

УДК 531.38, 531.39

ПРЕЦЕССИОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ, В ТРЕХ ОДНОРОДНЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ

© 2024 г. Г. В. Горр^а, *

^а Математический институт им. В. А. Стеклова
РАН, Москва, Россия

*e-mail: gvgorr@gmail.com

Поступила в редакцию 25.01.2023 г.

После доработки 05.02.2023 г.

Принята к публикации 06.02.2023 г.

Предметом исследования является задача о прецессиях гиростата с неподвижной точкой в трех однородных силовых полях. Класс рассматриваемых прецессионных движений характеризуется свойствами постоянства угла нутации и соизмеримости скоростей прецессии и собственного вращения гиростата. Уравнения движения гиростата редуцированы к трем дифференциальным уравнениям второго порядка относительно скоростей прецессии и собственного вращения гиростата. Интегрирование этих уравнений проведено в случае прецессионно-изоконических движений (скорости прецессии и собственного вращения равны) и в одном случае резонансных значений скоростей прецессии и собственного вращения — резонанс 2:1). Доказано, что полученные в статье решения характеризуются элементарными функциями времени.

Ключевые слова: гиростатический момент, прецессии, силовые поля, новые решения

DOI: 10.31857/S1026351924040029, EDN: UDSUTV

1. Введение. Прецессии гиростата определяются свойством постоянства угла между двумя осями, проходящими через неподвижную точку, первая из которых неизменно связана с гиростатом, а вторая неподвижна в пространстве. Важность для практического применения полученных в этой задаче результатов отмечена в работе [1]. Математическое моделирование прецессий гиростата проведено во многих задачах динамики гиростата и твердого тела. В задаче о движении тяжелого твердого тела известны регулярные прецессии гироскопа Лагранжа относительно вертикали [2]; регулярные прецессии гироскопа Гриоли [3] относительно наклонной оси; полурегулярные прецессии гироскопа Гесса [4]; прецессии Брессана [5] относительно горизонтальной оси для гироскопа Гесса; прецессии общего вида относительно вертикали, имеющие место в решении А.И. Докшевича [6].

Исследования прецессий гиростата с постоянным и переменным гиростатическим моментом в полях сложной структуры показали существование многочисленных классов прецессий (см. обзоры [7–9]). Большой интерес представляют и исследования прецессий системы гироскопов Лагранжа и Гесса [10], а также твердых тел с жидким заполнением [11–13].

В задаче о движении твердого тела в двух и трех однородных силовых полях изучены регулярные прецессии [14–16] и прецессии общего вида [17–19]. Эти движения можно отнести к резонансным прецессиям, поскольку для них выполняются равенства: 1. $\dot{\psi} = \dot{\phi}$; 2. $\dot{\psi} = 2\dot{\phi}$; 3. $\dot{\phi} = 2\dot{\psi}$. В данных случаях $\phi(t)$, $\psi(t)$ – эллиптические функции времени. В силу указанных результатов представляется важной следующая задача: изучение условий существования резонансных прецессий гиростата. Выводы по рассмотрению данной проблемы показали не только некоторые аналогии условий на параметры гиростата, но и принципиальные отличия результатов (например, в задаче о движении гиростата $\phi(t)$ и $\psi(t)$ – элементарные функции времени).

2. Постановка задачи. Рассмотрим движение твердого тела, имеющего неподвижную точку, в силовом поле, которое является суперпозицией трех однородных и постоянных силовых полей. Обозначим через $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\gamma}^{(1)}$, $\boldsymbol{\gamma}^{(2)}$ единичные векторы, характеризующие направления сил \mathbf{P} , \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 каждого из полей; C , C_1 , C_2 – центры приведения сил; $s = POC$, $\mathbf{r} = P_1OC_1$, $\mathbf{p} = P_2OC_2$; $Oxyz$ – подвижная система координат, O – неподвижная точка. Пусть тензор инерции тела в системе $Oxyz$ имеет значение $A = (A_{ij})$ ($i, j = 1, 3$). Тело вращается вокруг точки O с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3)$ (\mathbf{i}_1 , \mathbf{i}_2 , \mathbf{i}_3 – единичные векторы системы $Oxyz$). Для векторов \mathbf{s} , \mathbf{r} , \mathbf{p} запишем соотношения:

$$\mathbf{s} = s_1\mathbf{i}_1 + s_2\mathbf{i}_2 + s_3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{r} = r_1\mathbf{i}_1 + r_2\mathbf{i}_2 + r_3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{p} = p_1\mathbf{i}_1 + p_2\mathbf{i}_2 + p_3\mathbf{i}_3 \quad (2.1)$$

Тогда уравнения движения гиростата запишем по аналогии с уравнениями [17, 18]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + s \times \boldsymbol{\gamma} + r \times \boldsymbol{\gamma}^{(1)} + p \times \boldsymbol{\gamma}^{(2)}, \quad (2.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(1)} = \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)} = \boldsymbol{\gamma}^{(2)} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.3)$$

где точка над переменными $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\gamma}^{(1)}$, $\boldsymbol{\gamma}^{(2)}$ обозначает дифференцирование по времени t . В формулах (2.2), (2.3) полагаем:

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(1)} = 0, \quad \boldsymbol{\gamma}^{(2)} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}^{(1)}, \quad |\boldsymbol{\gamma}| = 1, \quad |\boldsymbol{\gamma}^{(1)}| = 1, \quad (2.4)$$

то есть направления силовых полей будут характеризоваться тройкой $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\gamma}^{(i)}$ ($i = 1, 2$). Тогда очевидны равенства $\mathbf{P} = P\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{P}_i = P_i\boldsymbol{\gamma}^{(i)}$ ($i = 1, 2$).

Рассмотрим прецессии тела относительно вектора $\boldsymbol{\gamma}$. Они характеризуются инвариантным соотношением (ИС):

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma} = a_0 \quad (a_0 = \cos \theta_0) \quad (2.5)$$

где θ_0 – угол между векторами \mathbf{a} и $\boldsymbol{\gamma}$ ($\dot{\mathbf{a}} = 0$, $|\mathbf{a}| = 1$). Вектор угловой скорости тела на ИС (2.5) представим так [7]:

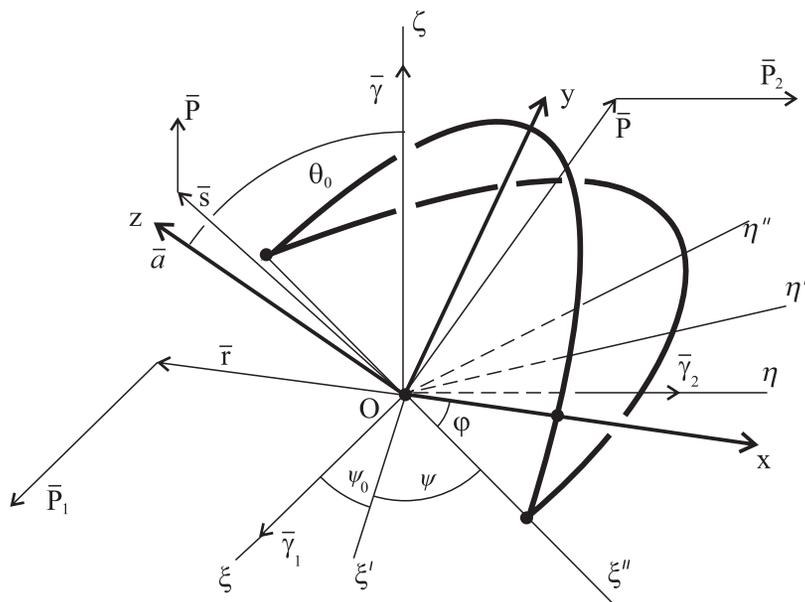


Рис. 1. Геометрическая трактовка прецессий твердого тела.

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{a} + \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\gamma}. \quad (2.6)$$

Переменные ϕ , ψ и постоянную θ_0 можно трактовать как углы Эйлера. Используя метод [7], запишем значение вектора $\boldsymbol{\gamma}^{(1)}$:

$$\boldsymbol{\gamma}^{(1)} = b_0 [a_0 \boldsymbol{\gamma} \sin(\psi + \psi_0) - \mathbf{a} \sin(\psi + \psi_0) + (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma}) \cos(\psi + \psi_0)], \quad (2.7)$$

где $b_0 = 1/a'_0$ ($a'_0 = \sin \theta_0$), ψ_0 – постоянная.

