r_{rz} + \gamma_{rz}), \quad \gamma_{rr} = -\gamma_{zz} = \frac{\gamma_{rz} m_{rr} - m_{zz}}{2 m_{rz}},
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

в которых скорости необратимых деформаций равны скоростям деформаций ползучести: $\gamma_{rr} = \varepsilon_{rr}^v$, $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^v$ и $\gamma_{zz} = \varepsilon_{zz}^v$.

Из соотношений (3.5), (3.8), (3.9) и (3.11) найдем компоненты тензоров обратимых и необратимых деформаций m_{rz} и p_{rz} :

$$m_{rz} = -\frac{pr}{4l(\mu - l_1\theta)}, \quad p_{rz} = -\int_0^t Bn\left(\frac{pr}{l}\right)^{n-1} dt. \tag{3.12}$$

Для градиента перемещений точек материала пробки из (3.11) получаем

$$u' = 2(m_{rz} + p_{rz}). \tag{3.13}$$

Перемещения точек материала пробки находятся интегрированием уравнения (3.13) с учетом граничного условия (3.2).

Для компонент обратимых деформаций m_{rr} , m_{zz} и необратимых деформаций p_{rr} , p_{zz} из кинематических зависимостей (3.11) следует система уравнений

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p_{zz}}{\partial t} &= \gamma_{rz} \left(m_{rz} - \frac{p_{zz}}{m_{rz}} \right) + \frac{4(\varepsilon_{rz}^e + \gamma_{rz}) p_{rz}}{2 + m_{rz}^2} \left(1 + p_{zz} - \frac{m_{rz}^2}{2} - 2m_{rz} p_{rz} \right), \\
 p_{rr} &= -p_{zz} - 2p_{rz}^2, \quad m_{zz} = -p_{zz} + \frac{m_{rz}^2}{2} + 2m_{rz} p_{rz}, \quad m_{rr} = -m_{zz} - m_{rz}^2.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Интегрируя первое уравнение равновесия (3.6) с учетом граничных условий (3.1) и соотношений (3.5), получим зависимости, связывающие компоненты тензора напряжений и найденные ранее распределения температуры, перемещений и компоненты обратимых деформаций

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz} &= \frac{p}{l}(z - l - u(0, t)) - \int_0^r \frac{2(\mu - l_1\theta)m_{rr} + (3\mu + l_1\theta)m_{rz}^2}{r} dr + \\
 &+ 2(\mu - l_1\theta)(m_{zz} - m_{rr}) - 2(\mu - l_1\theta(0, t))(m_{zz}(0, t) - m_{rr}(0, t)), \\
 \sigma_{rr} &= \sigma_{zz} + 2(\mu - l_1\theta)(m_{rr} - m_{zz}), \\
 \sigma_{\phi\phi} &= -p_1 = \sigma_{zz} - 2(\mu - l_1\theta)m_{zz} - (3\mu + l_1\theta)m_{rz}^2.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Найденное решение неизотермической краевой задачи при возрастающем перепаде давления остается справедливым до момента времени t_1 , в который

на боковой границе пробки $r = R$ впервые выполнится условие пластического течения (2.10) в следующем виде

$$\left| \sigma_{rz} \right|_{r=R} = k(t_1),$$

в котором предел текучести зависит от температуры (первая формула (2.12)). Из уравнения $p(t_1)R = 2lk(t_1)$ находится момент начала течения t_1 .

4. Вязкопластическое течение материала при возрастающем и постоянном перепаде давления. Начиная с момента времени t_1 в материале разбивается область вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$. Движущаяся граница $r = m(t)$ отделяет расширяющуюся область течения от сужающейся области $0 \leq r \leq m(t)$, в которой материал продолжает накапливать необратимые деформации ползучести. Зависимости (3.5) для компонент тензора напряжений выполняются и в вязкоупругой области $0 \leq r \leq m(t)$, и в области вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$, следовательно в обеих областях остается справедливым соотношение (3.8) для компоненты тензора напряжений s_{rz} .

В вязкоупругой области $0 \leq r \leq m(t)$ скорости деформаций ползучести имеют вид (3.9), а уравнение теплопроводности – (3.10).

