

Известия

ISSN 0572-3299

Российской академии наук

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА



НАУКА
— 1727 —

2024

1

СОДЕРЖАНИЕ

Моделирование изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове на упругих пленках <i>В. М. Козин</i>	3
Пространственная дисперсия акустических волн в функционально-градиентных стержнях <i>А. И. Каракозова</i>	23
Совершенствование метода фазовой плоскости для исследования влияния эффекта “бифуркационной памяти” на динамику корабля <i>А. В. Чернышов, С. А. Чернышова</i>	38
Кватернионная регуляризация дифференциальных уравнений возмущенного центрального движения и регулярные модели орбитального (траекторного) движения: обзор и анализ моделей, их приложение <i>Ю. Н. Челноков</i>	48
О наихудшем возмущении осциллятора с квадратичным демпфированием внешней силой с заданным интегралом <i>Н. Н. Болотник, В. А. Корнеев</i>	96
Ветвление форм равновесия кольцевой микропластинки в электростатическом поле двух электродов <i>Н. Ф. Морозов, А. В. Лукин, И. А. Попов</i>	110
Структурная модель пространственно и плоско армированной среды из жесткопластических анизотропных материалов с разными пределами текучести при растяжении и сжатии <i>А. П. Янковский</i>	133
Исследование влияния радиационного облучения на размер зерен и механические свойства тонкопленочного алюминия <i>Н. А. Дюжев, Е. Э. Гусев, Е. О. Портнова, М. А. Махиборода</i>	158
Влияние капиллярной адгезии на скольжение цилиндра по поверхности упругого тела с учетом гистерезиса смачивания <i>Ю. Ю. Маховская</i>	168
О равновесиях тяжелого обруча, подвешенного на гвозде <i>А. А. Буров, В. И. Никонов</i>	185
Кватернионное решение задачи оптимального управления ориентацией твердого тела (космического аппарата) с комбинированным критерием качества <i>М. В. Левский</i>	197

Хрупкое разрушение упругого слоя с дефектом в виде окружности при его двухосном нагружении <i>В. В. Глаголев, А. А. Маркин</i>	223
Два способа управления сферическим роботом маятникового типа на подвижной платформе в задаче преследования <i>Е. А. Микишанина</i>	230
Влияние формы пор и начального напряженного состояния на электроупругие свойства пористой пьезокерамики PZT-4 <i>А. А. Паньков</i>	248
Моделирование динамики экзоскелета системой трех звеньев переменной длины с регулируемой жесткостью <i>А. О. Блинов, А. В. Борисов, Р. Г. Мухарлямов, М. А. Новикова</i>	268
К 100-летию со дня рождения Э.И. Григолоука	285
Федор Николаевич Шклярчук (22.01.1935–29.07.2023)	286

УДК 624.124

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ЛЕДЯНОМ ПОКРОВЕ НА УПРУГИХ ПЛЕНКАХ

© 2024 г. В. М. Козин^{а,*}

^а*Институт машиноведения и металлургии Хабаровского Федерального
исследовательского центра Дальневосточного отделения Российской
академии наук, Комсомольск-на-Амуре, Россия*

^{*}*e-mail: kozinvictor@rambler.ru*

Поступила в редакцию 20.01.2023 г.

После доработки 31.03.2023 г.

Принята к публикации 02.04.2023 г.

Отмечено, что на основании наблюдений за колебаниями ледяного покрова в натурных условиях под действием движущихся нагрузок, т.е. при возбуждении изгибно-гравитационных волн (ИГВ), последний ведет себя аналогично упругой изотропной пластине. На этом основании предложено новое направление в моделировании некоторых задач деформирования ледяного покрова ИГВ на упругих пленках в обычных опытовых бассейнах. Возможность такой технологии подтверждена результатами сопоставления записей деформирования движущимися нагрузками упругого модельного слоя и натурального ледяного покрова. На основании теории подобия и размерностей получены зависимости для пересчета данных модельных испытаний на натуру. Отмечается, что затраты на проведение подобных модельных экспериментов несоизмеримо меньше с затратами при проведении опытов в ледовых бассейнах. Перечисляются ледотехнические задачи, при решении которых может быть использована разработанная методика моделирования ИГВ.

Ключевые слова: ледяной покров; упругие пленки; критерии подобия; моделирование; изгибно-гравитационные волны

DOI: 10.31857/S1026351924010017, EDN: WBBHFY

1. Введение. Теоретические исследования динамики ледяного покрова пока еще не позволяют ответить на многие практические задачи ледотехники. Опыты в ледовых бассейнах и тем более исследования поведения ледяного покрова в натурных условиях под действием различных динамических нагрузок весьма трудоемки и энергозатратны. Нестабильность во времени и многообразие свойств ледяного покрова, зависимость их от погодных и ледовых условий, влияние на них различных факторов, таких как: наличие снежного покрова и подледного течения; глубина акватории, ее переменность и рельеф дна; внутренняя напряженность льда, возникающая вследствие колебаний

уровня воды в водоеме, ветро-волновых нагрузок, дрейфа и подвижек ледяных полей; история ледостава и пр. создают дополнительные трудности в получении достоверных результатов. Уменьшить трудоемкость подобных экспериментальных исследований в полевых условиях на естественном льду вышеперечисленных и других задач, обеспечить стабильность свойств объекта исследований, получить устойчивые результаты и, тем самым, существенно облегчить достижение стоящих перед экспериментаторами целей, а также повысить энергоэффективность исследований, оценить целесообразность и уровень перспективности полученных решений некоторых ледотехнических задач предлагается с помощью разработанной методики проведения модельного эксперимента в обычных (неледовых) опытовых бассейнах.

2. Краткий обзор известных методик моделирования ледяного покрова в ледовых бассейнах. Метод модельных испытаний для изучения ледовой ходкости судов впервые был предложен Л.М. Ногидом [1]. В.В. Лавров разработал способ получения в лабораторных условиях однородного льда пониженной прочности [2]. Выполненные на его основании И.И. Позняком и В.В. Лавровым испытания моделей судов в моделированном льду показали перспективность нового метода исследования ледовой ходкости судов, а с учетом теоретических обоснований Ю.А. Шиманского была доказана необходимость создания теоретических основ модельного эксперимента и специальной лабораторной базы. На этом основании в 1955 г. в СССР в Ленинграде (на Фонтанке) в институте Арктики и Антарктики (ААНИИ) был создан первый в мире опытовый ледовый бассейн. Положительный опыт его создания и эксплуатации привел к строительству подобных бассейнов во многих странах (Германии, США, Финляндии, Японии, Канаде, Великобритании, Норвегии, Китае и др.). В настоящее время в мире построено и функционирует около 30 ледовых бассейнов, характеристики наиболее крупных из них приведены в работах [2, 3].

Заслуживает внимания и опыт создания ледовых бассейнов в зимние периоды на поверхности естественных водоемов (рек и озер), когда для намораживания льда на их поверхности использовались отрицательные атмосферные температуры. Впервые подобная технология была использована при выполнении научно-исследовательских работ в Институте машиноведения и металлургии ДВО РАН (г. Комсомольск-на-Амуре) и Приамурском государственном университете им. Шолом-Алейхема (г. Биробиджан) [4, 5]. Они представляли собой ледовые каналы размерами $L \times B = 8.0 \times 3.0$ м, выпиливаемые в ледяном покрове толщиной 1.1 м озера Хорпи при глубине 2.8 м в районе г. Комсомольск-на-Амуре (рис. 1) [6] и во льду толщиной 0.8 м при глубине 2.2 м озера Клименкино (ЕАО) в районе п. Бира (рис. 2) [5].

Эксперименты с использованием природного холода также проводились в ледовых бассейнах Комсомольского-на-Амуре политехнического института (рис. 3) [4], Горьковского политехнического института (рис. 4) [4], а также в ледовом бассейне Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема (рис. 5) [7], созданного на площадях его учебных аудиторий [8] и поэтому являющимся уникальным среди известных подобных объектов. При использовании естественных низких температур для намораживания модельного слоя льда в подобных ледовых бассейнах пересчет моделируемых параметров на натуру проводился по методикам работ [2, 9].



Рис. 1. Ледовый бассейн на льду оз. Хорпи в районе г. Комсомольск-на-Амуре [6].

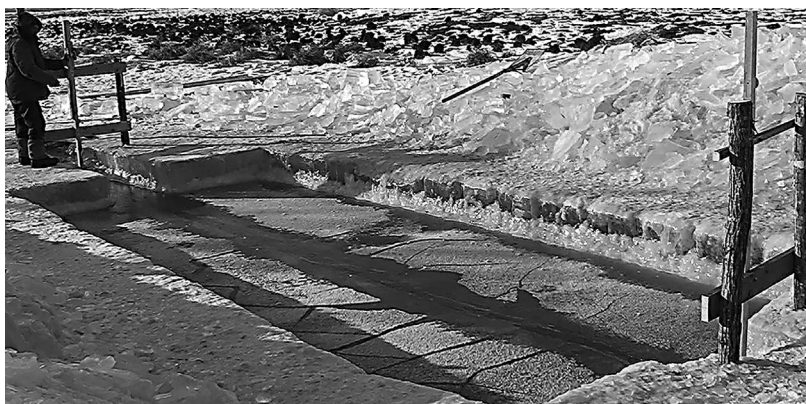


Рис. 2. Опыты по разрушению ледяного покрова с разводом от движения модели подводного судна с резонансной скоростью [5].

В первом в мире ледовом бассейне (бассейне ААНИИ) использовалась методика приготовления модельного эксперимента, разработанная Ю.А. Шиманским, Л.М. Ногидом, И.И. Позняком и В.И. Каштеляном. Ее суть заключалась в получении модельного льда за счет изменения концентрации соли в водном растворе и температуры намораживания льда [10]. Е. Enkvist для обеспечения равенства коэффициентов трения льда в модельных и натуральных условиях предложил наносить на корпус модели судна соответствующее покрытие [11]. J. Schwarz для выполнения условия Коши предложил использовать “подогрев” модельного льда за счет повышения температуры воздуха над его поверхностью [12]. Более



Рис. 3. Приготовление модельного льда в ледовом бассейне.

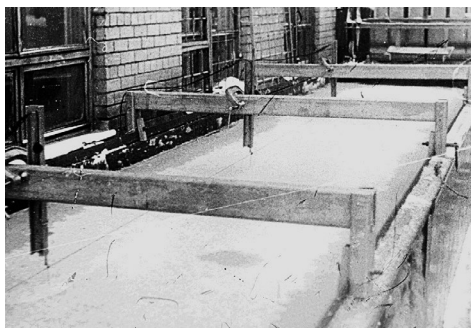


Рис. 4. Приготовление композитной модели льда.



Рис. 5. Фрагмент разрушения сплошного ледяного покрова при движении модели подводного судна со скоростью $Fg = 0.42$ [7].

лучший результат в этом направлении был достигнут Н. Kaitagawa в результате быстрого нагрева воздуха в бассейне и усиленной вентиляции [13]. G.W. Timco рекомендовал для получения в ледовом бассейне лабораторного льда использовать водный раствор карбамида, а прочность льда на изгиб менять путем изменения температуры воздуха над поверхностью льда, а не концентрации вещества в бассейне [14, 15]. Его исследования, направленные на дальнейшее совершенствование физико-механических характеристик лабораторного льда, привели к разработке карбамидного льда нового состава, получившего название EG/AD/S-ice [16]. Его свойства были всесторонне исследованы в Iwate Universiti (Япония) [17], Institute for Marin Dynamics (Канада) [18], US Army CRREL (США) [19], Technical Research Centre (Финляндия) [20] и Ship Research Institute (Япония) [21]. Такая технология приготовления модельного льда или ее модификации используются в ряде ледовых бассейнов мира [2]. Е. Enkvist [22] и А. Nortala-Noikkanen [23] разработали новый способ приготовления высокозернистого льда, основанного на создании слоев льда с различными свойствами за счет варьирования количества компонентов в распыляемом над поверхностью

льда водном растворе. Такая технология применяется при исследованиях взаимодействия судов и инженерных сооружений со льдом в ледовом бассейне Крыловского государственного научного центра (Санкт-Петербург) [2]. В начале 80-х годов в Горьковском политехническом институте (ныне Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева) под руководством проф. В.А. Зуева возникло новое направление в теории и практике модельного эксперимента в ледовом бассейне, которое развивали Е.М. Грамузов, Б.П. Ионов, Ю.А. Двойченко, В.Б. Беляков и др. [24–26]. В его основе в качестве базовой характеристики льда, отвечающей ряду требований [2], была принята работа на его разрушение. С учетом этого были разработаны критерии подобия и технология приготовления лабораторного льда. Метод показал хорошую сходимость результатов модельного эксперимента с натурными данными и его независимость от масштаба модели [2]. Аналогичный результат был получен при сопоставлении данных экспериментов с моделями подводных судов, полученных в ледовых бассейнах [5–7], с результатами теоретических расчетов для соответствующих ледовых условий. Следует отметить, что толщина намораживаемого льда в этих опытах составляла 1.5–2.0 мм, поэтому в последующих расчетах размеры зеркала в месте замеров деформаций и глубину бассейнов позволяли считать их бесконечными.

Наряду с методами моделирования взаимодействия судов и инженерных сооружений со льдом в ледовых бассейнах выполнены работы по созданию синтетического льда. Так, В. Michel разработал синтетический лед [28], технология приготовления которого состоит в поочередном нанесении на поверхность воды смеси из пяти элементов: пластикового полиэтиленового порошка; пластиковых полиэтиленовых шариков; тяжелого растительного масла; легкого растительного масла и стеариновой кислоты с последующим затвердеванием этой смеси. Такой лабораторный лед обеспечивал моделирование его плотности, прочности на изгиб и модуля деформации при обеспечении стабильности физико-механических свойств в течение трех суток и возможность его использовать при комнатной температуре. В 1970–1989 гг. в Канаде было построено четыре бассейна, в которых этот лед использовался для моделирования исследований взаимодействия инженерных сооружений с ледяным покровом. В 90-х годах в компании “Fleet Technoplogi Ltd. of Canada” был разработан новый тип гибридного льда [29], который производится путем внедрения пластиковых шариков на поверхность EG/AD/S раствора и последующего замораживания полученного состава. Отмечается, что использование этого типа льда в большом бассейне требует применения сложного и дорогостоящего оборудования для внесения и распределения по поверхности раствора пластиковых шариков перед замораживанием, что ставит под вопрос перспективность использования такой технологии [2]. Для облегчения процесса равномерного распределения шариков может использоваться разработанный автором статьи способ приготовления подобного модельного льда [30].

3. Целесообразность разработки методики моделирования ИГВ в ледяном покрове на упругих пленках. Проведенный обзор известных методик моделирования ледяного покрова в ледовых бассейнах и выполненные на их основе исследования показывают актуальность, практическую значимость и все

возрастающий интерес к этой проблеме. Объяснить это довольно просто: более 70% мировых запасов углеводородов находятся на дне замерзающих акваторий, для разработки и добычи которых придется ее решать. Использование традиционных технологий в этом направлении (строительство дорогостоящих опытовых ледовых бассейнов с использованием непростых способов получения модельного льда и пр.) требует значительных затрат на их реализацию. Такой подход в большинстве случаев вполне оправдан, т.к. процесс механического разрушения ледяного покрова любым известным ледоразрушающим средством довольно сложный и энергоемкий. Так, при прокладке ледоколом канала в сплошном льду его энергия затрачивается на: изгиб бесконечной ледяной пластины; сопротивление ломке, обусловленное разрушением льда форштевнем и бортами судна; интенсивное трещинообразование во льду; преодоление сопротивления, обусловленного потерями энергии при соударениях корпуса ледокола со льдом; раскрытие магистральных трещин с последующим образованием обломков льда; поворот и притапливание обломков, сопровождающиеся возникновением присоединенных масс воды, что требует дополнительных энергозатрат; раздвигание обломков льда; преодоление сил трения между корпусом судна, обломками льда и снежным покровом; смятие острых и неровных кромок канала; преодоление сопротивления воды; дробление обломков льда бортами судна; фрезерование льда, попадающего в диски гребных винтов; изменение посадки судна (возникновение крена и дифферента) при его напоздании на кромку льда; преодоление сил трения, возникающих из-за налипания на смоченную судовую поверхность раздробленного льда и мокрого снега; буксировку носовой оконечностью обломков льда при работе ледокола “набегами” и пр.

Вместе с тем существует ряд практически важных ледотехнических задач, при решении которых можно не учитывать большинство вышеперечисленных энергозатрат, например, когда ставятся задачи по сохранению несущей способности ледяного покрова, его упругого деформирования (в области работы закона Гука), когда нет механического контакта технических средств со льдом и пр. К ним можно отнести: разрушение ледяного покрова и заторов резонансными изгибно-гравитационными волнами (ИГВ); определение безопасных режимов эксплуатации ледяных переправ; рекомендации по использованию ледяного покрова в качестве взлетно-посадочных полос; оптимизация технологии проведения взрывных работ с использованием энергии ИГВ, возбуждаемых при их выполнении; всплытие подводных судов в сплошном льду при его разрушении резонансными ИГВ (бесконтактным методом) [32, 33] и пр.

К аналогичным задачам можно отнести исследования возможностей начинающегося использоваться открытого сравнительно недавно резонансного метода разрушения льда, реализуемого судами на воздушной подушке (СВП) (рис. 6) [34–36]. Для этого следует изучить влияние на них различных факторов, таких как: ширина акватории; близость береговой кромки к месту выполнения ледокольных работ и ее форма; наличие во льду локальных неоднородностей в виде майн, свободных кромок льда или сквозных раскрытых трещин и разводий; затороженность льда и ориентация гряды торосов по отношению к направлению движения судна; наличие подводных островов, приводящих

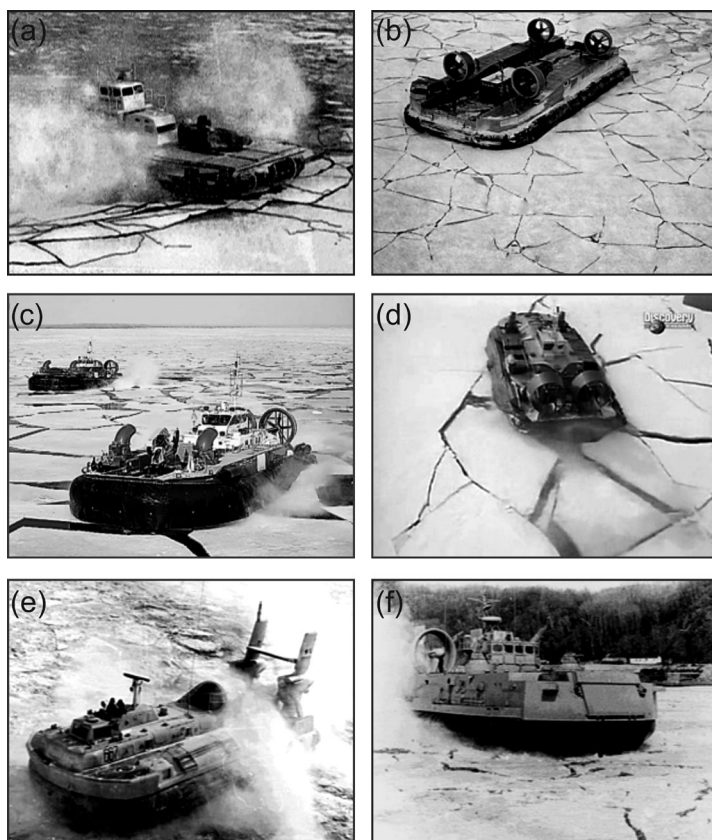


Рис. 6. Примеры использования резонансного метода разрушения ледяного покрова СВП: (a) – “Вояжер”; (b) – “Ларус”; (c) – “ВНТ”; (d) – каналскими судами; (e) – “Скат”; (f) – “Мурена”.

к возникновению гидроударов при разрушении льда гидродинамическими нагрузками; интерференция и дифракция возбуждаемых ИГВ при разрушении ледяного покрова резонансным методом; режимы нагружения льда динамическими нагрузками; трансформация параметров ИГВ, возбуждаемых движущимися нагрузками с их выходом со льда на берег и последующим сходом с него; гидрология русла водоема и пр.

Очевидно, что при решении подобных задач, когда не обязательно использовать модель разрушаемого льда, т.е. при деформировании льда в пределах работы закона Гука, можно использовать модель неразрушаемого льда в виде упругих пленок. Такое заключение было сделано нами на основании результатов наблюдений за поведением ледяного покрова в натурных условиях А.Д. Сытинского, В.П. Трипольникова [37] и В.Н. Смирнова [38, 39]. В своих работах авторы отмечали, что при воздействии на лед движущихся нагрузок, т.е. при возбуждении ИГВ, а также при ветро-волновых и кратковременных нагрузках, последний ведет себя аналогично упругой изотропной пластине. На этом

основании и было предложено новое направление в моделировании некоторых задач деформирования ледяного покрова, например ИГВ, на упругих пленках в обычных опытовых бассейнах. Очевидно, что затраты на проведение подобных модельных экспериментов несоизмеримо меньше с затратами при проведении опытов в ледовых бассейнах, представляющих собой огромные морозильные камеры с использованием сложных технологий приготовления лабораторного льда.

В некоторых более сложных случаях, когда моделирование деформирования ледяного покрова на упругих пленках не позволяет полностью ответить на все вопросы, а также, например, при исследовании перспективности новых решений в области ледотехники, полученные на упругих пленках результаты могут рассматриваться как предварительные, а затем при необходимости — более детально анализироваться в ледовых бассейнах с использованием известных моделей разрушаемого льда. Очевидно, что такой комбинированный подход также уменьшит трудоемкость исследований.

4. Обоснование возможности моделирования ИГВ в ледяном покрове на упругих пленках. Для подтверждения возможности моделирования ИГВ в ледяном покрове на упругих пленках было проведено сопоставление картин деформаций натурного льда и модельного слоя в виде упругой пленки от движущихся нагрузок. С этой целью в опытовом бассейне Комсомольского-на-Амуре государственного университета размерами $L \times B \times T = 45.0 \times 4.2 \times 3.1$ м было изготовлено модельное поле из упругого полимерного материала размерами $L \times B = 10.5 \times 3.5$ м и толщиной 1 мм (рис. 7). В качестве движущейся нагрузки использовалась модель подводного судна, изготовленная в масштабе 1 : 200 на основе теоретического чертежа обобщенного типа современной атомной

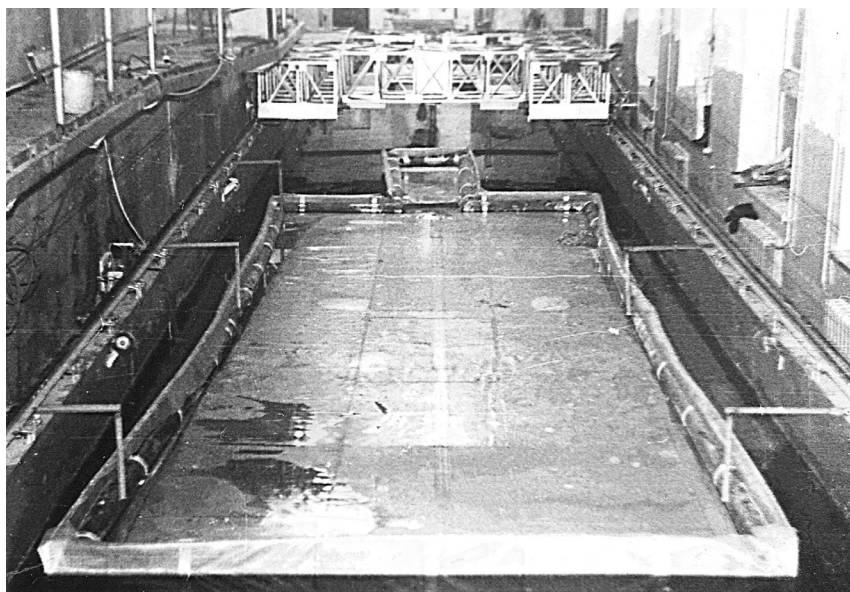


Рис. 7. Общий вид модели сплошного ледяного покрова из упругого полимерного материала [4].

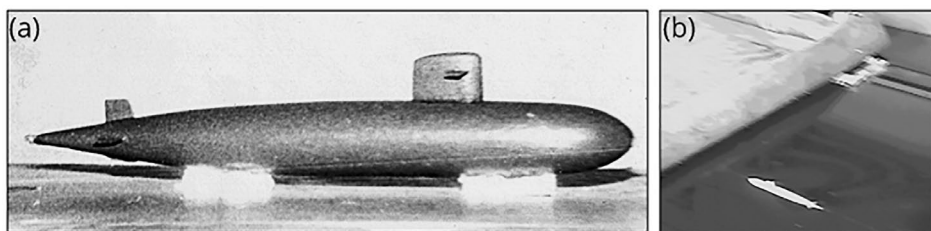


Рис. 8. (a) — общий вид использованной модели; (b) — момент “заныривания” модели подводного судна под кромку модельного льда.

подводной лодки, разработанного в соответствии с рекомендациями работы [49] (при водоизмещении натурального судна 6000 т длина модели составила 60.0 см) (рис. 8).

Записи деформаций модельного льда при движении модели подводного судна (рис. 9, б,с) осуществлялись с помощью бесконтактных датчиков (рис. 12, б), которые затем сравнивались с результатами известных натурных экспериментов (рис. 9, а), полученных в [41] при стационарном движении снегохода массой 335 кг по ледяному покрову толщиной 16 см с различными скоростями. При этом автор выделил и охарактеризовал следующие режимы: 1 — $v < 0.6 c_{\min}$ (где $c_{\min}$ — минимальная скорость распространения ИГВ, соответствующая минимуму фазовой скорости на дисперсионной кривой и являющаяся резонансной скоростью ИГВ в сплошном льду V_p [45]), когда деформации льда подобны квазистатическим; 2 — при $0.6 c_{\min} < v < 0.85 c_{\min}$ наступает ранний переходный режим, в течение которого кривизна прогиба льда увеличивается; 3 — позднему переходному режиму соответствуют скорости движения нагрузки $0.85 c_{\min} < v < c_{\min}$, когда появляются две волновые системы впереди и позади источника, при этом максимум впадины отстает от источника; 4 — при $c_{\min} < v < (gH)^{1/2}$ (где H — глубина воды) имеет место двухволновой режим с относительно короткими впереди идущими волнами (изгибными) и более длинными волнами позади источника (гравитационными); 5 — когда скорость источника соответствует $v > (gH)^{1/2}$, наступает “псевдобезнагрузочный” режим, позади идущая волна исчезает, а остается только более короткая впереди бегущая волна.

Для сопоставления этих данных с результатами выполненных модельных экспериментов при разных масштабах моделирования [3, 6] были выбраны наиболее близкие к указанным режимам случаи буксировки модели.

В этом разделе также уместно привести результаты крупной серии полевых испытаний по проекту Kiwi 131 [50], который был реализован на морском льду вблизи острова Тент-Айленд в проливе Макмердо (Канада). Глубина акватории составляла от 350 до 450 м при толщине льда 1.6 м. В качестве движущейся нагрузки использовался грузовой автомобиль массой 2100 кг. Вдоль ледяной дороги протяженностью 6 км с помощью блоков тензодатчиков измерялись максимальные нормальные изгибные напряжения во льду при изменении скорости автомобиля в диапазоне от 4.5 до 27.0 м/с. Очевидно, что характер изменения напряжений соответствует профилю возбуждаемых ИГВ. Примеры записей тензодатчиков приведены на рис. 10.

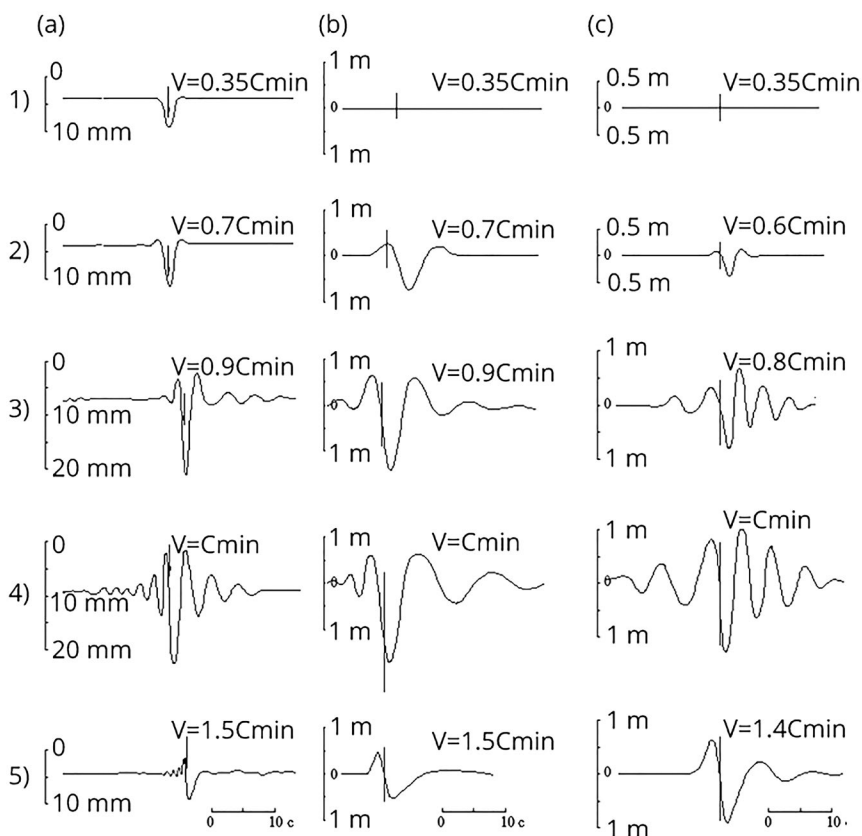


Рис. 9. Профили ИГВ от движения нагрузок: (а) – данные натурных экспериментов [41]; (б) – модельные данные по работе [6]; (с) – модельные данные по работе [3].

В результате, как видно из рис. 9, рис. 10 и рис. 11, с наблюдается качественное соответствие результатов натурных наблюдений модельным данным. Следует отметить, что на это соответствие не влияют масштабы моделирования (кривые на рис. 9, б получены при масштабе 1 : 200, а кривые на рис. 9, с – при масштабе 1 : 500) и место расположения движущейся нагрузки относительно поверхности льда (надо льдом или под ним).

На основании этого сделано заключение, что для моделирования ИГВ в ледяном покрове могут быть использованы упругие пленки. После чего встал вопрос о получении критериев подобия при моделировании ИГВ в ледяном покрове на упругих пленках, т.е. обеспечения условий, выполнение которых позволяет пересчитать моделируемые параметры с модели на натуру.

5. Условия моделирования параметров ИГВ. Способы проведения модельного эксперимента и условия подобия при моделировании ИГВ в ледяном покрове на упругих пленках пока не рассматривались [4]. Для их получения рассмотрим упругие колебания ледяного покрова от действия движущейся с постоянной

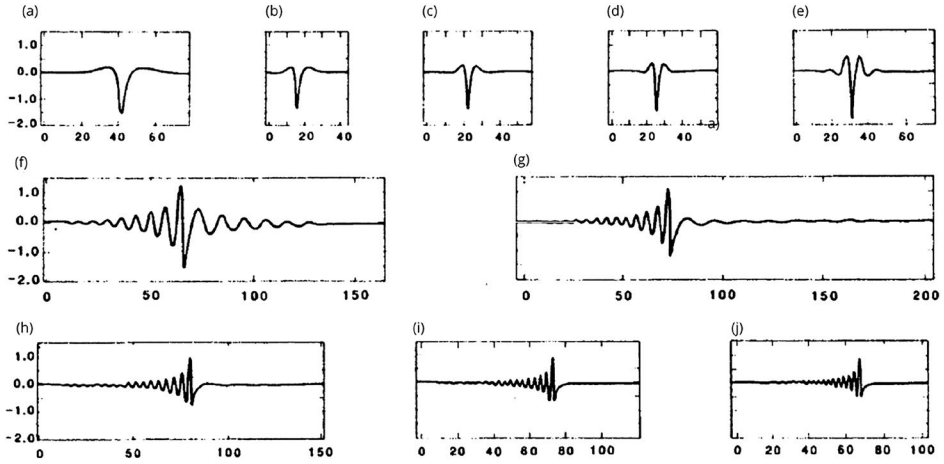


Рис. 10. Показания тензодатчиков для различной скорости (м/с) движения нагрузки: (a) – 4.5; (b) – 8.9; (c) – 13.8; (d) – 15.7; (e) – 17.5; (f) – 18.4; (g) – 20.8; (h) – 23.2; (i) – 25.8; (j) – 27.0 [50].

скоростью v сосредоточенной силы P . Ограничиваясь малыми изгибными колебаниями ледяного покрова, дифференциальное уравнение изгиба ледяной пластины можно записать в виде [42]:

$$D\nabla^4 w + \rho_L h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_v g w + \rho_v \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{z=0} = P \delta(x - vt; y - 0), \quad (5.1)$$

где $D = Eh^3 / 12(1 - \mu^2)$ – цилиндрическая жесткость ледяной пластины; E – модуль упругости льда; μ – коэффициент Пуассона; Φ – потенциал движения жидкости, удовлетворяющий уравнению Лапласа во всем объеме воды и условиям непроницаемости на дне бассейна; g – ускорение силы тяжести; h – толщина ледяного покрова; P – внешняя нагрузка; w – прогиб льда; ∇ – дифференциальный оператор набла; δ – дельта-функция Дирака; ρ_v, ρ_l – плотность воды и льда.

Приводя уравнение (5.1) к безразмерному виду и используя известные теоремы подобия [43, 44, 45], получаем для моделирования следующие условия:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_L}{\rho_v} = idem \quad \frac{\sigma}{E} = idem \quad \mu = idem \\ T \left(\frac{\rho_v g^5}{D} \right)^{1/8} = idem \quad \frac{P}{w \sqrt{\rho_v g D}} = idem \\ \frac{v}{\sqrt{gH}} = idem \quad \frac{\rho_v v^2}{E} = idem, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где *idem* означает соответствие (выполнение) соотношений для модельных и натуральных условий, σ — напряжения в ледяном покрове; T — характерный промежуток времени; H — глубина воды.

Поскольку модельный материал, имитирующий ледяную пластину упругими пленками, по физико-механическим свойствам может существенно отличаться от свойств естественного натурального льда и их нельзя изменить, введем обозначения:

$$\beta = \frac{E_n}{E_m}, \quad \gamma = \frac{\rho_n}{\rho_m}. \quad (5.3)$$

Для большинства материалов $\mu < 0,5$ т.е. μ^2 значительно меньше единицы. Поэтому изменение μ сравнительно слабо сказывается на величине D и даже значительные отклонения от равенства $\mu_n = \mu_m$ не могут существенно отразиться на подобии элементов изгиба [45]. Таким образом, строгое выполнение равенства коэффициентов Пуассона при моделировании необязательно.

Из условий (5.2) следует, что в качестве временного масштаба следует принимать величину $(D/\rho_v g^5)^{1/8}$, а в качестве линейного — $(D/\rho_v g)^{1/4}$, которая совпадает с параметром упругого основания плавающей ледяной пластины и характеризует поперечный размер чаши статического прогиба льда. Действие нагрузки, движущейся со скоростью v , будет характеризоваться отношением $X = v/\sqrt{gH}$, — формально совпадающим с критерием Фруда, моделирующим постоянство отношения инерционных сил к силам тяжести. Условие $\rho_L v^2 / E = Ch$ (критерий Коши) характеризует динамические явления в изотропных упругих телах и с физической точки зрения выражает постоянство отношения сил динамического характера (сил инерции) к восстанавливающим силам упругости [45].

Поскольку в формировании ИГВ участвуют силы тяжести, упругости и инерционные силы, то при моделировании процесса распространения волн необходимо одновременно выполнение условий F_r и Ch [45]. Это требование выполняется при $\beta = L_n/L_m$ (где L — характерный линейный размер; индексы “н” и “м” соответствуют натуре и модели), т.е. выбранный для моделирования ледяной пластины материал однозначно определяет модуль геометрического подобия, что исключает возможность его изменения. Данное заключение принципиально отличает возможность моделирования поведения льда на упругих пленках от его моделирования в ледовых бассейнах.

Учитывая введенные обозначения и безразмерные соотношения (5.2), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{P_n}{P_m} &= \beta^3 & \frac{V_n}{V_m} &= \beta^{1/2} \gamma^{-1/2} & \frac{T_n}{T_m} &= \beta^{1/2} \\ \frac{H_n}{H_m} &= \beta \gamma^{-1} & \frac{h_n}{h_m} &= \frac{w_n}{w_m} = \frac{L_n}{L_m} = \frac{\lambda_n}{\lambda_m} = \beta. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Полученные зависимости и являются формулами пересчета моделируемых параметров на натуру, т.е. основой методики моделирования ИГВ на упругих пленках.

6. Проверка работоспособности разработанной методики моделирования ИГВ.

С этой целью модельные эксперименты по моделированию ИГВ на упругих пленках также проводились в опытовом бассейне Амурского гуманитарно-педагогического государственного университета, размеры которого составляли $L \times B \times H = 5.0 \times 1.8 \times 0.6$ м [32]. В качестве модельного льда использовалась листовая резина толщиной 2 мм и плотностью 2300 кг/м^3 . Значение ее модуля упругости определялось из испытаний на растяжение на специально изготовленном стенде [4] при скоростях нагружения, соответствующих скоростям распространения резонансных ИГВ. Его среднее значение составило $E_m = 10 \text{ МПа}$, что, в соответствии с (3), обеспечивало проведение модельных экспериментов в масштабе $1 : 500$, т.к. наиболее вероятное значение модуля упругости для льда было принято $E_N = 5 \text{ ГПа}$ и $\rho_L = 920 \text{ кг/м}^3$ [47]. Таким образом, моделировался ледяной покров толщиной 1 м.

Для обеспечения положительной плавучести пластины (плотность резины больше плотности воды) под нее укладывалась тонкая полиэтиленовая пленка толщиной 15 мкм, при этом края пластины по всему периметру оставались свободными (рис. 11,а). В качестве движущихся нагрузок (источников ИГВ) использовались катящийся ролик массой 110 г (рис. 12) и модель подводного судна, длина которой в соответствии с масштабом моделирования ($1 : 500$) составила 24 см (рис. 11,д). По результатам опытов с катящимся роликом сравнивался общий характер деформаций модельного и натурального льда.

Запись профиля возбуждаемых ИГВ осуществлялась с помощью программы SCRViewer (V 1.0.4), которая позволяет конвертировать полученные данные в пакет Excel для более удобной и простой обработки результатов. Результаты этих записей для модели судна представлены на рис. 9,с, а фрагмент такой записи для ролика – на рис. 11,с.

Для записи колебаний модельного слоя использовался инфракрасный бесконтактный преобразователь линейных перемещений SG732, принцип действия которого основан на оптической триангуляции с цифровой обработкой с помощью микроконтроллера и передачей величины перемещения по последовательному каналу RS-485 на компьютер через USB-порт (рис. 11,с). В качестве оптического модуля использовался инфракрасный излучающий диод и позиционно-чувствительный детектор (рис. 11,б).

Интересующий диапазон изменения скоростей, определяемый толщиной слоя воды, выбирался с учетом размеров бассейна так, чтобы сделать минимальным влияние отраженных волн на волновую систему около движущегося груза.

По результатам опытов с катящимся роликом сравнивался общий характер деформаций модельного и натурального льда. Поскольку моделирование величины действующей на лед нагрузки в упругой зоне нагружения не представляло интереса (амплитуда ИГВ была на порядки меньше их длины, что обеспечивало моделирование в пределах работы линейной теории волн, т.е. прогибы льда были пропорциональны величине нагрузки), то сравнивались относительные деформации $\bar{w} = w / w_{\max}$ натурального (по работе [48]) и модельного льда. Сравнение проводилось в зависимости от $\bar{S} = S / \lambda$, (где S – расстояние, проходимое ИГВ; λ – длина ИГВ), т.к. при выбранном b толщина натурального льда и глубина воды, определяющие λ , не были смоделированы. Результаты сравнения приведены на

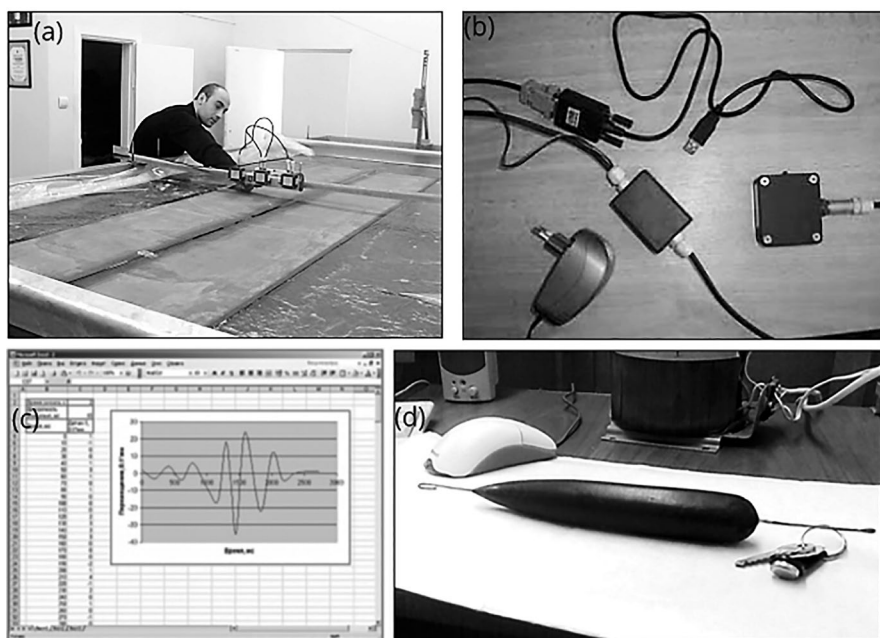


Рис. 11. Техническое обеспечение модельных экспериментов: (а) — общий вид модели неразрушаемого льда; (б) — бесконтактный преобразователь линейных перемещений; (с) — типовая запись показаний датчика (д) — модель подводного судна [5].

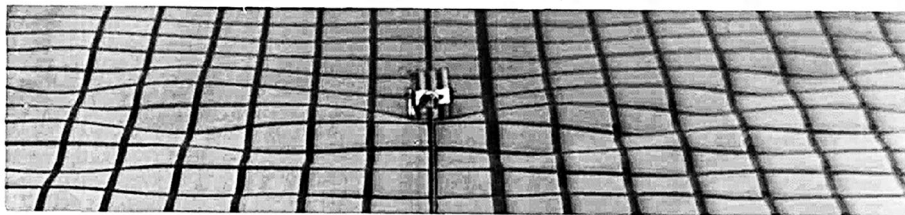


Рис. 12. Общий вид движущейся нагрузки и деформаций модельного поля [40].

рис. 13 и в табл. 1. На их основании можно сделать вывод, что в рамках упругой модели льда поведение ледяного покрова под действием рассмотренных динамических нагрузок можно исследовать с помощью подобных модельных экспериментов.

7. Заключение. На основе полученных результатов можно сделать вывод, что качественно, а некоторые параметры колебаний ледяного покрова и количественно моделируются по разработанной методике вполне удовлетворительно. Это позволяет в лабораторных условиях предварительно исследовать вопросы, теоретическое исследование которых затруднительно, а в натуральных ледовых условиях — практически невыполнимо [52], а также решать обратные задачи — проверять достоверность соответствующих условий моделирования полученных теоретических решений. Следует отметить особенность разработанной методики моделирования льда: выбранный для моделирования ледяной пластины

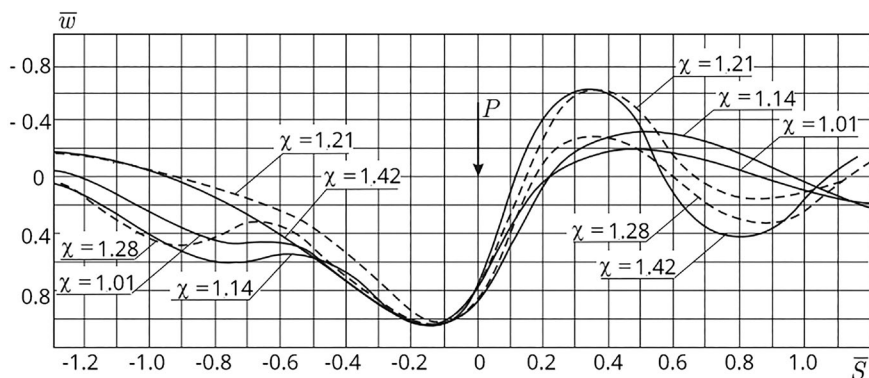


Рис. 13. Сопоставление кривых относительных деформаций натурального льда (—) и модельного слоя (---) при движении сосредоточенной нагрузки при различных относительных скоростях χ .

Таблица 1. Сопоставление натуральных данных с результатами модельных экспериментов

Источники данных	Параметры льда, ИГВ и глубины акватории						
	h, м	E, МПа	$\rho_{\text{л}}$, кг/м ³	H, м	λ , м	V, м/с	V _p , м/с
Модельный эксперимент	$5 \cdot 10^{-4}$	5	2300	0.02	0.23	0.50	0.44 ($\chi = 1.14$)
Пересчет по формулам (4)	0.5	$5 \cdot 10^3$	920	3	230	8.86	8.86 ($\chi = 1.0$)
Теоретический расчет (по зависимостям работы [2])	0.5	$5 \cdot 10^3$	920	8	260	8.86	8.86 ($\chi = 1.60$)
Данные натуральных наблюдений (по работе [49])	0.6	—	—	5	200	8.72	7.00 ($\chi = 1.39$)

материал однозначно определяет модуль геометрического подобия. Данное заключение принципиально отличает возможность моделирования поведения льда на упругих пленках от его моделирования в ледовых бассейнах. Из этого следует, что используя модельный материал с разными модулями упругости можно менять масштаб моделирования в широких диапазонах, т.е. исследовать влияние масштабного эффекта на результаты экспериментов. Кроме этого, выбирая соответствующий масштаб моделирования, можно устранить влияние ограничения размеров зеркала бассейна на измеряемые параметры, т.е. моделировать бесконечное ледяное поле. С помощью опытов в обычных (неледовых) бассейнах

можно относительно несложно исследовать целесообразность и перспективность предлагаемых подходов при решении реальных ледотехнических задач. Не только качественно, но и количественно получить информацию о деформированном состоянии ледяного покрова на основании простого и недорогого модельного эксперимента на стадии упругого деформирования льда, т.е. до достижения его предельных (разрушающих) изгибных напряжений. Таким образом, в пределах работы упругой модели льда основные закономерности поведения ледяного покрова под действием выше отмеченных динамических нагрузок можно исследовать с помощью подобных модельных экспериментов.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института машиноведения и металлургии Хабаровского Федерального исследовательского центра ДВО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ногид Л.М.* Моделирование движения судна в сплошном ледяном поле и битых льдах. 1959. Л.: ЛКИ, Вып. 28. С. 179–185.
2. *Ионов Б.П., Грамузов Е.М.* Ледовая ходкость судов. СПб.: Судостроение, 2013. 504 с.
3. *Козин В.М., Земляк В.Л., Баурин Н.О., Ипатов К.И.* Экспериментальные исследования влияния ледовых условий на эффективность разрушения ледяного покрова изгибно-гравитационными волнами от движения подводных судов: монография. Новосибирск: СО РАН, 2017. 141 с.
4. *Козин В.М.* Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты. М.: Акад. Естествознания, 2007. 355 с.
5. *Козин В.М., Земляк В.Л.* Всплытие подводных судов в ледовых условиях. Комсомольск-на-Амуре: ИМиМ ДВО РАН, 2012. 195 с.
6. *Козин В.М., Онищук А.В., Марьин Б.Н.* Ледоразрушающая способность изгибно-гравитационных волн от движения объектов. Владивосток: Дальнаука, 2005. 191 с. 3
7. *Земляк В.Л., Козин В.М., Погорелова А.В., Васильев А.С.* Движение погруженного тела в приповерхностной водной среде покрытой ледяным покровом. Новосибирск: СО РАН, 2020. 136 с.
8. *Земляк В.Л., Баурин Н.О., Курбацкий Д.А.* Лаборатория “Ледотехники” // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. Биробиджан: ПГУ им. Шолом-Алейхема, 2013. № 1 (12). С. 68–77.
9. *Беляков В.Б.* Новая модель льда // Вопросы теории, прочности и проектирования судов, плавающих во льдах. Горький: ГПИ, 1984. С. 48–52.
10. *Каштелян В.И., Позняк И.И., Рывлин А.Я.* Соппротивление льда движению судна. Л.: Судостроение, 1968. 238 с.
11. *Enkvist E.* On the ice resistance encountered by ships operating in the continuous mode ice breaking. Finland: Swedish Academy of Engineering Sciences, 1972. 181 p.
12. *Schwarz J.* On the Flexural Strength and Elasticity of Saline Ice // Proc. IAHR Int. Symp. on Ice. Hanover. 1975. P. 373–386.
13. *Kitagawa H.* Experimentation at the ice tank and Ship performance in ice (in Japanese). D. Thesis, University of Tokyo. 1984.
14. *Timco G.W.* Invited commentary: on the test methods for model ice // Cold Reg. Sci. Technol. V. 4. 1981. P. 269–274. <https://doi.org/10.1016/0165-232X8190009-4>
15. *Timco G.W.* Second report of the IAHR Working Group in ice modeling materials // Proceedings of the IAHR Symposium on ice. 1992. V. 3. P. 1527–1530.
16. *Timco G.W.* EG/AD/S: A new type of model ice for refrigerated towing tanks // Cold Reg. Sci. Technol. V. 12. № 2. 1986. P. 175–195. <https://doi.org/10.1016/0165-232X8690032-7>

17. *Hirayama K., Sakamoto N.* Some investigation for EG/AD model ice // Proc. 9th POAC Conference. 1987. V. 1. P. 299–306.
18. *Vaughan H.* Ice-breaking ships and operational loads. Ice Technol. // Proc. Ist Int. Conf., Berlin e.a. 1986. P. 313–322.
19. *Borland S.L.* The growth of EG/AD/S model ice in a small tank // OMAE. 1988. V. 4. P. 47–51.
20. *Lehmus E.* The properties of EG/AD model ice in VTT ice basin. // Proc. POLARTECH, 1988. Trondheim. Norway.
21. *Koyama K., Yoshida M., Izumiyama K., Uto S., Kanada N., Shimoda H., Tabuchi Y., Kitagawa H.* Mechanical properties of ethylene glycol ice // Annual meeting of the Ship Research Institute. 1988. № 52.
22. *Enkvist E.* Ice model tests as a ship design tool // Proceedings of the IAHR Ice Symposium. 1990. V. 1. P. 15–42.
23. *Nortala-Hoikkanen A.* FGX model ice the Massa-Yards Arctic Research Centre // Proceedings of the IAHR Ice Symposium. 1990. V. 3. P. 247–259.
24. *Зуев В.А., Грамузов Е.М., Двойченко Ю.А.* Экспериментальные исследования разрушения ледяного покрова // Вопросы теории, прочности и проектирования судов, плавающих во льдах. Горький: ГПИ, 1984. С. 4–13.
25. *Ионов Б.П.* Ледовое сопротивление и его составляющие. Л.: Гидрометеиздат, 1988. 80 с.
26. *Зуев В.А., Грамузов Е.М., Двойченко Ю.А.* Разрушение ледяного покрова. Горький: Б.и., 1989. 86 с.
27. *Michel B.* Nouvelle technique de simulation des glaces flottantes // L'ingénieur. 1969. V. 248. P. 16–20.
28. *Abdelnour R.* Recent development in modeling of offshore structures and vessels in ice covered waters // 9 colloque Genie Nordique, 56 Congres de LACFAC. Canada, 1988.
29. *Timco G.W.* Second report of the IAHR Working Group in ice modeling materials // Proceedings of the IAHR Symposium on ice. 1992. V. 3. P. 1527–1539.
30. *Козин В.М.* Способ моделирования ледяного покрова. Патент. 2715331 РФ. В63В. 9/02. 2020.
31. *Козин В.М. и др.* Экспериментально-теоретические исследования зависимости параметров распространяющихся в плавающей пластине изгибно-гравитационных волн от условий их возбуждения. Новосибирск: СО РАН, 2016. 222 с.
32. *Земляк В.Л., Козин В.М., Погорелова А.В., Васильев А.С.* Движение погруженного тела в приповерхностной водной среде, покрытой ледяным покровом. Новосибирск: СО РАН, 2020. 136 с.
33. *Козин В.М., Земляк В.Л., Розожникова Е.Г., Погорелова А.В.* Влияние ледовых условий на деформированное состояние ледяного покрова от движения нагрузки. Новосибирск: СО РАН, 2020. 126 с.
34. *Dutfield D.O., Dickins D.E.* Icebreaking trials with Bell Aerospace Voyageur ACV // Can. Aeronaut. Space J. 1974. V. 20. № 10. P. 471–474.
35. Amphibious ice-breaking craft // Ship Boat International. Dec. 1974. 20 p.
36. *Честнов Е.И.* Использование судов на воздушной подушке для взламывания льда // Передовой опыт и новая техника. Л. 1979. Вып.2 (62). С. 69–73.
37. *Сытинский А.Д., Трипольников В.П.* Некоторые результаты исследований естественных колебаний ледяных полей Центральной Арктики // Изв. АН СССР. Сер. Геофизическая. 1964. № 4. С. 615–621.
38. *Смирнов В.Н.* Исследование изгибных колебаний дрейфующего льда // Проблемы Арктики и Антарктики. 1966. Вып.23. С. 47–49.
39. *Смирнов В.Н.* Упругие изгибные волны в ледяном покрове // Труды ААНИИ. 1976. Т. 331. С. 117–123.
40. *Козин В.М., Земляк В.Л.* Физические основы разрушения ледяного покрова резонансным методом. Комсомольск-на-Амуре: ИМиМ ДВО РАН, 2013. 250 с.
41. *Takizawa T.* Deflection of a floating sea ice sheet induced by a moving load // Cold Reg. Sci. Technol. 1985. V. 11. № 5. P. 123–139. <https://doi.org/10.16/0165-232X8590015-1>
42. *Хейсин Д.Е.* Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 216 с.

43. Седов Л.И. Методы подобия и размерностей в механике. М.: Наука, 1977. 438 с.
44. Эпштейн Л.А. Методы теории размерностей и подобия в задачах гидромеханики судов. Л.: Судостроение, 1970. 207 с.
45. Каשתели В.И., Позняк И.И., Рывлин А.Я. Соппротивление льда движению судна. Л.: Судостроение, 1968. 240 с.
46. Иванов К.Е., Кобеко П.П., Шульман А.Р. Деформация ледового покрова при движении грузов // Журнал технической физики. 1946. Т. 16. С. 257–262.
47. Петров И.Г. Выбор наиболее вероятных значений механических характеристик льда // Труды ААНИИ. 1976. Т. 331. С. 4–41.
48. Песчанский И.С. Ледоведение и ледотехника. Л.: Гидрометеониздат, 1967. 467 с.
49. Быховский И.А. Атомные суда. Л.: Судпромгиз, 1961. 311 с.
50. Squire V.A., Robinson W.H., Langhorne P.J. and Haskell T.G. Vehicles and aircraft on floating ice // Nature (London). 1988. V. 333. P. 159–161.
51. Козин В.М. Результаты экспериментально-теоретических исследований возможностей резонансного метода разрушения ледяного покрова. // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 3. С. 3–20. <https://doi.org/10.31857/S0572329922600396>

MODELING OF FLEXURAL-GRAVITY WAVES IN ICE COVER ON ELASTIC FILMS

© 2024 г. V. M. Kozin^{a,*}

^a *Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Far East Branch of the Russian Academy of Sciences, Komsomolsk-na-Amure, 681005 Russia*

^{*}*e-mail: kozinvictor@rambler.ru*

Received 20.01.2023

Revised 31.03.2023

Accepted 02.04.2023

Abstract — It is noted that, based on observations of fluctuations of the ice cover in natural conditions under the influence of moving loads, i.e., when excitation of flexural gravity waves (FGW), the latter behaves similarly to an elastic isotropic plate. On this basis, a new direction has been proposed in modeling some problems of deformation of the FGW ice cover on elastic films in conventional experimental basins. The possibility of this technology is confirmed by the results of comparing records of deformation by moving loads of an elastic model layer and a natural ice cover. Based on the theory of similarity and dimensions, dependencies were obtained for converting model test data to full scale. It is noted that the costs of conducting such model experiments are disproportionately less than the costs of conducting experiments in ice basins. Ice engineering problems are listed, in solving which the developed FGW modeling technique can be used.

Keywords: ice cover; elastic films; similarity criteria; modeling; flexural gravity waves

REFERENCES

1. L.M. Nogid, “Simulation of vessel movement in a solid ice field and in broken ice,” *Trudy LKI*, **28**, 179–185 (1959).

2. B.P. Ionov and E.M. Gramuzov, Ice Propulsive Quality of Ships (Saint-Petersburg: Sudostroenie, St. Petersburg, 2013) [in Russian].
3. A. Nortala-Hoikkanen, "FGX model ice the Massa-Yards Arctic Research Centre," in *Proc. of the 9th IAHR Ice Symposium 1990* (IAHR, Espoo, 1990), Vol. 3, pp. 247–259.
4. V.A. Zuev, E.M. Gramuzov, and Yu.A. Dvoichenko, "Experimental studies of the destruction of the ice cover," in *Questions of Theory, Strength and Design of Ships Floating in Ice* (GPI, Gorkii, 1984), pp. 4–13.
5. B.P. Ionov, *Ice Resistance and its Components* (Gidrometeoizdat, Leningrad, 1988) [in Russian].
27. V.A. Zuev, E.M. Gramuzov, and Yu.A. Dvoichenko, *Destruction of the Ice Sheet* (NTO im. Ak. Krylova, Gorkii, 1989) [in Russian].
6. B. Michel, "Nouvelle technique de simulation des glaces flottantes," *L'ingénieur* **248**, 16–20 (1969).
7. R. Abdelnour, "Recent development in modeling of offshore structures and vessels in ice covered waters," in *9 Colloque Génie Nordique, 56 Congrès de LACFAC, 1988, Mai, Moncton, NB, Canada* (1988).
8. G.W. Timco, "Second report of the IAHR Working Group in ice modeling materials," in *Proc. of the 11th IAHR Symposium on Ice* (IAHR, Banff, Alberta, Canada, 1992), Vol. 3, pp. 1527–1539.
9. V.M. Kozin, RF Patent No. 2715 331, Bull. Izobret. No. 9/02 (2020).
10. V.M. Kozin, et al., *Experimental and Theoretical Studies of the Dependence of the Parameters of Flexural-Gravitational Waves Propagating in a Floating Plate on the Conditions of their Excitation* (SO RAN, Novosibirsk, 2016) [in Russian].
11. V.L. Zemlyak, V.M. Kozin, A.V. Pogorelova, and A.S. Vasilyev, *Motion of a Submerged Body in a Near-Surface Aquatic Environment Covered with Ice Cover* (SO RAN, Novosibirsk, 2020) [in Russian].
12. D.O. Dufild and D.E. Dickins, "Icebreaking trials with Bell Aerospace Voyageur ACV," *Can. Aeronaut. Space J.* **20** (10), 471–474 (1974).
13. *Amphibious Ice-Breaking Craft* (Ship Boat International, 1974).
14. E.I. Chestnov, "Use of hovercraft for breaking ice," in *Advanced Experience and New Technology* (Leningrad, 1979), Iss. 2 (62), pp. 69–73.
15. A.D. Sytinsky and V.P. Tripolnikov, "Some results of studies of natural fluctuations of ice floes in the Central Arctic," *Izv. AN SSSR. Ser. Geofiz.*, No. 4, 615–621 (1964).
16. V.N. Smirnov, "Flexural oscillations of drift ice," *Probl. Arktiki Antarkt.*, No. 23, 47–49 (1966).
17. V.N. Smirnov, "Elastic bending waves in the ice sheet," *Tr. AANII* **331**, 117–123 (1976).
18. V.M. Kozin and V.L. Zemlyak, *Physical Basis of the Destruction of the Ice Cover by the Resonance Method* (IMiM FEB RAS, Komsomolsk-na-Amure, 2013) [in Russian].
19. T. Takizawa, "Deflection of a floating sea ice sheet induced by a moving load," *Cold Reg. Sci. Technol.* **11** (5), 123–139 (1985). [https://doi.org/10.1016/0165-232X\(85\)90015-1](https://doi.org/10.1016/0165-232X(85)90015-1)
20. D.E. Kheisin, *Ice Cover Dynamics* (Gidrometeoizdat, Leningrad, 1967) [in Russian].
21. L.I. Sedov, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics* (Nauka, Moscow, 1977; CRC Press, Boca Raton, 1993).
22. L.A. Epshtein, *Methods of the Dimensional Analysis and Similarity Theory in Problems of Ship Hydromechanics* (Sudostroenie, Leningrad, 1970) [in Russian].
23. V.I. Kashtelyan, I.I. Poznyak, and A. Ya. Ryvlin, *Ice Resistance to Ship Movement* (Sudostroenie, Moscow, 1968) [in Russian].
24. K.E. Ivanov, P.P. Kobeko, and A.R. Shul'man, "Ice sheet deformation under load movement," *Zh. Tekh. Fiz.*, 16, 257–262 (1946).
25. I.G. Petrov, "The choice of the most probable values of the mechanical characteristics of ice," *Tr. AANII* **331**, 4–41 (1976).
26. I.S. Peschansky, *Glaciology and Ice Engineering* (Gidrometeoizdat, Leningrad, 1967) [in Russian].
27. I.A. Bykhovsky, *Atomic Ships* (Sudpromgiz, Leningrad, 1961) [in Russian].

28. V.M. Kozin, V.L. Zemlyak, N.O. Baurin, and K.I. Ipatov, *Experimental Studies of the Influence of Ice Conditions on the Efficiency of Ice Cover Destruction by Flexural-Gravitational Waves from the Movement of Submarines* (SO RAN, Novosibirsk, 2017) [in Russian].
29. V.M. Kozin, *Resonance Method of Breaking of Ice Cover. Inventions and Experiments* (Akad. Estestvoznaniya, Moscow, 2007) [in Russian].
30. V.M. Kozin and V.L. Zemlyak, *Surfacing of Submarines in Ice Conditions* (ImiM DVO RAN, Komsomolsk-na-Amure, 2012) [in Russian].
31. V.M. Kozin, A.V. Onischuk, and B.N. Marin, *Ice-Breaking Ability Of Bending-Gravitational Waves From The Motion Of Objects* (Dal'nauka, Vladivostok, 2005) [in Russian].
32. V.L. Zemlyak, V.M. Kozin, A.V. Pogorelova, and A.S. Vasilyev, *Motion of a Submerged Body in a Near-Surface Aquatic Environment Covered with Ice Cover* (SO RAN, Novosibirsk, 2020) [in Russian].
33. V.L. Zemlyak, N.O. Baurin, and D.A. Kurbatskiy, "Laboratory Ice technology," *Vestn. Priamur. Gos. Univ. im. Sholom-Aleykhema*, No. 1(12), 68–77 (2013).
34. V.B. Belyakov, "The new model ice," in *Questions of Theory, Strength and Design of Ships Floating in Ice* (Gorkii Polytekhn. Inst., Gorkii, 1984), pp. 48–52.
35. V.I. Kashtelyan, I.I. Poznyak, and A. Ya. Ryvlin, *Ice Resistance to Vessel Movement* (Sudostroenie, Leningrad, 1968) [in Russian].
36. E. Enkvist, *On the Ice Resistance Encountered by Ships Operating in the Continuous Mode Ice Breaking* (Swedish Acad. Eng. Sci., 1972).
37. J. Schwarz, "On the flexural strength and elasticity of saline ice," in *Proc. IAHR Int. Symp. on Ice* (IAHR, Hanover, 1975), pp. 373–386.
38. H. Kitagawa, Ph D. Thesis (University of Tokyo, Tokio, 1984).
39. G.W. Timco, "Invited commentary: on the test methods for model ice," *Cold Reg. Sci. Technol.* **4**, 269–274 (1981). <https://doi.org/10.1016/0165-232X8190009-4>
40. G.W. Timco, "Second report of the IAHR Working Group in ice modeling materials," in *Proc. of the 11th IAHR Symposium on Ice* (IAHR, Banff, 1992), Vol. 3, pp. 1527–1530.
41. G.W. Timco, "EG/AD/S: A new type of model ice for refrigerated towing tanks," *Cold Reg. Sci. Technol.* **12** (2), 175–195 (1986). <https://doi.org/10.1016/0165-232X8690032-7>
42. K. Hirayama and N. Sakamoto, "Some investigation for EG/AD model ice," in *Proc. 9th POAC Conference* (1987), Vol. 1, pp. 299–306.
43. H. Vaughan, "Ice-breaking ships and operational loads. Ice Technol.," in *Proc. of the 1st International Conference on Ice Technology* (Cambridge, MA, 1986), pp. 313–322.
44. S.L. Borland, "The growth of EG/AD/S model ice in a small tank," in *Proceedings OMAE* (Houston, TX, 1988), Vol.4, pp. 47–53.
45. E. Lehmus, "The properties of EG/AD model ice in VTT ice basin," in *Proc. of the International Conference on Technology for Polar Areas*, Ed. by A. Hansen and Just Fr. Storm (Tapir Akad. Forlag, Trondheim, 1988), Vol. 2, pp. 661–668.
46. K. Koyama, M. Yoshida, K. Izumiyama, et al., "Mechanical properties of ethylene glycol ice," in *Annual Meeting of the Ship Research Institute*, Vol. 52 (1988).
47. E. Enkvist, "Ice model tests as a ship design tool," in *Proc. of the 9th IAHR Ice Symposium 1990* (IAHR, Espoo, 1990), Vol. 1, pp. 15–42.
48. V.A. Squire, W.H. Robinson, P.J. Langhorne, and T.G. Haskell, "Vehicles and aircraft on floating ice," *Nature* **333**, 159–161 (1988).
49. V.M. Kozin, "Results of experimental and theoretical studies of the possibilities of the resonance method of ice cover destruction," *Mech. Solids* **58**, 671–684 (2023).
<https://doi.org/10.3103/S0025654423600101>

УДК 539.3

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ДИСПЕРСИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ СТЕРЖНЯХ

© 2024 г. А. И. Каракозова^{а,*}

^а *Национальный исследовательский Московский Государственный Строительный
Университет, Москва*

**e-mail: karioca@mail.ru*

Поступила в редакцию 01.02.2023 г.

После доработки 23.02.2023 г.

Принята к публикации 27.02.2023 г.

Гармонические акустические волны в полубесконечном функционально-градиентном (ФГ) одномерном стержне с продольной произвольной неоднородностью анализируются комбинированным методом, основанным на модифицированном формализме Коши и методе экспоненциальных матриц. Построены замкнутые дисперсионные уравнения для гармонических волн, из решения которых получены неявные дисперсионные соотношения для акустических волн в ФГ стержнях. Для продольной неоднородности полиномиального типа соответствующие дисперсионные соотношения строятся в явном виде.

Ключевые слова: акустическая волна, неоднородный стержень, затухание сигнала, магнитуа перемещений, продольная неоднородность

DOI: 10.31857/S1026351924010023, EDN: WAZXAA

1. Введение. *1.1. Акустические волны в ФГ-средах.* Последние исследования поверхностных акустических волн (ПАВ) в функционально-градиентных (ФГ) и слоистых пластинах с поперечной неоднородностью выявили ряд особенностей дисперсионных свойств, так как точки с нулевой групповой скорости (НГВ), принадлежащие фундаментальным ветвям, точки пересечения и расхождения между фундаментальной ветвью и нижними ветвями высших мод и др. [1–10]. Большое количество работ посвящено развитию численных методов решения дисперсионных уравнений для направленных волн в ФГ-пластинах; так, в [11] используются ряды Пеано; проекционный метод Галеркина предложен в [12]; несколько подходов связаны с разложением упругих потенциалов, полей напряжений и перемещений и варьированием свойств материала по полиномам Лежандра [13–15] или применением метода спектральных элементов (СЭМ); см. [16, 17].

Дисперсионные волны Похгаммера–Кри в слоистых и ФГ-стержнях с поперечной неоднородностью изучаются либо с помощью аналитических подходов [18–22], подходящих для некоторых конкретных видов неоднородностей,

либо численно, чаще всего с помощью СЭМ в пользу МКЭ; см. [23] или полиномы Лежандра [24]. Хотя волны в одномерных ФГ-стержнях могут не иметь таких обильных дисперсионных явлений, которые наблюдаются в ФГ-пластинах [25] и трехмерных или аксиально-симметричных ФГ-стержнях, тем не менее, как показано ниже, волны в одномерных стержнях обладают несколькими необычными свойствами в отношении дисперсии и изменения энергии. Достаточно большое количество работ посвящено волновой динамике ФГ-сред с пьезоэлектрическими [26, 27], пористыми пьезоэлектрическими [28, 29] и пьезомагнитными свойствами [30].

1.2. Предмет исследования. Настоящее исследование направлено на: (i) построение определяющего уравнения и его решение для акустических волн в полубесконечном ФГ-стержне 1D с произвольной продольной неоднородностью; (ii) определение пространственного изменения энергии и величины осциллирующих волн; и (iii) получение дисперсионных свойств осциллирующих волн. Предполагается, что пространственная неоднородность относится к классу $C^1(R_+)$, т.е. непрерывно дифференцируема в интервале $x \in (0; +\infty)$; см. рис. 1. Предполагается также, что соответствующие физические свойства удовлетворяют условию сильной эллиптичности по R_+ и имеют конечный и ненулевой пределы при $x \rightarrow +0$ и $x \rightarrow \infty$; более подробно эти условия обсуждаются в следующем разделе. Решение в замкнутой форме для дисперсионного уравнения строится комбинацией шестимерного формализма Коши и экспоненциального метода фундаментальных матриц, оба метода ранее были разработаны для дисперсионного анализа направленных волн в слоистых и ФГ-пластинах [25].



Рис. 1. 1D ФГ-стержень; n показывает направление нормали волны и x показывает направление координатной оси вдоль направления распространения волны.

Ниже показано, что пространственные распределения энергии, величин напряжений и перемещений сильно зависят как от частотной, так и от пространственной дисперсии свойств материала, что делает полученные результаты важными для лучшего понимания природы распространения волн в ФГ-средах.

2. Основные уравнения. **2.1. Уравнение движения.** Уравнение движения одномерного упругого стержня с продольной неоднородностью класса $C^1(R_+)$ имеет вид [31]

$$(\rho(x)\partial_t^2 - \partial_x E(x)\partial_x)u(x,t) = 0, \quad (2.1)$$

где $\rho(x)$ — плотность материала; $E(x)$ — модуль упругости; $u(x,t)$ — продольное перемещение; x — пространственная переменная; t — время. Для обеспечения гиперболичности уравнения (2.1) накладываются следующие естественные ограничения

$$\rho(x) > 0, \quad E(x) > 0, \quad (2.2)$$

Чтобы представить уравнение в безразмерной форме, введем безразмерные постоянные ρ_d , E_d , x_d , t_d , имеющие размерность плотности, напряжений, длины и времени соответственно, дающие соответствующие безразмерные функции

$$\rho'(x') = \frac{\rho(x)}{\rho_d}, E'(x') = \frac{E(x)}{E_d}, u'(x', t') = \frac{u(x, t)}{x_d} \quad (2.3)$$

где

$$x' = \frac{x}{x_d}, t' = \frac{t}{t_d}. \quad (2.4)$$

В дальнейшем будем предполагать, что все функции безразмерны; штрих далее будет опущен для краткости.

Введение новой переменной (напряжение)

$$\sigma(x, t) = E(x) \partial_x u(x, t). \quad (2.5)$$

Уравнение (2.1) превращается в систему дифференциальных уравнений первого порядка по переменной x

$$\begin{aligned} \partial_x u(x, t) &= E(x)^{-1} \sigma(x, t) \\ \partial_x \sigma(x, t) &= \rho(x) \partial_t^2 u(x, t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Следуя [32], рассмотрим гармоническую во времени волну с пространственно изменяющимися амплитудами

$$u(x, t) = m(x) e^{i\omega t}, \sigma(x, t) = \tau(x) e^{i\omega t}, \quad (2.7)$$

где $m(x)$ — искомая амплитуда, а ω — безразмерная круговая частота.

Вводя новую векторную функцию

$$\mathbf{a}(x) = \begin{pmatrix} m(x) \\ \tau(x) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

и подстановка выражения (2.7) в уравнение (2.6) дает следующее матричное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\partial_x \mathbf{a}(x) = \mathbf{G}(x) \cdot \mathbf{a}(x), \quad (2.9)$$

где

$$\mathbf{G}(x) = \begin{pmatrix} 0 & E(x)^{-1} \\ -\omega^2 \rho(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.9) будем использовать для построения общих решений.

Рассматриваемые акустические волны, распространяющиеся в полубесконечном стержне, удовлетворяют следующим начальным и граничным условиям

$$u(x, t)|_{t=+0} = 0, \partial_t u(x, t)|_{t=+0} = 0, u(x, t)|_{x=+0} = u_0 e^{i\omega t}. \quad (2.11)$$

Отметим, что с учетом гармонического во времени колебания (2.7) условие затухания Зоммерфельда становится менее ограничительным, чем для негармонических колебаний [33]:

$$|u(x, t)|_{x \rightarrow +\infty} < \infty. \quad (2.12)$$

Ввиду уравнения (2.7) обеспечение периодичности поля перемещений по переменной во времени, не существует предельных значений для функции $u(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$ и какого-либо конечного x .

2.2. *Общее решение.* Общее решение уравнения (2.9) допускает следующий вид [34, 35]

$$\mathbf{a}(x) = \exp(\mathbf{F}(x)) \cdot \mathbf{a}_0, \quad (2.13)$$

где $\mathbf{F}(x)$ является первообразной $\mathbf{G}(x)$ и $\mathbf{a}_0$ – вектор, определяемый граничными условиями.

$$\mathbf{F}(x) = \int \mathbf{G}(x') dx'. \quad (2.14)$$

Предполагая матрицу $\mathbf{F}$ полупростой и учитывая ее жорданову нормальную форму, получаем

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{W}(x) \cdot \mathbf{D}(x) \cdot \mathbf{W}^{-1}(x), \quad (2.15)$$

где $\mathbf{W}$ – матрица, составленная из собственных векторов матрицы $\mathbf{F}$, составленная по столбцам, и $\mathbf{D}$ – диагональная матрица, составленная из собственных векторов матрицы $\mathbf{F}$. При разложении (2.15) матрица показателей в (2.13) имеет вид

$$\exp(\mathbf{F}(x)) = \mathbf{W}(x) \cdot \exp(\mathbf{D}(x)) \cdot \mathbf{W}^{-1}(x). \quad (2.16)$$

С учетом уравнений (2.10), (2.14), матрицы $\mathbf{W}(x)$ и $\mathbf{D}(x)$ в представляются в следующем виде

$$\mathbf{W}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{a(x)}}{\sqrt{b(x)}} & -\frac{\sqrt{a(x)}}{\sqrt{b(x)}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D}(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{a(x)b(x)} & 0 \\ 1 & -\sqrt{a(x)b(x)} \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

где

$$a(x) = \int \frac{dx'}{E(x')}, b(x) = -\omega^2 \int \rho(x') dx'. \quad (2.18)$$

Отметим, что собственные векторы, расположенные в столбцах матрицы $\mathbf{W}$, не нормализованы. Случай неполупростого $\mathbf{F}$ приводит к появлению жордановой клетки в разложении и одного собственного и одного обобщенного собственных векторов в матрице $\mathbf{W}$. Хотя такой случай физически возможен, он очень редок и в данной работе не рассматривается.

Выполняя операцию умножения в разложении (2.16) и учитывая (2.17)

$$\exp(\mathbf{D}(x)) = \begin{pmatrix} \exp(\sqrt{a(x)b(x)}) & 0 \\ 0 & \exp(-\sqrt{a(x)b(x)}) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

получаем

$$\exp(\mathbf{F}(x)) = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{a(x)b(x)}) & \frac{\sqrt{a(x)}}{\sqrt{b(x)}} \sinh(\sqrt{a(x)b(x)}) \\ \frac{\sqrt{b(x)}}{\sqrt{a(x)}} \sinh(\sqrt{a(x)b(x)}) & \cosh(\sqrt{a(x)b(x)}) \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Матрица показателей в (2.20) обладает интересным свойством.

Предложение 2.1. При любых $E(x)$, $\rho(x)$, удовлетворяющих условиям (2.2), матрица показателей $\exp(\mathbf{F}(x))$ не является вырожденной, более того

$$\det(\exp(\mathbf{F}(x))) = 1. \quad (2.21)$$

Доказательство вытекает из рассмотрения правой части уравнения (2.20).

Следствие [36]. Ввиду уравнений (2.10), (2.14) и условия (2.21) экспоненциальное отображение $\exp(\mathbf{F}(x))$ сохраняет площадь.

Отметим, что ввиду отрицательного значения $b(x)$ в уравнении компоненты матрицы (2.17) являются мнимыми. Таким образом, матрица показателей в может быть записана через тригонометрические функции

$$\exp(\mathbf{F}(x)) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{a(x)|b(x)|}) & \frac{\sqrt{a(x)}}{\sqrt{|b(x)|}} \sin(\sqrt{a(x)|b(x)|}) \\ -\frac{\sqrt{|b(x)|}}{\sqrt{a(x)}} \sin(\sqrt{a(x)|b(x)|}) & \cos(\sqrt{a(x)|b(x)|}) \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

2.3. Поля напряжений и перемещений. Граничные условия позволяют записать вектор $\mathbf{a}_0$ из (2.13) следующим образом

$$\mathbf{a}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Соединяя (2.13), (2.22) и (2.23), запишем выражения для полей напряжений и перемещений

$$u(x, t) = \cos\left(\left(\sqrt{a(x)|b(x)|}\right)\right) u_0 e^{i\omega t}, \quad \sigma(x, t) = -\sqrt{\frac{|b(x)|}{a(x)}} \sin\left(\left(\sqrt{a(x)|b(x)|}\right)\right) u_0 e^{i\omega t}. \quad (2.24)$$

Откуда получим величины напряжений и перемещений

$$|m(x)| = \left| \cos\left(\sqrt{a(x)|b(x)|}\right) u_0 \right|, \quad |\tau(x)| = \left| \sqrt{\frac{|b(x)|}{a(x)}} \sin\left(\sqrt{a(x)|b(x)|}\right) u_0 \right|. \quad (2.25)$$

2.4. *Кинетическая и потенциальная энергия.* Введем безразмерный период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2.26)$$

Выражения (2.24) дают удельную кинетическую энергию и энергию деформации за период T :

$$\begin{aligned} E_k &\equiv \frac{1}{2} \rho(x) \int_0^T \left| \partial_t u(x, t) \right|^2 dt = \frac{\pi}{\omega} \rho(x) \cos^2 \left(\sqrt{a(x)|b(x)|} \right) u_0^2 \\ E_s &\equiv \frac{1}{2} (E(x))^{-1} \int_0^T \left| \sigma(x, t) \right|^2 dt = \frac{\pi}{\omega E(x)} \frac{|b(x)|}{a(x)} \sin^2 \left(\sqrt{a(x)|b(x)|} \right) u_0^2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

3. Полиномиальные неоднородности. 3.1. Общие биномы. Класс положительных полиномов R может быть представлен в виде суммы двух квадратов [37].

$$\rho(x) = \left(\sum_{k=1}^n \rho_k x^k \right)^2 + \rho_0, \quad E(x) = \left(\sum_{k=1}^n E_k x^k \right)^2 + E_0 \quad (3.1)$$

с реальными коэффициентами $\rho_k, k=1, \dots, n$; $E_k, k=1, \dots, m$ и положительными ρ_0 и E_0 .

Здесь рассматривается менее ограничительный класс положительных многочленов от R_+ , это генерируется следующими биномами [38]

$$\rho(x) = \rho_n x^n + \rho_0, \quad E(x) = E_m x^m + E_0 \quad (3.2)$$

с неотрицательными коэффициентами $\rho_n, E_m \geq 0$ и положительными $\rho_0, E_0 > 0$.