Значение вектора $\boldsymbol{\gamma}^{(2)}$ найдем по второй формуле системы (2.4):

$$\boldsymbol{\gamma}^{(2)} = b_0 [\mathbf{a} \cos(\psi + \psi_0) - a_0 \boldsymbol{\gamma} \cos(\psi + \psi_0) + (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma}) \sin(\psi + \psi_0)]. \quad (2.8)$$

Таким образом, при получении (2.7), (2.8) полагалось, что $\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma} \neq \mathbf{0}$, то есть случай равномерных вращений тела исключаем из рассмотрения. Подвижную систему координат выберем следующим образом: направим вектор \mathbf{i}_3 по вектору \mathbf{a} . Тогда в силу ИС (2.5), первого уравнения из (2.3) имеем [7, 8]:

$$\boldsymbol{\gamma} = a'_0 \sin \phi \cdot \mathbf{i}_1 + a'_0 \cos \phi \cdot \mathbf{i}_2 + a_0 \mathbf{i}_3 \quad (\mathbf{i}_3 = \mathbf{a}) \quad (2.9)$$

Учитывая (2.6), (2.9), запишем компоненты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ вектора $\boldsymbol{\omega}$:

$$\omega_1 = a'_0 \dot{\psi} \sin \phi, \quad \omega_2 = a'_0 \dot{\psi} \cos \phi, \quad \omega_3 = \dot{\phi} + a_0 \dot{\psi}. \quad (2.10)$$

На рисунке приведена геометрическая трактовка прецессий тела относительно вектора $\boldsymbol{\gamma}(O\xi\eta\zeta$ – неподвижная система координат).

Замечание 1. При описании кинематических свойств в виде соотношений (2.5)–(2.10) использован метод [7], который отличается от методов, применяемых в работах [14–16].

Замечание 2. Уравнения (2.2), (2.3) имеют интеграл энергии

$$A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(1)} + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)}) = 2E, \quad (2.11)$$

где E – постоянная. Как показано в работах [7, 8], нахождение условий существования прецессий в задачах динамики твердого тела на основании (2.11) значительно упрощается.

3. Преобразование уравнения (2.2) на ИС (2.5). Внесем в уравнение (2.2) значение $\boldsymbol{\omega}$ из (2.6) и рассмотрим полученное уравнение в базисе \mathbf{a} , $\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma}$ с учетом (2.7), (2.8):

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) + \ddot{\psi}(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - \dot{\psi}^2[\mathbf{a} \cdot (A\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma})] - \dot{\psi}[\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma})] - [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{s} \times \boldsymbol{\gamma})] - \\ - b_0 \sin(\psi + \psi_0) \cdot \{a_0[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}] + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}\} - \\ - b_0 \cos(\psi + \psi_0) \cdot \{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma} - a_0[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\gamma})]\} = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \ddot{\psi}(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + 2\dot{\phi}\dot{\psi}[\mathbf{a} \cdot (A\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma})] + \dot{\phi}^2[\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{a} \times A\mathbf{a})] + \dot{\phi}[\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma})] - \\ - b_0 \sin(\psi + \psi_0) \cdot \{a_0(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}) - \\ - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p})]\} - b_0 \cos(\psi + \psi_0) \cdot \{a_0(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) + [\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{p})]\} = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}[A\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a})] + \ddot{\psi}[A\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma})] + \dot{\phi}\dot{\psi}[2(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - a_0^2 \text{Sp}(A) - 2a_0(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma})] + \\ + \dot{\psi}^2[a_0(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - (A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma})] - \dot{\phi}[a_0(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\lambda}) - (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\gamma})] + \dot{\psi}[(\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{a}) - a_0(\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\gamma})] - \\ - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{s}) + a_0(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - a_0' [(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \cos(\psi + \psi_0) - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \sin(\psi + \psi_0)] = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\text{Sp}(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ – след матрицы A .

По аналогии с (3.1)–(3.3) распишем интеграл (2.10) на ИС (2.5), (2.6):

$$\begin{aligned} (A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\dot{\phi}^2 + 2(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma})\dot{\phi}\dot{\psi} + (A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma})\dot{\psi}^2 - 2\{(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + b_0[\sin(\psi + \psi_0) \cdot (a_0(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - \\ - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a}))] + \cos(\psi + \psi_0) \cdot [\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} - a_0(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma})]\} = 2E. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} f_0(\varphi) &= a_0' (s_1 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi) + a_0 s_3, \\ \tilde{f}_0(\varphi) &= a_0' (s_2 \sin \varphi - s_1 \cos \varphi), \\ f_1(\varphi) &= a_0' [(a_0 r_1 + p_2) \sin \varphi + (a_0 r_2 - p_1) \cos \varphi - a_0' r_3], \\ f_2(\varphi) &= a_0' [(r_2 - a_0 p_1) \sin \varphi - (a_0 p_2 + r_1) \cos \varphi + a_0' p_3], \\ f_3(\varphi) &= a_0' [(p_1 - a_0 r_2) \sin \varphi + (p_2 + a_0 r_1) \cos \varphi], \\ f_4(\varphi) &= a_0' [(r_1 + a_0 p_2) \sin \varphi + (r_2 - a_0 p_1) \cos \varphi], \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$f_5(\varphi) = a'_0 [a_0 (s_1 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi) - a'_0 s_3],$$

$$f_6(\varphi) = -a'_0 [a'_0 (r_1 \sin \varphi + r_2 \cos \varphi) + a_0 r_3],$$

$$f_7(\varphi) = a'_0 [a'_0 (p_1 \sin \varphi + p_2 \cos \varphi) + a_0 p_3].$$

Сначала запишем интеграл (3.4) в силу (3.5):

$$(\mathbf{Aa} \cdot \mathbf{a})\dot{\varphi}^2 + 2(\mathbf{Aa} \cdot \boldsymbol{\gamma})\dot{\varphi}\dot{\psi} + (\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma})\dot{\psi}^2 + \\ - 2[f_0(\varphi) + b_0(f_1(\varphi)\sin(\psi + \psi_0) + f_2(\varphi)\cos(\psi + \psi_0))] = 2E. \quad (3.6)$$

Затем обратимся к уравнениям (3.1)–(3.3). На основании (3.5) имеем:

$$\ddot{\varphi}(\mathbf{Aa} \cdot \mathbf{a}) + \ddot{\psi}(\mathbf{Aa} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - \dot{\psi}^2[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma})] + \ddot{f}_0(\varphi) - \dot{\psi}[\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma})] - \\ - b_0(f_3(\varphi)\sin(\psi + \psi_0) + f_4(\varphi)\cos(\psi + \psi_0)) = 0, \quad (3.7)$$

$$\ddot{\varphi}(\mathbf{Aa} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \ddot{\psi}(\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - 2\dot{\varphi}\dot{\psi}[\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma})] - \dot{\varphi}^2[\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{Aa})] + \dot{\varphi}[\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma})] - \\ - b_0[f_1(\varphi)\cos(\psi + \psi_0) - f_2(\varphi)\sin(\psi + \psi_0)] = 0, \quad (3.8)$$

$$\ddot{\varphi}[\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{Aa})] + \ddot{\psi}[\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma})] + \dot{\varphi}\dot{\psi}[2(\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - a_0'^2 \text{Sp}(A) - 2a_0(\mathbf{Aa} \cdot \boldsymbol{\gamma})] + \\ + \dot{\varphi}^2[(\mathbf{Aa} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - a_0(\mathbf{Aa} \cdot \mathbf{a})] + \dot{\psi}^2[a_0(\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - (\mathbf{Aa} \cdot \boldsymbol{\gamma})] + \dot{\varphi}[a_0(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\lambda}) - (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\gamma})] + \\ + \dot{\psi}[(\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{a}) - a_0(\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\gamma})] + f_5(\varphi) + f_6(\varphi)\sin(\psi + \psi_0) + f_7(\varphi)\cos(\psi + \psi_0) = 0. \quad (3.9)$$

4. Первый класс резонансных прецессий гиростата. Прецессионно-изоконические движения. В статьях [17–19] действительные решения для прецессий тела установлены только в случае, когда тело динамически симметрично, то есть главные моменты инерции удовлетворяют условиям

$$A_2 = A_1, \quad (4.1)$$

а вектор \mathbf{a} направлен по оси динамической симметрии: $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$. Поэтому и для задачи о прецессиях гиростата естественно полагать, что (4.1) сохраняется.