Из ассоциированного закона пластического течения (2.9) следует, что условие пластичности (2.10) в рассматриваемом случае ($\sigma_{rz} < 0$, $\varepsilon_{rz}^p < 0$) записывается в форме

$$\sigma_{rz} = -k + \eta \left(\varepsilon_{rz}^p - \varepsilon_{rz}^{v_0} \right). \quad (4.1)$$

Используя соотношение (3.8), выразим из (4.1) компоненту тензора скоростей пластических деформаций ε_{rz}^p

$$\varepsilon_{rz}^p = \frac{1}{\eta} \left(k - \frac{pr}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0}. \quad (4.2)$$

Компонента тензора скоростей деформаций ползучести $\varepsilon_{rz}^{v_0}$ в точке в момент достижения ее упругопластической границей в текущий момент времени t вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{rz}^{v_0} = -Bn \left(\frac{pm}{l} \right)^{n-1}. \quad (4.3)$$

Из предположения о непрерывности скоростей необратимых деформаций на границе $r = m(t)$, разделяющей области с разными механизмами накопления необратимых деформаций следует уравнение

$$\frac{pm}{2l} = k_0 \left(1 - \frac{\theta(m, t)}{\theta_m} \right)^2, \quad (4.4)$$

из которого определяется положение границы $r = m(t)$ в каждый момент времени.

Уравнение теплопроводности (2.7) в области вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$ с учетом зависимостей (3.5) и (4.2) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 l_1 p^2 r^2}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\beta_3 p r^2}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^2} \frac{\partial p}{\partial t} = \\ & = q \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{p r}{2l \nu_2} \left(\frac{1}{\eta} \left(k - \frac{p r}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{\nu_0} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Уравнения теплопроводности (3.10) и (4.5), а также уравнения (4.3) и (4.4) составляют систему уравнений относительно неизвестных функций: θ в областях $0 \leq r \leq m(t)$ и $m(t) \leq r \leq R$, $m(t)$ и $\varepsilon_{rz}^{\nu_0}$. Для решения этой системы необходимы граничные условия для температуры (3.3), начальные условия $m(t_2) = R$ и $\varepsilon_{rz}^{\nu_0}(R) = -B(t_2)n(t_2)(p(t_2)R/l)^{n(t_2)-1}$, условия непрерывности функции θ и ее производной $\partial q / \partial r$ на границе $r = m(t)$ и условия непрерывности температуры в момент начала вязкопластического течения t_1 . Данная система уравнений решена с использованием разработанного на основе конечно-разностного метода алгоритма.

Для описания кинематики среды используются соотношения (3.11), в которых $\gamma_{rr} = \varepsilon_{rr}^{\nu}$, $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^{\nu}$ и $\gamma_{zz} = \varepsilon_{zz}^{\nu}$ в вязкоупругой области $0 \leq r \leq m(t)$ и $\gamma_{rr} = \varepsilon_{rr}^p$, $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^p$ и $\gamma_{zz} = \varepsilon_{zz}^p$ в области вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$.

Для компоненты тензора обратимых деформаций m_{rz} справедлива первая формула (3.12) в областях $0 \leq r \leq m(t)$ и $m(t) \leq r \leq R$. Компонента тензора необратимых деформаций p_{rz} в области $0 \leq r \leq m(t)$ вычисляется по второй формуле (3.12), а в области течения $m(t) \leq r \leq R$ является решением дифференциального уравнения, следующего из (3.11) и (4.2),

$$\frac{\partial p_{rz}}{\partial t} = \frac{1}{\eta} \left(k - \frac{p r}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{\nu_0}. \quad (4.6)$$

При решении этого уравнения используется условие непрерывности компоненты необратимых деформаций p_{rz} в момент времени t_1 . Перемещения точек материала находятся интегрированием уравнения (3.13) с использованием условия непрерывности перемещений на границе $r = m(t)$ и граничного условия (3.2). Компоненты обратимых деформаций m_{rr} , m_{zz} и необратимых деформаций p_{rr} , p_{zz} вычисляются из системы уравнений (3.14) при $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^{\nu}$ в области $0 \leq r \leq m(t)$ и $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^p$ в области $m(t) \leq r \leq R$. Напряжения в области $0 \leq r \leq m(t)$ находятся из зависимостей (3.15). Эти же соотношения справедливы и для напряжений в области течения $m(t) \leq r \leq R$, что следует из условия непрерывности напряжений на границе $r = m(t)$.