Подставляя биномы (3.2) в уравнение (2.18), получаем

$$a(x) = \frac{1}{mE_0} \Phi \left(-\frac{E_m}{E_0} x^m; 1; \frac{1}{m} \right), \quad b(x) = -\omega^2 \left(\frac{\rho_n}{n+1} x^{n+1} + \rho_0 x \right). \quad (3.3)$$

где Φ — Φ -функция Лерча, см. [39, 40]. Учитывая эти выражения, амплитуды в (2.25) будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} |m(x)| &= \left| \cos \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{mE_0} \left(\frac{\rho_n}{n+1} x^{n+1} + \rho_0 x \right)} \Phi \left(-\frac{E_m}{E_0} x^m; 1; \frac{1}{m} \right) \right) u_0 \right| \\ |\tau(x)| &= \left| \frac{\omega^2 \left(\frac{\rho_n}{n+1} x^{n+1} + \rho_0 x \right)}{\frac{1}{mE_0} \Phi \left(-\frac{E_m}{E_0} x^m; 1; \frac{1}{m} \right)} \sin \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{mE_0} \left(\frac{\rho_n}{n+1} x^{n+1} + \rho_0 x \right)} \Phi \left(-\frac{E_m}{E_0} x^m; 1; \frac{1}{m} \right) \right) u_0 \right|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Аналогично, уравнения удельной энергии (2.27):

$$\begin{aligned}
 E_k &= \frac{\pi}{\omega} (\rho_n x^n + \rho_0) \cos^2 \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{m E_0} \left(\frac{\rho_n}{n+1} x^{n+1} + \rho_0 x \right)} \Phi \left(-\frac{E_m}{E_0} x^m; 1; \frac{1}{m} \right) \right) u_0^2 \\
 E_s &= \frac{\pi}{\omega (E_m x^m + E_0)} \times \frac{\omega^2 \left(\frac{\rho_n}{n+1} x^{n+1} + \rho_0 x \right)}{m E_0} \Phi \left(-\frac{E_m}{E_0} x^m; 1; \frac{1}{m} \right) \times \\
 &\quad \times \sin^2 \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{m E_0} \left(\frac{\rho_n}{n+1} x^{n+1} + \rho_0 x \right)} \Phi \left(-\frac{E_m}{E_0} x^m; 1; \frac{1}{m} \right) \right) u_0^2.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.2. *Линейные биномы.* Рассмотрим теперь линейное изменение акустических свойств

$$\rho(x) = \rho_1 x + \rho_0, E(x) = E_1 x + E_0 \tag{3.6}$$

с положительными коэффициентами ρ_0, E_0 и неотрицательными ρ_1, E_1 . Подстановка линейных членов (3.2) в уравнение (2.18) дает

$$a(x) = \frac{1}{E_0} \ln(E_1 x + E_0), \quad b(x) = -\omega^2 \left(\frac{\rho_1}{2} x^2 + \rho_0 x \right), \tag{3.7}$$

откуда получаем

$$|m(x)| = |\cos \eta(x)| u_0, \quad |\tau(x)| = \sqrt{\frac{\omega^2 \left(\frac{\rho_1}{2} x^2 + \rho_0 x \right)}{\frac{1}{E_0} \ln(E_1 x + E_0)}} \sin \eta(x) u_0, \tag{3.8}$$

где

$$\eta(x) = \sqrt{\frac{\omega^2}{E_0} \left(\frac{\rho_1}{2} x^2 + \rho_0 x \right) \ln(E_1 x + E_0)}. \tag{3.9}$$

Принимая во внимание уравнения (3.8), где $\eta(x)$ представляет собой аргумент тригонометрической функции, и согласно [41, 42], представим так называемую пространственную частоту

$$\Omega_\eta(x) \equiv \partial_x \eta(x) = \frac{\sqrt{2} \omega}{4} \frac{2 \left(\ln(E_1 x + E_0) \right) (\rho_1 x + \rho_0) (E_1 x + E_0) + x E_1 (\rho_1 x + 2 \rho_0)}{\sqrt{(\ln(E_1 x + E_0)) x (\rho_1 x + 2 \rho_0) E_0 (E_1 x + E_0)}}. \tag{3.10}$$

Для предполагаемого случая, выражение для удельной энергии (2.27) представим в виде

$$E_k = \frac{\pi}{\omega} (\rho_1 x + \rho_0) (\cos^2 \eta) u_0^2, E_s = \frac{\pi \omega E_0 \left(\frac{\rho_1}{2} x^2 + \rho_0 x \right) (\sin^2 \eta) u_0^2}{(E_1 x + E_0) \ln(E_1 x + E_0)}. \quad (3.11)$$

Типичные графики вариаций магнитуд и энергии показаны на рис. 1 и 2. Графики на рис. 1 соответствуют возрастающей с расстоянием фазовой скорости $c(x) = \sqrt{E(x)/\rho(x)}$ и следующим безразмерным параметрам материала модели:

$$\rho_0 = 1, \rho_1 = 0.005, E_0 = 1, E_1 = 0.01. \quad (3.12)$$

Графики на рис. 2 показывают, что (i) величина смещения не меняется с расстоянием, что связано с наложенным граничным условием Дирихле на левом конце стержня; (ii) величина напряжения увеличивается (почти линейно в рассматриваемых полулогарифмических координатах), что в основном связано с увеличением модуля упругости; (iii) удельная энергия деформации нелинейно увеличивается с расстоянием, то есть опять же в основном за счет увеличения модуля упругости; и (iv) удельная кинетическая энергия медленно увеличивается в основном за счет увеличения плотности.

Графики на рис. 3 соответствуют убывающей с расстоянием фазовой скорости и следующим безразмерным параметрам модельного материала

$$\rho_0 = 1, \rho_1 = 0.01, E_0 = 1, E_1 = 0.005. \quad (3.13)$$

Графики на рис. 3 демонстрируют почти такое же поведение, как и графики на рис. 2. Таким образом, оба рассмотренных случая, связанные как с увеличением, так и с уменьшением фазовой скорости, не приводят к существенным изменениям вариаций величин и энергий.

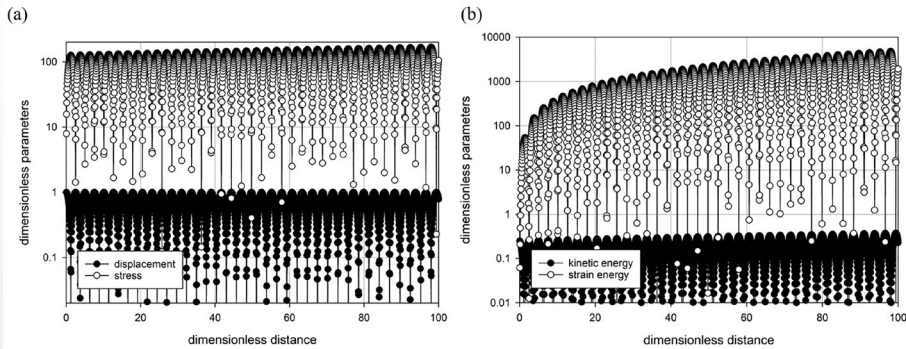


Рис. 2. Вариации величин и удельных энергий с расстоянием для линейного бинома при гармоническом по времени возбуждении 2 Гц и возрастающей фазовой скорости; (а) величины; (б) удельные энергии.

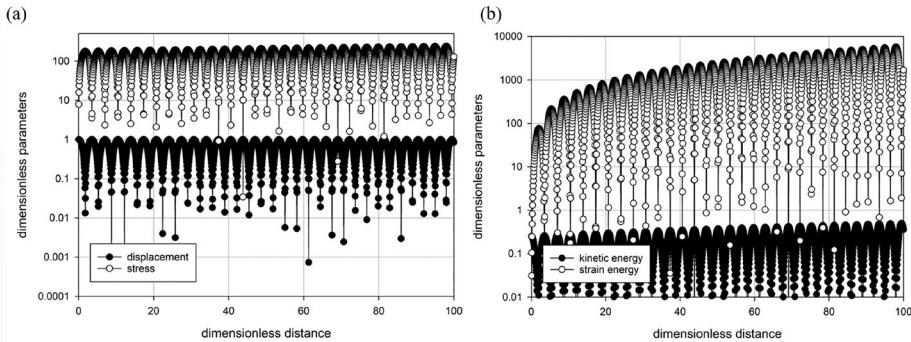


Рис. 3. Изменения модулей и удельных энергий с расстоянием для линейного бинома при гармоническом по времени возбуждении 2 Гц и убывающей фазовой скорости; (a) величины; (b) удельные энергии.

4. Заключение. Сравнение величин напряжений и перемещений, показанных для линейных (рис. 2,а, 3,а) биномиальных вариаций соответствующей плотности материала и модуля упругости, показывает, что во всех рассмотренных случаях наблюдаются более выраженные колебания с гораздо меньшей видимой частотой относительно к линейным биномам; это связано с гораздо меньшей пространственной частотой Ω_η , чем Ω_ξ . В то же время величина смещения остается практически стабильной независимо от биномала, а величина напряжения демонстрирует относительно небольшой рост с расстоянием. Анализ изменения удельной энергии показывает, что в случаях линейных биномов энергия деформации увеличивается нелинейно, тогда как кинетическая энергия остается практически стабильной (рис. 2,б, 3,б).

Полученные результаты могут иметь различные приложения, начиная от микро- и наномеханики при нахождении полей напряжений и смещений и пространственной частоты акустических волн, распространяющихся в микро- и нанотрубках, до геофизических приложений, особенно при количественной оценке неизвестных физических свойств земной коры. Следует также отметить, что, согласно обзору литературы, ни величины полей перемещений, ни пространственное изменение энергии для случая гармонических волн в одномерных ФГ-стержнях не изучались. Однако изменение скорости определяется простой формулой для скорости стержня или, в более общем случае, длинноволновой предельной скоростью, см. [45–47].

И последнее замечание касается сравнения изменений величины и энергии в полиномиально неоднородных стержнях со стержнями, имеющими периодическую неоднородность [48]; если рассматриваемая полиномиальная неоднородность приводит к различным пространственным частотам, которые могут меняться с расстоянием, как это наблюдалось в [48], то периодическая неоднородность не приводит к такому изменению. Кроме того, пространственное распределение энергии зависит от типа неоднородности; например, в исследованных случаях полиномиальной неоднородности и кинетическая энергия, и энергия деформации изменяются с расстоянием нелинейно, в то время как в случае периодически неоднородного стержня и кинетическая энергия, и энергия

деформации колеблются с расстоянием с постоянным пространственным периодом, но их величины остаются почти постоянны; см. [48].

Работа финансировалась Министерством науки и высшего образования РФ, проект № FSWG-2023-0004 “Система территориальной сейсмической защиты критически важных объектов инфраструктуры на основе гранулированных метаматериалов, обладающих свойствами широкодиапазонных фоновых кристаллов”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baron C. & Naili S.* Propagation of elastic waves in a fluid-loaded anisotropic functionally graded waveguide: application to ultrasound characterization // *J. Acoust. Soc. Am.* 2010. V. 127(3). P. 1307–1317. <https://doi.org/10.1121/1.3292949>
2. *Bendenia N. et al.* Deflections, stresses and free vibration studies of FG-CNT reinforced sandwich plates resting on Pasternak elastic foundation // *Comp. Concrete.* 2020. V. 26. № 3. P. 213–226. <https://doi.org/10.12989/cac.2020.26.3.213>
3. *Gupta A. & Talha M.* Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures // *Prog. Aerosp. Sci.* 2015. V. 79. P. 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2015.07.001>
4. *Han X. et al.* A quadratic layer element for analyzing stress waves in FGMs and its application in material characterization // *JSV.* 2000. V. 236(2). P. 307–321. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.2966>
5. *Ilyashenko A.V. et al.* SH waves in anisotropic (monoclinic) media // *Z. Angew. Math. Phys.* 2018. 69(17). P. 17. <https://doi.org/10.1007/s00033-018-0916-y>
6. *Kuznetsov S.V.* Cauchy formalism for Lamb waves in functionally graded plates // *J. Vibr. Control.* 2019. V. 25. № 6. P. 1227–1232. <https://doi.org/10.1177/1077546318815376>
7. *Kuznetsov S.V.* Lamb waves in stratified and functionally graded plates: discrepancy, similarity, and convergence // *Waves Rand. Complex Media.* 19. V. 31(6). P. 1–10. <https://doi.org/10.1080/17455030.2019.1683257>
8. *Li Z., Yu J., Zhang X. & Elmaimouni L.* Guided wave propagation in functionally graded fractional viscoelastic plates: A quadrature-free Legendre polynomial method // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2020. V. 29(16). P. 1–21. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1860273>
9. *Menasria A. et al.* A four-unknown refined plate theory for dynamic analysis of FG-sandwich plates under various boundary conditions // *Steel Comp. Struct.* 2020. V. 36(3). P. 355–367. <https://doi.org/10.12989/scs.2020.36.3.355>
10. *Vlasie V. & Rousseau M.* Guide modes in a plane elastic layer with gradually continuous acoustic properties // *NDT&E Int.* 2004. V. 37(8). P. 633–644. <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2004.04.003>
11. *Amor M.B. & Ghazlen M.H.B.* Lamb waves propagation in functionally graded piezoelectric materials by Peano-series method // *Ultrasonics.* 2015. V. 55. P. 10–14. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2014.08.020>
12. *Chikr S.C. et al.* A novel four-unknown integral model for buckling response of FG sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions using Galerkin's approach // *Geomech. Eng.* 2020. V. 21. № 5. P. 471–487. <https://doi.org/10.12989/gae.2020.21.5.471>
13. *Lefebvre J.E. et al.* Acoustic wave propagation in continuous functionally graded plates: an extension of the Legendre polynomial approach // *IEEE T Ultrason. Ferr.* 2001. V. 48(5). P. 1332–1340. <https://doi.org/10.1109/58.949742>
14. *Othmani C. et al.* Numerical simulation of lamb waves propagation in a functionally graded piezoelectric plate composed of GaAs-AlAs materials using Legendre polynomial approach // *Optik.* 2017. V. 142. P. 401–411.

15. Yu J.G. *et al.* Propagating and non-propagating waves in infinite plates and rectangular cross section plates: orthogonal polynomial approach // *Acta Mech.* 2017. V. 228(11). P. 3755–3769. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1917-1>
16. Gopalakrishnan S., Ruzzene M. & Hanagud S. Spectral Finite Element Method. In: Computational Techniques for Structural Health Monitoring. In: Springer Series in Reliability Engineering. London: Springer, 2011. 440 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-85729-284-1>
17. Nanda N. & Kapuria S. Spectral finite element for wave propagation analysis of laminated composite curved beams using classical and first order shear deformation theories // *Composite Struct.* 2015. V. 132. № 3. P. 310–320. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.04.061>
18. Baron C. Propagation of elastic waves in an anisotropic functionally graded hollow cylinder in vacuum // *Ultrasonics.* 2011. V. 51. № 2. P. 123–130. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2010.07.001>
19. Honarvar F., Enjilela E., Sinclair A. & Mirnezami S. Wave propagation in transversely isotropic cylinders // *Int. J. Solids and Struct.* 2007. V. 44. № 16. P. 5236–5246. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.12.029>
20. Ilyashenko A.V. *et al.* Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // *Arch. Appl. Mech.* 2018. V. 88. P. 1385–1394. <https://doi.org/10.1007/s00419-018-1377-7>
21. Rigby S.E., Barr A.D. & Clayton M. A review of Pochhammer–Chree dispersion in the Hopkinson bar // *Proc. Inst. Civil Eng. – Eng. Comp. Mech.* 2018. V. 171. № 1. P. 3–13. <https://doi.org/10.1680/jenclm.16.00027>
22. Wu B., Su Y.P., Liu D.Y., Chen W.Q. & Zhang C.Z. On propagation of axisymmetric waves in pressurized functionally graded elastomeric hollow cylinders // *J. Sound Vibr.* 2018. V. 412. № 12. P. 17–47. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.01.055>
23. Xu Ch. & Yu Z. Numerical simulation of elastic wave propagation in functionally graded cylinders using time-domain spectral finite element method // *Adv. Mech. Eng.* 2017. 9 (11). P. 1–17. <https://doi.org/10.1177/1687814017734457>
24. Zhang B. *et al.* Axial guided wave characteristics in functionally graded one-dimensional hexagonal piezoelectric quasi-crystal cylinders // *Math. Mech. Solids.* 2022. V. 27. № 1. P. 125–143. <https://doi.org/10.1177/10812865211013458>
25. Kuznetsov S.V. Abnormal dispersion of flexural Lamb waves in functionally graded plates // *Z. Angew. Math. Phys.* 2019. V. 70 (89). P. 1–8. <https://doi.org/10.1007/s00033-019-1132-0>
26. Guha S. & Singh A.K. Influence of varying fiber volume fractions on plane waves reflecting from the stress-free/rigid surface of a piezoelectric fiber-reinforced composite half-space // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2022. V. 29. № 27. P. 5758–5772. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1964046>
27. Singh A.K., Rajput P., Guha S. & Singh S. Propagation characteristics of love-type wave at the electro-mechanical imperfect interface of a piezoelectric fiber-reinforced composite layer overlying a piezoelectric half-space // *Europ. J. Mech. – A/Solids.* 2022. V. 93. P. 104527. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104527>
28. Singh S., Singh A.K. & Guha S. Shear waves in a piezo-fiber-reinforced-poroelastic composite structure with sandwiched functionally graded buffer layer: Power series approach // *Europ. J. Mech. – A/Solids.* 2022. V. 92. P. 104470. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104470>
29. Singh S., Singh A.K., & Guha S. Impact of interfacial imperfections on the reflection and transmission phenomenon of plane waves in a porous-piezoelectric model // *Appl. Math. Model.* 2021. V. 100. P. 656–675. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.08.022>
30. Singh A.K., Mahto S. & Guha S. Analysis of plane wave reflection and transmission phenomenon at the interface of two distinct micro-mechanically modeled rotating initially stressed piezomagnetic fiber-reinforced half-spaces // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2022. V. 29. № 28. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.2003490>
31. Gurtin M.E. *The Linear Theory of Elasticity.* Verlag, Berlin: Springer, 1976.
32. Rauch J. & Reed M. Nonlinear microlocal analysis of semilinear hyperbolic systems in one space dimension // *Duke Math. J.* 1982. V. 49. P. 397–475.

33. *Hartman Ph.* Ordinary Differential Equations (Classics in Applied Mathematics) 2nd Ed. Philadelphia: SIAM, 1987.
34. *Higham N.J.* Functions of Matrices: Theory and Computation. N.Y.: SIAM, 2008.
35. *Kuznetsov S.V.* Love waves in layered anisotropic media // J. Appl. Math. Mech. 2006. V. 70(1). P. 116–127. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2006.03.004>
36. *Gómez, A. & Meiss J.D.* Volume-preserving maps with an invariant // Chaos: Int. J. Nonlinear Sci. 2002. V. 12(2). P. 289–299. <https://doi.org/10.1063/1.1469622>
37. *Benoist O.* Writing positive polynomials as sums of (few) squares // EMS Newsletter. 2017. V. 9(105). P. 8–13. <https://doi.org/10.4171/NEWS/105/4>
38. *Handelman D.* Representing polynomials by positive linear functions on compact convex polyhedral // Pacific J. Math. 1988. V. 132(1). P. 35–62. <https://doi.org/10.2140/pjm.1988.132.35>
39. *Ivic A.* The Riemann Zeta-Function, Wiley: New York, 1985.
40. *Kuznetsov S.V.* Fundamental and singular solutions of Lamé equations for media with arbitrary elastic anisotropy // Quart. Appl. Math. 2005, V. 63. P. 455–467. <https://doi.org/10.1090/S0033-569X-05-00969-X>
41. *Hörmander L.* The Analysis of Linear Partial Differential Operators III: Pseudo-Differential Operators. N.Y.: Springer: 2007.
42. *Boreman G.D.* Modulation Transfer Function in Optical and Electro-Optical Systems. Bellingham, WA.: SPIE Press, 2001.
43. *Ziegler P.A., Schumacher M.E., Dezes P., van Wees J.-D. & Cloetingh S.* Post-Variscan evolution of the lithosphere in the area of the European Cenozoic Rift System. London: Mem. Geol. Soc., 2006. P. 97–112. <https://doi.org/10.1144/GSL.MEM.2006.032.01.06>
44. *Loup B. & Wildi W.* Subsidence analysis in the Paris Basin: a key to Northwest European intracontinental basins? // Basin Res. 1994. V. 6. № 2–3. P. 159–177. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2117.1994.tb00082.x>
45. *Goldstein R.V. et al.* Long-wave asymptotics of Lamb waves // Mech. Solids. 2017. V. 52. P. 700–707. <https://doi.org/10.3103/S0025654417060097>
46. *Abers G.A.* Seismic low-velocity layer at the top of subducting slabs: Observations, predictions, and systematic // Phys. Earth Planet. Inter. 2005. V. 149. № 1–2. P. 7–29. <https://doi.org/10.1016/j.pepi.2004.10.002>
47. *Nakanishi A. et al.* Crustal evolution of the southwestern Kuril Arc, Hokkaido Japan, deduced from seismic velocity and geochemical structure // Tectonophysics. 2009. V. 472. № 1–4. P. 105–123. <https://doi.org/10.1016/j.tecto.2008.03.003>
48. *Kuznetsov S.V.* Acoustic waves in functionally graded rods with periodic longitudinal inhomogeneity // Mech. Adv. Mater. Struct. 2022. <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2032888>

SPATIAL DISPERSION OF ACOUSTIC WAVES IN FUNCTIONALLY GRADED RODS

A. I. Karakozova^{a,*}

^a National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, 129337 Russia

*e-mail: karioca@mail.ru

Received 01.02.2023

Revised 23.02.2023

Accepted 27.02.2023

Abstract — Harmonic acoustic waves in a semi-infinite functional-gradient (FG) one-dimensional rod with arbitrary longitudinal inhomogeneity are analyzed by a combined method based on the modified Cauchy formalism and the method of exponential

matrices. Closed dispersion equations for harmonic waves are constructed, from the solution of which implicit dispersion relations for acoustic waves in FG rods are obtained. For longitudinal heterogeneity of polynomial type, the corresponding dispersion relations are constructed explicitly.

Keywords: acoustic wave; heterogeneous rod; signal attenuation; displacement magnitude; longitudinal heterogeneity

REFERENCES

1. *Baron C., Naili S.* Propagation of elastic waves in a fluid-loaded anisotropic functionally graded waveguide: application to ultrasound characterization // *J. Acoust. Soc. Am.* 2010. V. 127 (3). P. 1307–1317. <https://doi.org/10.1121/1.3292949>
2. *Bendenia N. et al.* Deflections, stresses and free vibration studies of FG-CNT reinforced sandwich plates resting on Pasternak elastic foundation // *Comp. Concrete.* 2020. V. 26. № 3. P. 213–226. <https://doi.org/10.12989/cac.2020.26.3.213>
3. *Gupta A., Talha M.* Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures // *Prog. Aerosp. Sci.* 2015. V. 79. P. 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2015.07.001>
4. *Han X. et al.* A quadratic layer element for analyzing stress waves in FGMs and its application in material characterization // *JSV.* 2000. V. 236 (2). P. 307–321. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.2966>
5. *Ilyashenko A.V. et al.* SH waves in anisotropic (monoclinic) media // *Z. Angew. Math. Phys.* 2018. 69 (17). P. 17. <https://doi.org/10.1007/s00033-018-0916-y>
6. *Kuznetsov S.V.* Cauchy formalism for Lamb waves in functionally graded plates // *J. Vibr. Control.* 2019. V. 25. № 6. P. 1227–1232. <https://doi.org/10.1177/1077546318815376>
7. *Kuznetsov S.V.* Lamb waves in stratified and functionally graded plates: discrepancy, similarity, and convergence // *Waves Rand. Complex Media.* 19. V. 31 (6). P. 1–10. <https://doi.org/10.1080/17455030.2019.1683257>
8. *Li Z., Yu J., Zhang X., Elmaimouni L.* Guided wave propagation in functionally graded fractional viscoelastic plates: A quadrature-free Legendre polynomial method // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2020. V. 29 (16). P. 1–21. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1860273>
9. *Menasria A. et al.* A four-unknown refined plate theory for dynamic analysis of FG-sandwich plates under various boundary conditions // *Steel Comp. Struct.* 2020. V. 36 (3). P. 355–367. <https://doi.org/10.12989/scs.2020.36.3.355>
10. *Vlasie V., Rousseau M.* Guide modes in a plane elastic layer with gradually continuous acoustic properties // *NDT&E Int.* 2004. V. 37 (8). P. 633–644. <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2004.04.003>
11. *Amor M.B., Ghazlen M.H.B.* Lamb waves propagation in functionally graded piezoelectric materials by Peano-series method // *Ultrasonics.* 2015. V. 55. P. 10–14. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2014.08.020>
12. *Chikr S.C. et al.* A novel four-unknown integral model for buckling response of FG sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions using Galerkin's approach // *Geomech. Eng.* 2020. V. 21. № 5. P. 471–487. <https://doi.org/10.12989/gae.2020.21.5.471>
13. *Lefebvre J.E. et al.* Acoustic wave propagation in continuous functionally graded plates: an extension of the Legendre polynomial approach // *IEEE T Ultrason. Ferr.* 2001. V. 48 (5). P. 1332–1340. <https://doi.org/10.1109/58.949742>
14. *Othmani C. et al.* Numerical simulation of lamb waves propagation in a functionally graded piezoelectric plate composed of GaAs-AlAs materials using Legendre polynomial approach // *Optik.* 2017. V. 142. P. 401–411.

15. Yu J.G. *et al.* Propagating and non-propagating waves in infinite plates and rectangular cross section plates: orthogonal polynomial approach // *Acta Mech.* 2017. V. 228 (11). P. 3755–3769. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1917-1>
16. Gopalakrishnan S., Ruzzene M., Hanagud S. Spectral Finite Element Method. In: *Computational Techniques for Structural Health Monitoring*. In: Springer Series in Reliability Engineering. London: Springer, 2011. 440 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-85729-284-1>
17. Nanda N., Kapuria S. Spectral finite element for wave propagation analysis of laminated composite curved beams using classical and first order shear deformation theories // *Composite Struct.* 2015. V. 132. № 3. P. 310–320. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.04.061>
18. Baron C. Propagation of elastic waves in an anisotropic functionally graded hollow cylinder in vacuum // *Ultrasonics*. 2011. V. 51. № 2. P. 123–130. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2010.07.001>
19. Honarvar F., Enjilela E., Sinclair A., Mirnezami S. Wave propagation in transversely isotropic cylinders // *Int. J. Solids and Struct.* 2007. V. 44. № 16. P. 5236–5246. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.12.029>
20. Ilyashenko A.V. *et al.* Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // *Arch. Appl. Mech.* 2018. V. 88. P. 1385–1394. <https://doi.org/10.1007/s00419-018-1377-7>
21. Rigby S.E., Barr A.D., Clayton M. A review of Pochhammer–Chree dispersion in the Hopkinson bar // *Proc. Inst. Civil Eng. – Eng. Comp. Mech.* 2018. V. 171. № 1. P. 3–13. <https://doi.org/10.1680/jencm.16.00027>
22. Wu B., Su Y.P., Liu D.Y., Chen W.Q., Zhang C.Z. On propagation of axisymmetric waves in pressurized functionally graded elastomeric hollow cylinders // *J. Sound Vibr.* 2018. V. 412. № 12. P. 17–47. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.01.055>
23. Xu Ch., Yu Z. Numerical simulation of elastic wave propagation in functionally graded cylinders using time-domain spectral finite element method // *Adv. Mech. Eng.* 2017. 9 (11). P. 1–17. <https://doi.org/10.1177/1687814017734457>
24. Zhang B. *et al.* Axial guided wave characteristics in functionally graded one-dimensional hexagonal piezoelectric quasi-crystal cylinders // *Math. Mech. Solids*. 2022. V. 27. № 1. P. 125–143. <https://doi.org/10.1177/10812865211013458>
25. Kuznetsov S.V. Abnormal dispersion of flexural Lamb waves in functionally graded plates // *Z. Angew. Math. Phys.* 2019. V. 70 (89). P. 1–8. <https://doi.org/10.1007/s00033-019-1132-0>
26. Guha S., Singh A.K. Influence of varying fiber volume fractions on plane waves reflecting from the stress-free/rigid surface of a piezoelectric fiber-reinforced composite half-space // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2022. V. 29. № 27. P. 5758–5772. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1964046>
27. Singh A.K., Rajput P., Guha S., Singh S. Propagation characteristics of love-type wave at the electro-mechanical imperfect interface of a piezoelectric fiber-reinforced composite layer overlying a piezoelectric half-space // *Europ. J. Mech. – A/Solids*. 2022. V. 93. P. 104527. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104527>
28. Singh S., Singh A.K., Guha S. Shear waves in a piezo-fiber-reinforced-poroelastic composite structure with sandwiched functionally graded buffer layer: Power series approach // *Europ. J. Mech. – A/Solids*. 2022. V. 92. P. 104470. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104470>
29. Singh S., Singh A.K., Guha S. Impact of interfacial imperfections on the reflection and transmission phenomenon of plane waves in a porous-piezoelectric model // *Appl. Math. Model.* 2021. V. 100. P. 656–675. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.08.022>
30. Singh A.K., Mahto S., Guha S. Analysis of plane wave reflection and transmission phenomenon at the interface of two distinct micro-mechanically modeled rotating initially stressed piezomagnetic fiber-reinforced half-spaces // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2022. V. 29. № 28. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.2003490>
31. Gurtin M.E. *The Linear Theory of Elasticity*. Verlag, Berlin: Springer, 1976.
32. Rauch J., Reed M. Nonlinear microlocal analysis of semilinear hyperbolic systems in one space dimension // *Duke Math. J.* 1982. V. 49. P. 397–475.

33. *Hartman Ph.* Ordinary Differential Equations (Classics in Applied Mathematics) 2nd Ed. Philadelphia: SIAM, 1987.
34. *Higham N.J.* Functions of Matrices: Theory and Computation. N.Y.: SIAM, 2008.
35. *Kuznetsov S.V.* Love waves in layered anisotropic media // J. Appl. Math. Mech. 2006. V. 70 (1). P. 116–127. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2006.03.004>
36. *Gómez, A., Meiss J.D.* Volume-preserving maps with an invariant // Chaos: Int. J. Nonlinear Sci. 2002. V. 12 (2). P. 289–299. <https://doi.org/10.1063/1.1469622>
37. *Benoist O.* Writing positive polynomials as sums of (few) squares // EMS Newsletter. 2017. V. 9 (105). P. 8–13. <https://doi.org/10.4171/NEWS/105/4>
38. *Handelman D.* Representing polynomials by positive linear functions on compact convex polyhedral // Pacific J. Math. 1988. V. 132 (1). P. 35–62. <https://doi.org/10.2140/pjm.1988.132.35>
39. *Ivic A.* The Riemann Zeta-Function, Wiley: New York, 1985.
40. *Kuznetsov S.V.* Fundamental and singular solutions of Lamé equations for media with arbitrary elastic anisotropy // Quart. Appl. Math. 2005, V. 63. P. 455–467. <https://doi.org/10.1090/S0033-569X-05-00969-X>
41. *Hörmander L.* The Analysis of Linear Partial Differential Operators III: Pseudo-Differential Operators. N.Y.: Springer: 2007.
42. *Boreman G.D.* Modulation Transfer Function in Optical and Electro-Optical Systems. Bellingham, WA.: SPIE Press, 2001.
43. *Ziegler P.A., Schumacher M.E., Dezes P., van Wees J.-D., Cloetingh S.* Post-Variscan evolution of the lithosphere in the area of the European Cenozoic Rift System. London: Mem. Geol. Soc., 2006. P. 97–112. <https://doi.org/10.1144/GSL.MEM.2006.032.01.06>
44. *Loup B., Wildi W.* Subsidence analysis in the Paris Basin: a key to Northwest European intracontinental basins? // Basin Res. 1994. V. 6. № 2–3. P. 159–177. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2117.1994.tb00082.x>
45. *Goldstein R.V. et al.* Long-wave asymptotics of Lamb waves // Mech. Solids. 2017. V. 52. P. 700–707. <https://doi.org/10.3103/S0025654417060097>
46. *Abers G.A.* Seismic low-velocity layer at the top of subducting slabs: Observations, predictions, and systematic // Phys. Earth Planet. Inter. 2005. V. 149. № 1–2. P. 7–29. <https://doi.org/10.1016/j.pepi.2004.10.002>
47. *Nakanishi A. et al.* Crustal evolution of the southwestern Kuril Arc, Hokkaido Japan, deduced from seismic velocity and geochemical structure // Tectonophysics. 2009. V. 472. № 1–4. P. 105–123. <https://doi.org/10.1016/j.tecto.2008.03.003>
48. *Kuznetsov S.V.* Acoustic waves in functionally graded rods with periodic longitudinal inhomogeneity // Mech. Adv. Mater. Struct. 2022. <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2032888>

УДК 534.01

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ЭФФЕКТА “БИФУРКАЦИОННОЙ ПАМЯТИ” НА ДИНАМИКУ КОРАБЛЯ

© 2024 г. А. В. Чернышов^{а,*}, С. А. Чернышова^{а,**}

^аНижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева,
Нижний Новгород, Россия

^{*}*e-mail: andrey.chernyshov5@gmail.com*

^{**}*e-mail: sofya.chernyshova99@gmail.com*

Поступила в редакцию 27.02.2023 г.

После доработки 24.03.2023 г.

Принята к публикации 27.04.2023 г.

Изучение эффекта “бифуркационной памяти” играет важную роль в исследовании динамических особенностей реальных систем. Практический интерес заключается в изучении возможности прогнозирования временного снижения реакции на управление, что может существенно повысить безопасность навигации. Эффект “бифуркационной памяти” заключается во временном снижении фазовой скорости изображающей точки при прохождении определенной области (“фазового пятна”) на фазовой плоскости. “Фазовое пятно” возникает вблизи исчезнувшего при бифуркации состояния равновесия. За почти полувековую историю изучения этой динамической особенности, предложено очень мало методов, позволяющих однозначно и с достаточной точностью идентифицировать эффект “бифуркационной памяти”. В данной работе предложен усовершенствованный метод фазовой плоскости, заключающийся в построении годографа фазовой скорости. Отличительной чертой предлагаемого метода является не только то, что он охватывает обе фазовые координаты, а также дает адекватный результат при любых начальных условиях. Метод вполне универсален и может использоваться для изучения эффекта “бифуркационной памяти” в различных динамических системах. Информация ограниченных значениях параметра — угла перекладки руля, при которых начинает (заканчивает) проявляться эффект “бифуркационной памяти” может быть использована, например, в задаче оптимизации конструкции корпуса и рулей или при создании алгоритмов управления.

Ключевые слова: бифуркационная память, фазовое пятно, метод фазовой плоскости, годограф фазовой скорости

DOI: 10.31857/S1026351924010036, EDN: WAXCQM

1. Введение. Для качественной оценки динамики нелинейных динамических систем широко применяется метод фазовой скорости. Суть метода заключается в исследовании всех возможных состояний системы на плоскости координат состояния при различных значениях параметров. Принципиальное практическое значение имеет тип устойчивости особых точек, поведение объекта вблизи границы устойчивости, наличие или отсутствие предельных циклов¹, бифуркации. Если среди значений параметра существует такое, при котором в системе наблюдается седло-узловая бифуркация и стационарная точка исчезает² (для судов такой параметр угол перекладки руля³), то, при определенных начальных условиях, проявляется эффект “бифуркационной памяти”⁴. Суть этого эффекта, по мнению Чирковой М.М. и Фейгина М.И., заключается в том, что на фазовой плоскости в окрестности исчезнувшего при бифуркации стационарного состояния образуется область, проходя через которую скорость изображающей точки⁵ снижается. При управлении судном такая ситуация характеризуется снижением реакции объекта на управляющее воздействие (перекладку руля)⁶. Практически важно определить значение угла перекладки руля, при котором фазовая траектория не попадает в область временно сниженных фазовых скоростей. Для рассматриваемой в данной работе динамической системы такая область располагается вблизи исчезнувшей при седло-узловой бифуркации полуустойчивой точки⁷. Подробный обзор о состоянии исследований бифуркационных феноменов памяти и запаздывания приведен в уже упоминавшейся работе [2], в которой, в частности, отмечается связь феноменов “запаздывания потери устойчивости” при бифуркационной ситуации с нарушением условий теоремы Тихонова А.Н.

¹ Наличие предельных циклов на фазовом портрете говорит о возникновении автоколебаний. Такой режим при управлении подвижным объектом крайне нежелателен и часто опасен.

² При седло-узловой бифуркации две стационарные точки с разным типом устойчивости, соответствующие грубым состояниям равновесия, сливаются в одну точку, которая потом исчезает [1].

³ Бифуркационное значение параметра, при котором происходит седло-узловая бифуркация, называется критическим углом перекладки руля.

⁴ Авторы не ставят целью заниматься анализом терминологии, тем более что такой анализ проведен в [2]. С точки зрения [2] наиболее удачным является термин “запаздывание”. Термин “бифуркационная память”, используемый для описания происходящих процессов, авторы [2] считают наиболее удобным по причине его краткости в сравнении с аналогичными. Авторство термина “бифуркационная память” принадлежит Фейгину М.И., который в соавторстве и индивидуально опубликовал ряд работ, связанных с изучением этого эффекта в динамике нелинейных систем [3–6].

⁵ Изображающая точка, принадлежащая фазовой плоскости, перемещение которой определяет изменение состояния динамической системы.

⁶ Это может приводить к возникновению аварийных ситуаций, например при расхождении судов в узком канале. Опытные судоводители, особенно на мелководных участках рек, управляют судном, выполняя кладки руля на углы, близкие к максимально возможным, с последующим одерживанием перекладкой на противоположный борт. Таким образом, судоводитель обеспечивает достаточную скорость реакции судна на изменение управления. Величина угла перекладки и время одерживания подбирается судоводителем на основании опыта и индивидуально для каждого судна и условий плавания: глубины и ширины фарватера, течений, ветра.

⁷ Здесь: полуустойчивая точка – сложное состояние равновесия, которое имеет характер седла.

риску навигационного инцидента в силу худшей послушливости рулю, чем корабль, у которого $U_M \ll U_{\max}$. Очевидные минусы метода Чирковой М.М. – это критическая зависимость идентифицируемости “фазового пятна” от Δt и ΔU , а также использование только плоскости $O\omega U$. Вторая координата состояния β_d остается в таком случае без внимания. Логичным развитием метода Чирковой М.М. является использование фазовой плоскости координат состояния $O\beta_d\omega$ взамен плоскости $O\omega U$. Такая методика была предложена в [7].

Основная идея [7] заключается в следующем: изображающая точка заменяется материальной точкой единичной массы, движущейся в плоскости $O\beta_d\omega$ под действием условных обобщенных сил. Далее рассматривается движение материальной точки к устойчивому состоянию равновесия m_0 вдоль криволинейной траектории l , совпадающей с траекторией изображающей точки (рис. 2).

Это движение может быть двух типов: ускоренное или замедленное. Тип движения зависит от угла ξ между вектором фазовой скорости $v = \sqrt{\dot{\omega}^2 + \dot{\beta}^2}$ и ускорения $\dot{v} = \sqrt{(d\dot{\omega}/dt)^2 + (d\dot{\beta}_d/dt)^2}$: если угол ξ тупой – движение замедленное, а если острый – ускоренное. Далее, согласно [7], для каждой пары фазовых координат вычисляется угол ξ и на фазовую плоскость наносятся изолинии $\xi < 90^\circ$ и $\xi > 90^\circ$. Таким образом выделяются области, соответствующие различным типам движения (рис. 2, 3). В [7] рассматриваются точки пересечения фазовой траекторией границы⁹ $A-D$ то есть, когда фазовая скорость начинает снижаться. Если такой переход осуществляется однократно (т. F_m , рис. 2), то эффект бифуркационной памяти не наблюдается, а снижение фазовой скорости объясняется приближением к стационарному состоянию m_0 , в котором $v = 0$. В том случае, когда траектория изображающей точки дважды пересекает границу $A-D$ (т. F_1 и т. F_m , рис. 3), имеет место временное снижение фазовой скорости на участке F_1-F_2 (рис. 3) траектории l , что свидетельствует о проявлении эффекта “бифуркационной памяти”¹⁰. Управление U_M – управление, при котором эффект “бифуркационной памяти” перестает проявляться.

Метод [7] имеет ряд преимуществ, по сравнению с методом Чирковой М.М.: отсутствует критическая зависимость идентифицируемости эффекта “бифуркационной памяти” от шага дискретизации Δt и ΔU , исследуются одновременно обе координаты состояния. Метод [7] существенно выигрывает в точности, по сравнению с методом Чирковой М.М. Однако метод [7] чувствителен к выбору начальных условий. Действительно, если в качестве начальных условий выбрана точка, не принадлежащая некоторой области C^{11} (например, (β'_{d0}, ω'_0) на рис. 3), то пересечение траекторией l' границы $A-D$ будет

⁹ Область A (от англ. accelerated) – область ускоренных движений, область D (от англ. decelerated) – область замедленных движений.

¹⁰ Очевидно, что для данной динамической системы термин “фазовое пятно” не в полной мере отражает топологические особенности области замедленных движений на плоскости $O\beta_d\omega$. Несмотря на это, авторы считают этот термин удачным и интуитивно понятным.

¹¹ Расположение и размер области C в конечном счете зависят от математической модели динамической системы.

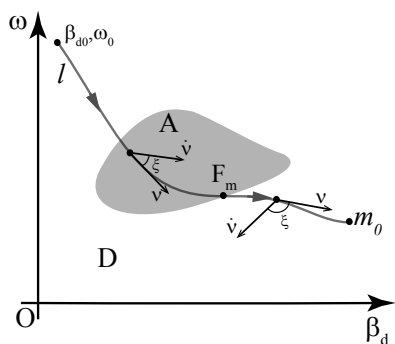


Рис. 2. Отсутствие эффекта “бифуркационной памяти”: т. F_m — точка пересечения траекторией l области ускоренных движений (A) в сторону области замедленных движений (D).

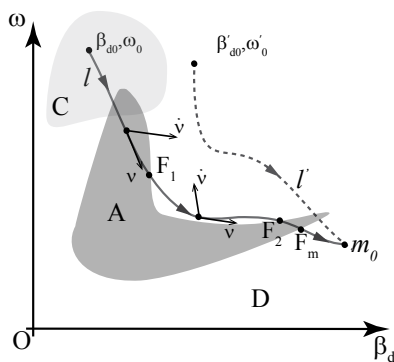


Рис. 3. Эффект “бифуркационной памяти”: т. F_1 и т. F_m — точки пересечения траекторий l границы области ускоренных движений (A) в сторону области замедленных движений (D); $U_i \in [U_{\text{BIF}}, U_{\text{max}}]$. Область C — область начальных условий, ограничивающих применение метода [7].

однократное, как при отсутствии эффекта “бифуркационной памяти”. Таким образом, применение метода [7] ограничено областью начальных условий C .

2. Годограф фазовой скорости. Применение метода [7] демонстрирует “неоднородность” фазового пространства динамических систем, позволяет прогнозировать динамику управляемого объекта, что, в конечном счете, сказывается на повышении безопасности навигации. Однако для задач оптимизации при проектировании корпусов судов или создания алгоритмов управления необходимо знать не только топологию областей A и D , но и иметь критерий, с помощью которого можно найти U_M . Другими словами, критерий, который бы позволил идентифицировать наличие или отсутствие эффекта “бифуркационной памяти” при движении изображающей точки вдоль фазовой траектории при любых начальных условиях.

В данной работе с целью идентификации эффекта “бифуркационной памяти” в динамике корабля предлагается усовершенствовать метод фазовой плоскости путем построения годографа фазовой скорости.

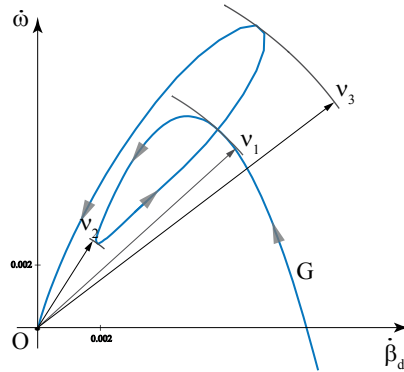


Рис. 4. Годограф фазовой скорости, построенный для судна “Волгонефть-71” при $U = 5^\circ$, $U \in [U_{BIF}, U_M]$. Стрелками показано направление движения радиус-вектора с течением времени. Начальные условия: точка $(\beta_{d0} = -0.4, \omega_0 = -0.5) \in C$.

Аналогично [7] будем использовать математическую модель [8]:

$$\begin{cases} \frac{d\beta_d}{dt} = A\beta_d + B\omega + S_\beta U + P(\beta_d) \\ \frac{d\omega}{dt} = C\beta_d + D\omega + S_\omega U, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $P(\beta_d) = H\beta_d|\beta_d|$, $A, B, C, D, H, S_\beta, S_\omega \in R$ — гидродинамические коэффициенты, β_d, ω — фазовые координаты (β_d — угол дрейфа, ω — угловая скорость), U — угол поворота руля ($U \in [-U_{\max BIF}, U_{\max}]$), где $U_{\max} = 35^\circ$. Гидродинамические коэффициенты, как и в [7], вычислены для судна “Волгонефть-71”: $A = 0.048$, $B = -0.01$, $C = 0.155$, $D = 0.1$, $H = -0.118$, $S_\beta = 0.0009$, $S_\omega = 0.001$.

Перейдем к полярным координатам на плоскости $O\beta_d\dot{\omega}$ ¹²:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\dot{\beta}_d^2 + \dot{\omega}^2} \\ \operatorname{tg}(\phi) &= \frac{\dot{\omega}}{\dot{\beta}_d} \\ \dot{\beta}_d &= v \sin(\phi) \\ \dot{\omega} &= v \cos(\phi). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Кривая G , вычерченная на плоскости $O\beta_d\dot{\omega}$ концом радиус-вектора v — годограф фазовой скорости (рис. 4). Годограф G отражает изменение фазовой скорости при движении изображающей точки вдоль фазовой траектории. В точке O модуль радиус-вектора (фазовая скорость v) равен нулю — стационарное состояние динамической системы. Будем строить окружность с центром в т. O , постепенно увеличивая радиус. Отметим точки касания окружности и годографа

¹² Очевидно, модуль радиус-вектора ρ есть фазовая скорость v . Поэтому далее вместо ρ будем использовать v .

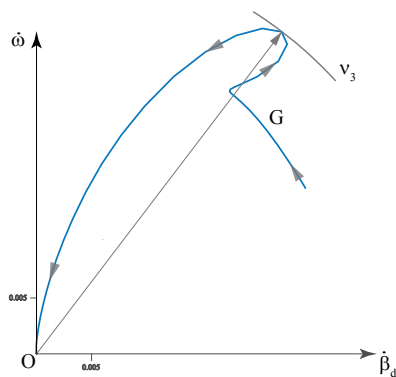


Рис. 5. Годограф фазовой скорости, построенный для судна “Волgoneфть-71” при $U = U_M$ ($U_M = 22^\circ$). Стрелками показано направление движения радиус-вектора с течением времени. Начальные условия соответствуют точке $(\beta_{d0} = -0.4, \omega_0 = -0.5) \in C$.

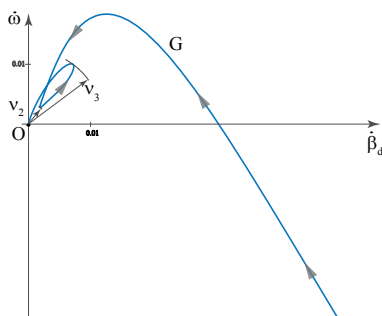


Рис. 6. Годограф фазовой скорости, построенный для судна “Волgoneфть-71” при $U = 5^\circ$, $U \in [U_{BIF}, U_M]$. Стрелками показано направление движения радиус-вектора с течением времени. Начальные условия: точка $(\beta'_{d0} = -0.8, \omega'_0 = -0.8) \notin C$.

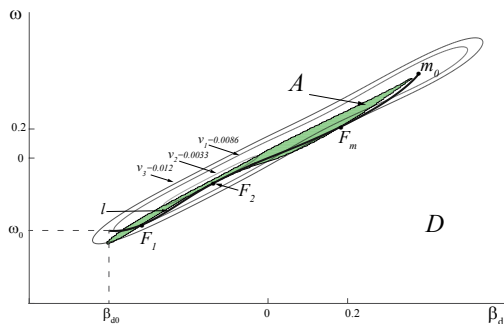


Рис. 7. Объект: “Волgoneфть-71”. Фазовая плоскость с областями (A) и (D) (метод [7]), изолиниями фазовых скоростей $v_1 = 0.0086, v_2 = 0.0033, v_3 = 0.012$ (метод годографа фазовой скорости); l — фазовая траектория. Начальные условия: точка $(\beta_{d0} = -0.4, \omega_0 = -0.5)$; $U = 5^\circ$, $U \in [U_{BIF}, U_M]$.

и затем проведем к этим точкам радиус-векторы. Радиус-вектор v_1 проведен к внешней точке касания окружности и годографа¹³ — начало временного снижения фазовой скорости. Радиус-вектор v_2 , проведенный к внутренней точке касания окружности и годографа, определяет минимальную (ненулевую) фазовую скорость при ее временном снижении. После преодоления минимума фазовая скорость вновь начинает расти. Рост продолжается до значения v_3 , после которого наблюдается снижение до $v_2 = 0$, вызванное приближением к стационарному состоянию. Временное снижение отчетливо прослеживается: фазовая скорость сначала растет до значения v_1 , затем снижается до значения v_2 , затем опять растет до v_1 и дальше до v_3 . Эффект “бифуркационной памяти” присутствует. При увеличении угла перекаладки руля до $U = U_M$ эффект “бифуркационной памяти” исчезает: скорость растет до v_3 и потом снижается до $v = 0$ (рис. 5). Очевидный критерий идентификации эффекта “бифуркационной памяти” — наличие радиус вектора v_2 .

Выберем начальные условия в точке $(\beta'_{d0} = -0.8, \omega'_0 = -0.8) \in C$, (рис. 3). Для этих начальных условий годограф будет иметь вид, представленный на рис. 6. Характерно, что фазовая скорость сразу начинает снижаться, то есть вектор v_1 построить невозможно. Однако, как было указано выше, критерием наличия эффекта “бифуркационной памяти” является существование радиус-вектора v_2 . На годографе фазовой скорости (рис. 6) этот критерий диагностируется. Постепенно увеличивая U , добиваемся исчезновения радиус-вектора v_2 и фиксируем U_M .

3. Заключение. Для идентификации эффекта “бифуркационной памяти” в динамике судов, с целью определения U_M разработаны различные методы: метод статико-динамической плоскости (автор Чиркова М.М.), метод [7] и предлагаемый в этой статье метод годографа фазовой скорости. Отличительной чертой предлагаемого метода является не только то, что он превосходит разработанные ранее методы в точности, но и охватывает обе фазовые координаты, а также дает адекватный результат при любых начальных условиях. Метод вполне универсален и может использоваться для исследования эффекта “бифуркационной памяти” в различных динамических системах. Отметим, что для начальных условий из области C (рис. 3) можно использовать или метод годографа фазовой скорости, или метод [7]. На рис. 7 представлена фазовая плоскость с нанесенными на нее по методу [7] областями замедленных (D) и ускоренных (A) движений изображающей точки. На эту же плоскость (рис. 7) нанесены изолинии, соответствующие v_1, v_2, v_3 , которые были определены на годографе фазовой скорости (рис. 4). Точки F_1 и F_m — точки пересечения фазовой траекторией l границы $A-D$ и, одновременно, внешние точки касания l и изолиний v_1 и v_3 . Точка F_2 — точка касания l и области (A) и, одновременно, внутренняя точка касания l и изолинии v_2 .

Исследуя динамику судов методом годографа фазовой скорости, мы убедились, что существует граница в пространстве значений параметра, при пересечении которой в динамике возникает (или исчезает) эффект “бифуркационной памяти”. Предложенный критерий — существование

¹³ Внешняя точка касания общая точка окружности, годографа и внешней общей касательной. Аналогично, внутренняя точка касания общая точка окружности, годографа и внутренней общей касательной.

радиус-вектора v_2 — нам кажется необходимым и достаточным. Вполне вероятно, что существование радиус-вектора v_2 можно доказать аналитически, однако в объем данной статьи решение данной задачи не входит. В заключение отметим, что эффект “бифуркационной памяти” может присутствовать в динамике не только механических систем. Например, в [9] указывается на существование подобного режима в динамике свертывания крови.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 916 с.
2. Москаленко А.В., Темуев Р.К., Махортых С.А. О состоянии исследований бифуркационных феноменов памяти и запаздывания // Препринты ИПМ им. Келдыша. 2019. Т. 109. С. 144. <https://doi.org/10.20948/prepr-2019-109>
3. Фейгин М.И., Чиркова М.М. О существовании области пониженной управляемости для судов, неустойчивых на прямом курсе // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 7378.
4. Feigin M.I. Investigations of bifurcation memory effects in behaviour of nonlinear controlled systems // Proc. 1st Inter. Conf. Control of Oscillations and Chaos Proceedings. St. Petersburg, Russia: IEEE. 1997. V. 3. P. 474477. <https://doi.org/10.1109/COC.1997.626647>
5. Фейгин М.И., Преображенский А.В., Сатаев В.В. Эффект бифуркационной памяти в динамике судна // Пробл. машиностр. и надежн. машин. 2001. № 3. С. 104107.
6. Фейгин М.И., Каган М.А. К теории эффектов бифуркационной памяти // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 6. С. 4351.
7. Chernyshov A.V., Chernyshova S.A. A method of investigating the phenomenon of bifurcation memory in the dynamics of river vessels // Russ. J. Nonlinear. Dyn. 2022. V 18. № 2. P. 171181. <https://doi.org/10.20537/nd220202>
8. Першиц Р.Я. Управляемость и управление судном. Л.: Судостроение. 1987. 274 с.
9. Атауллаханов Ф.И., Лобанова Е.С., Морозова О.Л. Сложные режимы распространения возбуждения и самоорганизации в модели свертывания крови // УФН. 2007. Т. 177. № 1. С. 87104. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0177.200701d.0087>

IMPROVING THE PHASE PLANE METHOD TO STUDY THE INFLUENCE OF THE “BIFURCATION MEMORY” EFFECT ON SHIP DYNAMICS

A. V. Chernyshov^{a,*}, and S. A. Chernyshova^{a,**}

^a Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod, 603155 Russia

*e-mail: andrey.chernyshov5@gmail.com

**e-mail: sofya.chernyshova99@gmail.com

Received 27.02.2023

Revised 24.04.2023

Accepted 27.04.2023

Abstract — The study of the “bifurcation memory” effect plays an important role in the study of dynamic features of real systems. Practical interest lies in studying

the possibility of predicting a temporary decrease in response to control, which can significantly improve navigation safety. The effect of “bifurcation memory” is a temporary decrease in the phase velocity of the imaging point when passing through a certain area (“phase spot”) on the phase plane. A “phase spot” appears near the equilibrium state that disappeared during bifurcation. Over the almost half-century history of studying this dynamic feature, very few methods have been proposed that make it possible to unambiguously and with sufficient accuracy identify the “bifurcation memory” effect. This article proposes an improved phase plane method, which consists in constructing a phase velocity hodograph. A distinctive feature of the proposed method is not only that it surpasses previously developed methods in accuracy, but also covers both phase coordinates, and also gives an adequate result for any initial conditions. The method is quite universal and can be used to study the effect of “bifurcation memory” in various dynamic systems. Information about the boundary values of the parameter – the rudder angle, at which the effect of “bifurcation memory” begins (ends) to manifest itself can be used, for example, in the problem of optimizing the design of the hull and rudders or when creating control algorithms.

Keywords: bifurcation memory, phase spot, phase plane method, phase velocity hodograph

REFERENCES

1. *A.A. Andronov, A.A. Witt, and S.E. Khaykin*, Theory of Oscillations (Fizmatgiz, Moscow, 1959; Cambridge Univ. Press, 1966).
2. *A.V. Moskalenko, R.K. Tetuev, and S.A. Makhortykh*, Preprint No. 109, Keldysh Institute of Applied Mathematics (KIAM PAS, Moscow, 2019). <https://doi.org/10.20948/prepr-2019-109>
3. *M.I. Feigin and M.M. Chirkova*, “On the existence of a reduced controllability domain for ships unstable with respect to the course angle,” *Izv. AN. SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, No. 2, 73–78 (1985).
4. *M.I. Feigin*, “Investigations of bifurcation memory effects in behaviour of nonlinear controlled systems,” in *Proc. 1st Inter. Conf. Control of Oscillations and Chaos Proceedings* (IEEE, St. Petersburg, 1997), Vol. 3, pp. 474–477. <https://doi.org/10.1109/COC.1997.626647>
5. *M.I. Feigin, A.V. Preobrazhensky, and V.V. Sataev*, “The effect of bifurcation memory in the dynamics of the vessel,” *Probl. Mashinostr. Nadezhn. Mashin*, No. 3, 104–107 (2001).
6. *M.A. Kagan and M.I. Feigin*, “To the theory of bifurcation memory effects,” *Mech. Solids* **37** (6), 34–41 (2002).
7. *A.V. Chernyshov and S.A. Chernyshova*, “A method of investigating the phenomenon of bifurcation memory in the dynamics of river ships,” *Russ. J. Nonlin. Dyn.* **18** (2), 171–181 (2022). <https://doi.org/10.20537/nd220202>
8. *R.Y. Pershits*, *Controllability and Control of the Ship* (Sudostroenie, Leningrad, 1987) [in Russian].
9. *E.I. Ataullakhov, E.S. Lobanova, O.L. Morozova*, et al., “Intricate regimes of propagation of an excitation and self-organization in the blood clotting model,” *Phys. Usp.* **50**, 79–94 (2007). <https://doi.org/10.1070/PU2007v050n01ABEH006156>

УДК 531.36

КВАТЕРНИОННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ЦЕНТРАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ И РЕГУЛЯРНЫЕ МОДЕЛИ ОРБИТАЛЬНОГО (ТРАЕКТОРНОГО) ДВИЖЕНИЯ: ОБЗОР И АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ, ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ

© 2024 г. Ю. Н. Челноков^{а,*}

^а*Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия*

**e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

Поступила в редакцию 14.03.2023 г.

После доработки 10.04.2023 г.

Принята к публикации 12.04.2023 г.

В обзорной статье кратко излагается предложенная нами общая кватернионная теория регуляризующих и стабилизирующих преобразований ньютоновских дифференциальных уравнений возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле, потенциал которого полагается произвольной дифференцируемой функцией расстояния от точки до центра поля. Точка находится также под действием возмущающего потенциала, полагаемого произвольной функцией времени и декартовых координат местоположения точки, и под действием возмущающего ускорения, полагаемого произвольной функцией времени, радиус-вектора и вектора скорости точки. Рассмотрены условия приводимости излагаемых кватернионных уравнений возмущенного центрального движения к осцилляторному виду с помощью использования трех регуляризующих функций, содержащих расстояние до центра поля. Приведены различные дифференциальные кватернионные уравнения возмущенного центрального движения в осцилляторной и нормальной формах, построенные с помощью этой теории, в том числе регулярные уравнения, в которых используются четырехмерные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) или четырехмерные переменные Кустаанхеймо–Штифеля или их модификации, предложенные нами. Рассмотрены регулярные кватернионные уравнения пространственного невозмущенного центрального движения материальной точки, связи используемых четырехмерных переменных с элементами орбиты, униформизированное решение пространственной задачи невозмущенного центрального движения. В качестве приложения изложены регуляризованные дифференциальные кватернионные уравнения движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли в четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля, а также в наших модифицированных четырехмерных переменных и в параметрах Эйлера. Приведен анализ изложенных регулярных кватернионных уравнений возмущенного центрального движения, показывающий, что кватернионный метод регуляризации, основанный на использовании параметров Эйлера или переменных Кустаанхеймо–Штифеля или их модификаций уникален в совместной регуляризации, линеаризации и увеличении размерности для трехмерных кеплеровских систем и центрального движения.

Изложенные регуляризованные (в отношении ньютоновской силы притяжения) дифференциальные кватернионные уравнения движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли в наших модифицированных четырехмерных переменных имеют перед кватернионными уравнениями в переменных Кустаанхеймо–Штифеля преимущества, указанные в статье. В изложенных дифференциальных кватернионных уравнениях движения спутника, построенных с использованием четырехмерных параметров Эйлера, регуляризуются слагаемые уравнений, содержащих отрицательные степени расстояния до центра Земли четвертого порядка включительно. Во всех этих регуляризованных уравнениях в описании гравитационного поля Земли учитываются не только центральная (ньютоновская), но и зональные, тессеральные и секториальные гармоники потенциала поля тяготения Земли (учитывается несферичность Земли).

Ключевые слова: дифференциальные уравнения возмущенного центрального движения материальной точки, кватернионная теория регуляризующих и стабилизирующих преобразований, условия приводимости кватернионных уравнений к осцилляторному виду, регуляризующие функции, кватернионные уравнения в осцилляторной и нормальной формах, параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), переменные Кустаанхеймо–Штифеля, модифицированные четырехмерные переменные, элементы орбиты, униформизированное решение, регуляризованные кватернионные уравнения движения спутника; центральная (ньютоновская), зональные, тессеральные и секториальные гармоники потенциала поля тяготения Земли

DOI: 10.31857/S1026351924010043, EDN: WAPMKG

1. Введение. Регуляризация моделей небесной механики и астродинамики. В основе небесной механики и астродинамики (механики космического полета) лежат ньютоновские дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в декартовых координатах. Эти уравнения вырождаются при соударении второго (изучаемого) тела с первым (центральным) телом (при равенстве нулю расстояния между телами), что делает использование этих уравнений неудобным при изучении движения второго тела в малой окрестности центрального тела или его движения по сильно вытянутым орбитам. Сингулярность в начале координат создает в задаче двух тел не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности. Устранение особенностей типа сингулярности (деления на ноль) классических уравнений небесной механики и астродинамики, порождаемых силами гравитации, получило название “регуляризация” (Леви-Чивита, 1920), а уравнения, не имеющие этих особенностей, называются регулярными.

Среди методов регуляризации и регулярных моделей небесной механики и астродинамики в последнее время широкое распространение (особенно за рубежом) получили кватернионные методы и модели, основанные на использовании гиперкомплексных переменных — кватернионов Гамильтона, компонентами (элементами) которых являются четырехмерные переменные Кустаанхеймо–Штифеля (*KS*-переменные) или их модификации. Эти методы и модели имеют

ряд качественных преимуществ аналитического и вычислительного характеров перед другими методами и моделями.

1.1. Регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел Кустаанхеймо—Штифеля. Проблема устранения указанной особенности, известная в небесной механике и астродинамике как проблема регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной задачи двух тел, восходит к Эйлеру (1765) [1] и Леви-Чивита (1920) [2–4], которые дали решения одномерной и двумерной задач о соударении двух тел (в случаях прямолинейного и плоского движений). Наиболее эффективная регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, так называемая спинорная или *KS*-регуляризация, была предложена Кустаанхеймо и Штифелем (1964–1965) [5, 6]. В регуляризации Кустаанхеймо использованы достоинства методов теории спиноров: вместо одной комплексной переменной теории Леви-Чивита была взята пара комплексных чисел. В регуляризации Штифеля использована введенная им специальная четырехмерная матрица, названная им *KS*-матрицей. Регуляризация Кустаанхеймо—Штифеля наиболее полно изложена в широко известной книге Штифеля и Шейфеле (1971) [7].

В основе регуляризации Кустаанхеймо—Штифеля лежит нелинейное неоднозначное преобразование декартовых координат изучаемого тела (*KS*-преобразование), обобщающее преобразование Леви-Чивита. Причем это преобразование состоит в переходе от трехмерного пространства декартовых координат к четырехмерному пространству новых координат (*к* четырехмерным *KS*-переменным). Неоднозначность этого преобразования делает, по мнению Штифеля и Шейфеля, прямой вывод регулярных уравнений в трехмерном (т.е. пространственном) случае невозможным [7]. Поэтому в своей книге [7] они постулируют матричное регулярное уравнение пространственной задачи двух тел, записанное ими по аналогии с матричным регулярным уравнением Леви-Чивита плоского движения, и с помощью нескольких теорем доказывают, что при этом удовлетворяется старое векторное ньютоновское уравнение.

1.2. Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием переменных Кустаанхеймо—Штифеля. Вскоре после открытия *KS*-преобразования было рассмотрено использование кватернионов (четырехмерных гиперкомплексных чисел) и четырехмерных кватернионных матриц для регуляризации уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел. Однако в своей книге [7] Штифель и Шейфеле полностью отвергли эту идею, написав, что “любая попытка заменить теорию *KS*-матриц более популярной теорией кватернионных матриц приводит поэтому к неудаче или, во всяком случае, к очень громоздкому формализму”. Это утверждение было впервые опровергнуто автором статьи (1981, 1984) [8, 9], показавшим, что в действительности кватернионный подход к регуляризации уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, основанный на использовании кватернионных матриц [8] или кватернионов Гамильтона [9], в отличие от подхода, использующего аппарат *KS*-матриц Штифеля, позволяет дать ясные геометрическую и кинематическую интерпретации регуляризующему преобразованию Кустаанхеймо—Штифеля, раскрывает геометрический смысл его неоднозначности и позволяет дать прямой и наглядный вывод более общих

регулярных уравнений пространственной задачи двух тел, частным случаем которых являются регулярные уравнения Кустаанхеймо–Штифеля.

Так, было показано, что переход в уравнениях пространственной задачи двух тел от трехмерных декартовых координат второго тела к четырехмерным KS -переменным фактически означает запись этих уравнений во вращающейся (неголономной) системе координат с использованием в качестве параметров ориентации этой системы координат четырехмерных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона), являющихся компонентами кватерниона поворота этой системы координат, с дальнейшей их нормировкой посредством множителя, равного квадратному корню из расстояния от второго тела до центра притяжения. Также было показано, что билинейное соотношение, играющее, по словам Штифеля и Шейфеле [7], “основную роль в нашем построении небесной механики”, имеет ясный геометрический и механический смысл. Отказ от выполнения этого соотношения позволил автору статьи получить [8, 9] более общие регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел.

Позднее (1985, 1992, 1993) [10–13] идеи кватернионной регуляризации уравнений задачи двух тел были использованы автором статьи для разработки теории кватернионной регуляризации векторного дифференциального уравнения возмущенного центрального движения материальной точки. Так, им были получены регулярные дифференциальные уравнения возмущенного центрального движения материальной точки осцилляторного вида, регулярные для потенциала, являющегося полиномом четвертой отрицательной степени расстояния до центра притяжения (уравнения Кустаанхеймо–Штифеля регулярны лишь для полинома первой отрицательной степени этого расстояния).

Изучению различных аспектов кватернионной регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием KS -переменных посвящены работы [14–31], а также работы автора статьи [10–13, 32–43].

Отметим статьи известного западного ученого Вальдфогеля [22, 23], посвященные кватернионной регуляризации уравнений задачи двух тел. Так, в 2008 году им была опубликована статья [23] под названием “Кватернионы для регуляризации небесной механики: верный (истинный) путь”, в которой говорится, что кватернионы “являются идеальным инструментом для описания и разработки теории пространственной регуляризации в небесной механике”. Отметим, что Вальдфогель [23] признает приоритет автора статьи в области кватернионной регуляризации, говоря об этом в своей статье.

1.3. О точности численного решения регулярных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля. В работах [7, 44–51] приводятся результаты сравнения численного решения уравнений орбитального движения небесных и космических тел в KS -переменных, параметрах Эйлера и в других переменных, которые свидетельствуют об эффективности использования KS -переменных и параметров Эйлера в задачах небесной механики и астродинамики.

Логиновым и Челноковым [52] проведено сравнительное исследование точности численного интегрирования классических ньютоновских дифференциальных уравнений пространственной ограниченной задачи трех тел (Земля, Луна и космический аппарат) в декартовых координатах и построенных автором статьи [39, 40] регулярных кватернионных дифференциальных уравнений этой

задачи в KS -переменных, принимающих вид регулярных кватернионных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел в случае отсутствия поля тяготения Луны. Эти уравнения показали значительно более высокую точность в сравнении с уравнениями в декартовых координатах: для круговой орбиты точность оказалась выше на 2 порядка, для возмущенных эллиптических орбит со средним эксцентриситетом — на 4 порядка, для возмущенной эллиптической орбиты с высоким эксцентриситетом — на 7 порядков. Сравнение этих результатов с результатами, приведенными в книге Бордовицыной [44], показало, что они в целом согласуются между собой.

1.4. Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием переменных Леви-Чивита и параметров Эйлера. Леви-Чивита в отношении своих попыток обобщить предложенную им знаменитую регуляризацию уравнений плоской задачи двух тел на пространственную задачу позже признал [3]: “Проблема в пространстве долго сопротивлялась моим усилиям, так как я пытался подойти к ней с помощью аналогичных изменений координат [...]”. Штифель и Шейфеле в своей книге [7] отмечали, что Леви-Чивита приложил много усилий, чтобы найти обобщение своего метода регуляризации дифференциальных уравнений плоского движения в задаче двух тел на общую пространственную задачу двух тел, но безуспешно. В работе [53] (Aarseth, Zare), а также в книге [54] (Aarseth) говорится, что из-за фундаментальных трудностей, первоначально разъясненных Хопфом [55] и Гурвицем [56], невозможно обобщить преобразование Леви-Чивита к эквивалентному набору трехмерных переменных (на случай трехмерного пространства). Тем не менее, автором статьи [37] было показано, что регуляризация Леви-Чивита может быть с успехом использована для построения регулярных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел.

Предложенный нами [37] новый метод регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел основан на использовании двухмерных идеальных прямоугольных координат Ганзена и регулярных двухмерных переменных Леви-Чивита, описывающих движение второго (рассматриваемого) тела в идеальной системе координат [57] (Deprit), в которой уравнения пространственного движения принимают вид уравнений плоского движения, а также основан на использовании четырехмерных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватерниона Гамильтона, характеризующих ориентацию идеальной системы координат в инерциальной системе координат. В полученных с помощью этого метода регулярных скалярных и кватернионных уравнениях возмущенной пространственной задачи двух тел переменными являются переменные Леви-Чивита, кеплеровская энергия, время и параметры Эйлера. Используемые в качестве переменных параметры Эйлера и кватернион ориентации идеальной системы координат являются скалярными и кватернионным оскулирующими элементами орбиты изучаемого (второго) тела (медленно изменяющимися переменными).

Эти регулярные уравнения, образуют в общем случае систему нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений десятого порядка (такую же размерность имеют регулярные уравнения Кустаанхеймо–Штифеля). Они, также как и уравнения Кустаанхеймо–Штифеля, регулярны в центре притяжения (в отличие от нерегулярных ньютоновских уравнений), линейны для невозмущенных

кеплеровских движений (в отличие от существенно нелинейных для этих движений ньютоновских уравнений); позволяют выработать единый подход к изучению всех трех типов кеплеровского движения (эллиптического, гиперболического, параболического) с использованием функций Штумпфа, близки к линейным уравнениям для возмущенных кеплеровских движений, позволяют представить правые части дифференциальных уравнений движения небесных и космических тел в полиномиальной форме, удобной для их численного решения.

Однако эти регулярные уравнения имеют существенные отличия от регулярных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля: 1) для невозмущенного эллиптического кеплеровского движения изучаемого тела они эквивалентны уравнениям движения не четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора, как в случае Кустаанхеймо–Штифеля, а уравнениям движения двухмерного одночастотного гармонического осциллятора, т.к. для этого случая движения тела кватернион ориентации идеальной системы координат, в которой записаны эти уравнения движения, и его компоненты (параметры Эйлера) остаются постоянными, 2) для возмущенного движения изучаемого тела кватернион ориентации идеальной системы координат является кватернионным оскулирующим элементом (т.е. медленно изменяющейся кватернионной переменной), а параметры Эйлера (компоненты этого кватерниона) – скалярными оскулирующими элементами, что также является полезным свойством этих уравнений, позволяющим эффективно использовать методы нелинейной механики.

Отметим, однако, что эти уравнения не пригодны для исследования прямолинейных орбит, когда модуль c вектора момента орбитальной скорости второго тела обращается в ноль, поскольку кватернионное дифференциальное уравнение ориентации идеальной системы координат в этом случае вырождается (в знаменателях коэффициентов этого уравнения присутствует величина c). От этого недостатка этих уравнений можно избавиться, переходя в них от используемой независимой переменной τ , связанной с реальным временем t дифференциальным соотношением $dt = r d\tau$ (преобразованием времени Зундмана [58]), к новой независимой переменной τ^* в соответствии с дифференциальным соотношением $d\tau = c d\tau^*$ и дополняя полученные уравнения дифференциальным уравнением для переменной c .

1.5. Содержание статьи. В нашей статье, носящей обзорно-аналитический характер, кратко излагается предложенная нами [10–13, 35] общая кватернионная теория регуляризирующих и стабилизирующих преобразований ньютоновских дифференциальных уравнений возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле.

Приводятся различные регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного центрального движения в осцилляторной и нормальной формах, построенные в рамках этой теории, в том числе уравнения, в которых используются четырехмерные параметры Эйлера или переменные Кустаанхеймо–Штифеля, или их модификации, предложенные нами:

1) регулярные осцилляторные уравнения, в которых используются четырехмерные переменные Кустаанхеймо–Штифеля, энергия h центрального движения или полная энергия h^* возмущенного центрального движения материальной точки, включающая потенциал возмущающих сил, и время t ; в качестве независимой

переменной в этих уравнениях используется переменная τ , определяемая дифференциальным преобразованием времени Зундмана ($dt = r d\tau$);

2) регулярные осцилляторные уравнения, в которых используются четырехмерные параметры Эйлера (Родрига—Гамильтона), расстояние r , полная энергия h^* , квадрат модуля c вектора $\mathbf{c}$ момента орбитальной скорости материальной точки и время t ; в качестве независимой переменной в этих уравнениях используется либо переменная τ , определяемая дифференциальным соотношением $d\tau = r^{-2} dt$, либо переменная φ (полярная координата), определяемая дифференциальным соотношением $d\varphi = (c / r^2) dt$;

3) регулярные нормальные уравнения, в которых используются кватернион λ ориентации используемой вращающейся системы координат (его компоненты — параметры Эйлера), двухмерный или трехмерный кватернион $\mathbf{c}$ момента орбитальной скорости точки, расстояние r , полная энергия h^* и время t ; в качестве независимой переменной в этих уравнениях используется либо переменная τ , определяемая дифференциальным соотношением $d\tau = r^{-2} dt$, либо полярная координата φ .

Из первой группы уравнений следуют, как частные, системы регулярных кватернионных уравнений в переменных Кустаанхеймо—Штифеля для возмущенного кеплеровского движения, нашедшие широкое распространение. Уравнения второй и третьей групп являются регулярными для возмущенного центрального движения материальной точки в силовом поле с потенциалом Π , имеющим четвертый порядок относительно величины r^{-1} , обратной расстоянию до центра притяжения (уравнения в переменных Кустаанхеймо—Штифеля являются регулярными лишь для возмущенного движения материальной точки в силовом поле с потенциалом Π , имеющим первый порядок относительно величины r^{-1} , т.е. в силовом поле с ньютоновским потенциалом). Уравнения этих групп могут быть использованы для прогноза движения планет с учетом эффектов общей теории относительности (ОТО) и для построения регулярных кватернионных уравнений возмущенного орбитального движения твердого тела в гравитационном поле Земли.

В статье рассмотрены кватернионные уравнения пространственного невозмущенного центрального движения материальной точки, имеющие вид уравнений движения одночастотного четырехмерного гармонического осциллятора, частота колебаний которого равна $c/2$ или равна $1/2$ (в зависимости от используемого регуляризирующего дифференциального преобразования времени). Также рассмотрены связи используемых четырехмерных λ и u -переменных с элементами орбиты, приведено униформизированное решение пространственной задачи невозмущенного центрального движения, позволяющее избавиться от необходимости рассмотрения ветвления решений, возникающих при обходе критических точек типа полюсов, приведены различные регулярные кватернионные уравнения возмущенного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли, в которых используются или четырехмерные параметры Эйлера, или переменные Кустаанхеймо—Штифеля, или их модификации. Дан анализ регулярных кватернионных уравнений.

В статье в разделе 2 рассмотрены кватернионные регулярные уравнения возмущенного центрального движения; в разделе 3 невозмущенное центральное

движение; в разделе 4 задача о возмущенном движении искусственного спутника в гравитационном поле Земли. В конце статьи приведено Заключение.

2. Кватернионные регулярные уравнения возмущенного центрального движения. 2.1. *Кватернионная регуляризация векторного дифференциального уравнения возмущенного центрального движения.* В наших работах [10–13, 35] предложенные нами [8, 9] идеи кватернионной регуляризации уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел были использованы для разработки кватернионной теории регуляризации векторного дифференциального уравнения возмущенного движения материальной точки M в центральном силовом поле, имеющего вид

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{1}{m} \left(\frac{d\Pi}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{r}} \right) + \mathbf{p}, \quad r = |\mathbf{r}|, \quad \Pi = \Pi(r) \quad (2.1)$$

$$\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}) = \Pi^*(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{r}} = \text{grad} \Pi^* = \frac{\partial \Pi^*}{\partial \xi_1} \xi_1 + \frac{\partial \Pi^*}{\partial \xi_2} \xi_2 + \frac{\partial \Pi^*}{\partial \xi_3} \xi_3$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt) = \mathbf{p}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3).$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор материальной точки M , проводимый из центра O силового поля, m — масса точки, Π — потенциал центрального силового поля, полагаемый произвольной дифференцируемой функцией расстояния r от точки M до центра O , Π^* — возмущающий потенциал, полагаемый произвольной функцией времени t и координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 местоположения точки M в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ (ξ), которая движется относительно инерциальной системы координат поступательно; ξ_1, ξ_2, ξ_3 орты осей $O\xi_1, O\xi_2, O\xi_3$; $\mathbf{p}$ — вектор возмущающего ускорения точки M , полагаемый произвольной функцией времени t , радиус-вектора $\mathbf{r}$ и вектора скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ точки M в системе координат ξ .

Векторное дифференциальное уравнение невозмущенного центрального движения материальной точки получается из уравнения (2.1) при $\Pi^* = 0, \mathbf{p} = 0$.

В работах [10–13, 35] были получены общие кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного центрального движения материальной точки с тремя регуляризующими функциями, установлены необходимые и достаточные условия их приводимости к удобному для аналитического и численного исследования осцилляторному виду (к виду уравнений движения четырехмерного возмущенного осциллятора, совершающего в случае невозмущенного центрального движения гармонические колебания с одинаковой частотой); получены различные (в том числе новые регулярные) системы кватернионных дифференциальных уравнений возмущенного центрального движения материальной точки в нормальной и осцилляторной формах, отличающиеся своей структурой, размерностью, используемыми зависимыми и независимыми переменными; дана сравнительная характеристика полученных систем уравнений, указаны их свойства и области использования.

Для получения регулярных уравнений возмущенного центрального движения материальной точки векторное уравнение (2.1) было записано нами

во вращающейся системе координат η , ось η_1 которой была направлена вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки M . В качестве параметров ориентации этой системы координат были использованы четырехмерные параметры Эйлера (Родрига—Гамильтона) λ_j . В состав уравнений движения точки, записанных во вращающейся системе координат, входят следующие дифференциальные уравнения: скалярное уравнение второго порядка для расстояния r , два скалярных уравнения первого порядка для проекций ω_2 и ω_3 вектора абсолютной угловой скорости вращения системы координат η на ее же координатные оси η_2 и η_3 , кватернионное уравнение первого порядка для кватерниона λ , описывающего ориентацию системы координат η в инерциальном пространстве, эквивалентное четырем скалярным уравнениям для параметров Эйлера λ_j . Проекция ω_1 угловой скорости вращения системы координат η на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки является произвольно задаваемым параметром и полагается нами равной нулю.

В дальнейшем вместо переменных ω_2 и ω_3 были введены проекции c_2 и c_3 на оси системы координат η вектора $\mathbf{c}$ момента скорости материальной точки, определяемые равенствами

$$c_2 = r^2 \omega_2, \quad c_3 = r^2 \omega_3 \quad (c_1 = 0).$$

Для получения регулярных уравнений были также использованы дифференциальные уравнения для кеплеровской энергии h материальной точки, ее полной энергии h^* и для модуля c вектора $\mathbf{c}$ момента скорости точки или его квадрата c^2 .

Дальнейшие регуляризующие преобразования указанных уравнений, выполненные нами, включают следующие этапы:

1) Переход от дифференциальных уравнений первого порядка для переменных c_2 и c_3 и λ к дифференциальному кватернионному уравнению второго порядка для кватернионной переменной $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j} + \lambda_3 \mathbf{k}$. Для этого исходное уравнение первого порядка для переменной λ дифференцируется по времени t и учитываются дифференциальные уравнения для переменных c_2 и c_3 .

2) Дополнение полученного кватернионного уравнения для переменной λ дифференциальными скалярными уравнениями второго порядка для расстояния r и первого порядка для энергий h , h^* и модуля c вектора момента скорости. Правые части уравнений для h , h^* и c при этом записываются через параметры Эйлера λ_j и расстояние r .

3) Замена переменной λ в полученном кватернионном уравнении второго порядка на новую четырехмерную переменную $\mathbf{u} = u_0 + u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}$ по формуле

$$\lambda = \kappa(r) \mathbf{u},$$

где $\kappa(r)$ — регуляризующая функция (дважды дифференцируемая функция расстояния r). При $\kappa(r) = r^{-1/2}$ новые скалярные переменные u_j (компоненты кватернионной переменной $\mathbf{u}$) являются переменными Кустаанхеймо—Штифеля.

В итоге получается основное дифференциальное кватернионное уравнение второго порядка для переменной $\mathbf{u}$ с регуляризующей функцией $\kappa(r)$.

На этом же этапе производится замена переменных λ_j на новые переменные u_j в уравнениях для переменных r , h , h^* , c по формулам

$$\lambda_0 = \kappa(r) u_0, \quad \lambda_i = -\kappa(r) u_i.$$

4) Выполнение регуляризующего преобразования реального времени t . Для этого осуществляется переход в полученном дифференциальном кватернионном уравнении второго порядка для переменной $\mathbf{u}$ от времени t к новой независимой переменной τ по формуле

$$dt = v(r)d\tau,$$

где $v(r)$ – вторая регуляризующая функция расстояния r .

В итоге было получено основное дифференциальное кватернионное уравнение второго порядка для переменной $\mathbf{u}$, содержащее две регуляризующие функции $\kappa(r)$ и $v(r)$.

Аналогичный переход осуществляется в уравнении второго порядка для расстояния r от времени t к новой переменной τ_1 по формуле

$$dt = v_1(r)d\tau_1,$$

где $v_1(r)$ – третья регуляризующая функция расстояния r .

В итоге было получено дифференциальное уравнение второго порядка для расстояния r , содержащее регуляризующую функцию $v_1(r)$.

2.2. Кватернионные уравнения возмущенного центрального движения с регуляризующими функциями. В результате указанных преобразований была получена следующая совокупность кватернионных соотношений и уравнений задачи возмущенного центрального движения материальной точки с тремя регуляризующими функциями $\kappa(r)$, $v(r)$ и $v_1(r)$.