Первый класс прецессии [18] описывается равенством:

$$\dot{\psi} = n\dot{\varphi} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (4.2)$$

Введем обозначения для параметров задачи:

$$L_0 = a_0'^2 n^2 A_1 + (1 + a_0 n)^2 A_3, \quad M_0 = (1 + a_0 n) A_3, \\ N_0 = a_0'^2 A_1 n + a_0(1 + a_0 n) A_3, \quad K_0 = a_0 n A_1 - (1 + a_0 n) A_3 \quad (4.3)$$

и для функций $F_i(\varphi)$ ($i = \overline{1, 3}$), $\Phi_i(\varphi)$ ($i = \overline{1, 4}$):

$$F_1(\varphi) = (a_0 s_3 + E) + a'_0 (s_1 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi) + b_0 \Phi_2(\varphi),$$

$$F_2(\varphi) = a'_0(s_1 \cos \varphi - s_2 \sin \varphi) + b_0 \Phi_3(\varphi), \quad (4.4)$$

$$F_3(\varphi) = a'_0[a_0(s_1 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi) - a'_0 s_3] + \Phi_4(\varphi),$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(\varphi) = & H_{n+1} \sin(n+1)\varphi + G_{n+1} \cos(n+1)\varphi + H_n \sin n\varphi + G_n \cos n\varphi + \\ & + H_{n-1} \sin(n-1)\varphi + G_{n-1} \cos(n-1)\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\varphi) = & G_{n+1} \sin(n+1)\varphi - H_{n+1} \cos(n+1)\varphi + G_n \sin n\varphi - H_n \cos n\varphi + \\ & + G_{n-1} \sin(n-1)\varphi - H_{n-1} \cos(n-1)\varphi, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\Phi_3(\varphi) = H_{n+1} \sin(n+1)\varphi + G_{n+1} \cos(n+1)\varphi - H_{n-1} \sin(n-1)\varphi - G_{n-1} \cos(n-1)\varphi,$$

$$\begin{aligned} \Phi_4(\varphi) = & a'_0[-\tilde{G}_{n+1} \sin(n+1)\varphi + \tilde{H}_{n+1} \cos(n+1)\varphi + a_0 b_0^2 (G_n \sin n\varphi - H_n \cos n\varphi) - \\ & - \tilde{G}_{n-1} \sin(n-1)\varphi + \tilde{H}_{n-1} \cos(n-1)\varphi], \end{aligned}$$

$$H_{n+1} = (1 + a_0) \tilde{H}_{n+1}, \quad \tilde{H}_{n+1} = \frac{a'_0}{2}[(r_1 + p_2) \cos \psi_0 - (r_2 - p_1) \sin \psi_0],$$

$$G_{n+1} = (1 + a_0) \tilde{G}_{n+1}, \quad \tilde{G}_{n+1} = \frac{a'_0}{2}[(r_1 + p_2) \sin \psi_0 + (r_2 - p_1) \cos \psi_0],$$

$$H_n = a_0'^2 (r_3 \sin \psi_0 - p_3 \cos \psi_0), \quad G_n = -a_0'^2 (r_3 \cos \psi_0 + p_3 \sin \psi_0), \quad (4.6)$$

$$H_{n-1} = (1 - a_0) \tilde{H}_{n-1}, \quad \tilde{H}_{n-1} = \frac{a'_0}{2}[(p_1 + r_2) \sin \psi_0 - (p_2 - r_1) \cos \psi_0],$$

$$G_{n-1} = (1 - a_0) \tilde{G}_{n-1}, \quad \tilde{G}_{n-1} = -\frac{a'_0}{2}[(p_1 + r_2) \cos \psi_0 + (p_2 - r_1) \sin \psi_0]$$

Запишем уравнения (3.6)–(3.9) при условиях (4.1), (4.2) и учете соотношений (4.3)–(4.6):

$$\ddot{\varphi}^2 = \frac{2F_1(\varphi)}{L_0}, \quad (4.7)$$

$$M_0 \ddot{\varphi} = F_2(\varphi) + a'_0 n (\lambda_1 \cos \varphi - \lambda_2 \sin \varphi) \dot{\varphi}, \quad (4.8)$$

$$N_0 \ddot{\varphi} = b_0 \Phi_1(\varphi) - a'_0 (\lambda_1 \cos \varphi - \lambda_2 \sin \varphi) \dot{\varphi}, \quad (4.9)$$

$$a_0'^2 n K_0 \dot{\varphi}^2 + F_3(\varphi) + a'_0 \dot{\varphi} [a'_0 \lambda_3 n - (1 + a_0 n) (\lambda_1 \sin \varphi + \lambda_2 \cos \varphi)] = 0. \quad (4.10)$$

При анализе (4.7), (4.8), (4.10) будем использовать соотношения:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2b_0}{L_0} (G_{n+1} \sin(n+1)\varphi - H_{n+1} \cos(n+1)\varphi + \dots), \quad (4.11)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{b_0(a_0 + 1)(n+1)}{L_0} (\tilde{H}_{n+1} \sin(n+1)\varphi + G_{n+1} \cos(n+1)\varphi) + \dots$$

$$\begin{aligned} F_2(\varphi) &= b_0(a_0 + 1)(\tilde{H}_{n+1} \sin(n+1)\varphi + \tilde{G}_{n+1} \cos(n+1)\varphi) + \dots, \\ \Phi_1(\varphi) &= b_0(a_0 + 1)(\tilde{H}_{n+1} \sin(n+1)\varphi + \tilde{G}_{n+1} \cos(n+1)\varphi) + \dots, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где многоточием обозначены очевидные слагаемые (см. (4.4), (4.5)). Применяя метод [18], разработанный при $\lambda_i = 0$ ($i = 1, 3$), из (4.7)–(4.10) получим $G_{n+1} = 0$, $H_{n+1} = 0$ ($n > 1$) или, в силу (4.6), установим условия на параметры p_1, p_2, r_1, r_2 :

$$r_1 = -p_2, \quad r_2 = p_1 \quad (4.13)$$

Уравнение (4.9) будем исключать из рассмотрения, так как в результате исключения из уравнений (4.8), (4.9) функции $\lambda_1 \cos \varphi - \lambda_2 \sin \varphi$ найдем уравнение, которое следует из (4.7) при дифференцировании его по времени.

Далее положим $n = 1$ (очевидно, ограничения (4.13) исключаются):

$$\psi = \varphi. \quad (4.14)$$

В силу условия (4.14) из соотношений (4.3), (4.6) получим:

$$\begin{aligned} L_0 &= (1 + a_0)[(1 - a_0)A_1 + (1 + a_0)A_3], \quad M_0 = (1 + a_0)A_3, \\ N_0 &= (1 + a_0)[(1 - a_0)A_1 + a_0A_3], \quad K_0 = a_0A_1 - (1 + a_0)A_3, \\ H_2 &= (1 + a_0)\tilde{H}_2, \quad \tilde{H}_2 = \frac{a'_0}{2}[(r_1 + p_2)\cos \psi_0 - (r_2 - p_1)\sin \psi_0], \\ G_2 &= (1 + a_0)\tilde{G}_2, \quad \tilde{G}_2 = \frac{a'_0}{2}[(r_1 + p_2)\sin \psi_0 + (r_2 - p_1)\cos \psi_0], \\ H_1 &= a_0'^2(r_3 \sin \psi_0 - p_3 \cos \psi_0), \quad G_1 = -a_0'^2(r_3 \cos \psi_0 + p_3 \sin \psi_0), \\ H_0 &= (1 - a_0)\tilde{H}_0, \quad \tilde{H}_0 = \frac{a'_0}{2}[(p_1 + r_2)\sin \psi_0 - (p_2 - r_1)\cos \psi_0], \\ G_0 &= (1 - a_0)\tilde{G}_0, \quad \tilde{G}_0 = -\frac{a_0'^2}{2}[(p_1 + r_2)\cos \psi_0 + (p_2 - r_1)\sin \psi_0]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

В дальнейшем необходимы параметры:

$$S_1 = a'_0 s_1 + b_0 G_1, \quad S_2 = a'_0 s_2 - b_0 H_1, \quad S_0 = a_0 s_3 + E - b_0(1 + a_0)H_0. \quad (4.16)$$