Пусть в некоторый момент времени $t_2 > t_1$ перепад давления на граничных поверхностях пробки становится постоянным, равным $p(t_2)$. Такое изменение режима нагружения приводит к тому, что положение границы $r = m(t)$ перестает изменяться. Области вязкоупругого деформирования $0 \leq r \leq m(t)$ и вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$ теперь не изменяют своих размеров, но необратимые деформации по-прежнему продолжают в них накапливаться. Все соотношения данного раздела продолжают выполняться и в данном случае. Только в уравнениях теплопроводности (3.10) и (4.5) нужно учитывать, что $\partial p / \partial t = 0$.

5. Течение при убывающем перепаде давления. Разгрузка среды и остывание. Далее в некоторый момент времени $t_3 > t_2$ начнем уменьшать давление $p(t)$. С этого момента времени от неподвижной поверхности $r = m(t_3)$ к границе пробки $r = R$ движется новая граница $r = m_1(t)$, которая разделяет уменьшающуюся область вязкопластического течения $m_1(t) \leq r \leq R$ и область $m(t_3) \leq r \leq m_1(t)$ с накопленными необратимыми пластическими деформациями. В слоях $m(t_3) \leq r \leq m_1(t)$ и $0 \leq r \leq m(t_3)$ необратимые деформации теперь накапливаются в результате процесса ползучести, поэтому их можно рассматривать как одну область $0 \leq r \leq m_1(t)$.

Компоненты тензора напряжений во всех областях деформирования удовлетворяют соотношениям (3.5). Из уравнений равновесия (3.6) с учетом условия непрерывности напряжений, получим, что для компоненты σ_{rz} остается справедливой зависимость (3.8) во всех областях. В области $0 \leq r \leq m_1(t)$ скорости деформаций ползучести имеют вид (3.9). Компонента скорости необратимых деформаций ε_{rz}^p в области вязкопластического течения $m_1(t) \leq r \leq R$ вычисляется по формуле (4.2). Уравнение теплопроводности имеет вид (3.10) в вязкоупругой области $0 \leq r \leq m_1(t)$ и (4.5) в области течения $m_1(t) \leq r \leq R$.

Из условия непрерывности скоростей необратимых деформаций на границе $r = m_1(t)$ следует уравнение для определения ее положения

$$\frac{1}{\eta} \left(k_0 \left(1 - \frac{\theta(m_1, t)}{\theta_m} \right)^2 - \frac{pm_1}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0}(m_1) = -Bn \left(\frac{pm_1}{l} \right)^{n-1}. \quad (5.1)$$

В уравнении (5.1) $\varepsilon_{rz}^{v_0}(r)$ является известной функцией, вычисленной на предыдущих этапах задачи.

Система уравнений (3.10), (4.5) и (5.1) относительно неизвестных функций $m_1(t)$ и θ в областях $0 \leq r \leq m_1(t)$ и $m_1(t) \leq r \leq R$ также решена численно с помощью разработанного алгоритма. При ее решении использовались граничные условия (3.3), начальное условие $m_1(t_3) = m(t_3)$, условия непрерывности функции θ и ее производной $\partial q / \partial r$ на границе $r = m_1(t)$ и непрерывность температуры θ в момент времени t_3 .

В обеих областях деформирования компонента m_{rz} удовлетворяет первой зависимости (3.12). В вязкоупругой области $0 \leq r \leq m_1(t)$ компонента p_{rz} вычисляется по второй формуле (3.12), а в области течения $m_1(t) \leq r \leq R$ находится интегрированием уравнения (4.6). Интегрируя уравнение (3.13) в обеих областях с учетом граничного условия жесткого сцепления и условия непрерывности перемещений на границе $r = m_1(t)$, найдем перемещения точек деформируемого материала.

