

УДК 519.6: 531.19

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЯКОБИ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНОГО ДВОЙНОГО МАЯТНИКА

© 2024 г. П. М. Шкапов<sup>a, \*</sup>, В. Д. Сулимов<sup>a</sup>, А. В. Сулимов<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

<sup>b</sup>Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Севастополе, Севастополь, Россия

\*e-mail: [spm@bmstu.ru](mailto:spm@bmstu.ru)

Поступила в редакцию 06.06.2024 г.

После доработки 06.07.2024 г.

Принята к публикации 09.07.2024 г.

Проводится анализ устойчивости по Якоби нелинейной динамической системы на основе теории Косамби–Картана–Черна. Вводится геометрическое описание эволюции системы во времени, что позволяет определить пять геометрических инвариантов. Собственные значения второго инварианта (тензора кривизны отклонения) дают оценку устойчивости системы по Якоби. Подход актуален в приложениях, где требуется идентификация областей устойчивости по Ляпунову и по Якоби одновременно. Для нелинейной системы – двойного маятника – исследуется зависимость устойчивости по Якоби от начальных условий. Определены в явном виде компоненты тензора кривизны отклонения, соответствующие рассматриваемым начальным условиям, и собственные значения указанного тензора. Установлена определяемая начальными условиями граница перехода детерминированной системы от регулярного поведения к хаотическому. Предложена формулировка обратной задачи на собственные значения тензора кривизны отклонения, связанная с восстановлением существенных параметров системы. При решении сформулированной обратной задачи используется оптимизационный подход. Приведены численные примеры восстановления параметров системы для случаев ее регулярного и хаотического поведения.

**Ключевые слова:** нелинейный двойной маятник, устойчивость по Якоби, теория Косамби–Картана–Черна, геометрический инвариант, конфигурационное пространство, восстановление параметров, глобальная оптимизация

**DOI:** 10.31857/S1026351924060062, **EDN:** TZCRHL

**1. Введение.** В многочисленных приложениях при исследовании устойчивости динамических систем применяют метод Ляпунова [1]. Одним из альтернативных подходов является анализ устойчивости систем по Якоби [2, 3]. Вводится геометрическое описание эволюции системы во времени [4, 5]. Последующий анализ основан на применении теории Косамби–Картана–Черна (теории ККЧ) [6, 7]. При этом реализуется дифференциально-геометрический подход к вариационным дифференциальным уравнениям, описывающим отклонение целой траектории системы от ближайших траекторий. Геометрическое описание, основанное на теории ККЧ, позволяет определить пять геометрических инвариантов системы. Анализ устойчивости динамической системы по Якоби, в соответствии с теорией ККЧ, предполагает определение тензора кривизны отклонения (второго ККЧ-инварианта) системы и его собственных значений. Собственные значения тензора кривизны отклонения дают оценку устойчивости системы по Якоби. Анализ устойчивости системы в данном контексте связан с изучением ее робастности как меры нечувствительности и адаптации к изменению параметров собственно системы и окружающей среды [8, 9]. Применение теории ККЧ актуально в практических приложениях, где для системы требуется идентифицировать области, в которых имеют место одновременно устойчивость по Ляпунову и устойчивость по Якоби.

Значительный интерес представляют детерминированные динамические системы, способные демонстрировать хаотическое поведение [10]. Впервые детерминированный хаос был обнаружен в модели Лоренца [11]. Другим содержательным примером хаотической детерминированной динамической системы является нелинейный двойной маятник [12, 13]. Так, в работе [12] установлено, что результаты исследования устойчивости двойного маятника с использованием экспонент Ляпунова не являются достаточным основанием для однозначного определения условий перехода системы к хаотическому поведению. Влияние начальных условий на квазипериодические колебания двойного маятника изучено в работе [14]. Позднее для детерминированных систем с хаотическим поведением был предложен подход к исследованию устойчивости по Якоби, основанный на теории Косамби–Картана–Черна [15, 16]. В целом проблема определения условий возникновения хаоса в нелинейных детерминированных динамических системах остается актуальной.

Вводится предположение о том, что собственные значения тензора кривизны отклонения динамической системы, обладающей заданной структурой, не только дают оценку устойчивости системы по Якоби, но также содержат полезную информацию о существенных параметрах системы. Возможна постановка задачи о восстановлении основных физических, геометрических и других характеристик системы по заданным приближенно собственным значениям тензора кривизны отклонения. Подобные задачи представляют класс обратных задач и обладают рядом существенных особенностей. Так, к ним относятся проблема корректности (по Адамару) постановки обратной задачи, неполнота и ограниченная точность задания входной информации, возможная недифференцируемость критериальных функций, наличие шумов, другие особенности. Эффективным является подход, основанный на применении математической теории обратных задач [17–19]. Задачи этого класса, как правило, являются некорректно поставленными, что требует применения методов регуляризации [20]. Существуют различные подходы к численному решению регуляризованных обратных задач, при этом одним из наиболее

эффективных является оптимизационный. Следует отметить, что в обратных задачах неполнота входных данных имеет следствием многоэкстремальность критериальных функций, что обуславливает необходимость применения методов глобальной оптимизации [21–23]. Детерминированные методы позволяют находить глобальные решения задач оптимизации при сравнительно небольшом числе независимых переменных. Применение стохастических методов снимает проблему размерности задач оптимизации, однако при этом вычислительная стоимость поиска глобальных решений критически возрастает. Стремлением сократить вычислительные затраты при решении задач глобальной оптимизации мотивированы исследования и разработка гибридных методов глобальной оптимизации, объединяющих стохастические процедуры сканирования пространства переменных и локальный поиск с использованием детерминированных алгоритмов. Во многих приложениях возникают задачи оптимизации, где критериальные функции не являются всюду дифференцируемыми; при этом необходимо применение специальных численных методов, включая процедуры сглаживания критериальных функций [24, 25].