Запишем функции $\dot{\varphi}^2$, $F_2(\varphi)$, $\Phi_1(\varphi)$, $F_3(\varphi)$; используя формулы (4.4), имеем:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{L_0}[b_0(1 + a_0)(\tilde{G}_2 \sin 2\varphi - \tilde{H}_2 \cos 2\varphi) + S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0], \quad (4.17)$$

$$F_2(\varphi) = b_0(1 + a_0)(\tilde{H}_2 \sin 2\varphi + \tilde{G}_2 \cos 2\varphi) + a'_0(s_1 \cos \varphi - s_2 \sin \varphi) - b_0(1 - a_0)\tilde{G}_0, \quad (4.18)$$

$$\Phi_1(\varphi) = (1 + a_0)(\tilde{G}_2 \cos 2\varphi + \tilde{H}_2 \sin 2\varphi) + G_1 \cos \varphi + H_1 \sin \varphi + (1 - a_0)\tilde{G}_0,$$

$$F_3(\varphi) = a'_0 \{ \tilde{H}_2 \cos 2\varphi - \tilde{G}_2 \sin 2\varphi + a_0[(s_1 + b_0^2 G_1) \sin \varphi + (s_2 - b_0^2 H_1) \cos \varphi] + (\tilde{H}_0 - s_3) \}.$$

Рассмотрим уравнения (4.8), (4.10). В силу того, что тело динамически симметрично (см. (4.1)), не нарушая общности задачи, положим

$$\lambda_2 = 0. \quad (4.19)$$

Тогда из (4.8), (4.10) получим:

$$(M_0\ddot{\phi} - F_2(\phi))^2 = a_0'^2\lambda_1^2\dot{\phi}^2\cos^2\phi, \quad (4.20)$$

$$(a_0'^2K_0\dot{\phi}^2 + F_3(\phi))^2 = a_0'^2\dot{\phi}^2[a_0'\lambda_3 - (1+a_0)\lambda_1\sin\phi]^2. \quad (4.21)$$

Подставим $\dot{\phi}^2$, $\ddot{\phi}$, $F_2(\phi)$ из (4.11) в уравнение (4.20). Поскольку редуцированное уравнение должно быть тождеством по ϕ , то множители при $\cos 4\phi$, $\sin 4\phi$ необходимо принять равными нулю:

$$a_0'(A_3 - A_1)^2(\tilde{G}_2^2 - \tilde{H}_2^2) = -\lambda_1^2\tilde{H}_2[(1-a_0)A_1 + (1+a_0)A_3], \quad (4.22)$$

$$a_0'(A_3 - A_1)^2\tilde{G}_2\tilde{H}_2 = \lambda_1^2\tilde{G}_2[(1-a_0)A_1 + (1+a_0)A_3]. \quad (4.23)$$

Если $\tilde{G}_2 = 0$, $\tilde{H}_2 = 0$, то рассмотрение уравнений (4.20), (4.21) приводит к равенствам $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, и из (4.17) следует, что $\dot{\phi} = \text{const}$. Данное равенство исключено в постановке задачи. Положим в (4.23) $\tilde{G}_2 \neq 0$. Тогда после исключения из уравнений λ_1^2 найдем равенство $\tilde{G}_2 = 0$. То есть в дальнейшем необходимо положить $\tilde{G}_2 = 0$. Это равенство в первоначальных параметрах таково:

$$\tilde{G}_2 = (r_1 + p_2)\sin\psi_0 + (r_2 - p_1)\cos\psi_0 = 0. \quad (4.24)$$

В силу (4.24) из равенства (4.22) найдем значение λ_1^2 :

$$\lambda_1^2 = \frac{a_0'\tilde{H}_2(A_3 - A_1)^2}{(1-a_0)A_1 + (1+a_0)A_3}. \quad (4.25)$$

Исследование уравнения (4.21) можно провести по аналогии с исследованием уравнения (4.20). Тогда получим:

$$\lambda_1^2 = \frac{a_0'\tilde{H}_2\sigma_0^2}{(1+a_0)^2[(1-a_0)A_1 + (1+a_0)A_3]}, \quad (4.26)$$

где

$$\sigma_0 = 3a_0(A_1 - A_3) - (A_1 + 3A_3). \quad (4.27)$$

Приравнивая значения (4.25), (4.26), установим условие на параметры a_0 , A_1 , A_3 :

$$a_0A_1 - (1+a_0)A_3 = 0. \quad (4.28)$$

Из (4.28) следует, что случай сферического распределения масс гиростата невозможен.

На основании обозначений (4.15) параметр $K_0 = 0$. Это равенство в значительной мере упрощает уравнение (4.21), которое запишем в виде:

$$\begin{aligned} & \tilde{H}_2 \cos 2\varphi + a_0 (s_1 + b_0^2 G_1) \sin \varphi + a_0 (s_2 + b_0^2 H_1) \cos \varphi + (H_0 - s_3)]^2 = \\ = & \frac{2}{L_0} [-b_0 (1 + a_0) \tilde{H}_2 \cos 2\varphi + S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0] [a_0' \lambda_3 - (1 + a_0) \lambda_1 \sin \varphi]^2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Запишем уравнение (4.20):

$$\begin{aligned} & \{2b_0 \tilde{H}_2 [2(1 + a_0) M_0 - L_0 (1 + a_0)] \sin 2\varphi + [M_0 S_1 - a_0' s_1 (1 + a_0) L_0] \cos \varphi - \\ & - [M_0 S_2 - a_0' s_2 (1 + a_0) L_0] \sin \varphi + b_0 (1 - a_0) L_0 \tilde{G}_0\}^2 = \\ = & 2a_0' L_0 [-b_0 (1 + a_0) H_2 \cos 2\varphi + S_1 \cos \varphi - S_2 \sin \varphi + S_0] \lambda_1^2 \cos^2 \varphi. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Полагая в (4.30) $\varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_2 = 3\pi/2$, найдем условие:

$$M_0 S_2 - a_0' s_2 (1 + a_0) b_0 L_0 = 0, \quad \tilde{G}_0 = 0. \quad (4.31)$$

При $\tilde{G}_0 = 0$ имеем в силу (4.15) условие:

$$(p_1 + r_2) \cos \psi_0 + (p_2 - r_1) \sin \psi_0 = 0,$$

рассматривая которое совместно с условием (4.24), установим ограничение на параметры p_1, p_2, r_1, r_2 :

$$p_1 p_2 + r_1 r_2 = 0. \quad (4.32)$$

Учтем в уравнении (4.30) равенства (4.31):

$$\begin{aligned} & \{2\tilde{H}_2 b_0 [2(1 + a_0) M_0 - (1 + a_0) L_0] \sin \varphi + [M_0 S_1 - a_0' s_1 (1 + a_0) L_0]\}^2 = \\ = & \frac{2a_0'^3 \tilde{H}_2 A_3^2}{a_0^2} [-b_0 (1 + a_0)^2 \tilde{H}_2 \cos 2\varphi + S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Из уравнения (4.33), которое должно быть тождеством по φ , следует равенство $S_2 = 0$. Рассматривая его совместно с условием (4.31), находим значение s_2 :

$$s_2 = 0. \quad (4.34)$$

Тогда в силу обозначений (4.16) можно определить дополнительное условие $H_1 = 0$, которое запишем с учетом (4.15):

$$r_3 \sin \psi_0 - p_3 \cos \psi_0 = 0 \quad (4.35)$$

Специальный вид уравнения (4.29) позволяет применить к его исследованию другой подход, основанный на полиномиальной структуре. Примем $\sin \varphi$ за переменную x и учтем в (4.29) условия (4.34), (4.35). Тогда уравнение (4.29) запишем так:

$$R^2(x) = \mu_0 F_1^*(x) (x - \mu_1)^2, \quad (4.36)$$

где

$$R(x) = -2\tilde{H}_2 x^2 + r^{(1)} x + r^{(0)}, \quad F_1^*(x) = 2b_0 (1 + a_0) \tilde{H}_2 + \beta_1 x + \beta_2,$$

$$r^{(1)} = a_0(s_1 + b_0^2 G_1), \quad r^{(0)} = \tilde{H}_2 + H_0 - s_3, \quad \beta_1 = S_1, \quad \beta_2 = S_0 - b_0(1 + a_0)\tilde{H}_2, \quad (4.37)$$

$$\mu_0 = \frac{2(1 + a_0)\lambda_1}{L_0}, \quad \mu_1 = \frac{a'_0\lambda_3}{(1 + a_0)\lambda_1}.$$

В силу действительности параметра μ_1 , указанного в (4.37), из (4.35) следует, что при $x = \mu_1$ функция $R(x)$ обращается в нуль (μ_1 – корень уравнения $R(x) = 0$). Сокращая левую и правую части (4.35) на $(x - \mu_1)^2$, получим:

$$4\tilde{H}_2^2(x - \mu_1)^2 = \mu_0 F^*(x). \quad (4.38)$$

На основании (4.38) и условия $S_2 = 0$ запишем значение ϕ^2 из (4.17):

$$\phi^2 = \frac{2}{L_0}[-b_0\tilde{H}_2(1 + a_0)\cos 2\phi + S_1 \sin \phi + S_0]. \quad (4.39)$$