Связь обобщенных переменных Кустаанхеймо–Штифеля u_j (u -переменных) с параметрами Эйлера (Родрига–Гамильтона) λ_j :

$$\lambda = \kappa(r)\bar{\mathbf{u}}; \quad \lambda_0 = \kappa(r)u_0, \quad \lambda_i = -\kappa(r)u_i \quad (i = 1, 2, 3); \quad \dot{\lambda} = \dot{\kappa}\bar{\mathbf{u}} + \kappa\dot{\bar{\mathbf{u}}}, \quad \kappa = \kappa(r).$$

Здесь и далее верхняя точка – символ дифференцирования по времени t .

Обобщенное преобразование Кустаанхеймо–Штифеля (u -преобразование):
Для расстояния

$$(\kappa(r))^2 (u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = 1.$$

Для декартовых координат

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k} = r \lambda \circ \mathbf{i} \circ \bar{\lambda} = r(\kappa(r))^2 \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}.$$

Для проекций вектора скорости

$$\mathbf{v}_\xi = \dot{\xi}_1 \mathbf{i} + \dot{\xi}_2 \mathbf{j} + \dot{\xi}_3 \mathbf{k} = \dot{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\mu} = \mu \circ \mathbf{i} \circ \bar{\lambda}, \quad \mu = \dot{r} \lambda + 2r \dot{\lambda}, \quad \lambda = \kappa(r)\bar{\mathbf{u}}, \quad \dot{\lambda} = \dot{\kappa}\bar{\mathbf{u}} + \kappa\dot{\bar{\mathbf{u}}}.$$

Для возмущающих сил (для кватерниона $\mathbf{Q}$, содержащего возмущающее ускорение $\mathbf{p}$ и возмущающий потенциал Π^*)

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \frac{1}{2m\sqrt{r}} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{u}^*}, \quad P_1 = \kappa(r) \text{scal}(\mathbf{u} \circ \mathbf{Q})$$

$$\mathbf{q} = -\kappa(r) \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_\xi, \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{u}^*} = \frac{\partial \Pi^*}{\partial u_0^*} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial u_1^*} \mathbf{i} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial u_2^*} \mathbf{j} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial u_3^*} \mathbf{k}$$

$$\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}_\xi) = \Pi^*(t, \bar{\mathbf{u}}^* \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}^*), \quad \mathbf{u}^* = \sqrt{r\kappa(r)}\bar{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{p}_\xi = p_{\xi 1}\mathbf{i} + p_{\xi 2}\mathbf{j} + p_{\xi 3}\mathbf{k} = \mathbf{p}_\xi(t, \mathbf{r}_\xi, \dot{\mathbf{r}}_\xi), \quad \mathbf{r}_\xi = r(\kappa(r))^2 \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u},$$

где $\text{scal}(\cdot)$ — скалярная часть кватерниона, стоящего в скобках, $p_{\xi 1}, p_{\xi 2}, p_{\xi 3}$ — проекции возмущающего ускорения $\mathbf{p}$ на оси системы координат ξ , движущейся относительно инерциальной системы координат поступательно.

Основное дифференциальное кватернионное уравнение для обобщенных переменных Кустанхеймо—Штифеля (для u -переменных)

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} + \left(\frac{2}{r\kappa} \frac{d(r\kappa)}{d\tau} - \frac{1}{v} \frac{dv}{d\tau} \right) \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} + \frac{v^2}{2r\kappa} \alpha \mathbf{u} = \frac{v^2}{2r\kappa} \left(\mathbf{Q} - \left(2r \frac{d\kappa}{dr} + \kappa \right) P_1 \mathbf{u} \right) \quad (2.2)$$

$$\alpha = \alpha(r, c^2, h) = 2r \left(\frac{2}{m} (h - \Pi) - \frac{c^2}{r^2} \right) \frac{d^2\kappa}{dr^2} + 2 \left(\frac{4}{m} (h - \Pi) - \frac{r}{m} \frac{d\Pi}{dr} - \frac{c^2}{r^2} \right) \frac{d\kappa}{dr} + \frac{c^2}{2r^3} \kappa. \quad (2.3)$$

Дифференциальное уравнение для расстояния

$$\frac{d^2r}{d\tau_1^2} + \frac{1}{m} \left(\frac{d(v_1^2 \Pi)}{dr} - h \frac{dv_1^2}{dr} \right) + \frac{1}{2} c^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{v_1^2}{r^2} \right) = v_1^2 P_1. \quad (2.4)$$

Дифференциальные уравнения для переменных h, h^*, c, c^2

$$\frac{dh}{dt} = m \text{scal}(\boldsymbol{\mu} \circ \mathbf{Q}), \quad \frac{dh^*}{dt} = \frac{\partial \Pi^*}{\partial t} + m \text{scal}(\boldsymbol{\mu} \circ \mathbf{q})$$

$$h = \frac{1}{2} m v^2 + \Pi(r), \quad h^* = h + \Pi^*, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{dr}{dt} \boldsymbol{\lambda} + 2r \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt}$$

$$\frac{dc}{dt} = 2 \frac{r^3}{c} \text{scal} \left(\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} \circ \mathbf{Q} \right), \quad \frac{dc^2}{dt} = 4r^3 \text{scal} \left(\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} \circ \mathbf{Q} \right).$$

Уравнения для времени

$$\frac{dt}{d\tau} = v(r), \quad \frac{dt}{d\tau_1} = v_1(r), \quad \frac{d\tau}{d\tau_1} = \frac{v_1(r)}{v(r)}.$$

Из приведенных уравнений формируется замкнутая система дифференциальных уравнений возмущенного движения материальной точки, в которой неизвестными являются переменные u_j (обобщенные переменные Кустанхеймо—Штифеля), расстояние r , энергия h материальной точки при $\Pi^* = 0$ или энергия h^* материальной точки при $\Pi^* \neq 0$, модуль c вектора момента скорости точки или его квадрат c^2 и время t . В качестве независимой переменной может быть принята либо переменная τ , либо переменная τ_1 .

Уравнение (2.4) для расстояния может быть исключено из состава указанной системы дифференциальных уравнений в случаях, когда уравнение

$$(\kappa(r))^2 (u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = 1$$

может быть разрешено (при заданном виде функции $\kappa = \kappa(r)$) относительно расстояния r , т.е. в случаях, когда расстояние r может быть выражено через переменные u_j .

Отметим, что при переходе в уравнения для переменных h , c и c^2 от времени t к новой независимой переменной τ или τ_1 вид этих уравнений не меняется. Отметим также, что в ряде случаев вместо уравнения для переменной h целесообразно использовать уравнение для полной энергии h^* материальной точки.

Для нахождения координат ξ_k и проекций скорости $\dot{\xi}_k$ материальной точки на оси системы координат ξ через переменные u_j и расстояние r и их производные необходимо воспользоваться вышеприведенными соотношениями для кватернионов $\mathbf{r}_\xi$ и $\mathbf{v}_\xi$.

2.3. Условия приводимости кватернионных уравнений возмущенного центрального движения к осцилляторному виду. Приведенные уравнения возмущенного движения материальной точки содержат в качестве произвольных функций расстояния r регуляризующие функции $\kappa(r)$, $v(r)$ и $v_1(r)$. Их выбор осуществляется нами [10, 12, 13, 35] таким образом, чтобы кватернионное уравнение (2.2) и (2.3) для переменной $\mathbf{u}$ и скалярное уравнение (2.4) для расстояния r или, по крайней мере, одно из них были эквивалентны уравнениям движения гармонических осцилляторов для невозмущенного центрального движения, когда $\Pi^* = 0$, $\mathbf{p} = 0$ и, следовательно, когда $\mathbf{Q} = 0$, $P_1 = 0$, $h = \text{const}$, $c = \text{const}$.

Для того чтобы основное кватернионное уравнение (2.2) для переменной $\mathbf{u}$ было эквивалентно в указанном случае уравнению движения четырехмерного гармонического осциллятора необходимо, чтобы оно не содержало первой производной $d\mathbf{u}/d\tau$. Поэтому нами было потребовано, чтобы функции κ и v удовлетворяли условию

$$\frac{2}{r\kappa} \frac{d(r\kappa)}{d\tau} - \frac{1}{v} \frac{dv}{d\tau} = 0. \quad (2.5)$$

Общее решение уравнения (2.5) имеет вид

$$r\kappa = bv^{1/2}, \quad b = \text{const}.$$

Без потери общности нами полагается $b = 1$ и рассматриваются в дальнейшем такие регуляризующие функции κ и v , которые связаны между собой соотношением

$$r\kappa = v^{1/2}.$$

Это означает, что при конкретном выборе функции κ будет однозначно определена в соответствии с последним соотношением и функция v , и наоборот.

Таким образом, вместо двух произвольных функций κ и v произвольной остается лишь одна из них: κ или v . При этом выбор функции v , так же как и функции κ , ограничивается классом C^2 .

Кватернионное уравнение (2.2) для переменной $\mathbf{u}$ с учетом соотношения $r\kappa = v^{1/2}$ принимает вид уравнения движения четырехмерного нелинейного возмущенного осциллятора

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} + \frac{1}{2}(r\kappa)^3 \alpha \mathbf{u} = \frac{1}{2}(r\kappa)^3 \left(\mathbf{Q} - \left(2r \frac{d\kappa}{dr} + \kappa \right) P_1 \mathbf{u} \right). \quad (2.6)$$

Для того чтобы это уравнение было эквивалентно в случае невозмущенного центрального движения точки уравнению движения четырехмерного гармонического осциллятора необходимо потребовать выполнение условия $(r\kappa)^3 \alpha = a = \text{const}$ где a – некоторая постоянная величина (можно, например, положить $a = h$).

Это условие с учетом соотношения (2.3) в развернутом форме принимает вид

$$(r\kappa)^3 \alpha = (r\kappa)^3 \left[2r \left(\frac{2}{m}(h - \Pi) - \frac{c^2}{r^2} \right) \frac{d^2 \kappa}{dr^2} + 2 \left(\frac{4}{m}(h - \Pi) - \frac{r}{m} \frac{d\Pi}{dr} - \frac{c^2}{r^2} \right) \frac{d\kappa}{dr} + \frac{c^2}{2r^3} \kappa \right] = a = \text{const}. \quad (2.7)$$

Соотношение (2.7) может рассматриваться как дифференциальное уравнение второго порядка для нахождения регуляризующей функции $\kappa(r)$ при заданном виде потенциала $\Pi(r)$ центрального силового поля. После нахождения из этого уравнения функции κ однозначно определяется функция v из условия $r\kappa = v^{1/2}$. Условие (2.7) может также рассматриваться как дифференциальное уравнение первого порядка для нахождения потенциала $\Pi(r)$ при заданном виде регуляризующей функции $\kappa(r)$.

Таким образом, соотношение $r\kappa = v^{1/2}$ и соотношение $(r\kappa)^3 \alpha = a = \text{const}$, развернутая запись которого имеет вид (2.7), являются необходимыми и достаточными условиями приводимости основного кватернионного уравнения (2.2) возмущенного центрального движения материальной точки к осцилляторному виду. Они связывают между собой регуляризующие функции κ , v и потенциал $\Pi(r)$. Если при заданном виде потенциала $\Pi(r)$ регуляризующие функции κ и v выбраны так, что эти условия выполняются (напомним, что в выражении для $(r\kappa)^3 \alpha = a$ следует положить $h = \text{const}$, $c = \text{const}$), то основное кватернионное уравнение (2.2) для переменной u становится в случае невозмущенного центрального движения материальной точки с потенциалом $\Pi(r)$ эквивалентным уравнению движения одночастотного четырехмерного гармонического осциллятора, имеющего частоту $k = \sqrt{a/2}$.

Уравнению (2.4) для расстояния r в случае невозмущенного центрального движения также можно придать вид уравнения движения гармонического осциллятора за счет соответствующего выбора регуляризующей функции $v_1(r)$. Действительно, в этом случае оно принимает вид уравнения, исследованного Бельским [59]:

$$\frac{d^2 r}{d\tau_1^2} = \frac{1}{m} \frac{d}{dr} (v_1^2 (h - \Pi_1)), \quad \Pi_1 = \Pi(r) + \frac{mc^2}{2r^2}.$$

Отсюда следует известное условие [59]

$$v_1^2 (h - \Pi_1) = \frac{1}{2} C_1^* r^2 + C_2^* r + C_3^*, \quad C_i^* = \text{const},$$

накладываемое на регуляризующую функцию $v_1(r)$ и приведенный потенциал $\Pi_1(r)$ (потенциал $\Pi(r)$), при выполнении которого уравнение для расстояния r эквивалентно уравнению движения гармонического осциллятора.

К сожалению, это условие и условия $r\kappa = v^{1/2}$, $(r\kappa)^3 \alpha = \text{const}$, при $v(r) = v_1(r)$ оказываются в общем случае (т.е. для любого вида потенциала $\Pi(r)$ центрального силового поля) несовместными.

Таким образом, нами было установлено [10, 13], что векторное дифференциальное уравнение (2.1) возмущенного центрального движения материальной точки приводится при указанном выше выборе регуляризующих функций к кватернионному уравнению (2.6) осцилляторного вида. В общем случае это кватернионное уравнение должно дополняться скалярными уравнениями для расстояния r и переменных h или h^* и c . При соответствующем выборе регуляризующих функций одно или два из этих уравнений (например, в случае Кустанхеймо–Штифеля это уравнения для r и c) выпадают из рассмотрения.

2.4. Кватернионные уравнения возмущенного центрального движения в нормальной форме. Рассмотренные выше уравнения возмущенного центрального движения материальной точки содержат в качестве основного дифференциальное кватернионное уравнение второго порядка для четырехмерной переменной $\mathbf{u}$, которое принимает при соответствующем выборе регуляризующих функций форму уравнения движения четырехмерного возмущенного осциллятора. В задачах возмущенного центрального движения материальной точки также целесообразно применение кватернионных уравнений возмущенного центрального движения в нормальной форме, в которых в качестве переменных используются кватернион λ , описывающий ориентацию выше введенной системы координат η , вращающейся в инерциальном пространстве, а также проекции c_i вектора $\mathbf{c}$ момента скорости точки на оси этой системы координат или его проекции c_{ξ_j} на оси системы координат ξ , движущейся поступательно в инерциальной системе координат. Эти уравнения движения имеют следующий вид [10, 13, 35]:

Уравнения в отображениях на вращающийся базис η

$$\frac{d\mathbf{c}_{\eta}}{dt} = -r \operatorname{vect}(\mathbf{Q} \circ \lambda), \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2r^2} \lambda \circ \mathbf{c}_{\eta} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{c}_{\eta} = c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k} \quad (c_1 = 0), \quad \frac{d\mathbf{c}_{\eta}}{dt} = \frac{dc_2}{dt} \mathbf{j} + \frac{dc_3}{dt} \mathbf{k}.$$

Уравнения в отображениях на инерциальный базис (совпадают с уравнениями в отображениях на основной базис ξ)

$$\frac{d\mathbf{c}_{\xi}}{dt} = -r \operatorname{vect}(\lambda \circ \mathbf{Q}), \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2r^2} \mathbf{c}_{\xi} \circ \lambda \quad (2.9)$$

$$\mathbf{c}_{\xi} = c_{\xi 1} \mathbf{i} + c_{\xi 2} \mathbf{j} + c_{\xi 3} \mathbf{k}, \quad \frac{d\mathbf{c}_{\xi}}{dt} = \frac{dc_{\xi 1}}{dt} \mathbf{i} + \frac{dc_{\xi 2}}{dt} \mathbf{j} + \frac{dc_{\xi 3}}{dt} \mathbf{k}.$$

Здесь выражение для кватерниона $\mathbf{Q}$, содержащего возмущающее ускорение $\mathbf{p}$ и возмущающий потенциал Π^* , имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{q} - \frac{1}{2mr} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda} \\ \mathbf{q} &= -\mathbf{i} \circ \bar{\lambda} \circ \mathbf{p}_{\xi}, \quad \mathbf{p}_{\xi} = \mathbf{p}_{\xi}(t, \mathbf{r}_{\xi}, \dot{\mathbf{r}}_{\xi}), \quad \mathbf{r}_{\xi} = r \lambda \circ \mathbf{i} \circ \bar{\lambda} \\ \Pi^* &= \Pi^*(t, \mathbf{r}_{\xi}) = \Pi^*(t, r \lambda \circ \mathbf{i} \circ \bar{\lambda}), \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda} = \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda_0} - \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda_1} \mathbf{i} - \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda_2} \mathbf{j} - \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda_3} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Каждая из этих совокупностей уравнений должна быть в общем случае дополнена уравнением для расстояния r

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{c^2}{r^3} + \frac{1}{m} \frac{d\Pi(r)}{dr} = \text{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{q}) - \frac{1}{m} \frac{\partial \Pi^*}{\partial r}, \quad c^2 = c_2^2 + c_3^2 = c_{\xi 1}^2 + c_{\xi 2}^2 + c_{\xi 3}^2. \quad (2.10)$$

Из приведенных уравнений образуется замкнутая система дифференциальных уравнений (2.8) и (2.10) возмущенного центрального движения материальной точки восьмого порядка относительно неизвестных проекций c_2, c_3 вектора момента скорости на оси вращающейся системы координат η , параметров Эйлера λ_j и расстояния r , а также замкнутая система уравнений (2.9) и (2.10) этого движения точки девятого порядка относительно трех проекций $c_{\xi j}$ вектора момента скорости на оси инерциальной системы координат (а также на оси системы координат ξ), параметров λ_k и расстояния r .

Координаты ξ_k и проекций скорости $\dot{\xi}_k$ материальной точки на оси системы координат ξ и инерциальной системы координат определяются через указанные переменные с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\xi} &= \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k} = r \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}} \\ \mathbf{v}_{\xi} &= \frac{d\xi_1}{dt} \mathbf{i} + \frac{d\xi_2}{dt} \mathbf{j} + \frac{d\xi_3}{dt} \mathbf{k} = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{v}_{\eta} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{v}_{\eta} = \mathbf{i} \circ \left(\frac{dr}{dt} - \frac{1}{r} \mathbf{c}_{\eta} \right); \quad \mathbf{v}_{\xi} = \frac{1}{r} \mathbf{r}_{\xi} \circ \left(\frac{dr}{dt} - \frac{1}{r} \mathbf{c}_{\xi} \right), \\ \mathbf{v}_{\eta} &= \bar{\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathbf{v}_{\xi} \circ \boldsymbol{\lambda} \end{aligned}$$

Отметим, что порядок системы уравнений (2.8) и (2.10), в которых используются отображения векторов $\mathbf{c}$ и $\dot{\mathbf{c}}$ на вращающийся базис η , на единицу меньше порядка системы уравнений (2.9) и (2.10), в которых используются отображения этих векторов на базис ξ (а, следовательно, и на инерциальный базис). Кроме того, кватернионное уравнение для переменной $\boldsymbol{\lambda}$ в первой из этих систем проще кватернионного уравнения для этой переменной во второй из этих систем, т.к. проекция c_1 вектора $\mathbf{c}$ на ось η_1 (направление радиус-вектора $\mathbf{r}$) равна нулю.

Отметим также, что уравнения первого порядка для переменных $c_2, c_3; c_{\xi i}$ ($i = 1, 2, 3$) и $\boldsymbol{\lambda}$, как и следовало ожидать, не содержат потенциала $\Pi(r)$ центрального силового поля (он присутствует лишь в уравнении второго порядка для расстояния r).

Системы уравнений возмущенного центрального движения материальной точки (2.8), (2.10) и (2.9), (2.10), содержащие кватернионные дифференциальные уравнения первого порядка, сводятся в некоторых важных случаях (в частности, при отсутствии возмущающего ускорения $\mathbf{p}$ и возмущающего потенциала Π^*) с помощью замены времени t и расстояния r на новые переменные к системам, в которых все дифференциальные уравнения являются линейными с постоянными коэффициентами.

Приведенные выше дифференциальные кватернионные уравнения возмущенного центрального движения были использованы нами для решения ряда задач: для регуляризации уравнений возмущенного движения (устранения имеющейся при наличии центрального тела сингулярности типа полюса); для построения решения пространственной задачи невозмущенного центрального движения при любом виде потенциала $\Pi(r)$ в униформизированной форме, позволяющей избавиться от необходимости рассмотрения ветвления решений,

возникающего при обходе критических точек; для аналитического и численного исследования возмущенных движений в задачах небесной механики и астродинамики, а также в инерциальной навигации. Эти уравнения и соотношения позволили нам также получить дифференциальные уравнения возмущенного движения точки, в которых вместо угловых оскулирующих элементов используются кватернионные элементы.

2.5. Системы регулярных кватернионных уравнений возмущенного центрального движения осцилляторного вида в переменных Кустаанхеймо–Штифеля. В наших работах [10–13, 35] рассмотрена задача регуляризации: устранения особенности типа сингулярности, возникающей в дифференциальных уравнениях возмущенного центрального движения материальной точки при ее прохождении вблизи центра O центрального силового поля (когда расстояние r близко к нулю) или при ее движении по возмущенным высокоэллиптическим орбитам. Для этого были использованы приведенные выше кватернионные уравнения возмущенного центрального движения с регуляризующими функциями, в которых эти функции были выбраны определенным образом.

Так, для регуляризующей функции $\kappa(r)$, определенной равенством $\kappa = r^{-1/2}$, из условия $r\kappa = v^{1/2}$ было получено, что регуляризующая функция $v(r) = r$, а соотношение для коэффициента $(r\kappa)^3 \alpha$ в основном кватернионном уравнении (2.2) и в уравнении (2.6) для переменной $\mathbf{u}$ принимает вид

$$(r\kappa)^3 \alpha = \frac{1}{m} \left(\frac{d(r\Pi(r))}{dr} - h \right).$$

Видно, что условия приводимости к осцилляторному виду основного кватернионного уравнения и уравнения (2.4) для расстояния r при выборе регуляризующих функций в виде

$$\kappa(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}, \quad v_1(r) = v(r) = r \quad \left(2r \frac{d\kappa}{dr} + \kappa = 0 \right)$$

выполняются лишь в случае невозмущенного кеплеровского движения, когда

$$\Pi(r) = -m \frac{\mu}{r}, \quad h = \text{const}, \quad \Pi^* = 0, \quad \mathbf{p} = 0.$$

При подстановке указанных выражений для регуляризующих функций $\kappa(r)$, $v(r)$ и $v_1(r)$ и коэффициента $(r\kappa)^3 \alpha$ в уравнения возмущенного центрального движения с регуляризующими функциями нами были получены для произвольного вида потенциала $\Pi(r)$ центрального силового поля следующие две системы уравнений возмущенного центрального движения в переменных Кустаанхеймо–Штифеля.

Система уравнений для произвольного вида потенциала $\Pi(r)$, содержащая в качестве переменной энергию h центрального движения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} + \frac{1}{2m} \left(\frac{d}{dr} (r\Pi(r)) - h \right) \mathbf{u} &= \frac{1}{2} r \mathbf{Q} \\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{1}{m} \left(\frac{d}{dr} (r^2 \Pi(r)) - 2hr \right) &= r \text{scal}(\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{dh}{d\tau} &= 2m \operatorname{scal} \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{Q} \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r, \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{q} - \frac{1}{2m} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{u}}, \quad \mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_\xi, \quad \Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}_\xi), \quad \mathbf{p}_\xi = \mathbf{p}_\xi(t, \mathbf{r}_\xi, \mathbf{v}_\xi) \\ r &= \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \quad \mathbf{r}_\xi = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_\xi = \frac{d\mathbf{r}_\xi}{dt} = 2\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{2}{r} \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$h = 2mr \sum_{j=0}^3 \left(\frac{du_j}{dt} \right)^2 + \Pi(r) = \frac{2m}{r} \sum_{j=0}^3 \left(\frac{du_j}{d\tau} \right)^2 + \Pi(r).$$

Система уравнений для произвольного вида потенциала $\Pi(r)$, содержащая полную энергию движения $h^* = h + \Pi^*$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} + \frac{1}{2m} \left(\frac{d}{dr} (r\Pi(r)) - h^* \right) \mathbf{u} &= \frac{1}{2} r \mathbf{q} - \frac{1}{4m} \frac{\partial (r\Pi^*)}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{1}{m} \left(\frac{d}{dr} (r^2 \Pi(r)) - 2h^* r \right) &= r \left(-\frac{2}{m} \Pi^* + \operatorname{scal}(\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{Q}) \right) \\ \frac{dh^*}{d\tau} &= r \frac{\partial \Pi^*}{\partial t} + 2m \operatorname{scal} \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{q} \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из уравнений (2.11)–(2.12) при $\Pi = -m\mu / r$ следуют дифференциальные кватернионные уравнения возмущенного кеплеровского движения.

Система регулярных уравнений для возмущенного кеплеровского движения (когда потенциал $\Pi = -m\mu / r$) содержащая кеплеровскую энергию h

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2m} h \mathbf{u} &= \frac{1}{2} r \mathbf{Q} \\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{2}{m} h r - \mu &= r \operatorname{scal}(\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\frac{dh}{d\tau} = 2m \operatorname{scal} \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{Q} \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r.$$

Система регулярных уравнений для возмущенного кеплеровского движения, содержащая полную энергию $h^* = h + \Pi^*$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2m} h^* \mathbf{u} &= \frac{1}{2} r \mathbf{q} - \frac{1}{4m} \frac{\partial (r\Pi^*)}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{2}{m} h^* r - \mu &= r \left(-\frac{2}{m} \Pi^* + \operatorname{scal}(\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{Q}) \right) \\ \frac{dh^*}{d\tau} &= r \frac{\partial \Pi^*}{\partial t} + 2m \operatorname{scal} \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{q} \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь μ — произведение гравитационной постоянной на массу притягивающего тела (точнее, на сумму масс тела (материальной точки), движение которого изучается, и притягивающего тела).

Системы уравнений (2.13)–(2.15) дополняются соотношениями (2.12) для кватерниона $\mathbf{Q}$, которым описываются действующие возмущения.

Системы уравнений (2.14) и (2.15) являются кватернионными формами регулярных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел в переменных Кустаанхеймо–Штифеля. Они учитывают действие возмущающей силы, имеющей потенциал $\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}_\xi) = \Pi^*(t, \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u})$, и содержат в качестве одной из переменных кеплеровскую энергию h или полную энергию h^* . Дифференциальное уравнение для расстояния r в силу равенства $r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ может быть исключено из этих систем.

2.6. Системы регулярных кватернионных уравнений возмущенного центрального движения осцилляторного вида, в которых используются параметры Эйлера. Иной, чем в случае Кустаанхеймо–Штифеля, выбор регуляризующих функций $\kappa(r)$, $v(r)$ и $v_1(r)$, а также введение наряду с переменной h^* (полной энергии) новой переменной c^2 (квадрата модуля c вектора момента скорости) позволяют получить более общие регулярные уравнения возмущенного центрального движения [10, 13, 35].

Положим $\kappa = 1$, $v_1(r) = v(r)$. Тогда в соответствии с условием $r\kappa = v^{1/2}$ приводимости основного кватернионного уравнения (2.2) для переменной $\mathbf{u}$ к осцилляторному виду имеем: $v = v_1 = r^2$, а условие (2.7) для коэффициента $(r\kappa)^3 \alpha$ в этом уравнении принимает вид

$$(r\kappa)^3 \alpha = (1/2)c^2.$$

Так как для невозмущенного центрального движения $c = \text{const}$, то из последнего соотношения следует, что при выборе регуляризующих функций в виде $\kappa = 1$, $v(r) = r^2$ условие $(r\kappa)^3 \alpha = \text{const}$ приводимости к осцилляторному виду основного кватернионного уравнения выполняется для любого вида потенциала $\Pi(r)$. Однако условие приводимости к осцилляторному виду уравнения (2.4) для расстояния r при $v_1(r) = v(r) = r^2$ не выполняется.

С учетом двух последних равенств и равенства $v_1 = r^2$ из вышеприведенных уравнений с регуляризующими функциями нами получена следующая кватернионная система дифференциальных уравнений возмущенного центрального движения материальной точки для произвольного вида потенциала $\Pi(r)$, имеющая осцилляторный вид [10, 13, 35]:

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\lambda}}{d\tau^2} + \frac{1}{4} c^2 \boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{2} r^3 (\bar{\mathbf{Q}} - \text{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{Q})) \boldsymbol{\lambda} \quad (2.16)$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + c^2 r + \frac{1}{m} \left(\frac{d}{dr} (r^4 \Pi(r)) - 4(h^* - \Pi^*) r^3 \right) = r^4 \left(\text{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{q}) - \frac{1}{m} \frac{\partial \Pi^*}{\partial r} \right) \quad (2.17)$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = r^2 \frac{\partial \Pi^*}{\partial t} + m \text{scal}(\boldsymbol{\mu}^* \circ \mathbf{q}), \quad \boldsymbol{\mu}^* = \frac{dr}{d\tau} \boldsymbol{\lambda} + 2r \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\tau} \quad (2.18)$$

$$\frac{dc^2}{d\tau} = 4r^3 \text{scal} \left(\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\tau} \circ \mathbf{Q} \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r^2, \quad (2.19)$$

где

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \frac{1}{2mr} \frac{\partial \bar{\Pi}^*}{\partial \bar{\boldsymbol{\lambda}}}, \quad \mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathbf{p}_\xi, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{q}} - \frac{1}{2mr} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, \quad \bar{\mathbf{q}} = -\mathbf{p}_\xi \circ \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \quad (2.20)$$

$$\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}_\xi), \quad \mathbf{p}_\xi = \mathbf{p}_\xi(t, \mathbf{r}_\xi, \mathbf{v}_\xi), \quad \mathbf{r}_\xi = r\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{v}_\xi = \frac{1}{r^2} \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\mu}}^*, \quad \bar{\boldsymbol{\mu}}^* = \frac{dr}{d\tau} \bar{\boldsymbol{\lambda}} + 2r \frac{d\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{d\tau}.$$

В этой системе уравнений неизвестными являются параметры Эйлера λ , расстояние r , время t , полная энергия h^* и квадрат модуля с вектора момента скорости c^2 . В качестве независимой переменной выступает переменная τ , определяемая дифференциальным соотношением $d\tau = r^{-2} dt$.

Для невозмущенного центрального движения имеет место интеграл площадей

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = c = \text{const},$$

где φ — полярная координата.

Из сопоставления этого соотношения с равенством $dt = r^2 d\tau$, связывающим новую независимую переменную τ , соответствующую регуляризующей функции $v = r^2$, с временем t , следует, что

$$d\varphi = c d\tau.$$

Переходя в уравнениях (2.16)–(2.19) возмущенного центрального движения с независимой переменной τ , определенной дифференциальным соотношением $d\tau = r^{-2} dt$, к новой независимой переменной φ , определенной дифференциальным соотношением $d\varphi = cr^{-2} d\tau$, и учитывая, что в случае возмущенного движения $c \neq \text{const}$, получим уравнения возмущенного центрального движения следующего вида [10, 13, 35]:

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\lambda}}{d\varphi^2} + \frac{1}{4} \boldsymbol{\lambda} = -\frac{1}{2c^2} \left(\frac{dc^2}{d\varphi} \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi} - r^3 (\bar{\mathbf{Q}} - \text{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{Q})) \boldsymbol{\lambda} \right) \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\varphi^2} + r + \frac{1}{mc^2} \left(\frac{d}{dr} (r^4 \Pi(r)) - 4(h^* - \Pi^*) r^3 \right) = \\ = \frac{1}{c^2} \left(-\frac{1}{2} \frac{dc^2}{d\varphi} \frac{dr}{d\varphi} + r^4 \left(\text{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{q}) - \frac{1}{m} \frac{\partial \Pi^*}{\partial r} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\frac{dh^*}{d\varphi} = \frac{r^2}{c} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \tau} + m \text{scal}(\boldsymbol{\mu}^{**} \circ \mathbf{q}), \quad \boldsymbol{\mu}^{**} = \frac{dr}{d\varphi} \boldsymbol{\lambda} + 2r \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi} \quad (2.23)$$

$$\frac{dc^2}{d\varphi} = 4r^3 \text{scal} \left(\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi} \circ \mathbf{Q} \right), \quad \frac{dt}{d\varphi} = \frac{r^2}{c}, \quad c \neq 0. \quad (2.24)$$

Здесь кватернионы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{q}$, описывающие действующие возмущения, определяются соотношениями (2.20), в которых

$$\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}_\xi), \quad \mathbf{p}_\xi = \mathbf{p}_\xi(t, \mathbf{r}_\xi, \mathbf{v}_\xi), \quad \mathbf{r}_\xi = r\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{v}_\xi = \frac{c}{r^2} \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\mu}}^{**}, \quad \bar{\boldsymbol{\mu}}^{**} = \frac{dr}{d\varphi} \bar{\boldsymbol{\lambda}} + 2r \frac{d\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{d\varphi}.$$

Отметим, что случай прямолинейного движения точки (когда $c = 0$) при использовании системы уравнений (2.21)–(2.24) с независимой переменной φ должен быть исключен из рассмотрения, поскольку для него эти уравнения не определены.

Основное достоинство полученных с использованием параметров Эйлера λ_j систем уравнений возмущенного центрального движения заключается в том, что каждое из дифференциальных кватернионных уравнений второго порядка в параметрах Эйлера (2.16), (2.21) (для кватернионной переменной λ), входящих в состав этих систем, является регулярным для возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле с любым видом потенциала $\Pi(r)$ при условии, что члены уравнений, обусловленные возмущающим потенциалом Π^* и возмущающим ускорением $\mathbf{p}$, сохраняют конечные значения.

Кроме того, в случае невозмущенного центрального движения каждое из этих кватернионных уравнений становится эквивалентным уравнению движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора:

$$\frac{d^2\lambda}{d\tau^2} + \frac{1}{4}c^2\lambda = 0, \quad c = \text{const}; \quad \frac{d^2\lambda}{d\varphi^2} + \frac{1}{4}\lambda = 0.$$

Частота колебаний осциллятора, соответствующего в этом случае кватернионному уравнению (2.16), равна $c/2$ и ее значение зависит от типа движения. Частота же колебаний осциллятора, соответствующего кватернионному уравнению (2.21), имеет одинаковое для всех типов движения постоянное значение, равное $1/2$, что является удобным для решения ряда задач.

Кватернион λ характеризует собой в случае невозмущенного центрального движения ориентацию плоскости орбиты материальной точки в пространстве. Следовательно, каждое из уравнений (2.16) и (2.21) для кватерниона λ является регулярным кватернионным уравнением мгновенной ориентации плоскости возмущенной орбиты в пространстве.

Каждое из уравнений (2.18) и (2.23) для полной энергии h^* и каждое из первых уравнений (2.19) и (2.24) для переменной c^2 также являются регулярным для любого вида потенциала $\Pi(r)$ (при том же условии конечности возмущающих сил). Уравнения же (2.17) и (2.22) для расстояния r регулярны лишь для потенциала $\Pi(r)$ вида

$$\Pi(r) = -\frac{a_1}{r} - \frac{a_2}{r^2} - \frac{a_3}{r^3} - \frac{a_4}{r^4}, \quad a_i = \text{const},$$

для которого уравнение (2.17) принимает вид

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + c^2r - \frac{1}{m}(a_3 + 2a_2r + 3a_1r^2) - \frac{4}{m}(h^* - \Pi^*)r^3 = r^4 \left(\text{scal}(\lambda \circ \mathbf{q}) - \frac{1}{m} \frac{\partial \Pi^*}{\partial r} \right). \quad (2.25)$$

Поэтому приведенные системы уравнений (2.16)–(2.19) и (2.21)–(2.24), полученные с использованием параметров Эйлера, в целом являются регулярными для возмущенного центрального движения материальной точки в силовом поле с потенциалом (2.25), имеющим четвертый порядок относительно величины r^{-1} , обратной расстоянию до центра притяжения.

Эти уравнения сложнее полученных кватернионных уравнений в переменных Кустанхаймо–Штифеля, поскольку содержат “лишнее” уравнение для расстояния r (как уже отмечалось, уравнения в переменных Кустанхаймо–Штифеля

могут рассматриваться независимо от уравнения для расстояния r) и уравнение для переменной c^2 , к тому же уравнение для расстояния r не является линейным для невозмущенного кеплеровского движения. Однако уравнения в переменных Кустаанхеймо–Штифеля являются регулярными лишь для возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле с ньютоновским потенциалом $\Pi(r) = -a_1 r^{-1}$ (при том же условии конечности возмущающих сил), кроме того, основное кватернионное уравнение из систем уравнений (2.11) или (2.13) для переменных Кустаанхеймо–Штифеля является нелинейным для невозмущенного центрального движения с любым видом потенциала $\Pi(r)$, за исключением потенциала $\Pi(r) = -a_1 r^{-1}$, в отличие от кватернионных уравнений (2.16) и (2.21) для кватернионной переменной λ , которые в этом случае эквивалентны уравнениям движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора во “времени” τ или φ , что является удобным при построении уравнений в регулярных оскулирующих элементах.

Отметим, что если возмущающее ускорение $\mathbf{p}$ и возмущающий Π^* потенциал не зависят явно от времени t , то уравнения (2.16)–(2.19) и (2.21)–(2.24) могут рассматриваться независимо от уравнения для времени. Кроме того, если возмущающее ускорение от непотенциальных сил $\mathbf{p} = 0$, а потенциал Π^* возмущающих сил не зависит явно от времени t , то полная энергия $h^* = \text{const}$ и уравнения (2.18) и (2.23) для этой переменной выпадают из рассмотрения.

2.6.1. О регулярных кватернионных уравнениях орбитального движения с учетом эффектов ОТО. В настоящее время из сопоставления полученных результатов расчетов для смещений элементов орбит планет с данными эфемерид (Simon, Bretagnon, Chapront, Chapront-Touze, Francon, Laskar, 1994) на эпоху J2000 определяется, как согласуется разница в этих данных с релятивистским эффектом, предсказываемым общей теорией относительности (ОТО). Дополнительное смещение перигелия орбиты планеты по ОТО за один оборот планеты вокруг Солнца определяется известной формулой (Эйнштейн А. Объяснение движения перигелия Меркурия в общей теории относительности). Эта формула следует из решения задачи о движении материальной точки в искривленном пространстве-времени, описываемом метрикой Шварцшильда. Траектории точки в таком пространстве соответствуют траекториям при движении в поле центральной силы с потенциалом

$$\Pi(r) = -\frac{a_1}{r} - \frac{a_3}{r^3}, \quad a_i = \text{const},$$

который является частным случаем потенциала (2.25).

В таком поле к ньютоновскому ускорению добавляется возмущающее ускорение, которое имеет только радиальную компоненту, пропорциональную r^{-4} . Из уравнений возмущенного движения в оскулирующих элементах следует, что такое возмущение влияет только на поведение долготы перигелия и эксцентриситета орбиты. Установлено, что наличие релятивистского эффекта подтверждается для смещения перигелия Меркурия. Для перигелиев остальных планет эффект, предсказываемый ОТО, находится внутри интервала погрешности расчетов.

Приведенные регулярные уравнения (2.16)–(2.19) и (2.21)–(2.24) могут быть использованы, в частности, для прогноза движения планет с учетом эффектов ОТО, а также были использованы нами [60] (2019, 2020) для построения

регулярных кватернионных уравнений возмущенного орбитального движения твердого тела в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессериальных и секториальных гармоник (с регуляризацией слагаемых уравнений, содержащих отрицательные степени расстояния r до четвертого порядка включительно).

2.7. Системы регулярных кватернионных уравнений возмущенного центрального движения в нормальных формах. Регулярные уравнения возмущенного центрального движения были также получены нами [10, 13, 35, 36] в двух нормальных кватернионных формах из уравнений (2.8) в отображениях на вращающийся базис η в результате перехода в них к новой независимой переменной t по формуле $dt = r^2 d\tau$ и к новой независимой переменной φ .

Уравнения с независимой переменной t имеют вид

$$\frac{d\mathbf{c}_\eta}{d\tau} = -r^3 \text{vect}(\mathbf{Q} \circ \boldsymbol{\lambda}), \quad \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\tau} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{c}_\eta, \quad \frac{dt}{d\tau} = r^2, \quad \mathbf{c}_\eta = c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k} \quad (c_1 = 0). \quad (2.26)$$

Эти дифференциальные уравнения первого порядка для кватернионных переменных $\mathbf{c}_\eta$ и $\boldsymbol{\lambda}$ дополняются дифференциальными уравнениями (2.17) и (2.18) для расстояния r и полной энергии h^* , а также соотношениями (2.20) для кватерниона $\mathbf{Q}$, которым описываются действующие возмущения.

Уравнения с независимой переменной φ имеют вид

$$\frac{d\mathbf{c}_\eta}{d\varphi} = -\frac{r^3}{c} \text{vect}(\mathbf{Q} \circ \boldsymbol{\lambda}), \quad \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi} = \frac{1}{2c} \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{c}_\eta, \quad \frac{dt}{d\varphi} = \frac{r^2}{c}, \quad c = \sqrt{c_2^2 + c_3^2} \neq 0 \quad (c_1 = 0). \quad (2.27)$$

Эти уравнения дополняются дифференциальными уравнениями (2.22) и (2.23) для расстояния r и полной энергии h^* , а также соотношениями (2.20) для кватерниона $\mathbf{Q}$.

Из уравнений (2.9) следуют аналогичные уравнения в отображениях на инерциальный базис, которые имеют большую на единицу размерность и более сложный вид.

Системы уравнений (2.26), (2.17), (2.18) и (2.27), (2.22), (2.23), так же как и системы уравнений (2.16)–(2.19) и (2.21)–(2.24), являются регулярными для возмущенного движения в центральном силовом поле с потенциалом вида

$$\Pi(r) = -\frac{a_1}{r} - \frac{a_2}{r^2} - \frac{a_3}{r^3} - \frac{a_4}{r^4}, \quad a_i = \text{const.}$$

Однако порядок этих систем равен 10 (такой же порядок имеют системы уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля), что на 3 единицы меньше порядка систем уравнений (2.16)–(2.19) и (2.21)–(2.24), содержащих кватернионные уравнения осцилляторного типа.

Отметим, что случай прямолинейного движения точки (когда $c = 0$) при использовании системы уравнений (2.27), (2.22), (2.23) с независимой переменной φ , так же как и системы уравнений (2.21)–(2.24), должен быть исключен из рассмотрения, поскольку для него эти уравнения не определены.

2.8. Системы кватернионных уравнений возмущенного движения, содержащие обобщенное уравнение Бинэ. Системы уравнений (2.16)–(2.19) и (2.21)–(2.24), как уже отмечалось, имеют общий недостаток: входящее в эти системы уравнение для расстояния r не является линейным ни в общем случае невозмущенного центрального движения, ни в важном частном случае невозмущенного

кеплеровского движения, что затрудняет их непосредственное использование в аналитических исследованиях.

Этот недостаток для кеплеровского движения может быть устранен за счет введения вместо расстояния r новой переменной $\rho = r^{-1}$, что предполагает исключение из рассмотрения тех движений точки, при которых происходит соударение с центральной массой.

Переходя в уравнениях (2.21)–(2.24) к новой переменной $\rho = r^{-1}$, получаем [10–13, 32, 35] систему уравнений

$$\frac{d^2\lambda}{d\varphi^2} + \frac{1}{4}\lambda = -\frac{1}{2c^2} \left(\frac{dc^2}{d\varphi} \frac{d\lambda}{d\varphi} - \frac{1}{\rho^3} (\bar{Q} - \text{scal}(\lambda \circ Q)) \lambda \right) \quad (2.28)$$

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho + \frac{1}{mc^2} \frac{d\Pi(1/\rho)}{d\varphi} = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} \frac{dc^2}{d\varphi} \frac{d\rho}{d\varphi} + \frac{1}{\rho^2} \left(\text{scal}(\lambda \circ q) - \frac{1}{m} \frac{\partial \Pi^*}{\partial(1/\rho)} \right) \right) \quad (2.29)$$

$$\frac{dc^2}{d\varphi} = \frac{4}{\rho^3} \text{scal} \left(\frac{d\lambda}{d\varphi} \circ Q \right), \quad \frac{dt}{d\varphi} = \frac{1}{c\rho^2}, \quad c \neq 0, \quad \rho = \frac{1}{r}. \quad (2.30)$$

Здесь кватернионы Q и q , описывающие действующие возмущения, определяются соотношениями

$$Q = q - \frac{\rho}{2m} \frac{\partial \bar{\Pi}^*}{\partial \lambda}, \quad q = -i \circ \bar{\lambda} \circ p_\xi, \quad \bar{Q} = \bar{q} - \frac{\rho}{2m} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda}, \quad \bar{q} = -p_\xi \circ \lambda \circ i$$

$$\Pi^* = \Pi^*(t, r_\xi), \quad p_\xi = p_\xi(t, r_\xi, v_\xi), \quad r_\xi = \frac{1}{\rho} \lambda \circ i \circ \bar{\lambda}, \quad v_\xi = c \lambda \circ i \circ \left(2\rho \frac{d\bar{\lambda}}{d\varphi} - \frac{d\rho}{d\varphi} \bar{\lambda} \right).$$

Эта система уравнений, содержащая обобщенное уравнение Бинэ (2.29), проще системы (2.21)–(2.24), поскольку в нее не входит уравнение для полной энергии h^* . К тому же уравнение (2.29) в случае невозмущенного кеплеровского движения, когда потенциал $\Pi = -m\mu/r$, принимает вид известного линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho - \frac{\mu}{c^2} = 0, \quad c = \text{const},$$

в то время как уравнение (2.22) для расстояния r , принимающее в этом случае вид

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} + r - \frac{3\mu}{c^2} r^2 = 0$$

остается существенно нелинейным.

Поэтому в ряде случаев аналитического и численного исследования возмущенных движений система (2.28)–(2.30) предпочтительнее системы (2.21)–(2.24).

Отметим также следующие положительные свойства системы (2.28)–(2.30). В случае невозмущенного кеплеровского движения универсальное решение этой системы уравнений (т.е. решение, форма которого не зависит от типа движения) строится в элементарных (тригонометрических) функциях, в то время как для построения универсального решения системы уравнений (2.14) в переменных Кустанхеймо–Штифеля в этом случае приходится вводить специальные функции

Штумпфа [7]. Это обстоятельство является немаловажным при аналитическом и численном исследовании возмущенных движений, так как тип орбиты может меняться под влиянием возмущающих сил, действующих в течение конечного промежутка времени. Кроме того, система (2.28)–(2.30) позволяет получить уравнения возмущенного движения в оскулирующих кватернионных элементах, которые не содержат тригонометрических функций от медленных переменных, не имеют связанных с ними особенностей и пригодны для исследования любого возмущенного центрального движения, в то время как область применения уравнений возмущенного движения в оскулирующих кватернионных элементах, получаемых из уравнений (2.14), ограничивается областью возмущенного эллиптического кеплеровского движения.

Указанные свойства уравнений (2.28)–(2.30) обуславливаются тем, что кватернионное уравнение (2.28) для параметров Эйлера эквивалентно уравнению движения четырехмерного гармонического осциллятора для всех типов невозмущенного кеплеровского движения (эллиптического, параболического, гиперболического), а уравнение (2.29) для переменной $\rho = r^{-1}$, обратной расстоянию r , эквивалентно уравнению движения гармонического осциллятора, возмущенного постоянной силой.

Более того, уравнение (2.28) эквивалентно уравнению движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора для произвольного невозмущенного центрального движения. Уравнения же в переменных Кустаанхеймо–Штифеля (первое и второе уравнения системы (2.14)) эквивалентны уравнениям движения гармонических осцилляторов лишь для эллиптического движения, когда $h < 0$ (для параболического движения $h = 0$, а для гиперболического $h > 0$).

К недостаткам системы (2.28)–(2.30) следует отнести то, что она, в отличие от систем, рассмотренных ранее, не является регулярной и не пригодна для исследования движений в окрестности начала координат (в окрестности центра притяжения). При этом следует иметь в виду, что эта нерегулярность обуславливается уравнением (2.29) для переменной ρ . Уравнения же (2.28), (2.30) являются регулярными для любого возмущенного центрального движения.

Отметим, что переход к новой переменной $\rho = r^{-1}$ в нормальной системе уравнений (2.27) приводит к системе кватернионных уравнений в нормальной форме

$$\frac{d\mathbf{c}_\eta}{d\varphi} = -\frac{1}{\rho^3 c} \text{vect}(\mathbf{Q} \circ \boldsymbol{\lambda}), \quad \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi} = \frac{1}{2c} \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{c}_\eta, \quad \frac{dt}{d\varphi} = \frac{1}{c\rho^2}, \quad c = \sqrt{c_2^2 + c_3^2} \neq 0 (c_1 = 0),$$

которая должна быть дополнена обобщенным уравнением Бинэ (2.29) для переменной ρ и выше приведенными соотношениями для кватерниона $\mathbf{Q}$, описывающего действующие возмущения.

Эта система имеет такие же достоинства и недостатки по сравнению с системой (2.27), (2.22), (2.23), как и система (2.28)–(2.30) по сравнению с системой (2.21)–(2.25).

Отметим, что некоторые из предложенных в наших работах [10–13] регулярных уравнений, приведенных выше, были также получены нами другим способом в работе [32] (1992).

3. Невозмущенное центральное движение. 3.1. Кватернионные уравнения невозмущенного центрального движения. Уравнения пространственного невозмущенного

центрального движения материальной точки получаются из уравнений возмущенного движения (2.6), (2.7), (2.4) с учетом равенств $\mathbf{p} = 0$, $\Pi^* = 0$ и имеют вид [11, 35]

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} + \frac{1}{2}(r\kappa)^3 \alpha \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

$$\alpha = 2r \left(\frac{2}{m}(h - \Pi) - \frac{c^2}{r^2} \right) \frac{d^2 \kappa}{dr^2} + 2 \left(\frac{4}{m}(h - \Pi) - \frac{r}{m} \frac{d\Pi}{dr} - \frac{c^2}{r^2} \right) \frac{d\kappa}{dr} + \frac{c^2}{2r^3} \kappa$$

$$\Pi = \Pi(r), \quad c^2 = \text{const}$$

$$r\kappa = v^{1/2}, \quad \kappa = \kappa(r), \quad v = v(r); \quad h = h(0) = \text{const}, \quad c = c(0) = \text{const}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau_1^2} = \frac{1}{m} \frac{d}{dr} (v_1^2 (h - \Pi_1)), \quad \Pi_1 = \Pi(r) + \frac{mc^2}{2r^2}, \quad v_1 = v_1(r) \quad (3.2)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = v(r), \quad \frac{dt}{d\tau_1} = v_1(r), \quad \frac{d\tau}{d\tau_1} = v^{-1}(r) v_1(r). \quad (3.3)$$

Эти уравнения необходимо дополнить соотношениями

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k} = r \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \kappa(r) \bar{\boldsymbol{\mu}} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{v}_\xi = \dot{\xi}_1 \mathbf{i} + \dot{\xi}_2 \mathbf{j} + \dot{\xi}_3 \mathbf{k} = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \boldsymbol{\mu} = i\dot{\boldsymbol{\lambda}} + 2r\dot{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\kappa} \bar{\boldsymbol{\mu}} + \kappa \ddot{\boldsymbol{\mu}}, \quad (3.5)$$

позволяющими находить координаты ξ_i и проекции скорости $\dot{\xi}_i$ материальной точки через переменные u_j , расстояние r и их производные.

Для того, чтобы уравнение (3.1) было эквивалентно уравнению движения четырехмерного гармонического осциллятора необходимо выполнение условия

$$(r\kappa)^3 \alpha = a = \text{const},$$

где a — некоторая постоянная величина (можно, например, положить $a = h$).

Уравнение (3.2) совпадает с уравнением, полученным Беленьким [59] при рассмотрении задач центрального движения в полярных координатах r , φ .

Полагая регуляризующую функцию $\kappa = 1$, получим

$$v = r^2, \quad \mathbf{u} = \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \alpha = \frac{c^2}{2r^3}.$$

Уравнения (3.1) и (3.3) с учетом этого соотношения принимают вид

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\lambda}}{d\tau^2} + \frac{c^2}{4} \boldsymbol{\lambda} = 0, \quad c^2 = \text{const} \quad (3.6)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = r^2, \quad \frac{dt}{d\tau_1} = v_1(r), \quad \frac{d\tau}{d\tau_1} = r^{-2} v_1(r). \quad (3.7)$$

Если вместо переменной τ использовать полярный угол φ , связанный с τ дифференциальным равенством $d\varphi = c d\tau$, то уравнения (3.6) и (3.7) примут вид

$$\frac{d^2\lambda}{d\varphi^2} + \frac{1}{4}\lambda = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{r^2}{c}, \quad \frac{dt}{d\tau_1} = v_1(r), \quad \frac{d\varphi}{d\tau_1} = \frac{c}{r^2} v_1(r), \quad c \neq 0. \quad (3.9)$$

Начало отсчета дуговой координаты φ поместим в перицентр. Тогда в уравнениях (3.8) и (3.9) переменная φ будет являться истинной аномалией.

Уравнения (3.2), (3.6), (3.7) или (3.2), (3.8), (3.9) и соотношения (3.4), (3.5) (в них $\kappa = 1$) представляют собой уравнения невозмущенного пространственного центрального движения материальной точки. Каждое из уравнений (3.6) и (3.8) эквивалентно уравнению движения одночастотного четырехмерного гармонического осциллятора. Частота колебаний осциллятора, соответствующего уравнению (3.6), во “времени” τ равна $c/2$ и ее значение зависит от типа движения. Частота колебаний осциллятора, соответствующего уравнению (3.8), во “времени” φ имеет одинаковое для всех типов движения значение, равное $1/2$.

3.2. Связи λ и u -переменных с элементами орбиты. Кватернион λ , фигурирующий в уравнениях движения материальной точки M , характеризует собой ориентацию вращающейся системы координат η относительно системы координат ξ . Система координат ξ имеет начало в центре притяжения O , а ее оси сохраняют свои направления в инерциальной системе координат с течением времени неизменными. Начало системы координат η помещено в точку M , а ее ось $M\eta_1$ направлена по радиус-вектору $\mathbf{r}$ точки. Кроме того, полагается, что проекция ω_1 абсолютной угловой скорости вращения системы координат η на ось $M\eta_1$ во все время движения равна нулю.

В случае невозмущенного центрального движения ось $M\eta_2$ системы координат η целесообразно расположить в плоскости орбиты. Тогда угловое положение системы координат η относительно системы координат ξ может быть определено тремя углами: долготой восходящего узла Ω , наклоном орбиты I и аргументом широты $\sigma = \omega^* + \varphi$, где ω^* –угловое расстояние перицентра от узла, а φ – истинная аномалия. Плоскость орбиты будет располагаться в этом случае в координатной плоскости $M\eta_1\eta_2$, а проекция $\omega_1 = I \cos \sigma + \Omega \sin I \sin \sigma = 0$.

Поставим в соответствие конечным поворотам системы координат η на углы Ω , I и σ собственные кватернионы поворотов

$$\lambda_1 = \cos \frac{\Omega}{2} + \sin \frac{\Omega}{2} \mathbf{k}, \quad \lambda_2 = \cos \frac{I}{2} + \sin \frac{I}{2} \mathbf{i}, \quad \lambda_3 = \cos \frac{\sigma}{2} + \sin \frac{\sigma}{2} \mathbf{k}.$$

Кватернион λ , соответствующий результирующему повороту системы координат η относительно системы координат ξ , находится через кватернионы λ_i ($i = 1, 2, 3$) составляющих поворотов по кватернионной формуле сложения конечных поворотов

$$\lambda = \lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_3. \quad (3.10)$$

Из последних соотношений получаем формулы

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \cos \frac{I}{2} \cos \frac{\Omega + \sigma}{2}, \quad \lambda_1 = \sin \frac{I}{2} \cos \frac{\Omega - \sigma}{2} \\ \lambda_2 &= \sin \frac{I}{2} \sin \frac{\Omega - \sigma}{2}, \quad \lambda_3 = \cos \frac{I}{2} \sin \frac{\Omega + \sigma}{2},\end{aligned}\quad (3.11)$$

которые вместе с соотношением

$$\sigma = \omega^* + \varphi \quad (3.12)$$

устанавливают связи параметров Эйлера λ_j с классическими элементами орбиты Ω , I и ω^* .

Учитывая равенство (3.12), представим формулу (3.10) в виде

$$\lambda = \lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_3 = \lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_\omega \circ \lambda_\varphi = \lambda^* \circ \lambda_\varphi, \quad \lambda^* = \lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_\omega, \quad (3.13)$$

где

$$\lambda_\omega = \cos \frac{\omega^*}{2} + \sin \frac{\omega^*}{2} \mathbf{k}, \quad \lambda_\varphi = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{k}. \quad (3.14)$$

Здесь кватернион λ^* определяет собой ориентацию системы координат η^* относительно системы координат ξ . Ось $M\eta_1^*$ этой системы координат проходит через перицентр, а ось $M\eta_2^*$ лежит в плоскости орбиты. Следовательно, кватернион λ^* определяет собой ориентацию орбиты в пространстве.

Кроме того, кватернион λ можно записать в таком виде:

$$\lambda = \lambda^* \circ \lambda_\varphi = \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right) \lambda^* + \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right) \lambda^* \circ \mathbf{k}, \quad \lambda^* = \lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_\omega = \text{const}. \quad (3.15)$$

Из этого соотношения находим производную

$$\frac{d\lambda(\varphi)}{d\varphi} = \lambda^* \circ \frac{d\lambda_\varphi}{d\varphi} = \frac{1}{2} \left[\left(-\sin \frac{\varphi}{2} \right) \lambda^* + \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right) \lambda^* \circ \mathbf{k} \right], \quad (3.16)$$

которую можно также представить в виде

$$\frac{d\lambda(\varphi)}{d\varphi} = \frac{1}{2} \lambda^* \circ \mathbf{k} \circ \lambda_\varphi = \frac{1}{2} \lambda^* \circ \lambda_\varphi \circ \mathbf{k} = \frac{1}{2} \lambda \circ \mathbf{k}. \quad (3.17)$$

Формулы (3.11), (3.12) и соотношения

$$u_0 = \kappa^{-1}(r) \lambda_0, \quad u_i = -\kappa^{-1}(r) \lambda_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.18)$$

устанавливают связи между переменными u_i и классическими элементами орбиты.

В кватернионной форме имеем

$$\mathbf{u}_0 = \kappa^{-1}(r) \bar{\lambda} = \kappa^{-1}(r) \bar{\lambda}_3 \circ \bar{\lambda}_2 \circ \bar{\lambda}_1 = \kappa^{-1}(r) \bar{\lambda}_\varphi \circ \bar{\lambda}^*.$$

Отметим, что одному и тому же угловому положению системы координат η относительно системы координат ξ соответствуют два кватерниона: $+\lambda$ и $-\lambda$, каждый из которых определяет собой одно и то же преобразование вращения. Поэтому соотношения (3.11), (3.12) позволяют получить через заданные значения углов Ω , I , σ (или ω^* и φ) две совокупности значений параметров Эйлера, отличающихся лишь знаками: $+\lambda_j$ и $-\lambda_j$. Каждая из этих совокупностей определяет собой одно и то же угловое положение системы координат η относительно системы координат ξ . Соответственно этому соотношения (3.18), (3.11), (3.12) позволяют находить через заданные значения углов Ω , I , σ (или ω^* и φ) также две совокупности значений переменных u_j : $+u_j$ и $-u_j$. Полагая в равенствах (3.18) $\kappa(r) = r^{-1/2}$ и беря параметры Эйлера, найденные через углы Ω , I , σ по формулам (3.11), со знаками минус, получим формулы, связывающие KS -переменные с элементами орбиты, совпадающие с формулами, полученными Штифелем и Шейфеле [7] другим способом.

3.3. Униформизированное решение пространственной задачи невозмущенного центрального движения. Для построения решения пространственной задачи невозмущенного центрального движения можно воспользоваться либо уравнениями (3.2), (3.6), (3.7), либо уравнениями (3.2), (3.8), (3.9). Воспользуемся последними.

Интегрируя уравнение (3.8), получаем

$$\lambda(\varphi) = \alpha \cos \frac{\varphi}{2} + \beta \sin \frac{\varphi}{2} \quad (3.19)$$

$$\frac{d\lambda(\varphi)}{d\varphi} = \frac{1}{2} \left(\beta \cos \frac{\varphi}{2} - \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right). \quad (3.20)$$

Здесь α и β — постоянные кватернионы, определяемые равенствами

$$\alpha = \lambda(0) = \lambda_0, \quad \beta = 2 \left(\frac{d\lambda(\varphi)}{d\varphi} \right)_0, \quad (3.21)$$

где λ_0 и $(d\lambda(\varphi)/d\varphi)_0$ — значения кватернионов λ и $(d\lambda(\varphi)/d\varphi)$ в момент прохождения через перигентр (когда $\varphi = 0$).

Кватернион λ_0 в общем случае определяет собой ориентацию системы координат η^0 , ось $M\eta_1^0$ которой направлена вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$, а оси $M\eta_2^0$ и $M\eta_3^0$ развернуты в пространстве вокруг оси $M\eta_1^0$ произвольным образом (т.е. в общем случае ось $M\eta_2^0$ может не лежать в плоскости орбиты). Если же кватернион λ_0 определить таким образом, чтобы ось $M\eta_2^0$ лежала в плоскости орбиты (ось $M\eta_3^0$ при этом будет ортогональна этой плоскости), то общее решение уравнения (3.8) может быть представлено в виде формул (3.15), (3.16) или (3.13), (3.14), (3.17), полученных из геометрических соображений. Сопоставляя уравнения (3.19) и (3.20) с уравнениями (3.15) и (3.16), получаем в этом случае

$$\alpha = \lambda^* = \text{const}, \quad \beta = \lambda^* \circ \mathbf{k} = \text{const}, \quad \lambda^* = \lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_\omega = \text{const}, \quad (3.22)$$

где кватернион λ^* , определяющий собой ориентацию системы координат η^* относительно ξ (т.е. ориентацию орбиты), может быть найден через элементы орбиты Ω , I , ω^* в соответствии со вторым из соотношений (3.15).

Из равенств (3.22) следует, что кватернионы α и β являются единичными (т.е. с нормами, равными единице), а также то, что компоненты α_j и β_j кватернионов α и β удовлетворяют условию ортогональности:

$$\sum_{j=0}^3 \alpha_j \beta_j = \text{scal}(\bar{\alpha} \circ \beta) = 0.$$

Перейдем к уравнению (3.2) для расстояния r . Определяя регуляризующую функцию $v_1(r)$ для заданного вида приведенного потенциала $\Pi_1(r)$ из соотношения

$$v_1^2(h - \Pi_1) = (1/2)C_1^* r^2 + C_2^* r + C_3^*, \quad C_1^*, C_2^*, C_3^* = \text{const} \quad (3.23)$$

для нахождения расстояния r получим из уравнений (3.2) и (3.23) линейное дифференциальное уравнение, имеющее вид известного линейного уравнения движения возмущенного гармонического осциллятора [59]

$$\frac{d^2 r}{d\tau_1^2} = \frac{1}{m}(C_1^* r + C_2^*).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$r(\tau_1) = A \text{ch}(k\tau_1 + \varepsilon) - C_2^* / C_1^*, \quad k^2 = C_1^* / m, \quad (3.24)$$

где A и ε — постоянные интегрирования.

Соотношения (3.19), (3.20) и (3.24) или (3.13), (3.17) и (3.24), дополненные равенствами

$$\varphi = c \int r^{-2}(\tau_1) v_1(r(\tau_1)) d\tau_1 = \text{const} \quad (3.25)$$

$$t = \int v_1(r(\tau_1)) d\tau_1 = \text{const} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{r}_\xi = r(\tau_1) \boldsymbol{\lambda}(\varphi) \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}(\varphi) \quad (3.27)$$

$$\mathbf{v}_\xi = \left(\left(A k v_1^{-1}(r(\tau_1)) \right) \text{sh}(k\tau_1 + \varepsilon) \boldsymbol{\lambda}(\varphi) + 2c r^{-1}(\tau_1) \frac{d\boldsymbol{\lambda}(\varphi)}{d\varphi} \right) \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}(\varphi), \quad (3.28)$$

вытекающими из соотношений (3.9), (3.4) и (3.5), представляют собой общее решение пространственной задачи невозмущенного центрального движения [11, 35]. Роль независимой переменной здесь играет переменная τ_1 . Переменная φ , фигурирующая в формулах (3.19), (3.20) и (3.27), (3.28), выражается через τ_1 посредством соотношений (3.25) и (3.24).

Используя уравнение (3.17), соотношение (3.28) можно представить в виде

$$\mathbf{v}_\xi = \boldsymbol{\lambda}(\varphi) \circ \left(\left(A k v_1^{-1}(r(\tau_1)) \right) \text{sh}(k\tau_1 + \varepsilon) \mathbf{i} + c r^{-1}(\tau_1) \mathbf{j} \right) \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}(\varphi). \quad (3.29)$$

Аналогичное решение пространственной задачи невозмущенного центрального движения можно построить, используя кватернионные уравнения (3.6) и (3.7). Роль переменной φ в этом случае будет играть переменная τ .

Представим полученное решение в униформизированной форме, позволяющей избавиться от необходимости рассмотрения ветвления решений, возникающих при обходе критических точек типа полюсов. Используя решения для

переменных r , φ и t , описывающих движение точки в плоском случае в униформизированной форме, установленной в [61], получим построенное автором статьи [11, 35] униформизированное решение пространственной задачи невозмущенного центрального движения в виде соотношений (3.19), (3.20) и соотношений

$$\begin{aligned} r &= a(\gamma(z; g_2, g_3) + \mu^*) \\ \varphi &= (2\tilde{n} / (ka^2)) \int (\gamma(z) + \mu^*)^{-3/2} v_1(a(\gamma(z) + \mu^*)) dz + \text{const} \\ t &= (2/k) \int (\gamma(z) + \mu^*)^{1/2} v_1(a(\gamma(z) + \mu^*)) dz + \text{const} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{r}_\xi = a(\gamma(z) + \mu^*) \boldsymbol{\lambda}(\varphi) \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}(\varphi) \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\xi &= \left(\dot{r} \boldsymbol{\lambda}(\varphi) + 2c(a(\gamma(z) + \mu^*))^{-1} \frac{d\boldsymbol{\lambda}(\varphi)}{d\varphi} \right) \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}(\varphi) \\ \dot{r} &= akv_1^{-1}(a(\gamma(z) + \mu^*)) \left((\gamma(z) + \mu^* + l_1)^2 - l_2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Здесь $\gamma(z; g_2, g_3)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, z — униформизирующая переменная, g_2, g_3 — инварианты.

Значения постоянных a , μ^* , l_1 , l_2 и инвариантов g_2, g_3 определяются в зависимости от знаков величин C_i^* выражениями [59] (Беленький):

$$1) \quad C_2^* / C_1^* > 0$$

$$a = C_2^* / C_1^*, \quad A = ae > 0, \quad \mu^* = -2/3, \quad l_1 = 1, \quad l_2 = e^2, \quad g_2 = (4/3)(1 + 3e^2), \\ g_3 = (8/27)(1 - 9e^2)$$

$$2) \quad C_2^* / C_1^* < 0$$

$$a = |C_2^* / C_1^*|, \quad A = ae > 0, \quad \mu^* = 2/3, \quad l_1 = -1, \quad l_2 = e^2, \quad g_2 = (4/3)(1 + 3e^2), \\ g_3 = -(8/27)(1 - 9e^2)$$

$$3) \quad C_2^* / C_1^* = 0$$

$$a = A, \quad \mu^* = 0, \quad l_1 = -1, \quad l_2 = 0, \quad g_2 = 4, \quad g_3 = 0$$

Здесь e — квазиэксцентриситет.

Переменная φ , фигурирующая в соотношениях (3.19), (3.20), (3.31) и (3.32), должна быть предварительно найдена в соответствии с соотношением (3.30).

Формулу (3.32) можно представить в другом виде:

$$\mathbf{v}_\xi = \boldsymbol{\lambda}(\varphi) \circ \left(\dot{r} \mathbf{i} + c(a(\gamma(z) + \mu^*))^{-1} \mathbf{j} \right) \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}(\varphi), \quad \dot{r} = akv_1^{-1}(a(\gamma(z) + \mu^*)) \left((\gamma(z) + \mu^* + l_1)^2 - l_2 \right)^{1/2}.$$

Приведенные уравнения пространственного невозмущенного центрального движения материальной точки и их решения могут быть использованы для построения новых регулярных кватернионных уравнений возмущенного пространственного центрального движения материальной точки, в том числе

уравнений в кватернионных оскулирующих (медленно изменяющихся) переменных, в частности, в переменных α и β .

4. Задача о возмущенном движении искусственного спутника в гравитационном поле Земли. 4.1. *Векторные уравнения возмущенного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли.* В векторной форме дифференциальные уравнения возмущенного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли имеют следующий вид:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\partial \Pi_E}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{p} = -\left(\frac{d\Pi}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{r}} \right) + \mathbf{p} \quad (4.1)$$

$$r = |\mathbf{r}|, \quad \Pi_E = \Pi + \Pi^*, \quad \Pi = \Pi(r) = -\frac{f m_E}{r}, \quad \Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt),$$

где $\mathbf{r}$ – геоцентрический радиус-вектор спутника, $m_E = m_{\text{earth}}$ – масса Земли, $\Pi_E = \Pi_{\text{earth}} = \Pi + \Pi^*$ – потенциал гравитационного поля Земли, $\Pi = \Pi(r)$ – его центральная составляющая, $\Pi^* = \Pi_z^*(\mathbf{r}) + \Pi_{ts}^*(t, \mathbf{r})$ – составляющая, обусловленная нецентральной гравитационного поля Земли ($\Pi_z^*(\mathbf{r})$ – составляющая потенциала, содержащая зональные гармоники гравитационного поля Земли, $\Pi_{ts}^*(t, \mathbf{r})$ – составляющая потенциала, содержащая тессеральные и секториальные гармоники гравитационного поля Земли [62–64]), f – постоянная тяготения, $\mathbf{p}$ – вектор возмущающего ускорения центра масс спутника от действующих на спутник негравитационных сил.

Систему координат $O\xi_1 \xi_2 \xi_3$ (ξ), в которой рассматривается орбитальное движение спутника, введем следующим образом: ее начало O поместим в центр Земли, ось $O\xi_3$ направим к северному полюсу Земли, а ось $O\xi_1$ – в точку весеннего равноденствия. Декартовы координаты спутника в этой системе координат обозначим через ξ_k ($k = 1, 2, 3$).

Составляющие поденциала Π^* являются функцией координат ξ_k и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Pi_z^*(\mathbf{r}) &= \Pi_z^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \Pi_z^*(r, \gamma) = \frac{f m_E}{r} \sum_{i=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n(\gamma), \quad \gamma = \sin \varphi = \cos \vartheta = \frac{\xi_3}{r} \\ \Pi_{ts}^*(\mathbf{r}) &= \Pi_{ts}^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \Pi_{ts}^*(r, \gamma, \lambda) = \frac{f m_E}{r} \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_{nk}(\gamma) (C_{nk} \cos(k\lambda) + S_{nk} \sin(k\lambda)), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$, R – средний экваториальный радиус Земли, J_n – безразмерные постоянные, характеризующие фигуру Земли, P_n – полином Лежандра n -го порядка, ϑ – угол между осью $O\xi_3$ и радиус-вектором $\mathbf{r}$, φ – геоцентрическая широта, C_{nk}, S_{nk} – безразмерные постоянные, характеризующие фигуру Земли, P_{nk} – присоединенные функции Лежандра, λ – географическая долгота.

В [10, 33] нами были предложены кватернионные уравнения движения спутника в гравитационном поле Земли в переменных Кустаанхеймо–Штифеля (KS -переменных). Была показана целесообразность использования вместо переменных Кустаанхеймо–Штифеля модифицированных четырехмерных регулярных переменных, предложенных нами в этих работах.

В [42] эти результаты нами были развиты. Получены кватернионные уравнения возмущенного движения искусственного спутника в гравитационном

поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник в четырехмерных переменных Кустаанхеймо—Штифеля и в модифицированных четырехмерных переменных, в которых уравнения движения спутника имеют более простую и симметричную структуру в сравнении с уравнениями движения в переменных Кустаанхеймо—Штифеля. Полученные уравнения линейны для невозмущенных кеплеровских движений, в общем случае имеют вид уравнений движения возмущенного четырехмерного осциллятора. Они, в отличие от классических уравнений, регулярны (не содержат особых точек типа сингулярности) для движения спутника в центральном гравитационном поле Земли под действием возмущающих сил, в описании которых не содержатся отрицательные степени расстояния спутника до центра Земли выше первой. В этих уравнениях основными переменными являются переменные Кустаанхеймо—Штифеля или наши модифицированные четырехмерные переменные, а также энергия движения спутника и время. Новая независимая переменная связана со временем t дифференциальным соотношением, содержащим расстояние спутника до центра масс Земли. Уравнения удобны для применения методов нелинейной механики и высокоточных численных расчетов.

В случае движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли, в описании которого не учитываются тессеральные и секториальные гармоники, но учитываются его зональные гармоники, найдены первые интегралы полученных уравнений движения спутника, предложены замены переменных и преобразования этих уравнений, позволившие получить для изучения движения спутника замкнутые системы дифференциальных уравнений меньшей размерности, в частности, системы уравнений четвертого и третьего порядков.

В [60] предложены регулярные кватернионные модели возмущенного орбитального движения твердого тела (космического аппарата, рассматриваемого как твердое тело), не имеющие особенностей, присущих классическим моделям, при движении тела в ньютоновском гравитационном поле и, в общем случае, при движении тела в центральном силовом поле, потенциал которого имеет вид полинома отрицательных степеней расстояния до центра притяжения четвертого порядка. Предложены также регуляризованные кватернионные модели орбитального движения тела в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются не только центральная (ньютоновская), но и зональные, тессеральные и секториальные гармоники потенциала поля тяготения, учитывающие несферичность Земли. В этих моделях понижены на несколько порядков отрицательные степени расстояния до центра притяжения в слагаемых, описывающих влияние на орбитальное движение твердого тела зональных, тессеральных и секториальных гармоник потенциала поля тяготения Земли. Основными переменными являются параметры Эйлера (Родрига—Гамильтона), расстояние от центра масс тела до центра притяжения, полная энергия орбитального движения тела и квадрат модуля вектора момента орбитальной скорости тела (или проекции этого вектора). В полученных моделях используется новая независимая переменная, связанная с временем дифференциальным соотношением, содержащим квадрат расстояния от центра масс тела до центра притяжения.

В случае возмущенного движения, в описании которого учитываются только его центральная и зональные гармоники, найдены первые интегралы полученных уравнений орбитального движения, предложены замены переменных

и преобразования этих уравнений, позволившие получить для изучения движения тела замкнутые системы дифференциальных уравнений меньшей размерности, в частности, систему уравнений третьего порядка для расстояния, синуса геоцентрической широты и квадрата модуля вектора момента орбитальной скорости.

Приведем регуляризованные кватернионные уравнения движения спутника в гравитационном поле Земли в переменных Кустаанхеймо—Штифеля и в модифицированных четырехмерных переменных, а также регуляризованные кватернионные модели орбитального движения твердого тела в гравитационном поле Земли, в которых используются четырехмерные параметры Эйлера (Родрига—Гамильтона).

4.2. Регуляризованные уравнения возмущенного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли в четырехмерных переменных Кустаанхеймо—Штифеля. В случае использования для описания движения спутника четырехмерных переменных Кустаанхеймо—Штифеля u_j ось η_1 введенной ранее вращающейся системы координат η направляется нами по радиус-вектору $\mathbf{r}$ центра масс спутника. Ориентация системы координат η в системе координат ξ характеризуется параметрами Эйлера λ_j . Координаты ξ_k центра масс спутника в системе координат ξ связаны с расстоянием r и параметрами Эйлера λ_j , а также с переменными Кустаанхеймо—Штифеля u_j соотношениями

$$\begin{aligned}\xi_1 &= r(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 \\ \xi_2 &= 2r(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) = 2(u_1u_2 - u_0u_3), \quad \xi_3 = 2r(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) = 2(u_1u_3 + u_0u_2),\end{aligned}\quad (4.3)$$

где $u_0 = \sqrt{r}\lambda_0$, $u_i = -\sqrt{r}\lambda_i$, $i = 1, 2, 3$; $r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$.

Поэтому функции γ и λ , присутствующие в потенциалах Π_z^* и Π_s^* могут быть представлены через расстояние r и параметры Эйлера λ_j , а также через KS -переменные u_j следующим образом:

$$\gamma = \sin \varphi = \cos \vartheta = \frac{\xi_3}{r} = 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) = \frac{2}{r}(u_1u_3 + u_0u_2) \quad (4.4)$$

$$\lambda = \lambda_a - \Omega_E t, \quad \lambda_a = \arctg \frac{\xi_2}{\xi_1} = \arctg \frac{2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3)}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2} = \arctg \frac{2(u_1u_2 - u_0u_3)}{u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2}, \quad (4.5)$$

где λ_a и Ω_E — абсолютная долгота и угловая скорость суточного вращения Земли.

Кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник в переменных Кустаанхеймо—Штифеля получаются из уравнений (2.15) и имеют следующий вид [42]:

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^*\mathbf{u} = \frac{1}{2}r\mathbf{q} - \frac{1}{4}\frac{\partial(r\Pi^*)}{\partial\mathbf{u}}, \quad \frac{dh^*}{d\tau} = r\frac{\partial\Pi_s^*}{\partial t} + 2\text{scal}\left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{q}\right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}}. \quad (4.6)$$

Дифференциальное уравнение для расстояния r спутника до центра масс Земли имеет вид

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} - 2h^*r - fm_E = r(-2\Pi^* + \text{scal}(\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{Q})).$$

Фигурирующая в этих уравнениях полная энергия h^* единицы массы спутника определяется соотношением

$$h^* = h + \Pi^*(t, \mathbf{r}_\xi), \quad h = 2r \sum_{j=0}^3 \left(\frac{du_j}{dt} \right)^2 + \Pi(r) = \frac{2}{r} \sum_{j=0}^3 \left(\frac{du_j}{d\tau} \right)^2 + \Pi(r). \quad (4.7)$$

Кватернион возмущений $\mathbf{Q}$ обусловлен действующим непотенциальным возмущением $\mathbf{p}$ и нецентральностью гравитационного поля Земли и имеет вид

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{u}}, \quad \mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_\xi, \quad \mathbf{p}_\xi = \mathbf{p}_\xi(t, \mathbf{r}_\xi, \mathbf{v}_\xi).$$

Расстояние r до центра масс Земли, проекции радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс спутника и его вектора скорости $\mathbf{v}$ в системе координат ξ находятся через переменные Кустаанхеймо–Штифеля и их производные с помощью кватернионных соотношений

$$r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \quad \mathbf{r}_\xi = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_\xi = \frac{d\mathbf{r}_\xi}{dt} = 2\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{2}{r} \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau}. \quad (4.8)$$

Обозначим

$$\Pi_z^+(r, \gamma) = r \Pi_z^*(r, \gamma) = f m_E \sum_{i=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n(\gamma) \quad (4.9)$$

$$\Pi_{is}^+(r, \gamma, \lambda) = r \Pi_{is}^*(r, \gamma, \lambda) = f m_E \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_{nk}(\gamma) (C_{nk} \cos(k\lambda) + S_{nk} \sin(k\lambda)). \quad (4.10)$$

Из кватернионных уравнений (4.6) с учетом обозначений (4.9) и (4.10) следуют скалярные дифференциальные уравнения возмущенного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник в переменных Кустаанхеймо–Штифеля [42]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h^* u_j = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\gamma}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi^+}{\partial r} \right) u_j + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} \right) u_j^+ \right) - \\ - \frac{1}{4(\xi_1^2 + \xi_2^2)} \frac{\partial \Pi_{is}^+}{\partial \lambda} \left(\xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial u_j} - \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial u_j} \right) + \frac{1}{2} r q_j, \quad j = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = r \frac{\partial \Pi_{is}^*}{\partial t} + 2 \sum_{j=0}^3 \left(\frac{du_j}{d\tau} q_j \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} \quad (4.12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} u_0^+ = u_2, \quad u_1^+ = u_3, \quad u_2^+ = u_0, \quad u_3^+ = u_1; \quad \Pi^+ = \Pi_z^+ + \Pi_{is}^+ \\ \xi_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad \xi_2 = 2(u_1 u_2 - u_0 u_3). \end{aligned}$$

Π_z^+ , Π_{is}^+ и Π_{is}^* имеют вид (4.9), (4.10) и (4.2) соответственно.

4.3. Регуляризованные уравнения возмущенного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли в модифицированных четырехмерных переменных. Нами также предложены [42] другие уравнения движения спутника, которые,

обладая всеми достоинствами вышеприведенных уравнений в переменных Кустаанхеймо—Штифеля, имеют более простую и симметричную структуру. Для этого нами было предложено использовать вместо переменных Кустаанхеймо—Штифеля другие четырехмерные переменные, введенные нами в [10, 33] (см. также книгу [35]).

В случае Кустаанхеймо—Штифеля ось η_1 введенной ранее вращающейся системы координат η была направлена нами по радиус-вектору $\mathbf{r}$ центра масс спутника. Координаты ξ_k спутника в системе координат ξ связаны в этом случае с переменными Кустаанхеймо—Штифеля u_j соотношениями (4.3).