Рассматривается система с двумя степенями свободы – нелинейный плоский двойной маятник. Целью является исследование влияния начальных условий на устойчивость системы по Якоби и ее эволюцию во времени: регулярный или хаотический вид движения. Предложена постановка обратной задачи восстановления параметров системы по заданным собственным значениям тензора кривизны отклонения для различных начальных условий. Реализуемый подход основан на применении теории ККЧ, теории обратных задач, методов глобальной оптимизации.

**2. Геометрические инварианты и устойчивость системы по Якоби.** Краткий обзор теории ККЧ дан в работах [4, 6]. Уравнения движения  $n$ -мерной динамической системы (нелинейные в общем случае) могут быть получены с использованием уравнений Эйлера–Лагранжа и представлены в виде:

$$\ddot{x}^i + 2G^i(x^j, \dot{x}^j, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

где локальная система координат  $(x^i, \dot{x}^i, t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , введена на открытом связном подмножестве  $\Omega$  евклидова  $(2n+1)$ -мерного пространства  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1$ ;  $x^i = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ ,  $\dot{x}^i = dx^i/dt$ ,  $\ddot{x}^i = d^2x^i/dt^2$ ;  $t$  – время; каждая функция  $G^i(x^j, \dot{x}^j, t)$  имеет класс гладкости  $C^\infty$  в окрестности некоторых начальных условий  $((x)_0, (\dot{x})_0, t_0)$  на  $\Omega$ . Рассматриваются задачи определения пяти геометрических инвариантов системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (2.1) при преобразованиях координат:  $\tilde{t} = t$ ,  $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Если преобразования координат являются несингулярными, то ККЧ-ковариантная производная векторного поля  $\xi^i(x)$  на  $\Omega$  определяется в виде [4, 6]:

$$\frac{D\xi^i}{dt} = \frac{d\xi^i}{dt} + N_j^i \xi^j \quad (2.2)$$

(используется соглашение Эйнштейна о суммировании); при этом коэффициенты нелинейной связности определены в виде:

$$N_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial \dot{x}^j}. \quad (2.3)$$

В случае  $\dot{x}^i = \xi^i$  имеет место  $N_j^i \dot{x}^j - 2G^i = -\varepsilon^i$ . Контравариантное векторное поле  $\varepsilon^i$  на  $\Omega$  называется первым ККЧ-инвариантом.

Если рассматривается случай, когда возмущенные траектории  $\tilde{x}^i(t) = x^i(t) + \eta \xi^i(t)$  (здесь  $|\eta| \ll 1$ ) близки к траекториям системы уравнений (2.1), то при  $\eta \rightarrow 0$  указанная система уравнений преобразуется к виду [4]

$$\frac{d^2 \xi^i}{dt^2} + 2N_j^i \frac{d\xi^j}{dt} + 2Z_j^i \xi^j = 0, \quad (2.4)$$

где  $Z_j^i$  – кривизна нуль-связности:

$$Z_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial x^j}. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.4) с использованием (2.2) может быть представлено в ковариантной форме [4]:

$$\frac{D^2 \xi^i}{dt^2} = P_j^i \xi^j.$$

Здесь  $P_j^i$  – тензор кривизны отклонения (второй ККЧ-инвариант):

$$P_j^i = \frac{\partial N_j^i}{\partial x^k} \dot{x}^k - 2G^k G_{jk}^i + N_k^i N_j^k - 2Z_j^i, \quad (2.6)$$

коэффициенты связности Бервальда определены как  $G_{jk}^i = \frac{\partial^2 G^i}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k}$ .

В рамках теории ККЧ третий, четвертый и пятый геометрические инварианты системы (2.1) определяются согласно [4, 6]:

$$P_{jk}^i = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial P_j^i}{\partial x^k} - \frac{\partial P_k^i}{\partial x^j} \right), \quad P_{jkl}^i = \frac{\partial P_{jk}^i}{\partial x^l}, \quad D_{jkl}^i = \frac{\partial G_{jk}^i}{\partial x^l}.$$

Третий инвариант  $P_{jk}^i$  может быть интерпретирован как тензор кручения. Четвертый  $P_{jkl}^i$  и пятый  $D_{jkl}^i$  инварианты называются тензором кривизны Римана–Кристоффеля и тензором Дугласа соответственно. В общем случае указанные инварианты могут быть использованы для описания геометрических свойств систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

При анализе устойчивости по Якоби динамических систем с двумя степенями свободы тензор кривизны отклонения имеет структуру

$$P_j^i = \begin{pmatrix} P_1^1 & P_2^1 \\ P_1^2 & P_2^2 \end{pmatrix},$$

следовательно, собственные значения тензора  $P_j^i$  могут быть определены

в виде [15, 16]:  $\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$ , где  $\tau = P_1^1 + P_2^2$ ;  $\Delta = P_1^1 P_2^2 - P_2^1 P_1^2$ .

**Определение [4].** Траектории уравнений (2.1) устойчивы по Якоби, если действительные части собственных значений тензора кривизны отклонения  $P_j^i$

всюду строго отрицательны, и неустойчивы по Якоби в противном случае.

### 3. Нелинейный двойной маятник.

Рассматривается нелинейная динамическая система – плоский двойной маятник, состоящий из двух математических маятников, соединенных цилиндрическим шарниром (рис. 1).

Первый (верхний) маятник, вращающийся вокруг горизонтальной оси неподвижного цилиндрического шарнира  $O$ , представляет собой безмассовый жесткий стержень длиной  $l_1$ , несущий на свободном конце  $A$  материальную точку массой  $m_1$ . Второй (нижний) маятник, вращающийся вокруг оси подвижного шарнира  $A$ , связывающего оба маятника, состоит из безмассового жесткого стержня длиной  $l_2$  с материальной точкой массой  $m_2$  на свободном конце  $B$  стержня. Для описания движения рассматриваемой системы с двумя степенями свободы введены две обобщенные координаты:  $\theta_1$  – угол отклонения первого стержня от вертикальной оси, проходящей через неподвижный шарнир  $O$ ;  $\theta_2$  – угол отклонения второго стержня от вертикальной оси, проходящей через подвижный шарнир  $A$ , соединяющий маятники.