Проведенные преобразования (см. формулы (4.35)–(4.38)) позволяют из (4.29) получить условие (4.38) в первоначальных значениях (т.е. значениях по ϕ):

$$\begin{aligned} & \tilde{H}_2 \cos 2\phi + a_0(s_1 + b_0^2 G_1) \sin \phi + (H_0 - s_3) = \\ & = \varkappa_0 [-b_0(1 + a_0)\tilde{H}_2 \cos 2\phi + S_1 \sin \phi + S_0]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Из (4.40) следует:

$$\varkappa_0 = -\frac{1}{b_0(1 + a_0)}, \quad a_0(s_1 + b_0^2 G_1) = -\frac{S_1}{b_0(1 + a_0)}. \quad (4.41)$$

С помощью первого равенства из (4.16) второе соотношение из (4.4) приведем к виду:

$$S_1(a_0^2 + a_0 + 1) = 0. \quad (4.42)$$

Поскольку a_0 действительный параметр, то из (4.42) следует равенство $S_1 = 0$. Тогда из первого равенства системы (4.16) находим значение s_1 :

$$s_1 = -\frac{1}{a_0^2} G_1. \quad (4.43)$$

В силу равенства $S_1 = 0$ из уравнения (4.33) определим, что и первая компонента вектора \mathbf{s} имеет значение

$$s_1 = 0. \quad (4.44)$$

Из (4.43) следует равенство $G_1 = 0$. Принимая во внимание значение G_1 из (4.15) и условие (4.35), получим $p_3 = 0$, $r_3 = 0$. На основании этих равенств и условия (4.32), которое параметризуем в виде $r_1 = \varkappa_0 p_2$, $r_2 = -\varkappa_0 p_1$, запишем векторы:

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, 0), \quad \mathbf{r} = \varkappa_0(p_2, -p_1, 0), \quad (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = 0). \quad (4.45)$$

Отметим преобразованное значение $\dot{\varphi}^2$ с учетом значения $S_0 = b_0(1 + a_0)^2 \tilde{H}_2$, которое следует из (4.33):

$$\dot{\varphi} = \pm \mu_0 \sin \varphi, \quad \mu_0 = 2\sqrt{\frac{a_0 \tilde{H}_2}{a_0' A_3}}. \quad (4.46)$$

Поскольку уравнение (4.29) рассмотрено частично, то запишем его при найденных условиях на параметры:

$$\left[\tilde{H}_2 \cos 2\varphi + (H_0 - s_3) \right]^2 = 4b_0(1 + a_0)^2 H_2 [a_0' \lambda_3 - (1 + a_0) \lambda_1 \sin \varphi]^2 \sin^2 \varphi. \quad (4.47)$$

При $\varphi = 0$ из уравнения (4.47) получим:

$$s_3 = H_0 + \tilde{H}_2. \quad (4.48)$$

Учитывая условие (4.48), установим последнее ограничение на параметры:

$$\lambda_3 = 0. \quad (4.49)$$

Подставим H_0, \tilde{H}_2 из (4.15) в равенства (4.48):

$$s_3 = \frac{a_0'}{2} \left[((a_0 + 2)r_1 - a_0 p_2) \cos \psi_0 + ((a_0 + 2)p_1 + r_2) \sin \psi_0 \right]. \quad (4.50)$$

Для сравнения полученных результатов и результатов [18] приведем основные формулы данной статьи:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, 0), \quad \mathbf{r} = r_0(p_2, -p_1, 0), \quad (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = 0), \\ s_2 = 0, \quad s_1 = 0, \quad \frac{A_3}{A_1} = \frac{a_0}{1 + a_0} \quad (A_3 < A_1); \quad a_0 \in (0, 1). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Запишем основные результаты [18]:

$$\begin{aligned} \lambda_i = 0 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3), \quad \mathbf{r} = (-p_2, p_1, r_3) \quad (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \neq 0), \\ s_i \neq 0 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad a_0 \in \left(0, \frac{\sqrt{41} - 5}{2} \right), \quad A_3 < 2A_1, \quad \left(A_3 = A_1, \quad a_0 = \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Отличия (4.51) от (4.52) очевидны; отметим, что в случае (4.51) вариант $A_3 = A_1$ невозможен. Кроме этого, решение [18] характеризуется эллиптическими функциями:

$$a_0 \in (0, 1), \quad A_2 < A_1. \quad (4.53)$$

5. Геометрическая интерпретация движения гиростата в случае $\psi = \varphi$. Без ограничения общности рассмотрим (4.46) только с положительным знаком:

$$\dot{\varphi} = \mu_0 \sin \varphi. \quad (5.1)$$

Вычислим $\varphi(\tau)$, где $\tau = \mu_0 t$:

$$\varphi(\tau) = 2 \arctg e^\tau. \quad (5.2)$$

Из (5.2) следует, что $\varphi(0) = \pi/2$, при $\tau \rightarrow \infty$: $\varphi(\tau) \rightarrow \pi$. Рассмотрим подвижный годограф вектора $\boldsymbol{\omega}$ из (2.6) в данном случае:

$$\boldsymbol{\omega} = \mu_0 \sin \varphi (\mathbf{a} + \boldsymbol{\gamma}^{(1)}), \quad (5.3)$$

где

$$\boldsymbol{\gamma}^{(1)} = (a'_0 \sin \varphi, a'_0 \cos \varphi, a_0). \quad (5.4)$$

На основании (5.3), (5.4) находим компоненты $\boldsymbol{\omega}$:

$$\omega_1 = a'_0 \mu_0 \sin^2 \varphi, \quad \omega_2 = a'_0 \mu_0 \sin \varphi \cos \varphi, \quad \omega_3 = \mu_0 (1 + a_0) \sin \varphi. \quad (5.5)$$

Исключим в (5.5) переменную φ :

$$(1 + a_0)(\omega_1^2 + \omega_2^2) - (1 - a_0)\omega_3^2 = 0, \quad \omega_1 = \frac{a'_0 \omega_3^2}{\mu_0 (1 + a_0)^2}. \quad (5.6)$$

Таким образом, в силу (5.6) подвижный годограф угловой скорости гиростата – линия пересечения конуса второго порядка и параболического цилиндра (образующие его параллельны оси Oy). Начальная точка имеет координаты $a'_0 \mu_0, 0, \mu_0(1 + a_0)$, а предельная точка ($\tau \rightarrow \infty$) имеет координаты $(0, 0, 0)$. То есть при $\tau \rightarrow \infty$ конец вектора угловой скорости асимптотически стремится к началу координат.

Запишем неподвижный годограф $\boldsymbol{\omega}$:

$$\omega_\zeta = \omega_3, \quad \omega_\xi = -\omega_2, \quad \omega_\eta = \omega_1. \quad (5.7)$$

Формулы (5.7) показывают свойство изоконичности движения гиростата – подвижный и неподвижный годографы симметричны друг другу относительно касательной плоскости. Выше показано, что, кроме данного свойства, движение гиростата – асимптотическое к состоянию покоя.

6. Прецессионные движения динамически симметричного гиростата в случае, когда скорость прецессии в два раза больше скорости его собственного вращения.