Направим по радиус-вектору $\mathbf{r}$ не ось η_1 системы координат η , а ось η_3 . В этом случае все выше приведенные кватернионные уравнения подраздела 4.1 сохраняют свой вид, лишь вместо орта $\mathbf{i}$ необходимо взять орт $\mathbf{k}$ (это, кстати, демонстрирует удобство использования кватернионных моделей астродинамики). Новые четырехмерные переменные u_j^* , определяемые через параметры Родрига—Гамильтона λ_j^* ориентации этой новой вращающейся системы координат η , будут связаны с декартовыми координатами ξ_k соотношениями

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 2r(\lambda_1^* \lambda_3^* + \lambda_0^* \lambda_2^*) = 2(u_1^* u_3^* - u_0^* u_2^*), & \xi_2 &= 2r(\lambda_2^* \lambda_3^* - \lambda_0^* \lambda_1^*) = 2(u_2^* u_3^* + u_0^* u_1^*) \\ \xi_3 &= 2r((\lambda_0^*)^2 - (\lambda_1^*)^2 - (\lambda_2^*)^2 + (\lambda_3^*)^2) = ((u_0^*)^2 - (u_1^*)^2 - (u_2^*)^2 + (u_3^*)^2) \\ u_0^* &= \sqrt{r} \lambda_0^*, & u_i^* &= -\sqrt{r} \lambda_i^*, \quad i = 1, 2, 3; \quad r = (u_0^*)^2 + (u_1^*)^2 + (u_2^*)^2 + (u_3^*)^2.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Расстояние r до центра масс Земли, проекции радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс спутника и его вектора скорости $\mathbf{v}$ на оси системы координат ξ находятся через модифицированные четырехмерные переменные и их производные с помощью кватернионных соотношений

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{u}^* \circ \bar{\mathbf{u}}^* = (u_0^*)^2 + (u_1^*)^2 + (u_2^*)^2 + (u_3^*)^2, & \mathbf{u}^* &= u_0^* + u_1^* \mathbf{i} + u_2^* \mathbf{j} + u_3^* \mathbf{k} \\ \mathbf{r}_\xi &= \bar{\mathbf{u}}^* \circ \mathbf{k} \circ \mathbf{u}^*, & \mathbf{v}_\xi &= \frac{d\mathbf{r}_\xi}{dt} = 2\bar{\mathbf{u}}^* \circ \mathbf{k} \circ \frac{d\mathbf{u}^*}{dt} = \frac{2}{r} \bar{\mathbf{u}}^* \circ \mathbf{k} \circ \frac{d\mathbf{u}^*}{d\tau}.\end{aligned}\quad (4.14)$$

Кватернионные уравнения движения ИСЗ в модифицированных четырехмерных переменных имеют вид

$$\frac{d^2 \mathbf{u}^*}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h^* \mathbf{u}^* = \frac{1}{2} r \mathbf{q}^* - \frac{1}{4} \frac{\partial(r\Pi^*)}{\partial \mathbf{u}^*}, \quad \frac{dh^*}{d\tau} = r \frac{\partial \Pi^*}{\partial t} + 2 \text{scal} \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}^*}{d\tau} \circ \mathbf{q}^* \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u}^* \circ \bar{\mathbf{u}}^*.$$

совпадающий по своей форме с кватернионными уравнениями ИСЗ в переменных Кустаанхеймо—Штифеля (4.6).

В этих уравнениях кватернион непотенциальных возмущений $\mathbf{q}^* = -\mathbf{k} \circ \mathbf{u}^* \circ \mathbf{p}_\xi$.

Переменные γ и λ , фигурирующие в потенциале гравитационного поля Земли, выражаются через модифицированные переменные с помощью следующих соотношений, отличных от (4.4) и (4.5):

$$\gamma = \sin \varphi = \cos \vartheta = \frac{\xi_3}{r} = (\lambda_0^*)^2 - (\lambda_1^*)^2 - (\lambda_2^*)^2 + (\lambda_3^*)^2 = \frac{1}{r} ((u_0^*)^2 - (u_1^*)^2 - (u_2^*)^2 + (u_3^*)^2) \quad (4.15)$$

$$\lambda = \lambda_a - \Omega_E t, \quad \lambda_a = \arctg \frac{\xi_2}{\xi_1} = \arctg \frac{\lambda_2^* \lambda_3^* - \lambda_0^* \lambda_1^*}{\lambda_1^* \lambda_3^* + \lambda_0^* \lambda_2^*} = \arctg \frac{u_3^* u_3^* + u_0^* u_1^*}{u_1^* u_3^* - u_0^* u_2^*}. \quad (4.16)$$

Учитывая равенство $(\lambda_0^*)^2 + (\lambda_1^*)^2 + (\lambda_2^*)^2 + (\lambda_3^*)^2 = 1$, представим соотношение (4.15) в двух различных формах:

$$\gamma = 1 - 2((\lambda_1^*)^2 + (\lambda_2^*)^2) = 2((\lambda_0^*)^2 + (\lambda_3^*)^2) - 1 = 1 - \frac{2}{r}((u_1^*)^2 + (u_2^*)^2) = \frac{2}{r}((u_0^*)^2 + (u_3^*)^2) - 1. \quad (4.17)$$

Из сопоставления (4.4) с (4.15) видно, что выражения переменной γ , от которой зависит потенциал $\Pi^* = \Pi_z^*(r, \gamma) + \Pi_{ts}^*(r, \gamma, \lambda)$, описывающий зональные, тессеральные и секториальные гармоники гравитационного поля Земли, через новые переменные могут быть представлены в двух различных формах и имеют более простую и симметричную структуру, что и позволяет получить более простые и симметричные, чем в случае использования переменных Кустанхеймо—Штифеля, скалярные уравнения движения спутника, имеющие вид [42]

$$\frac{d^2 u_k^*}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h^* u_k^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma - 1}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi^+}{\partial r} \right) u_k^* - \frac{1}{4} \frac{\partial \Pi_{ts}^+}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u_k^*} + \frac{1}{2} r q_k, \quad k = 0.3$$

$$\frac{d^2 u_s^*}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h^* u_s^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma + 1}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi^+}{\partial r} \right) u_s^* - \frac{1}{4} \frac{\partial \Pi_{ts}^+}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u_s^*} + \frac{1}{2} r q_s, \quad s = 1.2$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = -r \Omega_E \frac{\partial \Pi_{ts}^*}{\partial \lambda} + 2 \sum_{j=0}^3 \left(\frac{du_j^*}{d\tau} q_j^* \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_j^*} = \frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \left(\xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial u_j^*} - \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial u_j^*} \right), \quad \xi_1 = 2(u_1^* u_3^* - u_0^* u_2^*), \quad \xi_2 = 2(u_2^* u_3^* + u_0^* u_1^*)$$

$$q_0^* = u_0^* p_3 + u_1^* p_2 - u_2^* p_1, \quad q_1^* = u_0^* p_2 - u_1^* p_3 + u_3^* p_1$$

$$q_2^* = -u_0^* p_1 - u_2^* p_3 + u_3^* p_2, \quad q_3^* = u_1^* p_1 + u_2^* p_2 + u_3^* p_3$$

$$\Pi^+ = \Pi_z^+(r, \gamma) + \Pi_{ts}^+(r, \gamma, \lambda) = r \Pi_z^*(r, \gamma) + r \Pi_{ts}^*(r, \gamma, \lambda).$$

В этих уравнениях полная энергия h^* единицы массы спутника пределяется соотношениями (4.7), в которых вместо переменных u_j необходимо взять переменные u_j^* .

Уравнения движения спутника в модифицированных четырехмерных переменных, как уже отмечалось, имеют более простую и симметричную структуру в сравнении с уравнениями в KS -переменных, что упрощает их аналитическое и численное исследование.

Отметим, что модифицированные переменные u_j^* связаны с переменными Кустанхеймо—Штифеля u_j соотношениями

$$u_0^* = \frac{1}{2}(u_0 + u_1 + u_2 + u_3), \quad u_1^* = -\frac{1}{2}(u_0 - u_1 - u_2 + u_3)$$

$$u_2^* = -\frac{1}{2}(u_0 + u_1 - u_2 - u_3), \quad u_3^* = \frac{1}{2}(u_0 - u_1 + u_2 - u_3)$$

и являются их линейными композициями.

В кватернионной записи эти соотношения имеют следующий вид:

$$\mathbf{u}^* = u_0^* + u_1^* \mathbf{i} + u_2^* \mathbf{j} + u_3^* \mathbf{k} = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \circ \mathbf{u} = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \circ (u_0 + u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}).$$

4.4. Регуляризованные кватернионные уравнения орбитального движения твердого тела в гравитационном поле Земли, в которых используются четырехмерные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона). Уравнения, в которых в качестве независимой переменной выступает переменная τ , определяемая дифференциальным соотношением $d\tau = r^{-2}dt$, получается из уравнений (2.16)–(2.19) и имеют следующий вид [60]:

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\lambda}}{d\tau^2} + \frac{1}{4} c^2 \boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{2} r^3 (\bar{\mathbf{Q}} - \text{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{Q})) \boldsymbol{\lambda} \quad (4.18)$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + c^2 r - 3 f m_E r^2 - 4 h^* r^3 = - \frac{\partial(r^4 \Pi^*)}{\partial r} + r^4 \text{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{q}) \quad (4.19)$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = r^2 \frac{\partial \Pi_{\text{is}}^*}{\partial t} + \text{scal}(\boldsymbol{\mu}^* \circ \mathbf{q}), \quad \boldsymbol{\mu}^* = \frac{dr}{d\tau} \boldsymbol{\lambda} + 2r \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\tau} \quad (4.20)$$

$$\frac{dc^2}{d\tau} = 4r^3 \text{scal}\left(\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\tau} \circ \mathbf{Q}\right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r^2, \quad (4.21)$$

где

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \frac{1}{2mr} \frac{\partial \bar{\Pi}^*}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathbf{p}_\xi, \quad \Pi^* = \Pi_z^*(r, \gamma) + \Pi_{\text{is}}^*(r, \gamma, \boldsymbol{\lambda}), \quad \bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{q}} - \frac{1}{2mr} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, \quad \bar{\mathbf{q}} = -\mathbf{p}_\xi \circ \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i}$$

$$\gamma = \sin \varphi = \cos \vartheta = \frac{\xi_3}{r} = 2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2), \quad \lambda = \lambda_a - \Omega_E t, \quad \lambda_a = \arctg \frac{\xi_2}{\xi_1} = \arctg \frac{2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0 \lambda_3)}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}$$

$$\mathbf{p}_\xi = \mathbf{p}_\xi(t, \mathbf{r}_\xi, \mathbf{v}_\xi), \quad \mathbf{r}_\xi = r \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{v}_\xi = \frac{1}{r^2} \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\mu}}^*, \quad \bar{\boldsymbol{\mu}}^* = \frac{dr}{d\tau} \bar{\boldsymbol{\lambda}} + 2r \frac{d\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{d\tau}.$$

В регуляризованной кватернионной системе уравнений (4.18)–(4.21) неизвестными являются параметры Эйлера λ_j , расстояние r , время t , полная энергия h^* и квадрат модуля c вектора момента орбитальной скорости c^2 . В качестве независимой переменной выступает новая переменная τ , определяемая дифференциальным соотношением $d\tau = r^{-2}dt$.

В этих уравнениях помимо центральной (ньютоновской) составляющей гравитационного поля Земли учитываются его зональные, тессеральные и секториальные гармоники. Уравнения регулярны для возмущенного орбитального движения тела в ньютоновском гравитационном поле Земли (при условии конечности возмущающих сил). Кроме того, они имеют дополнительные (в смысле регулярности) достоинства, в частности, в дифференциальных регуляризованных уравнениях второго порядка (4.18) и (4.19) для параметров Эйлера λ_j и расстояния r отрицательные степени расстояния в слагаемых правых частях уравнений, описывающих влияние зональных, тессеральных и секториальных

гармоник гравитационного потенциала поля Земли, уменьшаются (по сравнению с нерегуляризованными уравнениями) на четыре единицы.

В правой части уравнения (4.20) для полной энергии h^* присутствует слагаемое $r^2 \partial \Pi_{\text{гс}}^* / \partial t$, содержащее лишь частную производную по времени t от потенциала, описывающего тессеральные и секториальные гармоники гравитационного поля Земли (влияние на изменение полной энергии зональных гармоник гравитационного поля Земли отсутствует). В отличие от нерегуляризованного уравнения для полной энергии, в регуляризованном уравнении (4.20) отрицательные степени расстояния в слагаемых, описывающих влияние тессеральных и секториальных гармоник гравитационного поля Земли, уменьшаются на две единицы.

В уравнении (4.21) для переменной c^2 (квадрата модуля вектора момента орбитальной скорости тела) отрицательные степени расстояния в слагаемых, описывающих влияние зональных, тессеральных и секториальных гармоник гравитационного поля Земли, уменьшаются на две единицы.

Уравнения (4.18)–(4.21) сложнее выше приведенных кватернионных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и в наших модифицированных четырехмерных переменных, поскольку содержат “лишние” уравнения для расстояния r и квадрата модуля вектора момента орбитальной скорости c^2 , к тому же уравнение (4.19) для расстояния не является линейным для невозмущенного кеплеровского движения, как в случае использования KS и модифицированных переменных. Однако уравнения в KS и модифицированных переменных регулярны лишь для возмущенного орбитального движения тела в центральном силовом поле с ньютоновским потенциалом (при том же условии конечности возмущающих сил).

5. Заключение. В статье кратко изложена предложенная нами общая кватернионная теория регуляризирующих и стабилизирующих преобразований ньютоновских дифференциальных уравнений возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле, потенциал которого $\Pi = \Pi(r)$ полагается произвольной дифференцируемой функцией расстояния r от точки до центра поля. Точка находится также под действием возмущающего потенциала $\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}) = \Pi^*(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, полагаемого произвольной функцией времени t и декартовых координат ξ_i местоположения точки в инерциальной системе координат, и под действием возмущающего ускорения $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt) = \mathbf{p}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3)$, полагаемого произвольной функцией времени, радиус-вектора и вектора скорости точки. Рассмотрены условия приводимости кватернионных уравнений возмущенного центрального движения к осцилляторному виду с помощью использования трех регуляризирующих функций, содержащих расстояние r . Приведены различные дифференциальные регулярные кватернионные уравнения возмущенного центрального движения в осцилляторной и нормальной формах, построенные с помощью этой теории, в том числе уравнения, в которых используются четырехмерные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) и четырехмерные переменные Кустаанхеймо–Штифеля и их модификации.

В качестве дополнительных переменных в рассматриваемых дифференциальных уравнениях осцилляторного вида в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, используются энергия h центрального движения или полная энергия h^* возмущенного центрального движения материальной точки, включающая

потенциал Π^* возмущающих сил, и реальное время t . Из этих уравнений следуют, как частные, системы регулярных кватернионных уравнений в переменных Кустаанхеймо—Штифеля для возмущенного кеплеровского движения, содержащие или кеплеровскую энергию или полную энергию материальной точки, широко используемые в настоящее время. В качестве независимой переменной в уравнениях используется переменная τ , определяемая дифференциальным соотношением $d\tau = r^{-1}dt$ (т.е. используется дифференциальное преобразование времени Зундмана $dt = r d\tau$).

В качестве дополнительных переменных в рассматриваемых дифференциальных уравнениях осцилляторного вида в переменных Эйлера используются расстояние r , полная энергия h^* , квадрат модуля c вектора $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ момента орбитальной скорости материальной точки (c^2) и время t . В качестве независимой переменной используется либо переменная τ , определяемая дифференциальным соотношением $d\tau = r^{-2}dt$, либо переменная φ (полярная координата), определяемая дифференциальным соотношением $d\varphi = (c / r^2) dt$.

Основное достоинство полученных нами с использованием параметров Эйлера λ , осцилляторных систем дифференциальных уравнений возмущенного центрального движения заключается в том, что каждое из приводимых дифференциальных кватернионных уравнений второго порядка в параметрах Эйлера (для кватернионной переменной λ), входящих в состав этих систем, является регулярным для возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле с любым видом потенциала $\Pi(r)$ при условии, что члены уравнений, обусловленные возмущающим потенциалом Π^* и возмущающим ускорением $\mathbf{p}$, сохраняют конечные значения. Кроме того, в случае невозмущенного центрального движения каждое из этих кватернионных уравнений становится эквивалентным уравнению движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора, частота колебаний которого равна $c/2$ (половине модуля вектора момента орбитальной скорости) и зависит от типа движения, или же одинакова для всех типов движения и имеет постоянное значение, равное $1/2$. Каждое из приводимых уравнений для полной энергии h^* и каждое из уравнений для переменной c^2 также является регулярным для любого вида потенциала $\Pi(r)$. Уравнения же для расстояния r регулярны лишь для потенциала $\Pi(r)$ вида

$$\Pi(r) = -\frac{a_1}{r} - \frac{a_2}{r^2} - \frac{a_3}{r^3} - \frac{a_4}{r^4}, \quad a_i = \text{const}.$$

Поэтому эти системы уравнений осцилляторного вида, полученные с использованием параметров Эйлера, в целом являются регулярными для возмущенного центрального движения материальной точки в силовом поле с потенциалом $\Pi(r)$, имеющим четвертый порядок относительно величины r^{-1} , обратной расстоянию до центра притяжения.

Эти уравнения сложнее полученных нами кватернионных уравнений в переменных Кустаанхеймо—Штифеля, поскольку содержат “лишние” уравнение для расстояния r и уравнение для переменной c^2 , к тому же уравнение для расстояния r не является линейным для невозмущенного кеплеровского движения. Однако уравнения в переменных Кустаанхеймо—Штифеля являются регулярными лишь для возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле с ньютоновским потенциалом $\Pi(r) = -a_1 r^{-1}$ ($a_1 = \text{const}$).

Излагаемые регулярные уравнения, в которых используются параметры Эйлера, могут быть использованы, в частности, для прогноза движения планет с учетом эффектов общей теории относительности (ОТО), поскольку траектории материальной точки в искривленном пространстве-времени, описываемом метрикой Шварцшильда, соответствуют траекториям точки при движении в поле центральной силы с потенциалом $\Pi(r) = -a_1/r - a_3/r^3$, $a_i = \text{const}$, являющимся частным случаем вышеприведенного потенциала. Эти уравнения также были использованы нами для построения регулярных кватернионных уравнений возмущенного орбитального движения твердого тела в гравитационном поле Земли.

В качестве дополнительных переменных одного из рассмотренных вариантов кватернионных дифференциальных уравнений осцилляторного вида в переменных Эйлера используются переменная $\rho = 1/r$, обратная расстоянию r , полная энергия h^* , переменная c^2 и время t . В качестве независимой переменной используется полярная координата φ ($d\varphi = (c/r^2)dt$). Этот вариант уравнений содержит обобщенное уравнение Бинэ, которое линейно для невозмущенного кеплеровского движения, однако он не пригоден для исследования движений в окрестности начала координат, поскольку содержит нерегулярное дифференциальное уравнение второго порядка для переменной ρ (нерегулярность обусловлена переменной $\rho = 1/r$).

В рассмотренных нормальных формах дифференциальных уравнений возмущенного центрального движения (первого порядка) в качестве переменных используются кватернион λ , описывающий инерциальную ориентацию неголономной системы координат, в которой нами записываются уравнения возмущенного центрального движения (его компоненты – параметры Эйлера), двухмерный или трехмерный кватернион s момента орбитальной скорости материальной точки, а также расстояние r , полная энергия h^* и время t . В качестве независимой переменной используется либо переменная τ , определяемая дифференциальным соотношением $d\tau = r^{-2}dt$, либо полярная координата φ . Эти нормальные системы уравнений в целом являются регулярными для возмущенного центрального движения материальной точки в силовом поле с потенциалом

$$\Pi(r) = -a_1/r - a_2/r^2 - a_3/r^3 - a_4/r^4 (a_i = \text{const}).$$

В статье также рассмотрены кватернионные уравнения пространственного невозмущенного центрального движения материальной точки, связи четырехмерных λ и u -переменных с элементами орбиты, а также приведено униформизированное решение пространственной задачи невозмущенного центрального движения, позволяющее избавиться от необходимости рассмотрения ветвления решений, возникающих при обходе критических точек типа полюсов. Приведенные уравнения пространственного невозмущенного центрального движения материальной точки и их решения могут быть использованы для построения новых регулярных кватернионных уравнений возмущенного пространственного центрального движения материальной точки, в том числе уравнений в кватернионных оскулирующих (медленно изменяющихся) переменных.

В качестве приложения изложены регуляризованные (в отношении ньютоновской силы притяжения) дифференциальные кватернионные уравнения движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли, в которых используются переменные Кустанхаймо–Штифеля (первый вариант уравнений)

или наши модифицированные четырехмерные регулярные переменные (второй вариант уравнений, которые имеют более простую и симметричную структуру в сравнении с уравнениями в переменных Кустанхеймо—Штифеля). Также излагаются дифференциальные кватернионные уравнения движения спутника, построенные с использованием параметров Эйлера, в которых регуляризуются слагаемые уравнений, содержащих отрицательные степени расстояния до центра Земли четвертого порядка включительно. Во всех этих уравнениях в описании гравитационного поля Земли учитываются не только центральная (ньютоновская), но и зональные, тессеральные и секториальные гармоники потенциала поля тяготения (учитывается несферичность Земли).

В случае движения спутника в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются только его центральная и зональные гармоники, нами найдены первые интегралы дифференциальных кватернионных уравнений движения спутника в модифицированных четырехмерных переменных и дифференциальных кватернионных уравнений, построенных с использованием параметров Эйлера, предложены замены переменных и преобразования этих уравнений, позволившие получить для изучения движения спутника замкнутые системы дифференциальных уравнений меньшей размерности, в частности, системы уравнений четвертого и третьего порядков.

Перспективы развития теории возмущенного центрального движения и построения в рамках этой теории новых регулярных моделей возмущенного орбитального движения. Изложенная в статье кватернионная теория регуляризующих и стабилизирующих преобразований ньютоновских дифференциальных уравнений возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле основана на записи уравнений возмущенного центрального движения в неголономной системе координат η и на использовании в качестве параметров ориентации этой системы координат четырехмерных параметров Эйлера (Родрига—Гамильтона) и кватерниона Гамильтона. Ось η_1 неголономной системы координат η направлена вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки M , а проекция ω_1 угловой скорости вращения системы координат η на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки является произвольно задаваемым параметром и полагается нами равной нулю. В первом разделе статьи был описан предложенный нами [37] метод регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, основанный на использовании двумерных идеальных прямоугольных координат Ганзена и двумерных переменных Леви-Чивита, описывающих движение материальной точки в идеальной (по Deprit) системе координат [57], а также основан на использовании параметров Эйлера и кватерниона Гамильтона, характеризующих ориентацию идеальной системы координат в инерциальной системе координат. Ось η_3^{id} идеальной системы координат параллельна вектору $\mathbf{c}$ момента скорости $\mathbf{v}$ точки M , а координатные оси η_1^{id} и η_2^{id} лежат в плоскости мгновенного движения точки. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости идеальной системы координат параллелен радиус-вектору $\mathbf{r}$ точки M .

Аналогичный подход целесообразно использовать для построения новой кватернионной теории регуляризующих и стабилизирующих преобразований ньютоновских дифференциальных уравнений возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле, записывая их в идеальной системе координат и используя параметры Эйлера и кватернион Гамильтона

для описания ориентации идеальной системы координат в инерциальной системе координат. Привлекательность такого подхода заключается в том, что возмущенное пространственное (трехмерное) движение в идеальной системе координат принимает вид плоского (двухмерного) движения и, следовательно, для его описания можно эффективно использовать двухмерные переменные Леви-Чивита, введенные им для регуляризации уравнений плоского движения. Используемые же для описания ориентации идеальной системы координат параметры Эйлера и кватернион Гамильтона являются скалярными и кватернионным оскулирующими элементами орбиты центрального движения (медленно изменяющимися переменными), что удобно для изучения возмущенного центрального движения. В качестве приложения построенной таким образом теории центрального движения может быть рассмотрено построение новых регуляризованных дифференциальных кватернионных уравнений пространственного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли в двухмерных переменных Леви-Чивита и в четырехмерных параметрах Эйлера.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-21-00218.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // Nov. Comm. Petrop. 1765. V. 11. P. 144–151.
2. *Levi-Civita T.* Traettorie singolari ed urbi nel problema ristretto dei tre corpi // Ann. mat. pura appl. 1904. V. 9. P. 1–32.
3. *Levi-Civita T.* Sur la regularization du probleme des trois corps // Acta Math. 1920. V. 42. P. 99–144. <https://doi.org/10.1007/BF02418577>
4. *Levi-Civita T.* Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps // Opere matematiche. 1956. № 2. P. 411–417.
5. *Kustaanheimo P.* Spinor regularization of the Kepler motion // Ann. Univ. Turku. 1964. V. 73. P. 3–7.
6. *Kustaanheimo P., Stiefel E.* Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // J. Reine Angew. Math. 1965. V. 218. P. 204–219.
7. *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.
8. *Челноков Ю.Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 12–21.
9. *Челноков Ю.Н.* О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 151–158.
10. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 1: Общая теория. Приложения к задаче регуляризации и к задаче о движении ИСЗ. М.: ВИНТИ, 1985. № 218628-В 36 с.
11. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 2: Пространственная задача невозмущенного центрального движения. Задача с начальными условиями. М.: ВИНТИ, 1985. № 8629-В. 18 с.
12. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 1 // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 1. С. 20–30.
13. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 2 // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 2. С. 3–11.
14. *Velte W.* Concerning the regularizing KS-transformation // Celest. Mech. 1978. V. 17. P. 395–403. <https://doi.org/10.1007/BF01228959>
15. *Vivarelli M.D.* The KS-transformation in hypercomplex form // Celest. Mech. 1983. V. 29. P. 45–50.
16. *Vivarelli M.D.* Geometrical and physical outlook on the cross product of two quaternions // Celest. Mech. 1988. V. 41. P. 359–370.

17. *Vivarelli M.D.* On the connection among three classical mechanical problems via the hypercomplex KS-transformation // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 1991. V. 50. № 2. P. 109–124.
18. *Шагов О.Б.* О двух видах уравнений движения искусственного спутника Земли в осцилляторной форме // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1990. № 2. С. 3–8.
19. *Deprit A., Eliepe A. and Ferrer S.* Linearization: Laplace vs. Stiefel // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 1994. V. 58. P. 151–201. <https://doi.org/10.1007/BF00695790>
20. *Vrbik J.* Celestial mechanics via quaternions // *Can. J. Phys.* 1994. V. 72. P. 141–146. <https://doi.org/10.1139/p94-023>
21. *Vrbik J.* Perturbed Kepler problem in quaternionic form // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1995. V. 28. № 21. P. 193–198. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/28/21/027>
22. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2006. V. 95. P. 201–212.
23. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2008. V. 102. № 1. P. 149–162. <https://doi.org/10.1007/s10569-008-9124-y>
24. *Saha P.* Interpreting the Kustaanheimo-Stiefel transform in gravitational dynamics // *Mon. Notices Royal Astron. Soc.* 2009. V. 400. P. 228–231. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15437.x>
25. *Zhao L.* Kustaanheimo-Stiefel regularization and the quadrupolar conjugacy // *Regul. Chaotic Dyn.* 2015. V. 20. № 1. P. 19–36. <https://doi.org/10.1134/S1560354715010025>
26. *Roa J., Urrutxua H., Pelaez J.* Stability and chaos in Kustaanheimo-Stiefel space induced by the Hopf fibration // *Mon. Notices Royal Astron. Soc.* 2016. V. 459. № 3. P. 2444–2454. <https://doi.org/10.1093/mnras/stw780>
27. *Roa J., Pelaez J.* The theory of asynchronous relative motion II: universal and regular solutions // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2017. V. 127. P. 343–368.
28. *Breiter S., Langner K.* Kustaanheimo-Stiefel transformation with an arbitrary defining vector // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2017. V. 128. P. 323–342. <https://doi.org/10.1007/s10569-017-9754-z>
29. *Breiter S., Langner K.* The extended Lissajous-Levi-Civita transformation // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2018. V. 130. P. 68. <https://doi.org/10.1007/s10569-018-9862-4>
30. *Breiter S., Langner K.* The Lissajous-Kustaanheimo-Stiefel transformation // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2019. V. 131. P. 9. <https://doi.org/10.1007/s10569-019-9887-3>
31. *Ferrer S. and Crespo F.* Alternative angle-based approach to the KS-Map. An interpretation through symmetry // *J. Geom. Mech.* 2018. V. 10. № 3. P. 359–372.
32. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. I // *Космические исследования.* 1992. Т. 30. Вып. 6. С. 759–770.
33. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. II // *Космические исследования.* 1993. Т. 31. Вып. 3. С. 3–15.
34. *Челноков Ю.Н.* Анализ оптимального управления движением точки в гравитационном поле с использованием кватернионов // *Изв. РАН. Теория и системы управления.* 2007. № 5. С. 18–44.
35. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.
36. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. I // *Космические исследования.* 2013. Т. 51. № 5. С. 389–401. <https://doi.org/10.7868/S0023420613050026>
37. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. II // *Космические исследования.* 2014. Т. 52. № 4. С. 322–336. <https://doi.org/10.7868/S0023420614030029>
38. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. III // *Космические исследования.* 2015. Т. 53. № 5. С. 430–446. <https://doi.org/10.7868/S0023420615050040>
39. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. I // *Изв. РАН. МТТ.* 2017. № 6. С. 24–54.
40. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. II // *Изв. РАН. МТТ.* 2018. № 6. С. 41–63. <https://doi.org/10.31857/S057232990000712-3>

41. Челноков Ю.Н. Возмущенная пространственная задача двух тел: регулярные кватернионные уравнения относительного движения // ПММ. 2018. Т. 82. № 6. С. 721–733. <https://doi.org/10.31857/S003282350002736-9>
42. Челноков Ю.Н. Кватернионные уравнения возмущенного движения искусственного спутника Земли // Космические исследования. 2019. Т. 57. № 2. С. 117–131. <https://doi.org/10.1134/S002342061902002X>
43. Chelnokov Yu.N. Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // Appl. Math. Mech. 2022. V. 43. № 1. P. 21–80. <https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9>
44. Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
45. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. 178 с.
46. Fukushima T. Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo-Stiefel regularization // Astron. J. 2005. V. 129. P. 5. <http://doi.org/10.1086/429546>
47. Fukushima T. Numerical comparison of two-body regularizations // Astron. J. 2007. V. 133. P. 6. <http://doi.org/10.1086/518165>
48. Pelaez J., Hedo J.M., Rodriguez P.A. A special perturbation method in orbital dynamics // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2007. V. 97. P. 131–150. <https://doi.org/10.1007/s10569-006-9056-3>
49. Bau G., Bombardelli C., Pelaez J., and Lorenzini E. Non-singular orbital elements for special perturbations in the two-body problem // Mon. Notices Royal Astron. Soc. 2015. V. 454. № 3. P. 2890–2908. <https://doi.org/10.1093/mnras/stv2106>
50. Amato D., Bombardelli C., Bau G., Morand V., Rosengren A.J. Non-averaged regularized formulations as an alternative to semi-analytical orbit propagation methods // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2019. V. 131. № 21. <https://doi.org/10.1007/s10569-019-9897-1>
51. Bau G., Roa J. Uniform formulation for orbit computation: the intermediate elements. // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2020. V. 132. № 10.
52. Челноков Ю.Н., Логинов М.Ю. Новые кватернионные модели регулярной механики космического полета и их приложения в задачах прогноза движения космических тел и инерциальной навигации в космосе // Сб. материалов: XXVIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Санкт-Петербург, 2021. С. 292–295.
53. Aarseth S.J. and Zare K.A. Regularization of the three-body problem // Celest. Mech. 1974. V. 10. P. 185–205. <https://doi.org/10.1007/BF01227619>
54. Aarseth S.J. Gravitational N-Body Simulations. N.Y.: Cambridge Univ. Press, 2003. 408 p.
55. Hopf H. Über die Abbildung der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche // Math. Ann. 1931. V. 104. P. 637–665. <https://doi.org/10.1007/BF01457962>
56. Hurwitz A. Mathematische Werke. V2. Birkhauser. Basel, 1933.
57. Deprit A. Ideal frames for perturbed keplerian motions // Celest. Mech. 1976. V. 13. № 2. P. 253–263.
58. Sundman K.F. Mémoire sur le problème des trois corps // Acta Math. 1912. V. 36. P. 105–179. <https://doi.org/10.1007/BF02422379>
59. Бельский И.М. Об одном методе униформизации решений в задачах центрального движения // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 34–41.
60. Челноков Ю.Н. Кватернионные регулярные модели возмущенного орбитального движения твердого тела в гравитационном поле Земли // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 4. С. 562–585. <http://doi.org/10.1134/S003282351902005X>
61. Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 864 с.
62. Дубошин Г.Н. Небесная механика: Методы теории движения искусственных небесных тел. М.: Наука, 1983. 352 с.
63. Демин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевский институт компьютерных исследований. 2010. 420 с.

QUATERNION REGULARIZATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF PERTURBED CENTRAL MOTION AND REGULAR MODELS OF ORBITAL (TRAJECTORY) MOTION: REVIEW AND ANALYSIS OF MODELS, THEIR APPLICATIONS

Yu. N. Chelnokov^{a,*}

^a*Institute of Precision Mechanics and Control Problems of the Russian Academy of Sciences, Saratov, 410028 Russia*

^{*}*e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

Received 14.03.2023

Revised 10.04.2023

Accepted 12.04.2023

Abstract — The review article briefly outlines our proposed general quaternion theory of regularizing and stabilizing transformations of Newtonian differential equations of perturbed motion of a material point in a central force field, the potential of which is assumed to be an arbitrary differentiable function of the distance from the point to the center of the field. The point is also under the influence of a disturbing potential, assumed to be an arbitrary function of time and Cartesian coordinates of the point's location, and under the influence of a disturbing acceleration, assumed to be an arbitrary function of time, the radius vector and the point's velocity vector. The conditions for the reducibility of the presented quaternion equations of perturbed central motion to an oscillatory form are considered using three regularizing functions containing the distance to the center of the field. Various differential quaternion equations of perturbed central motion in oscillatory and normal forms, constructed using this theory, are presented, including regular equations that use four-dimensional Euler (Rodrigue—Hamilton) parameters or four-dimensional Kustaanheim—Stiefel variables or their modifications, proposed by us. Regular quaternion equations of spatial unperturbed central motion of a material point, connections of the four-dimensional variables used with orbital elements, and a uniformized solution to the spatial problem of unperturbed central motion are considered. As an application, regularized differential quaternion equations of motion of an artificial satellite in the Earth's gravitational field are presented in four-dimensional Kustaanheim—Stiefel variables, as well as in our modified four-dimensional variables and in Euler parameters. An analysis of the stated regular quaternion equations of perturbed central motion is presented, showing that the quaternion regularization method, based on the use of Euler parameters or Kustaanheim—Stiefel variables or their modifications, is unique in joint regularization, linearization and increase in dimension for three-dimensional Keplerian systems and central movement.

Presented regularized (with respect to the Newtonian force of attraction) differential quaternion equations of motion of an artificial satellite in the gravitational field of the Earth in our modified four-dimensional variables have the advantages indicated in the article over quaternion equations in the Kustaanheim—Stiefel variables. In the presented differential quaternion equations of satellite motion, constructed using four-dimensional Euler parameters, the terms of the equations containing negative powers of the distance to the center of the Earth of the fourth order, inclusive, are

regularized. In all these regularized equations, the description of the Earth's gravitational field takes into account not only the central (Newtonian), but also the zonal, tesseral and sectorial harmonics of the potential of the Earth's gravitational field (the nonsphericity of the Earth is taken into account).

Keywords: differential equations of the perturbed central motion of a material point, quaternion theory of regularizing and stabilizing transformations, conditions for the reducibility of quaternion equations to oscillatory form, regularizing functions, quaternion equations in oscillatory and normal forms, Euler (Rodrigue–Hamilton) parameters, Kustaanheimo–Stiefel variables, modified four-dimensional variables, orbital elements, uniform solution, regularized quaternion equations of satellite motion; central (Newtonian), zonal, tesseral and sectorial harmonics of the Earth's gravitational field potential

REFERENCES

1. *L. Euler*, “De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium,” *Nov. Comm. Petrop.* **11**, 144–151 (1765).
2. *T. Levi-Civita*, “Traettorie singolari ed urbi nel problema ristretto dei tre corpi,” *Ann. Mat. Pura Appl.* 1904. V. **9**, 1–32.
3. *T. Levi-Civita*, “Sur la regularization du probleme des trois corps,” *Acta Math.* **42**, 99–144 (1920). <https://doi.org/10.1007/BF02418577>
4. *T. Levi-Civita*, “Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps,” *Opere Matematiche*, No 2, 411–417 (1956).
5. *P. Kustaanheimo*, “Spinor regularization of the Kepler motion,” *Ann. Univ. Turku* **73**, 3–7 (1964).
6. *P. Kustaanheimo and E. Stiefel*, “Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization,” *J. Reine Angew. Math.* **218**, 204–219 (1965).
7. *E.L. Stiefel and G. Scheifele*, *Linear and Regular Celestial Mechanics* (Springer-Verlag, Berlin, 1971; Nauka, Moscow, 1975).
8. *Yu.N. Chelnokov*, “Regularization of equations of three-dimensional two-body problem,” *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mekh. Tverd. Tela*, No. 6, 12–21 (1981).
9. *Yu.N. Chelnokov*, “Regular equations of three-dimensional two-body problem,” *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mekh. Tverd. Tela*, No. 1, 151–158 (1984).
10. *Yu.N. Chelnokov*, *Quaternion Methods in Problems of Perturbed Motion of a Material Point. Part 1. General Theory. Applications to Problem of Regularization and to Problem of Satellite Motion*, Available from VINITI, No. 8628 (Moscow, 1985).
11. *Yu.N. Chelnokov*, *Quaternion Methods in Problems of Perturbed Motion of a Material Point. Part 2. Three-Dimensional Problem of Unperturbed Central Motion. Problem with Initial Conditions*, Available from VINITI, No. 8629 (Moscow, 1985).
12. *Yu.N. Chelnokov*, “Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. I,” *Izv. RAN, Ser. Mekh. Tverd. Tela*, No. 1, 20–30 (1993).
13. *Yu.N. Chelnokov*, “Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. II,” *Izv. RAN, Ser. Mekh. Tverd. Tela*, No. 2, 3–11 (1993).
14. *W. Velte*, “Concerning the regularizing KS-transformation,” *Celest. Mech.* **17**, 395–403 (1978). <https://doi.org/10.1007/BF01228959>
15. *M.D. Vivarelli*, “The KS-transformation in hypercomplex form,” *Celest. Mech.* **29**, 45–50 (1983).
16. *M.D. Vivarelli*, “Geometrical and physical outlook on the cross product of two quaternions,” *Celest. Mech.* **41**, 359–370 (1988).
17. *M.D. Vivarelli*, “On the connection among three classical mechanical problems via the hypercomplex KS-transformation,” *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **50** (2), 109–124 (1991).
18. *O.B. Shagov*, “Two types of equations of motion for an Earth's satellite in oscillatory form,” *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mekh. Tverd. Tela*, No. 2, 3–8 (1990).
19. *A. Deprit, A. Elipe, and S. Ferrer*, “Linearization: Laplace vs. Stiefel,” *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **58**, 151–201 (1994). <https://doi.org/10.1007/BF00695790>

20. *J. Vrbik*, “Celestial mechanics via quaternions,” *Can. J. Phys.* **72**, 141–146 (1994).
<https://doi.org/10.1139/p94-023>
21. *J. Vrbik*, “Perturbed Kepler problem in quaternionic form,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** (21), 193–198 (1995). <https://doi.org/10.1088/0305-4470/28/21/027>
22. *J. Waldvogel*, “Quaternions and the perturbed Kepler problem,” *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **95**, 201–212 (2006).
23. *J. Waldvogel*, “Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way,” *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **102** (1), 149–162 (2008). <https://doi.org/10.1007/s10569-008-9124-y>
24. *P. Saha*, “Interpreting the Kustaanheimo-Stiefel transform in gravitational dynamics,” *Mon. Notices Roy. Astr. Soc.* **400**, 228–231 (2009).
<https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15437.x>
25. *L. Zhao*, “Kustaanheimo-Stiefel regularization and the quadrupolar conjugacy,” *Regul. Chaotic Dyn.* **20** (1), 19–36 (2015). <https://doi.org/10.1134/S1560354715010025>
26. *J. Roa, H. Urrutxua, and J. Pelaez*, “Stability and chaos in Kustaanheimo-Stiefel space induced by the Hopf fibration,” *Mon. Notices Royal Astr. Soc.* **459** (3), 2444–2454 (2016).
<https://doi.org/10.1093/mnras/stw780>
27. *J. Roa and J. Pelaez*, “The theory of asynchronous relative motion II: universal and regular solutions,” *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **127**, 343–368 (2017).
28. *S. Breiter and K. Langner*, “Kustaanheimo-Stiefel transformation with an arbitrary defining vector,” *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **128**, 323–342 (2017).
<https://doi.org/10.1007/s10569-017-9754-z>
29. *S. Breiter and K. Langner*, “The extended Lissajous-Levi-Civita transformation,” *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **130**, 68 (2018). <https://doi.org/10.1007/s10569-018-9862-4>
30. *S. Breiter and K. Langner*, “The Lissajous-Kustaanheimo-Stiefel transformation,” *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **131**, 9 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10569-019-9887-3>
31. *S. Ferrer and F. Crespo*, “Alternative angle-based approach to the KS-Map. An interpretation through symmetry,” *J. Geom. Mech.* **10** (3), 359–372 (2018).
<https://doi.org/10.3934/jgm.2018013>
32. *Yu. N. Chelnokov*, “Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. I,” *Cosmic Res.* **30** (6), 612–621 (1992).
33. *Yu. N. Chelnokov*, “Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II,” *Cosmic Res.* **31** (3), 409–418 (1993).
34. *Yu. N. Chelnokov*, “Analysis of optimal motion control for a material point in a central field with application of quaternions,” *J. Comp. Syst. Sci. Int.* **46** (5), 688–713 (2007).
<https://doi.org/10.1134/S1064230707050036>
35. *Yu. N. Chelnokov*, *Quaternion Models and Methods in Dynamics, Navigation, and Motion Control* (Fizmatlit, Moscow, 2011) [in Russian].
36. *Yu. N. Chelnokov*, “Quaternion regularization in celestial mechanics and astrodynamics and trajectory motion control. I,” *Cosmic Res.* **51** (5), 350–361 (2013).
<https://doi.org/10.1134/S001095251305002X>
37. *Yu. N. Chelnokov*, “Quaternion regularization and trajectory motion control in celestial mechanics and astrodynamics: II,” *Cosmic Res.* **52** (4), 304–317 (2014).
<https://doi.org/10.1134/S0010952514030022>
38. *Yu. N. Chelnokov*, “Quaternion regularization in celestial mechanics, astrodynamics, and trajectory motion control. III,” *Cosmic Res.* **53** (5), 394–409 (2015).
<https://doi.org/10.1134/S0010952515050044>
39. *Yu. N. Chelnokov*, “Quaternion regularization of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem: I,” *Mech. Solids* **52** (6), 613–639 (2017).
<https://doi.org/10.3103/S0025654417060036>
40. *Yu. N. Chelnokov*, “Quaternion regularization of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem: II,” *Mech. Solids* **53** (6), 633–650 (2018).
<https://doi.org/10.3103/S0025654418060055>
41. *Yu. N. Chelnokov*, “The perturbed three-dimensional two body problem: regular quaternion equations of relative motion,” *Prikl. Mat. Mekh.* **82** (6), 721–733 (2018).
<https://doi.org/10.31857/S003282350002736-9>

42. *Y.N. Chelnokov*, “Quaternion equations of disturbed motion of an artificial Earth satellite,” *Cosmic. Res.* **57**, 101–114 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0010952519020023>
43. *Yu.N. Chelnokov*, “Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics,” *Appl. Math. Mech.* **43** (1), 21–80 (2022). <https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9>
44. *T.V. Bordovitsyna*, *Modern Numerical Methods in Problems of Celestial Mechanics* (Nauka, Moscow, 1984) [in Russian].
45. *T.V. Bordovitsyna and V.A. Avdyushev*, *Theory of Motion of the Earth’s Satellites: Analytical and Numerical Methods* (Tomsk. Univ., Tomsk, 2007) [in Russian].
46. *T. Fukushima*, “Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo-Stiefel regularization,” *Astron. J.* **129**, 5 (2005). <https://doi.org/10.1086/429546>
47. *T. Fukushima*, “Numerical comparison of two-body regularizations // *Astron. J.* **133**, 6 (2007). <https://doi.org/10.1086/518165>
48. *J. Pelaez, J.M. Hedo, and P.A. Rodriguez*, “A special perturbation method in orbital dynamics,” *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **97**, 131–150 (2007). <https://doi.org/10.1007/s10569-006-9056-3>
49. *G. Bau, C. Bombardelli, J. Pelaez, and E. Lorenzini*, “Non-singular orbital elements for special perturbations in the two-body problem,” *Mon. Notices Royal Astron. Soc.* **454** (3), 2890–2908 (2015). <https://doi.org/10.1093/mnras/stv2106>
50. *D. Amato, C. Bombardelli, G. Bau, et al.*, “Non-averaged regularized formulations as an alternative to semi-analytical orbit propagation methods,” *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **131**, 21 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10569-019-9897-1>
51. *G. Bau and J. Roa*, “Uniform formulation for orbit computation: the intermediate elements. *Celest.*” *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **132**, 10 (2020). <https://doi.org/10.1007/s10569-020-9952-y>
52. *Yu.N. Chelnokov and M. Yu. Loginov*, “New quaternion models of spaceflight regular mechanics and their applications in the problems of motion prediction for cosmic bodies and in inertial navigation in space,” in *Proc. of 28th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems* (Concern CSRI Elektropribor, St. Petersburg, 2021), pp. 292–295.
53. *S.J. Aarseth and K.A. Zare*, “Regularization of the three-body problem,” *Celest. Mech.* **10**, 185–205 (1974). <https://doi.org/10.1007/BF01227619>
54. *S.J. Aarseth*, *Gravitational N-Body Simulations* (Cambridge Univ. Press, New York, 2003).
55. *H. Hopf*, “Über die Abbildung der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche,” *Math. Ann.* **104**, 637–665 (1931). <https://doi.org/10.1007/BF01457962>
56. *A. Hurwitz*, *Mathematische Werke*, Vol. 2 (Birkhauser, Basel, 1933).
57. *A. Deprit*, “Ideal frames for perturbed keplerian motions,” *Celest. Mech.* **13** (2), 253–263 (1976).
58. *K.F. Sundman*, “Memoire sur le probleme des trois corps,” *Acta Math.* **36**, 105–179 (1912). <https://doi.org/10.1007/BF02422379>
59. *I.M. Belen’kii*, “On a method for the uniformization of solutions in central motion problems,” *J. Appl. Math. Mech.* **45** (1), 24–29 (1981). [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(81\)90005-8](https://doi.org/10.1016/0021-8928(81)90005-8)
60. *Yu.N. Chelnokov*, “Quaternion regular models of perturbed orbital motion of a rigid body in the gravitational field of the Earth,” *Prikl. Mat. Mekh.* **83** (4), 562–585 (2019). <https://doi.org/10.1134/S003282351902005X>
61. *V.K. Abalakin, E.P. Aksenov, E.A. Grebenikov, et al.*, *Handbook on Celestial Mechanics and Astrodynamics* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
62. *G.N. Duboshin*, *Celestial Mechanics: Methods for Theory of Artificial Celestial Bodies* (Nauka, Moscow, 1983) [in Russian].
63. *V.G. Demin*, *Motion of Artificial Satellite in Noncentral Gravitational Field* (“Reg. Haot. Din.”, IKI, Moscow, Izhevsk., 2010) [in Russian].

УДК 62-50

О НАИХУДШЕМ ВОЗМУЩЕНИИ ОСЦИЛЛЯТОРА С КВАДРАТИЧНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ ВНЕШНЕЙ СИЛОЙ С ЗАДАННЫМ ИНТЕГРАЛОМ

© 2024 г. Н. Н. Болотник^{а*}, В. А. Корнеев^{а**}

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: bolotnik@ipmnet.ru

**e-mail: korneev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 15.03.2023 г.

После доработки 28.03.2023 г.

Принята к публикации 30.03.2023 г.

Рассматривается задача построения наихудшего возмущения для осциллятора с квадратичным демпфированием. Возмущение осуществляется внешней силой, которая приложена к телу осциллятора, не изменяет направления своего действия и имеет заданный импульс (интеграл по времени). Предполагается, что до начала возмущения осциллятор находится в состоянии равновесия. Наихудшим считается возмущение, при котором абсолютная величина смещения тела осциллятора от положения равновесия достигает максимального значения. В классе возмущений прямоугольного профиля с заданным импульсом найдено наихудшее возмущение и соответствующие ему наибольшее смещение и время его достижения в зависимости от параметров осциллятора.

Ключевые слова: осциллятор с квадратичным демпфированием, оптимальное управление, наихудшие возмущения

DOI: 10.31857/S1026351924010056, EDN: WAMYRK

1. Введение. Исследование, излагаемое в статье, связано с проблемой оптимальной гарантированной изоляции объектов, расположенных на подвижном основании, от ударов, которым может подвергаться основание. Достаточно полное представление о теории оптимальной противоударной изоляции можно почерпнуть из работ [1–6], написанных в разные годы.

Простейшая модель противоударной изоляции показана на рис. 1. Основание (контейнер) считается твердым телом, которое движется поступательно вдоль заданной прямой. Внутри контейнера находится объект, прикрепленный к нему посредством противоударного изолятора, генерирующего силу взаимодействия между объектом и основанием. Объект может перемещаться относительно основания вдоль той же прямой, вдоль которой движется основание. Движение объекта относительно основания подчиняется дифференциальному уравнению

$$m\ddot{x} + u(x, \dot{x}, t) = -ma(t), \quad (1.1)$$

где x — координата, определяющая положение объекта относительно основания, m — масса объекта, $-u(x, \dot{x}, t)$ — управляющая сила, приложенная изолятором к объекту, $a(t)$ — ускорение основания относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета, приобретаемое в результате удара. Функция $a(t)$ в описанной модели играет роль внешнего возмущения. В общем случае управляющая сила зависит от относительных координаты и скорости объекта, а также от времени, и реализуется с помощью системы управления, которая может быть сложной и содержать источник энергии. В инженерной практике широко используются пассивные противоударные изоляторы, состоящие из упругого элемента (пружины) и демпфера. Для таких изоляторов управляющая сила имеет вид

$$u = k\phi(|\dot{x}|)\dot{x} + c\psi(|x|x),$$

где $\phi(|\dot{x}|)$ и $\psi(|x|)$ — неотрицательные и, как правило, монотонно возрастающие функции своих аргументов; k и c — положительные коэффициенты демпфирования и жесткости соответственно. Простейшими и широко распространенными пассивными противоударными изоляторами являются изоляторы с линейной пружиной и демпфером с линейной или квадратичной характеристикой. Для таких изоляторов $\psi(|x|) = 1$, $\phi(|\dot{x}|) = 1$ или $\phi(|\dot{x}|) = |\dot{x}|$, а уравнение (1.1) представляется в виде

$$m\ddot{x} + k|\dot{x}|^n \operatorname{sign} \dot{x} + cx = v(t), \quad v = -ma(t), \quad n = 1, 2. \quad (1.2)$$

Это уравнение можно трактовать как уравнение колебаний демпфированного осциллятора под действием внешней силы $v(t)$.

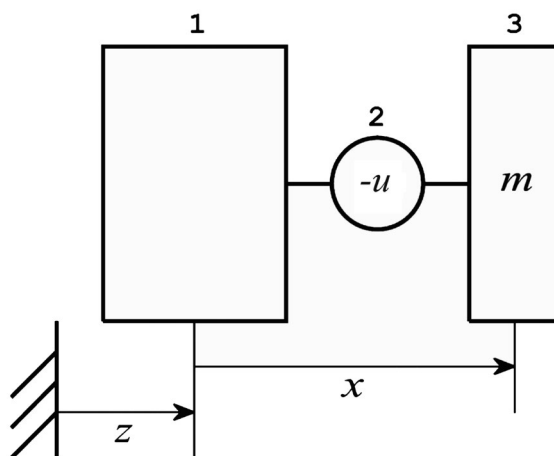


Рис. 1. Схема противоударной изоляции. 1 — основание; 2 — противоударный изолятор; 3 — защищаемый объект; z — смещение основания относительно неподвижной системы отсчета ($\ddot{z} = a$).

Сформулируем для системы (1.2) задачу параметрической оптимизации. Пусть $v(t) \in V$, где V — заданный класс допустимых внешних воздействий, и пусть в начальный момент времени $t=0$ осциллятор покоится в положении равновесия ($x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$). Требуется определить параметры k и c так, чтобы гарантированно минимизировать максимум модуля отклонения тела осциллятора от положения равновесия при условии, что сила, действующая на это тело со стороны пружины и демпфера не превышает по абсолютной величине заданного значения. Поставленная задача в математической формулировке записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \max_{v \in V} \max_{t \in [0, \infty)} |x_v(t; m, k, c)| &\rightarrow \min_{k \geq 0, c \geq 0} \\ \max_{v \in V} \max_{t \in [0, \infty)} &\left| k \dot{x}_v(t; m, k, c) \right|^n \operatorname{sign} \dot{x}_v(t; m, k, c) + c x_v(t; m, k, c) \leq A. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $x_v(t; m, k, c)$ — решение уравнения (1.2) с начальными условиями $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$, которое зависит от параметров m , k и c системы и от внешнего возмущения $v(t)$; A — заданная положительная постоянная.

В контексте теории оптимальной противоударной изоляции такая постановка отвечает минимизации максимума модуля отклонения объекта относительно основания при условии, что сила, действующая на объект со стороны изолятора, не превышает заданной величины при всех возможных возмущениях.

Решение задачи (1.3) требует решения задач о наихудшем возмущении по отношению к величинам

$$\begin{aligned} J_1(v) &= \max_{t \in [0, \infty)} |x_v(t; m, k, c)| \\ J_2(v) &= \max_{t \in [0, \infty)} \left| k \dot{x}_v(t; m, k, c) \right|^n \operatorname{sign} \dot{x}_v(t; m, k, c) + c x_v(t; m, k, c) \Big|, \end{aligned} \quad (1.4)$$

характеризующим качество функционирования противоударного изолятора. Под наихудшим возмущением понимается функция $v(t) \in V$, доставляющая максимум соответствующему функционалу, $J_1(v)$ или $J_2(v)$.

В теории противоударной изоляции ударное воздействие часто моделируется функцией $v(t)$, которая постоянна по знаку и имеет ограниченный интеграл по времени. Класс V таких функций определяется следующим образом:

$$V = \left\{ v(t): v(t) \geq 0, \int_0^\infty v(\tau) d\tau \leq v_0 \right\}, \quad (1.5)$$

где v_0 — заданная положительная величина. Требование $v(t) \geq 0$ не ограничивает общности, поскольку уравнение (1.2) инвариантно к одновременной замене $x \rightarrow -x$, $v \rightarrow -v$, и при нулевых начальных условиях решения уравнения (1.2), отвечающие возмущениям $v(t)$ и $-v(t)$, отличаются только знаком.

Известно, что для линейного осциллятора ($n=1$) наихудшее возмущение из класса (1.5) по отношению к обоим функционалам $J_1(v)$ и $J_2(v)$ есть мгновенный удар, в результате которого тело осциллятора (защищаемый объект) в начальный момент времени приобретает импульс, равный v_0 . Мгновенный удар моделируется дельта-функцией Дирака, умноженной на приобретенный в результате удара импульс:

$$v(t) = v_0 \delta(t). \quad (1.6)$$

Ввиду простоты и краткости доказательства этого факта приведем его полностью. Запишем решение уравнения (1.2) при нулевых начальных условиях в форме интеграла Коши:

$$x_v(t) = \int_0^t G(t-\tau)v(\tau)d\tau, \quad (1.7)$$

где $G(t)$ — решение однородного (для $v(t) \equiv 0$) уравнения при начальных условиях $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1/m$. Из соотношений (1.7) и (1.5) вытекает оценка

$$J_1(v) \leq \max_{t \in [0, \infty)} |G(t)| \int_0^t v(\tau)d\tau \leq \max_{t \in [0, \infty)} |v_0 G(t)| = J_1(v_0 \delta(t)),$$

поскольку функция $v_0 G(t)$ есть отклик системы (1.2) на импульсное возмущение (1.6). Таким образом, импульсное воздействие (1.6) является наихудшим возмущением по отношению к функционалу $J_1(v)$.

Это же возмущение оказывается наихудшим и по отношению к функционалу $J_2(v)$. Подстановка выражения (1.7) в уравнение (1.2) приводит к равенствам

$$k\dot{x}_v(t) + cx_v(t) = v(t) - m\ddot{x}_v(t) = -m \int_0^t \ddot{G}(t-\tau)v(\tau)d\tau,$$

откуда с учетом определения (1.4) для функционала $J_2(v)$ в случае $n=1$ следует оценка

$$J_2(v(t)) \leq |k\dot{x}_v(t) + cx_v(t)| \leq \max_{t \in [0, \infty)} |m v_0 \ddot{G}(t)| = J_2(v_0 \delta(t)),$$

из которой вытекает, что импульсное воздействие (1.6) есть наихудшее возмущение по отношению к функционалу $J_2(v)$.

В теории оптимальной противоударной изоляции изолятор с квадратичным демпфированием играет особую роль. Он реализует предельные возможности защиты объекта от мгновенного удара [3, 4]. Если внешнее возмущение задано выражением (1.6), а коэффициенты k и c определены равенствами

$$k = \frac{m^2 A}{v_0^2}, \quad c = 2 \frac{mA^2}{v_0^2},$$

то изолятор с квадратичным демпфированием обеспечивает абсолютный минимум максимального модуля относительного смещения изолируемого объекта $J_1(v)$ при ограничении $J_2(v) \leq A$, наложенном на абсолютную величину силы, приложенной изолятором к объекту. Значения функционалов $J_1(v)$ и $J_2(v)$ при этом суть

$$J_1 = \frac{v_0^2}{2mA}, \quad J_2 = A.$$

Если бы, как это имеет место в случае изолятора, пружина и демпфер которого обладают линейными характеристиками, мгновенный удар максимально допустимого импульса был бы наихудшим возмущением из класса (1.5) для изолятора с линейной пружиной и демпфером с квадратичной характеристикой, то этот изолятор обеспечивал бы гарантированный (рассчитанный на наихудшее

возмущение) минимум функционала J_1 при условии, что неравенство $J_2(v) \leq A$ выполняется для любого допустимого возмущения. Отмеченное обстоятельство обуславливает актуальность решения задач о наихудшем возмущении осциллятора с квадратичным демпфированием по отношению к функционалам $J_1(v)$ и $J_2(v)$. Эти задачи интересны и с математической точки зрения, так как являются задачами оптимального управления нелинейной системой с неаддитивным функционалом.

Задачи о наихудшем возмущении по отношению к функционалам (1.4) для осциллятора с квадратичным демпфированием значительно труднее аналогичных задач для линейного осциллятора и до сих пор не решены. В данной статье для осциллятора с квадратичным демпфированием решается задача о наихудшем возмущении по отношению к максимальному модулю отклонения осциллятора от положения равновесия. Наихудшее возмущение ищется в классе V_b возмущений прямоугольного профиля следующего вида

$$v_b(t) = \begin{cases} b, & t \in [0, v_0 / b] \\ 0, & t > v_0 / b. \end{cases}$$

Все функции этого класса имеют один и тот же интеграл по времени, равный v_0 :

$$\int_0^{\infty} v_b(t) dt = v_0.$$

2. Постановка задачи. Будем решать следующую задачу о наихудшем возмущении осциллятора с линейной пружиной и демпфером с квадратичной характеристикой по отношению к максимальному модулю отклонения от положения равновесия.

Задача 1. Для механической колебательной системы (осциллятора), описываемой дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + k|\dot{x}| + cx = v(t), \quad m > 0, \quad k > 0, \quad c > 0 \quad (2.1)$$

с нулевыми начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (2.2)$$

найти функцию $v(t)$, которая принадлежит классу

$$V_1 = \left\{ v(t): v(t) \geq 0, \int_0^{\infty} v(\tau) d\tau = v_0 \right\} \quad (2.3)$$

и максимизирует функционал

$$J_1(v) = \max_{t \in [0, \infty)} |x_v(t)|. \quad (2.4)$$

Здесь x — координата, описывающая отклонение тела осциллятора от положения равновесия, m — масса тела осциллятора, k и c — коэффициенты демпфирования и жесткости соответственно, v — внешняя сила, приложенная к осциллятору и рассматриваемая как возмущение, v_0 — заданный импульс внешнего воздействия, $x_v(t)$ — решение уравнения (2.1) при начальных условиях (2.2) и заданном

возмущении $v = v(t)$. Класс V_1 определяет множество сил, не изменяющих направления своего действия и характеризующихся заданным импульсом v_0 .

Для уменьшения числа определяющих параметров введем безразмерные (штрихованные) переменные

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{mc}}{v_0} x, \quad t' = \sqrt{\frac{c}{m}} t, \quad v'(t') = \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{m}{c}} v \left(\sqrt{\frac{m}{c}} t' \right) \\ k' &= \frac{v_0}{m\sqrt{mc}} k. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Замена переменных (2.5) в соотношениях (2.1)–(2.4) после опускания штрихов приводит к соотношениям того же вида, в которых следует положить $m=1$, $c=1$, $v_0=1$. В дальнейшем используются только безразмерные переменные.

Будем искать наихудшее возмущение в более узком классе функций по сравнению с V_1 , а именно, в однопараметрическом классе V_b возмущений “прямоугольного” профиля следующего вида:

$$v(t) = \begin{cases} b, & t \in [0, 1/b], \\ 0, & t > 1/b, \end{cases} \quad b > 0, \quad (2.6)$$

где b — параметр, подлежащий выбору из условия максимизации функционала J_1 .

3. Предварительный анализ и методика решения задачи.

Утверждение. Для возмущений класса V_b максимум по времени модуля отклонения осциллятора достигается в момент первого после начала движения обращения в нуль его скорости, т.е.

$$\begin{aligned} J_1 &= \max_{t \in [0, \infty)} |x_v(t)| = x_v(t_*), \quad \dot{x}_v(t_*) = 0 \\ \dot{x}_v(t) &> 0 \quad \text{при } t \in (0, t_*). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Доказательство. Пусть

$$\dot{x}_v(t) > 0 \quad \text{при } t \in (0, 1/b],$$

т.е. на интервале действия постоянного возмущения скорость осциллятора в нуль не обращается. Тогда при $t > 1/b$ осциллятор будет свободно колебаться в соответствии с уравнением (2.1) при $v(t) \equiv 0$. В некоторый момент времени $t_* > 1/b$ скорость $\dot{x}$ обратится в нуль и отклонение x достигнет своего первого локального максимума, равного $x_v(t_*)$, и в дальнейшем будет выполнено неравенство $|x_v(t)| < x_v(t_*)$. Это неравенство вытекает из диссипативности рассматриваемой колебательной системы. Свойство диссипативности заключается в монотонном убывании механической энергии системы

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}_v^2 + x_v^2)$$

на любом ее движении. Поскольку $\dot{x}_v(t_*)=0$, имеем $E(t_*)=x_v^2(t_*)/2$. Из монотонного убывания энергии вытекает неравенство $\dot{x}_v^2(t)+x_v^2(t)<x_v^2(t_*)$ для $t>t_*$, из которого следует неравенство $|x_v(t)|<x_v(t_*)$ для $t>t_*$.

Пусть теперь

$$\dot{x}_v(t_*)=0, \quad t_* \in (0, 1/b), \quad \dot{x}_v(t)>0 \quad \text{при } t \in (0, t_*),$$

т.е. первое после начала движения обращение в нуль скорости осциллятора происходит до окончания действия постоянной возмущающей силы, равной b .

Перейдем в уравнении (2.1) при $v(t) \equiv b$ и в начальных условиях (2.2) к новой переменной $y = x - b$. Переменная y подчиняется уравнению (в безразмерных переменных $m=1, c=1$)

$$\ddot{y} + k|\dot{y}|\dot{y} + y = 0 \quad (3.2)$$

и начальным условиям

$$y(0) = -b, \quad \dot{y}(0) = 0. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.2) описывает свободные колебания осциллятора с квадратичным демпфированием. В момент времени t_* выполнено равенство $\dot{y}(t_*)=0$.

Отметим, что $y(t_*)>0$. Действительно, из (3.2) и (3.3) при $b>0$ следует, что $\dot{y}(t)>0$ при $t \in (0, t_*)$, и точка $t=t_*$ не может быть точкой локального минимума функции $y(t)$. Если бы имело место неравенство $y(t_*)<0$, то выполнялись бы соотношения $\dot{y}(t_*)=0$, $\ddot{y}(t_*)>0$, и тогда точка $t=t_*$ была бы точкой локального минимума функции $y(t)$. При $y(t_*)=0$ были бы выполнены равенства $y(t_*)=0$, $\dot{y}(t_*)=0$, и тогда уравнение (3.2) наряду с ненулевым решением $y(t)$ имело бы также нулевое решение $y(t) \equiv 0$, что противоречит теореме единственности.

В силу диссипативности системы имеем неравенство

$$\dot{y}(t)^2 + y(t)^2 \leq y^2(t_*), \quad t > t_*, \quad (3.4)$$

которое эквивалентно неравенству

$$\dot{x}^2(t) + x^2(t) \leq x^2(t_*) - 2b(x(t_*) - x(t)), \quad t_* < t < 1/b. \quad (3.5)$$

для переменной $x(t)$. Из неравенств (3.4) и $y(t_*)>0$ вытекает, что $y(t_*) \geq y(t)$ и, следовательно, $x(t_*) \geq x(t)$. Из последнего неравенства и (3.5) получаем

$$\dot{x}^2(t) + x^2(t) \leq x^2(t_*), \quad t_* < t < 1/b. \quad (3.6)$$

В силу диссипативности свободных колебаний осциллятора с квадратичным демпфированием неравенство (3.6) будет выполнено и при $t > 1/b$, откуда следует, что $|x(t)| \leq x(t_*)$ при $t > t_*$. Утверждение доказано.

Из доказанного утверждения вытекает, что для решения поставленной задачи о наихудшем возмущении достаточно ограничиться решением уравнения (2.1) с начальными условиями (2.2) при $v(t)$, заданном выражением (2.6), на интервале времени $[0, t_*]$, где $t_* > 0$ — момент первого после начала движения обращения

в нуль скорости осциллятора. На этом интервале скорость $\dot{x}$ неотрицательна, и уравнение (2.1) упрощается, принимая в безразмерных переменных вид

$$\ddot{x} + k\dot{x}^2 + x = v(t).$$

Наибольшее смещение тела осциллятора при постоянном возмущении. Поведение осциллятора при $v \equiv 0$ и при $v \equiv b$ на интервале $[0, t_*]$ описывается одним и тем же уравнением

$$\ddot{y} + k\dot{y}^2 + y = 0, \quad (3.7)$$

где

$$y = x, \text{ если } v \equiv 0; \quad y = x - b, \text{ если } v \equiv b. \quad (3.8)$$

Свойства решений уравнения свободных колебаний осциллятора с квадратичным демпфированием (3.2), а также уравнения (3.7), исследованы с исчерпывающей полнотой (см., например, [7]).

Приведем решение уравнения (3.7) при начальных условиях

$$y(t_0) = y_0, \quad \dot{y}(t_0) = u_0, \quad t_0 \in [0, t_*], \quad u_0 \geq 0 \quad (3.9)$$

на интервале времени $[t_0, t_*]$, где t_* — момент первого после начала движения обращения переменной $\dot{y}$ в нуль.

Поскольку на интервале (t_0, t_*) функция $y(t)$ монотонно возрастает, можно перейти в уравнении (3.7) к независимой переменной y и понизить его порядок. В результате получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка с начальным условием

$$\frac{dw}{dy} + 2kw + 2y = 0, \quad w(y_0) = u_0^2; \quad w = \dot{y}^2. \quad (3.10)$$

Решение задачи Коши (3.10) представляется следующим выражением:

$$\begin{aligned} w(y) &= Ce^{-(2ky-1)} - \frac{1}{2k^2}(2ky-1) \\ C &= \left[u_0^2 + \frac{1}{2k^2}(2ky_0-1) \right] e^{2ky_0-1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Теперь для того, чтобы найти функцию $y(t)$ надо решить нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка с начальным условием

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{Ce^{-(2ky-1)} - \frac{1}{2k^2}(2ky-1)}, \quad y(t_0) = y_0.$$

Решение этого уравнения не выражается в элементарных функциях или известных специальных функциях, и его надо интегрировать численно.

Выражение (3.11) позволяет найти максимальное значение переменной $y = y_* = y(t_*)$, не находя самого момента времени t_* . Так как $w(t_*) = 0$, из (3.11) получаем

$$y_* = \frac{1 + W_+(2k^2C)}{2k}, \quad (3.12)$$

где $W_+(\xi)$ — “верхняя” ветвь функции $W(\xi)$, обратной функции $\xi(z) = ze^z$, $z \in (-\infty, +\infty)$.

В настоящее время за функцией $W(\xi)$ закрепляется название W -функции Ламберта [8, 9].

Область определения $D[W]$ функции $W(\xi)$ совпадает с областью $R[\xi] = [-1/e, +\infty)$ значений функции $\xi(z)$. При $\xi > 0$ функция $W(\xi)$ однозначна, а при $-1/e < \xi < 0$ она имеет два значения, $W_-(\xi)$ и $W_+(\xi)$, которые удовлетворяют неравенствам $W_-(\xi) < -1$ и $W_+(\xi) > -1$.

Анализ выражения (3.11) для C показывает, что при всех значениях y_0 выполняется неравенство $2k^2C \geq -e^{-(1+k^2u_0^2)} \geq -1/e$. Следовательно, $2k^2C \in D[W]$, и формула (3.12) имеет смысл.

Процедура вычисления наибольшего смещения тела осциллятора при возмущениях V_b . Введем величину $J(k, b) = J_1(v_b)$ и опишем процедуру ее вычисления при фиксированных k и b . (Напомним, что в безразмерных переменных $m = 1$, $c = 1$, $v_0 = 1$.)

Для расчета этой величины уравнение

$$\ddot{x} + k|\dot{x}|\dot{x} + x = b \quad (3.13)$$

с нулевыми начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (3.14)$$

численно интегрируется на интервале $[0, 1/b]$. Решение задачи Коши (3.13), (3.14) описывает (в безразмерных переменных) движение осциллятора под действием постоянной силы b .

Если на интервале $t \in (0, 1/b]$ скорость $\dot{x}$ не обращается в нуль, то величина $J = J(k, b)$ определяется формулой

$$J(k, b) = \frac{1 + W_+(2k^2C)}{2k} \quad (3.15)$$

$$C = \left[\dot{x}^2(1/b) + \frac{1}{2k^2}(2kx(1/b) - 1) \right] e^{2kx(1/b) - 1},$$

где значения $x(1/b)$ и $\dot{x}(1/b)$ находятся в результате численного решения задачи Коши (3.13), (3.14).

Если на интервале $t \in (0, 1/b]$ скорость обращается в нуль, то величина $J = J(k, b)$ определяется формулой

$$J(k, b) = \frac{1 + W_+(2k^2C)}{2k} \quad (3.16)$$

$$C = -\frac{1}{2k^2}(2kb + 1)e^{-(2kb+1)}.$$

Факт обращения скорости осциллятора в нуль на интервале $t \in (0, 1/b]$ устанавливается в ходе численного решения задачи Коши (3.13), (3.14).

Формулы (3.15) и (3.16) получены на основе выражений (3.12) и (3.11) с учетом связи между основной переменной x и вспомогательной переменной y , введенной равенствами (3.8).

Выражения (3.15) и (3.16) — аналитические, однако их применение требует численного интегрирования уравнений движения. Выражение (3.15) содержит

значения $x(1/b)$ и $\dot{x}(1/b)$, которые определяются численно. В формулу (3.16) величины, рассчитываемые численно, явно не входят, но численный расчет требуется для определения того факта, что на интервале $t \in (0, 1/b)$ скорость $\dot{x}$ обращается в нуль.

Можно было бы вообще не пользоваться формулами (3.15) и (3.16), а решать численно задачу Коши

$$\ddot{x} + k|\dot{x}|\dot{x} + x = v(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

где $v(t)$ определено равенством (2.6), на интервале $t \in [0, t_*]$, t_* — момент первого после начала движения обращения скорости осциллятора в нуль ($x(t_*) = 0$). Величина t_* заранее не известна и находится в процессе численного интегрирования уравнения движения. При таком способе расчета величина $J(k, b)$ задается равенством $J(k, b) = x(t_*)$. Прямой численный расчет позволяет определить время $t_* = t_*(k, b)$, в который достигается максимум отклонения осциллятора от положения равновесия. Если этого не требуется, то комбинированный способ, сочетающий численный расчет с использованием аналитических выражений, представляется предпочтительным.

Теперь решение задачи о наихудшем возмущении сводится к максимизации функции $J(k, b)$ по параметру $b > 0$ при каждом фиксированном $k > 0$ и исследованию зависимостей $b^*(k)$ и $J(k, b^*(k))$, где через $b^*(k)$ обозначено значение b , соответствующее наихудшему возмущению для заданного k .

Наибольшее смещение тела осциллятора при мгновенном ударе. Приведем отдельно выражение для $J_1(\delta)$, отвечающее мгновенному удару, который обладает единичным импульсом и происходит в начальный момент времени $t = 0$. Такое возмущение моделируется дельта-функцией Дирака $v(t) = \delta(t)$ и может трактоваться как предельный случай возмущения (2.6) при $b \rightarrow \infty$. Действие мгновенного удара приводит к мгновенному приобретению телом осциллятора единичного импульса в начальный момент времени, и поэтому движение осциллятора, подвергнувшегося мгновенному удару, описывается уравнением (3.2), в котором y надо заменить на x , с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$. В этом случае величина $J_1(\delta)$ определяется формулой (3.12), где $2k^2C = (2k^2 - 1)/e$. Введя обозначение $x_\delta(k)$ для максимума отклонения осциллятора в случае мгновенного удара, получаем

$$x_\delta(k) = \frac{1 + W_+((2k^2 - 1)e^{-1})}{2k}.$$

Анализ показывает (детали опускаются), что функция $x_\delta(k)$ монотонно убывает при $k \in (0, +\infty)$ и выполняются предельные соотношения

$$\lim_{k \rightarrow 0} x_\delta(k) = 1, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} x_\delta(k) = 0.$$

Предел при $k \rightarrow 0$ соответствует максимальному отклонению линейного недемпфированного осциллятора в ответ на мгновенный удар.

4. Численное решение задачи о наихудшем возмущении в классе функций $v(t) \in V_b$. Значение параметра $b^*(k)$, максимизирующее функцию $J(k, b)$, методика расчета которой описана в разделе 3, определялось численно для каждого

фиксированного значения коэффициента демпфирования k из некоторого заданного интервала.

На рис. 2 изображены график функции $x_{opt}(k) = J(k, b^*(k))$, выражающий максимум модуля отклонения осциллятора при наихудшем возмущении в зависимости от коэффициента демпфирования, и график функции $x_\delta(k)$, выражающий аналогичную зависимость в случае мгновенного удара единичного импульса. Обе функции монотонно убывают с ростом параметра k . При $k \rightarrow 0$ функции $x_{opt}(k)$ и $x_\delta(k)$ стремятся к единичному значению, отвечающему максимальному отклонению осциллятора в ответ на мгновенный удар $v(t) = \delta(t)$. При $k > 0$ график функции $x_{opt}(k)$ лежит выше графика функции $x_\delta(k)$. Это означает, что, в отличие от линейного демпфированного осциллятора, для осциллятора с квадратичным демпфированием мгновенный удар не является наихудшим возмущением, причем “преимущество” возмущения конечной длительности перед мгновенным ударом возрастает с ростом коэффициента демпфирования k .

График функции $b^*(k)$ изображен на рис. 3. Эта функция монотонно убывает и стремится к бесконечности при $k \rightarrow 0$. Такой результат ожидаем, поскольку при $k = 0$ (линейный гармонический осциллятор) наихудшим возмущением из класса функций V_b является мгновенный удар, отвечающий бесконечно большому значению b в выражении (2.6).

На рис. 4 показано время $t_*(k)$ достижения первого максимума отклонения осциллятора при наихудшем возмущении как функция параметра k . Функция $t_*(k)$ монотонно возрастает с ростом k , а при $k \rightarrow 0$ стремится к значению $\pi/2$, отвечающему отклику гармонического осциллятора на мгновенный удар единичного импульса.

5. Заключение. Для осциллятора с демпфером, создающим силу трения, величина которой пропорциональна квадрату скорости тела осциллятора, поставлена задача о наихудшем возмущении, создаваемом внешней силой, приложенной к телу осциллятора. Наихудшим считается возмущение, максимизирующее максимум модуля отклонения осциллятора от положения равновесия.

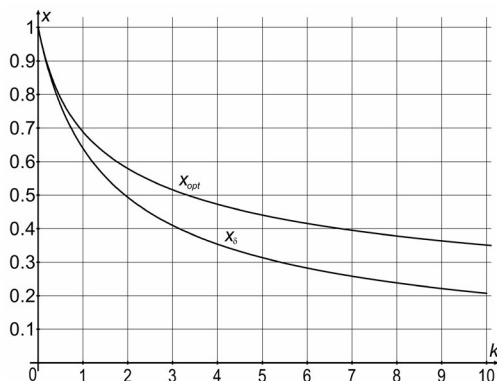


Рис. 2. Зависимость наибольшего смещения x_{opt} и смещения x_δ при дельта-возмущения от параметра k .

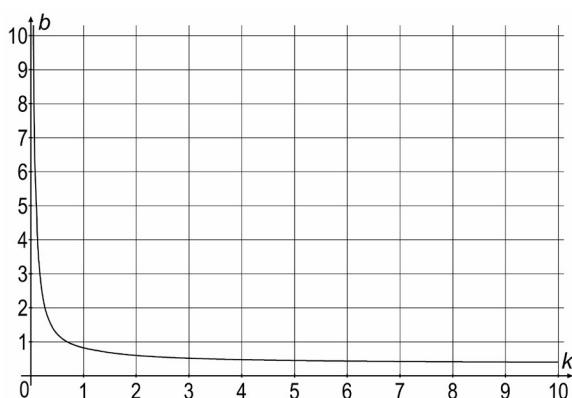


Рис. 3. Зависимость оптимального параметра b при наибольшем смещении x_{opt} от параметра k .

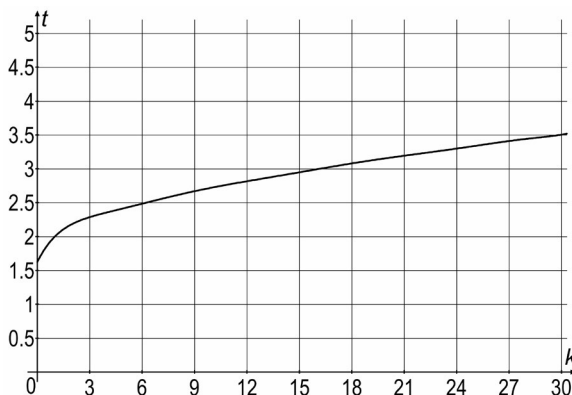


Рис. 4. Время достижения t наибольшего смещения x_{opt} в зависимости от параметра k .

Предполагается, что в начальный момент времени осциллятор находится в положении равновесия и покоится. Требуется найти наихудшее возмущение в классе знакопостоянных функций, интеграл по времени которых не превышает по абсолютной величине заданного значения. Задача решена для возмущений прямоугольного профиля, постоянных на начальном интервале времени и равных нулю вне этого интервала. Доказано, что при таких возмущениях модуль первого локального экстремума смещения тела осциллятора является глобальным максимумом модуля смещения осциллятора. Численно получена зависимость величины внешней силы на интервале времени, где она не равна нулю, от параметров осциллятора для наихудшего возмущения. Определены значения максимального смещения осциллятора и времени его достижения в зависимости от параметров осциллятора. Из полученных результатов, в частности, следует, что, в отличие от линейного осциллятора, мгновенный удар

максимального импульса не является наихудшим возмущением для осциллятора с квадратичным демпфированием.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500443-0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sevin E. and Pilkey W.* Optimum Shock and Vibration Isolation. Washington DC: Shock and Vibration Information Analysis Center, 1971. 162 с.
2. *Коловский М.З.* Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 320 с.
3. Болотник Н.Н. Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 257 с.
4. *Balandin D.V., Bolotnik N.N., and Pilkey W.D.* Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science, 2001. 440 p.
5. *Pilkey W.D., Balandin D.V., Bolotnik N.N., Crandal J.R., and Purtsezov S.V.* Injury Biomechanics and Control: Optimal Protection from Impact. Wiley and Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2010. 286 p.
6. *Ledezma-Ramirez D.F., Tapia-Gonzalez P.E., Ferguson N, Brennan M., Tang B.* Recent advances in shock vibration isolation: an overview and future possibilities // Appl. Mech.Rev. 2019. V. 71. № 6. P. 060802. <https://doi.org/10.1115/1.4044190>
7. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 567 с.
8. *Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., Knuth D.E.* On the Lambert W function // Adv. Comput. Math. 1996. Vol. 5. P. 329–359. <https://doi.org/10.1007/BF02124750>
9. *Mezo I.* The Lambert W Function: Its Generalizations and Applications. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2022. 252 p.

ON THE WORST-CASE DISTURBANCE OF AN OSCILLATOR WITH QUADRATIC DAMPING BY AN EXTERNAL FORCE WITH A GIVEN INTEGRAL

N. N. Bolotnik^{a*} and V. A. Korneev^{a**}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526 Russia*

^{*}*e-mail: bolotnik@ipmnet.ru*

^{**}*e-mail: korneev@ipmnet.ru*

Received 15.03.2023

Revised 28.03.2023

Accepted 30.03.2023

Abstract – The problem of constructing the worst-case disturbance for an oscillator with quadratic damping is considered. The disturbance is carried out by an external force, which is applied to the oscillator body, does not change the direction of its action and has a given impulse (time integral). It is assumed that before the onset of the disturbance the oscillator is in a state of equilibrium. The worst disturbance is considered to be one in which the absolute value of the displacement of the oscillator body from the equilibrium position reaches its maximum value. In the class of disturbances of a rectangular profile with a given impulse, the worst disturbance and the corresponding largest displacement and the time to reach it were found, depending on the parameters of the oscillator.