Кинетическая энергия  $T$  и потенциальная энергия  $\Pi$  системы определяются соответственно в виде:

$$T = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)]$$

$$\Pi = (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 - m_2gl_2 \cos \theta_2,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Дифференциальные уравнения движения системы могут быть получены с использованием уравнений Эйлера–Лагранжа [4, 6]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0, \quad (i = 1, 2), \quad (3.1)$$

где  $L$  – лагранжиан системы,  $L = T - \Pi$ .

Далее рассматривается частный случай системы: предполагается, что  $m_1 = m_2$  и  $l_1 = l_2 = l$ . Тогда дифференциальные уравнения движения нелинейного двойного маятника, полученные с использованием (3.1), имеют вид:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{\psi} [\dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - 2b \sin \theta_1 + b \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin \theta_2], \quad (3.2)$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{1}{\psi} [2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + \dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) + 2b \sin \theta_2 - 2b \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin \theta_1], \quad (3.3)$$

где  $b = g / l$  и  $\psi = 2 - \cos^2(\theta_2 - \theta_1)$ .

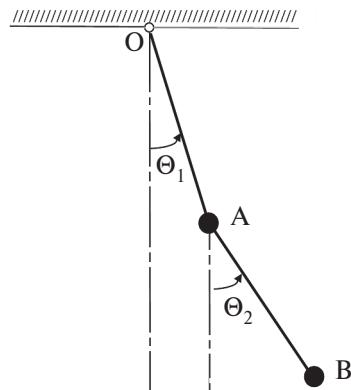


Рис. 1. Нелинейный двойной маятник.

В соответствии с (2.1) функции  $G^i$ ,  $i = 1, 2$ , для уравнений (3.2), (3.3) представлены так:

$$G^1 = -\frac{1}{2\psi}(\cos(\theta_2 - \theta_1)\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1^2 + \sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2^2 -$$

$$-2b\sin\theta_1 + b\cos(\theta_2 - \theta_1)\sin\theta_2)$$

$$G^2 = \frac{1}{2\psi}(2\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1^2 + \cos(\theta_2 - \theta_1)\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2^2 +$$

$$+2b\sin\theta_2 - 2b\cos(\theta_2 - \theta_1)\sin\theta_1).$$

Тогда, согласно (2.3) и (2.5), могут быть определены коэффициенты нелинейной связности:

$$N_1^1 = -\frac{1}{\psi}\cos(\theta_2 - \theta_1)\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1; \quad N_2^1 = -\frac{1}{\psi}\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2$$

$$N_1^2 = 2\frac{1}{\psi}\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1; \quad N_2^2 = \frac{1}{\psi}\cos(\theta_2 - \theta_1)\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2,$$

а также коэффициенты кривизны нуль-связности:

$$Z_1^1 = -\frac{1}{2\psi^2}(2AB + \psi(C - 2b\cos\theta_1))$$

$$Z_2^1 = \frac{1}{2\psi^2}(2AB + \psi(C - b\cos(\theta_2 - \theta_1)\cos\theta_2))$$

$$Z_1^2 = \frac{1}{2\psi^2}(2AD + \psi(E - 2b\cos(\theta_2 - \theta_1)\cos\theta_1))$$

$$Z_2^2 = -\frac{1}{2\psi^2}(2AD + \psi(E - 2b\cos\theta_2)),$$

при этом использованы обозначения:

$$A = \cos(\theta_2 - \theta_1)\sin(\theta_2 - \theta_1)$$

$$B = \cos(\theta_2 - \theta_1)\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1^2 + \sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2^2 -$$

$$-2b\sin\theta_1 + b\cos(\theta_2 - \theta_2)\sin\theta_2$$

$$C = -\cos^2(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1^2 + \sin^2(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1^2 -$$

$$-\cos(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2^2 + b\sin(\theta_2 - \theta_2)\sin\theta_2$$

$$D = 2\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1^2 + \cos(\theta_2 - \theta_1)\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2^2 +$$

$$+2b\sin\theta_2 - 2b\cos(\theta_2 - \theta_2)\sin\theta_1$$

$$E = -2\cos(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1^2 - \cos^2(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2^2 +$$

$$+\sin^2(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2^2 - 2b\sin(\theta_2 - \theta_2)\sin\theta_1.$$

Коэффициенты связности Бервальда здесь имеют вид:

$$\begin{aligned} G_{11}^1 &= -\frac{1}{\psi} \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ G_{12}^1 = G_{21}^1 &= 0; \quad G_{22}^1 = -\frac{1}{\psi} \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ G_{11}^2 &= \frac{1}{\psi} 2 \sin(\theta_2 - \theta_1); \quad G_{12}^2 = G_{21}^2 = 0 \\ G_{22}^2 &= \frac{1}{\psi} \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1). \end{aligned}$$

Итак, для рассматриваемой системы определен в аналитической форме тензор кривизны отклонения (2.6).

Далее рассматриваются дифференциальные уравнения (3.2), (3.3) при следующих начальных условиях:  $t = 0$ ,  $\theta_1(0) = \theta_2(0)$ ,  $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ . Применение к исследуемой системе подхода на основе теории ККЧ позволяет определить тензор кривизны отклонения в виде:

$$P_j^i = \begin{pmatrix} P_1^1 & P_2^1 \\ P_1^2 & P_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b \cos \theta_1 & b \cos \theta_2 \\ 2b \cos \theta_1 & -2b \cos \theta_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\tau = P_1^1 + P_2^2 = -2b(\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

$$\Delta = P_1^1 P_2^2 - P_2^1 P_1^2 = 4b^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - 2b^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 = 2b^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2.$$

Тогда

$$\lambda_{1,2} = -b(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \pm b\sqrt{\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2}.$$

С учетом  $\theta_1(0) = \theta_2(0)$  имеет место  $\lambda_{1,2} = -b \cos \theta_1 (2 \pm \sqrt{2})$ .