Компоненты тензора обратимых деформаций m_{rr} , m_{zz} и необратимых деформаций p_{rr} , p_{zz} в обеих областях определяются из системы уравнений (3.14) при $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^v$ в области $0 \leq r \leq m_1(t)$ и $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^p$ в области $m_1(t) \leq r \leq R$. Компоненты тензора напряжений вычисляются из соотношений (3.15) при условии их непрерывности на границе $r = m_1(t)$.

В расчетный момент времени $t_4 > t_3$ поверхность $r = m_1(t)$ достигает границы пробки $r = R$. С этого момента времени вязкопластическое течение в материале прекращается, а накопление необратимых деформаций теперь происходит

только за счет ползучести. Во всем слое уравнение теплопроводности принимает форму (3.10), для компонент m_{rz} и p_{rz} справедливы уравнения (3.12), перемещения вычисляются из дифференциального уравнения (3.13). Остальные обратимые и необратимые деформации вычисляются из системы уравнений (3.14), в которой $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^v$. Для напряжений остаются справедливыми зависимости (3.15).

В момент времени t_5 , вычисляемый из уравнения $p(t_5) = 0$, перепад давления становится равным нулю. Также становятся равными нулю компонента обратимых деформаций m_{rz} и компонента напряжений σ_{rz} , а остальные компоненты тензора напряжений перестают зависеть от координаты z . С момента времени t_5 уравнение теплопроводности принимает форму

$$(1 + \beta_1 \theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = q \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right). \quad (5.2)$$

Чтобы задать остывание материала пробки, вместо граничных условий (3.3) принимаем условия

$$\left. \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (\delta \theta' + h \theta) \Big|_{r=R} = 0, \quad (5.3)$$

в которых δ и h — коэффициент теплопроводности и коэффициент теплоотдачи материала соответственно.

Уравнение (5.2) с граничными условиями (5.3) и начальным условием непрерывности температуры в момент времени t_5 решается численно. С течением времени материал полностью остывает.

Расчеты проводились в безразмерных переменных r/R и $\tau = \alpha_1 t / \mu$ со следующей функцией $p(t)$

$$p(t) = \begin{cases} \alpha_1 t, & 0 \leq t < t_2 \\ \alpha_1 t_2, & t_2 \leq t < t_3 \\ \alpha_1 t_2 - \alpha_2 (t - t_3), & t_3 \leq t < t_5, \quad t_5 = \alpha_1 \alpha_2^{-1} t_2 + t_3 \end{cases}$$

при значениях безразмерных постоянных: $\beta_1 = -2.772$, $\beta_3 = -10$, $k_0 \mu^{-1} = 2.298 \times 10^{-3}$, $q_m = 2.074$, $l_1 \mu^{-1} = 0.452$, $lR^{-1} = 5$, $g \mu \alpha_1^{-1} R^{-2} = 2.638 \times 10^4$, $v_2 \mu^{-1} = 80$, $b_1 = 2.518$, $b_2 T_0^{-1} = 1.48$, $c_1 \mu \alpha_1^{-1} = 4.887 \times 10^4$, $\sigma_0 \mu^{-1} = 7.199 \times 10^{-6}$, $QR_u^{-1} T_0^{-1} = 52.37$, $v T_0 = 1.212$, $\alpha_2 \alpha_1^{-1} = 2$, $hR \delta^{-1}$, $hR \delta^{-1} = 0.01$.

На рис. 1 изображены графики изменения границ области вязкопластического течения в зависимости от безразмерного времени τ : $\tilde{m} = m/R$ в интервале от $\tau_1 = 0.023$ до $\tau_3 = 0.027$ и $\tilde{m} = m_1/R$ в интервале от τ_3 до $\tau_4 = 0.028$. Из графика видно, что в интервале от $\tau_2 = 0.025$ до τ_3 , соответствующем постоянному перепаду давления, изменения границы области течения не происходит. С момента времени τ_3 от границы $m(\tau_3)/R$ в обратном направлении движется граница $m_1(t)/R$, которая в момент времени τ_4 достигает границы $r = R$ и течение в материале прекращается.