В силу постановки задачи имеем равенство:

$$\psi = 2\varphi. \quad (6.1)$$

При записи (6.1) постоянная, которая может быть введена, принята равной нулю. Запишем обозначения (4.3) при условии $\psi = 2\varphi$:

$$\begin{aligned} L_0 &= 4a_0'^2 A_1 + (1 + 2a_0)^2 A_3, & M_0 &= (1 + 2a_0) A_3, \\ N_0 &= 2a_0'^2 A_1 + a_0(1 + 2a_0) A_3, & K_0 &= 2a_0 A_1 - (1 + 2a_0) A_3. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Сохраняя необходимые аналогии обозначений (4.4), (4.5), для случая (6.1) имеем:

$$\begin{aligned} F_1(\varphi) &= b_0 (G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi) + \\ &+ S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned}
 F_2(\varphi) &= a'_0(s_1 \cos \varphi - s_2 \sin \varphi) + b_0 [H_3 \sin 3\varphi + G_3 \cos 3\varphi - H_1 \sin \varphi - G_1 \cos \varphi] = \\
 &= b_0 (H_3 \sin 3\varphi + G_3 \cos 3\varphi) + \tilde{S}_1 \cos \varphi + \tilde{S}_2 \sin \varphi, \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_3(\varphi) &= a'_0[\tilde{G}_3 \sin 3\varphi + \tilde{H}_3 \cos 3\varphi + a_0 b_0^2 (G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi) + \\
 &+ S_1^* \sin \varphi + \tilde{S}_2^* \cos \varphi + \tilde{S}_3^*], \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

$$\Phi_1 = H_3 \sin 3\varphi + G_3 \cos 3\varphi + H_2 \sin 2\varphi + G_2 \cos 2\varphi + H_1 \sin \varphi + G_1 \cos \varphi, \quad (6.6)$$

$$S_1 = a'_0 s_1 + b_0 G_1, \quad S_2 = a'_0 s_2 - b_0 H_1, \quad S_0 = a_0 s_3 + E, \quad (6.7)$$

$$\tilde{S}_1 = a'_0 s_1 - b_0 G_1, \quad \tilde{S}_2 = -(a'_0 s_2 - b_0 H_1), \quad S_1^* = a_0 s_1 - \tilde{G}_1,$$

$$S_2^* = a_0 s_2 + b_0 \tilde{H}_1, \quad \tilde{S}_3^* = -a'_0 s_3, \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned}
 H_3 &= (1 + a_0) \tilde{H}_3, \quad \tilde{H}_3 = \frac{a'_0}{2} [(r_1 + p_2) \cos \psi_0 - (r_2 - p_1) \sin \psi_0], \\
 G_3 &= (1 + a_0) \tilde{G}_3, \quad \tilde{G}_3 = \frac{a'_0}{2} [(r_1 + p_2) \sin \psi_0 + (r_2 - p_1) \cos \psi_0], \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

$$H_2 = a_0'^2 (r_3 \sin \psi_0 - p_3 \cos \psi_0), \quad G_2 = -a_0'^2 (r_3 \cos \psi_0 - p_3 \sin \psi_0),$$

$$H_1 = (1 - a_0) \tilde{H}_1, \quad \tilde{H}_1 = \frac{a'_0}{2} [(p_1 + r_2) \sin \psi_0 - (p_2 - r_1) \cos \psi_0], \quad (6.10)$$

$$G_1 = (1 - a_0) \tilde{G}_1, \quad \tilde{G}_1 = -\frac{a'_0}{2} [(p_1 + r_2) \cos \psi_0 + (p_2 - r_1) \sin \psi_0].$$

Запишем интеграл энергии (4.7) и уравнения (4.8), (4.10), приняв во внимание равенство $\lambda_2 = 0$, которое можно получить поворотом подвижной системы координат:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2F_1(\varphi)}{L_0}, \quad (6.11)$$

$$M_0 \ddot{\varphi} = F_2(\varphi) - 2\lambda_1 \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}, \quad (6.12)$$

$$2a_0'^2 K_0 \dot{\varphi}^2 + F_3(\varphi) = a'_0 \dot{\varphi} [\lambda_1 (1 + 2a_0) \sin \varphi - 2a'_0 \lambda_3]. \quad (6.13)$$

Запишем (6.11), уравнение (6.12) и уравнение (6.13). После преобразований последних имеем:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2b_0}{L_0} (G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + \dots), \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned}
 b_0 [3M_0 (G_3 \cos 3\varphi - H_3 \sin 3\varphi + \dots) - L_0 (G_3 \cos 3\varphi - H_3 \sin 3\varphi + \dots)]^2 = \\
 = 4L_0 a_0'^2 \lambda_1^2 (1 + \cos 2\varphi) (G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + \dots), \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [2a_0'^2 K_0 b_0 (G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + \dots) - a_0' L_0 (G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + \dots)]^2 = \\
& = L_0 a_0'^2 b_0 (G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + \dots). \tag{6.16}
\end{aligned}$$

На первом этапе предположим, что $G_3^2 + H_3^2 = 0$. Из уравнения (6.15) в силу того, что в левой части старшие гармоники равны шести, в правой части — пяти, получим условие на параметры A_1, A_3, A_3, a_0 :

$$2(1 + a_0)A_1 - (1 + 2a_0)A_3 = 0, \tag{6.17}$$

На основании (6.17) значения K_0 и L_0 таковы:

$$K_0 = -2A_1, \quad L_0 = 6(1 + a_0)A_3.$$

Проводя анализ уравнения (6.16) так же, как уравнения (6.15), получим $1 + a_0 = 0$, то есть $a_0 = -1$, $a_0' = 0$, что невозможно. Итак, в дальнейшем необходимо положить $G_3 = 0, H_3 = 0$. На основании обозначений (6.9) имеем:

$$r_1 = -p_2, \quad r_2 = -p_1. \tag{6.18}$$

Запишем функции (6.3)–(6.6) при полученных условиях:

$$\begin{aligned}
F_1(\varphi) &= b_0 (G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi) + S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0, \\
F_2(\varphi) &= \tilde{S}_1 \cos \varphi + \tilde{S}_2 \sin \varphi, \\
F_3(\varphi) &= a_0' \left[a_0 b_0^2 (G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi) + S_1^* \sin \varphi + S_2^* \cos \varphi + S_3^* \right], \\
\Phi_1(\varphi) &= \tilde{H}_2 \sin 2\varphi + \tilde{G}_2 \cos 2\varphi + H_1 \sin \varphi + G_1 \cos \varphi.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Рассмотрим первое уравнение из (6.12); учтя (6.18), имеем:

$$\begin{aligned}
& M_0^2 b_0 [(G_2 \cos 2\varphi + H_2 \sin 2\varphi) + \dots]^2 = \\
& = a_0'^2 \lambda_1^2 (G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi) \cos 2\varphi + \dots. \tag{6.20}
\end{aligned}$$

В случае $M_0 = 0$ параметр a_0 имеет значение

$$a_0 = -\frac{1}{2},$$

при котором из уравнения (6.20) следуют два варианта:

$$1. \lambda_1 = 0; \quad 2. H_2 = 0, \quad G_2 = 0. \tag{6.21}$$

Полагая в (6.20) $M_0 \neq 0$, получим два условия:

$$G_2(2b_0 M_0^2 H_2 - a_0'^2 \lambda_1^2 L_0) = 0, \quad b_0 M_0^2 (G_2^2 - H_2^2) = -a_0'^2 H_2 \lambda_1^2 L_0. \tag{6.22}$$

Если в уравнениях (6.22) полагать $G_2 \neq 0$, то, исключив параметр λ_1^2 (полагая $\lambda_1 \neq 0$), получим $G_2^2 + H_2^2 = 0$. Поэтому $G_2 = 0$ и имеем равенство:

$$H_2 (b_0 M_0^2 + a_0'^2 L_0 \lambda_1^2) = 0. \tag{6.23}$$

Таким образом, в (6.22) необходимо положить:

$$1. G_2=0, H_2=0; 2. G_2=0, H_2 \neq 0, \lambda_1^2 = \frac{M_0^2 H_2}{(a_0')^3 L_0}. \quad (6.24)$$

Случай $G_2=0, H_2=0$. Положим в (6.19) $G_2=0, H_2=0$:

$$\begin{aligned} F_1(\varphi) &= S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0, & F_2(\varphi) &= \tilde{S}_1 \cos \varphi + \tilde{S}_2 \sin \varphi, \\ F_3(\varphi) &= a_0'(S_1^* \sin \varphi + S_2^* \cos \varphi + S_3^*), & \Phi_1(\varphi) &= H_1 \sin \varphi + G_1 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Функции $\dot{\varphi}^2(\varphi), \ddot{\varphi}(\varphi)$ таковы:

$$\dot{\varphi}^2(\varphi) = \frac{2(S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0)}{L_0}, \quad \ddot{\varphi}(\varphi) = \frac{1}{L_0}(S_1 \cos \varphi - S_2 \sin \varphi). \quad (6.26)$$

Рассматривая первое уравнение из (6.12), в случае значения функций (6.25), (6.26) и с учетом $\lambda_1 \neq 0$ находим нулевые значения параметров S_1 и S_2 . В силу первой формулы из (6.26) получим случай регулярной прецессии, который исключается в данной статье.