**4. Анализ устойчивости системы по Якоби в зависимости от начальных условий.** Динамика нелинейного двойного маятника рассматривается для различных начальных значений обобщенных координат: при  $t = 0$  выполнено условие  $\theta_1(0) = \theta_2(0)$  и движение начинается из состояния покоя. Далее в процессе вычислений принимается:  $g = 9.81 \text{ м/с}^2$  и  $l = 1 \text{ м}$ .

Анализ устойчивости по Якоби нелинейного двойного маятника проводится с использованием результатов вычисления собственных значений тензора кривизны отклонения. На рис. 2 показано изменение собственных значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  тензора  $P_j^i$ , соответствующее условиям  $0 \leq \theta_1(0) = \theta_2(0) \leq 180^\circ$ .

Необходимо отметить, что в начальный момент времени  $t = 0$  имеет место  $\lambda_1 \geq 0$  и  $\lambda_2 \geq 0$ , если  $90^\circ \leq \theta_1(0) \leq 180^\circ$ . Следовательно, согласно приведенному выше определению, при указанных начальных условиях траектории системы неустойчивы по Якоби. Существенно, что если  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 90^\circ$ , то  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ : случай кратного собственного значения тензора  $P_j^i$ .

После начала движения системы (при  $t > 0$ ) изменяются значения обобщенных координат и обобщенных скоростей, следовательно, изменяются компоненты тензора  $P_j^i$  и его собственные значения. Вычисление

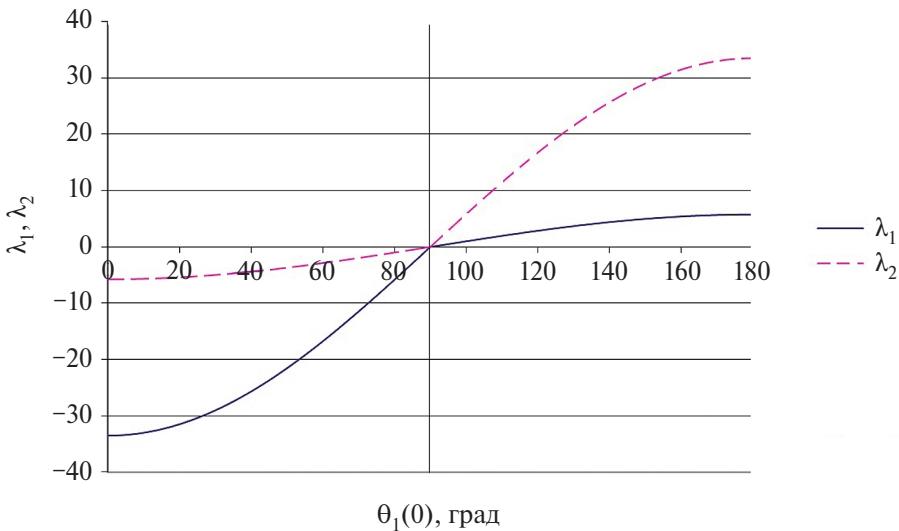


Рис. 2. Изменение собственных значений  $\lambda_i$  и  $\lambda_2$  тензора  $P_j^i$  при  $0 \leq \theta_1(0) \leq 180^\circ$ . На графике  $\theta_1(0)$  в град.

указанных собственных значений, необходимое для анализа устойчивости системы по Якоби, предполагает интегрирование дифференциальных уравнений движения (3.2), (3.3). Если в начальный момент времени (см. рис. 2) при  $0 \leq \theta_1(0) < 90^\circ$  собственные значения  $\lambda_i$ ,  $\lambda_2$  тензора  $P_j^i$  отрицательны, то в последующем возможно  $\lambda_i \geq 0$  и (или)  $\lambda_2 \geq 0$  (траектории системы неустойчивы по Якоби).

В работе [15] эволюция во времени системы – нелинейного двойного маятника – классифицирована следующими двумя типами. В случае, когда траектории заключены внутри некоторой достаточно узкой области конфигурационного пространства, система является устойчивой по Якоби и ее движение носит регулярный характер. Если траектории не ограничены некоторой областью конфигурационного пространства, то система неустойчива по Якоби, при этом ее движение является хаотическим (детерминированный хаос). Далее анализ устойчивости системы по Якоби с использованием данных, представленных на рис. 2, дополнен исследованием траекторий системы в конфигурационном пространстве на основе интегрирования дифференциальных уравнений (3.2), (3.3) при различных начальных значениях обобщенных координат  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \text{var}$  (начальные значения обобщенных скоростей принимаются равными нулю). Рассматриваются следующие три случая.

Случай 1:  $\theta_1(0) = 45^\circ$ . В конфигурационном пространстве траектории системы локализованы в ограниченной области (рис. 3). При этом система устойчива по Якоби, и ее движение носит регулярный характер.

Случай 2:  $\theta_1(0) = 79^\circ$ . В конфигурационном пространстве траектории системы, как и в случае 1, локализованы в ограниченной области; при этом область приобретает S-образную форму и становится расслоенной (рис. 4). Система устойчива по Якоби, а ее поведение по-прежнему носит регулярный характер.

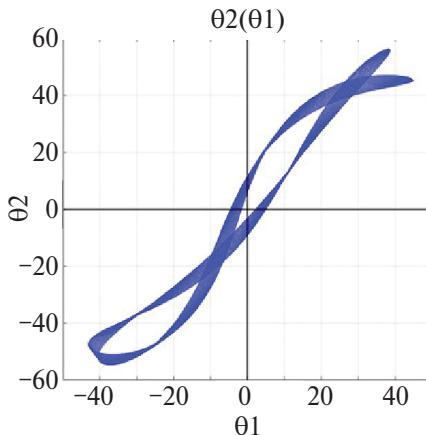


Рис. 3. Траектории системы в конфигурационном пространстве при  $\theta_1(0) = 45^\circ$ . По осям  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  в град.