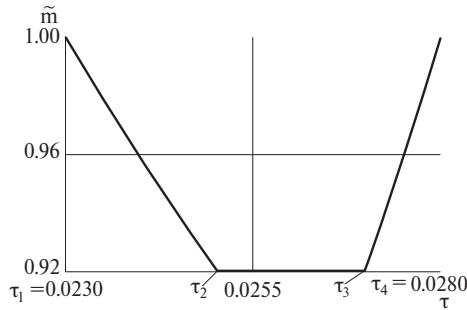


Рис. 1. График границы области вязкопластического течения в зависимости от времени.

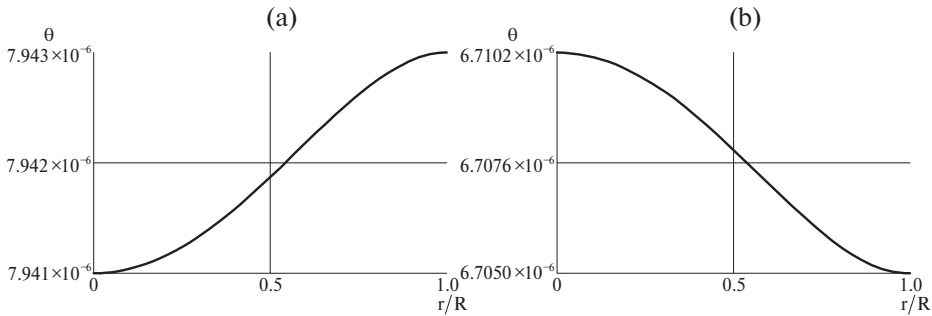


Рис. 2. Распределение температуры в материале пробки в моменты времени τ_2 и τ_4 .

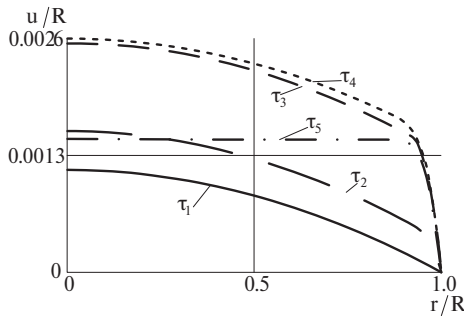


Рис. 3. Распределение перемещений в разные моменты времени.

На рис. 2 показаны графики зависимости безразмерной температуры θ от радиуса в моменты времени τ_2 (рис. 2, а) и τ_4 (рис. 2, б). Из сравнения графиков следует, что при уменьшении перепада давления температура в материале снижается.

Рис. 3 иллюстрирует графики перемещений u/R в зависимости от радиуса r/R в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ и $\tau_5 = 0.0395$. Все моменты времени, кроме последнего, демонстрируют увеличение перемещений, тогда как в последний момент времени τ_5 , соответствующий нулевому перепаду давления, перемещения снижаются за счет исчезновения обратимых деформаций.

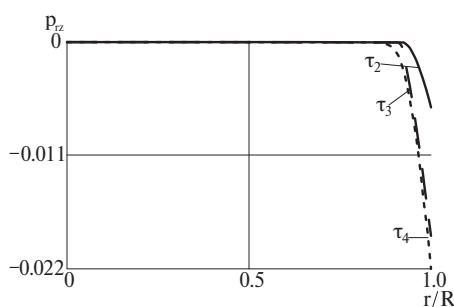


Рис. 4. Распределение компоненты необратимых деформаций p_{rz} в разные моменты времени.

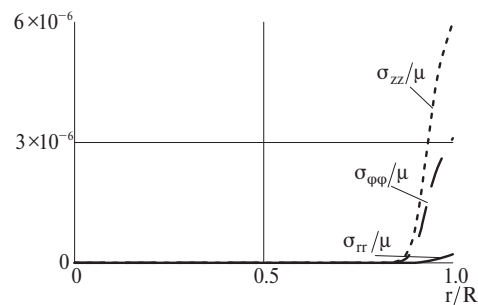


Рис. 5. Остаточные напряжения в материале.