Keywords: oscillator with quadratic damping, optimal control, worst-case disturbances

REFERENCES

1. *E. Sevin and W. Pilkey*, Optimum Shock and Vibration Isolation (Shock and Vibration Information Analysis Center, Washington DC, 1971).
2. *M. Z. Kolovsky*, Automatic Control of Vibration Protection Systems (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
3. *N. N. Bolotnik*, Optimization of Shock and Vibration Isolation Systems (Nauka, Moscow, 1983) [in Russian].
4. *D. V. Balandin, N. N. Bolotnik, and W. D. Pilkey*, Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration (Gordon and Breach Science, Amsterdam, 2001).
5. *W. D. Pilkey, D. V. Balandin, N. N. Bolotnik, et al.*, Injury Biomechanics and Control: Optimal Protection from Impact (Wiley and Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2010).
6. *D. F. Ledezma-Ramirez, P. E. Tapia-Gonzalez, N. Ferguson, et al.*, “Recent advances in shock vibration isolation: an overview and future possibilities,” *Appl. Mech. Rev.* **71** (6), 060802 (2019). <https://doi.org/10.1115/1.4044190>
7. *A. A. Andronov, A. A. Witt, and S. E. Khaikin*, Theory of Oscillators (Nauka, Moscow, 1981; Pergamon Press, Oxford, 1966).
8. *R. M. Corless, G. H. Gonnet, D.E. G. Hareet et al.*, “On the Lambert W function,” *Adv. Comput. Math.* **5**, 329-359 (1996). <https://doi.org/10.1007/BF02124750>
9. *I. Mezo*, *The Lambert W Function: Its Generalizations and Applications* (Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2022).

УДК 531.2

ВЕТВЛЕНИЕ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ КОЛЬЦЕВОЙ МИКРОПЛАСТИНКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ ДВУХ ЭЛЕКТРОДОВ

© 2024 г. Н. Ф. Морозов^{a,b,*}, А. В. Лукин^{c,**}, И. А. Попов^{c,***}

^a Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

^b Институт проблем машиностроения РАН, Санкт-Петербург, Россия

^c Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: n.morozov@spbu.ru

**e-mail: lukin_av@srbstu.ru

***e-mail: popov_ia@spbstu.ru

Поступила в редакцию 03.04.2023 г.

После доработки 03.04.2023 г.

Принята к публикации 03.04.2023 г.

В работе исследуется нелинейная задача статики кольцевой микропластинки в электростатическом поле двух электродов. В допущениях геометрически нелинейной модели Кармана получены уравнения равновесия системы в частных производных. Аналитически строго найдены точки ответвления нетривиальных осесимметричных и кососимметричных форм равновесия. Отмечается, что при определенных соотношениях между внутренним и внешним радиусами пластинки наинизшей формой потери устойчивости является кососимметричная форма с наименьшей окружной изменчивостью. С применением проекционного метода Галеркина и численных методов теории бифуркаций найдены диаграммы ветвления как осесимметричных, так и кососимметричных положений равновесия пластинки в пространстве ключевых параметров системы. Показывается, что при определенных соотношениях между толщиной пластинки и межэлектродным зазором в системе наблюдается мультистабильность — существование двух и более симметричных относительно плоскости пластинки нетривиальных устойчивых форм равновесия. Выполняется качественный (параметрический) анализ найденных областей мультистабильности. Указывается на возможность контролируемого электростатическим полем перескока пластинки с одного устойчивого положения равновесия на другое. Обнаруженный эффект может быть использован для разработки высокоточных микроэлектромеханических сенсоров предельных значений различных физических величин, выходным сигналом которых является измеренное емкостным датчиком скачкообразное изменение амплитуды статического прогиба чувствительного элемента предложенной конфигурации.

Ключевые слова: МЭМС, упругая устойчивость, несимметричные формы равновесия, нарушение симметрии, бифуркация

DOI: 10.31857/S1026351924010063, EDN: WALEPV

1. Введение. В последнее десятилетие в мировой индустрии нано/микро-системной техники (НМСТ) интенсивное развитие получило направление разработки датчиков и актуаторов, работа подвижных (чувствительных или исполнительных) элементов которых основана на использовании существенно нелинейных характеристик проектируемых электромеханических архитектур, что позволяет на порядки повысить показатели точности, стабильности и эффективности функционирования создаваемых устройств [1–6].

Одна из основных линий исследований здесь состоит в моделировании и проектировании подвижных упругих элементов НМСТ с электростатическим принципом их актуации, обладающих свойством мультистабильности (существования двух и более положений устойчивого равновесия при постоянном значении параметра пондеромоторного воздействия) с возможностью управляемого переключения между этими состояниями. Наибольшее распространение на настоящий момент получают архитектуры с подвижным элементом в виде нано/микро-масштабной балки с проектируемой начальной погибью [7–12]. В подобных системах аналитически прогнозируются и экспериментально подтверждаются уникальные особенности статических и динамических режимов работы. Кроме уже отмеченного эффекта мультистабильности, исследуются феномены контролируемого нарушения симметрии формы статического прогиба подвижного элемента, а также т.н. эффект модальной локализации колебаний, лежащий в основе целого класса высокоточных резонансных датчиков [13].

Наряду с балочными конструкциями, значительный интерес специалистов привлекает направление разработки нано/микро-электромеханических систем с подвижным упругим элементом в виде тонкой пластинки [14–20]. Здесь также целый ряд работ посвящен нелинейным задачам статики и упругой устойчивости нано/микро-пластинок с начальной погибью в электростатических полях различных конфигураций [21–27]. Отметим, что в подавляющем большинстве приведенных работ рассматривается прямоугольная либо круглая пластинка с жестким закреплением по контуру; для круглых пластинок практически повсеместно выполняется анализ осесимметричных форм равновесия.

Задача упругой устойчивости и нелинейной статики тонких пластинок имеет большую историю. Так, в работе [28] доказано существование несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластинки, нагруженной симметричной нагрузкой. В [29, 30] исследуются формы потери устойчивости однородно сжатой упругой пластины на мягком упругом основании. Задача устойчивости пластины наноразмерной толщины, ослабленной круговым отверстием, рассматривается в работах [31, 32]. Несимметричные формы потери устойчивости неоднородных круглых пластин исследуются в [33], для пластины из ортотропного материала – в [34].

Насколько известно авторам настоящей работы, задача о ветвлении форм равновесия подвижных элементов НМСТ в виде кольцевых микропластин, находящихся в электростатическом силовом поле, ранее не рассматривалась в периодической литературе и составляет научную новизну. В работе исследуется нелинейная статика и упругая устойчивость кольцевой микропластинки в электростатическом поле двух неподвижных электродов. Рассматриваются как осесимметричные, так и кососимметричные формы равновесия системы. Исследуются возможности создания мультистабильного подвижного элемента

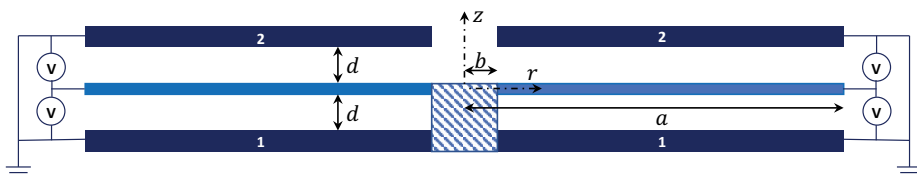


Рис. 1. Графическая схема рассматриваемой задачи (осевое сечение). <1> — нижний кольцевой электрод, <2> — верхний кольцевой электрод.

и вопросы реализации управляемого перевода системы в несимметричное положение равновесия.

2. Математическая модель. Рассматривается нелинейная задача статики круглой пластинки с коаксиальным отверстием (кольцевой пластинки), эквидистантно расположенной между двумя неподвижными плоскими кольцевыми электродами. Пластина жестко закреплена по внутренней кромке и свободна от нагрузки по внешней. Графическая схема задачи показана на рис. 1.

Для материала пластинки принимается модель однородного изотропного линейно- упругого тела с объемной плотностью ρ , модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Толщину, внутренний и внешний радиусы пластинки обозначим h, b и a соответственно. В качестве механической модели будем рассматривать геометрически нелинейную модель Кармана бессдвиговой тонкой пластинки Кирхгофа—Лява [35].

Электростатическое поле в межэлектродных зазорах с начальным расстоянием между обкладками d (одной из обкладок формируемых таким образом конденсаторов является сама пластинка) создает распределенную по поверхности пластинки поперечную нагрузку, нелинейно зависящую от поперечного прогиба w [35].

Уравнения равновесия системы в принятых предположениях имеют вид

$$D \nabla^4 w = L(w, \Phi) + \frac{\epsilon_r \epsilon_0 V^2}{2} \left[\frac{1}{(d - w)^2} - \frac{1}{(d + w)^2} \right] \quad (2.1)$$

$$\nabla^4 \Phi = -\frac{Eh}{2} L(w, w),$$

где Φ — функция напряжений в срединной поверхности; V — сообщаемое конденсаторам электростатическое напряжение; ϵ_0, ϵ_r — абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума и относительная диэлектрическая проницаемость среды в межэлектродном зазоре соответственно; $D = Eh^3 / (12(1 - \nu^2))$ — цилиндрическая жесткость пластинки.

Дифференциальный оператор ∇^2 записывается в полярных координатах (r, θ) как

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (2.2)$$

Оператор $L(w, \Phi)$ действует по формуле

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) + \\ + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right).$$

Задача (2.1) решается в области $r \in [b, a], \theta \in [0, 2\pi]$. Граничные условия на внутренней, жестко закрепленной, кромке $r = b$ имеют вид

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - v \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{2+v}{r^2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{3+v}{r^3} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0.$$

На внешней кромке $r = a$, свободной от нагрузки, выполняются следующие граничные условия

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2-v}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{3-v}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0.$$

Исследуемая система уравнений в частных производных является существенно нелинейной и не допускает точного решения. В последующих разделах выполняется аналитически строгое нахождение точек ответвления нетривиальных форм равновесия на основе линеаризованных уравнений статики пластинки, построение методом Галеркина параметризованной приближенной модели системы и качественное исследование ее диаграмм положений равновесия как для осесимметричных, так и для кососимметричных распределений поперечных перемещений.

3. Нахождение точек ответвления нетривиальных форм равновесия. В силу эквидистантного расположения пластинки между двумя неподвижными электродами, для любых значений электростатического поля в системе существует тривиальное (нулевое) положение равновесия. Поиск точек ответвления нетривиальных форм статического прогиба может быть проведен на основе уравнений (2.1), линеаризованных в окрестности $w(r, \theta) \equiv 0$. Следуя динамическому методу анализа задач упругой устойчивости, запишем уравнения малых изгибных колебаний пластинки.

$$D\nabla^4 w_d + \rho h \ddot{w}_d = \frac{2\varepsilon_r \varepsilon_0 V^2}{d^3} w_d. \quad (3.1)$$

Данное уравнение соответствует модели свободных колебаний пластинки на отрицательно-упругом основании. Представим решение полученной спектральной задачи в виде

$$w_d(r, \theta, t) = \operatorname{Re}[\phi(r, \theta)e^{i\omega t}], \quad (3.2)$$

где $\phi(r, \theta)$, ω – искомые формы и частоты свободных колебаний. Переходя к безразмерной радиальной координате $\tilde{r} = r/a$ и опуская далее знак $\sim$ в обозначениях для $\tilde{r}$, ϕ и оператора $\tilde{\nabla}$, придем к следующей краевой задаче на собственные значения:

$$\nabla^4 \phi - (\kappa^4 + \lambda)\phi = 0, \quad (3.3)$$

где введены безразмерный частотный параметр $\kappa^4 = \rho h a^4 \omega^2 / D$ и безразмерный параметр электростатического нагружения $\lambda = 2\varepsilon_r \varepsilon_0 a^4 V^2 / (D d^3)$.

Собственные формы ненагруженной кольцевой пластинки (при $\lambda = 0$) представляются в виде

$$\phi(r, \theta) = R(r)e^{in\theta}, \quad (3.4)$$

где n – индекс изменяемости формы колебаний в окружном направлении; функция радиального прогиба $R(r)$ имеет вид

$$R(r) = C_1 J_n(\kappa r) + C_2 I_n(\kappa r) + C_3 Y_n(\kappa r) + C_4 K_n(\kappa r). \quad (3.5)$$

Здесь J_n , I_n и Y_n , K_n – обычные и модифицированные функции Бесселя I-го и II-го родов соответственно.

Значения коэффициентов C_j и параметра κ определяются из условий удовлетворения решением (3.5) следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} r = \beta : \quad R &= 0, \quad R' = 0 \\ r = 1 : \quad R'' + \frac{\nu}{r} R' - \frac{\nu n^2}{r^2} R &= 0 \\ R''' + \frac{1}{r} R'' - \frac{1 + 2n^2 - \nu n^2}{r^2} R' + \frac{(3 - \nu)n^2}{r^3} R &= 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где введено обозначение $\beta = b/a$.

Вид первых двух форм изгибных колебаний пластинки из семейств $n = 0$ и $n = 1$ для значения параметра $\beta = 0.2$ показан на рис. 2 (коэффициент Пуассона (ν))

принят равным 0.22). Параметр k на рис. обозначает индекс радиальной изменяемости соответствующей формы колебаний.

Примечательной особенностью принятой комбинации граничных условий является пересечение частотных ветвей $(n, k) = (0, 1)$ (осесимметричные формы с наименьшей радиальной изменяемостью) и $(n, k) = (1, 1)$ (исследуемые косо-симметричные формы) при достижении геометрическим параметром β определенного значения: при $\beta < 0.312$, т.е. для кольцевых пластинок с достаточно малым внутренним радиусом, наинизшей собственной частотой обладает косо-симметричная форма колебаний. Этот эффект отражен на рис. 3.

Как видно из (3.3), частоты колебаний пластинки при наличии электростатического поля могут быть выражены через параметры κ и λ по формуле

$$\omega_{nk}^2(\lambda) = \frac{D}{\rho h a^4} (\kappa_{nk}^4 - \lambda). \quad (3.7)$$

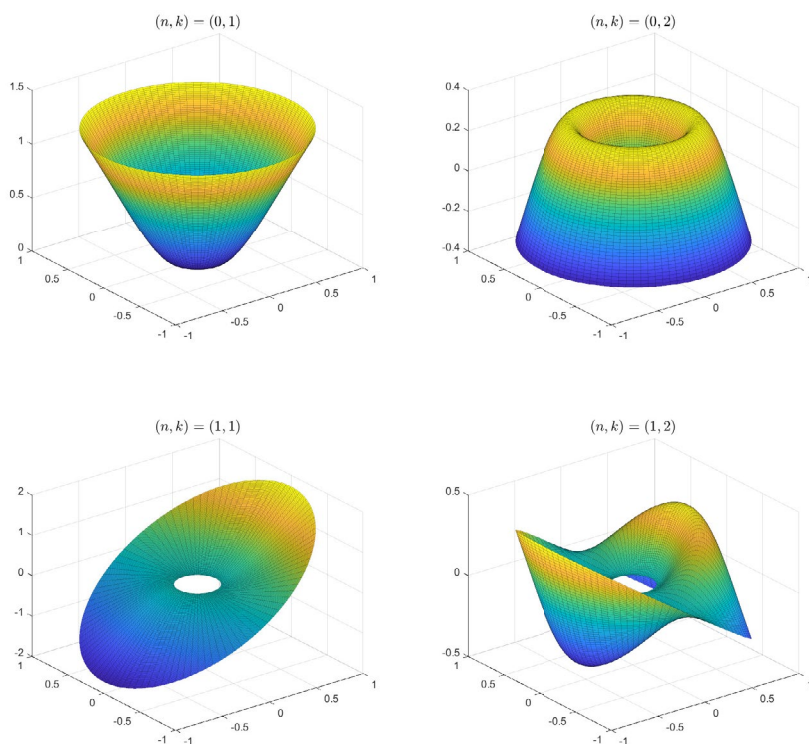


Рис. 2. Формы изгибных колебаний пластинки.

откуда следует, что критические значения силы электрического поля, вызывающие потерю упругой устойчивости пластинки по форме с окружной изменяемостью n и радиальной изменяемостью k (точки ответвления нетривиальных форм равновесия), определяются выражением

$$\lambda_{nk} = \kappa_{nk}^4. \quad (3.8)$$

С учетом отмеченных выше особенностей зависимости частот кольцевой пластинки от геометрического параметра β , мы приходим к заключению о возможности выведения пластинки в несимметричное (кососимметричное с $n=1$) положение равновесия путем приложения к ней осесимметричной электростатической нагрузки: при $\beta < 0.312$ соответствующая форма потеря устойчивости реализуется при наименьшем из всех критических значений силы электрического поля.

4. Построение приближенного решения нелинейной задачи статики методом Галеркина. Непосредственный анализ нетривиальных форм равновесия пластинки при вариации геометрических параметров системы и параметров нагружения требует нахождения решений исходной нелинейной краевой задачи статики (2.1), (2.4)–(2.5).

С этой целью запишем исследуемую задачу в безразмерном виде: введем обозначения $r = a\tilde{r}, w = d\tilde{w}, \Phi = Ehd^2\tilde{\Phi}$. Опуская знак $\sim$ у безразмерных величин, придем к следующей записи нелинейных уравнений статики пластинки:

$$\begin{aligned} \nabla^4 w &= \varepsilon L(w, \Phi) + \frac{\lambda w}{(1 - w^2)^2} \\ \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{2} L(w, w), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где введен параметр геометрической нелинейности системы $\varepsilon = 12(1 - \nu^2)(d/h)^2$.

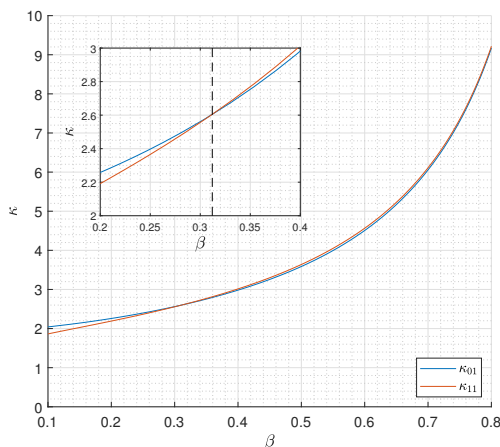


Рис. 3. Ветви безразмерного частотного параметра κ .

Граничные условия для искомых функций $w(r, \theta), \Phi(r, \theta)$ при $r = \beta$ и $r = 1$ сохраняют вид (2.4) и (2.5) соответственно.

Приближенное решение данной задачи будем искать методом Галеркина. Фиксируя определенное значение индекса n окружной изменяемости искомых форм статического прогиба, представим решение в виде ряда по собственным формам ненагруженной пластинки $R_{nj}(r)$:

$$w_a(r, \theta) = \sum_{j=1}^N R_{nj}(r) \eta_j \cos n, \quad (4.2)$$

где N — число учтенных форм колебаний в аппроксимирующем ряду, η_j — подлежащие определению модальные коэффициенты.

Отдельную задачу составляет установление вида аппроксимирующего ряда для функции напряжений Φ . Рассмотрим структуру второго уравнения системы (4.1) при подстановке в него ряда (4.2):

$$\begin{aligned} \nabla^4 \Phi = & \left(\frac{1}{r} \sum_{j=1}^N R'_{nj} \eta_j - \frac{1}{r^2} \sum_{j=1}^N R_{nj} \eta_j \right)^2 n^2 \sin^2(n\theta) - \\ & - \sum_{j=1}^N R'_{nj} \eta_j \cdot \left(\frac{1}{r} \sum_{m=1}^N R'_{nm} \eta_m - \frac{n^2}{r^2} \sum_{m=1}^N R_{nm} \eta_m \right) \cos^2(n\theta), \end{aligned} \quad (4.3)$$

которое с учетом тригонометрических тождеств $\sin^2(n\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2n\theta)$, $\cos^2(n\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2n\theta)$ может быть представлено в виде

$$\nabla^4 \Phi = \sum_{i,j=1}^N \chi_{ij}^{(1)}(r) \eta_i \eta_j + \sum_{i,j=1}^N \chi_{ij}^{(2)}(r) \eta_i \eta_j \cos 2n\theta. \quad (4.4)$$

Здесь $\chi_{ij}^{(1)}, \chi_{ij}^{(2)}$ — определенные комбинации функций R_{nj} и их производных; их конкретный вид зависит от числа N учтенных собственных форм в модальном разложении прогиба w и в явном виде не приводится.

Таким образом, приближенное решение для функции напряжений приобретает вид

$$\Phi_a = \sum_{i,j=1}^N \Psi_{ij}^{(1)}(r) \eta_i \eta_j + \sum_{i,j=1}^N \Psi_{ij}^{(2)}(r) \eta_i \eta_j \cos 2n\theta, \quad (4.5)$$

где функции $\Psi_{ij}^{(1)}, \Psi_{ij}^{(2)}$ являются решениями следующих краевых задач:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 \Psi_{ij}^{(1)} = \chi_{ij}^{(1)} \\
& r = \beta : \left(\Psi_{ij}^{(1)} \right)'' - \frac{\nu}{\beta} \left(\Psi_{ij}^{(1)} \right)' = 0 \\
& \left(\Psi_{ij}^{(1)} \right)''' + \frac{1}{\beta} \left(\Psi_{ij}^{(1)} \right)'' - \frac{1}{\beta^2} \left(\Psi_{ij}^{(1)} \right)' = 0 \\
& r = 1 : \left(\Psi_{ij}^{(1)} \right)' = 0, \quad \Psi_{ij}^{(1)} = \text{const}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

и

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4n^2}{r^2} \right)^2 \Psi_{ij}^{(2)} = \chi_{ij}^{(2)} \\
& r = \beta : \left(\Psi_{ij}^{(2)} \right)'' - \frac{\nu}{\beta} \left(\Psi_{ij}^{(2)} \right)'' + \frac{4\nu n^2}{\beta^2} \Psi_{ij}^{(2)} = 0 \\
& \left(\Psi_{ij}^{(1)} \right)''' + \frac{1}{\beta} \left(\Psi_{ij}^{(1)} \right)'' - \frac{1 + 4n^2(2 + \nu)}{\beta^2} \times \\
& \times \left(\Psi_{ij}^{(2)} \right)' + \frac{4n^2(3 + \nu)}{\beta^3} \Psi_{ij}^{(2)} = 0 \\
& r = 1 : \left(\Psi_{ij}^{(2)} \right)' - 4n^2 \Psi_{ij}^{(2)} = 0 \\
& \left(\Psi_{ij}^{(2)} \right)' - \Psi_{ij}^{(2)} = \text{const}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Численное решение представленных граничных задач может быть получено методом конечных разностей (см., к примеру, функции `bvp4c`, `bvp5c` программной системы Matlab [36]).

Подстановка аппроксимирующих рядов (4.2), (4.5) в первое уравнение системы (4.1) и удовлетворение проекционным условиям метода Галеркина позволяет свести нелинейную задачу статики пластинки к параметризованной системе нелинейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения η_j .

Для корректного моделирования типичного для микросистем с электростатическим возбуждением эффекта т.н. “залипания” подвижной обкладки конденсатора (в рассматриваемом случае – кольцевой пластинки), умножим уравнение (4.1)₁ на знаменатель слагаемого, связанного с электростатической силой:

$$(1 - w^2)^2 \nabla^4 w = \varepsilon (1 - w^2)^2 L(w, \Phi) + \lambda w. \tag{4.8}$$

Введем обозначение f для невязки вычисляемого приближенного решения:

$$f(\eta, r, \theta; \lambda, \epsilon) \equiv \left(1 - w_a^2\right)^2 \nabla^4 w_a - \epsilon \left(1 - w_a^2\right)^2 L(w_a, \Phi_a) - \lambda w_a, \quad (4.9)$$

где η – вектор искоемых коэффициентов $\{\eta_j\}$.

Тогда условия минимизации невязки (проекционные условия) примут вид

$$\int_{\beta}^1 \int_0^{2\pi} f(\eta, r, \theta; \lambda, \epsilon) r R_{nj}(r) \cos n\theta d\theta dr = 0, \quad (4.10)$$

$$j = 1, \dots, N.$$

Полученная таким образом система N нелинейных алгебраических уравнений позволяет качественно (в пространстве параметров λ, ϵ) исследовать ветвление форм равновесия кольцевой пластинки с заданным индексом окружной изменяемости n . Отметим при этом, что конкретный вид системы (4.10) определяется также и безразмерным геометрическим параметром β ; зависимость решений от этого параметра является неаналитической.

5. Параметрический анализ диаграмм положений равновесия.

5.1. Осесимметричные формы равновесия. Представление и анализ результатов начнем с осесимметричного случая ($n=0$). В первую очередь исследуем вопрос сходимости получаемых решений по числу N учтенных в разложении собственных форм с различной радиальной изменяемостью.

На рис. 4 приведена диаграмма ветвления осесимметричных форм равновесия пластинки для $\beta = 0.2, d/h = 3$ при различных значениях N . По оси ординат везде далее откладывается максимальное по всей поверхности пластинки значение ее прогиба; сплошными линиями обозначаются устойчивые состояния равновесия, пунктирными – неустойчивые.

На рис. 4 наблюдается ответвление нетривиальных форм равновесия при значении λ , соответствующем потери устойчивости плоской формы равновесия пластинки (см. выражение (3.8)). Учтенный фактор жесткой геометрической нелинейности, характеризуемый параметром $\epsilon \sim d/h$, приводит в данном случае к возникновению двух симметричных относительно плоскости пластинки устойчивых форм равновесия; с дальнейшим ростом λ наблюдается бифуркация типа предельной точки, выражающая эффект “схлопывания” складок электростатического преобразователя.

Как видно из рисунка, приближенное решение методом Галеркина дает весьма высокую скорость сходимости при вычислении устойчивых форм равновесия. В то же время, известно, что для точного нахождения неустойчивых ветвей диаграммы требуется значительное большее число членов в аппроксимирующем ряду [15]. В настоящем исследовании основной интерес для нас представляет эволюцию устойчивых форм равновесия, поэтому дальнейший анализ будем проводить с учетом $N = 3$ членов аппроксимирующего ряда.

На рис. 5 приведены диаграммы ветвления осесимметричных положений равновесия для различных значений геометрического параметра $\beta = b/a$.

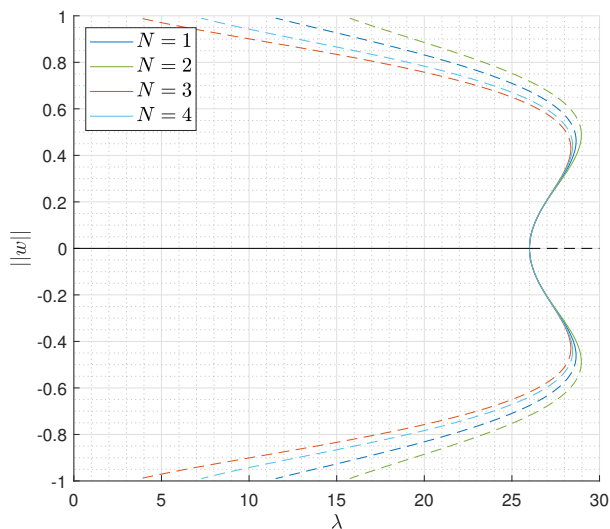


Рис. 4. Диаграмма ветвления при $\beta = 0.2, d/h = 3$. Исследование сходимости аппроксимирующего ряда.

Рисунок иллюстрирует основные качественные особенности нелинейной статики рассматриваемой системы: (1) при малых значениях межэлектродного зазора d по отношению к толщине пластинки h нетривиальные устойчивые формы равновесия отсутствуют, точка ветвления является субкритической; (2) с достижением величины d/h некоторого значения, вообще говоря, зависящего от β , тип бифуркации меняется на суперкритический, что отражает возникновение двух симметричных устойчивых равновесий (бистабильность); (3) ширина зоны бистабильности по параметру электростатической силы λ растет с увеличением отношения d/h ; (4) эффективная жесткость пластинки на изгиб увеличивается с ростом β , что также выражается в увеличении ширины области бистабильности.

На рис. 6 показан пример эволюции радиальной изменяемости формы равновесия на участке существования устойчивых нетривиальных решений для $\beta = 0.2, d/h = 5$.

Как видно из рисунка, форма прогиба кольцевой пластинки в электростатическом поле весьма близка к форме свободных осесимметричных колебаний с наименьшей радиальной изменяемостью; вклад других членов аппроксимирующего ряда относительно невелик. При значении λ , близком к предельной точке (точке “залипания”), амплитуда прогиба составляет около 0.6 от величины межэлектродного зазора.

Значительный практический интерес с точки зрения разработки микроэлектромеханических сенсоров и актуаторов с исполнительным элементом в виде кольцевой пластинки составляет нахождение областей бистабильности системы в пространстве безразмерных параметров λ, ϵ, β . В терминах используемой математической постановки речь идет о нахождении кривой расположения бифуркаций типа “предельная точка” в указанном пространстве параметров. Рассматривая

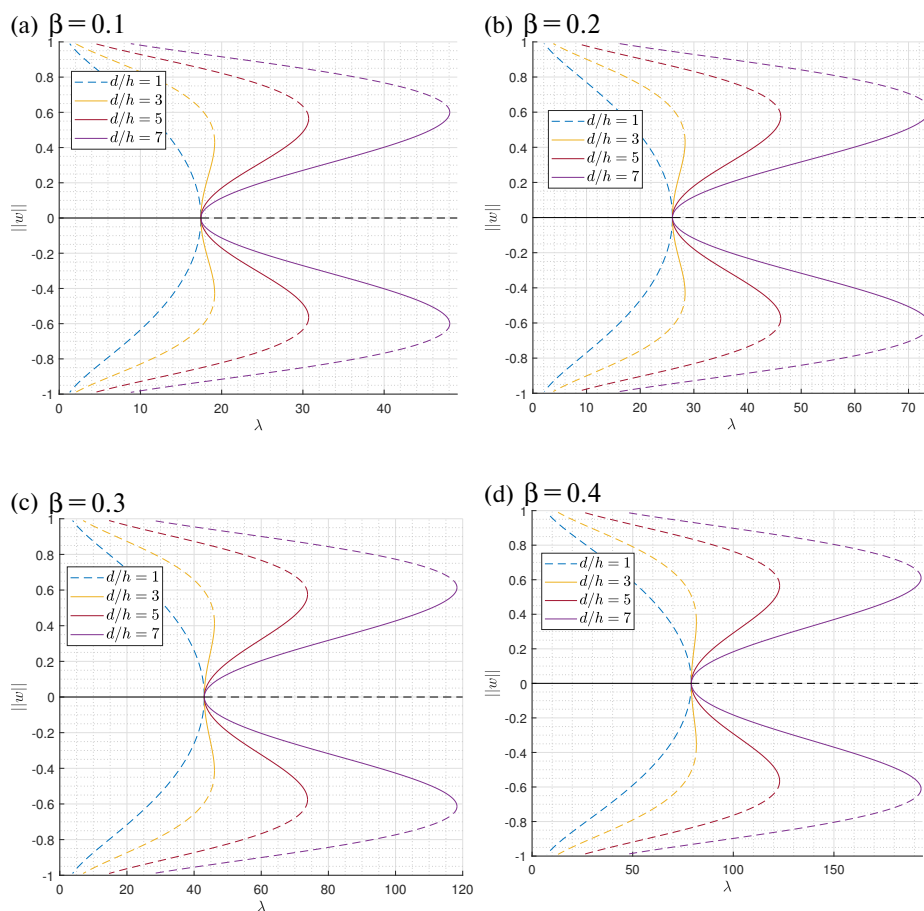


Рис. 5. Диаграммы ветвления осесимметричных форм равновесия.

далее ряд фиксированных значений β , эта кривая $\lambda(\epsilon; \beta)$ определит верхнюю границу зоны бистабильности по параметру λ ; нижняя граница определяется расположением точек ветвления $\lambda = \lambda_{nk}$ (выражение (3.8)).

Результаты нахождения соответствующих параметрических зон бистабильности, полученные с помощью численных методов теории бифуркаций и продолжения решений нелинейных уравнений, приведены на рис. 7.

Как видно из рисунка, качественный характер областей бистабильности сохраняется неизменным для рассмотренного диапазона значений параметров.

Примечательно, что нижняя граница области по параметру $\epsilon \sim d/h$ слабо зависит от β и имеет значение около 2.5. Результаты также количественно

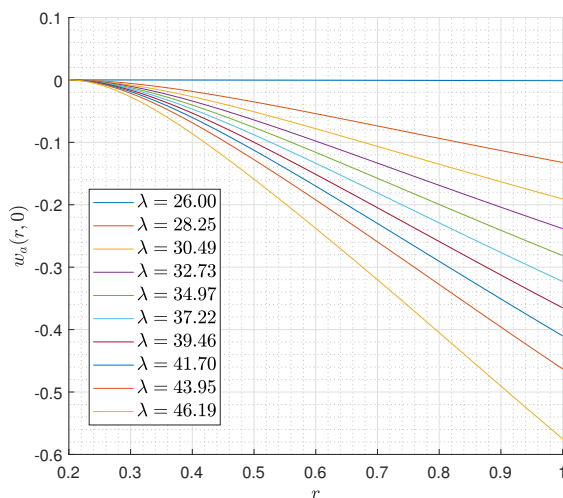


Рис. 6. Эволюция радиальной изменяемости осесимметричной формы равновесия.

отражают отмеченное выше свойство расширения зоны бистабильности при увеличении параметра β .

5.2. Кососимметричные формы равновесия. Перейдем к анализу результатов, полученных для задачи ветвления кососимметричных форм с наименьшей окружной изменяемостью ($n = 1$). Соответствующие диаграммы положений равновесия для ряда значений параметра β приведены на рис. 8.

Для рассмотренных диапазонов изменения параметров качественная структура кососимметричных положений равновесия кольцевой пластинки идентична осесимметричному случаю. Вместе с тем, следует отметить ряд особенностей найденных решений. Во-первых, результаты подтверждают ранее отмеченное свойство кольцевой пластинки терять устойчивость в электростатическом поле по кососимметричной, а не осесимметричной форме в случае, если параметр β принимает значения, меньшие 0.312 (из рисунка видно, что точка ветвления по параметру λ для $n = 1$ имеет меньшую величину, чем для $n = 0$). При определенных значениях параметра геометрической нелинейности d/h эта форма равновесия является устойчивой и гладко зависящей от параметра λ . Иными словами, мы наблюдаем эффект управляемого нарушения симметрии формы прогиба в изначально осесимметричной системе. Во-вторых, отмечается в два раза меньшая амплитуда прогиба пластинки на ее кромке в предельной точке по λ , соответствующей условию “залипания” пластинки на одном из двух неподвижных электродов (~ 0.3 от величины межэлектродного зазора против ~ 0.6 для осесимметричного случая).

На рис. 9 показан характер эволюции радиальной изменяемости формы равновесия на участке существования устойчивых нетривиальных решений для $\beta = 0.2$, $d/h = 15$.

Из рисунка следует, что, как и в осесимметричном случае, основной вклад в описание статического прогиба при $n = 1$ вносит наименьшая по радиальной

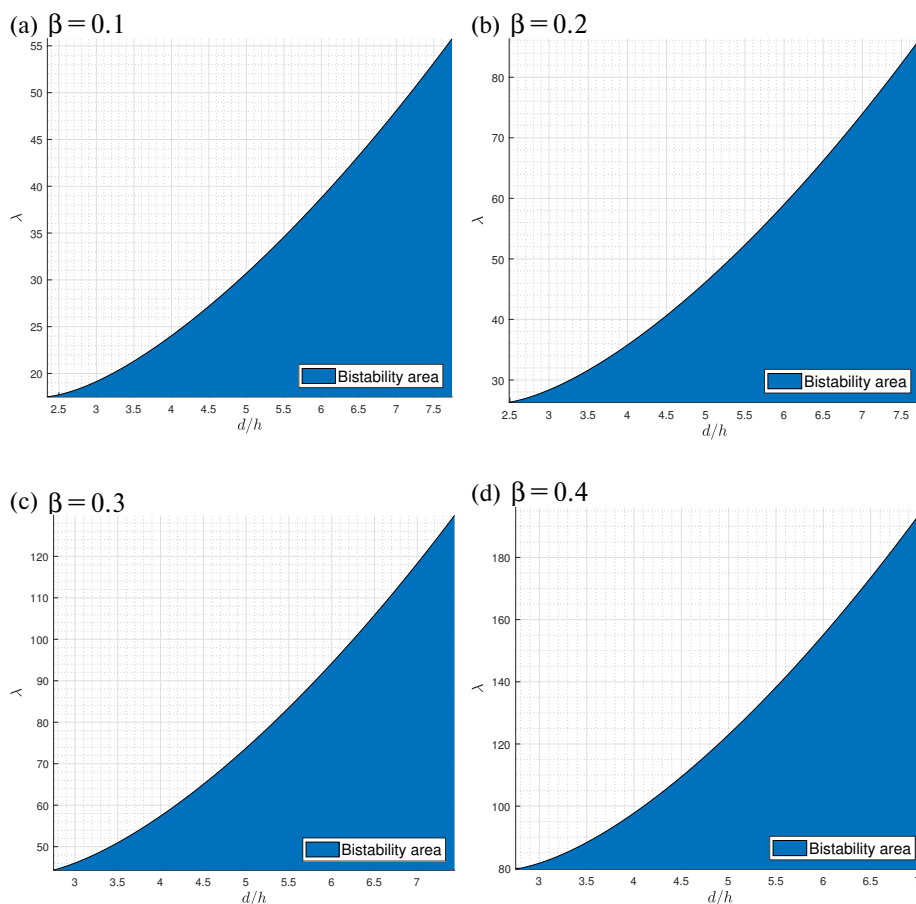


Рис. 7. Области бистабильности для осесимметричных форм равновесия.

изменяемости собственная форма. Вместе с тем, как отмечалось ранее, для количественно корректного описания неустойчивых участков ветвей диаграммы, не являющихся основным предметом настоящего исследования, требуется учет значительного числа N базисных функций; их вклад в представление решения, при этом, будет возрастать с приближением амплитуды прогиба к величине межэлектродного зазора.

По аналогии с осесимметричным случаем, проведем качественное исследование областей существования нетривиальных устойчивых кососимметричных форм равновесия пластинки в пространстве параметров λ , ϵ , β . Соответствующие области, найденные путем продолжения предельной точки “залипания” в плоскости (λ, ϵ) для ряда значений β , показаны на рис. 10.

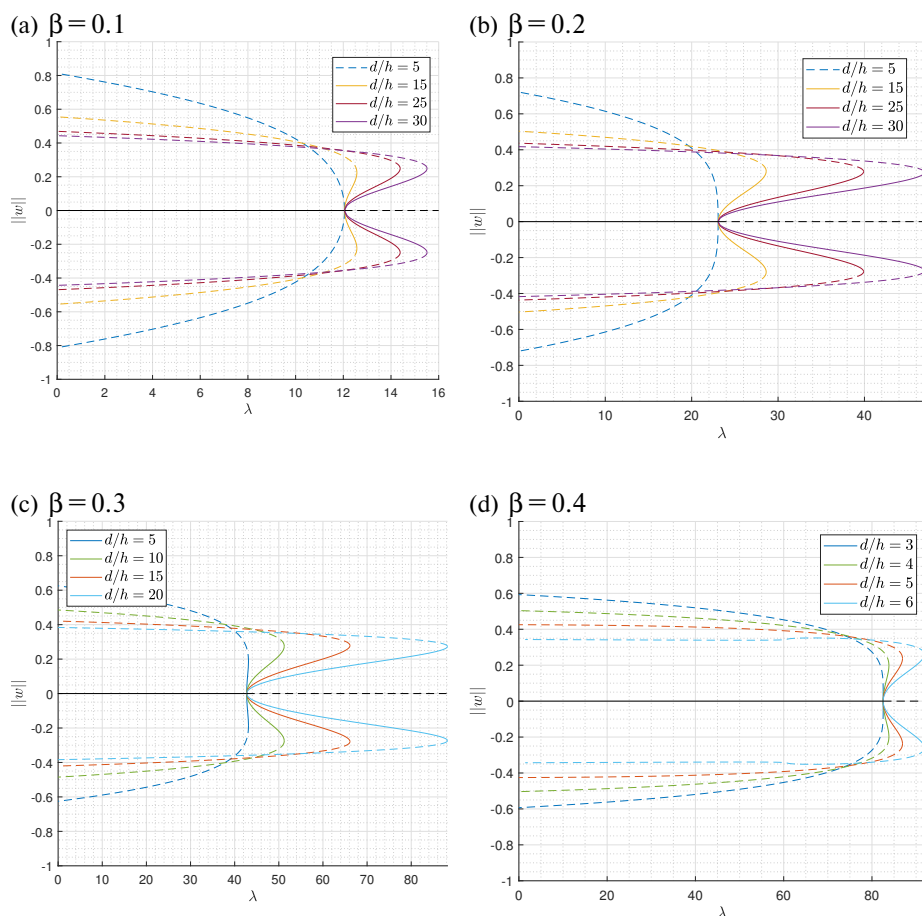


Рис. 8. Диаграммы ветвления косимметричных форм равновесия.

Как видно из рисунка, общий характер исследуемых областей для значений $\beta \in [0.1, 0.3]$ совпадает с ранее изученным осесимметричным случаем. В то же время, наблюдается существенное количественное отличие, связанное с сильной зависимостью от β нижней границы значений d/h , обеспечивающих устойчивые нетривиальные формы равновесия. Кроме того, при $\beta = 0.4$ наблюдается качественное изменение структуры кривой $\lambda(\varepsilon)$: в определенном диапазоне значений $d/h \in [6, 6.8]$ нарушается однозначность данной зависимости. В терминах теории динамических систем здесь при продолжении бифуркации типа “предельная точка” обнаруживаются две точки бифуркации коразмерности 2 типа “ласточкин хвост”. С механической точки зрения в указанном диапазоне значений d/h для системы характерна мультистабильность — существование более

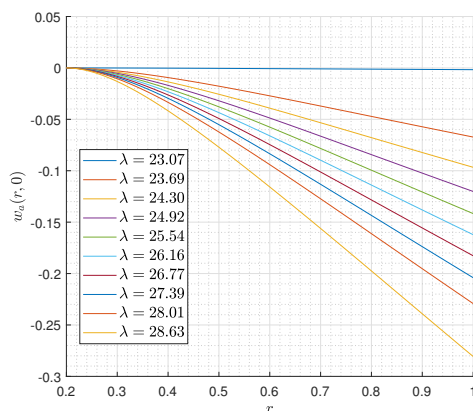


Рис. 9. Эволюция радиальной изменчивости косимметричной формы равновесия.

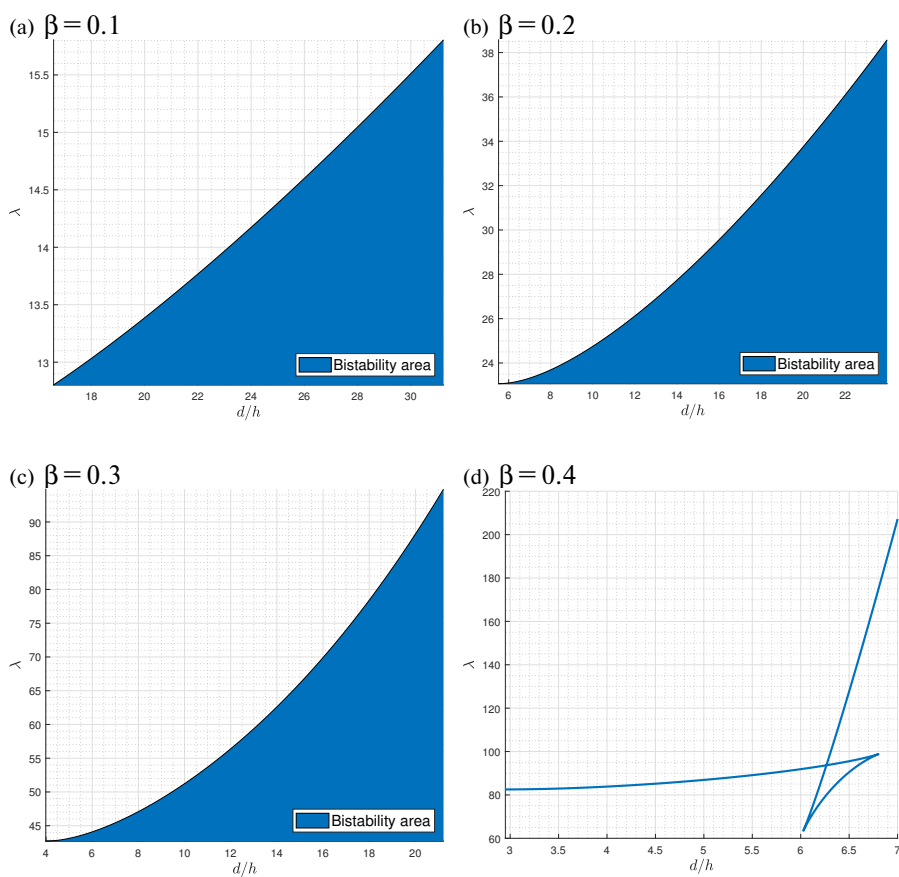


Рис. 10. Области существования устойчивых косимметричных форм равновесия.

чем одного устойчивого равновесия (без учета симметрии равновесий относительно начальной плоскости пластинки).

Трехмерная бифуркационная кривая точек «залипания» в пространстве $(\lambda, d/h, \|w\|)$, соответствующая рис. 10,d, построена на рис. 11.

Пример диаграммы положений равновесия для мультистабильной по кососимметричным формам системы показан на рис. 12.

Рисунок подтверждает факт существования двух различных участков устойчивых равновесий кольцевой пластинки на ветви нетривиальных решений (с учетом симметрии системы относительно плоскости пластинки, число подобных участков на двух симметричных ветвях равно четырем).

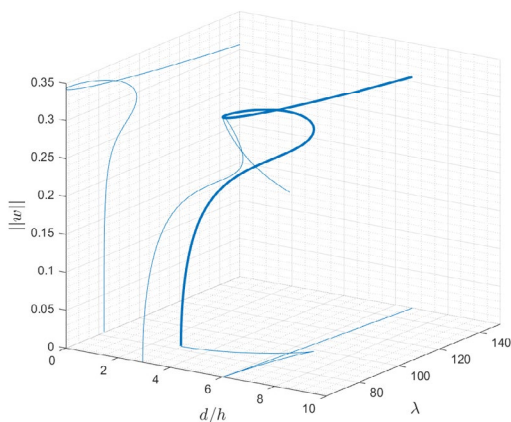


Рис. 11. Бифуркационная кривая точек «залипания» при $\beta = 0.4$.

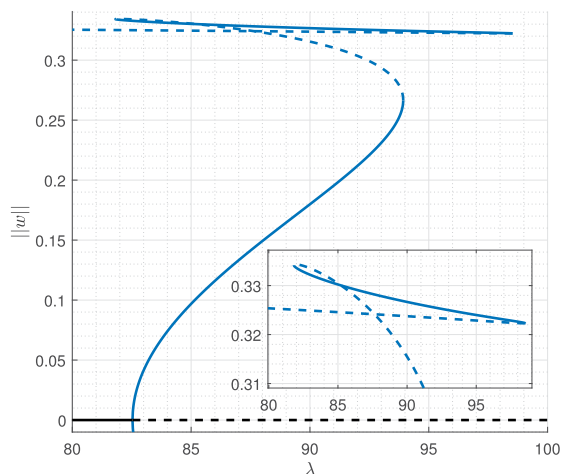


Рис. 12. Диаграмма положений равновесия в области мультистабильности $\beta = 0.4$, $d/h = 6.3$.

Примечательным свойством системы при выбранных значениях параметров является возможность управляемого «перескока» с одного устойчивого положения на другое; данный эффект может быть использован для разработки высокоточных микроэлектромеханических сенсоров предельных значений различных физических величин, выходным сигналом которых является измеренное емкостным датчиком скачкообразное изменение амплитуды статического прогиба чувствительного элемента — кольцевой микропластинки, расположенной между двумя неподвижными электродами.

6. Заключение. В работе выполнено построение и параметрическое исследование нелинейной модели статики кольцевой микропластинки при действии пондеромоторных сил электростатического поля двух неподвижных электродов. В допущениях геометрически нелинейной модели Кармана бессдвиговой тонкой пластинки Кирхгофа–Лява и нелинейной модели электростатических сил плоско-параллельных конденсаторов с переменным зазором получены уравнения равновесия системы в частных производных. Аналитически строго найдены точки ответвления нетривиальных осесимметричных и кососимметричных форм равновесия. Отмечено, что при определенных соотношениях между внутренним и внешним радиусами пластинки наинизшей формой потери устойчивости является кососимметричная форма с наименьшей окружной изменяемостью. Иными словами, обнаружена возможность управляемого выведения кольцевой пластинки в несимметричное равновесие путем приложения однородного электростатического поля. Разработана и реализована процедура построения нелинейной конечномерной модели системы методом Галеркина. С применением численных методов теории бифуркаций найдены диаграммы ветвления как осесимметричных, так и кососимметричных положений равновесия пластинки в пространстве минимального набора безразмерных параметров, полностью характеризующих исследуемую систему. Показано, что при определенных соотношениях между толщиной пластинки и межэлектродным зазором в системе наблюдается бистабильность — существование двух симметричных относительно плоскости пластинки нетривиальных устойчивых форм равновесия. Выполнен качественный (параметрический) анализ указанных областей бистабильности для статических равновесий с различной окружной изменяемостью. Кроме того, обнаружено, что при известных значениях параметров система обладает свойством мультистабильности кососимметричных форм равновесия — существованием более чем одного устойчивого состояния (без учета симметрии равновесий относительно начальной плоскости пластинки). Установленная таким образом возможность управляемого “перескока” с одного нетривиального устойчивого положения равновесия на другое может быть использована для разработки высокоточных микроэлектромеханических сенсоров предельных значений различных физических величин, выходным сигналом которых является измеренное емкостным датчиком скачкообразное изменение амплитуды статического прогиба чувствительного элемента определенной конфигурации.

7. Поддержка. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10009, <https://rscf.ru/project/21-71-10009/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Charlot B., Sun W., Yamashita K. et al.* Bistable nanowire for micromechanical memory // *J. Micromechanics and Microengineering*. 2008. V. 18. P. 045005. <https://doi.org/10.1088/0960-1317/18/4/045005>
2. *Intaraprasongk V., Fan S.* Nonvolatile bistable all-optical switch from mechanical buckling // *Appl. Phys. Lett.* 2011. V. 98. P. 6. <https://doi.org/10.1063/1.3600335>
3. *Harne R.L., Wang K.W.* A bifurcation-based coupled linear-bistable system for microscale mass sensing // *J. Sound and Vibration*. 2014. V. 333. P. 2241–2252. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.12.017>
4. *Uno A., Hirai Y., Tsuchiya T., Tabata O.* Mathematical Modeling and Analysis of MEMS Deformable Mirror Actuated by Electrostatic Piston Array // *Electrical Engineering in Japan*. 2018. V. 204. P. 50–60. <https://doi.org/10.1002/eej.23104>
5. *Davidovikj D., Bouwmeester D., van der Zant H.S. J., Steeneken P.G.* Graphene gas pumps // *2D Materials*. 2018. V. 5. № 3. P. 031009. <https://doi.org/10.1088/2053-1583/aac0a8>
6. *Hajjaj A., Jaber N., Ilyas S. et al.* Linear and nonlinear dynamics of micro and nano-resonators: Review of recent advances // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2019. V. 119. P. 103328. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103328>
7. *Medina L., Gilat R., Krylov S.* Symmetry breaking in an initially curved micro beam loaded by a distributed electrostatic force // *Inter. J. Solids Struct.* 2012. V. 49. P. 1864–1876. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.03.040>
8. *Medina L., Gilat R., Krylov S.* Symmetry breaking in an initially curved pre-stressed micro beam loaded by a distributed electrostatic force // *Inter. J. Solids Struct.* 2014. V. 51. P. 2047. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.02.010>
9. *Shojaeian M., Tadi Beni Y., Ataei H.* Size-dependent snap-through and pull-in instabilities of initially curved pre-stressed electrostatic nano-bridges // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2016. V. 49. P. 295–303. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/49/29/295303>
10. *Medina L., Seshia A.* Bistability and simultaneous mode actuation in electrostatically actuated initially curved coupled micro beams // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2020. V. 126. P. 103549. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103549>
11. *Medina L., Gilat R., Ilic B., Krylov S.* Single Electrode Bidirectional Switching of Latchable Prestressed Bistable Micromechanical Beams // *IEEE Sensors Journal*. 2021. V. 21. P. 21349–21358. <https://doi.org/10.1109/JSEN.2021.3103265>
12. *Морозов Н.Ф., Индейцев Д.А., Можгова Н.В. et al.* О формах равновесия начально-изогнутой балки Эйлера-Бернулли при электрических и тепловых воздействиях // *Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки*. 2023. Вып. 508. С. 35–41. <https://doi.org/10.31857/S268674002301008X>
13. *Индейцев Д.А., Можгова Н.В., Лукин А.В., Попов И.А.* Модель микромеханического модально-локализованного акселерометра с чувствительным элементом в виде балки с начальной прогибью // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2023. Вып. 3. С. 135–151. <https://doi.org/10.31857/S0572329922600645>
14. *Saghir S., Bellaredj M.L., Ramini A., Younis M.I.* Initially curved microplates under electrostatic actuation: Theory and experiment // *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2016. V. 26. P. 095004. <https://doi.org/10.1088/0960-1317/26/9/095004>
15. *Lukin A.V., Popov I.A., Skubov D. Yu.* Nonlinear dynamics and stability of microsystems engineering elements // *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*. 2017. V. 17. P. 1107–1115. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2017-17-6-1107-1115>
16. *Ghayesh M.H., Farokhi H.* Nonlinear behaviour of electrically actuated microplate-based MEMS resonators // *Mech. Syst. Signal Processing*. 2018. V. 109. P. 220–234. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.11.043>
17. *Saghir S., Younis M.I.* An investigation of the mechanical behavior of initially curved microplates under electrostatic actuation // *Acta Mech.* 2018. V. 229. P. 2909–2922. <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2141-3>

18. *Das M., Bhushan A.* Investigation of an electrostatically actuated imperfect circular microplate under transverse pressure for pressure sensor applications // *Engineering Research Express*. 2021. V. 3. <https://doi.org/10.1088/2631-8695/ac3771>
19. *Jallouli A., Kacem N., Bourbon G. et al.* Experimental characterization of nonlinear static and dynamic behaviors of circular capacitive microplates with initial deflection // *Nonlinear Dynamics*. 2021. V. 103. P. 2329–2343. <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06242-4>
20. *Das M., Bhushan A.* Investigation of the Effects of Residual Stress on Static and Dynamic Behaviour of an Imperfect MEMS Circular Microplate // *Ir.J. Sci. Techn. – Trans. Mech. Eng.* 2023. V. 47. P. 2143–2158. <https://doi.org/10.1007/s40997-023-00627-z>
21. *Medina L., Gilat R., Krylov S.* Bistable behavior of electrostatically actuated initially curved micro plate // *Sensors and Actuators, A: Physical*. 2016. V. 248. P. 193–198. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2016.07.027>
22. *Medina L., Gilat R., Krylov S.* On the Usage of Berger’s Model for Electrostatically Actuated Circular Curved Micro Plates. 2017. V. 4. P. V004T09A006. <https://doi.org/10.1115/DETC2017-67523>
23. *Medina L., Gilat R., Krylov S.* Bistability criterion for electrostatically actuated initially curved micro plates // *Int. J. Eng. Sci.* 2018. V. 130. P. 75–92. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.05.006>
24. *Asher A., Benjamin E., Medina L. et al.* Bistable Micro Caps Fabricated by Sheet Metal Forming // *J. Micromech. Microeng.* 2020. V. 30. P. 065002. <https://doi.org/10.1088/1361-6438/ab7f52>
25. *Medina L., Gilat R., Krylov S.* Necessary and sufficient criteria for bistability in electrostatically actuated initially curved pre-stressed micro-plates // *Int. J. Mech. Sci.* 2022. V. 223. P.107255. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107255>
26. *Asher A., Gilat R., Krylov S.* Natural Frequencies and Modes of Electrostatically Actuated Curved Bell-Shaped Microplates // *Applied Sciences*. 2022. V. 12. P. 2704. <https://doi.org/10.3390/app12052704>
27. *Medina L.* Effect of Membrane Load on the Stability of an Electrostatically Actuated Initially Curved Circular Micro Plate // *J. Appl. Mech.* 2023. V. 90. P. 031002. <https://doi.org/10.1115/1.4056059>
28. *Морозов Н.Ф.* К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластинки, нагруженной симметричной нагрузкой // *Изв. ВУЗ. Математика*. 1958. С. 126–129.
29. *Морозов Н.Ф., Е. Товстик П.О* формах потери устойчивости сжатой пластины на упругом основании // *Доклады Академии наук*. 2012. Вып. 446. С. 37–41.
30. *Морозов Н.Ф., Е. Товстик П.* О формах потери устойчивости сжатой пластины на упругом основании // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2012. № 6. С. 30–36.
31. *Бауэр С.М., Каштанова С.В., Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н.* Об устойчивости пластины наноразмерной толщины, ослабленной круговым отверстием // *Доклады Академии наук*. 2014. Вып. 458. С. 158–160. <https://doi.org/10.7868/s0869565214260090>
32. *Bauer Svetlana M., Kashtanova Stanislava V., Morozov Nikita F., Semenov Boris N.* Stability loss of an infinite plate with a circular inclusion under uniaxial tension // *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. 2017. Вып. 4. С. 266–272. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.210>
33. *Бауэр С.М., Воронкова Е.Б.* О несимметричной форме потери устойчивости неоднородных круглых пластин // *Вестник Санкт-Петербургского ун-та. Математика. Механика. Астрономия*. 2021. Вып. 8. С. 204–211. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.201>
34. *Bauer S.M., Indeitsev D.A., Semenov B.N., Voronkova E.B.* Asymmetric buckling of orthotropic plates under normal pressure // *Advances in Solid and Fracture Mechanics*. 2022. P. 13–22. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18393-5_2
35. *Nayfeh A.H., Pai P.F.* Linear and Nonlinear Structural Mechanics. Wiley-VCH. 2004. <https://doi.org/10.1002/9783527617562>
36. *MATLAB*. version R2021b. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc. 2021.

SYMMETRY BREAKING AND MULTISTABILITY OF ELECTROSTATICALLY ACTUATED ANNULAR MICROPLATES

N. F. Morozov^{a,b,*}, A. V. Lukin^{c,**}, and I. A. Popov^{c,***}

^a *St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034 Russia*

^b *Institute for Problems in Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, 199178 Russia*

^c *Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, 195251 Russia*

*e-mail: n.morozov@spbu.ru

**e-mail: lukin_av@srbstu.ru

***e-mail: popov_ia@srbstu.ru

Received 03.04.2023

Revised 03.04.2023

Accepted 03.04.2023

Abstract – The article investigates the nonlinear problem of statics of a ring microplate in the electrostatic field of two electrodes. Using the assumptions of the geometrically nonlinear Karman model, partial differential equilibrium equations for the system are obtained. The branch points of nontrivial axisymmetric and skew-symmetric forms of equilibrium are analytically rigorously found. It is noted that at certain ratios between the internal and external radii of the plate, the lowest form of buckling is the skew-symmetric form with the lowest circumferential variability. Using the Galerkin projection method and numerical methods of the theory of bifurcations, branching diagrams of both axisymmetric and skew-symmetric equilibrium positions of the plate in the space of key parameters of the system are found. It is shown that at certain relationships between the thickness of the plate and the interelectrode gap, multistability is observed in the system - the existence of two or more non-trivial stable forms of equilibrium that are symmetrical relative to the plane of the plate. A qualitative (parametric) analysis of the found areas of multistability is performed. The possibility of a plate jumping from one stable equilibrium position to another, controlled by an electrostatic field, is indicated. The discovered effect can be used to develop high-precision microelectromechanical sensors of limiting values of various physical quantities, the output signal of which is an abrupt change in the amplitude of the static deflection of the sensitive element of the proposed configuration measured by a capacitive sensor.

Keywords: MEMS, elastic stability, asymmetrical forms of equilibrium, symmetry breaking, bifurcation

REFERENCES

1. B. Charlot, W. Sun, K. Yamashita, et al., "Bistable nanowire for micromechanical memory," *J. Micromech. Microeng.* **4**, 18 (2008). <https://doi.org/10.1088/0960-1317/18/4/045005>
2. Varat Intaraprasong and Shanhui Fan, "Nonvolatile bistable all-optical switch from mechanical buckling," *Appl. Phys. Lett.* **98**, 241104 (2011). <https://doi.org/10.1063/1.3600335>
3. R. L. Harne and K. W. Wang, "A bifurcation-based coupled linear-bistable system for microscale mass sensing," *J. Sound Vib.* **333**, 2241-2252 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.12.017>

4. *Uno Akiko, Hirai Yoshikazu, Tsuchiya Toshiyuki, and Tabata Osamu*, “Mathematical modeling and analysis of mems deformable mirror actuated by electrostatic piston array,” *Electr. Eng. Japan* **204** (2), 50–60 (2018). <https://doi.org/10.1002/eej.23104>
5. *D. Davidovikj, D. Bouwmeester, H. S. J. van der Zant, and P. G. Steeneken*, “Graphene gas pumps,” *2D Materials* **5** (3), 031009 (2018). <https://doi.org/10.1088/2053-1583/aac0a8>
6. *A. Z. Hajjaj, N. Jaber, S. Ilyas, et al.*, “Linear and nonlinear dynamics of micro and nano-resonators: Review of recent advances,” *Int. J. Non-Linear Mech.* **119**, 103328 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103328>
7. *L. Medina, R. Gilat, and S. Krylov*, “Symmetry breaking in an initially curved micro beam loaded by a distributed electrostatic force,” *Int. J. Solids Struct.* **49**, 1864–1876 (2012). <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.03.040>
8. *L. Medina, R. Gilat, and S. Krylov*, “Symmetry breaking in an initially curved pre-stressed micro beam loaded by a distributed electrostatic force,” *Int. J. Solids Struct.* **51**, 2047 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.02.010>
9. *Shojaeian Milad, Tadi Beni Yaghoub, Ataei Hossein*, “Size-dependent snap-through and pull-in instabilities of initially curved pre-stressed electrostatic nano-bridges,” *J. Phys. D: Appl. Phys.* **49**, 295303 (2016). <https://doi.org/10.1088/0022-3727/49/29/295303>
10. *L. Medina and A. Seshia*, “Bistability and simultaneous mode actuation in electrostatically actuated initially curved coupled micro beams,” *Int. J. Non-Linear Mech.* **126**, 103549 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103549>
11. *L. Medina, R. Gilat, B. Ilic, and S. Krylov*, “Single electrode bidirectional switching of latchable prestressed bistable micromechanical beams,” *IEEE Sensors J.* **21** (19), 21349–21358 (2021). <https://doi.org/10.1109/JSEN.2021.3103265>
12. *N. F. Morozov, D. A. Indeitsev, N. V. Mozhgova, et al.*, “Equilibrium forms of an initially curved Bernoulli–Euler beam in electric and thermal fields,” *Dokl. Phys.* **68**, 56–61 (2023). <https://doi.org/10.1134/S1028335823020039>
13. *D. A. Indeitsev, N. V. Mozhgova, A. V. Lukin, et al.*, “Model of a micromechanical mode-localized accelerometer with an initially curved microbeam as a sensitive element,” *Mech. Solids* **58**, 779–792 (2023). <https://doi.org/10.3103/S0025654422601355>
14. *S. Saghir, M. L. Bellaredj, A. Ramini, and M. I. Younis*, “Initially curved microplates under electrostatic actuation: Theory and experiment,” *J. Micromech. Microeng.* **26**, 095004 (2016). <https://doi.org/10.1088/0960-1317/26/9/095004>
15. *A. V. Lukin, I. A. Popov, and D. Yu. Skubov*, “Nonlinear dynamics and stability of microsystems engineering elements,” *Sci. Tech. J. Informat. Technol., Mech. Optics* **17** (6), 1107–1115 (2017). <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2017-17-6-1107-1115>
16. *Mergen H. Ghayesh and Hamed Farokhi*, “Nonlinear behaviour of electrically actuated microplate-based MEMS resonators,” *Mech. Syst. Signal Proc.* **109**, 220–234 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.11.043>
17. *S. Saghir and M. I. Younis*, “An investigation of the mechanical behavior of initially curved microplates under electrostatic actuation,” *Acta Mech.* **229**, 2909–2922 (2018). <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2141-3>
18. *Das Mainakh and Bhushan Anand*, “Investigation of an electrostatically actuated imperfect circular microplate under transverse pressure for pressure sensor applications,” *Eng. Res. Express.* **3** (4), 045023 (2021). <https://doi.org/10.1088/2631-8695/ac3771>
19. *Jallouli Aymen, Kacem Najib, Bourbon Gilles, et al.*, “Experimental characterization of nonlinear static and dynamic behaviors of circular capacitive microplates with initial deflection,” *Nonlinear Dyn.* **103**, 2329–2343 (2021). <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06242-4>
20. *Das Mainakh and Bhushan Anand*, “Investigation of the effects of residual stress on static and dynamic behaviour of an imperfect MEMS circular microplate,” *Iran. J. Sci. Technol. Trans. Mech. Eng.* **47**, 2143–2158 (2023). <https://doi.org/10.1007/s40997-023-00627-z>
21. *L. Medina, R. Gilat, and S. Krylov*, “Bistable behavior of electrostatically actuated initially curved micro plate,” *Sens. Actuators, A* **248**, 193–198 (2016). <https://doi.org/10.1016/j.sna.2016.07.027>

22. L. Medina, R. Gilat, and S. Krylov, "On the usage of Berger's model for electrostatically actuated circular curved micro plates," in *Proc. of the ASME 2017 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Vol. 4: 22nd Design for Manufacturing and the Life Cycle Conference; 11th International Conference on Micro- and Nanosystems, Cleveland, Ohio, USA, August 6–9, 2017 (ASME, 2017), pp. V004T09A006. <https://doi.org/10.1115/DETC2017-67523>
23. L. Medina, R. Gilat, and S. Krylov, "Bistability criterion for electrostatically actuated initially curved micro plates," *Int. J. Eng. Sci.* **130**, 75–92 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.05.006>
24. A. Asher, E. Benjamin, L. Medina, et al., "bistable micro caps fabricated by sheet metal forming," *J. Micromech. Microeng.* **30**, 065002 (2020). <https://doi.org/10.1088/1361-6439/ab7f52>
25. L. Medina, R. Gilat, and S. Krylov, "Necessary and sufficient criteria for bistability in electrostatically actuated initially curved pre-stressed micro-plates," *Int. J. Mech. Sci.* **223**, 107255 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107255>
26. A. Asher, R. Gilat, and S. Krylov, "Natural frequencies and modes of electrostatically actuated curved bell-shaped microplates," *Appl. Sci.* **12** (5), 2704 (2022). <https://doi.org/10.3390/app12052704>
27. L. Medina, "Effect of membrane load on the stability of an electrostatically actuated initially curved circular micro plate," *J. Appl. Mech.* **90** (3), 031002 (2023). <https://doi.org/10.1115/1.4056059>
28. N. F. Morozov, "On the existence of a non-symmetric solution in the problem of large deflections of a circular plate with a symmetric load," *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, No. 2, 126–129 (1961).
29. N. F. Morozov and P. E. Tovstik, "Buckling forms of a compressed plate on an elastic foundation," *Dokl. Phys.* **57**, 335–339 (2012). <https://doi.org/10.1134/S1028335812090030>
30. N. F. Morozov and P. E. Tovstik, "Buckling modes of a compressed plate on an elastic substrate," *Mech. Solids* **47**, 622–627 (2012). <https://doi.org/10.3103/S0025654412060027>
31. S. M. Bauer, S. V. Kashtanova, N. F. Morozov, et al., "Stability of a nanoscale-thickness plate weakened by a circular hole," *Dokl. Phys.* **59**, 416–418 (2014). <https://doi.org/10.1134/S1028335814090043>
32. S. M. Bauer, S. V. Kashtanova, N. F. Morozov, and B. N. Semenov, "Stability loss of an infinite plate with a circular inclusion under uniaxial tension," *Vestn. St. Petersburg. Univ. Math.* **50**, 161–165 (2017). <https://doi.org/10.3103/S1063454117020030>
33. S. M. Bauer and E. B. Voronkova, "On non-axisymmetric buckling modes of inhomogeneous circular plates," *Vestn. St. Petersburg. Univ. Math.* **54**, 113–118 (2021). <https://doi.org/10.1134/S1063454121020023>
34. S. M. Bauer, D. A. Indeitsev, B. N. Semenov, and E. B. Voronkova, "Asymmetric buckling of orthotropic plates under normal pressure," in *Advanced Structured Materials*, Vol. 180: *Advances in Solid and Fracture Mechanics*, Ed. by H. Altenbach, S. M. Bauer, A.K. Belyaev, et al. (Springer, Cham, 2022), pp. 13–18. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18393-5_2
35. A. H. Nayfeh and P. F. Pai, *Linear and Nonlinear Structural Mechanics* (Wiley-VCH, 2004).
36. *MATLAB. Version R2021b* (The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2021).

УДК 539.4

СТРУКТУРНАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННО И ПЛОСКО АРМИРОВАННОЙ СРЕДЫ ИЗ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ С РАЗНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ТЕКУЧЕСТИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

© 2024 г. А. П. Янковский^{a,*}

^a *Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича
СО РАН, Новосибирск, Россия*

**e-mail: lab4nemir@rambler.ru*

Поступила в редакцию 21.03.2023 г.

После доработки 20.05.2023 г.

Принята к публикации 23.05.2023 г.

Разработаны структурные модели для трехмерно армированной волокнами гибридной композитной среды и для частных двумерных задач. С их помощью можно рассчитывать поверхности и кривые текучести композиции. Учтено трехмерное напряженное состояние во всех компонентах. Материалы компонентов композиции однородны и анизотропны, их механическое поведение описывается ассоциированным законом течения для жесткопластического тела с квадратичными условиями текучести общего вида. Компоненты по разному сопротивляются растяжению и сжатию. Для выполнения построений напряжения в компонентах представлены в параметрическом виде. Рассчитаны кривые текучести для модельной армированной в плоскости композиции из ортотропных фазовых материалов. Исследовано влияние направления армирования, поперечного нормального напряжения и параметров анизотропии компонентов композиции на форму и размеры кривых текучести рассматриваемого композитного материала. Показано, что анизотропия связующего в большей степени влияет на форму и размеры поверхности текучести композиции, чем анизотропия армирующих волокон. Продемонстрировано, что пластическое течение в армированной среде ассоциировано с расчетными кривыми (поверхностями) текучести композиции. Показано, что при наличии сильно выраженной анизотропии в арматуре структурная модель с одномерным напряженным состоянием в волокнах не позволяет адекватно рассчитывать кривые и поверхности текучести композитной среды.

Ключевые слова: структурная модель композита, волокнистая среда, трехмерное напряженное состояние, пространственное армирование, плоское армирование, много-направленное армирование, гибридный композит, жесткопластический материал, анизотропия компонентов композиции, разнсопротивляемость растяжению и сжатию, квадратичный критерий текучести

DOI: 10.31857/S1026351924010072, EDN: WANGZQ

1. Введение. В современной инженерной практике активно используются композитные материалы (КМ) с пространственными структурами армирования [1–3] (рис. 1). Такой тип армирования позволяет устранить основной недостаток плоско-перекрестно армированных композитов со слабым связующим (угле-, боро- и стеклопластики) – их расслоение в силу слабого сопротивления поперечному сдвигу и отрыву [1, 3]. Поэтому проблема моделирования механического поведения пространственно-армированных КМ актуальна.

Волокнистые композиции с жестким связующим (металлокомпозиты, КМ с керамическим связующим) успешно сопротивляются поперечному сдвигу и отрыву. Следовательно, при использовании таких композиций тонкостенные конструкции типа пластин и оболочек целесообразно армировать традиционным плоско-перекрестным способом, так как такие структуры технологически реализуются проще, чем пространственные.

Современные КМ-изделия могут находиться под действием высокоинтенсивных нагрузок [1, 4, 5], при которых компоненты композиции деформируются пластически. Поэтому проблема изучения пластического деформирования КМ также является актуальной. Однако исследования, посвященные математическому моделированию этой проблемы, немногочисленны [4–10].

При проведении расчетов, связанных с теоретическим исследованием несущей способности КМ-изделий, предварительно необходимо определить поверхность текучести соответствующей композиции. Краткий обзор публикаций по этой проблеме, не претендующий на полноту, приведен в [11–13]. Из этого обзора следует, что до настоящего времени механическое поведение пространственно-армированных КМ в основном моделировалось при учете линейно-упругого деформирования компонентов композиции. Жесткопластическое поведение плоско-перекрестно армированных тонкостенных КМ-конструкций теоретически исследовалось на базе структурной модели с одномерным напряженным состоянием в волокнах (МОНСВ) [14–16], при этом в арматуре учитывается только продольное нормальное напряжение. Структурные модели, разработанные в [14–16], и кривые текучести (прочности), рассчитанные на их основе,

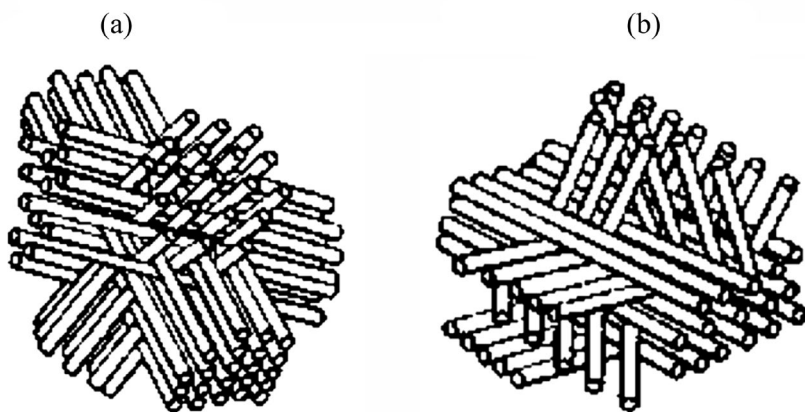


Рис. 1. Пространственные волокнистые структуры армирования [1]: (а) – ортогональное армирование в трех направлениях; (б) – армирование в пяти направлениях.

до сих пор активно используются для теоретического определения предельных состояний волокнистых пластин и оболочек [17–19].

В работах [11, 12] впервые были разработаны структурные модели жестко-пластического деформирования плоско-перекрестно армированных слоев при учете плоского напряженного состояния (ПНС) во всех компонентах композиции, а в [13] – аналогичная модель для пространственно армированного КМ при учете трехмерного (сложного) напряженного состояния во всех материалах композиции. В [11–13] учитывалось возможное разное сопротивление компонентов композиции при растяжении и сжатии, но материалы этих компонентов предполагались изотропными. Однако анализ справочных данных показывает, что армирующие волокна часто имеют разные физико-механические характеристики в продольном и поперечном направлениях, например волокна кевлар-49 [20]. Кроме того, сами армирующие волокна могут представлять собой КМ. Так, волокна бора получают осаждением паров бора на вольфрамовые или углеродные нити [20]. Следовательно, волокна бора также должны обладать анизотропией. С другой стороны, при изготовлении металлических проволок [21] используют технологию волочения, что связано с их предварительным пластическим деформированием и, согласно эффекту Баушингера, приводит к разносопротивляемости таких волокон при их растяжении и сжатии, а также возникновению текстуры в материале арматуры, которая порождает анизотропию физико-механических свойств [22–24]. Аналогично, деформационная анизотропия связующего материала и его разносопротивляемость при растяжении и сжатии могут возникнуть в процессе технологической вытяжки, например, криволинейной КМ-панели из КМ-пластины в условиях ползучести [22] или пластической штамповки [25, 26]. Следовательно, актуальна проблема математического моделирования пластического деформирования КМ из анизотропных компонентов композиции, которые по разному сопротивляются растяжению и сжатию [27–34].

Так как в рамках МОНСВ не учитываются нормальные и касательные напряжения в поперечном направлении волокон, то, используя эту структурную модель, вообще нельзя учесть анизотропию в арматуре. Поэтому для адекватного математического моделирования жесткопластического деформирования перекрестно армированных КМ из анизотропных компонентов композиции необходимо учитывать трехмерное напряженное состояние в них.

Настоящая работа посвящена разработке структурной модели, позволяющей рассчитывать поверхность текучести КМ при произвольном пространственном (см. рис. 1) или плоско-перекрестном армировании. Компоненты композиции предполагаются анизотропными жесткопластическими материалами, имеющими разные пределы текучести при растяжении и сжатии. В них учитывается трехмерное напряженное состояние, а пластическое течение описывается квадратичными критериями текучести общего вида.

2. Формулировка задачи и основные предположения. В глобальной декартовой прямоугольной системе координат $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ рассмотрим КМ регулярной структуры, пространственно армированный $\bar{K}$ ($K=1,2,3,\dots$) семействами непрерывных прямолинейных волокон с произвольной формой поперечного сечения. На рис. 1,а изображен случай $K=3$ (ортогональное армирование в трех направлениях), а на рис. 1,б изображен случай $K=5$. В общем случае волокна разных

семейств изготовлены из разных материалов. Такие КМ принято называть гибридными композитами.

Пусть ω_k – относительное объемное содержание материала k -го компонента композиции в представительном элементе КМ ($0 \leq k \leq K$). Индекс $k=0$ соответствует связующей матрице, $k \geq 1$ – волокнам k -го семейства. Для ω_k справедливо

$$\sum_{k=0}^K \omega_k = 1. \quad (2.1)$$

С каждым k -м семейством волокон свяжем локальную ортогональную систему координат $Ox_1^{(k)}x_2^{(k)}x_3^{(k)}$ так, чтобы ось $Ox_1^{(k)}$ совпадала с направлением армирования, а оси $Ox_2^{(k)}$ и $Ox_3^{(k)}$ были перпендикулярны этому направлению. Направление армирования волокнами k -го семейства задано углами сферической системы координат: θ_k и φ_k (рис. 2). В глобальной системе $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ направляющие косинусы $\bar{l}_{ij}^{(k)}$ оси $Ox_i^{(k)}$ ($i, j=1, 3$) равны

$$\begin{aligned} \bar{l}_{11}^{(k)} &= \sin \theta_k \cos \varphi_k, & \bar{l}_{12}^{(k)} &= \sin \theta_k \sin \varphi_k, & \bar{l}_{13}^{(k)} &= \cos \theta_k \\ \bar{l}_{21}^{(k)} &= -\sin \varphi_k, & \bar{l}_{22}^{(k)} &= \cos \varphi_k, & \bar{l}_{23}^{(k)} &= 0, & \bar{l}_{31}^{(k)} &= -\cos \theta_k \cos \varphi_k \\ \bar{l}_{32}^{(k)} &= -\cos \theta_k \sin \varphi_k, & \bar{l}_{33}^{(k)} &= \sin \theta_k, & 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь и далее чертой сверху обозначены величины, определенные в глобальной системе $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$.

Для связующего материала ($k=0$) также формально введем свою локальную систему координат $Ox_1^{(0)}x_2^{(0)}x_3^{(0)}$, которую для удобства примем совпадающей с глобальной системой $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, поэтому по аналогии с (2.2) при формальном задании $\theta_0 = \pi/2$ и $\varphi_0 = 0$ получаем

$$\bar{l}_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} \quad (Ox_i^{(0)} = O\bar{x}_i), \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (2.3)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

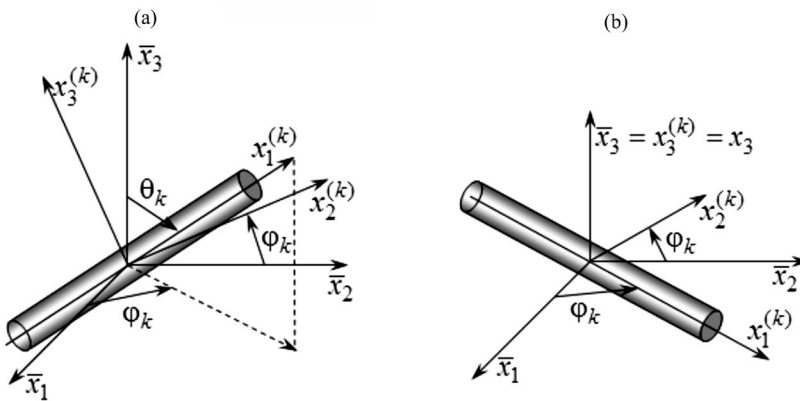


Рис. 2. Локальная система координат, связанная с волокном k -го семейства: (а) – пространственное армирование, (б) – армирование в плоскости $O\bar{x}_1\bar{x}_2$ ($\theta_k = \pi/2$).

Рассчитать реальное распределение напряжений в КМ, в котором связующее имеет многочисленные цилиндрические включения, — сложная задача даже в случае однонаправленно армированной линейно-упругой среды [35–37]. Еще труднее это сделать в рассматриваемом случае жесткопластического деформирования материалов компонентов композиции при произвольном перекрестном пространственном армировании среды (см. рис. 1). Построение удобной для инженерных приложений структурной модели жесткопластического поведения КМ выполним на основе исходных предположений, аналогичных принятым ранее [11–13, 37].