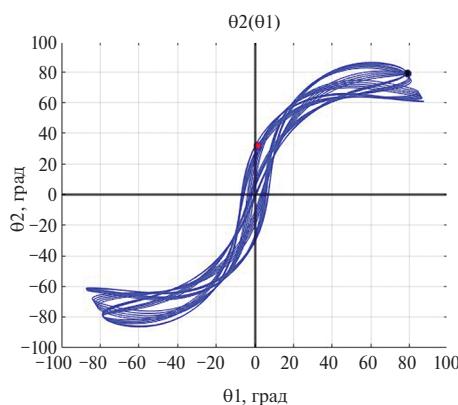


Рис. 4. Траектории системы в конфигурационном пространстве при  $\theta_1(0) = 79^\circ$ . По осям  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  в град.

Случай 3:  $\theta_1(0) = 80^\circ$ . В рассматриваемом случае система неустойчива по Якоби, а ее движение является хаотическим (детерминированный хаос), что проявляется в (неограниченном) нарастании текущих значений обобщенных координат, а также в разрушении области локализации интегральной кривой в конфигурационном пространстве (рис. 5). На рисунке выделены положения изображающей точки для моментов времени начала (внизу) и окончания (вверху) интегрирования.

Сравнение представленных выше данных (рис. 3–5) позволяет отметить существенное изменение формы области локализации интегральных кривых при изменении начальных значений обобщенных координат.

Более точное исследование на основе интегрирования уравнений (3.2), (3.3) позволило установить, что граница перехода системы от области устойчивости по Якоби (регулярное движение) к области неустойчивости по Якоби (хаотическое движение) определена условием  $79,14^\circ < \theta_1(0) < 79,15^\circ$ .

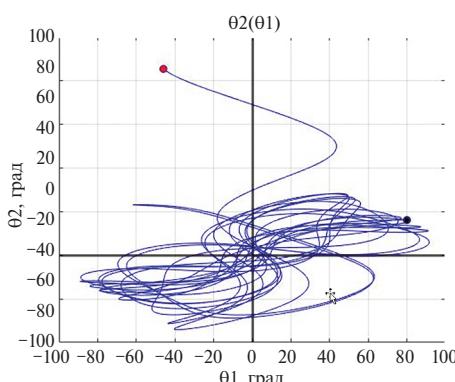


Рис. 5. Траектории системы в конфигурационном пространстве при  $\theta_1(0) = 80^\circ$ . По осям  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  в град.

**5. Обратная задача на собственные значения тензора  $P_j^i$ .** Следует отметить, что обратные задачи на собственные значения тензоров рассматривались, например, в работе [17]. Существенной особенностью при этом является возможное наличие кратных собственных значений тензоров [18]. Кроме того, вследствие неполноты входных данных, представленных только собственными значениями тензора, критериальная функция обратной задачи в общем случае является многоэкстремальной [19, 20].

Рассматривается в общей постановке обратная задача восстановления параметров динамической системы, которая в рамках выбранной математической модели описывается уравнением

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y,$$

где  $X, Y$  – гильбертовы пространства;  $A$  – компактный линейный оператор, действующий из  $X$  в  $Y$ . Правая часть возмущенного уравнения представляет приближенные входные данные  $y^\delta$ . Предполагается, что погрешность задания входной информации  $\delta$  известна и справедливо неравенство  $\|y^\delta - y\| \leq \delta$ . Требуется определить устойчивые приближенные решения по заданной приближенно информации  $y^\delta$ . Существенно, что во многих приложениях обратные задачи являются некорректно поставленными. Далее реализуется подход, основанный на методе регуляризации [19, 20].

Приближенное решение рассматриваемой обратной задачи восстановления параметров системы связано с поиском минимума функционала Тихонова:

$$x_\alpha^\delta = \arg \min_{x \in X} J_\alpha(x), \quad \alpha > 0,$$

здесь  $x_\alpha^\delta$  – регуляризованное решение уравнения  $Ax = y^\delta$  с параметром регуляризации  $\alpha$ ; при этом минимизируемый функционал определен в виде:

$$J_\alpha(x) = \|Ax - y^\delta\|_Y^2 + \alpha \|x\|_X^2,$$

где  $\|Ax - y^\delta\|_Y^2$  – функционал невязки (представлен квадратом нормы в пространстве  $Y$ );  $\alpha \|x\|_X^2$  – стабилизирующий функционал.

Решение регуляризованной обратной задачи восстановления параметров системы получено с использованием оптимизационного подхода [21, 22]. Отмеченные выше особенности обратной задачи обусловливают необходимость применения методов глобальной недифференцируемой оптимизации [23]. Актуальным направлением является разработка и применение гибридных алгоритмов, объединяющих стохастические методы сканирования пространства переменных и детерминированные процедуры локального поиска [24, 25]. В процессе вычислений применен гибридный алгоритм QOM-PCALMSI, интегрирующий стохастический алгоритм столкновения частиц (с построением квазипозиций) и вариант метода линеаризации с построением сглаживающих аппроксимаций [26].

**6. Численные примеры.** Предполагается, что по результатам анализа экспериментальных данных для нелинейного двойного маятника установлены приближенные собственные значения тензора кривизны отклонения, используемые в качестве входных данных для решения обратной задачи на собственные значения тензора кривизны отклонения [24, 25]. Приведенная косвенная информация получена моделированием системы при фиксированных значениях ее параметров. Относительная погрешность входных данных не превышает 1,0%. Свободными переменными являются относительные величины  $x_1$ ,  $x_2$ , соответствующие искомым параметрам  $l$ ,  $\theta_1(0)$ , численные значения которых удовлетворяют заданным ограничениям:  $0,25 \leq l \leq 1,25$  м;  $0 \leq \theta_1(0) \leq 180^\circ$ . Требуется восстановить значения параметров  $l$ ,  $\theta_1(0)$  по заданным приближенно собственным значениям  $\lambda_1^*$  и  $\lambda_2^*$  тензора  $P_j^i$ .