На рис. 4 представлены распределения компоненты тензора необратимых деформаций p_{rz} по материалу пробки в моменты времени τ_2 , τ_3 и τ_4 . На рис. 5 приведены распределения остаточных напряжений $\tilde{\sigma}_{rr} = \sigma_{rr}/\mu$, $\tilde{\sigma}_{\phi\phi} = \sigma_{\phi\phi}/\mu$ и $\tilde{\sigma}_{zz} = \sigma_{zz}/\mu$ в материале пробки.

6. Заключение. В данной статье получено решение связанной краевой задачи теории больших упругопластических деформаций о неизоотермическом деформировании пробки конечной длины в круглой недеформируемой трубе под действием перепада давления, сначала возрастающего с течением времени, затем постоянного и далее убывающего до нуля. Необратимые деформации в материале накапливаются в результате процессов ползучести и вязкопластического течения. Разогрев материала происходит только за счет процессов необратимого деформирования, так как материал пробки имеет жесткое сцепление со стенками трубы, то есть отсутствует трение материала о границу, и нет дополнительного притока тепла извне. При таких условиях в квазистатическом приближении нагрев материала ожидаемо оказывается незначительным, однако даже такое изменение температуры сказывается на всех характеристиках напряженно-деформированного состояния рассматриваемого материала. Также интересным оказывается эффект снижения температуры в процессе торможения вязкопластического течения при уменьшении нагружающего давления, хотя необратимые пластические деформации и деформации ползучести при этом продолжают накапливаться.

Разработка математической модели выполнена в рамках государственных заданий ИАПУ ДВО РАН (темы № FWW-2021-0005, FWW-2022-0002), конечно-разностная схема и численные расчеты получены при поддержке РФФ (проект № 22-11-00163).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strains // ASME. J. Appl. Mech. 1969. V. 36. № 1. P. 1–6.
<https://doi.org/10.1115/1.3564580>
2. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев.: Наук. думка, 1987. 232 с.

3. Xia Z., Ellyin F. A finite elastoplastic constitutive formulation with new co-rotational stress-rate and strain-hardening rule // ASME. J. Appl. Mech. 1995. V. 62. № 3. P. 733–739.
<https://doi.org/10.1115/1.2897008>
4. Мясников В.П. Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
5. Shutov A.V., Ihlemann J. Analysis of some basic approaches to finite strain elasto-plasticity in view of reference change // Int. J. Plast. 2014. V. 63. P. 183–197.
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2014.07.004>
6. Быковцев Г.А., Шитиков А.В. Конечные деформации упругопластических сред // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311. № 1. С. 59–62.
7. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // ДАН. 1996. Т. 347. № 2. С. 199–201.
8. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
9. Ковтанюк Л.В. Моделирование больших упругопластических деформаций в неизотермическом случае // Дальневост. матем. журн. 2004. Т. 5. № 1. С. 110–120.
10. Ковтанюк Л.В., Шитиков А.В. О теории больших упругопластических деформаций при учете температурных и реологических эффектов // Вестник ДВО РАН. 2006. № 4. С. 87–93.
11. Беун А.С., Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов // ДАН. 2016. Т. 470. № 3. С. 275–278.
<https://doi.org/10.7868/S0869565216270086>
12. Беун А.С., Ковтанюк Л.В., Лемза А.О. Смена механизмов накопления необратимых деформаций материалов на примере их вискозиметрического деформирования // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 1. С. 103–112.
13. Буренин А.А., Панченко Г.Л., Ковтанюк Л.В., Галимзянова К.Н. О согласовании механизмов роста необратимых деформаций полого шара при всестороннем сжатии // ДАН. 2018. Т. 482. № 4. С. 403–406.
<https://doi.org/10.31857/S086956520003046-3>
14. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Всестороннее гидростатическое сжатие цилиндрического слоя в условиях ползучести и пластического течения // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2019. № 3 (41). С. 76–84.
<https://doi.org/10.26293/chgpu.2019.41.3.005>
15. Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Lemza A.O. On the mechanisms of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties // Arch. Appl. Mech. 2020. V. 90. P. 829–845.
<https://doi.org/10.1007/s00419-019-01641-x>
16. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Неизотермическое движение упруговязкопластической среды в трубе в условиях изменяющегося перепада давления // ДАН. 2015. Т. 464. № 3. С. 284–287.
<https://doi.org/10.7868/S0869565215270080>