Случай $G_2=0, H_2 \neq 0$. Из обозначений (6.9) следует, что параметры ψ_0, p_3 и r_3 должны удовлетворять условию:

$$r_3 \cos \psi_0 + p_3 \sin \psi_0 = 0. \quad (6.27)$$

Поскольку вычислительная часть анализа первого уравнения из (6.12) аналогична анализу соответствующего уравнения, которое рассмотрено при $\psi = \varphi$, то сформулируем только окончательные результаты. Вначале выпишем условие на A_1, A_3, a_0 :

$$4a_0(1 - a_0)A_1 - (1 - 4a_0^2)A_3 = 0. \quad (6.28)$$

В случае сферического распределения масс гиростата из равенства (6.28) имеем:

$$a_0 = \frac{1}{4} \left(\theta_0 = \arccos \frac{1}{4} \right). \quad (6.29)$$

Таким образом, получен интересный результат, поскольку, как показано в работе [17], для аналогичного резонансного случая ($\psi = 2\varphi$) в задаче о движении твердого тела со сферическим распределением масс в трех однородных силовых полях имеет место равенство (6.29). При произвольном распределении масс полученное условие на параметры не совпадает с (6.28).

В результате изучения первого уравнения из (6.12) найдем другие условия на параметры:

$$\begin{aligned} s_2 = 0, \quad p_1 \sin \psi_0 - p_2 \cos \psi_0 = 0, \quad (1 + a_0)s_1 = \tilde{G}_1, \\ \lambda_1^2 = \frac{H_2 M_0^2}{(a_0'^2)^3 L_0}, \quad S_1 = \frac{2(1 - a_0)}{a_0'} \tilde{G}_1. \end{aligned} \quad (6.30)$$

При выполнении равенств (6.30) для функции $\varphi(t)$ справедливо дифференциальное уравнение

$$\dot{\varphi} = \mu_0 (\sin \varphi + \alpha_0), \quad (6.31)$$

где

$$\mu_0 = 2\sqrt{\frac{b_0 H_2}{L_0}}, \quad \alpha_0 = \frac{S_1}{4b_0 H_2}. \quad (6.32)$$

Выпишем остальные условия, которые устанавливаем из уравнения (6.12) и уравнения (6.13):

$$s_3 = \frac{1}{(a'_0)^3 H_2} \left[4a_0'^4 (1 - a_0) \tilde{G}_1 + a_0 H_2 \right], \quad \lambda_3 = -\frac{(1 - a_0)(1 + 2a_0) \tilde{G}_1 \lambda_1}{4H_2}, \quad (6.33)$$

$$E = -a_0 s_3 + \frac{1}{2b_0' H_2} \left[a_0'^2 (1 - a_0)^2 \tilde{G}_1^2 + H_2^2 \right].$$

Из равенства (6.27) и второго равенства из (6.30) получим:

$$p_1 r_3 + p_2 p_3 = 0. \quad (6.34)$$

Из уравнения (6.31) имеем:

$$\varphi(\tau) = Q(\tau) \left(Q(\tau) = 2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha_0 \operatorname{tg} \tau}{\sqrt{\alpha_0^2 - 1} - \operatorname{tg} \tau}, \quad \tau = \mu_0 t \right). \quad (6.35)$$

Приведем пример действительности полученного решения. Рассмотрим следующие значения параметров:

$$\psi_0 = 0, \quad a_0 = \frac{1}{4}, \quad a'_0 = \frac{1}{4}\sqrt{15}, \quad p_1 > 0, \quad p_3 < 0, \quad 3p_1 + 2\sqrt{15}p_3 > 0.$$

Тогда нетрудно убедиться, что значение μ_0 из (6.32) действительно, а значение α_0 из (6.32) удовлетворяет условию $\alpha_0 > 1$. Следовательно, $\varphi(\tau)$ — действительная функция; в силу $\psi(\tau) = 2\varphi(\tau)$ функция $\psi(\tau)$ имеет такое же свойство.

Отметим, что функция (6.35) отвечает периодическому изменению функции $\sin \varphi(\tau)$. В п. 5 доказано свойство асимптотичности гиростата при $\psi = \varphi$. В случае (6.30) также имеет место аналогичный результат; но чтобы исследовать новый случай (отличный от случая п. 5) и принято предположение $\alpha_0 > 1$.

Рассмотрим подвижный годограф угловой скорости (2.6):

$$\boldsymbol{\omega} = \mu_0 (\sin \varphi + \alpha_0) (\mathbf{a} + 2\boldsymbol{\gamma}^{(1)}) \quad (6.36)$$

или в скалярной форме из (6.36) имеем:

$$\omega_1 = 2\mu_0 a'_0 (\sin \varphi + \alpha_0) \sin \varphi, \quad \omega_2 = 2\mu_0 a'_0 (\sin \varphi + \alpha_0) \cos \varphi,$$

$$\omega_3 = \mu_0 (1 + 2a_0) (\sin \varphi + \alpha_0). \quad (6.37)$$

Запишем уравнения неподвижного годографа:

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \mu_0 a'_0 (\sin \varphi + \alpha_0) \cos 2\varphi, & \omega_\eta &= -\mu_0 a'_0 (\sin \varphi + \alpha_0) \sin 2\varphi, \\ \omega_\zeta &= \mu_0 (a_0 + 2) (\sin \varphi + \alpha_0). \end{aligned} \quad (6.38)$$

На основании (6.36) устанавливаем, что подвижный годограф – линия пересечения поверхностей

$$(1 + 2a_0)^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) - 4a_0^2 \omega_3^2 = 0, \quad \omega_1 = \frac{2a_0'^2 \omega_3}{\mu_0 (1 + 2a_0)^2} [\omega_3 - \alpha_0 \mu_0 (1 + 2a_0)]. \quad (6.39)$$

Первая поверхность из (6.39) является круговым конусом с вершиной в точке O ; вторая поверхность – параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oy .

Исключим переменную φ в параметрических уравнениях (6.37):

$$\begin{aligned} (a_0 + 2)^2 (\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) - a_0'^2 \omega_\zeta^2 &= 0, \\ \omega_\xi &= \frac{a'_0 \omega_\zeta}{\mu_0^2 (a_0 + 2)^3} [\mu_0 (a_0 + 2) - \omega_\zeta] [\mu_0 (a_0 + 2) + \omega_\zeta]. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Как и в случае подвижного годографа из (6.39), первая поверхность из (6.40) также является круговым конусом с вершиной в начальной точке; вторая поверхность из (6.40) – цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси $O\eta$, и направляющей кривой третьего порядка.

Таким образом, движение гиростата является периодическим. Для получения его периода применим формулу (6.35), которую запишем в виде:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi(\tau)}{2} = \frac{\alpha_0 \operatorname{tg} \tau}{\sqrt{\alpha_0^2 - 1 - \operatorname{tg} \tau}}.$$

На основании этой формулы установим равенство:

$$\sin \varphi(\tau) = \frac{4\alpha_0 \sin \tau (\sqrt{\alpha_0^2 - 1} \cos \tau - \sin \tau)}{\alpha_0^2 - (\alpha_0^2 + 2) \cos 2\tau - 2\sqrt{\alpha_0^2 - 1} \sin 2\tau}. \quad (6.41)$$

Из соотношений (6.37), (6.38), (6.41) следует, что периоды всех компонент одинаковы и равны $T = \pi/2\mu_0$. В силу (6.31) и условия $\dot{\psi} = 2\dot{\varphi}$ получим, что скорости прецессии и собственного вращения имеют тоже период T , но углы ψ, φ связаны резонансным условием 1 : 2.

7. Сравнительный анализ решения п. 6 с решением [17]. Приведем основные соотношения п. 6:

$$\begin{aligned} \lambda &= (\lambda_1, 0, \lambda_3), \quad \mathbf{s} = (s_1, 0, s_3), \quad p_1 r_3 + p_2 p_3 = 0, \quad \operatorname{tg} \psi = -\frac{r_3}{p_3}, \\ 4a_0(1 - a_0)A_1 - (1 - 4a_0^2)A_3 &= 0, \quad A_3 \neq A_1: a_0 \in \left(0, \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Условия существования решения [17] таковы:

$$\begin{aligned} \lambda_i = 0 \quad (i = \overline{1,3}), \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, 0), \quad \mathbf{r} = (-p_2, p_1, 0) \quad (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = 0), \\ 6a_0^2(A_3 - A_1) + a_0(5A_1 - A_3) + (A_1 - 2A_3) = 0, \\ \left[\left(A_3 = A_1: a_0 = \frac{1}{4} \right), (A_1 = 2A_3: a_0 = 0), \left(A_1 \neq A_3: -\frac{1}{6} < a_0 < \frac{1}{2} \right) \right], \quad s_i \neq 0 \quad (i = \overline{1,3}). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Вначале отметим, что при сферическом распределении масс значения a_0 в (7.1), (7.2) совпадают. Отличие состоит в условиях на векторы \mathbf{s} , \mathbf{p} , \mathbf{r} , а также во множествах изменения параметров a_0 . Отметим, что в (7.2) возможен случай распределения масс гиростата, который характеризуется условиями Ковалевской ($A_2 = A_1 = 2A_3$) и значением $\cos \theta_0 = 0$ ($\theta_0 = \pi/2$). Принципиальным отличием решения п. 6 и решения [17] является свойство функций $\varphi(t)$: в п. 6 решение определено через элементарные функции времени, в [17] решение выражается эллиптическими функциями времени.