На макроуровне армированный материал является сплошным однородным анизотропным телом. При достаточно густом и равномерном наполнении связующей матрицы тонкими армирующими волокнами такое допущение вполне возможно. К этому выводу приходят все исследователи, изучающие механические свойства дисперсно-армированных сред [1, 3, 35–38].

Между арматурой и связующим материалом реализуется идеальный механический контакт (идеальная адгезия).

В пределах представительного элемента, выделенного из КМ на миниуровне, напряжения и скорости деформаций во всех компонентах и в композиции являются кусочно-постоянными. Эффекты высших порядков, связанные с изменением полей напряжений и скоростей деформаций на микроуровне в малых окрестностях границ контакта волокон и связующего, не учитываются. Подробное обоснование допустимости принятия этой гипотезы дано в конце работы [39].

Усредненные поля напряжений и скоростей деформаций в композиции получены усреднением по объему представительного элемента [35, 36], т.е. в силу допущения 3 — пропорционально величинам ω_k ($0 \leq k \leq K$).

Материалы компонентов композиции однородны и анизотропны, а их механическое поведение определяется ассоциированным законом течения для жесткопластического тела с квадратичным критерием текучести общего вида [37, 40, 41]:

$$f_k(\sigma_{ij}^{(k)}) \equiv a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(k)} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} \sigma_{\gamma\delta}^{(k)} + b_{\alpha\beta}^{(k)} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} - 1 = 0, \quad 0 \leq k \leq K, \quad (2.4)$$

где f_k — функция текучести (пластичности); $\sigma_{ij}^{(k)}$ — напряжения в k -м компоненте композиции; $a_{ijlm}^{(k)}$, $b_{ij}^{(k)}$ — известные константы этого материала, заданные в системе координат $Ox_1^{(k)}x_2^{(k)}x_3^{(k)}$ ($0 \leq k \leq K$), причем выполняются условия симметрии

$$a_{ijlm}^{(k)} = a_{lmij}^{(k)} = a_{jilm}^{(k)} = a_{ijml}^{(k)}, \quad b_{ij}^{(k)} = b_{ji}^{(k)}, \quad i, j, l, m = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq K. \quad (2.5)$$

В формуле (2.4) и далее по повторяющимся греческим индексам производится суммирование от 1 до 3.

В силу выполнения равенств (2.3) в выражении (2.4) при $k = 0$ можно сделать формальные замены: $a_{ijlm}^{(0)} \rightarrow \bar{a}_{ijlm}^{(0)}$, $b_{ij}^{(0)} \rightarrow \bar{b}_{ij}^{(0)}$ и $\sigma_{ij}^{(0)} \rightarrow \bar{\sigma}_{ij}^{(0)}$ ($i, j, l, m = \overline{1, 3}$). Согласно постулату Друккера [41, 42], коэффициенты $a_{ijlm}^{(k)}$ и $b_{ij}^{(k)}$ в соотношении (2.4) должны удовлетворять условию положительной определенности квадратичной формы $a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(k)} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} \sigma_{\gamma\delta}^{(k)} + b_{\alpha\beta}^{(k)} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)}$ ($0 \leq k \leq K$).

Если в (2.4) $b_{ij}^{(k)} = 0$ ($i, j = \overline{1, 3}$), то условие текучести (2.4) редуцируется в критерий текучести Хилла [40]. При этом материал k -го компонента композиции

одинаково сопротивляется растяжению и сжатию. Если материал k -го компонента композиции является ортотропным и главные оси анизотропии совпадают с осями $Ox_i^{(k)}$, то выражение (2.4) при учете соотношений (2.5) принимает вид:

$$f_k(\sigma_{ij}^{(k)}) \equiv a_{\alpha\alpha\beta\beta}^{(k)} \sigma_{\alpha\alpha}^{(k)} \sigma_{\beta\beta}^{(k)} + 2a_{\gamma\delta\gamma\delta}^{(k)} \sigma_{\gamma\delta}^{(k)} \sigma_{\gamma\delta}^{(k)} + b_{\alpha\alpha}^{(k)} \sigma_{\alpha\alpha}^{(k)} - 1 = 0, \quad \gamma \neq \delta, \quad 0 \leq k \leq K. \quad (2.6)$$

Пусть $y_{i+}^{(k)}$, $y_{i-}^{(k)}$ и $\tau_{ij}^{(k)}$ — известные из эксперимента пределы текучести k -го ортотропного материала композиции при растяжении (+) и сжатии (–) в направлении осей $Ox_i^{(k)}$ ($y_{i\pm}^{(k)} > 0$) и при чистом сдвиге в плоскости $Ox_i^{(k)}x_j^{(k)}$ ($i \neq j$, $i, j = 1, 3$); $y_{ij}^{(k)}$ — известные значения предельных главных напряжений $\sigma_i^{(k)}$ и $\sigma_j^{(k)}$ (их направления совпадают с направлениями осей $Ox_i^{(k)}$ и $Ox_j^{(k)}$), приводящих к пластическому течению при чистом сдвиге, когда оси локальной системы координат $Ox_i^{(k)}$ и $Ox_j^{(k)}$ повернуты вокруг оси $Ox_l^{(k)}$ на угол $\pi/4$, т.е.

$$\sigma_i^{(k)} = -\sigma_j^{(k)} = y_{ij}^{(k)} > 0, \quad i \neq j \neq l \neq i, \quad i, j, l = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq K. \quad (2.7)$$

Тогда коэффициенты в соотношении (2.6) при учете (2.5), (2.7) выражаются так [37]:

$$\begin{aligned} a_{iii}^{(k)} &= \frac{1}{y_{i+}^{(k)} y_{i-}^{(k)}}, \quad b_{ii}^{(k)} = \frac{1}{y_{i+}^{(k)}} - \frac{1}{y_{i-}^{(k)}}, \quad 2a_{ijj}^{(k)} = 2a_{jji}^{(k)} = \frac{1}{2\tau_{ij}^{(k)2}} \\ a_{ijj}^{(k)} &= \frac{1}{2} \left(a_{iii}^{(k)} + a_{jjj}^{(k)} + \frac{b_{ii}^{(k)}}{y_{ij}^{(k)}} - \frac{b_{jj}^{(k)}}{y_{ij}^{(k)}} - \frac{1}{y_{ij}^{(k)2}} \right), \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Если материал k -го компонента композиции одинаково сопротивляется растяжению и сжатию ($y_{i+}^{(k)} = y_{i-}^{(k)}$), то согласно (2.8) получаем $b_{ii}^{(k)} = 0$ ($i = \overline{1, 3}$) и соотношение (2.6) редуцируется в критерий текучести Хилла для ортотропного материала. Если материал k -го компонента композиции является изотропным, но по разному сопротивляется растяжению и сжатию ($y_{i+}^{(k)} \neq y_{i-}^{(k)}$, $y_{i+}^{(k)} = y_{j+}^{(k)}$, $y_{i-}^{(k)} = y_{j-}^{(k)}$), то для него имеем $\tau_{ij}^{(k)} = y_{ij}^{(k)} = \sqrt{y_{i+}^{(k)} y_{i-}^{(k)} / 3}$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, 3}$, $0 \leq k \leq K$. В этом случае условие текучести (2.6) при учете (2.7) и (2.8) вырождается в критерий текучести Баландина [43]. Если же материал является изотропным и одинаково сопротивляется растяжению и сжатию ($y_{i+}^{(k)} = y_{i-}^{(k)} = y_{j+}^{(k)} = y_{j-}^{(k)}$), то $\tau_{ij}^{(k)} = y_{ij}^{(k)} = y_{i+}^{(k)} / \sqrt{3}$ ($i \neq j$, $i, j = \overline{1, 3}$, $0 \leq k \leq K$) и соотношение (2.6) при учете (2.8) редуцируется в условие текучести Мизеса [37, 41, 42].

Согласно предположению 4, для построения поверхности текучести рассматриваемого КМ необходимо во всех компонентах композиции рассмотреть все возможные виды напряженного состояния, удовлетворяющие критерию текучести (2.4) (или (2.6)), и усреднить их значения. Пространство усредненных напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$ является шестимерным, потому что $\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ji}$ ($i, j = \overline{1, 3}$) в силу симметричности тензора напряжений [35, 37, 38, 40–42].

Произвольное напряженное состояние может быть задано тремя главными напряжениями и тремя параметрами (углами Эйлера [44]), определяющими направления главных напряжений. Поэтому рассмотрим локальную декартову прямоугольную систему координат $O\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$, связанную с главными напряжениями в связующем материале $\hat{\sigma}_i^{(0)}$ ($i = \overline{1, 3}$). В системе $O\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$ справедливо

$$\hat{\sigma}_{ii}^{(0)} = \hat{\sigma}_i^{(0)}, \quad \hat{\sigma}_{ij}^{(0)} = 0, \quad j \neq i, \quad i, j = \overline{1,3}. \quad (2.9)$$

Здесь и далее “крышечкой” сверху обозначены величины, определенные в системе $O\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$.

В системе координат $Ox_1^{(0)}x_2^{(0)}x_3^{(0)}$ или, что то же самое, в глобальной системе $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ (см. (2.3)) направляющие косинусы $\bar{l}_{ij}$ локальной оси $O\hat{x}_i$ ($i, j = \overline{1,3}$) равны [44]

$$\begin{aligned} \bar{l}_{11} &= \cos \bar{\alpha} \cos \bar{\gamma} + \sin \bar{\alpha} \cos \bar{\beta} \sin \bar{\gamma}, & \bar{l}_{12} &= \sin \bar{\alpha} \cos \bar{\gamma} - \cos \bar{\alpha} \cos \bar{\beta} \sin \bar{\gamma} \\ \bar{l}_{13} &= -\sin \bar{\beta} \sin \bar{\gamma}, & \bar{l}_{21} &= \cos \bar{\alpha} \sin \bar{\gamma} - \sin \bar{\alpha} \cos \bar{\beta} \cos \bar{\gamma}, & \bar{l}_{22} &= \cos \bar{\alpha} \cos \bar{\beta} \cos \bar{\gamma} + \\ &+ \sin \bar{\alpha} \sin \bar{\gamma}, & \bar{l}_{23} &= \sin \bar{\beta} \cos \bar{\gamma}, & \bar{l}_{31} &= \sin \bar{\alpha} \sin \bar{\beta}, & \bar{l}_{32} &= -\cos \bar{\alpha} \sin \bar{\beta}, & \bar{l}_{33} &= \cos \bar{\beta}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $\bar{\alpha}$ – угол прецессии; $\bar{\beta}$ – угол нутации; $\bar{\gamma}$ – угол собственного вращения.

Условие текучести (2.4) для связующего материала ($k = 0$) в системе координат $O\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$ принимает вид:

$$f_0(\hat{\sigma}_{ij}^{(0)}) \equiv \hat{a}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)} \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{(0)} \hat{\sigma}_{\gamma\delta}^{(0)} + \hat{b}_{\alpha\beta}^{(0)} \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{(0)} - 1 = 0, \quad (2.11)$$

где, согласно правилу преобразования компонентов тензоров при повороте системы координат, имеем [37]

$$\hat{a}_{ijlm}^{(0)} = a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)} \bar{l}_{i\alpha} \bar{l}_{j\beta} \bar{l}_{l\gamma} \bar{l}_{m\delta}, \quad \hat{b}_{ij}^{(0)} = b_{\alpha\beta}^{(0)} \bar{l}_{i\alpha} \bar{l}_{j\beta}, \quad i, j, l, m = \overline{1,3}. \quad (2.12)$$

Условие текучести (2.11) при учете равенств (2.9) и (2.12) редуцируется к виду

$$f_0(\hat{\sigma}_i^{(0)}) \equiv \hat{a}_{\alpha\alpha\beta\beta}^{(0)} \hat{\sigma}_{\alpha}^{(0)} \hat{\sigma}_{\beta}^{(0)} + \hat{b}_{\alpha\alpha}^{(0)} \hat{\sigma}_{\alpha}^{(0)} - 1 = 0. \quad (2.13)$$

3. Определение параметрических зависимостей для напряжений связующего материала и арматуры. Рассмотрим главные напряжения в связующем материале $\hat{\sigma}_i^{(0)}$ ($i = \overline{1,3}$) в сферических координатах (r, θ, φ) (рис. 3):

$$\hat{\sigma}_1^{(0)} = r \sin \theta \cos \varphi, \quad \hat{\sigma}_2^{(0)} = r \sin \theta \sin \varphi, \quad \hat{\sigma}_3^{(0)} = r \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Тогда уравнение поверхности текучести связующего материала $f_0 = 0$ можно записать в виде

$$r = r_0(\theta, \varphi)$$

и для напряжений $\hat{\sigma}_i^{(0)}$ ($i = \overline{1,3}$), удовлетворяющих этому условию, справедливо параметрическое представление:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1^{(0)}(\theta, \varphi) &= r_0 \sin \theta \cos \varphi, & \hat{\sigma}_2^{(0)}(\theta, \varphi) &= r_0 \sin \theta \sin \varphi \\ \hat{\sigma}_3^{(0)}(\theta, \varphi) &= r_0 \cos \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi, & \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из (2.13) при учете (3.1) получим квадратное уравнение для $r_0(\theta, \varphi)$:

$$A_0 r_0^2 + B_0 r_0 - 1 = 0, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} A_0(\theta, \varphi) &\equiv (\hat{a}_{1111}^{(0)} \cos^2 \varphi + \hat{a}_{2222}^{(0)} \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta + \hat{a}_{3333}^{(0)} \cos^2 \theta + \\ &+ \hat{a}_{1122}^{(0)} \sin^2 \theta \sin 2\varphi + (\hat{a}_{1133}^{(0)} \cos \varphi + \hat{a}_{2233}^{(0)} \sin \varphi) \sin 2\theta \\ B_0(\theta, \varphi) &\equiv (\hat{b}_{11}^{(0)} \cos \varphi + \hat{b}_{22}^{(0)} \sin \varphi) \sin \theta + \hat{b}_{33}^{(0)} \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для реальных материалов точка $\hat{\sigma}_i^{(0)} = 0$ ($i = \overline{1,3}$) находится внутри поверхности текучести $f_0 = 0$ [44], поэтому

$$r_0(\theta, \varphi) > 0. \quad (3.4)$$

Квадратное уравнение (3.2) имеет единственный вещественный корень, удовлетворяющий условию (3.4):

$$r_0(\theta, \varphi) = \frac{-B_0(\theta, \varphi) + \sqrt{B_0^2(\theta, \varphi) + 4A_0(\theta, \varphi)}}{2A_0(\theta, \varphi)}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (3.5)$$

Зависимость $r = r_0(\theta, \varphi)$ известна из (3.5) при учете (3.3) и (2.12), поэтому из (3.1) известны пятипараметрические зависимости напряжений $\hat{\sigma}_i^{(0)}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \theta, \varphi)$ ($i = \overline{1,3}$), удовлетворяющих критерию текучести для связующего материала (2.13) или, что то же самое, (2.11).

Далее определим параметрические соотношения для напряжений в арматуре.

Переход от локальной системы координат $O\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$, связанной с направлениями главных напряжений в связующем, к локальной системе $Ox_1^{(k)}x_2^{(k)}x_3^{(k)}$, связанной с арматурой k -го семейства (см. рис. 2), можно представить в виде двух действий:

1) переход от осей $O\hat{x}_j$ к осям глобальной системы координат $O\bar{x}_m$;

2) переход от осей $O\bar{x}_m$ к осям $Ox_i^{(k)}$, $i, j, m = \overline{1,3}$, $1 \leq k \leq K$ (рис. 2).

Поэтому в системе $O\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$ направляющие косинусы $\hat{l}_{ij}^{(k)}$ осей $Ox_i^{(k)}$ равны:

$$\hat{l}_{ij}^{(k)} \equiv \hat{l}_{ij}^{(k)}(\theta_k, \varphi_k, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) = \bar{l}_{i\delta}^{(k)} \bar{l}_{\delta j}^{-1} = \bar{l}_{i\delta}^{(k)} \bar{l}_{j\delta} = \bar{l}_{i\delta}^{(k)}(\theta_k, \varphi_k) \bar{l}_{j\delta}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}), \quad (3.6)$$

$$i, j = \overline{1,3}, \quad 1 \leq k \leq K.$$

где $\bar{l}_{\delta j}^{-1}$ — компоненты тензора, обратного ортогональному тензору $\bar{l}_{\delta j}$, поэтому $\bar{l}_{\delta j}^{-1} = \bar{l}_{j\delta}$; $\bar{l}_{i\delta}^{(k)}$ и $\bar{l}_{j\delta}$ определены формулами (2.2) и (2.10).

Из предположений 2, 3 и условий непрерывности напряжений и перемещений на границах контакта арматуры со связующим (т.е. на боковых поверхностях волокон) получим равенства

$$\varepsilon_{11}^{(k)} = \varepsilon_{11}^{(0,k)}, \quad 1 \leq k \leq K \quad (3.7)$$

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(0,k)}, \quad i, j = \overline{1,3} \text{ кроме } i = j = 1, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (3.8)$$

Здесь и далее: $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ — скорости деформаций k -го компонента композиции в системе координат $Ox_1^{(k)}x_2^{(k)}x_3^{(k)}$ ($0 \leq k \leq K$); $\varepsilon_{ij}^{(0,k)}$, $\sigma_{ij}^{(0,k)}$ — скорости деформаций и напряжения в связующем, определенные в той же системе координат. Равенство (3.7) является следствием одинакового удлинения арматуры и связующего материала в направлении армирования волокнами k -го семейства. Соотношения (3.8) — это условия непрерывности напряжений на боковых поверхностях волокон.

Согласно правилу преобразования компонентов тензоров второго ранга при повороте системы координат [37], равенства (3.8) при учете (2.9) и (3.6) принимают вид:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(0,k)} \equiv \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{(0)} \hat{l}_{i\alpha}^{(k)} \hat{l}_{j\beta}^{(k)} = \hat{\sigma}_{\delta}^{(0)} \hat{l}_{i\delta}^{(k)} \hat{l}_{j\delta}^{(k)}, \quad i, j = \overline{1,3} \text{ кроме } i = j = 1, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (3.9)$$

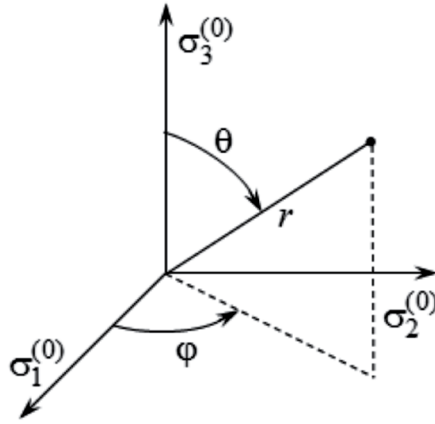


Рис. 3. Сферическая система координат в пространстве главных напряжений в связующем материале.

Напряжения в арматуре k -го семейства должны удовлетворять условию текучести (2.4) при $k \geq 1$. Подставляя (3.9) в (2.4), получим квадратное уравнение относительно напряжения $\sigma_{11}^{(k)}$:

$$a_{1111}^{(k)} (\sigma_{11}^{(k)})^2 + B_k \sigma_{11}^{(k)} + C_k = 0, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} B_k &\equiv 2 \sum_{m=2}^3 a_{11mm}^{(k)} \sigma_{mm}^{(k)} + 2 \sum_{i,j=1,3}^{i \neq j} a_{11ij}^{(k)} \sigma_{ij}^{(k)} + b_{11}^{(k)} \\ C_k &\equiv \sum_{l=2}^3 \sum_{m=2}^3 a_{llmm}^{(k)} \sigma_{ll}^{(k)} \sigma_{mm}^{(k)} + 2 \sum_{m=2}^3 \sigma_{mm}^{(k)} \sum_{i,j=1,3}^{i \neq j} a_{mmij}^{(k)} \sigma_{ij}^{(k)} + 2 \sum_{i,j=1,3}^{i \neq j} a_{ijij}^{(k)} (\sigma_{ij}^{(k)})^2 + \\ &+ 8(a_{1213}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} \sigma_{13}^{(k)} + a_{1223}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} + a_{1323}^{(k)} \sigma_{13}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)}) + \sum_{m=2}^3 b_{mm}^{(k)} \sigma_{mm}^{(k)} + \sum_{i,j=1,3}^{i \neq j} b_{ij}^{(k)} \sigma_{ij}^{(k)} - 1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Решение уравнения (3.10) имеет вид

$$\sigma_{11}^{(k)} = \frac{-B_k \pm \sqrt{B_k^2 - 4a_{1111}^{(k)} C_k}}{2a_{1111}^{(k)}}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (3.12)$$

Коэффициенты уравнения (3.10) и его решение (3.12) зависят от пяти углов $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, θ и φ , как это следует из равенств (3.1), (3.5), (3.6), (3.9) и (3.11). Таким образом, из (3.9) и (3.12) получаем известные параметрические зависимости

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \theta, \varphi), \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (3.13)$$

определенные в локальной системе координат $Ox_1^{(k)} x_2^{(k)} x_3^{(k)}$.

Знак “ $\pm$ ” в соотношениях (3.12) однозначно выбирается из кинематического условия (3.7) (подробности выбора приведены ниже).

4. Определение условия текучести для композитной среды, усредненных напряжений и скоростей деформаций. Из ассоциированного закона течения следует, что скорости деформаций k -го компонента композиции, определенные в локальной системе координат $Ox_1^{(k)}x_2^{(k)}x_3^{(k)}$, равны [41, 42, 44]

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ij}^{(k)}} = \lambda_k \xi_{ij}^{(k)}, \quad \xi_{ij}^{(k)} \equiv \frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ij}^{(k)}}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad \lambda_k \geq 0, \quad 0 \leq k \leq K, \quad (4.1)$$

где λ_k — неопределенный множитель, f_k — функция текучести k -го компонента композиции.

Из формул (2.4) и (4.1) получим

$$\xi_{ij}^{(k)} = 2a_{ij\alpha\beta}^{(k)} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} + b_{ij}^{(k)}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq K. \quad (4.2)$$

Из соотношений, аналогичных (4.1), при учете равенств (2.9), (2.11) и (2.13) вытекает

$$\hat{\xi}_{ij}^{(0)} = 2\hat{a}_{ij\alpha\beta}^{(0)} \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{(0)} + \hat{b}_{ij}^{(0)} = 2\hat{a}_{ij\alpha\alpha}^{(0)} \hat{\sigma}_{\alpha}^{(0)} + \hat{b}_{ij}^{(0)}, \quad i, j = \overline{1, 3}. \quad (4.3)$$

Выражения (4.3) записаны для связующего материала в системе координат $O\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$, связанной с главными напряжениями $\hat{\sigma}_i^{(0)}$ ($i = \overline{1, 3}$).

Из равенств (3.7) при учете выражений (4.1) следует

$$\lambda_k \xi_{11}^{(k)} = \lambda_0 \xi_{11}^{(0,k)}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (4.4)$$

где по аналогии с (3.9) имеем

$$\xi_{11}^{(0,k)} = \hat{\xi}_{\alpha\beta}^{(0)} \hat{l}_{1\alpha}^{(k)} \hat{l}_{1\beta}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (4.5)$$

При активном нагружении k -го компонента композиции $\lambda_k > 0$ ($0 \leq k \leq K$), поэтому из (4.4) следует

$$\text{sign} \xi_{11}^{(k)} = \text{sign} \xi_{11}^{(0,k)}, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (4.6)$$

Знак “ $\pm$ ” в выражении (3.12) выбирается таким, чтобы выполнялось равенство (4.6) при учете (4.2), (4.3) и (4.5).

Из равенств (4.4) следует

$$\lambda_k = \lambda_0 \xi_{11}^{(0,k)} / \xi_{11}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (4.7)$$

Согласно допущению 4, усредненные скорости деформаций $\hat{\varepsilon}_{ij}$ и напряжения $\hat{\sigma}_{ij}$ в композиции в системе координат $O\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$ определяются так:

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \sum_{k=0}^K \omega_k \hat{\varepsilon}_{ij}^{(k)}, \quad i, j = \overline{1, 3} \quad (4.8)$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sum_{k=0}^K \omega_k \hat{\sigma}_{ij}^{(k)}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (4.9)$$

где по аналогии с (3.6), учитывая, что тензор $\hat{l}_{ij}^{(k)}$ является ортогональным, а значит обратный к нему тензор совпадает с транспонированным тензором $\hat{l}_{ji}^{(k)}$, имеем

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^{(k)} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} \hat{l}_{\alpha i}^{(k)} \hat{l}_{\beta j}^{(k)}, \quad \hat{\sigma}_{ij}^{(k)} = \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} \hat{l}_{\alpha i}^{(k)} \hat{l}_{\beta j}^{(k)}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (4.10)$$

Подставляя выражения, аналогичные (4.1), в (4.10) и учитывая (4.7), из (4.8) получим

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \sum_{k=0}^K \omega_k \lambda_k \hat{\xi}_{ij}^{(k)} = \lambda_0 \sum_{k=0}^K \omega_k \hat{\xi}_{ij}^{(k)} \xi_{11}^{(0,k)} / \xi_{11}^{(k)} = \lambda_0 \hat{\xi}_{ij}, \quad i, j = \overline{1,3}, \quad (4.11)$$

где

$$\hat{\xi}_{ij} \equiv \sum_{k=0}^K \omega_k \hat{\xi}_{ij}^{(k)} \xi_{11}^{(0,k)} / \xi_{11}^{(k)}, \quad \hat{\xi}_{ij}^{(k)} = \xi_{\alpha\beta}^{(k)} \hat{l}_{\alpha i}^{(k)} \hat{l}_{\beta j}^{(k)}, \quad i, j = \overline{1,3} \quad (\xi_{11}^{(0,0)} / \xi_{11}^{(0)} \equiv 1). \quad (4.12)$$

Соотношения (4.11) и (4.9) при учете (4.5), (4.10) и (4.12), а также (4.2), (4.3), (3.13), (3.6), (2.9), (2.10), (2.12), (3.1), (3.3) и (3.5) задают пятипараметрическое (от углов $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, θ и φ) представление компонентов тензора усредненных скоростей деформаций $\hat{\varepsilon}_{ij}$ и напряжений $\hat{\sigma}_{ij}$ в рассматриваемой композиции. Соотношения (4.9) и (4.11) получены в локальной системе координат $O\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$. Для вычисления компонент тензоров усредненных скоростей деформаций $\bar{\varepsilon}_{ij}$ и напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$ в композиции в глобальной системе $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ (см. рис. 2) следует применить формулы пересчета компонентов тензора при повороте системы координат [37]:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \lambda_0 \bar{\xi}_{ij}, \quad \bar{\xi}_{ij} = \hat{\xi}_{\alpha\beta} \bar{l}_{\alpha i} \bar{l}_{\beta j}, \quad i, j = \overline{1,3} \quad (4.13)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \hat{\sigma}_{\alpha\beta} \bar{l}_{\alpha i} \bar{l}_{\beta j}, \quad i, j = \overline{1,3}, \quad (4.14)$$

где учтены выражения (4.12) и (4.9); $\bar{l}_{ij}$ — направляющие косинусы (2.10).

Соотношения (4.14) при учете (2.10), (4.9), (4.10), (3.13) и (3.6) задают пятипараметрическое (от углов $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, θ и φ) представление гиперповерхности текучести пространственно армированного КМ в шестимерном пространстве усредненных напряжений $\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ji}$ ($i, j = \overline{1,3}$), определенных в глобальной системе координат $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$. Равенства (4.13) определяют зависимости усредненных скоростей деформаций композиции $\bar{\varepsilon}_{ij}$ от этих же пяти угловых параметров $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, θ и φ .

5. Плоско-перекрестное армирование жесткопластического КМ. Тонкостенные КМ-конструкции типа пластин и оболочек, как правило, перекрестно армируются по поверхностям, эквидистантным срединной поверхности (плоскости) [1, 3–5, 14–21, 35–39]. В этом случае направления осей $Ox_3^{(k)}$ и $O\bar{x}_3$ совпадают, а локальная система координат $Ox_1^{(k)}x_2^{(k)}x_3^{(k)}$ связана с волокном k -го семейства так, как показано на рис. 2,б, где изображен случай при (см. рис. 2,а)

$$\theta_k = \pi/2, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (5.1)$$

В системе $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ направляющие косинусы $\bar{l}_{ij}^{(k)}$ осей $Ox_i^{(k)}$ ($i, j = \overline{1,3}$) определяются из (2.2) при учете (5.1). При рассматриваемом армировании справедливости соотношения (3.7) и (3.8). Напряжения $\sigma_{ij}^{(k)}$ в k -м компоненте композиции при переходе от глобальной системы координат $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ к локальной системе $Ox_1^{(k)}x_2^{(k)}x_3^{(k)}$ определяются по формулам, аналогичным (3.9):

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{(k)} \bar{l}_{\alpha i}^{(k)} \bar{l}_{\beta j}^{(k)}, \quad i, j = \overline{1,3}, \quad 0 \leq k \leq K. \quad (5.2)$$

Используя равенства (3.8) при $j = 3$, учитывая при этом (2.1), (2.2), (5.1), (5.2) и аналог (3.9)

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(0,k)} = \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{(0)} \bar{l}_{i\alpha}^{(k)} \bar{l}_{j\beta}^{(k)}, \quad i, j = \overline{1,3} \text{ кроме } i = j = 1, \quad 0 \leq k \leq K$$

и повторяя рассуждения из [13] (см. там соотношения (5.2)–(5.5)), получим

$$\bar{\sigma}_{i3}^{(k)} = \bar{\sigma}_{i3}, \quad i = \overline{1,3}, \quad 0 \leq k \leq K. \quad (5.3)$$

Известно, что в тонкостенных элементах КМ-конструкций, как правило, реализуется обобщенное ПНС или близкое к нему. Поэтому далее будем предполагать, что ось $O\bar{x}_3$ (см. рис. 2, б) совпадает с одним из направлений главных напряжений в композиции, т.е.

$$\bar{\sigma}_{13} = \bar{\sigma}_{23} = 0. \quad (5.4)$$

Пусть $\bar{\sigma}_{33}^0$ – некоторое заданное значение нормального напряжения $\bar{\sigma}_{33}$ (при $\bar{\sigma}_{33}^0 = 0$ получаем случай ПНС). Также считаем

$$\bar{\sigma}_{33} = \bar{\sigma}_{33}^0 = \text{const}. \quad (5.5)$$

Из равенств (5.3) при учете (5.4) и (5.5) имеем

$$\bar{\sigma}_{13}^{(k)} = \bar{\sigma}_{23}^{(k)} = 0, \quad 0 \leq k \leq K \quad (5.6)$$

$$\bar{\sigma}_{33}^{(k)} = \bar{\sigma}_{33}^0, \quad 0 \leq k \leq K. \quad (5.7)$$

Из соотношений (5.6) следует, что в рамках используемых допущений при плоско-перекрестном армировании КМ в случае выполнения условий (5.4) ось $O\bar{x}_3$ также совпадает с $Ox_3^{(k)}$ – одним из направлений главных напряжений в k -м компоненте композиции, в котором нормальное напряжение $\bar{\sigma}_{33}^{(k)}$ известно в силу выполнения равенств (5.7).

Соотношения (5.6) справедливы и для связующего (при $k=0$). Поэтому локальная система координат $O\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$, связанная с направлениями главных напряжений в связующем, получается из глобальной системы $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ поворотом ее на некоторый угол, обозначенный как $\bar{\alpha}$, вокруг оси $O\bar{x}_3 = O\hat{x}_3$. Тогда направляющие косинусы $\bar{l}_{ij}$ локальной оси $O\hat{x}_i$ ($i, j = \overline{1,3}$) определяются по формулам (2.10), в которых следует принять $\bar{\beta} = \bar{\gamma} = 0$ и учесть, что $0 \leq \bar{\alpha} < 2\pi$.

Если напряжение $\bar{\sigma}_{33}^0 = 0$ (ПНС), то из третьего равенства (3.1) при учете (2.9), (3.4) и (5.7) ($\hat{\sigma}_3^0 = \bar{\sigma}_{33}^0$) получим (см. рис. 3)

$$\theta = \pi/2 \quad (\bar{\sigma}_{33}^0 = 0). \quad (5.8)$$

Далее решение рассматриваемой задачи строится так же, как и в предыдущем разделе 4, но при учете (5.8). Следовательно, при ПНС в трехмерном пространстве ненулевых напряжений $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{12}$ и $\bar{\sigma}_{22}$ (см. (5.4) и (5.5) при $\bar{\sigma}_{33}^0 = 0$) получим двухпараметрическое (от углов $\bar{\alpha}$ и φ) представление поверхности текущей для плоско-перекрестно армированной композитной среды. При этом в случае общей анизотропии хотя бы одного из компонентов композиции даже при ПНС тензор усредненных скоростей деформаций композиции будет иметь ненулевыми

все компоненты ($\bar{\varepsilon}_{ij} \neq 0$, $i, j = \overline{1,3}$), что следует из (4.13), (4.11), (4.8), (4.2) и (4.3) даже при выполнении равенств (5.4) и (5.5), где $\bar{\sigma}_{33}^0 = 0$.

Если $\bar{\sigma}_{33}^0 \neq 0$, то $\theta \neq \pi/2$, а из третьего равенства (3.1) при учете (2.9), (3.4), (5.7) и $\hat{\sigma}_3^{(0)} = \bar{\sigma}_{33}^{(0)} = \bar{\sigma}_{33}^0$ следует

$$r_0 = \bar{\sigma}_{33}^0 / \cos \theta \quad (\bar{\sigma}_{33}^0 \neq 0, \cos \theta \neq 0). \quad (5.9)$$

Из (5.9) и двух первых равенств (3.1) имеем

$$\hat{\sigma}_1^{(0)} \equiv \hat{\sigma}_1^{(0)}(\theta, \varphi) = \bar{\sigma}_{33}^0 \operatorname{tg} \theta \cos \varphi, \quad \hat{\sigma}_2^{(0)} \equiv \hat{\sigma}_2^{(0)}(\theta, \varphi) = \bar{\sigma}_{33}^0 \operatorname{tg} \theta \sin \varphi. \quad (5.10)$$

Подставим (5.10) в условие текучести (2.13) и учтем соотношения (5.7), где $\hat{\sigma}_3^{(0)} = \bar{\sigma}_{33}^{(0)} = \bar{\sigma}_{33}^0$. Тогда для $\operatorname{tg} \theta$ получим квадратное уравнение:

$$a_0(\varphi) \operatorname{tg}^2 \theta + b_0(\varphi) \operatorname{tg} \theta + c_0 = 0 \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} a_0(\varphi) &\equiv (\bar{\sigma}_{33}^0)^2 (\hat{a}_{1111}^{(0)} \cos^2 \varphi + \hat{a}_{2222}^{(0)} \sin^2 \varphi + \hat{a}_{1122}^{(0)} \sin 2\varphi) \\ b_0(\varphi) &\equiv \bar{\sigma}_{33}^0 (\hat{b}_{11}^{(0)} \cos \varphi + \hat{b}_{22}^{(0)} \sin \varphi) + 2(\bar{\sigma}_{33}^0)^2 (\hat{a}_{1133}^{(0)} \cos \varphi + \hat{a}_{2233}^{(0)} \sin \varphi) \\ c_0 &\equiv \hat{a}_{3333}^{(0)} (\bar{\sigma}_{33}^0)^2 + \hat{b}_{33}^{(0)} \bar{\sigma}_{33}^0 - 1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Уравнение (5.11) при учете (5.12) имеет решение:

$$\operatorname{tg} \theta(\varphi) = \frac{-b_0(\varphi) \pm \sqrt{b_0^2(\varphi) - 4a_0(\varphi)c_0}}{2a_0(\varphi)}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (5.13)$$

В силу (3.4) из (5.9) следует

$$\operatorname{sign}(\cos \theta(\varphi)) = \operatorname{sign} \bar{\sigma}_{33}^0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (5.14)$$

Знак “ $\pm$ ” в (5.13) выбирается из условия выполнения равенства (5.14).

Из (5.10) и (5.13) получим

$$\hat{\sigma}_i^{(0)} = \hat{\sigma}_i^{(0)}(\bar{\sigma}_{33}^0, \varphi), \quad \hat{\sigma}_3^{(0)} = \bar{\sigma}_{33}^0 = \text{const} \neq 0, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (5.15)$$

Далее решение рассматриваемой задачи строится так же, как и в предыдущем разделе 4, но при учете соотношений (5.15).

Таким образом, при заданном значении $\bar{\sigma}_{33}^0 \neq 0$ в трехмерном пространстве ненулевых напряжений (см. (5.4)) имеем двухпараметрическое (от углов $\bar{\alpha}$ и φ) представление поверхности текучести плоско-перекрестно армированной композиции. Отметим, что разным значениям $\bar{\sigma}_{33}^0 \neq 0$ соответствуют разные трехмерные поверхности текучести. Если материалы компонентов композиции одинаково сопротивляются растяжению и сжатию, т.е. $b_{ij}^{(k)} = 0$, $i, j = \overline{1,3}$, $0 \leq k \leq K$ (см. (2.4)), то при $\bar{\sigma}_{33}^0 = 0$ (ПНС) получим решение, которое совпадает

с построенным в [45]. Величина $\bar{\sigma}_{33}^0$ определяется из граничных условий задач для конкретных элементов конструкций.

6. Численные примеры в случае плоско-перекрестного симметричного армирования. Рассмотрим случай, когда при плоско-перекрестном армировании (см. (5.1)) в КМ уложено четное количество семейств волокон ($K = 2N$) и для каждого семейства определено парное ему семейство. Волокна парных семейств изготовлены из одного материала, имеют одинаковые плотности армирования ($\omega_{2k-1} = \omega_{2k}$) и уложены симметрично относительно оси $O\bar{x}_1$: $\phi_{2k-1} = -\phi_{2k}$, $1 \leq k \leq N$ (рис. 4).

Предполагается, что материалы всех компонентов композиции ортотропны, причем главные оси анизотропии совпадают с осями локальных систем координат $Ox_1^{(k)}x_2^{(k)}x_3^{(k)}$, т.е. справедливы выражения (2.6)–(2.8). При этом для каждой пары семейств волокон выполняются равенства: $y_{i+}^{(2k-1)} = y_{i+}^{(2k)}$, $y_{i-}^{(2k-1)} = y_{i-}^{(2k)}$, $y_{ij}^{(2k-1)} = y_{ij}^{(2k)}$ и $\tau_{ij}^{(2k-1)} = \tau_{ij}^{(2k)}$ ($i \neq j$, $i, j = 1, 3$, $1 \leq k \leq N$).

В рассматриваемом случае плоского армирования следует учесть (5.6) и (5.7), из которых вытекают равенства $\sigma_{13}^{(k)} = \sigma_{23}^{(k)} = 0$ и $\sigma_{33}^{(k)} = \sigma_{33}^0$ ($0 \leq k \leq K$), что и необходимо подставить в соотношения (2.6).

Исследуем частный случай нагружения КМ, когда оси $O\bar{x}_i$ совпадают с направлениями главных напряжений тензора усредненных напряжений в композиции, т.е. вместе с (5.4) выполняется равенство $\bar{\sigma}_{12} = 0$. В силу допущения 1, выполнения равенств (2.3) и симметрии структуры армирования относительно осей $O\bar{x}_1$ и $O\bar{x}_2$ (см. рис. 4) эти оси будут совпадать с направлениями главных напряжений в связующем материале. Поэтому каждая ось $O\bar{x}_i$ совпадает с осью $O\hat{x}_i$ ($i = 1, 3$). Это значит, что выполняются не только равенства (5.6) (при $k = 0$), но и условие $\bar{\sigma}_{12}^{(0)} = \hat{\sigma}_{12}^{(0)} = 0$. Следовательно, $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = \bar{\gamma} = 0$ в (2.10). Далее решение задачи строится так же, как и в предыдущем разделе. Но при этом в пространстве главных усредненных напряжений $\bar{\sigma}_{11}$ и $\bar{\sigma}_{22}$ получится кривая текучести КМ, определяемая параметрически через параметр ϕ (см. (3.1), (5.15) и рис. 3). Геометрия этой кривая в общем случае зависит от значения напряжения $\bar{\sigma}_{33}^0$ (см. (5.5)).

Случаи такого армирования и нагружения КМ часто встречаются в практических приложениях, например при осесимметричном деформировании волокнистых кольцевых пластин и круговых оболочек, армированных перекрестно-симметрично относительно радиального или меридионального направлений. Следовательно, построение кривых текучести для таких композиций является актуальной проблемой.

На рис. 5 изображены расчетные кривые текучести для ортотропного связующего материала в пространстве безразмерных напряжений $\sigma_{i*}^{(0)} = \sigma_i^{(0)} / y_{1-}^{(0)}$, совпадающих по направлению с осями анизотропии $Ox_i^{(0)}$ ($i = 1, 2$). При этом в (2.8) принято

$$\begin{aligned} y_{1+}^{(0)} &= 1,35y_{1-}^{(0)}, \quad y_{2+}^{(0)} = 1,2y_{1-}^{(0)}, \quad y_{2-}^{(0)} = 1,1y_{1-}^{(0)}, \quad y_{3+}^{(0)} = 1,25y_{1-}^{(0)} \\ y_{3-}^{(0)} &= 1,15y_{1-}^{(0)}, \quad y_{12}^{(0)} = \sqrt{y_{1+}^{(0)}y_{2-}^{(0)} / A^{(0)}}, \quad y_{i3}^{(0)} = \sqrt{y_{i+}^{(0)}y_{3-}^{(0)} / 3}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где $A^{(0)}$ – некоторые числа (см. ниже). Соотношения значений пределов текучести, указанных в (6.1), ориентировочно соответствуют магниевому сплаву МА2 [44].

Кривая 1 на рис. 5 рассчитана при значении $A^{(0)} = 3$ (см. (6.1)), кривая 2 – при $A^{(0)} = 3,5$, а кривая 3 – при $A^{(0)} = 2,5$. Эти кривые соответствуют ПНС ($\sigma_{33}^0 = 0$).

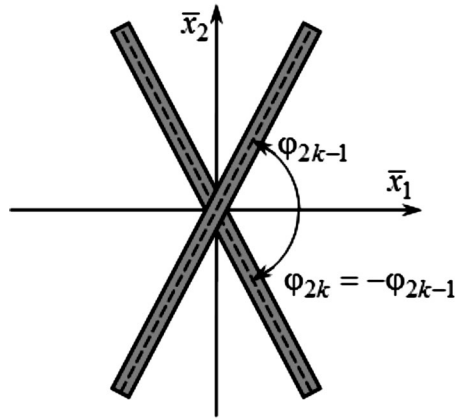


Рис. 4. Волокна двух семейств, плоско-симметрично уложенных относительно направлений главных напряжений в композиции при ПНС.

Кривые $1'$, $2'$ и $3'$ получены при тех же значениях $A^{(0)}$, что и кривые 1 , 2 и 3 соответственно, но при обжатии материала в направлении $O\bar{x}_3$, а именно при $\sigma_{33}^0 = -0,5y_{3-}^{(0)}$. Все кривые на рис. 5 представляют собой эллипсы. Сравнение кривых 1 , 2 и 3 или $1'$, $2'$ и $3'$ позволяет проследить за качественным и количественным изменением кривой текучести ортотропного материала, по разному сопротивляющегося растяжению и сжатию, при варьировании значения характеристики пластичности $y_{12}^{(0)}$ в случаях отсутствия ($\sigma_{33}^0 = 0$) или наличия ($\sigma_{33}^0 < 0$) обжатия. Поведение кривых на рис. 5 свидетельствует о том, что как варьирование параметра $y_{12}^{(0)}$, так и наличие обжатия материала существенно сказываются на форме и размерах кривой текучести в пространстве главных напряжений $\sigma_1^{(0)}$ и $\sigma_2^{(0)}$.

На рис. 6 и 7 изображены расчетные кривые текучести для композитных сред, состоящих из ортотропного связующего материала с характеристиками пластичности (6.1), армированного двумя ($K = 2$) семействами волокон с относительными параметрами пластичности:

$$\begin{aligned} y_{1+}^{(k)} &= 15,5y_{1-}^{(0)}, \quad y_{1-}^{(k)} = 13,5y_{1-}^{(0)}, \quad y_{i+}^{(k)} = 14,5y_{1-}^{(0)}, \quad y_{i-}^{(k)} = 14y_{1-}^{(0)}, \\ y_{12}^{(k)} &= \sqrt{y_{1+}^{(k)}y_{2-}^{(k)} / A^{(k)}}, \quad y_{i3}^{(k)} = \sqrt{y_{i+}^{(k)}y_{3-}^{(k)} / 3}, \quad \tau_{12}^{(k)} = \sqrt{y_{1+}^{(k)}y_{2-}^{(k)} / B^{(k)}}, \\ \tau_{i3}^{(k)} &= \sqrt{y_{i+}^{(k)}y_{3-}^{(k)} / 3}, \quad i = 2, 3, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $A^{(k)}$, $B^{(k)}$ — некоторые числа (см. ниже); $y_{1-}^{(0)}$ имеет тот же смысл, что и в (6.1). Соотношения значений пределов текучести, указанных в (6.2), ориентировочно соответствуют монотропной стальной проволоке [21, 44], главная ось анизотропии в которой совпадает с продольным направлением.

Были рассмотрены два вида армирования композитов с одинаковым расходом арматуры:

1. Плоское ортогональное армирование вдоль направлений главных напряжений в композиции: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$ и $\omega_1 = \omega_2 = 0,2$ (рис. 6).

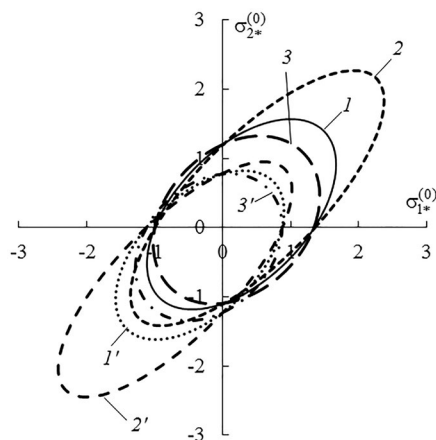


Рис. 5. Кривые текучести ортотропного связующего материала, соответствующие разным значениям характеристики пластичности $y_{12}^{(0)}$ и разным напряжениям обжатия $\bar{\sigma}_{33}^0$.

2. Плоско-перекрестное симметричное армирование (см. рис. 4 при $k = 1$): $\varphi_1 = -\varphi_2 = \pi/4$, $\omega_1 = \omega_2 = 0,2$ (рис. 7).

Структура 2 также является ортогональной и получена из структуры 1 поворотом вокруг оси $O\bar{x}_3$ на угол $\pi/4$.

Рис. 6,а и 7,а соответствуют случаям ПНС ($\sigma_{33}^0 = 0$); рис. 6,б и 7,б – случаям обжатия композиции в направлении оси $O\bar{x}_3$ ($\sigma_{33}^0 = -0,9y_{3-}^{(0)}$); рис. 6,с и 7,с случаям растяжения композиции в направлении $O\bar{x}_3$ ($\sigma_{33}^0 = 0,9y_{3-}^{(0)}$). Кривые текучести на этих рисунках изображены в безразмерных усредненных напряжениях $\bar{\sigma}_i^* = \bar{\sigma}_i / y_{1-}^{(0)}$ ($i = 1,2$).

В работе [13] была разработана структурная модель расчета кривых и поверхностей текучести плоско-перекрестно и пространственно армированных сред, состоящих из изотропных материалов композиции, которые имеют разные пределы текучести при растяжении и сжатии. Одним из критериев текучести таких изотропных материалов является критерий текучести Баландина [12, 13, 43]. Если в соотношениях (6.1) и (6.2) принять $A^{(0)} = A^{(k)} = B^{(k)} = 3$ ($k = 1,2$) и предположить, что $y_{i+}^{(0)} = y_{1+}^{(0)}$ и $y_{i-}^{(0)} = y_{1-}^{(0)}$ ($i = 2,3, k = 0,1,2$), то получим значения характеристики пластичности компонентов композиции, соответствующие критерию текучести Баландина. Предварительные расчеты, выполненные по формулам настоящего исследования и по формулам работы [13] для таких материалов композиции, привели к полному совпадению кривых текучести (они здесь не изображены) для обеих рассматриваемых структур армирования. Этот результат подтверждает корректность использованных в данном исследовании исходных допущений и разработанного математического аппарата.

Кривые 1 на рис. 6 и 7 получены при параметрах пластичности компонентов композиции (6.1), (6.2) и значениях $A^{(0)} = A^{(k)} = B^{(k)} = 3$; кривые 2 – при $A^{(0)} = 3,8$ и $A^{(k)} = B^{(k)} = 3$; кривые 3 – при $A^{(0)} = 0,1$ и $A^{(k)} = B^{(k)} = 3$; кривые 4 – при $A^{(k)} = 0,1$ и $A^{(0)} = B^{(k)} = 3$; кривые 5 – при $A^{(k)} = 10$ и $A^{(0)} = B^{(k)} = 3$; кривые 6 – при $A^{(0)} = A^{(k)} = 3$, $B^{(k)} = 400$ (рис. 7,а и 7,б) и $B^{(k)} = 283$ (рис. 7,с), $k = 1,2$. Кривые 5 на рис. 6 визуально практически не отличаются от кривых 1. Так как на рис. 6 изображены кривые текучести для

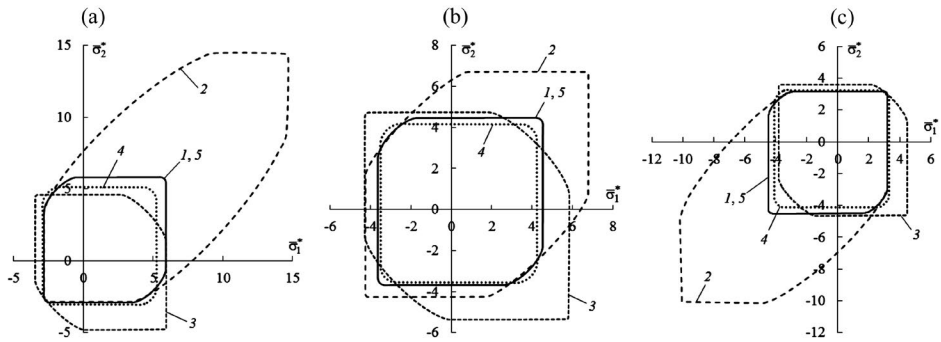


Рис. 6. Кривые текучести при ортогональном армировании вдоль направлений главных напряжений в композиции при $\bar{\sigma}_{33}^0 = 0$ (а), $\bar{\sigma}_{33}^0 = -0,9y_{3-}^{(0)}$ (б) и $\bar{\sigma}_{33}^0 = 0,9y_{3-}^{(0)}$ (с).

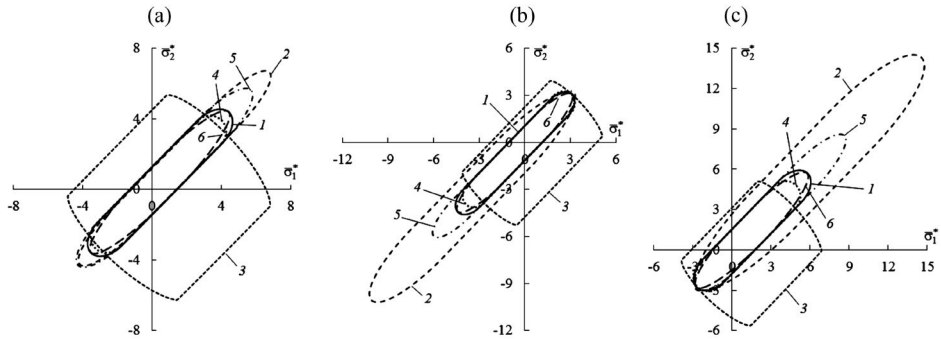


Рис. 7. Кривые текучести при ортогональном угловом армировании, симметричном относительно направлений главных напряжений в композиции ($\varphi_1 = -\varphi_2 = \pi/4$), и при $\bar{\sigma}_{33}^0 = 0$ (а), $\bar{\sigma}_{33}^0 = -0,9y_{3-}^{(0)}$ (б) и $\bar{\sigma}_{33}^0 = 0,9y_{3-}^{(0)}$ (с).

композиции со структурой армирования 1, в которой направления армирования совпадают с направлениями главных напряжений, то касательные напряжения в арматуре отсутствуют ($\sigma_{12}^{(k)} = 0$, $k = 1, 2$). Поэтому кривые 6 на рис. 6 не изображены, так как они полностью совпадают с кривыми 1. (При структуре армирования 1 кривые текучести композиции не зависят от значений параметров пластичности $\tau_{12}^{(k)} = 0$, $k = 1, 2$.)

Сравнение кривых 1–3 на рис. 6 и 7 позволяет проследить за изменением кривых текучести композиций 1 и 2 при варьировании параметра пластичности связующего материала $y_{12}^{(0)}$ (см. (6.1)). Как видно, это влияние значительно даже при относительно малом изменении величины $A^{(0)}$ (от $A^{(0)} = 3$ для кривых 1 до $A^{(0)} = 3,8$ для кривых 2). Сопоставление же кривых 1, 4 и 5 демонстрирует влияние аналогичного параметра пластичности арматуры $y_{12}^{(k)}$, $k = 1, 2$ (см. (6.2)) на форму и размеры кривых текучести композиции. Из рис. 7 видно, что в случае структуры 2, когда в арматуре может иметь место значительное сдвиговое

деформирование, влияние этого параметра пластичности на кривую текучести композиции также значительно. Сравнение кривых I и b на рис. 7 показывает, что влияние параметра пластичности арматуры $\tau_{12}^{(k)}$ не столь существенно, как влияние параметра $y_{12}^{(k)}$ ($k = 1, 2$). Так, заметное различие между кривыми I и b на рис. 7 наблюдается только при больших значениях $B^{(k)}$ ($B^{(k)} = 400$ для кривых b на рис. 7,а, 7,б и $B^{(k)} = 283$ для кривой b на рис. 7,с), т.е. при малых значениях параметров $\tau_{12}^{(k)}$, $k = 1, 2$ (см. (6.2)). Объясняется это тем, что существенное влияние параметров пластичности арматуры $\tau_{12}^{(k)}$ на форму и размеры кривой (поверхности) текучести композиции может проявляться только тогда, когда эти характеристики арматуры существенно меньше, чем параметры пластичности связующего материала при сдвиге (например, $y_{12}^{(0)}$), т.е. при достаточно малых значениях $\tau_{12}^{(k)}$ или, что то же самое, при больших значениях $B^{(k)}$, $k = 1, 2$ (см. (6.2)).

Если в рамках МОНСВ при ПНС ($\sigma_{33}^0 = 0$) можно как-то учесть анизотропию связующего материала (учет такой анизотропии при использовании кусочно-линейного условия текучести типа критерия Ху сделан в [46]), то учесть анизотропию арматуры при этом вообще нельзя. Следовательно, при использовании МОНСВ нельзя проследить за изменением кривых текучести композиции, аналогичным изменению кривых I , 4–6 на рис. 6 и 7.

Кривые текучести с одинаковыми номерами на соответствующих рис. 6,а–с и 7,а–с существенно различаются. Следовательно, поворот направлений армирования на угол $\pi/4$ вокруг оси $O\bar{x}_3$ приводит к существенному изменению кривых текучести рассматриваемой композиции. Поэтому ортогональные структуры с одинаковыми плотностями армирования в обоих направлениях при жесткопластическом анализе нельзя рассматривать как квазиизотропные структуры. Результаты, полученные ранее в [12, 13], показывают, что этот вывод справедлив и в случаях, когда материалы компонентов композиции изотропны.

Сравнение кривых с одинаковыми номерами рис. 6,а, 6,б и 6,с соответственно или на рис. 7,а, 7,б и 7,с соответственно показывает, что кроме структуры армирования (φ_k, ω_k) на расчетные кривые текучести композиции значительное влияние оказывает и напряжение $\bar{\sigma}_{33}^0$, действующее в направлении, ортогональном плоскости армирования рассматриваемых структур. При этом может происходить “вырождение” кривых текучести композиции при определенных значениях $\bar{\sigma}_{33}^0$. Так, кривые b на рис. 7,а ($\bar{\sigma}_{33}^0 = 0$) и 7,б ($\bar{\sigma}_{33}^0 = -0,9y_{3-}^{(0)}$) получены при значениях $B^{(k)} = 400$. Однако в случае растяжения композиции в направлении оси $O\bar{x}_3$ оказалось, что при $\bar{\sigma}_{33}^0 = 0,9y_{3-}^{(0)}$ (рис. 7,с) кривая текучести композиции при $B^{(k)} = 400$ не существует. Более того, расчеты показали, что кривая текучести КМ при таком его нагружении в направлении $O\bar{x}_3$ не существует при $B^{(k)} \geq 284$, поэтому на рис. 7,с кривая b изображена для случая $B^{(k)} = 283$, а не для $B^{(k)} = 400$ ($k = 1, 2$).

Таким образом, для расчета поверхностей и кривых текучести плоско-перекрестно и пространственно армированных сред из анизотропных жесткопластических материалов, имеющих разные пределы текучести при растяжении и сжатии, необходимо использовать структурную теорию, разработанную в настоящем исследовании.

Дополнительно проведенные численные расчеты, выполненные по формулам (57)–(63) из [13], показали, что ассоциированный закон течения (при учете выражений (4.12)–(4.14) данной работы) для всех кривых, изображенных

на рис. 6 и 7, выполняется с точностью порядка h_ϕ^2 , где h_ϕ – шаг по параметру ϕ в соотношениях (5.15). Такой порядок точности определяется тем, что, как и в [13], для численного дифференцирования по ϕ зависимостей $\bar{\sigma}_1(\bar{\sigma}_{33}^0, \phi)$ и $\bar{\sigma}_2(\bar{\sigma}_{33}^0, \phi)$ (см. формулы (58) в [13]) использовались конечные разности [47] на трехточечном шаблоне $\{\phi_{i-1}, \phi_i, \phi_{i+1}\}$, где $\phi_{i+1} = \phi_i + h_\phi$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) – дискретные значения параметра ϕ . Эти результаты позволяют считать, что в рамках разработанной структурной модели КМ ассоциированный закон течения для композиции, вообще говоря, выполняется. А значит, для такой армированной среды, как и для каждого компонента композиции, выполняется постулат Друккера [41, 42, 44]. Что является подтверждением непротиворечивости использованных в настоящем исследовании исходных предпосылок.

Замечание 1. Повторяя рассуждения из раздела 4 в [39], на основе разработанного в настоящем исследовании структурного подхода можно рассчитать поверхности и кривые текучести армированных сред при учете трехмерного напряженного состояния во всех компонентах в случае неидеальной адгезии между связующим и волокнами (т.е. отказавшись от выполнения допущения 2).

Замечание 2. В предположении 5 принято, что пластическое течение в компонентах композиции определяется квадратичными функциями текучести $f_k(\sigma_{ij}^{(k)})$ ($0 \leq k \leq K, i, j = 1, 3$). Однако известно, что для адекватного описания пластического течения в некоторых материалах целесообразно использовать более сложные функции текучести f_k [29], например в виде полиномов от $\sigma_{ij}^{(k)}$ четвертого порядка [37]. Структурная модель расчета поверхности текучести армированной среды, разработанная в настоящем исследовании, может быть распространена и на случаи, когда функции f_k имеют более сложную зависимость от напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$ ($0 \leq k \leq K$), чем в (2.4). Тогда после подстановки выражений (3.9) в условие текучести $f_k(\sigma_{ij}^{(k)}) = 0$ вместо квадратного уравнения (3.10) получим более сложное уравнение относительно $\sigma_{11}^{(k)}$ ($1 \leq k \leq K$), которое, как и (3.10), может иметь неединственное решение. Аналогично, для связующего материала вместо квадратного уравнения (3.2) получим более сложное уравнение для определения зависимости $r_0(\theta, \phi)$, которое также может иметь неединственное решение. Основная трудность при этом заключается в разработке алгоритмов обоснованного выбора единственных решений этих уравнений, не противоречащих механическим аспектам рассматриваемой проблемы. Эти решения особенно сложно выбирать в случаях, когда функции f_k являются кусочно-гладкими или даже кусочно-линейными и кусочно-квадратичными [29], несмотря на то, что сами функции f_k имеют простое аналитическое выражение.

7. Заключение. Разработана структурная модель, позволяющая рассчитывать условия текучести для гибридных жесткопластических КМ, перекрестно армированных в произвольных направлениях как в плоскости, так и в пространстве при учете трехмерного напряженного состояния во всех компонентах. Пластическое течение в анизотропных фазах композиции описывается квадратичным критерием. Учтена разносопротивляемость материалов растяжению и сжатию. Пределы текучести материалов компонентов на растяжение могут быть как больше, так и меньше пределов текучести на сжатие. Перед процедурой усреднения напряжения в компонентах представлены в параметрическом виде. На частных примерах проверено выполнение ассоциированного закона пластического

течения для расчетных поверхностей текучести композиции, что позволяет переносить все известные теоремы о предельном состоянии жесткопластических тел и разработанные методы решения соответствующих краевых задач на элементы конструкций, изготовленные из армированных материалов. В качестве модельного примера расчетные кривые текучести построены для композиции, состоящей из ортотропного связующего, ортогонально армированного двумя семействами моноотропных волокон, имеющих разные пределы текучести при растяжении и сжатии. Показано, что как изменение структуры армирования, так и изменение параметров анизотропии компонентов композиции (при фиксированных значениях пределов текучести при растяжении и сжатии) приводят к существенному изменению формы и размеров кривых (поверхностей) текучести КМ. Обнаружено, что анизотропия связующего материала в значительно большей степени влияет на геометрию кривых и поверхностей текучести композиции, чем анизотропия армирующих волокон. Количество структурных параметров разработанной математической модели позволяет в широком диапазоне учитывать изменения структуры армирования КМ (направления и объемного содержания армирующих волокон) и характеристики пластического течения компонентов композиции. Показано, что при наличии сильно выраженной анизотропии армирующих волокон широко используемая до настоящего времени МОНСВ вообще не пригодна для проведения адекватных расчетов кривых и поверхностей текучести волокнистых композиций. В этих случаях необходимо использовать структурную теорию механики композитов, разработанную в настоящем исследовании.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030900260-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник / Ю.М. Тарнопольский, И.Г. Жигун, В.А. Поляков. М.: Машиностроение. 1987. 224 с.
2. Mohamed M.H., Bogdanovich A.E., Dickinson L.C., Singletary J.N., Lienhart R.R. A new generation of 3D woven fabric performs and composites // *SAMPE J.* 2001. V. 37, № 3. P. 3–17.
3. Композиционные материалы: Справочник / В.В. Васильев и др. Под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. М.: Машиностроение. 1990. 512 с.
4. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
5. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андришин В.А. Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: Физматлит, 2014. 408 с.
6. Mao-hong Yu. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century // *ASME. Appl. Mech. Rev.* 2002. V. 55, № 3. P. 169–200. <https://doi.org/10.1115/1.1472455>
7. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // *Compos. Struct.* 2010. V. 93, № 1. P. 14–31. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>
8. Morinière F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review // *Int. J. Impact Eng.* 2014. V. 67. P. 27–38. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004>
9. He G., Liu Y., Hammi Y., Bammann D.J., Horstemeyer M.F. A combined viscoelasticity-viscoplasticity-anisotropic damage model with evolving internal state variables applied to fiber reinforced polymer composites // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2021. V. 28. № 17. P. 1775–1796. <https://doi.org/10.1080/15376494.2019.1709673>

10. Yonezu A., Yoneda K., Hirakata H., Sakihara M., Minoshima K. A simple method to evaluate anisotropic plastic properties based on dimensionless function of single spherical indentation – Application to SiC whisker-reinforced aluminum alloy // *Mater. Sci. Eng. A*. 2010. V. 527. № 29–30. P. 7646–7657. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2010.08.014>
11. Романова Т.П., Янковский А.П. Построение кривых текучести для армированных пластин из жесткопластических разнородных материалов при учете двумерного напряженного состояния в волокнах. I. Однонаправленное армирование // *Механика композитных материалов*. 2019. Т. 55, № 6. С. 1019–1042. <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09845-x>
12. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Structural model for rigid-plastic yielding behavior of angle-ply reinforced composites of materials with different properties in tension and compression considering 2D stress state in all components // *Mech. Adv. Mat. Struct.* 2021. V. 28. № 20. P. 2151–2162. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1719561>
13. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Structural model for spatially and flatly reinforced medium of rigid-plastic materials considering three-dimensional stress state in all components // *Mech. Adv. Mat. Struct.* 2022. V. 29. № 18. P. 2668–2679. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1873468>
14. Nemirovsky Yu.V., Resnikov B.S. On limit equilibrium of reinforced slabs and effectiveness of their reinforcement // *Arch. Inż. Łąd.* 1975. V. 21. № 1. P. 57–67.
15. Mróz Z., Shamiev F.G. Simplified yield condition for fiber-reinforced plates and shells // *Arch. Inż. Łąd.* 1979. V. 25. № 3. P. 463–476.
16. Ильясов М.Х., Джахангиров А.А. Гиперповерхности текучести трехслойной композитной оболочки, средний слой которой армирован волокнами // *Механика композитных материалов*. 2014. Т. 50. № 3. С. 487–500.
17. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Влияние структуры армирования на предельную нагрузку металлокомпозитных оболочек вращения // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: механика предельного состояния*. 2008. № 1 (4). С. 108–116.
18. Кубишев И.Н. Предельная нагрузка для композитной кольцевой пластинки с разными условиями закрепления // *Механика машин, механизмов и материалов*. 2011. № 1 (14). С. 56–60.
19. Джахангиров А.А. Несущая способность трехслойной волокнистой композитной кольцевой пластины, защемленной по кромкам // *Механика композитных материалов*. 2016. Т. 52. № 2. С. 385–398. <https://doi.org/10.1007/s11029-016-9579-y>
20. Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. Кн. 1 / Под ред. Дж. Любина. М.: Машиностроение, 1988. 448 с.
21. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д.М. Карпинос. Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
22. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. Изд. 3-е. М.: ЛЕНАНД, 2019. 752 с.
23. Panich S., Uthaisangsuk V., Suranuntchai S., Jirathearanat S. Investigation of anisotropic plastic deformation of advanced high strength steel // *Mat. Sci. Eng. A*. 2014. V. 592. P. 207–220. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2013.11.010>
24. Yoon J.W., Lou Y., Yoon J., Glazoff M.V. Asymmetric yield function based on the stress invariants for pressure sensitive metals // *Int. J. Plast.* 2014. V. 56. P. 184–202. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2013.11.008>
25. Chow C.L., Jie M. Anisotropic damage-coupled sheet metal forming limit analysis // *Int. J. Damage Mech.* 2009. V. 18. № 4. P. 371–392. <https://doi.org/10.1177/1056789508097548>
26. Rabahallaha M., Bouvier S., Balan T., Bacroix B. Numerical simulation of sheet metal forming using anisotropic strain-rate potentials // *Mat. Sci. Eng. A*. 2009. V. 517. № 1–2. P. 261–275. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2009.03.078>
27. Hu W. An orthotropic yield criterion in a 3-D general stress state // *Int. J. Plast.* 2005. V. 21. № 9. P. 1771–1796. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2004.11.004>
28. Safaei M., Lee M.-G., Zang Sh.-I., Waele W.D. An evolutionary anisotropic model for sheet metals based on non-associated flow rule approach // *Comput. Mater. Sci.* 2014. V. 81. P. 15–29. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2013.05.035>

29. *Lee E.-H., Stoughton T.B., Yoon J.W.* A yield criterion through coupling of quadratic and non-quadratic functions for anisotropic hardening with non-associated flow rule // *Int. J. Plast.* 2017. V. 99. P. 120–143. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2017.08.007>
30. *Lou Y., Huh H., Yoon J.W.* Consideration of strength differential effect in sheet metals with symmetric yield functions // *Int. J. Mech. Sci.* 2013. V. 66. P. 214–223. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.11.010>
31. *Moayyedyan F., Kadkhodayan M.* Non-linear influence of hydrostatic pressure on the yielding of asymmetric anisotropic sheet metals // *Math. Mech. Solids*. 2016. V. 23. № 2. P. 1–22. <https://doi.org/10.1177/1081286516675662>
32. *Aravas N., Papadioti I.* A non-local plasticity model for porous metals with deformation-induced anisotropy: Mathematical and computational issues // *J. Mech. Phys. Solids*. 2021. V. 146. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.104190>
33. *Nizolek T.J., Pollock T.M., McMeeking R.M.* Kink band and shear band localization in anisotropic perfectly plastic solids // *J. Mech. Phys. Solids*. 2021. V. 146. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.104183>
34. *Rajhi W., Saanouni K., Sidhom H.* Anisotropic ductile damage fully coupled with anisotropic plastic flow: Modeling, experimental validation, and application to metal forming simulation // *Int. J. Damage Mech.* 2014. V. 23, № 8. P. 1211–1256. <https://doi.org/10.1177/1056789514524076>
35. *Кристensen П.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
36. *Ванин Г.А.* Микромеханика композитных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 304 с.
37. *Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.* Сопrotивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572 с.
38. *Gibson R.F.* Principles of composite material mechanics / 4th ed. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2015. 815 p.
39. *Романова Т.П., Янковский А.П.* Построение кривых текучести для жесткопластических армированных пластин при учете двумерного напряженного состояния в волокнах // *Механика композитных материалов*. 2018. Т. 54. № 6. С. 1013–1044. <https://doi.org/10.1007/s11029-019-9777-5>
40. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
41. *Иванов К.М., Нестеров Н.М., Усманов Д.Б., Иванов В.Н., Бунина Н.А.* Прикладная теория пластичности: учебное пособие. СПб.: Политехника, 2009. 375 с.
42. *Chakrabarty J.* Applied plasticity. 2nd ed. New York: Springer, 2010. 755 p.
43. *Баладин П.П.* К вопросу о гипотезах прочности // *Вестник инженеров и техников*. 1937. № 1. С. 19–24.
44. *Ильюшин А.А.* Труды (1946–1966). Т. 2. Пластичность / Составители Е.А. Ильюшина, М.Р. Короткина. М.: Физматлит, 2004. 480 с.
45. *Romanova T.P., Yankovskii A.P.* Mathematical modeling the rigid-plastic yielding behavior of fibrous flatly-reinforced composites of anisotropic materials at 2D stress state // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2023. V. 30. № 8. <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2041774>
46. *Romanova T.P., Yankovskii A.P.* Load-bearing capacity of rigid-plastic reinforced shallow shells and plates // *Mech. Adv. Mat. a Struct.* 2022. V. 29. № 26. P. 5651–5665. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1961952>
47. *Samarskii A.A.* The theory of difference schemes. N.Y.: Marcel Dekker Inc., 2001. 761 p.

STRUCTURAL MODEL OF SPATIALLY AND PLANE REINFORCED MEDIUM FROM RIGID-PLASTIC ANISOTROPIC MATERIALS WITH DIFFERENT YIELD LIMITS UNDER TENSION AND COMPRESSION

A. P. Yankovsky^{a,*}

^a *Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, 630090 Russia*

**e-mail: lab4nemir@rambler.ru*

Received 21.03.2023

Revised 20.05.2023

Accepted 23.05.2023

Abstract – Structural models for three-dimensional fiber-reinforced hybrid composite media and for particular two-dimensional problems have been developed. Using these models, one can calculate the surfaces and yield curves of the composition. The three-dimensional stress state in all components is taken into account. The materials of the composition components are homogeneous and anisotropic, their mechanical behavior is described by the associated flow law for a rigid-plastic body with general quadratic yield conditions. Components have different resistance to tension and compression. To perform constructions, stresses in components are presented in parametric form. The yield curves are calculated for a model in-plane reinforced composition of orthotropic phase materials. The influence of the direction of reinforcement, transverse normal stress and anisotropy parameters of the composition components on the shape and dimensions of the yield curves of the composite material under consideration has been studied. It has been shown that the anisotropy of the binder has a greater effect on the shape and dimensions of the yield surface of the composition than the anisotropy of the reinforcing fibers. It has been demonstrated that plastic flow in a reinforced medium is associated with the calculated yield curves (surfaces) of the composition. It is shown that in the presence of strongly pronounced anisotropy in the reinforcement, a structural model with a one-dimensional stress state in the fibers does not allow adequate calculation of the yield curves and surfaces of the composite medium.

Keywords: structural model of a composite, fibrous medium, three-dimensional stress state, spatial reinforcement, plane reinforcement, multi-directional reinforcement, hybrid composite, rigid plastic material, anisotropy of composition components, different resistance to tension and compression, quadratic yield criterion

REFERENCES

1. *Spatially Reinforced Composite Materials: Handbook*, Ed. by Yu. M. Tarnopol'skii, I. G. Zhigun, and V. A. Polyakov, (Mashinostroenie, Moscow, 1987) [in Russian].
2. M. H. Mohamed, A. E. Bogdanovich, L. C. Dickinson, et al., "A new generation of 3D woven fabric performs and composites," *SAMPE J.* **37** (3), 3–17 (2001).
3. V. V. Vasiliev, V. D. Protasov, V. V. Bolotin, et al., *Composite Materials, Reference book*, Ed. by V.V. Vasiliev and Yu. M. Tarnopol'skii (Mashinostroenie, Moscow, 1990) [in Russian].
4. N. A. Abrosimov and V.G. Bazhenov, *Nonlinear Problems of Dynamics Composites Designs* (Nizhnii Novgorod State Univ., Nizhnii Novgorod, 2002) [in Russian].
5. Yu. S. Solomonov, V. P. Georgievskii, A. Ya. Nedbay, and V. A. Andryushin, *Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells* (Fizmatlit, Moscow, 2014) [in Russian].

6. Yu. Mao-Hong, "Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century," ASME. Appl. Mech. Rev. **55** (3), 169–200 (2002). <https://doi.org/10.1115/1.1472455>
7. M. S. Qatu, R. W. Sullivan, and W. Wang, "Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009," Compos. Struct. **93** (1), 14–31 (2010). <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>
8. F. D. Morinière, R. C. Alderliesten, and R. Benedictus, "Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review," Int. J. Impact Eng. **67**, 27–38 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004>
9. G. He, Y. Liu, Y. Hammi, et al., "A combined viscoelasticity-viscoplasticity-anisotropic damage model with evolving internal state variables applied to fiber reinforced polymer composites," Mech. Adv. Mater. Struct. **28** (17), 1775–1796 (2021). <https://doi.org/10.1080/15376494.2019.1709673>
10. A. Yonezu, K. Yoneda, H. Hirakata, et al., "A simple method to evaluate anisotropic plastic properties based on dimensionless function of single spherical indentation – Application to SiC whisker-reinforced aluminum alloy," Mater. Sci. Eng. A **527** (29–30), 7646–7657 (2010). <https://doi.org/10.1016/j.msea.2010.08.014>
11. T. P. Romanova and A. P. Yankovskii, "Yield loci of reinforced plates made from rigid-plastic unequiresistant materials considering the two-dimensional stress state in fibers I. Unidirectional reinforcement," Mech. Compos. Mater. **55**, 699–714 (2020). <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09845-x>
12. T. P. Romanova and A. P. Yankovskii, "Structural model for rigid-plastic yielding behavior of angle-ply reinforced composites of materials with different properties in tension and compression considering 2D stress state in all components," Mech. Adv. Mat. Struct. **28** (20), 2151–2162 (2021). <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1719561>
13. T. P. Romanova and A. P. Yankovskii, "Structural model for spatially and flatly reinforced medium of rigid-plastic materials considering three-dimensional stress state in all components," Mech. Adv. Mat. Struct. **29** (18), 2668–2679 (2022). <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1873468>
14. Yu. V. Nemirovsky and B. S. Resnikov, "On limit equilibrium of reinforced slabs and effectiveness of their reinforcement," Arch. Inż. Łąd. **21** (1), 57–67 (1975).
15. Z. Mróz and F. G. Shamiev, "Simplified yield condition for fiber-reinforced plates and shells," Arch. Inż. Łąd. **25** (3), 463–476 (1979).
16. M. H. Ilyasov and A. A. Jahangirov, "Yield hypersurfaces of a three-layer composite shell with a fiber-reinforced middle layer," Mech. Compos. Mater. **50**, 343–352 (2014). <https://doi.org/10.1007/s11029-014-9420-4>
17. Yu. V. Nemirovskii and A. P. Yankovskii, "Influence of the structure of reinforcement on the ultimate load for metal-composite shells of revolution," Vestn. Cuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I. Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost., No. 1 (4), 108–116 (2008).
18. I. N. Kubishev, "Load limit for EB in composite ring plates with different conditions of consolidation," Mekh. Mashin Mekhan. Mater., No. 1(14), 56–60 (2011).
19. A. A. Jahangirov, "Load-carrying capacity of a fiber-reinforced annular tree-layer composite plate clamped on its external and internal contours," Mech. Compos. Mater. **52**, 271–280 (2016). <https://doi.org/10.1007/s11029-016-9579-y>
20. *Handbook of Composites*, Ed. by G. Lubin (Van Nostrand Reinhold, New York, 1982; Mashinostroenie, Moscow, 1988).
21. *Composite Material. Handbook*, Ed. by D. M. Karpinos (Naukova Dumka, Kiev, 1985) [in Russian].
22. Yu. N. Rabotnov, *Creep of Structural Elements*, 3rd ed. (LENAND, Moscow, 2019) [in Russian].
23. S. Panich, V. Uthaisangsuk, S. Suranuntchai, and S. Jirathearanat, "Investigation of anisotropic plastic deformation of advanced high strength steel," Mat. Sci. Eng. A **592**, 207–220 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.msea.2013.11.010>
24. J. W. Yoon, Y. Lou, J. Yoon, and M. V. Glazoff, "Asymmetric yield function based on the stress invariants for pressure sensitive metals," Int. J. Plast. **56**, 184–202 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2013.11.008>

25. C. L. Chow and M. Jie, "Anisotropic damage-coupled sheet metal forming limit analysis," *Int. J. Damage Mech.* **18** (4), 371–392 (2009). <https://doi.org/10.1177/1056789508097548>
26. M. Rabahallah, S. Bouvier, T. Balan, and B. Bacroix, "Numerical simulation of sheet metal forming using anisotropic strain-rate potentials," *Mat. Sci. Eng. A* **517** (1–2), 261–275 (2009). <https://doi.org/10.1016/j.msea.2009.03.078>
27. W. Hu, "An orthotropic yield criterion in a 3-D general stress state," *Int. J. Plast.* **21** (9), 1771–1796 (2005). <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2004.11.004>
28. M. Safaei, M.-G. Lee, Sh.-I. Zang, and W. D. Waele, "An evolutionary anisotropic model for sheet metals based on non-associated flow rule approach," *Comput. Mater. Sci.* **81**, 15–29 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2013.05.035>
29. E.-H. Lee, T. B. Stoughton, and J. W. Yoon, "A yield criterion through coupling of quadratic and non-quadratic functions for anisotropic hardening with non-associated flow rule," *Int. J. Plast.* **99**, 120–143 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2017.08.007>
30. Y. Lou, H. Huh, and J. W. Yoon, "Consideration of strength differential effect in sheet metals with symmetric yield functions," *Int. J. Mech. Sci.* **66**, 214–223 (2013). <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.11.010>
31. F. Moayyedian and M. Kadkhodayan, "Non-linear influence of hydrostatic pressure on the yielding of asymmetric anisotropic sheet metals," *Math. Mech. Solids* **23** (2), 1–22 (2016). <https://doi.org/10.1177/1081286516675662>
32. N. Aravas and I. Papadioti, "A non-local plasticity model for porous metals with deformation-induced anisotropy: Mathematical and computational issues," *J. Mech. Phys. Solids* **146** (2021). <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.104190>
33. T. J. Nizolek, T. M. Pollock, and R. M. McMeeking, "Kink band and shear band localization in anisotropic perfectly plastic solids," *J. Mech. Phys. Solids* **146** (2021). <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.104183>
34. W. Rajhi, K. Saanouni, and H. Sidhom, "Anisotropic ductile damage fully coupled with anisotropic plastic flow: Modeling, experimental validation, and application to metal forming simulation," *Int. J. Damage Mech.* **23** (8), 1211–1256 (2014). <https://doi.org/10.1177/1056789514524076>
35. R. M. Christensen, *Mechanics of Composite Materials* (Wiley, New York, 1979; Mir, Moscow, 1982).
36. G. A. Vanin, *Micromechanics of Composite Materials* (Naukova Dumka, Kiev, 1985) [in Russian].
37. A. K. Malmeister, V.P. Tamuzh, and G.A. Teters, *Resistances of Polymeric and Composite Materials* (Zinatane, Riga, 1980) [in Russian].
38. R. F. Gibson, *Principles of Composite Material Mechanics*, 4rd ed. (CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2015).
39. T. P. Romanova and A. P. Yankovskii, "Constructing yield loci for rigid-plastic reinforced plates considering the 2D stress state in fibers," *Mech. Compos. Mater.* **54**, 697–718 (2019). <https://doi.org/10.1007/s11029-019-9777-5>
40. R. Hill, *Mathematical Theory of Plasticity* (Oxford Univ. Press, New York, 1950; Gostekhizdat, Moscow, 1956).
41. K. M. Ivanov, N. M. Nesterov, D. B. Usmanov, et al., *Applied Theory of Plasticity: Textbook* (Politekhnik, St. Petersburg, 2009) [in Russian].
42. J. Chakrabarty, *Applied Plasticity*, 2nd ed. (Springer, New York, 2010).
43. P. P. Balandin, "On the question of strength hypotheses," *Vestn. Inzh. Trkhnik.*, No. 1, 19–24 (1937).
44. A. A. Ilyushin, *Works (1946–1966)*, Vol. 2: *Plasticity* (Fizmatlit, Moscow, 2004) [in Russian].
45. T. P. Romanova and A. P. Yankovskii, "Mathematical modeling the rigid-plastic yielding behavior of fibrous flatly-reinforced composites of anisotropic materials at 2D stress state," *Mech. Adv. Mater. Struct.* **30** (8), 1692–1702 (2023). <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2041774>
46. T. P. Romanova and A. P. Yankovskii, "Load-bearing capacity of rigid-plastic reinforced shallow shells and plates," *Mech. Adv. Mat. Struct.* **29** (26), 5651–5665 (2022). <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1961952>
47. A. A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes* (Marcel Dekker Inc., New York, 2001).