*Пример 1.* Предполагается, что для нелинейного двойного маятника установлены следующие приближенные собственные значения тензора кривизны отклонения:  $\lambda_1^* \approx -23.7071$ ;  $\lambda_2^* \approx -4.0594$ . Приведенная косвенная информация, полученная моделированием системы при стандартных значениях параметров ( $g = 9.81 \text{ м/с}^2$  и  $l = 1 \text{ м}$ ) и начальных значениях обобщенных координат  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 45^\circ$ , представляет входные данные для решения обратной задачи. Критериальная функция обратной задачи определена в виде:

$$F(x) = \sum_{i=1}^2 \gamma_i f_i^2(x) + \alpha \|x\|_2^2,$$

где  $\gamma_i, f_i(x)$  – весовой коэффициент и частный критерий, соответствующие  $i$ -му собственному значению  $\lambda_i$ ;  $f_i(x) = (\lambda_i^* - \lambda_i(x))$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\alpha$  – параметр регуляризации;  $x \in \mathbb{R}^2$ .

При решении используется гибридный алгоритм QOM-PCALMSI. Система устойчива по Якоби (см. рис. 3). По завершении девяти итераций получено:  $x_1^9 \approx 76.269\%$ ,  $x_2^9 \approx 44.798\%$ . Восстановленные значения параметров системы соответственно равны:  $l \approx 1,013 \text{ м}$ ;  $\theta_1(0) \approx 44.8^\circ$ . Наибольшая относительная погрешность решения (определяется восстановленным значением параметра  $l$ ) здесь не превышает 1,3%. Итак, восстановлены параметры нелинейного двойного маятника (длины стержней верхнего и нижнего маятников) и начальное значение обобщенной координаты  $\theta_1(0)$ .

*Пример 2.* Предполагается, что для нелинейного двойного маятника установлены следующие приближенные собственные значения тензора кривизны отклонения:  $\lambda_1^* \approx -5.874$ ;  $\lambda_2^* \approx -0.988$ . Приведенная косвенная информация получена моделированием системы при стандартных значениях параметров ( $g = 9.81 \text{ м/с}^2$  и  $l = 1 \text{ м}$ ) и начальных значениях обобщенных координат  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 80^\circ$ .

При решении используется гибридный алгоритм QOM-PCALMSI. Система неустойчива по Якоби (см. рис. 5). По завершении двенадцати итераций получено:  $x_1^{12} \approx 76.876\%$ ,  $x_2^9 \approx 79.65\%$ . Восстановленные значения параметров системы соответственно равны:  $l \approx 1,019 \text{ м}$ ;  $\theta_1(0) \approx 79.7^\circ$ . Наибольшая относительная погрешность решения (определяется восстановленным значением параметра  $l$ ) здесь не превышает 1,9%.

**7. Заключение.** Исследована устойчивость по Якоби динамической системы – нелинейного плоского двойного маятника. На основе теории Косамби–Картана–Черна для системы определен тензор кривизны отклонения и его собственные значения. Для частного случая системы, составленной из двух одинаковых математических маятников, представлены дифференциальные уравнения движения и установлена зависимость указанных собственных значений от начальных условий. Определена оценка снизу для области неустойчивости системы по Якоби. Уточненное значение указанной оценки и, следовательно, определение условий перехода системы от регулярного поведения к хаотическому получено с использованием численного интегрирования дифференциальных уравнений движения и изучением траекторий системы в конфигурационном пространстве. Приведенные примеры показывают эффективность реализованного подхода для анализа устойчивости системы по Якоби в зависимости от начальных условий. Сформулирована обратная задача восстановления параметров системы по заданной приближенно

косвенной информации, представленной собственными значениями тензора кривизны отклонения. Приведены примеры численного решения обратной задачи для случаев устойчивой и неустойчивой по Якоби системы. Точность восстановления параметров системы (геометрического параметра и начальных условий для обобщенных координат) согласована с точностью задания входной информации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hafstein S.F., Valfells A.* Efficient computation of Lyapunov functions for non-linear systems by integrating numerical solutions // *Nonlinear Dyn.* 2019. V. 97. № 3. P. 1895–1910.  
<https://doi.org/10.1007/s11071-018-4729-5>
2. *Abolghasem H.* Liapunov stability versus Jacobi stability // *J. Dyn. Syst. Geom. Theor.* 2012. V. 10. № 1. P. 13–32.  
<https://doi.org/10.1080/1726037X.2012.10698604>
3. *Blaga C., Blaga P., Harko T.* Jacobi and Lyapunov stability analysis of circular geodesics around a spherically symmetric dilation black hole // *Symmetry.* 2023. V. 15. № 2. 329. P. 1–23.  
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.07678>
4. *Böhmer C.G., Harko T., Sabau S.V.* Jacobi stability analysis of dynamical systems – applications in gravitation and cosmology // *Adv. Theor. Math Phys.* 2012. V. 16. № 4. P. 1145–1196.
5. *Punzi R., Wohlfarth M.N.R.* Geometry and stability of dynamical systems // *Physical Review E.* 2009. V. 79. № 4. P. 1–11.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.79.046606>
6. *Harko T., Pantaragpong P., Sabau S.V.* Kosambi–Cartan–Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems // *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 2016. V. 13. № 2. P. 1–24.  
<https://doi.org/10.1142/S0219887816500146>
7. *Munteanu F., Grin A., Musafirov E., et al.* About the Jacobi and stability of a generalized Hopf–Langford system through the Kosambi–Cartan–Chern theory // *Symmetry.* 2023. V. 15. № 2. 598. P. 1–13.  
<https://doi.org/10.3390/sym15030598>
8. *Yamasaki K., Yajima T.* Kosambi–Karatan–Chern analysis of the nonequilibrium singular point in one-dimensional elementary catastrophe // *Int. J. Bifurcation Chaos.* 2022. V. 32. № 4. P. 1–17.  
<https://doi.org/10.1142/S0218127422500535>
9. *Zhang X.* When Shimizu–Morioka model meets Jacobi stability analysis: detecting chaos // *Int. J. Geom. Methods Mod. Physics.* 2023. V. 20. № 2. 2350023. P. 1–14.  
<https://doi.org/10.1142/S0219887823500330>
10. *Cattani M., Caldas I.L., de Souza S.L., Iarosz K.C.* Deterministic chaos theory: basic concepts // *Rev. Bras. Ensino Fis.* 2017. V. 39. № 1. e1309. P. 1–13.  
<https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0185>
11. *Lorenz E.I.* Deterministic nonperiodic flow // *J. Atmos. Sci.* 1963. V. 20. № 2. P. 130–141.
12. *Stachowiak T., Okada T.* A numerical analysis of chaos in the double pendulum // *Chaos, Solitons & Fractals.* 2006. V. 29. № 2. P. 417–422.  
<https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.08.032>
13. *D'Alessio S.* An analytical, numerical and experimental study of the double pendulum // *Eur. J. Phys.* 2023. V. 44. 015002. P. 1–20.  
<https://doi.org/10.1088/1361-6404/ac986b>
14. *Yao Y.* Numerical study on the influence of initial conditions on quasi-periodic oscillation of double pendulum system // *J. Phys. Conf. Ser.* 2020. V. 1437. 012093. P. 1–8.  
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1437/1/012093>