17. Буренин А.А., Ковтаныук Л.В., Панченко Г.Л. Развитие и торможение вязкопластического течения в слое в условиях его нагрева за счет трения о шероховатую плоскость // ПМТФ. 2015. Т. 56. № 4. С. 101–111.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20150410>
18. Буренин А.А., Ковтаныук Л.В., Панченко Г.Л. Движение упруговязкопластической среды в круглой трубе при ее нагреве за счет пристеночного трения // ПММ. 2016. Т. 80, № 2. С. 265–275.
19. Буренин А.А., Ковтаныук Л.В., Панченко Г.Л. Деформирование и разогрев упруговязкопластического цилиндрического слоя при его движении за счет изменяющегося перепада давления // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 1. С. 6–18.
20. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
21. Norton F.H. The creep steel of high temperature. Y.: Mc Graw Hill, 1929. 110 p.
22. Ишинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
23. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
24. Iost A. The correlation between the power-law coefficients in creep: the temperature dependence // J. Mater. Sci. 1998. V. 33. P. 3201–3206.
<https://doi.org/10.1023/A:1004368511595>
25. Pla F., Mancho A.M., Herrero H. Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio // Phys. D. 2009. V. 238. № 5. P. 572–580.
<https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.12.015>

HEAT PRODUCTION DUE TO CREEP STRAINS AND WALL VISCOPLASTIC FLOW IN THE PLUG MATERIAL IN A ROUND PIPE UNDER THE ACTION OF VARIABLE PRESSURE DIFFERENCE

L. V. Kovtanyuk ^{a,b,*}, G. L. Panchenko ^{a,b,**}, E. O. Popova ^{a,***}

^a Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia

^b Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia

*e-mail: lk@iacp.dvo.ru,

**e-mail: panchenko@iacp.dvo.ru,

***e-mail: polenao@bk.ru

Abstract. A solution to the coupled boundary-value problem of non-isothermal deformation of a material forming a finite-length plug in an undeformable circular tube is presented. Under the conditions of rigid adhesion to the tube surface, the material undergoes deformation due to a varying pressure differential applied at the end faces of the plug. Irreversible deformation is associated with both creep and visco-plastic flow of the material, leading to its heating. Additionally, dependencies of the yield strength, viscosity coefficient, and creep parameters on temperature are considered. Using a large-deformation model, the study investigates creep and visco-plastic flow under increasing and constant pressure differentials, flow deceleration and unloading of the medium under decreasing pressure, and the cooling of the material after complete removal of the mechanical load.

Keywords: large deformations, creep, viscoplastic flow, deformation-induced heat generation, thermal conductivity, coupled thermal deformation.