Заключение. В статье получено два решения в замкнутом виде для уравнений движения гиростата в трех однородных силовых полях. Предполагается, что гиростат обладает свойством динамической симметрии относительно оси, образующей постоянный угол с одной из неподвижных осей в пространстве. Первое решение ($\psi(t) = \varphi(t)$) описывается элементарными функциями времени и характеризуется дополнительным свойством асимптотичности к состоянию покоя. Второе решение $\psi(t) = 2\varphi(t)$ также описывается элементарными функциями времени, но дополнительными свойствами могут быть как асимптотические, так и периодические движения гиростата.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-71-30012.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
2. *Klein F., Sommerfeld A.* Über die Theorie des Kreisels. New York e.a.: Johnson reprint corp., 1965. 966 p.
3. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura et appl. 1947. S. 4. V. 26. fasc. 3–4. P. 271–281.
4. *Горр Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 4. С. 573–587.
5. *Bressan A.* Sulle precessioni d'un corpo rigido costituenti moti di Hess // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1957. V. 27. P. 276–283.
6. *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. Киев: Наук. думка, 1992. 168 с.
7. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. Донецк: ДонНУ, 2009. 222 с.

8. *Gorr G.V., Mазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. Донецк: ДонНУ, 2010. 364 с.
9. *Gorr G.V., Mазнев А.В., Котов Г.А.* Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом. Донецк: ГУ “ИПММ”, 2018. 250 с.
10. *Gorr G.V., Рубановский В.Н.* Об одном новом классе движений системы тяжелых шарнирно связанных твердых тел // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 5. С. 707–712.
11. *Ольшанский В.Ю.* О регулярных прецессиях несимметричного твердого тела с жидким наполнением // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 5. С. 559–571.
12. *Ol'shanskii V. Yu.* New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2019. V. 131. № 12. art. no. 57. https://ui.adsabs.harvard.edu/link_gateway/2019CeMDA.131...57O
<https://doi.org/10.1007/s10569-019-9929-x>
13. *Ольшанский В.Ю.* Полурегулярная прецессия несимметричного твердого тела с жидким наполнением // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 5. С. 547–564.
<https://doi.org/10.31857/S0032823521040111>
14. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // *Egypt. J. Bas. Appl. Sci.* 2015. V. 2. № 3. P. 200–205.
<https://doi.org/10.1016/j.ejbas.2015.03.002>
15. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // *J. Egypt. Math. Soc.* 2017. V. 25. № 2. P. 216–219.
<https://doi.org/10.1016/j.joems.2016.08.001>
16. *Ольшанский В.Ю.* Регулярная прецессия гиростата в суперпозиции трех однородных полей // Прикл. математика и механика. 2022. Т. 86. Вып. 6. С. 872–885.
<https://doi.org/10.31857/S0032823522060121>
17. *Gorr G.V.* Один класс резонансных прецессионных движений твердого тела под действием трех однородных силовых полей // ПММ. 2023. Т. 87. № 1. С. 3–18.
<https://doi.org/10.31857/S0032823523010071>
18. *Gorr G.V.* Постановка задачи о прецессиях твердого тела с неподвижной точкой в трех однородных силовых полях. Прецессионно-изоконические движения тела // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 3. С. 123–134. <http://doi.org/10.31857/S0572329922600633>
19. *Gorr G.V.* On a class of precessions of a rigid body with a fixed point under the action of forces of three homogeneous force fields // *Rus. J. Nonlinear Dyn.* 2023. V. 19. № 2. P. 249–264.

PRECESSION MOTIONS OF A GYROSTAT, HAVING A FIXED POINT, IN THREE HOMOGENEOUS FORCE FIELDS

G.V. Gorr^{a, *}

^a*Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^{*}*e-mail: gvgorr@gmail.com*

Abstract – The subject of investigation is the problem on precession motions of a gyrostat with a fixed point in three homogeneous force fields. The class of precessions under consideration is characterized by the constancy of the precession angle and by the commensurability of the precession and proper rotation velocities. Equations of motion of a gyrostat are reduced to a system of three second order

differential equations with respect to velocities of precession and proper rotation. Integration of these equations is conducted in the case of precessionally isoconic motions (the precession velocity equals to the proper rotation velocity) and in the case of 2:1 resonance, when the precession velocity is two times more, than the proper rotation velocity. It is proved that the obtained solutions can be described by elementary functions of time.

Keywords: gyrostatic moment; precessions; force fields; new solutions

REFERENCES

1. *Ishlinskii A.Yu.* Orientation, gyroscopes and inertial navigation. Moscow: Nauka, 1976. 672 p. (in Russian)
2. *Klein F., Sommerfeld A.* Über die Theorie des Kreisels. New York e.a.: Johnson reprint corp., 1965. 966 p.
3. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura et appl. 1947. S. 4. V. 26, fasc. 3–4. P. 271–281.
4. *Gorr G.V.* Precession motions in the rigid body dynamics and in the dynamics of coupled rigid bodies systems // Appl. Math. Mech. 2003. V. 67. № 4. P. 573–587. (in Russian)
5. *Bressan A.* Sulle precessioni d'un corpo rigido costituenti moti di Hess // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1957. V. 27. P. 276–283.
6. *Dokshevich A.I.* Finit form solutions of Euler–Poisson equations. Kiev: Nauk. Dumka, 1992. 168 p. (in Russian)
7. *Gorr G.V., Maznev A.V., Shchetinina E.K.* Precession motions in the rigid body dynamics and in the dynamics of coupled rigid bodies. Donetsk: Donetsk National Univ., 2009. 222 p. (in Russian)
8. *Gorr G.V., Maznev A.V.* Dynamics of a gyrost at having a fixed point. Donetsk: Donetsk National Univ., 2010. 364 p. (in Russian)
9. *Gorr G.V., Maznev A.V., Kotov G.A.* The movement of the gyrost at with a variable gyrostatic moment. Donetsk: Publishing House of the Government Institution “Institute of Applied Mathematics and Mechanics”. 2017. 250 p.
10. *Gorr G.V., Rubanovskii V.N.* On one new class of motions of a system of rigid bodies coupled by hinges // Appl. Math. Mech. 1988. V. 50. № 5. P. 707–712. (in Russian)
11. *Ol'shanskii V.Yu.* On regular precessions of an asymmetrical rigid body with the liquid filling // Appl. Math. Mech. 2018. V. 82. № 5. P. 559–571. (in Russian)
12. *Ol'shanskii V.Yu.* New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // Celest. Mech. Dyn Astron. 2019. V. 131. Iss. 12. Article 57.
13. *Ol'shanskii V.Yu.* Semi-regular precession of an asymmetrical rigid body with the liquid filling // Appl. Math. Mech. 2021. V. 85. № 5. P. 547–564. (in Russian)
14. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // Egypt. J. Bas. Appl. Sci. 2015. V. 2. Iss. 3. P. 200–205.
15. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrost at) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egypt. Math. Soc. 2017. V. 25. Iss. 2. P. 216–219.
16. *Ol'shanskii V.Yu.* Regular precession of a gyrost at in the superposition of three homogeneous force fields // Appl. Math. Mech.. 2020. V. 86. № 6. P. 872.

-
17. *Gorr G.V.* One class of resonance precession motions of a rigid body under the action of three homogeneous force fields // *Appl. Math. Mech.* 2023. V. 87. № 1. P. 3–18.
<https://doi.org/10.31857/S0032823523010071>
 18. *Gorr G.V.* Statement of the problem on precessions of a rigid body with a fixed point in three homogenous force fields. Precessional-isoconical motions of the body // *Mechanics of Solids.* 2023. № 3. P. 123–134. (in Russian).
<https://doi.org/10.31857/S0572329922600633>
 19. *Gorr G.V.* On a Class of Precessions of a Rigid Body with a Fixed Point under the Action of Forces of Three Homogeneous Force Fields // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* 2023. V. 19. № 2. P. 249–264.