УДК 53.043

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАДИАЦИОННОГО ОБЛУЧЕНИЯ НА РАЗМЕР ЗЕРЕН И МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТОНКОПЛЁНОЧНОГО АЛЮМИНИЯ

© 2024 г. Н. А. Дюжев^а, Е. Э. Гусев^{а,*}, Е. О. Портнова^а,
М. А. Махиборода^а

^аНациональный исследовательский университет “МИЭТ”, Россия, Москва,
Зеленоград

*e-mail: bubbledouble@mail.ru

Поступила в редакцию 30.05.2023 г.

После доработки 07.06.2023 г.

Принята к публикации 11.06.2023 г.

Впервые получена экспериментальная зависимость размера зерен и механических свойств материала тонкоплёночного алюминия от дозы коротковолнового излучения. Тонкая плёнка алюминия была сформирована на кремниевой подложке методом магнетронного напыления. Был выявлен эффект уменьшения механической прочности и двухосного модуля упругости при увеличении дозы радиационного облучения. Данный эффект объясняется уменьшением размера зерна и величины шероховатости на тонкоплёночной алюминиевой мембране. Для измеренного посредством микроскопа диапазона размера зерен алюминия используется обратное соотношение Холла—Петча. В ходе исследований было определено, что в процессе облучения увеличивается количество межзеренных границ и количества самих зерен, что ведет к возрастанию вероятности деформации.

Ключевые слова: механические свойства, размер зерен, тонкие плёнки, мембраны, механическая прочность, двухосный модуль упругости

DOI: 10.31857/S1026351924010084, EDN: WACXBG

Введение. В процессе перехода от макро- к микроразмерам меняются свойства материалов. Знание механических свойств материалов позволяет разработчику более точно рассчитать конструкцию устройства, определить возможный диапазон рабочих параметров при эксплуатации. Одним из базовых материалов в микроэлектронике является алюминий. Известен критерий радиационной стойкости интегральных схем, что крайне важно при использовании в космосе. В интегральных схемах с проектными нормами более 180 нм используется металлизация из алюминия. При торможении на корпусе электронного устройства электронов, протонов, космических

частиц возникают рентгеновское и гамма-излучение, тяжелые ионы. В подзатворном слое КМОП-структуры накапливается индуцированный излучением положительный заряд, что ведет к изменению рабочих характеристик транзисторов. Происходит смещение пороговых напряжений и увеличение токов утечки, изменяется время нарастания и спада фронтов и т.д. При этом старение интегральной схемы и степень разрушения зависят от суммарной дозы полученной радиации [1].

Также актуальность исследования подтверждается важностью радиационной стойкости материалов в рентгеновской литографии, в частности, при изготовлении масок-затворов, обеспечивающих в необходимый период времени прохождение излучения [2]. К материалу маски применяются жесткие требования. С одной стороны, материал маски должен поглощать излучение и обеспечивать механическую прочность для работы в атмосфере вакуума. С другой стороны, должен обладать достаточно упругими свойствами для обеспечения необходимой обратимой деформации.

Известно, что при нахождении в космосе на средней орбите (около 2000 км) в течение 1 года интегральная схема получает воздействие около 0.1 Мрад [3]. В данной работе максимум дозы облучения составлял 6 Мрад.

1. Технологический маршрут изготовления тонкопленочного алюминия. Тонкая монослойная пленка алюминия была осаждена магнетронным методом на кремниевую пластину диаметром 150 мм с кристаллографической ориентацией (100) и толщиной 675 ± 10 мкм. В результате сформировалась круглая мембрана на Si кристалле квадратной формы со стороной 6 мм. К преимуществам круглой мембраны можно отнести отсутствие концентраторов механических напряжений в углах структуры. Технологический маршрут изготовления структуры показан ниже. Особенностью технологического маршрута формирования мембран является выбор маски для защиты кремниевой поверхности. В процессе исследований было обнаружено, что слой фоторезиста толщиной единицы микрон стравливается раньше, чем происходит травление на глубину стандартной Si

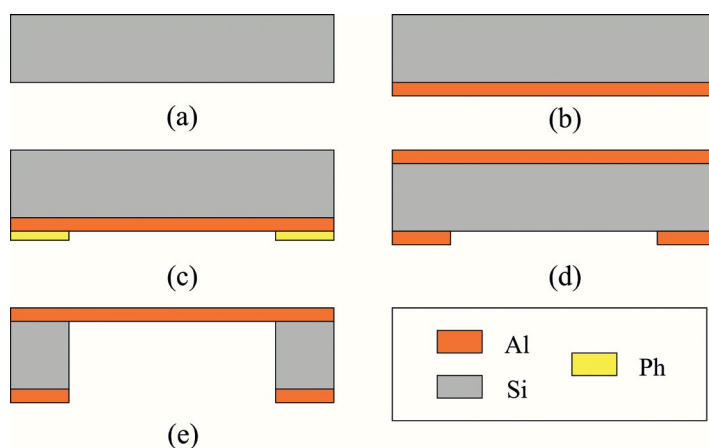


Рис. 1. Технологический маршрут.

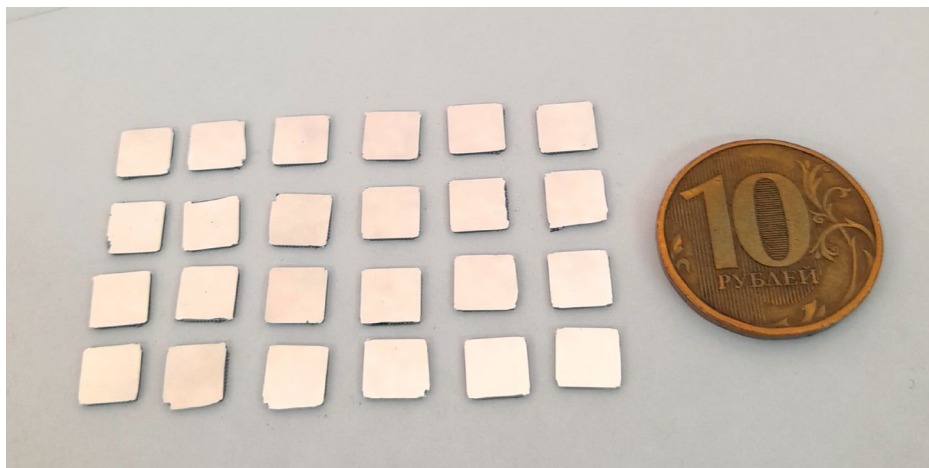


Рис. 2. Изображение изготовленных кристаллов.

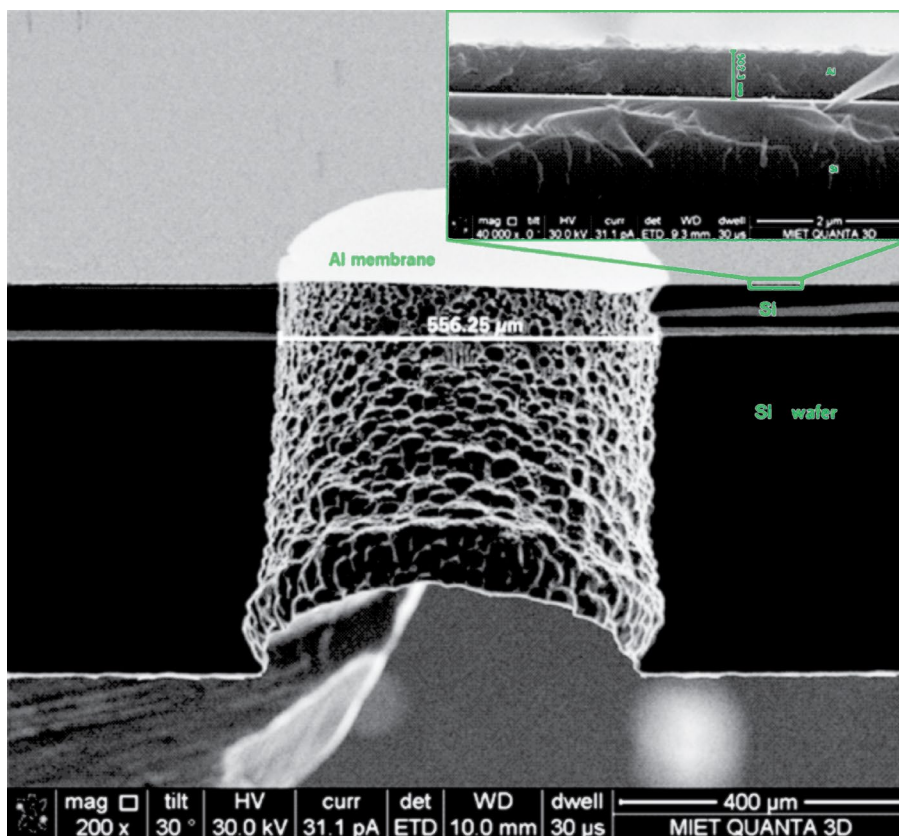


Рис. 3. Изображение мембраны на виде сбоку.

подложки толщиной 670 мкм. В результате значительно возрастает площадь травления и возникает эффект черного кремния. Для решения проблемы было решено стандартный слой фоторезиста заменить на слой алюминия. Алюминий обладает большей селективностью к кремнию по сравнению с фоторезистом (при травлении кремния).

На исходной кремниевой пластине (рис. 1,а), магнетронным методом формируют слой Al на обратной стороне подложки (рис. 1,б), выполняющий функцию защиты поверхности кремния при травлении. Затем проводят фотолитографию по обратной стороне пластины с алюминием (рис. 1,с). После этого проводят жидкостное химическое травление алюминия (рис. 1,д). Затем удаляют резист в ДМФА и осаждают слой Al на лицевой стороне. Далее выполняют глубокое травление кремния (Bosch-процесс) на глубину подложки до Al (рис. 1,е). Под мембраной подразумевается область пленки алюминия на лицевой стороне подложки, не имеющая под собой кремниевой подложки.

Изображение изготовленных кристаллов показано на рис. 2 выше.

На рис. 3. приведены изображения во вторичных электронах поперечного сечения образцов тонких пленок на кремниевой подложке.

Экспериментальный диаметр мембраны, сформированный после травления Si подложки составляет 556 микрон. Толщина пленки монослоя алюминия составляет 502 ± 10 нм, что обеспечивает пропускание менее 1% при длине волны 13.5 нм [4].

2. Измерение механических свойств. Контроль механических свойств осуществлялся на стенде, описанном в работе [5]. Стенд включает в себя оптический профилометр, манометры, ресивер, магистральную систему подачи избыточного давления воздуха. В результате, обеспечивая бесконтактное воздействие на мембрану за счет давления воздуха (без внесения дополнительных механических напряжений на структуру), можно получить значение давления разрыва мембраны и величину двухосного модуля упругости.

Механическая прочность кремниевых мембран рассчитывается по формуле (2.1):

$$\sigma_{max} = \frac{P_{over} \cdot a^2 \cdot B(\mu)}{h^2}, \quad (2.1)$$

где P_{over} – избыточное давление критической деформации структуры, a – радиус мембраны, $B(\mu)$ – коэффициент, h – толщина мембраны.

Коэффициент $B(\mu)$ рассчитывается как $\frac{3}{4}\sqrt{1+\mu^2}$. Анализируя зависимость (формула (2.2)) прогиба мембраны w от избыточного давления P , можно определить двухосный модуль упругости $E/(1-\mu)$:

$$P = C_1 \cdot \frac{\sigma_0 \cdot h \cdot w}{a^2} + C_2 \cdot \frac{E \cdot h \cdot w^3}{(1-\mu) \cdot a^4}, \quad (2.2)$$

где P – избыточное давление, σ_0 – остаточные механические напряжения в структуре при $P = 0$, h – толщина мембраны, w – прогиб мембраны, a – радиус мембраны, E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона.

Значение двухосного модуля упругости $E/(1-\mu)$ вычисляют на пологой области зависимости (2.2) при больших значениях прогиба мембраны w , т.е. значением первого слагаемого можно пренебречь (формула (2.3)):

$$\frac{E}{1-\mu} = \frac{P \cdot a^4}{C_2 \cdot h \cdot w^3}. \quad (2.3)$$

Радиационное облучение осуществлялось посредством использования установки гамма-облучения с ионизирующими источниками кобальт-60. Мощность облучения составляет 77 рад /с, время набора дозы в 1 мегарад составляет 3 ч 36 мин. Для каждой дозы облучения измерялось по 5 образцов. Итоговое значение механической прочности и двухосного модуля упругости материала алюминия определялось как среднее арифметическое.

Экспериментально были определены значения избыточного давления разрыва. Во всех случаях мембранные структуры выдерживают избыточное давление не менее 1.6 атм, что позволяет использовать данные конструкции в вакуумной

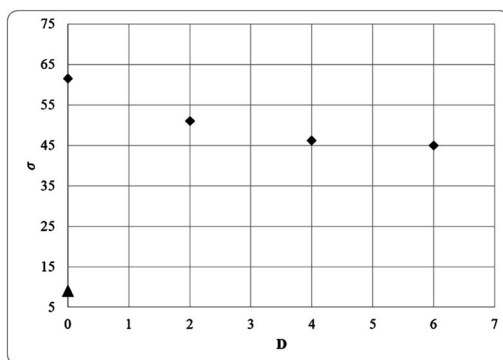


Рис. 4. Зависимость механической прочности от дозы облучения, где треугольником обозначены литературные данные, а ромбиками — данные, полученные в ходе проведения экспериментов для данной работы. По оси x — D — доза облучения, измеряемая в Мрад, по оси y — σ — механическая прочность, измеряемая в ГПа.

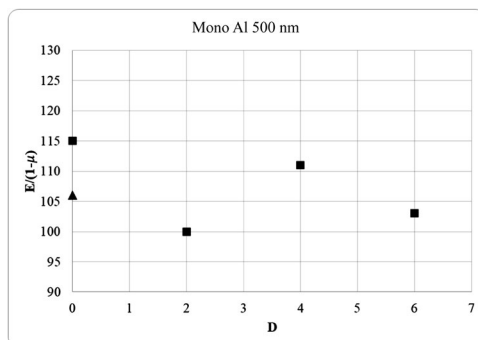


Рис. 5. Зависимость двухосного модуля упругости от дозы облучения, где треугольником обозначены литературные данные, а квадратами — данные, полученные в ходе проведения экспериментов для данной работы. По оси x — D — доза облучения, измеряемая в Мрад, по оси y — $E/(1-\mu)$ — двухосный модуль упругости, измеряемый в ГПа.

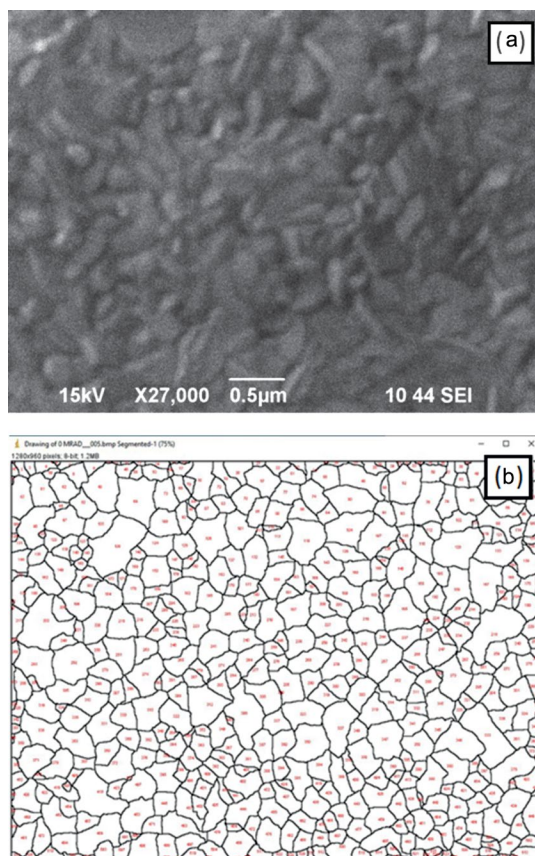


Рис. 6. Анализ размера зерен:

(a) – фотография с РЭМ; (b) – результат анализа для дозы 0 Мрад.

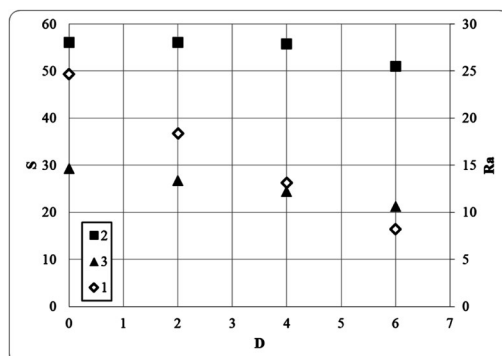


Рис. 7. Зависимость размера зерен и шероховатости от дозы облучения. По оси x – D – доза облучения, измеряемая в Мрад, по основной оси y – S – размер зерен, измеряемый в нанометрах по вспомогательной оси y – Ra – шероховатость поверхности, измеряемая в нанометрах.

среде. На рис. 4 показаны результаты измерений механической прочности. Согласно литературным данным, значение механической прочности композитной пленки Al-12.6%Si составляет 9.0 ГПа [6].

На рис. 5 показаны результаты расчета двухосного модуля упругости по формуле (2.3). Согласно литературным данным двухосный модуль упругости составляет 106 ГПа при коэффициенте Пуассона тонкопленочного материала алюминия составляет 0.34 и модуле Юнга 70 ГПа [7].

Из графиков выше можно заметить, что с увеличением дозы радиационного облучения значение механической прочности уменьшается с 61 до 45 ГПа (27%), величина двухосного модуля упругости уменьшается с 115 до 103 ГПа (11%). В результатах работы [8] указано, что по результатам моделирования величина удлинения алюминия снижается на 62% после облучения материала.

С помощью программы ImageJ сделан расчет количества зерен и их площади в области мембран. Изображение для анализа получено на микроскопе. Данная программа используется в мировом сообществе для подсчета количества частиц на образце [9].

Результат анализа размера зерен для различной дозы облучения при фиксированной площади анализа показал, что при увеличении дозы излучения до 6 Мрад количество зерен увеличивается от 468 до 635, а средний размер зерен уменьшается от 29.3 до 22.1 нм.

Также для определения размера зерен использовался рентгеновский дифрактометр Rigaku с длиной волны излучения 1,541 Å, напряжении на рентгеновской трубке 40 кВ и анодном токе 30 мА. Обобщенные результаты показаны на рис. 7.

Таким образом, результаты анализа поверхности объясняют эффект уменьшения механической прочности в процессе облучения за счет уменьшения размера зерна и шероховатости на тонкопленочной алюминиевой мембране. Различные авторы проводили оценку механической прочности материалов от размера зерен по прямому и обратному закону Холла–Петча [7]. В работе [10] указано, что для диапазона размера зерен металлов от 10 до 35 нм работает обратный закон Холла–Петча, т.е. механическая прочность прямо пропорциональна корню из размера зерна ($\sigma_{\text{макс}} \sim \sqrt{d}$). Для данного диапазона размера зерен характерен тип деформации в виде перемещения решеточных дислокаций из тройных стыков границ зерен при скольжении границ зерен. Полученные тенденции в текущей работе (при размере зерен от 22.1 до 29.3 нм) совпадают с тенденциями работы [10].

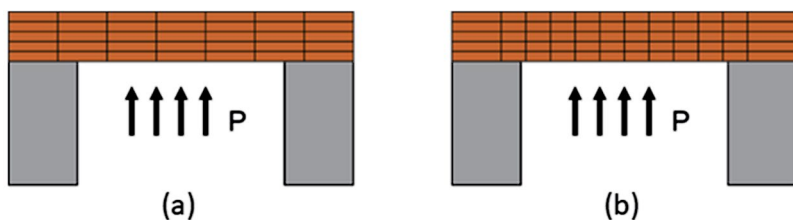


Рис. 8. Изменение количества межзеренных границ: (а) – до облучения; (б) – после облучения.

Очевидно, что при увеличении количества зерен возрастает количество межзеренных границ. Это ведет к возрастанию вероятности критической деформации при аналогичном значении избыточного давления (рис. 8).

Выводы. Определено влияние радиационного облучения на механические свойства тонких пленок на примере тонкой монослойной мембраны из алюминия. С увеличением дозы радиационного облучения до 6 Мрад значение механической прочности уменьшается с 61 до 45 ГПа (27%), величина двухосного модуля упругости уменьшается с 115 до 103 ГПа (11%). Данный эффект можно объяснить уменьшением размера зерна и шероховатости на тонкопленочной алюминиевой мембране. Для размера зерен алюминия от 22.1 до 29.3 нм используется обратное соотношение Холла—Петча. В процессе исследований было определено, что в процессе облучения увеличивается количество межзеренных границ и количества самих зерен, что ведет к возрастанию вероятности деформации.

Сравнивая полученный эффект с результатами работ других исследователей [11, 12] можно заметить, что подобные эффекты изменения механических свойств (механической прочности, жесткости, двухосного модуля упругости) от радиационного воздействия многослойных структур были выявлены ранее, но для других материалов и изготовленных другим методом. Например, в статье [13] приведены результаты измерения механической прочности меди и стали при разных температурах облучения. В работе [14] представлены результаты исследования на радиационную стойкость материала кремния макротолщины. Часто в качестве материала исследований выбирают кремний и материалы на его основе, например карбид кремния [15]. Проводят исследования радиации на свойства материала толстого алюминия, использующегося в ядерных реакторах [16, 17].

В мировой практике исследование влияния эффекта радиационного облучения для материал тонкопленочного Al, полученного методом магнетронного осаждения, проведено ранее не было, что подтверждает новизну данного экспериментального исследования.

Благодарности. Работы выполнены на оборудовании ЦКП “МСТ и ЭКБ” НИУ МИЭТ при поддержке гранта Президента РФ (№ МК-1692.2022.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юдинцев В. Радиационно стойкие интегральные схемы. Надежность в космосе и на земле // Электроника: Наука, Технология, Бизнес. 2007. № 5. стр. 72–77.
2. Демин Г.Д., Ким П.П., Дюжеев Н.А. Моделирование рабочих характеристик МЭМС элемента динамической маски с электромеханическим оптическим затвором для задач рентгеновской нанолитографии // Нанотехнологии и нанотехнологии. Труды XXVI Международного симпозиума. 2022. 643 с.
3. Кузнецов Н.В. Сечение одиночных случайных сбоек СБИС при воздействии тяжелых заряженных частиц // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Физика радиационного воздействия на радиоэлектронную аппаратуру. 2007. № 1–2. С. 52–55. <https://henke.lbl.gov/> (дата обращения: 29.05.2023).
4. Дюжеев Н.А., Гусев Е.Э., Махиборода М.А. Исследование механических свойств тонкопленочных мембран из оксида и нитрида кремния // Известия РАН. Механика твердого тела. 2022. № 5 с. 103–113. <https://doi.org/10.31857/S0572329922050063>
5. Mueller S.F.M.G., Fornabaio M., Zagar G., Mortensen A. Microscopis strength of silicon particles in an aluminum-silicon alloy // Acta Materialia. 2016. V. 105. P. 165–175. <http://doi.org/10.1016/j.actamat.2015.12.006>

6. *Lim Y.Y., Chaudhri M., Enomoto Yuji* Accurate determination of the mechanical properties of thin aluminum films deposited on sapphire flats using nanoindentations // *J. Mater. Res.* 1999. V. 14. P. 2314–2327. <https://doi.org/10.1557/JMR.1999.0308>
7. *Nabbi R., Wolters J.* Investigation of radiation damage in the aluminum structures of the German FRJ-2 research reactor // International Atomic Energy Agency (IAEA). 1998. https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/_Public/36/026/36026552.pdf
8. *Khan M. et al.* A Study of the Structural and Surface Morphology and Photoluminescence of Ni-Doped AlN Thin Films Grown by Co-Sputtering // *Nanomaterials*. 2022, V. 12. № 21. P. 3919. <https://doi.org/10.3390/nano12213919>
9. *Quek S.S. et. al* The inverse hall–petch relation in nanocrystalline metals: A discrete dislocation dynamics analysis // *J. Mech. Phys. Solids*. 2016. V.88. P. 252–266. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2015.12.012>
10. *Козловский А.Л., Гладких Т.Ю., Здоровец М.В.* Радиационные дефекты в нитриде алюминия при облучении низкоэнергетичными ионами C^{2+} // *Химия высоких энергий*. 2019. Т. 53. № 2. С. 135–139. <https://doi.org/10.1134/S0023119319020098>
11. *Seong-Hyun Hwang et al.* Effects of Al₂O₃ surface passivation on the radiation hardness of IGTO thin films for thin-film transistor applications // *Applied Surface Science*. 2022. V. 578. P. 152096. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2021.152096>
12. *Овчинников И.И. и др.* Влияние радиационных сред на механические характеристики материалов и поведение конструкций (обзор) // Интернет-журнал “НАУКОВЕДЕНИЕ”. 2012. № 4.
13. *Кузнецов Н.В.* Радиационная стойкость кремния: монография / Н.В. Кузнецов, Г.Г. Соловьев. М: Энергоатомиздат. 1989. 95 с.
14. *Лебедев А.А., Иванов А.М., Строкан Н.Б.* Радиационная стойкость SiC и детекторы жестких излучений на его основе // *Физика и техника полупроводников*. 2004. Т. 38. № 2. С. 129–150.
15. *Mohamad A.A., Farrokh K.* Evaluation of the radiation damage effect on mechanical properties in Tehran research reactor (TRR) clad // *Nucl. Eng. Technol.* 2020. V. 52. № 12. P. 2975–2981. <https://doi.org/10.1016/j.net.2020.05.028>
16. *Waldemar A.M.* Radiation Effects in Materials. InTech. 2016. 462p. <https://doi.org/10.5772/61498>

STUDY OF THE EFFECT OF RADIATION EXPOSURE ON GRAIN SIZE AND MECHANICAL PROPERTIES OF THIN-FILM ALUMINUM

N. A. Dyuzhev^a, E. E. Gusev^{a,*}, E. O. Portnova^a, and M. A. Makhiboroda^a

^a National Research University of Electronic Technology (MIET), Zelenograd, Moscow, 124498 Russia

*e-mail: bubbledouble@mail.ru

Received 30.05.2023

Revised 07.06.2023

Accepted 11.06.2023

Abstract – For the first time, an experimental dependence of the grain size and mechanical properties of a thin-film aluminum material on the dose of short-wave radiation has been obtained. A thin film of aluminum was formed on a silicon substrate using magnetron sputtering. The effect of a decrease in mechanical strength and biaxial elastic modulus with increasing radiation dose was identified. This effect is explained by a decrease in grain size and roughness on a thin-film aluminum membrane. For the microscopically measured range of aluminum grain sizes, the inverse Hall-Petch relation is used. During the research, it was determined that dur-

ing irradiation the number of grain boundaries and the number of grains themselves increases, which leads to an increase in the likelihood of deformation.

Keywords: mechanical properties, grain size, thin films, membranes, mechanical strength, biaxial elastic modulus

REFERENCES

1. V. Udintsev, "Radiation-resistant ICs. Spaceward and Earth Reliability," *Elektronika: Nauka Tekhn. Biznes*, No. 5, 72–77 (2007).
2. G.D. Denim, P.P. Kim, and N.A. Dyuzhev, "Simulation of MEMS Performance Characteristics of a Dynamic Mask Element with an Electromechanical Optical Shutter for X-ray Nanolithography," in *Proc. of XXVI Symposium "Nanophysics and Nanoelectronics" Nizhnii Novgorod, 2022*, Vol. 1 (Nizhegorodsk. Gos. Univ. Im Lobachevskogo, 2022), pp. 543–544 [in Russian].
3. N.V. Kuznetsov, "Cross-section of single random failures of VLSI under the influence of heavy charged particles," *Vopr. Atom. Nauki Tekhn. Ser.: Fiz. Radiats. Vozd. Elektron. Appar.*, No. 1–2, 52–55 (2007). <https://henke.lbl.gov/> (29.05.2023).
4. N.A. Dyuzhev, E.E. Gusev, and M.A. Makhboroda, "Study of the mechanical properties of thin-film membranes made of oxide and silicon nitride," *Mech. Solids* **57**, 1044–1053 (2022). <https://doi.org/10.3103/S002565442205017X>
5. Sf. M.G. Mueller, M. Fornabaio, G. Zagar, and A. Mortensen, "Microscopis strength of silicon particles in an aluminium-silicon alloy," *Acta Mater.* **105**, 165–175 (2016). <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2015.12.006>
6. Y.Y. Lim, M. Chaudhri, and Yuji Enomoto, "Accurate determination of the mechanical properties of thin aluminum films deposited on sapphire flats using nanoindentations," *J. Mater. Res.* **14**, 2314–2327 (1999). <https://doi.org/10.1557/JMR.1999.0308>
7. R. Nabbi and J. Wolters, "Investigation of radiation damage in the aluminum structures of the German FRJ-2 research reactor," in *Proc. of 8th Meeting of the Int. Group on Research Reactor: IG-ORR8, Munich, Germany, 17–20 April 2001* (Munich, 2001), pp. 237–243 https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/_Public/36/026/36026552.pdf
8. M. Khan et al., "A Study of the Structural and Surface Morphology and Photoluminescence of Ni-Doped AlN Thin Films Grown by Co-Sputtering," *Nanomater.* **12** (21), 3919 (2022). <https://doi.org/10.3390/nano12213919>
9. S.S. Quek, et al., "The inverse hall–petch relation in nanocrystalline metals: A discrete dislocation dynamics analysis," *J. Mech. Phys. Solids* **88**, 252–266 (2016). <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2015.12.012>
10. A.L. Kozlovskii, T. Yu. Gladkikh, and M.V. Zdorovets, "Radiation defects in aluminum nitride under irradiation with low-energy C²⁺ ions," *High Energy Chem.* **53**, 143–146 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0018143919020097>
11. Seong-Hyun Hwang, Kie Yatsu, Dong-Ho Lee, et al., "Effects of Al₂O₃ surface passivation on the radiation hardness of IGTO thin films for thin-film transistor applications," *Appl. Surf. Sci.* **578**, 152096 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2021.152096>
12. I.I. Ovchinnikov, I.V. Ovchinnikov, M. Yu. Bogina, et al., "Influence of radiation environments on mechanical characteristics of materials and behavior of constructions (review)," *Internet-Zh. Naukoved.*, No. 4, 110TBH412 (2012). <https://naukovedenie.ru/PDF/110tvn412.pdf>
13. N.V. Kuznetsov an, G.G. Solovyov, *Radiation Resistance of Silicon* (Energoatomizdat, Moscow, 1989) [in Russian].
14. A.A. Lebedev, A.M. Ivanov, and N.B. Strokan, "Radiation hardness of SiC and nuclear radiation detectors based on the SiC films," *Fiz. Tekh. Poluprovodnik.* **38** (2), 129–150 (2004).
15. A.A. Mohamad and K. Farrokh, "Evaluation of the radiation damage effect on mechanical properties in Tehran research reactor (TRR) clad," *Nucl. Eng. Technol.* **52** (12), 2975–2981 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.net.2020.05.028>
16. *Radiation Effects in Eaterials*, Ed. by W.A. Monteiro (InTech, 2016). <https://doi.org/10.5772/61498>

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ КАПИЛЛЯРНОЙ АДГЕЗИИ НА СКОЛЬЖЕНИЕ ЦИЛИНДРА ПО ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОГО ТЕЛА С УЧЕТОМ ГИСТЕРЕЗИСА СМАЧИВАНИЯ

© 2024 г. Ю. Ю. Маховская^{a,*}

^aИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: makhovskaya@mail.ru

Поступила в редакцию 31.05.2023 г.

После доработки 07.06.2023 г.

Принята к публикации 11.06.2023 г.

Рассмотрена контактная задача об установившемся скольжении жесткого цилиндра по упругому полупространству при наличии менисков жидкости с учетом гистерезиса угла смачивания, который приводит к различным условиям адгезии на входе в контакт и на выходе из него. Задача рассмотрена в плоской постановке и решалась методом сведения к задаче Римана–Гильберта. Получено аналитическое выражение для контактного давления и система из четырех уравнений для численного определения координат концов области контакта и зон менисков. Проведен расчет в диапазоне входных параметров, соответствующих ситуации, когда скользящий цилиндр моделирует отдельный выступ шероховатой поверхности. Исследованы распределение контактного давления, размер области контакта и ее смещение относительно оси симметрии цилиндра, ширина менисков на входе в контакт и выходе из него, а также сила трения, обусловленная капиллярной адгезией. Установлено, в частности, что сила трения существенно зависит от величины гистерезиса угла смачивания, и особенно от поверхностного натяжения жидкости, но слабо зависит от капиллярного давления в менисках, которое в условиях термодинамического равновесия мениска со средой определяется влажностью окружающего воздуха.

Ключевые слова: упругий контакт, капиллярная адгезия, гистерезис угла смачивания, трение скольжения

DOI: 10.31857/S1026351924010095, EDN: WABWEY

1. Введение. Проблема капиллярной адгезии возникла в трибологии в 80-х годах прошлого века, когда обнаружилось, что при считывании информации с магнитных дисков возникает заедание, вызванное менисками жидкости микронных размеров, которые образуются вследствие конденсации из окружающего воздуха или неадекватной работы смазывающей пленки [1, 2]. В последующие десятилетия проблема капиллярной адгезии стала актуальной в микромеханических системах [3], а также важным фактором в сцеплении биологических материалов [4]. Эта проблема вызвала интерес к изучению

капиллярной адгезии в контакте отдельного выступа (индентора) с деформируемым основанием в рамках механики контактного взаимодействия.

Контактная задача для упругого полупространства и сферического индентора, взаимодействующих в присутствии мениска жидкости была поставлена в работе [5], в которой решение, полученное ранее для задачи об адгезии сухих поверхностей [6], было обобщено на случай капиллярной адгезии. Решение контактной задачи с учетом капиллярной адгезии для осесимметричного штампа, форма которого описывается степенной функцией, было построено [7, 8] и использовано для анализа нормального подвода и отвода индентора от упругого основания при сохранении объема жидкости в мениске [9] и для построения модели капиллярной адгезии в дискретном контакте упругих тел, покрытых пленками жидкости [10]. Рассмотрена задача о капиллярной адгезии в плоской постановке и построено ее решение [11]. Задача о предварительном смещении в контакте с учетом капиллярной адгезии была рассмотрена в [12], при этом влияние мениска сводилось к перераспределению эпюры давлений на границе упругого полупространства.

Однако капиллярная адгезия может быть и самостоятельным механизмом, вызывающим трение поверхностей – как результат необратимого процесса образования и разрыва менисков при относительном скольжении шероховатых поверхностей [13]. Можно предположить, что даже при отсутствии разрыва менисков, они могут вносить вклад в силу трения за счет гистерезиса угла смачивания. В работе [14] представлены результаты эксперимента, показывающего заметное влияние гистерезиса смачивания на конфигурацию области контакта при скольжении сферы по плоской поверхности упругого образца, а также предложена приближенная модель для описания этой конфигурации.

Цель данной работы – исследовать совместное действие капиллярной адгезии и упругости в скользящем контакте с учетом гистерезиса угла смачивания, который приводит к несимметричному распределению контактных напряжений и появлению силы сопротивления скольжению.

2. Постановка задачи. Рассматривается жесткий цилиндр радиуса R , скользящий по поверхности упругого полупространства с постоянной скоростью под действием постоянной внешней нормальной силы P и касательной силы T (рис. 1).

Задача рассматривается в плоской постановке. Пусть ось x движущейся со скоростью цилиндра системы координат совпадает с невозмущенной поверхностью упругого полупространства, а ось y направлена вертикально вниз. По краям области контакта находятся мениски жидкости. В случае, когда скорость скольжения равна нулю, область контакта и мениски расположены симметрично относительно оси y . При движении цилиндра имеет место гистерезис смачивания, который приводит к различным значениям угла смачивания на входе и выходе из контакта. Вследствие этого расположение области контакта и менисков становится несимметричным. Пусть контакт цилиндра и полупространства происходит по области $(-a, b)$, а мениски занимают области $(-a_1, -a)$ на выходе из контакта и (b, b_1) на входе в контакт (рис. 1).

В области контакта выполняется условие контактирования для нормальных смещений поверхности u_y :

$$u_y = -\frac{x^2}{2R} + D, \quad x \in (-a, b), \quad (2.1)$$

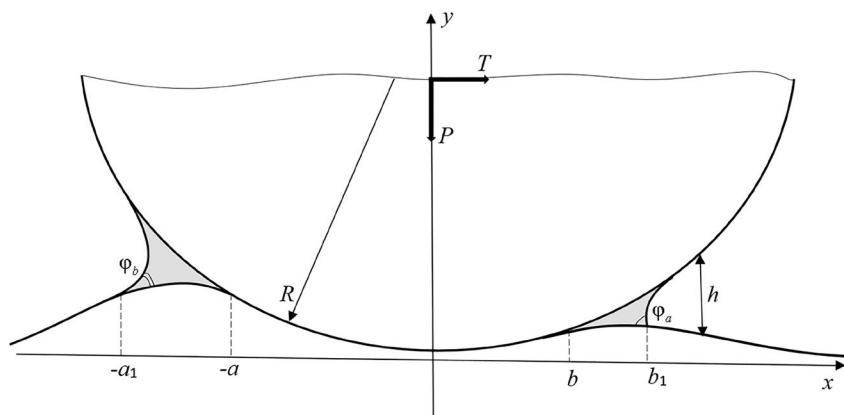


Рис. 1. Схема скольжения цилиндра по упругому полупространству при наличии капиллярной адгезии.

где D – константа. В областях менисков на поверхность упругого полупространства действует капиллярное давление $-p_0$:

$$p = -p_0, \quad x \in (-a_1, -a) \cup (b, b_1). \quad (2.2)$$

Величина давления p_0 определяется формулой Лапласа, которая в предположении относительной малости радиуса кривизны менисков ρ ($\rho \ll a_1, \rho \ll b_1$) имеет вид [7]:

$$p_0 = \gamma / \rho, \quad (2.3)$$

где γ – поверхностное натяжение жидкости на границе с воздухом.

Величина капиллярного давления считается достаточно большой, так что по сравнению с вызванной ей силой адгезии можно пренебречь силами поверхностного натяжения жидкости. Рассматриваются достаточно малые скорости скольжения цилиндра, при которых вязкость жидкости не оказывает влияния на контактные характеристики.

Угол смачивания жидкостью цилиндра одинаков по обеим сторонам контакта и равен стационарному углу смачивания; положим этот угол равным нулю. Пусть стационарный угол смачивания жидкостью упругого основания равен ϕ , а гистерезис этого угла равен $\Delta\phi$, при этом угол смачивания основания на выходе из контакта равен $\phi_a = \phi - \Delta\phi / 2$, а на входе в контакт $\phi_b = \phi + \Delta\phi / 2$. Максимальные величины зазора, до которых доходит мениск на входе и выходе из контакта, из геометрических соображений вычисляются как

$$h(-a_1) = \rho(1 + \cos(\phi - \Delta\phi / 2)), \quad h(b_1) = \rho(1 + \cos(\phi + \Delta\phi / 2)), \quad (2.4)$$

где зазор между поверхностями цилиндра и основания определяется выражением

$$h = u_y + \frac{x^2}{2R} - D. \quad (2.5)$$

С учетом соотношений (2.1) и (2.2) получаем следующие граничные условия при $y = 0$ для функций смещения u_y и напряжения $\sigma_y(0, x) = -p(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{du_y}{dx} &= -\frac{x}{R}, \quad -a < x < b \\ \sigma_y &= p_0 \theta(x + a_1), \quad x < -a \\ \sigma_y &= p_0 \theta(b_1 - x), \quad x > b, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда. Считается, что трение между поверхностями отсутствует, т.е., касательное напряжение равно нулю на всей поверхности упругого основания $\tau_{xy} = 0$.

Заметим, что если гистерезис смачивания отсутствует ($\Delta\phi = 0$), то постановка контактной задачи, определяемая условиями на границе упругого основания (2.6) с учетом дополнительных условий (2.3)–(2.5) становится симметричной относительно оси y . Если в (2.4) совершить замену $\gamma(1 + \cos\phi) = w$, где w — удельная работа адгезии двух поверхностей твердых тел, и положить $b = a$, $b_1 = a_1$ то соотношения (2.3)–(2.6) по форме совпадают с постановкой плоской контактной задачи об адгезии в отсутствие жидкости, в которой адгезия описывается моделью Можи [6]. Такая задача была решена как частный случай адгезионной контактной задачи при скольжении цилиндра для вязкоупругой полуплоскости [15]. В отличие от этой задачи, соотношения (2.4) с отличным от нуля гистерезисом угла смачивания $\Delta\phi$ определяют контактную задачу, в которой удельная работа адгезии отличается справа и слева от области контакта. В случае адгезии сухих поверхностей подобная несимметричная постановка возникает при моделировании скольжения. Несимметричность при этом обусловлена не гистерезисом смачивания, а физическими или химическими процессами в контакте, вследствие которых поверхностная энергия основания, и, соответственно, удельная работа адгезии двух поверхностей w , изменяется в результате нахождения в контакте с индентором. Задача с различной удельной работой адгезии на входе и выходе из контакта была решена в [16] для упругой полуплоскости и периодического синусоидального индентора, при этом адгезия описывалась упрощенной моделью ДКР (Джонсона—Кендалла—Робертса), которая описывает адгезию лишь в некотором диапазоне параметров и непригодна для описания капиллярной адгезии, поскольку в ней адгезионное давление (т.е., давление в мениске (2.3)) было бы бесконечной величиной. Контактная задача с различной удельной работой адгезии на входе и на выходе из контакта, а также с конечным адгезионным давлением решалась в [17] для скольжения индентора по вязкоупругому слою, описываемому одномерной моделью. В настоящей работе решение такой задачи впервые получено для упругого полупространства в двумерном случае и исследовано применительно к капиллярной адгезии с учетом гистерезиса смачивания.

3. Метод решения. Решение строится путем сведения к задаче Римана—Гильберта [18]. В нижней полуплоскости $y \leq 0$ комплексной плоскости вводится функция комплексного переменного $z = x - iy$

$$W(z) = X(x, y) - iY(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y(t, 0) \frac{dt}{t - z}. \quad (3.1)$$

При $z \rightarrow \infty$ эта функция имеет вид

$$W(z) = \frac{P}{z} + O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad P = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt,$$

где P – внешняя нормальная нагрузка, приложенная к цилиндру. На границе $y = 0$ упругой полуплоскости при $\tau_{xy} = 0$ выполняется соотношение

$$\frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \frac{du_y}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y^* \frac{dt}{t-x}. \quad (3.2)$$

С учетом предельного значения интеграла типа Коши при $z \rightarrow x - i0$, из (3.1) и (3.2) следуют выражения, связывающие компоненты функции $W(z)$ с граничными перемещениями и напряжениями для упругого основания [18]:

$$X(x, 0) = \frac{\pi E^*}{2} \frac{du_y}{dx}, \quad Y(x, 0) = \pi \sigma_y(x, 0). \quad (3.3)$$

Из (3.3) с учетом (2.6) получим граничные условия для компонент функции $W(z)$:

$$\begin{aligned} X(x, 0) &= -\frac{\pi E^*}{2R} x, \quad -a < x < b \\ Y(x, 0) &= \begin{cases} \pi p_0 \theta(x + a_1), & x \leq -a \\ \pi p_0 \theta(b_1 - x), & x \geq b. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Задача определения функции $W(z)$, аналитической при $y \leq 0$, по заданным граничным условиям (3.4) при $y = 0$ является частным случаем задачи Римана–Гильберта. Решение этой задачи, ведущее себя как P/z при $z \rightarrow \infty$, имеет вид [19]

$$W(z) = -\frac{1}{\sqrt{Z(z)}} \left(P + \frac{E^*}{4R} \int_{-a}^b x \sqrt{Z^+(x)} \frac{dx}{x-z} - p_0 \int_{-a_1}^{-a} \sqrt{Z^+(x)} \frac{dx}{x-z} + p_0 \int_b^{b_1} \sqrt{Z^+(x)} \frac{dx}{x-z} \right). \quad (3.5)$$

Здесь $Z(z) = (z+a)(z-b)$, $Z^+(x) = |(x+a)(x-b)|$.

Из решения (3.5), используя соотношения (9), можно получить выражения для неизвестных напряжений σ_y внутри области контакта $x \in (-a, b)$ и производной перемещения du_y/dx в области менисков $x \in (-a_1, -a) \cup (b, b_1)$. После взятия интегралов получено для контактного давления [15]

$$p(x) = \frac{1}{\pi} [F(x) - G(x)], \quad -a < x < b \quad (3.6)$$

и для смещения границы упругого основания

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{x}{R} + \begin{cases} \frac{2}{\pi E^*} [J(x) - F(x)], & -a_1 < x < -a \\ \frac{2}{\pi E^*} [F(x) - J(x)], & b < x < b_1. \end{cases} \quad (3.7)$$

В (3.6) и (3.7) использованы обозначения:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{|Z^+(x)|}} \left\{ \frac{E^*}{8R} [(a+b)^2 + 4x(b-a-2x)] + P + p_0 [\sqrt{Z^+(-a_1)} + \sqrt{Z^+(b_1)}] \right\} -$$

$$- \frac{b-a-2x}{2} p_0 \ln \frac{(2a_1+b-a-2\sqrt{Z^+(-a_1)})(2b_1-b+a+2\sqrt{Z^+(b_1)})}{(a+b)^2}$$

$$G(x) = p_0 \left(\pi + \arctg \frac{(a_1-a)(b-x) - (a_1+b)(a+x)}{2\sqrt{Z^+(-x)Z^+(-a_1)}} - \arctg \frac{(b_1+a)(b-x) - (b_1-b)(a+x)}{2\sqrt{Z^+(-x)Z^+(b_1)}} \right)$$

$$J(x) = p_0 \left(-\operatorname{arcth} \frac{(a_1-a)(x-b) + (a_1+b)(x+a)}{2\sqrt{Z^+(x)Z^+(-a_1)}} + \operatorname{arcth} \frac{(b_1+a)(x-b) + (b_1-b)(x+a)}{2\sqrt{Z^+(x)Z^+(b_1)}} \right).$$

Соотношения (3.6) и (3.7), определяющие напряжения и перемещения на границе упругого полупространства, содержат неизвестные величины a , b , a_1 и b_1 — координаты границ области контакта цилиндра с полупространством и внешних границ мениска. Для определения этих четырех неизвестных величин используются следующие уравнения.

Первая пара уравнений вытекает из требования непрерывности контактного давления, определяемого соотношением (3.6), при $x = -a$ и $x = b$. Подставляя (3.6) в условия $p(-a) = -p_0$ и $p(b) = -p_0$, после преобразований получим уравнения:

$$\frac{\pi E^*}{8R} (a+b)^2 = 2P + 2p_0 [\sqrt{Z^+(-a_1)} + \sqrt{Z^+(b_1)}]$$

$$\frac{\pi E^*}{4R} (b-a) = 2p_0 \left(\ln \frac{\sqrt{a_1+b} - \sqrt{a_1-a}}{a+b} + \ln \frac{\sqrt{b_1+a} - \sqrt{b_1-b}}{a+b} \right). \quad (3.8)$$

Вторая пара уравнений следует из того, что величина зазора $h(x)$ между поверхностями цилиндра и полупространства в точках $x = -a_1$ и $x = b_1$ должна определяться радиусом кривизны менисков ρ и углами смачивания согласно условиям (2.4). Чтобы избавиться от неопределяемой постоянной D в выражении (2.5) для зазора, представим значения функции $h(x)$ в точках $x = -a_1$ и $x = b_1$ в виде

$$h(-a_1) = -\int_{-a_1}^{-a} \frac{du_y}{dx} dx + \frac{a_1^2 - a^2}{2R}, \quad h(b_1) = \int_b^{b_1} \frac{du_y}{dx} dx - \frac{b_1^2 - b^2}{2R},$$

откуда с учетом (2.3) и (2.4) получим уравнения:

$$\int_{-a_1}^{-a} \frac{du_y}{dx} dx = -\frac{\gamma(1 + \cos(\phi - \Delta\phi/2))}{p_0} + \frac{a_1^2 - a^2}{2R}$$

$$\int_b^{b_1} \frac{du_y}{dx} dx = \frac{\gamma(1 + \cos(\phi + \Delta\phi/2))}{p_0} - \frac{b_1^2 - b^2}{2R}, \quad (3.9)$$

где функция du_y / dx при $x \in (-a_1, -a) \cup (b, b_1)$ определяется соотношением (3.7).

Полученная система из четырех уравнений (3.8) и (3.9) для определения неизвестных a, b, a_1 и b_1 решалась численно методом Ньютона. Интегралы в (3.9) брались численно на каждой итерации.

Если гистерезис смачивания отсутствует $\Delta\phi = 0$ (например, если цилиндр находится в покое, т.е., скорость скольжения равна нулю), решение задачи является симметричными и $a = b, a_1 = b_1$. В этом случае выражение для распределения контактного давления (3.6) приобретает более простую форму:

$$p(x) = \frac{E^*}{\pi R} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{p_0}{\pi} (\xi_+(x) - \xi_-(x) - \pi), \quad \xi_{\pm}(x) = \frac{a_1 x \pm a^2}{\sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{a_1^2 - a^2}}. \quad (3.10)$$

При этом из первого уравнения (3.8) следует выражение для нагрузки

$$P = a^2 E^* / (2R) - 2p_0 \sqrt{a_1^2 - a^2}, \quad (3.11)$$

а из первого уравнения (3.9) следует уравнение

$$a_1 \sqrt{a_1^2 - a^2} + \left(a^2 - \frac{4p_0}{E^*} \sqrt{a_1^2 - a^2} \right) \ln \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - a^2}}{a} = \frac{2R\gamma(1 + \cos\phi)}{p_0}. \quad (3.12)$$

В случае отсутствия гистерезиса смачивания ($\Delta\phi = 0$) соотношения (3.11) и (3.12) служат для численного определения координат a и a_1 границ симметричных областей контакта и менисков. Если положить $\gamma(1 + \cos\phi) = w$, где w — удельная работа адгезии двух сухих поверхностей, соотношения (3.10)–(3.11) совпадают с решением об адгезии цилиндра и упругой полуплоскости при отсутствии жидкости [15].

4. Результаты расчета. Численный расчет и анализ полученного решения проводился в безразмерных параметрах. При этом исследовались распределение безразмерного контактного давления p / E^* по координате x/R , безразмерная ширина области контакта $(a + b) / R$, ее смещение относительно оси симметрии цилиндр $(a - b) / R$, ширины менисков на выходе из контакта $(a_1 - a) / R$ и на входе в контакт $(b_1 - b) / R$. Входными параметрами в расчетах служили безразмерная внешняя нормальная нагрузка $P/(E^* R^2)$, поверхностное натяжение жидкости $\gamma / (E^* R)$, капиллярное давление p_0 / E^* , а также краевой угол смачивания основания жидкостью ϕ и его гистерезис $\Delta\phi$.

Для выбора численных значений входных параметров задачи примем, что скользящий цилиндр является моделью отдельного микровыступа шероховатой поверхности с радиусом закругления вершины R , а мениски вокруг него образуются в результате капиллярной конденсации из влажного воздуха, находятся в термодинамическом равновесии с окружающей средой, и давление в них определяется уравнением Кельвина [20]

$$p_0 = -R_g T \ln H / V_m, \quad (4.1)$$

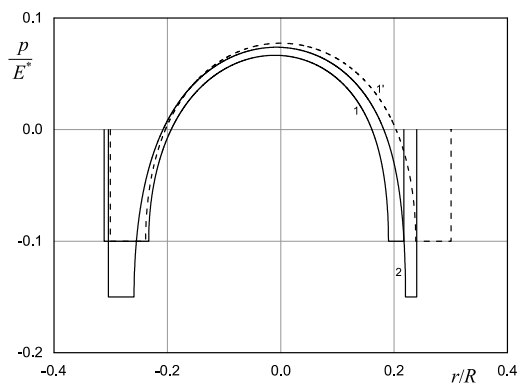


Рис. 2. Распределение контактного давления при $\gamma/(E^*R) = 7.3 \cdot 10^{-4}$, $P/(E^*R^2) = 0.02$, $\phi = \pi/3$ и различных значениях параметра $p_0/E^* = 0.10$ (кривые 1, 1') и 0.15 (кривая 2). Кривые 1 и 2 соответствуют $\Delta\phi = \pi/2$, кривая 1' — $\Delta\phi = 0$.

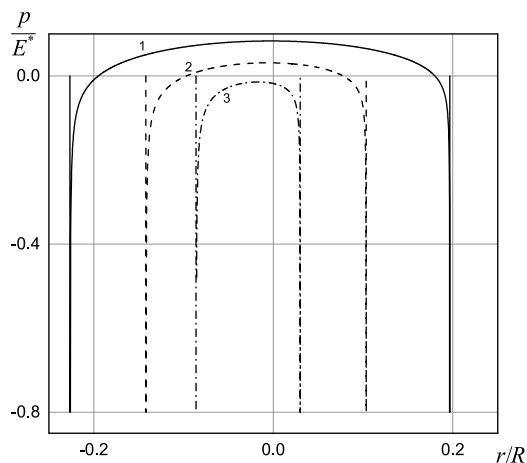


Рис. 3. Распределение контактного давления при $\gamma/(E^*R) = 1.5 \cdot 10^{-4}$, $p_0/E^* = 0.8$, $\phi = \pi/3$ и $\Delta\phi = \pi/2$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют $P/(E^*R^2) = 0.02$, 0 и -0.005 .

где T — абсолютная температура, R_g — универсальная газовая постоянная, V_m — молярный объем жидкости, H — относительная влажность окружающего воздуха. В качестве жидкости рассмотрим воду при температуре $T = 20^\circ\text{C}$, поверхностное натяжение которой $\gamma = 73$ мН/м, молярный объем $V_m = 1.8 \cdot 10^{-5}$ м³.

4.1. Распределение контактного давления. На рис. 2 и 3 представлены распределения контактного давления для двух случаев, соответствующих двум наборам входных параметров задачи.

В первом случае радиус закругления вершины выступа брался равным $R = 1$ мкм, а приведенный модуль упругости основания $E^* = 0.1$ ГПа. Тогда безразмерное

поверхностное натяжение воды составляет $\gamma / (E^* R) = 7.3 \cdot 10^{-4}$. На рис. 2 построены распределения контактного давления при этой величине параметра $\gamma / (E^* R)$ и двух значениях капиллярного давления в мениске: $p_0 / E^* = 0.10$, что, согласно (4.1), соответствует влажности воздуха 93% ($H = 0.93$), и $p_0 / E^* = 0.15$, что соответствует влажности 88% ($H = 0.88$). Угол смачивания упругого основания водой считался равным $\phi = \pi / 3$. Сплошные кривые 1 и 2 на рис. 2 соответствуют гистерезису угла смачивания $\Delta\phi = \pi / 2$. Эти кривые построены по формуле для контактного давления (3.6), при этом координаты границ областей контакта и менисков определялись решением уравнений (3.8), (3.9). Штриховая кривая 1' построена без учета гистерезиса смачивания, т.е. при $\Delta\phi = 0$, по формуле (3.10) для контактного давления, при этом границы области контакта и менисков определялись решением уравнений (3.11), (3.12). Все кривые на рис. 2 построены при одной безразмерной нагрузке $P / (E^* R^2) = 0.02$, что при выбранных параметрах модели приблизительно соответствует силе $P = 2 \mu\text{H}$, действующей на отдельный микровыступ.

На распределениях контактного давления, приведенных на рис. 2, видны достаточно широкие участки постоянного отрицательного давления слева и справа от области контакта — это области менисков на выходе из контакта и на входе в контакт, соответственно. При отсутствии гистерезиса смачивания (в частности, если скорость скольжения равна нулю) эти участки симметрично расположены относительно оси симметрии индентора, симметрична и вся эпюра давлений (кривая 1'). Учет гистерезиса смачивания приводит к тому, что мениск на входе в контакт становится уже, а на выходе из контакта — шире, при этом область контакта сдвигается влево, т.е. в сторону, противоположную скольжению выступа (кривая 1). Повышение капиллярного давления (кривая 2) приводит к уменьшению зон менисков и увеличению площади контакта, при этом повышаются по абсолютной величине как максимальные положительные, так и максимальные отрицательные значения на эпюре давлений.

Рассмотренный выше набор численных параметров относится к случаю относительно слабой капиллярной адгезии, которая заметно влияет на контактные характеристики только при достаточно малых величинах внешней нагрузки.

Во втором случае, чтобы получить более выраженную адгезию, будем считать, что поверхностный выступ имеет больший радиус закругления $R = 10 \text{ м}$ (т.е. моделируемая поверхность с микровыступами является более гладкой), капиллярное давление выше за счет более низкой влажности воздуха 75% ($H = 0.75$), основание мягче $E^* = 0.05 \text{ ГПа}$. В этом случае, согласно (4.1), безразмерное капиллярное давление равно $p_0 / E^* = 0.8$, а безразмерное поверхностное натяжение воды $\gamma / (E^* R) = 1.5 \cdot 10^{-4}$. На рис. 3 построены распределения контактного давления для этого случая, соответствующие гистерезису угла смачивания $\Delta\phi = \pi / 2$ для трех различных нагрузок. Для самой большой из этих трех нагрузок (соответствует сплошной кривой 1 на рис. 3) $P / (E^* R^2) = 0.02$, что в размерном виде составляет примерно $P = 100 \mu\text{H}$ на один микровыступ шероховатой поверхности.

На распределениях контактного давления, представленных на рис. 3, области менисков по краям области контакта оказываются очень узкими, но в них развивается более значительное отрицательное давление. Более заметна и асимметрия эпюры давления, особенно при уменьшении внешней нагрузки. Существование контакта по конечной области при нулевой нагрузке (штриховая кривая 2 на рис. 3) и при некоторых отрицательных нагрузках (штрихпунктирная

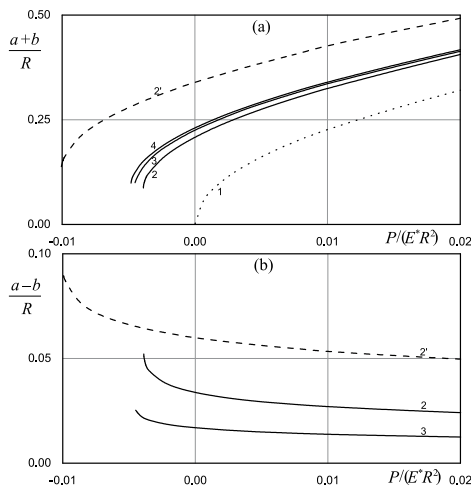


Рис. 4. Ширина области контакта (а) и ее смещение (б) в зависимости от нормальной нагрузки при отсутствии жидкости (кривая 1) и при наличии менисков с параметрами $p_0 / E^* = 0.75$, $\gamma / (E^* R) = 10^{-3}$ и различных $\Delta\phi = \pi/2$ (кривые 2), $\Delta\phi = \pi/4$ (кривые 3), $\Delta\phi = 0$ (кривая 4). Кривые 2' построены при $p_0 / E^* = 0.75$, $\Delta\phi = \pi/2$, $\gamma / (E^* R) = 5 \cdot 10^{-3}$.

кривая 3 на рис. 3) обусловлено капиллярной адгезией, т.е. отрицательным давлением под искривленными поверхностями менисков.

4.2. Анализ контактных характеристик. Расчет размера области контакта, ее смещения, а также размеров менисков проводился в диапазоне параметров, характерных для случая более выраженной адгезии, чтобы влияние менисков на контактные характеристики было более заметным. На рис. 4 представлены зависимости безразмерной ширины области контакта $(a+b)/R$ и смещения области контакта $(a-b)/R$ относительно оси y от нормальной нагрузки на цилиндр $P/(E^* R^2)$. Пунктирная линия 1 соответствует решению плоской контактной задачи при отсутствии мениска. Сплошные кривые 2–4 построены при безразмерном капиллярном давлении $p_0 / E^* = 0.75$, поверхностном натяжении $\gamma / (E^* R) = 10^{-3}$ и различных значениях краевого угла смачивания $\Delta\phi = \pi/2$, $\pi/4$ и 0 соответственно. Штриховые кривые 2' построены при тех же величинах, что и кривые 2, но при более высоком поверхностном натяжении жидкости: $\gamma / (E^* R) = 5 \cdot 10^{-3}$. Кривая 1 (при отсутствии мениска) и кривая 4 (при отсутствии гистерезиса смачивания) построены только на рис. 4,а, поскольку решение задачи в этих двух случаях симметрично, и смещение области контакта равно нулю.

Сравнение кривой 1 с кривыми 2–4 на рис. 4,а показывает, что вследствие капиллярной адгезии, поверхности контактируют по конечной области не только при положительных, но и при отрицательных нагрузках. При этом максимальная отрицательная нагрузка, при которой происходит разрыв контакта (сила отрыва), существенно возрастает с увеличением безразмерного поверхностного натяжения жидкости $\gamma / (E^* R)$ и незначительно уменьшается с увеличением гистерезиса угла смачивания $\Delta\phi$. Результаты, представленные на рис. 4,а и б также показывают, что увеличение гистерезиса смачивания приводит к некоторому уменьшению площадки контакта и к значительному ее сдвигу в сторону, противоположную скольжению

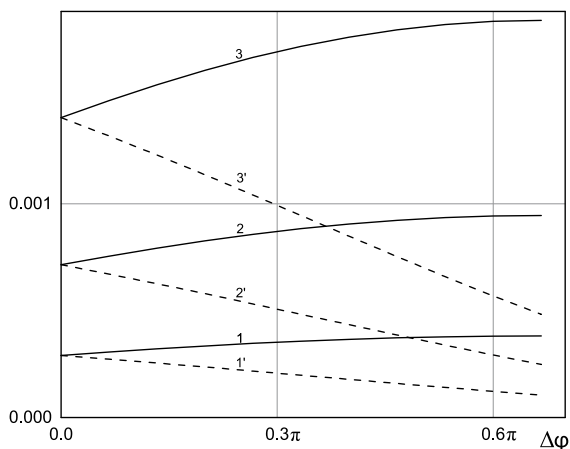


Рис. 5. Ширина менисков на выходе из контакта $(a_1 - a)/R$ (кривые 1–3) и на входе в контакт $(b_1 - b)/R$ (кривые 1'–3') в зависимости от гистерезиса угла смачивания при $\gamma/(E^*R) = 1.5 \cdot 10^{-4}$ (кривые 1, 1', 2 и 2') и $\gamma/(E^*R) = 3 \cdot 10^{-4}$ (3 и 3'), а также при $p_0/E^* = 0.8$ (кривые 1 и 1') и $p_0/E^* = 0.5$ (кривые 2, 2', 3 и 3').

индентора. Следует отметить, что все эффекты капиллярной адгезии наиболее сильно проявляются при относительно малых положительных, нулевых и отрицательных значениях внешней нормальной нагрузки P .

На рис. 5 представлены зависимости ширины мениска на выходе из контакта $(a_1 - a)/R$ (сплошные линии 1–3) и на входе в контакт $(b_1 - b)/R$ (штриховые линии 1'–3') от гистерезиса угла смачивания $\Delta\phi$. Кривые 1, 1', 2, 2' построены при меньшем безразмерном поверхностном натяжении жидкости $\gamma/(E^*R) = 1.5 \cdot 10^{-4}$, кривые 3 и 3' — при большем $\gamma/(E^*R) = 3 \cdot 10^{-4}$. Кривые 1, 1', 2, 2', 3, 3' отличаются безразмерным капиллярным давлением — $p_0/E^* = 0.8$ и 0.5 соответственно. Все кривые на рис. 5 построены при внешней нормальной нагрузке $P = 0$.

Увеличение гистерезиса угла $\Delta\phi$ приводит к тому, что мениск на входе в контакт сужается, а на выходе — расширяется. При этом с увеличением безразмерного поверхностного натяжения обе зоны мениска расширяются, а с увеличением капиллярного давления — наоборот, сужаются.

4.3. Расчет силы трения. Результаты, приведенные в п. 4.1 и 4.2 показывают, что гистерезис смачивания приводит к несимметричному расположению области контакта и областей мениска относительно оси симметрии цилиндра, распределение контактного давления также асимметрично. Это, в свою очередь, приводит к возникновению тангенциальной силы, действующей со стороны упругого полупространства на цилиндр несмотря на то, что постановка задачи предполагает нулевые тангенциальные напряжения на границе полупространства ($\tau_{xy} = 0$ при $y = 0$).

Рассчитаем тангенциальную силу T , которую надо приложить к цилиндру, чтобы обеспечить его движение с постоянной скоростью по границе упругого полупространства. Эта сила равна компоненте силы реакции полупространства

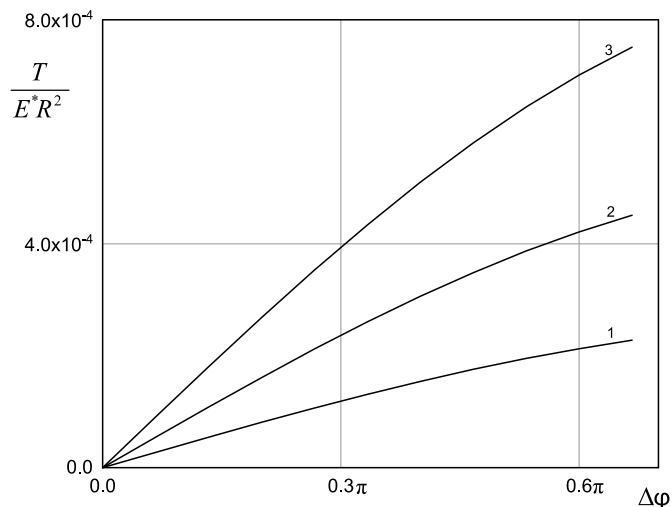


Рис. 6. Сила трения в зависимости от гистерезиса угла смачивания при $p_0 / E^* = 0.8$, $P = 0$ и различных $\gamma / (E^* R) = 1.5 \cdot 10^{-4}$, $3 \cdot 10^{-4}$ и $5 \cdot 10^{-4}$ (кривые 1–3 соответственно).

вдоль оси E . Поскольку размер области взаимодействия считается много меньшим радиуса цилиндра, $a_1 + b_1 \ll R$, справедливо соотношение

$$T = -\frac{1}{R} \int_{-a_1}^{b_1} x \sigma_y(x, 0) dx = \frac{1}{R} \int_{-a}^b x p(x) dx - \frac{p_0}{2R} (a^2 - a_1^2 + b_1^2 - b^2), \quad (4.2)$$

где функция $p(x)$ определяется выражением (3.6), а величины a , b , a_1 и b_1 — решением системы уравнений (3.8), (3.9). Касательную силу T , действующую со стороны упругого основания на цилиндр и препятствующую его скольжению, можно также назвать силой сопротивления скольжению или силой трения, обусловленной капиллярной адгезией. Ниже представлены результаты расчета безразмерной силы трения $T / (E^* R^2)$ и соответствующего ей коэффициента трения $\mu = T / P$.

На рис. 6 представлены зависимости силы трения $T / (E^* R^2)$, рассчитанной согласно (4.2), от гистерезиса угла смачивания $\Delta\phi$. Кривые 1, 2 и 3 построены при безразмерном капиллярном давлении $p_0 / E^* = 0.8$ и безразмерном поверхностном натяжении жидкости $\gamma / (E^* R) = 1.5 \cdot 10^{-4}$, $3 \cdot 10^{-4}$ и $5 \cdot 10^{-4}$ соответственно. Видно, что как возрастание гистерезиса угла смачивания, так и возрастание поверхностной энергии жидкости приводит к заметному увеличению силы трения.

Согласно результатам, приведенным на рис. 6, безразмерная сила трения $T / (E^* R^2)$, обусловленная капиллярной адгезией, равна нулю при отсутствии гистерезиса смачивания ($\Delta\phi = 0$). Безразмерная сила $T / (E^* R^2)$ возрастает как с увеличением гистерезиса смачивания, так и с возрастанием безразмерного поверхностного натяжения жидкости, оставаясь довольно малой по величине. Следует отметить однако, что результаты, приведенные на рис. 6, соответствуют отсутствию внешней нормальной нагрузки $P = 0$, при этом сила, препятствующая

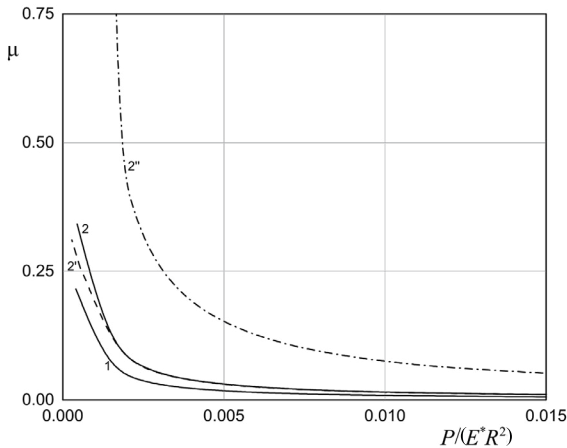


Рис. 7. Коэффициент трения в зависимости от нормальной нагрузки при $\Delta\phi = \pi/4$ (кривая 1) и $\Delta\phi = \pi/2$ (кривые 2, 2', 2''), при $p_0/E^* = 0.75$ (кривые 1, 2, 2'') и $p_0/E^* = 0.15$ (кривая 2'), а также при $\gamma/(E^*R) = 10^{-3}$ (кривые 1, 2, 2') и $\gamma/(E^*R) = 5 \cdot 10^{-3}$ (кривая 2'').

скольжению выступа, остается отличной от нуля, что может оказывать значительное влияние при взаимодействии поверхностей высокоточных устройств, в сопряжениях которых взаимодействующие поверхности характеризуются высокой гладкостью (характерные радиусы поверхностных неровностей велики), а нагрузки малы, или требуется удерживать поверхности от непосредственного контакта друг с другом.

Поскольку сила трения T отлична от нуля при нулевой нормальной нагрузке P на цилиндр и, как показали результаты расчета, незначительно возрастает при возрастании этой нагрузки, то коэффициент трения $\mu = T/P$ достигает значительных величин при малой нагрузке и резко убывает с ее возрастанием, что характерно для адгезионного механизма трения. Этот эффект иллюстрируется графиками на рис. 7.

На рис. 7 представлены зависимости коэффициента трения μ от нормальной нагрузки на цилиндр $P/(E^*R^2)$. Сплошные кривые 1 и 2 построены при безразмерном капиллярном давлении $p_0/E^* = 0.75$, поверхностном натяжении $\gamma/(E^*R) = 10^{-3}$ и различных значениях краевого угла смачивания $\Delta\phi = \pi/4$ (кривая 1) и $\Delta\phi = \pi/2$ (кривая 2). Штриховая линия 2' построена при тех же значениях параметров, что и кривая 2, но при более низком давлении в менисках $p_0/E^* = 0.15$. Штрихпунктирная кривая 2'' построена при тех же значениях параметров, что и кривая 2, но при более высоком поверхностном натяжении жидкости: $\gamma/(E^*R) = 5 \cdot 10^{-3}$.

Результаты показывают, что изменение величины капиллярного давления, связанное с изменением влажности воздуха согласно (4.1), незначительно влияет на коэффициент трения. Однако само наличие мениска существенно — без него сила трения, вызванная капиллярной адгезией, равна нулю. К более

значительному возрастанию коэффициента трения приводит увеличение гистерезиса угла смачивания и особенно, увеличение безразмерного поверхностного натяжения жидкости.

Заметим, что гистерезис угла смачивания зависит от скорости скольжения и возрастает при увеличении этой скорости [21]. Таким образом, можно заключить, что сила и коэффициент трения, обусловленные капиллярной адгезией, будут возрастать с увеличением скорости скольжения.

5. Заключение. Построено решение контактной задачи о скольжении жесткого цилиндра по поверхности упругого полупространства в плоской постановке при наличии менисков жидкости на входе и выходе из контакта с учетом гистерезиса смачивания. Получено аналитическое выражение для контактного давления и система из четырех уравнений для численного определения координат концов области контакта и зон менисков. Проведен численный расчет и анализ полученных результатов в диапазоне входных параметров, соответствующих ситуации, когда скользящий цилиндр моделирует отдельный микровыступ шероховатой поверхности.

Установлено, что гистерезис смачивания при скольжении индентора приводит к сужению мениска, находящегося на входе в контакт и расширению мениска на выходе из контакта. При этом распределение нормальных давлений на поверхности упругого полупространства становится несимметричным относительно оси симметрии индентора, что приводит к появлению силы сопротивления скольжению — силы трения, вызванной капиллярной адгезией.

Увеличение гистерезиса смачивания (которое может быть связано, в частности, с увеличением скорости скольжения индентора) приводит к некоторому уменьшению области контакта и максимальной отрицательной силы, которую может выдержать контакт (силы отрыва), при этом существенно увеличивается асимметрия контакта, мениск на входе в контакт становится еще уже, а на выходе — еще шире, и как следствие, увеличивается сила трения, вызванная капиллярной адгезией.

Расчеты показали, что даже небольшое увеличение параметра, включающего отношение поверхностного натяжения жидкости к приведенному модулю упругости полупространства, приводит к заметному увеличению ширины области контакта, ее смещения относительно оси симметрии, а также силы трения. При этом изменение безразмерного капиллярного давления в диапазоне, определяемом капиллярной конденсацией из атмосферы при различной влажности, влияет на перераспределение контактных давлений и размер области контакта, но слабо влияет на величину силы трения.

Результаты работы могут быть использованы для предсказания и управления трением в сопряжениях, работающих во влажной атмосфере и характеризующихся высокой гладкостью взаимодействующих поверхностей и малыми нагрузками.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700050-1) и частично поддержана грантом РФФИ № 21-58-52006 МНТ_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bhushan B., Dugger M.T.* Liquid-mediated adhesion at the thin film magnetic disk/disk interface // *J. Tribol.* 1990. V. 112. № 2. P. 217–223. <https://doi.org/10.1115/1.2920244>
2. *Tian H., Matsudaira T.* Effect of relative humidity on friction behavior of the head/disk interface // *IEEE Trans. Magn.* 1992. V. 28. № 5. P. 2530–2532. <https://doi.org/10.1109/20.179546>
3. *Maboudian R., Ashurst W.R., Carraro C.* Tribological challenges in micromechanical systems // *Tribol. Lett.* 2002. V. 12. P. 95–100. <https://doi.org/10.1023/A:1014044207344>
4. *Klaassen M., de Vries E.G., Masen M.A.* The static friction response of non-glabrous skin as a function of surface energy and environmental conditions // *Biotribology.* 2017. V. 11. P. 124–131. <https://doi.org/10.1016/j.biotri.2017.05.004>
5. *Maugis D., Gauthier-Manuel B.* JKR-DMT transition in the presence of a liquid meniscus // *J. Adhesion Sci. Technol.* 1994. V. 8. № 11. P. 1311–1322. <https://doi.org/10.1163/156856194X00627>
6. *Maugis D.* Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a Dugdale model // *J. Colloid Interface Sci.* 1992. V. 150. № 1. P. 243–269. [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(92\)90285-T](https://doi.org/10.1016/0021-9797(92)90285-T)
7. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Контактное взаимодействие упругих тел при наличии капиллярной адгезии // *ПММ.* 1999. Т. 63. Вып. 1. С. 128–137. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(99\)00017-9](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(99)00017-9)
8. *Makhovskaya Yu. Yu., Goryacheva I.G.* The combined effect of capillarity and elasticity in contact interaction // *Tribology Inter.* 1999. V. 32. № 9. P. 507–515. [https://doi.org/10.1016/S0301-679X\(99\)00080-8](https://doi.org/10.1016/S0301-679X(99)00080-8)
9. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Адгезионное взаимодействие упругих тел // *ПММ.* 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 279–279. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(01\)00031-4](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(01)00031-4)
10. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Y.Y.* Capillary adhesion effect in contact interaction of soft materials // *Contact Problems for Soft, Biological and Bioinspired Materials.* 2022. P. 73–92. https://doi.org/10.1007/978-3-030-85175-0_4
11. *Fan H., Gao Y.X.* Elastic solution for liquid-bridging- induced microscale contact // *J. Appl. Phys.* 2001. V. 90. № 12. P. 5904–5910. <https://doi.org/10.1063/1.1415057>
12. *Маховская Ю.Ю.* Капиллярная адгезия упругих тел в условиях частичного проскальзывания // *ПММ.* 2022. Т. 86. № 2. С. 235–250. <https://doi.org/10.31857/S0032823522020072>
13. *Чекина О.Г.* О трении шероховатых поверхностей, разделенных тонким слоем жидкости // *Трение и износ.* 1998. Т. 19. № 3. С. 306–311.
14. *Popov V.L., Lyashenko I.A., Starcevic J.* Shape of a sliding capillary contact due to the hysteresis of contact angle: Theory and experiment // *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering.* 2021. V. 19. № 2. P. 175–185. <https://doi.org/10.22190/FUME201221005P>
15. *Маховская Ю.Ю.* Скольжение вязкоупругих тел при наличии адгезии // *ПММ.* 2005. Т. 69. Вып. 2. С. 334–344.
16. *Carbone G., Mangialardi L.* Adhesion and friction of an elastic half-space in contact with a slightly wavy rigid surface // *J. Mech. Phys. Solids.* 2004. V. 52. № 6. P. 1267–1287. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2003.12.001>
17. *Горячева И.Г., Губенко М.М., Маховская Ю.Ю.* Скольжение сферического индентора по вязкоупругому основанию с учетом сил молекулярного притяжения // *ПМТФ.* 2014. Т. 55. № 1. С. 99–107.
18. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
19. *Горячева И.Г.* Контактная задача качения вязкоупругого цилиндра по основанию из того же материала // *ПММ.* 1973. Т. 37. Вып. 5. С. 925–933. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(73\)90017-8](https://doi.org/10.1016/0021-8928(73)90017-8)
20. *Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М.* Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 398 с.
21. *Gao L., McCarthy T.J.* Contact angle hysteresis explained // *Langmuir.* 2006. V. 22. № 14. P. 6234–6237. <https://doi.org/10.1021/la060254j>

INFLUENCE OF CAPILLARY ADHESION ON THE SLIDING OF A CYLINDER ALONG THE SURFACE OF AN ELASTIC SOLID TAKING ACCOUNT OF WETTING HYSTERESIS

Yu. Yu. Makhovskaya^{a,*}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526 Russia*

^{*}*e-mail: makhovskaya@mail.ru*

Received 31.05.2023

Revised 07.06.2023

Accepted 11.06.2023

Abstract – The contact problem of steady sliding of a rigid cylinder over an elastic half-space in the presence of liquid menisci is considered, taking into account the hysteresis of the contact angle, which leads to different adhesion conditions at the entrance to the contact and at the exit from it. The problem was considered in a flat formulation and was solved by reducing it to the Riemann–Hilbert problem. An analytical expression for the contact pressure and a system of four equations for the numerical determination of the coordinates of the ends of the contact area and the meniscus zones are obtained. The calculation was carried out in the range of input parameters corresponding to the situation when a sliding cylinder models a separate protrusion of a rough surface. The distribution of contact pressure, the size of the contact area and its displacement relative to the axis of symmetry of the cylinder, the width of the menisci at the entrance to and exit from the contact, as well as the friction force caused by capillary adhesion were studied. It has been established, in particular, that the friction force significantly depends on the value of the contact angle hysteresis, and especially on the surface tension of the liquid, but weakly depends on the capillary pressure in the menisci, which, under conditions of thermodynamic equilibrium of the meniscus with the environment, is determined by the humidity of the surrounding air.