15. *Oiwa S., Yajima T.* Jacobi stability analysis and chaotic behavior of nonlinear double pendulum // *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 2017. V. 14. № 12. 1750176. P. 1–19.  
<https://doi.org/10.1142/S0219887817501766>
16. *Wang F., Liu T., Kuznetsov N.V., Wei Z.* Jacobi stability analysis and the onset of chaos in a two-degree-of-freedom mechanical system // *Int. J. Bifurcation Chaos.* 2021. V. 31. № 5. 2150075. P. 1–15.  
<https://doi.org/10.1142/S0218127421500759>
17. *Ye K., Hu S.* Inverse eigenvalue problem for tensors // *Communications in Mathematical Sciences.* 2017. V. 15. № 6. P. 1627–1649.  
<https://dx.doi.org/10.4310/CMS.2017.v15.n6.a7>
18. *Hu S., Ye K.* Multiplicities of eigenvalues of tensors // *Communications in Mathematical Sciences.* 2016. V. 14. № 4. P. 1049–1071.  
<https://dx.doi.org/10.4310/CMS.2016.v14.n4.a9>
19. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягода А.Г.* Нелинейные некорректные задачи: монография. М.: Курс, 2017. 400 с.
20. *Benning M., Burger M.* Modern regularization methods for inverse problems // *Acta Numerica.* 2018. V. 27. P. 1–111.  
<https://doi.org/10.1017/S0962492918000016>
21. *Xia Y., Wang L., Yang M.* A fast algorithm for globally solving Tikhonov regularized total least squares problem // *J. Glob. Optim.* 2019. V. 73. № 2. P. 311–330.  
<https://doi.org/10.1007/s10898-018-0719-x>
22. *Li H., Schwab J., Antholzer S., Haltmeier M.* NETT: solving inverse problems with deep neural networks // *Inverse Probl.* 2020. V. 36. № 6. 065005. P. 1–23.  
<https://doi.org/10.1088/1361-6420/ab6d57>
23. *Torres R.H., Campos Velho H.F., da Luz E.F.P.* Enhancement of the Multi–Particle Collision Algorithm by mechanisms derived from the opposition-based optimization // *Selecciones Matemáticas.* 2019. V. 6. № 2. P. 156–177.  
<https://doi.org/10.17268/sel.mat.2019.02.03>
24. *Sulimov V.D., Shkapov P.M., Sulimov A.V.* Jacobi stability and updating parameters of dynamical systems using hybrid algorithms // *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* 2018. V. 468. 012040. P. 1–11.  
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/468/1/012040>
25. *Шкапов П.М., Сулимов А.В., Сулимов В.Д.* Вычислительная диагностика неустойчивых по Якоби динамических систем с использованием гибридных алгоритмов глобальной оптимизации // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2021. № 4 (97). С. 40–56.  
<https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-4-40-56>
26. *Сулимов В.Д., Сулимов А.В., Шкапов П.М.* Программа для ЭВМ, реализующая гибридный алгоритм глобальной недифференцируемой оптимизации QOM-PCALMSI // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022664841. Заявка № 2022663517. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 5 августа 2022.

## JACOBI STABILITY AND RESTORATION OF PARAMETERS OF THE NONLINEAR DOUBLE PENDULUM

P. M. Shkapov<sup>a</sup>, \*, V. D. Sulimov<sup>a</sup>, A. V. Sulimov<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup>*Bauman MSTU, Moscow, Russia*

<sup>b</sup>*Lomonosov MSU, Branch in Sevastopol, Sevastopol, Russia*

\*e-mail: spm@bmstu.ru

**Abstract.** The Jacobi stability analysis of the nonlinear dynamical system on base of Kosambi–Cartan–Chern theory is considered. Geometric description of time evolution of the system is introduced, that makes it possible to determine five geometric invariants. Eigenvalues of the second invariant (the deviation curvature tensor) give an estimate of Jacobi stability of the system. This approach is relevant in applications where it is required to identify the areas of Lyapunov and Jacobi stability simultaneously. For the nonlinear system – the double pendulum – the dependence of the Jacobi stability on initial conditions is investigated. The components of the deviation curvature tensor corresponding to the initial conditions and the eigenvalues of the tensor are defined explicitly. The boundary of the deterministic system transition from regular motion to chaotic one determined by the initial conditions has been found. The formulation of the inverse eigenvalue problem for the deviation curvature tensor associated with the restoration of significant parameters of the system is proposed. The solution of the formulated inverse problem has been obtained with the use of optimization approach. Numerical examples of restoring the system parameters for cases of its regular and chaotic behavior are given.