REFERENCES

1. *Lee E.H.* Elastic-plastic deformation at finite strains // *ASME. J. Appl. Mech.* 1969. V. 36. I. 1. P. 1–6.
<https://doi.org/10.1115/1.3564580>
2. *Levitas V.I.* Large elastoplastic deformations of materials at high pressure. Kyiv: Nauk. Dumka, 1987. 232 p. [in Russian]
3. *Xia Z., Ellyin F.* A finite elastoplastic constitutive formulation with new co-rotational stress-rate and strain-hardening rule // *ASME. J. Appl. Mech.* 1995. V. 62. I. 3. P. 733–739.
<https://doi.org/10.1115/1.2897008>
4. *Myasnikov V.P.* Equations of motion of elastoplastic materials under large deformations // *Bulletin of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences.* 1996. No. 4. P. 8–13. [in Russian]
5. *Shutov A.V., Ihlemann J.* Analysis of some basic approaches to finite strain elasto-plasticity in view of reference change // *Int. J. Plast.* 2014. V. 63. P. 183–197.
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2014.07.004>
6. *Bykovtsev G.I., Shitikov A.V.* Finite deformations in an elastoplastic medium, *Sov. Phys. Dokl.* **35** (3), 297–299. (1990).
7. *Burenin A.A., Bykovtsev G.I., Kovtanyuk L.V.* A simple model of finite strain in an elastoplastic medium, *Dokl. Phys.* 41 (3), 127–129 (1996).
8. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Large Irreversible Deformations and Elastic Aftereffect (Dal'nauka, Vladivostok, 2013) [in Russian]
9. *Kovtanyuk L.V.* Modeling of large elastoplastic deformations in a nonisothermal case, *Dal'nevost. Mat. Zh.* **5** (1), 110–120 (2004) [in Russian]
10. *Kovtanyuk L.V., Shitikov A.V.* On the theory of large elastoplastic deformations taking into account temperature and rheological effects // *Bulletin of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences.* 2006. No. 4. P. 87–93. [in Russian]
11. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Large irreversible deformations under conditions of changing mechanisms of their formation and the problem of definition of plastic potentials // *Doklady Physics.* 2016. V. 61. I. 9. P. 463–466.
<https://doi.org/10.1134/S102833581609007X>
12. *Begun A.S., Kovtanyuk L.V., Lemza A.O.* Change of accumulation mechanisms of irreversible deformations of materials in an example of viscometric deformation // *Mechanics of Solids.* 2018. V. 53. I. 1. P. 85–92.
<https://doi.org/10.3103/S0025654418010107>
13. *Burenin A.A., Galimzyanova K.N., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* Matching growth mechanisms of irreversible deformation of a hollow sphere under uniform compression // *Doklady Physics.* 2018. V. 63. I. 10. P. 407–410.
<https://doi.org/10.1134/S1028335818100026>
14. *Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* Comprehensive hydrostatic compression of cylindrical layer in conditions of creep and plastic flow // *Vestnik Chuvash. Gos. Ped. Univ. im I. Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Pred. Sost.* 2019. № 3 (41). P. 76–84. [in Russian]
<https://doi.org/10.26293/chgpu.2019.41.3.005>

15. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Lemza A.O.* On the mechanisms of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties // Arch. Appl. Mech. 2020. V 90. P. 829–845.
<https://doi.org/10.1007/s00419-019-01641-x>
16. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* “Nonisothermal motion of an elastoviscoplastic medium through a pipe under a changing pressure drop,” Dokl. Phys. 60 (9), 419–422 (2015).
<https://doi.org/10.1134/S1028335815090098>
17. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* “Development and deceleration of viscoplastic flow in a layer heated by friction on a rough plane,” J. Appl. Mech. Tech. Phys. 56, 626–635 (2015).
<https://doi.org/10.1134/S0021894415040100>
18. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* “The motion of an elastoplastic medium in a circular tube heated due to boundary friction,” J. Appl. Math. Mech. 80 (2), 190–197 (2016).
doi:10.1016/j.jappmathmech.2016.06.01
19. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* “Deformation and Heating of an Elastoviscoplastic Cylindrical Layer Moving Owing to a Varying Pressure Drop,” Mech. Solids 53, 1–11 (2018).
<https://doi.org/10.3103/S0025654418010016>
20. *Lurie A.I.* Nonlinear theory of elasticity. M.: Nauka, 1980. 512 p. [in Russian]
21. *Norton F.H.* The creep steel of high temperature. Y.: Mc Graw Hill, 1929. 110 p.
22. *Ishlinsky A.Yu., Ivlev D.D.*, Mathematical theory of plasticity. M.: Fizmatlit, 2001. 704 p. [in Russian]
23. *Bykovtsev G.I., Ivlev D.D.* Plasticity theory. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. [in Russian]
24. *Iost A.* The correlation between the power-law coefficients in creep: the temperature dependence // J. Mater. Sci. 1998. V. 33. P. 3201–3206.
<https://doi.org/10.1023/A:1004368511595>
25. *Pla F.* Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio // Phys. D. 2009. V. 238. I. 5. P. 572–580.
<https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.12.015>