**Keywords:** nonlinear double pendulum, Jacobi stability, Kosambi–Cartan–Chern theory, geometric invariant, configuration space, restoration of parameters, global optimization

## REFERENCES

1. *Hafstein S.F., Valfells A.* Efficient computation of Lyapunov functions for non-linear systems by integrating numerical solutions // *Nonlinear Dynamics*. 2019. V. 97, № 3. P. 1895–1910. <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4729-5>
2. *Abolghasem H.* Liapunov stability versus Jacobi stability // *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*. 2012. V. 10, № 1. P. 13–32.
3. *Blaga C., Blaga P., Harko T.* Jacobi and Lyapunov stability analysis of circular geodesics around a spherically symmetric dilation black hole // *Symmetry*. 2023. V. 15, № 2, 329. P. 1–23. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.07678>
4. *Böhmer C.G., Harko T., Sabau S.V.* Jacobi stability analysis of dynamical systems – applications in gravitation and cosmology // *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 2012. V. 16, № 4. P. 1145–1196.
5. *Punzi R., Wohlfarth M.N.R.* Geometry and stability of dynamical systems // *Physical Review E*. 2009. V. 79, № 4. 046606. P. 1–11.
6. *Harko T., Pantaragpong P., Sabau S.V.* Kosambi–Cartan–Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. 2016. V. 13, № 2. 1656014. P. 1–24.

7. *Munteanu F., Grin A., Musafirov E., et al.* About the Jacobi and stability of a generalized Hopf–Langford system through the Kosambi–Cartan–Chern theory // *Symmetry*. 2023. V. 15, № 2, 598. P. 1–13.  
<https://doi.org/10.3390/sym15030598>
8. *Yamasaki K., Yajima T.* Kosambi – Karatan – Chern analysis of the nonequilibrium singular point in one-dimensional elementary catastrophe // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2022. V. 32. № 4. 2250053. P. 1–17.  
<https://doi.org/10.1142/S021812742250016X>
9. *Zhang X. When Shimizu–Morioka model meets Jacobi stability analysis: detecting chaos* // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. 2023. V. 20. № 2. 2350023. P. 1–14.  
<https://doi.org/10.1142/S0219887823500330>
10. *Cattani M., Caldas I.L., de Souza S.L., Iarosz K.C.* Deterministic chaos theory: basic concepts // *Revista Brasileira de Ensino de Fisica*. 2017. V. 39. № 1. e1309. P. 1–13.
11. *Lorenz E.I.* Deterministic nonperiodic flow // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1963. V. 20. № 2. P. 130–141.
12. *Stachowiak T., Okada T.* A numerical analysis of chaos in the double pendulum // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2006. V. 29. № 3. P. 417–422.
13. *D'Alessio S.* An analytical, numerical and experimental study of the double pendulum // *European Journal of Physics*. 2023. V. 44. 015002. P. 1–20.  
<https://doi.org/10.1088/1361-6404/ac986b>
14. *Yao Y.* Numerical study on the influence of initial conditions on quasi-periodic oscillation of double pendulum system // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. V. 1437. 012093. P. 1–8.  
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1437/1/012093>
15. *Oiwa S., Yajima T.* Jacobi stability analysis and chaotic behavior of nonlinear double pendulum // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. 2017. V. 14. № 12. 1750176. P. 1–19.  
<https://doi.org/10.1142/S0219887817501766>
16. *Wang F., Liu T., Kuznetsov N.V., Wei Z.* Jacobi stability analysis and the onset of chaos in a two-degree-of-freedom mechanical system // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2021. V. 31. № 05. 2150075. P. 1–15.  
<https://doi.org/10.1142/S0218127421500759>
17. *Ye K., Hu S.* Inverse eigenvalue problem for tensors // *Communications in Mathematical Sciences*. 2017. V. 15. № 6. P. 1627–1649.
18. *Hu S., Ye K.* Multiplicities of eigenvalues of tensors // *Communications in Mathematical Sciences*. 2016. V. 14, № 4. P. 1049–1071.
19. Нелинейные некорректные задачи: монография / А.Н. Тихонов, А.С. Леонов, А.Г. Ягола. – М.: КУРС, 2017. – 400 с.
20. *Benning M., Burger M.* Modern regularization methods for inverse problems // *Acta Numerica*. 2018. V. 27. P. 1–111.
21. *Xia Y., Wang L., Yang M.* A fast algorithm for globally solving Tikhonov regularized total least squares problem // *Journal of Global Optimization*. 2019. V. 73. № 2. P. 311–330.
22. *Li H., Schwab J., Antholzer S., Haltmeier M.* NETT: solving inverse problems with deep neural networks // *Inverse Problems*. 2020. V. 36. № 6. 065005. P. 1–23.  
<https://doi.org/10.1088/1361-6420/ab6d57>
23. *Torres R.H., Campos Velho H.F., da Luz E.F.P.* Enhancement of the Multi–Particle Collision Algorithm by mechanisms derived from the opposition-based optimization // *Selecciones Matemáticas*. 2019. V. 06 (2). P. 156–177.  
<https://doi.org/10.17268/sel.mat.2019.02.03>
24. *Sulimov V.D., Shkapov P.M., Sulimov A.V.* Jacobi stability and updating parameters of dynamical systems using hybrid algorithms // *IOP Conference Series: Material Science and Engineering*. 2018. V. 468. 012040. P 1–11..  
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/468/1/012040>

25. *Shkapov P.M., Sulimov A.V., Sulimov V.D.* Computational diagnostics of Jacobi unstable dynamical systems with the use of hybrid algorithms of global optimization // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences. 2021. № 4 (97). P. 40–56. <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-4-40-56>
26. *Sulimov V.D., Sulimov A.V., Shkapov P.M.* Programma dlya EVM, realizuyuschaya gibriddenyi algoritm globalnoy nedifferentsiruemoy optimizatsii QOM-PCALMSI // Svidetelstvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 2022664841. Zayavka № 2022663517. Data gosudarstvennoy registratsii v Reestre program dlya EVM 05 avgusta 2022.