Key words: elastic contact, capillary adhesion, contact angle hysteresis, sliding friction

REFERENCES

1. B. Bhushan and M. T. Dugger, “Liquid-mediated adhesion at the thin film magnetic disk/sliding interface,” *J. Tribol.* **112** (2), 217–223 (1990). <https://doi.org/10.1115/1.2920244>
2. H. Tian and T. Matsudaira, “Effect of relative humidity on friction behavior of the head/disk interface,” *IEEE Trans. Magn.* **28** (5), 2530–2532 (1992). <https://doi.org/10.1109/20.179546>
3. R. Maboudian, W. R. Ashurst, and C. Carraro, “Tribological challenges in micromechanical systems,” *Tribol. Lett.* **12**, 95–100 (2002). <https://doi.org/10.1023/A:1014044207344>
4. M. Klaassen, E. G. de Vries, and M. A. Masen, “The static friction response of non-glabrous skin as a function of surface energy and environmental conditions,” *Biotribology* **11**, 124–131 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.biotri.2017.05.004>
5. D. Maugis and B. Gauthier-Manuel, “JKR–DMT transition in the presence of a liquid meniscus,” *J. Adhesion Sci. Technol.* **8** (11), 1311–1322 (1994). <https://doi.org/10.1163/156856194X00627>
6. D. Maugis, “Adhesion of spheres: The JKR–DMT transition using a Dugdale model,” *J. Colloid Interface Sci.* **150** (1), 243–269 (1992). [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(92\)90285-T](https://doi.org/10.1016/0021-9797(92)90285-T)

7. I. G. Goryacheva and Yu. Yu. Makhovskaya, "Capillary adhesion in the contact between elastic solids," J. Appl. Math. Mech. **63** (1), 117–125 (1999). [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(99\)00017-9](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(99)00017-9)
8. Yu. Yu. Makhovskaya and I. G. Goryacheva, "The combined effect of capillarity and elasticity in contact interaction," Tribology Inter. **32** (9), 507–515 (1999). [https://doi.org/10.1016/S0301-679X\(99\)00080-8](https://doi.org/10.1016/S0301-679X(99)00080-8)
9. I. G. Goryacheva and Yu. Yu. Makhovskaya, "Adhesive interaction of elastic bodies," J. Appl. Math. Mech. **65** (2), 273–282 (2001). [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(01\)00031-4](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(01)00031-4)
10. I. G. Goryacheva and Yu. Yu. Makhovskaya, "Capillary adhesion effect in contact interaction of soft materials," in *Contact Problems for Soft, Biological and Bioinspired Materials*, Jin, X. (eds) Contact Problems for Soft, Biological and Bioinspired Materials. Biologically-Inspired Systems, Vol 15, Ed. by F. M. Borodich and X. Jin (Springer, Cham, 2022), pp. 73–92. https://doi.org/10.1007/978-3-030-85175-0_4
11. H. Fan and Y. X. Gao, "Elastic solution for liquid-bridging- induced microscale contact," J. Appl. Phys. **90** (12), 5904–5910 (2001). <https://doi.org/10.1063/1.1415057>
12. Yu. Yu. Makhovskaya, "Capillary adhesion of elastic bodies under the conditions of partial slip," Mech. Solids **57**, 1689–1700 (2022). <https://doi.org/10.3103/S0025654422070123>
13. O. G. Chekina, "On the friction of rough surfaces separated by a thin layer of liquid," Tren. Iznos, **19**, No. 3, 306–311 (1998).
14. V. L. Popov, I. A. Lyashenko, and J. Starcevic, "Shape of a sliding capillary contact due to the hysteresis of contact angle: Theory and experiment," Facta Univ., Ser.: Mech. Eng. **19** (2), 175–185 (2021). <https://doi.org/10.22190/FUME201221005P>
15. Yu. Yu. Makhovskaya, "The sliding of viscoelastic bodies when there is adhesion," J. Appl. Math. Mech. **69** (2), 305–314 (2005). <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2005.03.017>
16. G. Carbone and L. Mangialardi, "Adhesion and friction of an elastic half-space in contact with a slightly wavy rigid surface," J. Mech. Phys. Solids **52** (6), 1267–1287 (2004). <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2003.12.001>
17. I. G. Goryacheva, M. M. Gubenko, and Yu. Yu. Makhovskaya, "Sliding of a spherical indenter on a viscoelastic foundation with the forces of molecular attraction taken into account," J. Appl. Mech. Tech. Phys. **55**, 81–88 (2014). <https://doi.org/10.1134/S0021894414010118>
18. L. A. Galin, *Contact Problems of the Theory of Elasticity and Viscoelasticity* (Nauka, Moscow, 1980) [in Russian].
19. I. G. Goryacheva, "Contact problem of rolling of a viscoelastic cylinder on a base of the same material," J. Appl. Math. Mech. **37** (5), 877–885 (1973). [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(73\)90017-8](https://doi.org/10.1016/0021-8928(73)90017-8)
20. B. V. Derjaguin, N. V. Churaev, and V. M. Muller, *Surface Forces* (Nauka, Moscow, 1985; Springer, 1987).
21. L. Gao and T. J. McCarthy, "Contact angle hysteresis explained," Langmuir **22** (14), 6234–6237 (2006). <https://doi.org/10.1021/la060254j>

УДК 531.36

О РАВНОВЕСИЯХ ТЯЖЕЛОГО ОБРУЧА, ПОДВЕШЕННОГО НА ГВОЗДЕ

© 2024 г. А. А. Буров^{а,*}, В. И. Никонов^{а,**}

*“Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление”
Российской академии наук, Москва, Россия*

**e-mail: jtm@narod.ru*

***e-mail: nikon_v@list.ru*

Поступила в редакцию 07.04.2023 г.

После доработки 22.06.2023 г.

Принята к публикации 02.07.2023 г.

Рассматривается плоская задача о равновесии однородного тяжелого тонкого эллиптического обруча, подвешенного на тонком горизонтальном гвозде. В предположении о том, что между гвоздем и обручем действует сила сухого трения, изучается зависимость множества положений равновесия от коэффициента трения и полуосей эллипса. Полученные результаты распространяются на следующую задачу: описать положения равновесия тяжелого твердого тела (“ружья”), подвешенного на гвозде с помощью веревки, оба конца которой закреплены в теле. Показывается, как такое распространение результатов может быть осуществлено непосредственно в случае, когда центр масс тела располагается посередине между точками подвеса.

Ключевые слова: равновесия тяжелого твердого тела, сухое трение, параметрическая зависимость

DOI: 10.31857/S1026351924010109, EDN: WABISK

1. Введение. Задачи о движении подвешенных объектов представляют собой классический предмет исследования теоретической механики. Речь идет об объектах, размерами которых можно пренебречь (материальных точек), так и о трехмерных объектах. Особый класс составляют задачи, когда материальную точку (бусинку) подвешивают на невесомой нерастяжимой нити, концы которой закреплены. В случае, когда предполагается, что бусинка тяжелая, такая задача рассматривалась, например, в учебниках П. Аппеля [1], раздел 128¹ и Т. Леви-Чивита и У. Амальди [3]². Новый импульс к дальнейшему изучению такого рода систем положили исследования материальных точек, стесненных так называемой леерной связью [5–8] (см. также [9]) в задачах о движении орбитальных тросовых систем.

¹ Раздел 140 в оригинале [2].

² С. 411 в оригинале [5].

Представляет интерес и задача, в определенном смысле двойственная к упомянутой выше: точка (“гвоздь” в используемой ниже терминологии) предполагается неподвижной, а на нее подвешено тело либо с помощью отверстия, либо с помощью тонкой нерастяжимой невесомой нити, прикрепленной к телу двумя концами. В случае плоской задачи, когда отверстие имеет эллиптический профиль, задачи оказываются эквивалентными в силу известного геометрического свойства эллипса. Особый интерес представляет случай, когда нить оказывается шероховатой: между ней и гвоздем действует сила сухого трения. В этом случае именно геометрическая аналогия позволяет разобраться с касательной и нормальной составляющими реакции имеющей место неидеальной связи. Надо заметить, что в упомянутых работах, касающихся леерной связи, наличие сухого трения не предполагается. Это же относится и к недавней публикации [10], в которой исследована плоская задача о существовании и устойчивости равновесий твердого тела, подвешенного на веревке, перекинутой через гвоздь, в предположении об отсутствии трения.

В настоящей работе рассматривается задача о равновесиях в простейшем случае, когда тело — не что иное как тяжелый тонкий однородный эллиптический обруч. В предположении о наличии сухого трения для него исследуется зависимость от параметров свойств семейств неизолированных равновесий. Обсуждается и эквивалентная задача, когда такого рода односторонняя связь реализуется с помощью невесомой нерастяжимой шероховатой нити, к концам которой прикреплено твердое тело.

2. Постановка задачи. На вбитый в вертикальную гладкую стену гвоздь накинута тяжелый однородный обруч, выполненный в форме эллипса. Найти положения равновесия обруча, если его большая и малая полуоси равны a и b ($a \geq b$), а коэффициент трения обруча о гвоздь равен μ . Толщина обруча, равно как и толщина гвоздя, предполагаются пренебрежимо малыми по сравнению с размерами обруча.

3. Решение. Пусть O — геометрический центр обруча, P — гвоздь. В силу симметрии обруча относительно двух взаимно перпендикулярных осей и однородности распределения его массы точка O является центром масс обруча. Условие “накинута” обруча на гвоздь следует трактовать как наличие односторонней связи, такой, что гвоздь может находиться либо внутри обруча, либо на нем самом. Условие наличия гладкой стены определяет ограничение на постановку задачи — рассматривается ее плоский случай.

Принимая во внимание выше сказанное, обруч будет находиться в равновесии относительно стены, если сумма моментов сил, вычисленных относительно точки подвеса, равен нулю. Из этого следует, что точки O и P располагаются на одной вертикали, причем физически реализуем лишь случай, когда точка O располагается ниже точки P . Если указанное требование выполнено, то остается, вообще говоря, определить условие, при котором сила тяжести попадает в угол трения (см., например, [4, 11–13]) с вершиной в точке P , углом раствора $2\alpha_*$: $\operatorname{tg} \alpha_* = \mu$ и биссектрисой, параллельной нормали к эллипсу в точке P . Однако требуемые условия можно вывести и из уравнений равновесия.

Пусть Ox — связанная с обручем система координат, оси Ox и Oy которой направлены, соответственно, по большой и малой полуосям эллипса (рис. 1). В этих осях уравнение обруча имеет вид

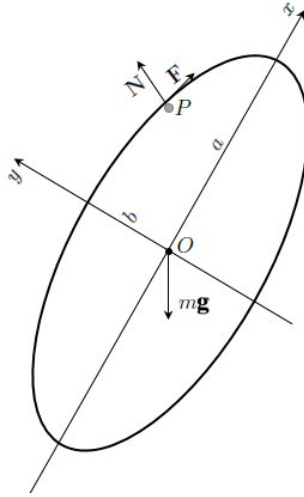


Рис. 1. Тяжелый однородный шероховатый обруч в форме эллипса с полуосями a и b , подвешенный на гвозде P .

$$f(x, y) = 0, f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1. \quad (3.1)$$

Если (x, y) – координаты гвоздя P в этих осях, то этот гвоздь находится внутри обруча или на нем самом при выполнении условия

$$f(x, y) \leq 0.$$

Пусть обруч касается гвоздя. Единичный вектор, направленный из начала координат в точку касания, записывается как

$$\mathbf{e} = \mathbf{r}^{-1}(x, y), \mathbf{r} = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2)$$

Единичный вектор нормаль и единичная касательная к обручу в этой точке записываются как

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \rho^{-1} \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2} \right), \mathbf{\tau} = \rho^{-1} \left(-\frac{y}{b^2}, \frac{x}{a^2} \right) \\ \rho &= \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

соответственно.

Обруч находится под действием трех сил: силы тяжести, нормальной реакции и касательной реакции, именуемой силой трения:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow -m\mathbf{g}\mathbf{e} + N\mathbf{n} + F\mathbf{\tau} = 0, \quad (3.4)$$

здесь m — масса обруча, $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}$ — вектор ускорения свободного падения, записанный в системе координат Oxy .

Домножая скалярно равенство (3.4) на $\mathbf{n}$ и $\mathbf{\tau}$ соответственно, имеем

$$N = mg(\mathbf{e}, \mathbf{n}), F = mg(\mathbf{e}, \mathbf{\tau}). \quad (3.5)$$

Подставляя найденные величины (3.5) в условие равновесия, определяемое законом Кулона—Амонтона

$$|F| \leq \mu |N|,$$

после сокращения на mg имеем

$$|\mathbf{e}, \mathbf{\tau}| \leq \mu |\mathbf{e}, \mathbf{n}|. \quad (3.6)$$

С помощью соотношений (3.2), (3.3) неравенство (3.6) может быть записано в виде

$$\left| xy \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \right| \leq \mu \Leftrightarrow |xy| \leq \mu_* \equiv \mu \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}. \quad (3.7)$$

Параметр μ_* положителен и неограниченно возрастает по мере сближения значений a и b .

Задаваемая неравенством (3.7) область на плоскости (x, y) ограничена парой гипербол. Ее пересечение с задающим обруч эллипсом (3.1) всегда непусто: даже при $\mu = 0$, т.е. когда трение отсутствует, имеют место равновесия на которых обруч подвешен за концы своих полуосей (рис. 2).

Это равновесия можно рассматривать как порождающие для семейств неизолированных равновесий, существующих при $\mu > 0$.

Анализ взаимного расположения эллипса (3.1) и области (3.7) показывает, что при выполнении условия

$$2\mu_* < ab \Leftrightarrow 2\mu ab < a^2 - b^2 \quad (3.8)$$

обруч может быть подвешен как за точки, прилегающие к короткой оси, для которых выполнено неравенство

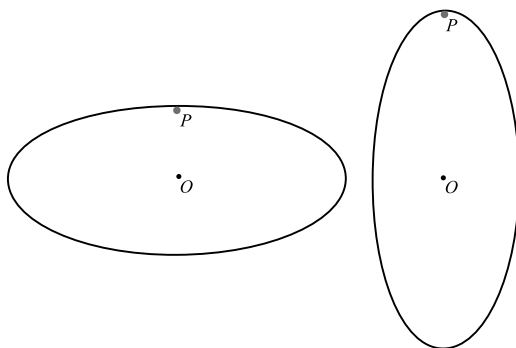


Рис. 2. Частные случаи равновесий при $\mu=0$.

$$y^2 \geq \frac{b^2 \left(a^2 - b^2 + \sqrt{(a^2 - b^2)^2 - 4\mu^2 a^2 b^2} \right)}{2(a^2 - b^2)}, \quad (3.9)$$

так и за точки, прилегающие к длинной оси, для которых выполнено неравенство

$$y^2 \leq \frac{b^2 \left(a^2 - b^2 - \sqrt{(a^2 - b^2)^2 - 4\mu^2 a^2 b^2} \right)}{2(a^2 - b^2)}. \quad (3.10)$$

Этим точкам отвечают семейства неизолированных равновесий. На рис. 3 соответствующие точки эллипса изображены серым. Между этими областями имеются точки, за которые обруч не может быть подвешен так, чтобы оставаться в равновесии.

При выполнении условия

$$2\mu_* \geq ab \Leftrightarrow 2\mu ab \geq a^2 - b^2 \quad (3.11)$$

обруч может быть подвешен за любую свою точку.

Введем безразмерный параметр

$$p = \frac{b}{a}.$$

Согласно предположениям, этот параметр изменяется между нулем (предельный случай: “сдвоенный отрезок, соединенный в концевых точках”) и единицей (“окружность”). Тогда неравенства (3.8) и (3.11) примут вид

$$2\mu p < 1 - p^2 \Leftrightarrow \mu < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - p \right)$$

и

$$2\mu p \geq 1 - p^2 \Leftrightarrow \mu \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - p \right)$$

соответственно.

Задаваемые этими неравенствами области изображены на рис. 4. Для значений параметров из закрашенной области обруч может быть подвешен за любую его

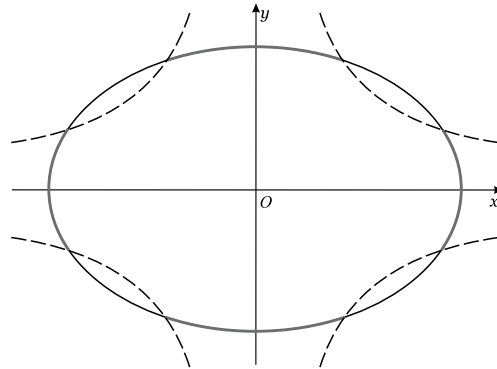


Рис. 3. Семейства неизолированных равновесий (серый цвет).

точку. Для остальных значений параметров обруч может быть подвешен только за те точки, для которых выполняются неравенства (3.9) и (3.10).

4. Иная интерпретация полученных результатов. Полученные выше результаты допускают применение к следующей задаче, навеянной высказываниями о театральной жизни³.

На вбитый в гладкую вертикальную стену гвоздь повесили за ремень охотничье ружье. Найти положения равновесия ружья, если точки крепления ремня на ружье F' и F'' удалены друг от друга на расстояние $2c$, центр масс ружья — точка O — находится между этими точками посередине, длина ремня равна $2a$, $a \geq c$, а коэффициент трения ремня о гвоздь равен μ . Толщина ремня и толщина гвоздя предполагаются пренебрежимо малыми по сравнению с размерами ружья. Ремень предполагается абсолютно гибким, невесомым и нерастяжимым.

5. Решение. Прежде всего заметим, что в случае, когда ружье находится в подвешенном состоянии, ремень претерпевает излом в точке подвеса, и обе его части между точками крепления и точкой подвеса представляют собой отрезки прямых. При этом в силу нерастяжимости ремня сумма длин этих отрезков не зависит от возможного положения точки подвеса и равна длине этого ремня. Таким образом, опираясь на геометрическое определение эллипса (см., например, [14]), делаем вывод о том, что в системе отсчета, связанном с ружьем, множество точек, в которых может находиться гвоздь в положении равновесия, представляет собой эллипс с фокусами в точках крепления ремня.

В системе координат, связанной с ружьем, при условии натянутости ремня множество возможных положений гвоздя представляет собой эллипс с центром

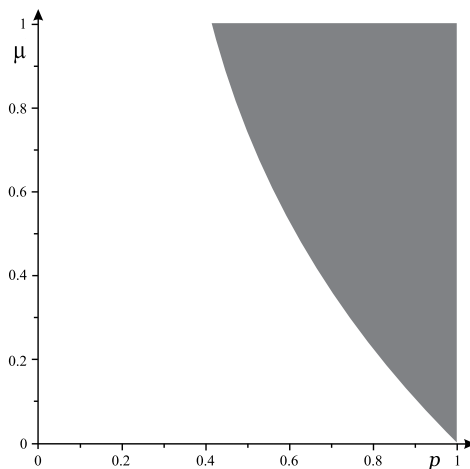


Рис. 4. Темной области на плоскости параметров (p, μ) отвечают точки, для значений которых обруч будет находиться в равновесии при подвешивании за любую его точку.

³ “Если в начале пьесы на стене висит ружье, то (к концу пьесы) оно должно выстрелить”. Известная интерпретация высказывания из письма Антона Павловича Чехова (1860–1904) к литератору Александру Лазареву-Грузинскому от 1 ноября 1889 г.

в точке O , с фокусами в точках F' и F'' , с большой полуосью, равной a , и с малой полуосью $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Тогда решение задачи сводится к решению задачи, разобранному выше после подстановки в него указанного значения величины малой полуоси b . Ответ таков:

Во введенной по аналогии с предыдущей задачей системе координат при выполнении условия

$$\mu < \frac{c^2}{2a\sqrt{a^2 - c^2}} \quad (5.1)$$

охотничье ружье может быть подвешено как за те точки ремня, для которых выполнено неравенство

$$y^2 \geq \frac{(a^2 - c^2)(c^2 + \sqrt{c^4 - 4\mu^2 a^2 (a^2 - c^2)})}{2c^2}, \quad (5.2)$$

так и за точки, для которых

$$y^2 \leq \frac{(a^2 - c^2)(c^2 - \sqrt{c^4 - 4\mu^2 a^2 (a^2 - c^2)})}{2c^2}. \quad (5.3)$$

При выполнении условия

$$\mu \geq \frac{c^2}{2a\sqrt{a^2 - c^2}} \quad (5.4)$$

ружье может быть подвешено за любую точку ремня.

Введем несколько иным способом безразмерный параметр q : положим

$$q = \frac{c}{a}.$$

Согласно предположениям, этот параметр изменяется между нулем (“точки крепления ремня совпадают”) и единицей (“ремень вытянут вдоль ружья”). Тогда если

$$Q(q) = \frac{q^2}{2\sqrt{1 - q^2}},$$

то неравенства (5.1) и (5.4) примут вид

$$\mu < Q(q), \quad \mu \geq Q(q)$$

соответственно.

Задаваемые этими неравенствами области на плоскости (q, μ) изображены на рис. 5. Для значений параметров из закрашенной области ружье может быть подвешено за любую точку ремня. Для остальных значений параметров ружье

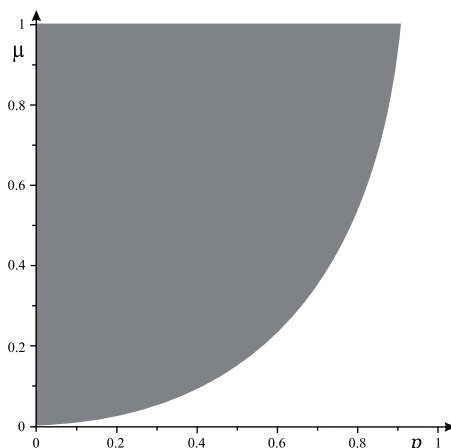


Рис. 5. Темной области на плоскости параметров (q, μ) отвечают точки, для значений которых ружье будет находиться в равновесии при подвешивании за любую ремня.

может быть подвешено только за те точки ремня, для которых выполняются неравенства (5.2) и (5.3).

6. Механическая интерпретация. Представляет некоторый интерес механическая интерпретация найденных решений. Обозначим a' и a'' длины частей ремня от точки подвеса до точек F' и F'' соответственно, $a' + a'' = 2a$ (рис. 6). Расстояние от точки подвеса до центра масс O обозначим r . Ружье удерживается за счет сил натяжения ремня T и T' , “противодействующих” силе тяжести mg . Условие равновесия записывается как

$$mg + T + T' = 0,$$

т.е. эти три вектора составляют треугольник сил. Этот треугольник подобен изображенному на рис. 6 треугольнику с вертикальной стороной, равной $2r$, и двумя другими сторонами, равными a' и a'' соответственно. Из теоремы косинусов

$$a'^2 = r^2 - 2rc \cos \alpha + c^2$$

$$a''^2 = r^2 + 2rc \cos \alpha + c^2$$

откуда

$$r = \sqrt{\frac{1}{2}(a'^2 + a''^2) - c^2}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{4rc}(a''^2 - a'^2). \quad (6.1)$$

Из подобия треугольников получается пропорция

$$\frac{T'}{a'} = \frac{T''}{a''} = \frac{mg}{2r}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Том 1. Статика. Динамика точки. М.: Физматлит. 1960. 516 с.
2. *Appell P.* Traité de mécanique rationnelle. Tome premier. Paris: Gauthier-Villars. 1893. 552 p.
3. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Том 1. Часть 2. М.: Иностранная литература. 1952. 326 с.
4. *Levi-Civita T., Amaldi U.* Lezioni di Meccanica Razionale. V. 1, 2d Edition. Bologna: Nicola Zanichelli. 1923. 744 p.
5. *Rodnikov A.V.* The algorithms for capture of the space garbage using “leier constraint” // Regular and Chaotic Dynamics. 2006. V. 11. № 4. P. 483–489. <https://doi.org/10.1070/RD2006v011n04ABEH000366>
6. *Родников А.В.* О влиянии леерной связи на движение гантелевидного тела в центральном ньютоновском силовом поле // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 4. С. 519–533.
7. *Родников А.В.* О движении материальной точки вдоль леера, закрепленного на прецессирующем твердом теле // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 2. С. 295–311.
8. *Rodnikov A.V., Krasil'nikov P.S.* On spacial motions of an orbital tethered system // Rus. J. Nonlinear Dyn. 2017. V. 13. № 4. P. 505–518. <https://doi.org/10.20537/nd1704004>
9. *Буров А.А.* О существовании и устойчивости равновесий механических систем со связями, реализуемыми большими потенциальными силами // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. № 2. С. 222–230.
10. *Genda A., Stepan G.* On the stability of bodies suspended asymmetrically with an inelastic rope // Acta Mech. 2023. V. 234. P. 3009–3018. <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03546-x>
11. *Jellet J.H.* A treatise on the theory of friction. L.: MacMillan. 1872. 220 p.
12. *Иванов А.П.* Основы теории систем с трением. Ижевск: НИЦ “РХД”. 2011. 304 с.
13. *Розенблат Г.М.* Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела. М.: URSS. 2011. 208 с.
14. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии линейной алгебры. М.: Наука. 1979. 512 с.
15. *Стрелков С.П.* Маятник Фроуда // ЖТФ. 1933. Т. 3. С. 563–573.
16. *Баталова З.С., Бирюков В.В., Неймарк Ю.И.* О движениях маятника Фроуда // Изв. вузов. Матем. 1977. № 3. С. 3–8.
17. *Магнус К.* Колебания: Введение в исследование колебательных систем. М.: Мир. 1982. 304 с.
18. *Андронов В.В., Журавлев В.Ф.* Сухое трение в задачах механики. М.—Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. Институт компьютерных исследований. 2010. 184 с.
19. *Awrejcewicz J., Holicke M.* Analytical prediction of chaos in rotated Froude pendulum // Non-linear Dynamics. 2007. V. 47. P. 3–24. <https://doi.org/10.1007/s11071-006-9054-8>
20. *Буров А.А.* Задачник Кванта. Задача Ф2642 // Квант. 2021. № 1. С. 24.
21. *Буров А.А.* Задачник Кванта. Задача Ф2642. Решение // Квант. 2021. № 4. С. 23.
22. *Сумбатов А.С.* Об условиях возникновения скольжения в плоской системе с трением // ПММ. 1995. Т. 59. № 6. С. 887–894.

ON THE EQUILIBRIA OF A HEAVY HOOP SUSPENDED ON A NAIL

A. A. Burov^{a,*}, and V. I. Nikonov^{a,**}^a Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333 Russia

*e-mail: jtm@narod.ru

**e-mail: nikon_v@list.ru

Received 07.04.2023

Revised 22.06.2023

Accepted 02.07.2023

Abstract — We consider the plane problem of the equilibrium of a homogeneous heavy thin elliptical hoop suspended on a thin horizontal nail. Under the assumption that a dry friction force acts between the nail and the hoop, the dependence of the set of equilibrium positions on the friction coefficient and the semi-axes of the ellipse is studied. The results obtained apply to the following problem: to describe the equilibrium positions of a heavy solid (“gun”) suspended on a nail using a rope, both ends of which are fixed in the body. It is shown how such a distribution of results can be carried out directly in the case when the center of mass of the body is located in the middle between the suspension points.

Keywords: equilibrium of a heavy solid, dry friction, parametric dependence

REFERENCES

1. P. Appell, *Theoretical Mechanics*, Vol. 1: *Statics. Dynamics Points* (Fizmatlit, Moscow, 1960) [in Russian].
2. P. Appell, *Traité de Mécanique Rationnelle*. Tome I (Gauthier-Villars, Paris, 1893).
3. T. Levi-Civita and U. Amaldi, *Theoretical Mechanics Course*, Vol. 1, Part. 2 (Inostr. Lit., Moscow, 1952) [in Russian].
4. T. Levi-Civita and U. Amaldi, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Vol. 1, 2nd ed. (Nicola Zanichelli, Bologna, 1923).
5. A. V. Rodnikov, “The algorithms for capture of the space garbage using “leier constraint,” *Reg. Chaot. Dyn.* **11** (4), 483–489 (2006). <https://doi.org/10.1070/RD2006v011n04ABEH000366>
6. A. V. Rodnikov, “On the leier influence on a dumbbell motion in the central Newtonian force field,” *Nelin. Dinam.* **5** (4), 519–533 (2009). <https://doi.org/10.20537/nd0904005>
7. A. V. Rodnikov, “On a particle motion along the leier fixed in a precessing rigid body,” *Nelin. Dinam.* **7** (2), 295–311 (2011). <https://doi.org/10.20537/nd1102007>
8. A. V. Rodnikov and P. S. Krasil’nikov, “On spacial motions of an orbital tethered system,” *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2017. V. **13** (4), 505–518 (2017). <https://doi.org/10.20537/nd1704004>

9. A. A. Burov, "The existence and stability of the equilibria of mechanical systems with constraints produced by large potential forces," J. Appl. Math. Mech. **67** (2), 193–200 (2003). [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(03\)90005-0](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(03)90005-0)
10. A. Genda and G. Stepan, "On the stability of bodies suspended asymmetrically with an inelastic rope," Acta Mech. **234**, 3009–3018 (2023). <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03546-x>
11. J. H. Jellet, *A Treatise on the Theory of Friction* (MacMillan, London, 1872).
12. A. P. Ivanov, *Fundamentals of the Theory of Systems with Friction* (Reg. Khaot. Dyn., Moscow, 2011) [in Russian].
13. G. M. Rosenblat, *Dry Friction and Unilateral Constraints in Solid Mechanics* (URSS, Moscow, 2011) [in Russian].
14. P. S. Aleksandrov, *Course of Analytic Geometry and Linear Algebra* (Nauka, Moscow, 1979) [in Russian].
15. S. P. Strelkov, "Froude's pendulum," Zh. Tekhn. Fiz. **3**, 563–573 (1933).
16. Z. S. Batalova, V. V. Biryukov, and Y.I. Neimark, "On the motions of the Froude pendulum," Izv. Vuzov. Mat., No. 3, 3–8 (1977).
17. K. Magnus, *Oscillations: Introduction to Research of Oscillatory Systems* (Mir, Moscow, 1982) [in Russian].
18. V. V. Andronov and V. Ph. Zhuravlev, *Dry Friction in Problems of Mechanics* (IKI, NITs "Regular and Chaotic Dynamics," Moscow-Izhevsk, 2010) [in Russian].
19. J. Awrejcewicz and M. Holicke, "Analytical prediction of chaos in rotated Froude pendulum," Nonlin. Dyn. **47**, 3–24 (2007). <https://doi.org/10.1007/s11071-006-9054-8>
20. A. A. Burov, "Task F2642," Kvant, No. 1, 24 (2021).
21. A. A. Burov, "Task F2642. Solution," Kvant, No. 4, 23 (2021).
22. A. S. Sumbatov, "Conditions for the onset of sliding in a plane system with friction," J. Appl. Math. Mech. **59** (6), 845–852 (1995). [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(95\)00117-4](https://doi.org/10.1016/0021-8928(95)00117-4)

УДК 629.7

КВАТЕРНИОННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА (КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА) С КОМБИНИРОВАННЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

© 2024 г. М. В. Левский^{а,*}

^а Научно-исследовательский институт космических систем им. А.А. Максимова –
филиал Государственного космического научно-производственного центра
им. М.В. Хруничева, г. Королев

* e-mail: levskii1966@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2023 г.

После доработки 22.06.2023 г.

Принята к публикации 01.07.2023 г.

Исследована задача оптимального разворота твердого тела (космического аппарата) из произвольного начального в предписанное конечное угловое положение при наличии ограничений на управляющие переменные. Время разворота задано. Для оптимизации программы управления вращением применяется комбинированный критерий качества, отражающий энергетические затраты. Минимизируемый функционал объединяет в заданной пропорции интеграл энергии вращения и вклад управляющих сил на совершение маневра. На основе принципа максимума Л.С. Понтрягина и кватернионных моделей управляемого движения твердого тела получено аналитическое решение поставленной задачи. В аналитическом виде раскрыты свойства оптимального движения. Для построения оптимальной программы вращения записаны формализованные уравнения и расчетные формулы. Приведены аналитические уравнения и соотношения для нахождения оптимального управления. Даны ключевые соотношения, определяющие оптимальные значения параметров алгоритма управления вращением. Кроме того, описана конструктивная схема решения краевой задачи принципа максимума для произвольных условий разворота (начального и конечного положений и моментов инерции твердого тела). Для динамически симметричного твердого тела получено решение задачи переориентации в замкнутой форме. Представлены численный пример и результаты математического моделирования, подтверждающие практическую реализуемость разработанного метода управления ориентацией космического аппарата.

Ключевые слова: кватернионы, управление ориентацией, принцип максимума, комбинированный критерий качества, управляющие функции, алгоритм управления, краевая задача

Введение. Подробно изучена задача переориентации твердого тела, например, космического аппарата (КА) из исходного углового положения в положение заданной ориентации. Главным отличием предложенного решения является использование нового показателя качества в условиях ограниченности управляющих переменных.

Огромное количество работ изучают проблемы управления угловым положением твердого тела в различных формулировках и использующих широкий диапазон методов решения [1–26]. Например, одни авторы предлагают синтез оптимального управления, основанный на методе аналитического конструирования оптимальных регуляторов [1], другие используют концепцию обратных задач динамики для получения гладких управлений для реализации пространственного вращения КА, когда программная траектория разыскивается в классе полиномов заданной степени, коэффициенты которых определяются известными значениями фазовых переменных в граничных точках траектории [2]. Особое внимание уделяется проблемам оптимального управления [1, 3–24]. Методы оптимизации различны. В частности, решения задачи переориентации твердых тел различной конфигурации, основанные на принципе максимума Л.С. Понтрягина, рассматриваются в [8–24]. Ранее использовались классические критерии качества процесса управления (быстродействие [4–12], минимум расхода топлива [13], минимум энергозатрат [11, 13, 14] и др.); более подробно рассмотрены кинематические задачи разворота [15–18]. Задачи оптимального управления в динамической постановке представляют особый интерес, однако они встречаются определенные сложности при решении краевой задачи разворота; в отдельных частных случаях управления за фиксированное время краевая двухточечная задача разворота может быть решена методом разделения переменных [13]. Практически важными остаются аналитические решения задачи оптимального управления разворотом. Однако получить их для тел с произвольным сочетанием моментов инерции крайне затруднительно. Некоторые решения (в том числе аналитические) известны для оптимальных разворотов сферически-симметричных [12, 19] и динамически симметричных тел [9, 11, 16, 20–22].

Ниже решается задача оптимального разворота твердого тела (КА) с использованием нового показателя качества, объединяющего в заданной пропорции вклад управляющих сил на совершение маневра (по энергозатратам) и интеграл энергии вращения (наличие интеграла энергии вращения приводит к ограничению кинетической энергии во время разворота); фазовыми переменными являются кватернион ориентации и кинетический момент твердого тела (КА). Решаемая задача отличается от других задач с комбинированным функционалом видом функционала, а также наличием ограничений на управление [21–23].

1. Постановка оптимизационной задачи управления. Вращательное движение твердого тела (КА) описывает следующее уравнение [12]:

$$\dot{\mathbf{L}} + (\mathbf{I}^{-1}\mathbf{L}) \times \mathbf{L} = \mathbf{M} \quad (1.1)$$

и кинематическое уравнение [12]

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ I^{-1}\mathbf{L}, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{L}$ — кинетический момент КА; $\mathbf{M}$ — управляющий момент; I — тензор инерции КА; Λ с нормированный кватернион [12], задающий движение связанного базиса относительно инерциального базиса ($\|\Lambda\|=1$), “ $\circ$ ” — знак умножения кватернионов [12, с. 11–20]. Управление КА вокруг центра масс производится за счет изменения момента $\mathbf{M}$. Считается, что область допустимых управлений $\mathbf{M}$ подобна эллипсоиду инерции КА [11]:

$$\frac{M_1^2}{J_1} + \frac{M_2^2}{J_2} + \frac{M_3^2}{J_3} \leq u_0^2, \quad (1.3)$$

где $u_0 > 0$ определяет управляющие возможности системы ориентации КА; M_i — проекции управляющего момента $\mathbf{M}$ на главные центральные оси эллипсоида инерции КА (эти оси образуют связанный базис); J_i — главные центральные моменты инерции КА ($i = 1, 3$). На практике интересны задачи, когда в начальный и конечный моменты времени кинетический момент $\mathbf{L}$ равен нулю. Выпишем граничные условия для управляемой системы (1.1)–(1.3):

$$\Lambda(0) = \Lambda_{in}, \mathbf{L}(0) = 0 \quad (1.4)$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_f, \mathbf{L}(T) = 0, \quad (1.5)$$

где T — время завершения маневра. Кватернионы Λ_{in} и Λ_f удовлетворяют условию $\|\Lambda_{in}\| = \|\Lambda_f\| = 1$. Учитывая, что кватернионы Λ и Λ соответствуют одному и тому же угловому положению твердого тела (КА), мы рассматриваем только те задачи, в которых $\Lambda_f \neq \pm \Lambda_{in}$.

Предполагается, что вращательное движение КА регулируется с помощью системы ориентации, создающей вращающие моменты относительно трех главных центральных осей инерции. Оптимальным считаем управление, при котором достигается минимум следующей величины

$$G = k_0 \int_0^T (M_1^2 / J_1 + M_2^2 / J_2 + M_3^2 / J_3) dt + \int_0^T (L_1^2 / J_1 + L_2^2 / J_2 + L_3^2 / J_3) dt, \quad (1.6)$$

где $k_0 > 0$ — постоянный положительный коэффициент ($k_0 \neq 0$); L_i — проекции кинетического момента КА $\mathbf{L}$ на оси связанного базиса. Задачу оптимального управления сформулируем в следующей постановке: КА требуется перевести из состояния (1.4) в состояние (1.5) согласно уравнениям (1.1), (1.2) с ограничением (1.3) так, чтобы сумма (1.6) была минимальной (время T задано). Решение $\mathbf{M}(t)$ находится в классе кусочно-непрерывных функций времени.

Принятый критерий качества (1.6) отличает предлагаемую оптимизационную задачу от рассмотренных ранее задач видом минимизируемого

функционала при наличии ограничения (1.3). Присутствие в показателе (1.6) интеграла энергии ограничивает кинетическую энергию вращения E_k во время разворота, делая ее минимально возможной на заданном интервале управления (коэффициент $k_0 \neq 0$). Так как время T фиксировано, а управление M ограничено, то требуемый маневр может быть исполнен не для всех значений Λ_{in} , Λ_f и J_1, J_2, J_3, k_0, u_0 . Задача оптимального разворота КА с ограниченным управлением, в которой качество процесса управления определяется индексом (1.6), остается актуальной.

Заметим, что оптимизация разворотов с минимальными затратами на основе (1.6) оказывается полезной для КА с системой ориентации, использующей электроракетные двигатели (ЭРД), поскольку при управлении с помощью ЭРД (в частности, ионными двигателями) первый интеграл в показателе (1.6) пропорционален потребляемой электроэнергии (тяга ЭРД прямо пропорциональна потребляемому электрическому току [27], с высокой степенью достоверности, а вращающий момент пропорционален плечу установки управляющего ЭРД).

2. Применение принципа максимума. Рассматриваемая задача (1.1)–(1.6) есть задача динамического оптимального разворота твердого тела [12], в которой моменты M_i – управляющие функции ($i = 1, 3$). Поставленную задачу (1.1)–(1.6) решаем с помощью процедуры принципа максимума Л.С. Понтрягина [28]. Введем сопряженные переменные φ , которые соответствуют проекциям кинетического момента КА L_i ($i = 1, 3$). Так как в критерий качества (1.6) не входят элементы кватерниона ориентации Λ , мы вместо сопряженных функций ψ_j , соответствующих компонентам λ_j кватерниона Λ , используем следующие переменные r_i ($i = 1, 3, j = 0, 3$):

$$r_1 = (\lambda_0 \psi_1 + \lambda_3 \psi_2 - \lambda_1 \psi_0 - \lambda_2 \psi_3) / 2, \quad r_2 = (\lambda_0 \psi_2 + \lambda_1 \psi_3 - \lambda_2 \psi_0 - \lambda_3 \psi_1) / 2,$$

$$r_3 = (\lambda_0 \psi_3 + \lambda_2 \psi_1 - \lambda_3 \psi_0 - \lambda_1 \psi_2) / 2.$$

Такой прием применяли многие исследователи [10–24], но с другими функциями качества (чистые быстроедействие, минимум энергозатрат и пр.); впервые указанную замену переменных сделали В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский и М.Б. Черток, Ю.В. Казначеев [11, 12]. Оптимальные функции r_i и вектор $\mathbf{r}$, образованный из r_i , удовлетворяют уравнениям

$$\dot{r}_1 = L_3 r_2 / J_3 - L_2 r_3 / J_2, \quad \dot{r}_2 = L_1 r_3 / J_1 - L_3 r_1 / J_3, \quad \dot{r}_3 = L_2 r_1 / J_2 - L_1 r_2 / J_1,$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times (I^{-1} \mathbf{L}) \quad (2.1)$$

(символ $\times$ означает векторное произведение векторов).

Составим функцию Гамильтона–Понтрягина для оптимизационной задачи (1.1), (1.6)

$$\begin{aligned}
H = & -k_0 \left(M_1^2 / J_1 + M_2^2 / J_2 + M_3^2 / J_3 \right) - \\
& - \left(L_1^2 / J_1 + L_2^2 / J_2 + L_3^2 / J_3 \right) + \\
& + \varphi_1 \left(M_1 + (1/J_3 - 1/J_2) L_2 L_3 \right) + \\
& + \varphi_2 \left(M_2 + (1/J_1 - 1/J_3) L_1 L_3 \right) + \\
& + \varphi_3 \left(M_3 + (1/J_2 - 1/J_1) L_1 L_2 \right) + \\
& + L_1 r_1 / J_1 + L_2 r_2 / J_2 + L_3 r_3 / J_3.
\end{aligned}$$

Уравнения для φ_i получаются из формул [28]

$$\dot{\varphi}_i = -\frac{\partial H}{\partial L_i} \quad (i = \overline{1, 3}).$$

Поэтому сопряженная система выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_1 = & 2L_1 / J_1 + L_3 \varphi_2 (1/J_3 - 1/J_2) + \\
& + L_2 \varphi_3 (1/J_1 - 1/J_2) - r_1 / J_1 \\
\dot{\varphi}_2 = & 2L_2 / J_2 + L_1 \varphi_3 (1/J_1 - 1/J_2) + \\
& + L_3 \varphi_1 (1/J_2 - 1/J_3) - r_2 / J_2 \\
\dot{\varphi}_3 = & 2L_3 / J_3 + L_2 \varphi_1 (1/J_2 - 1/J_3) + \\
& + L_1 \varphi_2 (1/J_3 - 1/J_1) - r_3 / J_3.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

При составлении функции Гамильтона–Понтрягина ограничение $\|\Lambda\| = 1$ не учитывалось в силу равенства $\|\Lambda(0)\| = 1$, о чем ранее было сказано. Вектор $\mathbf{r}$ неподвижен относительно инерциального базиса и $|\mathbf{r}| = \text{const} > 0$ (постоянство модуля $|\mathbf{r}|$ следует из свойств уравнений (2.1)). Решение $\mathbf{r}(t)$ системы (2.1) определяется начальным Λ_{in} и конечным Λ_f положениями КА. Оптимальная функция $\mathbf{r}(t)$ вычисляется, используя кватернион $L(t)$ [12]:

$$\mathbf{r} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda, \text{ где } \mathbf{c}_E = \text{const} = \Lambda_{in} \circ \mathbf{r}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{in},$$

причем $\mathbf{r}(0) \neq 0$ (в противном случае $r_1 = r_2 = r_3 \equiv 0$ и дальше не имеет смысла решать оптимизационную задачу). Здесь $\tilde{\Lambda}$ – сопряженный кватерниону Λ кватернион [12, с. 10–22].

Задача поиска оптимального управления состоит в решении системы дифференциальных уравнений (1.1), (1.2), (2.1), (2.2) с ограничением (1.3) с одновременной максимизацией функции H в каждый текущий момент времени t и выполнением краевых условий (1.4), (1.5).

2.1. Определение структуры оптимального управления. Найдем условия максимума функции H . Пусть $u_i = M_i / \sqrt{J_i}$ и $n_i = \varphi_i \sqrt{J_i}$ ($i = \overline{1, 3}$), $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$, $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$; а векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{n}$ образуют угол δ . Тогда

$$H = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - k_0 |\mathbf{u}|^2 + H_{inv} = |\mathbf{n}| |\mathbf{u}| \cos \delta - k_0 |\mathbf{u}|^2 + H_{inv},$$

где H_{inv} в явном виде не зависит от управляющих моментов M_i (знак умножения “ $\cdot$ ” означает скалярное произведение векторов). Функция H максимальна, если $\delta = 0$. Если $\mathbf{u} \leq u_0$, то максимум функции H по аргументу $\mathbf{u}$ находится внутри отрезка $[0, u_0]$ и совпадает с локальным максимумом. Гамильтониан H – квадратичная функция управлений M_i , и локальный максимум определяется необходимыми условиями экстремума $\partial H / \partial M_i = 0$, из которых следует

$$M_i = J_i \varphi_i / (2k_0). \quad (2.3)$$

Управление (2.3) будет оптимальным, если $J_1 \varphi_1^2 + J_2 \varphi_2^2 + J_3 \varphi_3^2 \leq 4k_0^2 u_0^2$.

Если $J_1 \varphi_1^2 + J_2 \varphi_2^2 + J_3 \varphi_3^2 > 4k_0^2 u_0^2$, то точка экстремума функции H находится за пределами отрезка $0 \leq \mathbf{u} \leq u_0$, и H достигает максимума на границе указанного отрезка и когда векторы $\mathbf{u}$ и имеют одинаковое направление, т.е. в оптимальном решении $\mathbf{u} = u_0$, а значит,

$$M_i = \frac{u_0 J_i \varphi_i}{\sqrt{J_1 \varphi_1^2 + J_2 \varphi_2^2 + J_3 \varphi_3^2}}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Объединяя оба случая, получили следующую структуру оптимального управления для M_i

$$M_i = \begin{cases} J_i \varphi_i / (2k_0), & J_1 \varphi_1^2 + J_2 \varphi_2^2 + J_3 \varphi_3^2 \leq 4k_0^2 u_0^2 \\ \frac{u_0 J_i \varphi_i}{\sqrt{J_1 \varphi_1^2 + J_2 \varphi_2^2 + J_3 \varphi_3^2}}, & J_1 \varphi_1^2 + J_2 \varphi_2^2 + J_3 \varphi_3^2 > 4k_0^2 u_0^2. \end{cases} \quad (2.4)$$

Система уравнений (2.1), (2.2), (2.4) – необходимые условия оптимальности для задачи (1.1)–(1.6). Решение системы уравнений (1.1), (2.1), (2.2), (2.4) существует и оно единственное (при условии $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}(T) = 0$). Вектор $\mathbf{r}(0)$ должен быть таким, чтобы после интегрирования системы (1.1), (1.2), (2.1), (2.2), (2.4) с начальным условием $\Lambda(0) = \Lambda_m$ удовлетворялось требование $\Lambda(T) = \Lambda_f$ для траектории $\Lambda(t)$.

Введем обозначение $r_0 = |\mathbf{r}(t)| = \text{const} \neq 0$ и перейдем к нормированному вектору $\mathbf{p} = \mathbf{r} / |\mathbf{r}|$, у которого $p_i = r_i / r_0$. Для вектора $\mathbf{p}$ и его составляющих p_i выполняются уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{p} \times (\mathbf{I}^{-1} \mathbf{L}), \quad \dot{p}_1 = L_3 p_2 / J_3 - L_2 p_3 / J_2, \quad \dot{p}_2 = L_1 p_3 / J_1 - L_3 p_1 / J_3, \\ \dot{p}_3 &= L_2 p_1 / J_2 - L_1 p_2 / J_1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Замкнутая система уравнений (1.1), (1.2), (2.1), (2.2), (2.4) позволяет найти оптимальное управление. Задача поиска оптимальной программы вращения КА свелась к решению системы уравнений движения (1.1), (1.2), сопряженных уравнений (2.2) и уравнений (2.5) с равенствами $r_i = r_0 p_i$ при наличии закона (2.4) для управляющих моментов M_i . Искомое оптимальное решение удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\varphi_i = a(t) p_i / J_i \quad (2.6)$$

$$L_i = b(t)p_i, \quad (2.7)$$

где $a(t)$, $b(t)$ – скалярные функции времени ($b(t) \geq 0$ на всем отрезке времени $t \in [0, T]$).

Из (2.1), (2.2), (2.4) видим, что оптимальные функции $a(t)$, $b(t)$ удовлетворяют зависимости

$$\dot{a}(t) = 2b(t) - r_0. \quad (2.8)$$

Последовательная подстановка (2.6) в (2.2), имея ввиду (2.7) и $r_i = r_0 p_i$, подтверждает, что решение (2.6), (2.7) действительно справедливо для системы дифференциальных уравнений (1.1), (2.2), (2.4), (2.5) (зависимости (2.7) прямо следуют из системы (1.1), (2.4), (2.5) с учетом (2.6)). После обозначения Φ – вектор с компонентами Φ_i , $I = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ – тензор инерции твердого тела, перепишем систему (2.2) в векторном виде:

$$\dot{\Phi} = 2I^{-1}L + I^{-1}(L \times \Phi) + \Phi \times (I^{-1}L) - I^{-1}r. \quad (2.9)$$

Учитывая (2.5), (2.6), (2.7), левая часть уравнения (2.9) будет следующей:

$$\dot{\Phi} = I^{-1}(a\dot{\mathbf{p}} + \dot{a}\mathbf{p}) = aI^{-1}(\mathbf{p} \times (I^{-1}L)) + \dot{a}I^{-1}\mathbf{p} = abI^{-1}(\mathbf{p} \times (I^{-1}\mathbf{p})) + \dot{a}I^{-1}\mathbf{p}.$$

Найдем теперь правую часть уравнения (2.9), учитывая (2.6), (2.7). Она такова

$$2I^{-1}b\mathbf{p} + abI^{-1}(\mathbf{p} \times (I^{-1}\mathbf{p})) + ab(I^{-1}\mathbf{p}) \times (I^{-1}\mathbf{p}) - r_0 I^{-1}\mathbf{p}.$$

Левая и правая части (2.9) тождественно равны, только если $a(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют (2.8).

Управляющие функции M_i пропорциональны компонентам p_i вектора $\mathbf{p}$, т.е.

$$M_i = m(t)p_i \quad (2.10)$$

($a(t)$ и константа $k_0 u_0$ определяют $m(t)$). Функция $m(t)$ такова:

$$m(t) = \begin{cases} a(t)/(2k_0), & a^2(t)(p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3) \leq 4k_0^2 u_0^2 \\ u_0 \text{signa}(t) / \sqrt{p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3}, & a^2(t)(p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3) > 4k_0^2 u_0^2 \end{cases}$$

Оптимальное движение, соответствующее уравнениям (2.5), (2.7), имеет свойство $p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3 = \text{const}$. Для проверки этого утверждения достаточно продифференцировать по времени левую часть данного равенства с учетом (2.5), (2.7) и убедиться, что полученная производная равна нулю после подстановки $\dot{p}_i$ по формуле (2.5), а затем L_i по (2.7).

Принимая во внимание (2.4), (2.7) и свойства зависимости $a(t)$, имеем

$$m(t) = \begin{cases} a(t)/(2k_0), & a(t) \leq 2k_0 m_0 \\ m_0 \operatorname{sign} a(t), & a(t) > 2k_0 m_0, \end{cases}$$

где $m_0 = u_0 / C$; $C = \sqrt{p_{10}^2 / J_1 + p_{20}^2 / J_2 + p_{30}^2 / J_3}$, $p_{i0} = p_i(0)$. Скалярная функция времени $m(t)$ не выходит за пределы диапазона от $-m_0$ до m_0 , поэтому $|M| \leq m_0$.

2.2. Главные свойства и возможные версии оптимального управления. При любом варианте оптимального управления $a(0) > 0$, $a(T) < 0$, а функции $b(t)$ и $m(t)$ связаны так

$$b(t) = \int_0^t m(\tau) d\tau, \quad b(0) = 0, \quad b(T) = 0, \quad \dot{b} = m(t)$$

(связь $\dot{b} = m(t)$ получается из динамических уравнений (1.1) и (2.4), (2.5)). Для оптимальной функции $a(t)$ получаем следующее дифференциальное уравнение: $\ddot{a} = 2\dot{b} = 2m(t)$. Если $|a(t)| \leq 2k_0 m_0$, то $\ddot{a} = a/k_0$; если $|a(t)| > 2k_0 m_0$, то $\ddot{a} = 2m_0 \operatorname{sign} a(t)$. На всем интервале времени $t \in [0, T]$ $a(t)$ — гладкая функция времени. Поведение функций $m(t)$ и $b(t)$ при оптимальном управлении наглядно демонстрирует рис. 1, где t_1 и t_2 — времена наступления равенств $a(t) = 2k_0 m_0$ и $a(t) = -2k_0 m_0$. Оптимальная функция $b(t)$ описывается зависимостью:

$$b(t) = \begin{cases} m_0 t, & t \leq t_1 \\ \left(C_2 \exp\left((t-t_1)/\sqrt{k_0}\right)/\sqrt{k_0} - C_1 \exp\left((t_1-t)/\sqrt{k_0}\right)/\sqrt{k_0} + r_0 \right) / 2, & t_1 < t < t_2 \\ m_0 (T-t), & t \geq t_2 \end{cases} \quad (2.11)$$

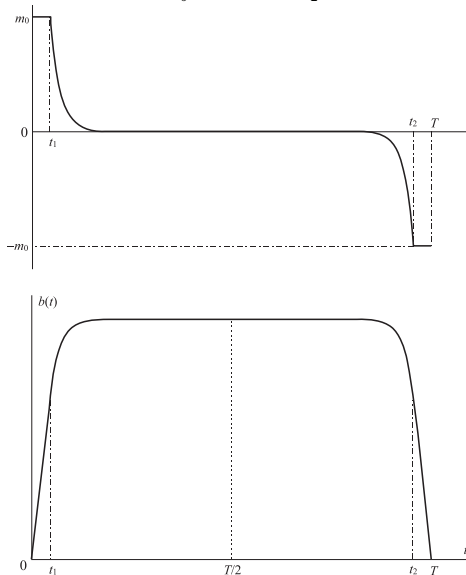


Рис. 1. Вид оптимальных функций $m(t)$ и $b(t)$.

где C_1 и C_2 — некоторые константы. Соответственно, функция $m(t)$ выглядит таким образом:

$$m(t) = \begin{cases} m_0, & t \leq t_1 \\ \left[C_1 \exp((t_1 - t) / \sqrt{k_0}) + C_2 \exp((t - t_1) / \sqrt{k_0}) \right] / (2k_0), & t_1 < t < t_2, \\ -m_0, & t \geq t_2 \end{cases} \quad (2.12)$$

поскольку в интервале времени, когда $|a(t)| \leq 2k_0 m_0$, функция $a(t)$ имеет вид:

$$a(t) = C_1 \exp((t_1 - t) / \sqrt{k_0}) + C_2 \exp((t - t_1) / \sqrt{k_0}).$$

Необходимо отметить, что значения C_1 и C_2 должны удовлетворять равенствам

$$C_1 + C_2 = 2k_0 m_0,$$

$$C_1 \exp((2t_1 - T) / \sqrt{k_0}) + C_2 \exp((T - 2t_1) / \sqrt{k_0}) = -2k_0 m_0,$$

так как в момент времени t_1 функция $a(t)$ равна $a(t_1) = 2k_0 m_0$, а в момент времени t_2 функция $a(t)$ будет $a(t_2) = -2k_0 m_0$. Отсюда получаем следующие соотношения:

$$C_1 = -C_2 \exp((T - 2t_1) / \sqrt{k_0}), \quad C_1 = 2k_0 m_0 / (1 - \exp((2t_1 - T) / \sqrt{k_0}))$$

$$C_2 = 2k_0 m_0 / (1 - \exp((T - 2t_1) / \sqrt{k_0})),$$

так как $b(t_2) = b(t_1) = m_0 t_1$ и $t_2 = T - t_1$. Нетрудно видеть, что $a(T) = -a(0)$ и $a(T/2) = 0$, $\dot{a}(T/2) < 0$.

Краевая задача принципа максимума состоит в определении вектора $\mathbf{p}(0)$ и величины $r_0 > 0$, при которых решение системы уравнений (1.1), (1.2), (2.2), (2.4), (2.5) с начальными условиями (1.4) и связью $r_i = r_0 p_i$ удовлетворит крайевым условиям (1.5).

Существование точек переключения t_1, t_2 зависит от интеграла

$$Q = \int_0^T b(t) dt, \quad (2.13)$$

который не зависит от характера изменения функции $b(t)$ и определяется исключительно кватернионами Λ_{in}, Λ_f и моментами инерции J_1, J_2, J_3 [18] (величина Q рассчитывается одновременно с вектором $\mathbf{p}_0$).

Если $m_0 T^2 < 4Q$, то решения задачи разворота (1.1)(1.6) не существует, так как $T_{fast} = 2\sqrt{Q/m_0}$ — минимально возможное время разворота твердого тела с моментами инерции J_1, J_2, J_3 из положения (1.4) в положение (1.5) при ограничении (1.3) [8].

Если $m_0 T^2 = 4Q$, то $|\mathbf{M}| = \text{const} = m_0$ на всем интервале управления $t \in [0, T]$ независимо от значения коэффициента k_0 .

Если $Q(\exp(T/\sqrt{k_0}) - 1) \leq 2m_0[T(\exp(T/\sqrt{k_0}) + 1)\sqrt{k_0}/2 - k_0(\exp(T/\sqrt{k_0}) - 1)]$, то в любой момент времени $\mathbf{M} \neq \text{const}$, поскольку в этом случае $a(0) \leq 2k_0 m_0$, и $|a(t)| \leq 2k_0 m_0$ при любом $t \in [0, T]$. Ограничение (1.3) не существенно при таком сочетании величин Q, k_0, m_0 и T .

Если $Q(\exp(T/\sqrt{k_0}) - 1) > 2m_0[T(\exp(T/\sqrt{k_0}) + 1)\sqrt{k_0}/2 - k_0(\exp(T/\sqrt{k_0}) - 1)]$, то $m(0) = m_0$ и в оптимальном управлении неизбежны интервалы времени, на которых $|\mathbf{M}| = \text{const}$. На участке, когда $|\mathbf{M}| \neq \text{const}$, справедливо уравнение $\ddot{a} = a/k_0$, и функции $a(t)$, $b(t)$ таковы:

$$\begin{aligned} a(t) &= C_1 \exp((t_1 - t)/\sqrt{k_0}) + C_2 \exp((t - t_1)/\sqrt{k_0}); \\ C_2 &= -C_1 \exp((2t_1 - T)/\sqrt{k_0}), \\ b(t) &= m_0 t_1 + \left(\frac{C_2 \exp((t - t_1)/\sqrt{k_0}) - C_1 \exp((t_1 - t)/\sqrt{k_0}) + C_1 - C_2}{2\sqrt{k_0}} \right). \end{aligned}$$

Значение интеграла (2.13) равно

$$Q = m_0 t_1 (T - t_1) + \frac{\sqrt{k_0}}{2} \int_0^{T-t_1} \left(C_2 \exp(\tau/\sqrt{k_0}) - C_1 \times \right. \\ \left. \times \exp(-\tau/\sqrt{k_0}) + C_1 - C_2 \right) d\tau$$

Точка переключения t_1 определяется из уравнения

$$\frac{(Q - m_0 t_1 (T - t_1))(\exp((T - 2t_1)/\sqrt{k_0}) - 1)}{(T - 2t_1)(\exp((T - 2t_1)/\sqrt{k_0}) + 1)\sqrt{k_0}/2 - k_0(\exp((T - 2t_1)/\sqrt{k_0}) - 1)} = 2m_0.$$

Значение $t_2 = T - t_1$. Постоянные C_1 и C_2 , а также r_0 рассчитываются по выражениям:

$$C_1 = \frac{k_0(Q - m_0(T - t_1)t_1)}{0.5\sqrt{k_0}(T - 2t_1)(\exp((2t_1 - T)/\sqrt{k_0}) + 1) + k_0(\exp((2t_1 - T)/\sqrt{k_0}) - 1)} \quad (2.14)$$

$$C_2 = \frac{k_0(m_0(T - t_1)t_1 - Q)}{0.5\sqrt{k_0}(T - 2t_1)(\exp((T - 2t_1)/\sqrt{k_0}) + 1) - k_0(\exp((T - 2t_1)/\sqrt{k_0}) - 1)}.$$

$$r_0 = 2m_0 t_1 + (C_1 - C_2)/\sqrt{k_0}.$$

Максимальное значение кинетического момента $b_{\max}$ равно

$$b_{\max} = m_0 t_1 + \left[\begin{array}{l} C_2 \exp\left((T/2 - t_1)/\sqrt{k_0}\right) - \\ - C_1 \exp\left((t_1 - T/2)/\sqrt{k_0}\right) + C_1 - C_2 \end{array} \right] \sqrt{k_0} / 2.$$

Важным свойством оптимального управления является постоянство пропорции между кинетической энергией вращения E_k и квадрата модуля кинетического момента КА.

$$E_k = b^2 (p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3) / 2 = \text{const}$$

$$E_k / |L|^2 = (p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3) / 2 = \text{const},$$

так как $b^2 = |L|^2$ (это видно из (2.7)) и $p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3 = \text{const} = p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3$, где p_{10}, p_{20}, p_{30} – составляющие вектора $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$.

Гамильтониан H не зависит от времени в явной форме, поэтому на оптимальной траектории $H = \text{const}$ на всем интервале управления $t \in [0, T]$ [29]. В начальный момент времени $t = 0$, $H(0) = a(0)m_0 C^2 - k_0 u_0^2$; в конечный момент времени $t = T$, $H(T) = -a(T)m_0 C^2 - k_0 u_0^2$. Откуда $a(T) = -a(0)$ и $a(0) = (H(0) + k_0 u_0^2) / (u_0 C)$. В момент времени $t = T/2$ будет $a(T/2) = 0$ и $H(T/2) = b_{\max}^2 C^2 (r_0 - b_{\max})$. В момент времени $t = t_1$ имеем $H(t_1) = u_0^2 (k_0 - t_1^2) + r_0 t_1 u_0 C = H(t_2)$. На участках, когда $|M| = \text{const}$, функции $a(t)$, $b(t)$ таковы:

$$\begin{aligned} a(t) &= H / (u_0 C) + k_0 m_0 - r_0 t + m_0 t^2, \text{ если } t \leq t_1 \\ a(t) &= r_0 (T - t) - m_0 (T - t)^2 - H / (u_0 C) - k_0 m_0, \text{ если } t \geq t_2 \\ b(t) &= m_0 t, \text{ если } t < t_1; \text{ и } b(t) = m_0 (T - t), \text{ если } t \geq t_2. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что в любой момент времени $H = u_0^2 (k_0 + t_1^2) + (C_1 - C_2) u_0 t_1 C / \sqrt{k_0}$. Соответственно, $a(0) = m_0 (2k_0 + t_1^2) + t_1 (C_1 - C_2) / \sqrt{k_0}$. При любых значениях Q , k_0 и T выполняются условия $C_1 > 0$, $C_2 < 0$ и тем самым обеспечивается $r_0 > 0$ и $a(0) > 0$, $a(T) < 0$. Таким образом:

на участке $t < t_1$, когда $a(t) > 2k_0 m_0$, оптимальная функция $a(t)$ вычисляется по выражению

$$a(t) = m_0 (2k_0 + t_1^2 + t^2) + (t_1 - t)(C_1 - C_2) / \sqrt{k_0} - 2m_0 t_1 t,$$

на участке $t_1 \leq t \leq t_2$, когда $|a(t)| \leq 2k_0 m_0$, оптимальная функция $a(t)$ имеет вид:

$$a(t) = C_1 \exp\left((t_1 - t) / \sqrt{k_0}\right) + C_2 \exp\left((t - t_1) / \sqrt{k_0}\right), m(t) = a(t) / (2k_0),$$

на участке $t > t_2$, когда $a(t) < -2k_0 m_0$, оптимальная функция $a(t)$ вычисляется по выражению:

$$\begin{aligned} a(t) &= 2m_0 t_1 (T - t) - m_0 (2k_0 + (T - t)^2 + t_1^2) - \\ &- (t_1 - T + t)(C_1 - C_2) / \sqrt{k_0}. \end{aligned}$$

В интервале времени $t_1 < t < t_2$, когда $|a(t)| < 2k_0 m_0$, оптимальная функция $b(t)$ такая

$$b(t) = m_0 t_1 + \left(\begin{array}{c} C_2 \exp((t-t_1)/\sqrt{k_0}) - \\ - C_1 \exp((t_1-t)/\sqrt{k_0}) + C_1 - C_2 \end{array} \right) / (2\sqrt{k_0}).$$

Если $a(t) \geq 2k_0 m_0$, то $b(t) = m_0 t$; если $a(t) \leq -2k_0 m_0$, то $b(t) = m_0(T-t)$.

3. Доказательство единственности оптимального решения. Введем орт $\mathbf{q}$, коллинеарный моменту $\mathbf{M}$, причем направления векторов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{M}$ совпадают в начальный момент времени $t = 0$. Далее определим скалярный множитель f , удовлетворяющий двум условиям: $\dot{\mathbf{p}} = I^{-1}f\mathbf{q}$ и $f(0) > 0$. В окрестности точки $t = 0$ справедливы соотношения $\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}$ и $\mathbf{L} = \chi \mathbf{q}$, где χ – скалярный множитель. Сначала оптимальный управляющий момент $\mathbf{M}$, рассчитанный по выражению (2.4) при условии $\dot{\mathbf{p}} = I^{-1}f(t)\mathbf{q}$, подставляем в (1.1) с учетом зависимости $\mathbf{L} = \chi \mathbf{q}$ и получаем

$$\mathbf{q}\dot{\chi} + \dot{\mathbf{q}}\chi + (I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}\chi^2 = m(t)\mathbf{q}. \quad (3.1)$$

Векторы $\dot{\mathbf{q}}\chi + (I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}\chi^2$ и $\mathbf{q}$ ортогональны, либо сумма $\dot{\mathbf{q}}\chi + (I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}\chi^2$ есть нулевой вектор ($|\mathbf{q}| = 1$, а значит в любом случае $\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$). Уравнение (3.1) удовлетворяется, если только $\dot{\mathbf{q}} = -(I^{-1}\mathbf{L}) \times \mathbf{q}$ и $\dot{\chi} = m(t)$. Далее векторы $\dot{\mathbf{p}} = I^{-1}f(t)\mathbf{q}$ и $\mathbf{L} = \chi\mathbf{q}$ подставим в (2.9). С учетом соотношения $\dot{\mathbf{q}} = -(I^{-1}\mathbf{L}) \times \mathbf{q}$, которое имеет место в силу уравнения (3.1) (оптимальное вращение подчиняется уравнениям (1.1), (2.9) одновременно), левая часть (2.9) станет такой

$$I^{-1}(\dot{f}\mathbf{q} + f\dot{\mathbf{q}}) = I^{-1}(\dot{f}\mathbf{q} - f(\chi I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}).$$

Правая часть (2.9) принимает вид

$$\begin{aligned} 2\chi I^{-1}\mathbf{q} + I^{-1}\chi(\mathbf{q} \times (I^{-1}\dot{f}\mathbf{q})) \times (I^{-1}\dot{f}\mathbf{q}) \times (I^{-1}\chi\mathbf{q}) - \\ - I^{-1}r = 2\chi I^{-1}\mathbf{q} - fI^{-1}((\chi I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}) - r_0 I^{-1}\mathbf{p}. \end{aligned}$$

Приравнивая правую и левую части (2.9), получаем уравнение $\dot{f}\mathbf{q} = 2\chi\mathbf{q} - r_0\mathbf{p}$, из которого $\dot{f} = 2\chi - r_0$ и $\mathbf{q} \parallel \mathbf{p}$ (так как $f(0) > 0, f(T) < 0$, и $\dot{f} < 0$). Пришли к однозначному выводу: если в какой-то момент времени t векторы $I\mathbf{p}$ и $\mathbf{L}$ коллинеарны, то они остаются коллинеарными внутри всего интервала времени $0 < t < T$. Требования $\mathbf{L}(0) = 0$ и $\mathbf{L}(T) = 0$ гарантируют существование как минимум двух таких моментов времени, когда $\mathbf{L}$ и $I\mathbf{p}$ коллинеарны ($\mathbf{L} = h t I\mathbf{p}$ при $t \rightarrow 0$, и $\mathbf{L} = -h(T-t)I\mathbf{p}$ при $t \rightarrow T$). Можем утверждать, что в процессе оптимального движения закономерность $\mathbf{L} \parallel \mathbf{p}$ сохраняется на всем отрезке времени $t \in [0, T]$, и оптимальное вращение обязательно удовлетворяет условиям (2.6), (2.7). Доказано, что зависимости (2.6), (2.7) – единственное решение системы (1.1), (2.2), (2.4), (2.5), поскольку $\mathbf{L}(0) = 0$ и $\mathbf{L}(T) = 0$ (напомним, $r_i = r_0 p_i$).

Таким образом, оптимизация свелась к определению такого вектора $\mathbf{p}_0$, чтобы в ходе вращения КА согласно уравнениям (1.2), (2.5), (2.7) удовлетворились условия $\mathbf{L}(T) = \Lambda_T$, $\mathbf{L}(T) = 0$. Уравнения (2.5) с учетом (2.7) принимают вид:

$$\dot{p}_1 = \frac{J_2 - J_3}{J_2 J_3} b(t) p_2 p_3, \quad \dot{p}_2 = \frac{J_3 - J_1}{J_1 J_3} b(t) p_1 p_3, \quad \dot{p}_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_1 J_2} b(t) p_1 p_2. \quad (3.2)$$

Найти общее решение указанной системы практически не представляется возможным. Сложность заключается в нахождении $\mathbf{p}(0)$, $\mathbf{p}(T)$, связанных выражением

$$\Lambda_{in} \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{in} = \Lambda_f \circ \mathbf{p}(T) \circ \tilde{\Lambda}_f$$

$$(\mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_f \circ \mathbf{p}(0) \circ \Lambda_f, \text{ здесь } \Lambda_f = \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda_{in} - \text{кватернион разворота}).$$

4. Проектирование программы оптимального вращения. Решение задачи оптимального разворота описывается уравнениями (2.6), (2.7), (3.2); управляющие функции M_i и компоненты кинетического момента L_i изменяются в соответствии с (2.7), (2.10). Вектор $\mathbf{p}_0$ и характеристика Q находятся из решения двухточечной краевой задачи разворота. Программу вращения КА полностью определяют Q , m_0 . Программное значение M связано с кватернионом Λ по выражению

$$M = m(t) \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{in} \circ p_0 \circ \Lambda_{in} \circ \Lambda,$$

в котором $m(t)$ изменяется в соответствии с (2.12).

При оптимальном вращении имеет свойство симметрии (прежде всего, для функций $m(t)$ и $b(t)$) и характеризуется следующими закономерностями:

$$m(0) = -m(T) > 0, \quad b(t) \geq 0, \quad m(T-t) = -m(t), \quad b(T-t) = b(t)$$

$$\int_0^{T/2} |m(t)| dt = \int_{T/2}^T |m(t)| dt, \quad \int_0^{T/2} b(t) dt = \int_{T/2}^T b(t) dt$$

$$\Lambda \circ \mathbf{M}(T-t) \circ \tilde{\Lambda} = -\Lambda \circ \mathbf{M}(t) \circ \tilde{\Lambda}, \quad \Lambda \circ \mathbf{L}(T-t) \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda \circ \mathbf{L}(t) \circ \tilde{\Lambda}$$

$$\max_{t < T/2} m(t) = -\min_{t > T/2} m(t) = m(0), \quad L_{\max} = \max_{0 < t < T} \sqrt{J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2} = |\mathbf{L}(T/2)|.$$

Из (2.7) следует, что $\mathbf{p}$ — это орт кинетического момента $\mathbf{L}$. Оптимальные функции $L_i(t)$, $\varphi_i(t)$, $p_i(t)$ соответствуют требованиям (2.6), (2.7), где $p_i(t)$ — решение системы (2.5). Оптимальное управление определяется выражением (2.10), направление кинетического момента $\mathbf{L}$ остается постоянным относительно инерциального базиса, векторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{L}$ коллинеарны в любое время $t \in [0, T]$. Управление (2.10) является действительно оптимальным, поскольку оно — единственное решение системы уравнений (1.1), (2.2), (2.4), (2.5).

Для неограниченного управления оптимальное решение заметно проще:

$$a(t) = C_1 \exp(-t / \sqrt{k_0}) + C_2 \exp(t / \sqrt{k_0}), \quad \mathbf{M} = a(t) \mathbf{p} / (2k_0),$$

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -C_2 \exp\left(T / \sqrt{k_0}\right) \\
 b(t) &= \sqrt{k_0} \left[\begin{array}{c} C_2 \exp\left(t / \sqrt{k_0}\right) - \\ - C_1 \exp\left(-t / \sqrt{k_0}\right) + C_1 - C_2 \end{array} \right] / 2, \\
 r_0 &= (C_1 - C_2) / \sqrt{k_0} \\
 C_1 &= k_0 Q / \left[\begin{array}{c} k_0 \left(\exp\left(-T / \sqrt{k_0}\right) - 1 \right) + \\ + T \sqrt{k_0} \left(\exp\left(-T / \sqrt{k_0}\right) + 1 \right) / 2 \end{array} \right] \\
 C_2 &= k_0 Q / \left[\begin{array}{c} k_0 \left(\exp\left(T / \sqrt{k_0}\right) - 1 \right) - \\ - T \sqrt{k_0} \left(\exp\left(T / \sqrt{k_0}\right) + 1 \right) / 2 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Для управления, ограниченного требованием (1.3), оптимальное решение $\mathbf{M} = m(t) \mathbf{p}$, где $m(t) = u_0 / C$, если $a(t) > 2k_0 m_0$; $m(t) = a(t) / (2k_0)$, если $|a(t)| \leq 2k_0 m_0$; $m(t) = -u_0 / C$, если $a(t) < -2k_0 m_0$.

Значения Q , m_0 и $\mathbf{p}_0$ определяются исключительно значениями u_0 , Λ_{in} , Λ_f и J_1 , J_2 , J_3 , а времена t_1 , t_2 зависят от k_0 . В момент времени $t = T/2$ момент $\mathbf{M}$ меняет свое направление на противоположное, модуль $|\mathbf{L}|$ максимален ($|\mathbf{L}(T/2)| = L_{\max}$).

Искомое значение t_1 находится внутри отрезка $t_1 \in [0, t_0]$, где $t_0 = (T - \sqrt{T^2 - 4Q/m_0}) / 2$. Если предположить $t_1 = t_0$, то это означает $C_1 = C_2 = 0$ (как следует из (2.14)) и $b = \text{const}$, а $a(t) = 0$, чего не может быть в оптимальном управлении, поскольку в интервале $t \in [t_1, t_2]$ оптимальный момент $\mathbf{M} \neq 0$ и оптимальная функция $a(t)$ должна меняться от $2k_0 m_0$ до уровня $-2k_0 m_0$. Следовательно, для оптимального движения $t_1 < t_0$.

4.1. Некоторые частные случаи оптимального управления разворотом. Управляющие функции формируются согласно (2.10), (2.12), для чего надо в каждый момент времени t знать $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ (их изменение описывает (3.2)). Аналитическое решение системы (1.2), (2.7), (3.2) существует применительно динамически симметричных и сферически-симметричных тел.

В случае сферически-симметричного КА ($J_1 = J_2 = J_3$) зависимости известны [19]:

$p_i(t) = \text{const} = p_{i0} = v_i / \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$, $M_i(t) = m(t) p_{i0}$, $\omega_i(t) = b(t) p_{i0} / J_i$, где временные функции $b(t)$ и $m(t)$ определяются параметрами $m_0 = u_0 \sqrt{J_1}$, $Q = 2J_1 \arccos v_0$ и k_0 (о чем было сказано в разделе 2); v_0, v_1, v_2, v_3 — элементы кватерниона $\Lambda_t = \Lambda_{in} \circ \Lambda_f$. Траекторию вращения $\Lambda(t)$ представим в аналитической форме

$$\Lambda(t) = \Lambda_{in} \circ e^{\mathbf{p}_0 s(t) / (2J_1)}, \quad s(t) = \int_0^t b(t) dt.$$

При динамической симметрии твердого тела ($J_2 = J_3$) задача оптимального управления (1.1)–(1.6) может быть доведена до аналитического решения (для конкретности дальнейшего изложения осью симметрии считается ось OX). При таком распределении масс оптимальное движение есть одновременное вращение тела (КА) вокруг направления, задаваемого вектором $\mathbf{p}$, неподвижным относительно инерциальной системы координат, и вокруг оси OX , которая образует с $\mathbf{p}$ постоянный угол ϑ . Угловые скорости вокруг $\mathbf{p}$ и оси OX изменяются пропорционально с постоянным коэффициентом пропорциональности, в силу чего имеем [8, 11]

$$\Lambda_f = \Lambda_{in} \circ e^{\mathbf{p}_0 \beta / 2} \circ e^{\mathbf{e}_1 \alpha / 2},$$

где $\mathbf{e}_1$ – орт оси симметрии; α, β – углы поворота твердого тела вокруг оси OX и вокруг $\mathbf{p}$ ($|\alpha| \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$). Запишем $\mathbf{p}(t)$ в аналитической форме [8, 11]:

$$p_1 = p_{10} = \cos \vartheta, \quad p_2 = p_{20} \cos \kappa + p_{30} \sin \kappa, \quad p_3 = -p_{20} \sin \kappa + p_{30} \cos \kappa,$$

$$\kappa = \frac{J - J_1}{J} \int_0^t \omega_1(t) dt, \quad (4.1)$$

где $p_{i0} = p_i(0)$; $J = J_2 = J_3$; продольная скорость $w_1(t)$ определяется из (2.7) при том, что $p_1 = \text{const} = p_{10}$. Значения α, β и p_{i0} находятся по кватернионам Λ_{in} и Λ_f из системы [8, 11]:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{J - J_1}{J_1} p_{10} \beta, \quad \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = v_0, \quad \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = v_1, \\ p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} &= v_2, \quad -p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = v_3, \end{aligned} \quad (4.2)$$

причем $-\pi \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$ (здесь v_0, v_1, v_2, v_3 – элементы кватерниона $\Lambda_f = \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda_f$).

В случае осевой симметрии КА описанное решение отличается от [11], так как все управляющие переменные $M_i(t)$ – непрерывные функции времени. Компоненты кинетического момента L_i рассчитываются по уравнениям (2.7) и (4.1). Оптимальные функции $b(t)$ и $m(t)$ определены программами (2.11), (2.12) и зависят от параметров T, m_0, Q , которые рассчитываются однозначно по заданным $\Lambda_{in}, \Lambda_f, u_0, k_0$ и J_1, J_2, J_3 . Искомые оптимальные управления $M_i(t)$ запишем в следующем аналитическом виде:

$$M_1 = m(t) p_{10}, \quad M_2 = m(t) \sqrt{1 - p_{10}^2} \sin(\kappa + \gamma), \quad M_3 = m(t) \sqrt{1 - p_{10}^2} \cos(\kappa + \gamma),$$

где $\gamma = \arcsin(p_{20} / \sqrt{1 - p_{10}^2})$, если $p_{30} \geq 0$, или $\gamma = \pi - \arcsin(p_{20} / \sqrt{1 - p_{10}^2})$, если $p_{30} < 0$ ($|p_{10}| \neq 1$); вариант $|p_{10}| = 1$ означает плоское вращение вокруг оси OX , поэтому мы его не рассматриваем.

Оптимальную траекторию $\Lambda(t)$ представим в следующей аналитической форме

$$\Lambda(t) = \Lambda_{in} \circ e^{\mathbf{p}_0 \sigma / 2} \circ e^{\mathbf{u} \mathbf{e}_1 / 2},$$

где $\sigma = J_2^{-1} \int_0^t b(t) dt$; $\mu = p_{10} \sigma (J_2 - J_1) / J_1$.

Параметры $\mathbf{p}_0$, m_0 , T для динамически симметричного тела находятся намного проще (также упрощается определение величины (2.13)); $Q = J_2 \beta$, так как $|\mathbf{L}| = J_2 \beta$, где β — скорость вращения вокруг $\mathbf{L}$ (уточним, $\beta \geq 0$, $\beta \geq 0$). Величины $b_{\max}$, G зависят от β . Чтобы (1.6) было минимальным необходимо, чтобы угол β был минимально возможным, для чего потребуем $\beta \leq \pi$ (именно поэтому (4.2) включает условие $0 \leq \beta \leq \pi$). Заметим, что в более ранних работах [11, 14] также выписаны предварительные выражения общего решения задачи оптимального разворота, но для других функционалов качества, и доведено до конца решение для частного случая динамической симметрии твердого тела. При этом авторами статьи [11] было доказано, что решение системы (4.2) существует при любых Λ_i и любых $J_1, J_2 = J_3$.

Для несимметричного тела ($J_1 \neq J_2 \neq J_3$) решение системы (1.2), (2.5), (2.7) находится исключительно численными методами (например, методом последовательных приближений [30], или как описано в предыдущей работе [8]). Расчет искомого орта $\mathbf{p}_0$ осуществляется решением краевой задачи $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}(T) = \hat{\Lambda}_i \circ \mathbf{p}_0 \circ \Lambda_i$ для системы дифференциальных уравнений (3.2). Ранее она решалась методом итераций (см. способ [31] и систему [32]). Известно [18], что $\mathbf{p}_0$ не зависит от поведения $b(t)$, которая входит в (3.2), и мы находим $\mathbf{p}_0$ в предположении, что $b(t) = \text{const}$; это обстоятельство значительно упрощает алгоритм поиска требуемого $\mathbf{p}_0$. Когда $b(t) = \text{const}$, решение $\mathbf{p}(t)$ уравнений (3.2) соответствует вращению по инерции, поскольку уравнения (3.2) выполняются совместно с (1.1), (2.7), из которых следует $\mathbf{M} = 0$.

Необходимо заметить, что чем больше коэффициент k_0 , тем больше максимальная энергия вращения $E_{\max} = E_k(T/2)$ и максимальный кинетический момент $L_{\max} = |\mathbf{L}(T/2)|$. При неограниченно большом $k_0 \rightarrow \infty$ в интервале времени, когда $|\mathbf{M}| \neq \text{const}$, функции $m(t)$ и $a(t)$ изменяются практически по линейному закону (соответственно, в этом интервале времени $b(t)$ близка к квадратичной функции времени). С уменьшением коэффициента k_0 максимальная энергия вращения $E_{\max}$ и максимальный кинетический момент $L_{\max}$ уменьшаются. Если $k_0 \rightarrow 0$, то максимальный кинетический момент $L_{\max}$ достигает минимально возможного уровня $L_0 = m_0 (T - \sqrt{T^2 - 4Q/m_0}) / 2$ (для заданного времени T и ограничения u_0 в (1.3)), при этом оптимальное управление становится практически двухимпульсным, когда управляющий момент между участками с $|\mathbf{M}| = \text{const} = m_0$ отсутствует и КА вращается по инерции [32].

5. Данные математического моделирования. Для примера рассмотрим разворот на 150° в положение, соответствующее кватерниону Λ_f с элементами $l_0 = 0.258819$; $l_1 = 0.683013$; $l_2 = 0.258819$; $l_3 = 0.591505$. В исходном положении направления одноименных осей связанного и инерциального базисов совпадают, и $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}(T) = 0$. Определим оптимальную программу управления для перевода КА из состояния (1.4) в состояние (1.5) за время $T = 300$ с. Численное решение задачи управляемого разворота в постановке (1.1)–(1.6) приведем для случая, когда $u_0 = 0.044 \text{ Н} / \sqrt{\text{кг}}$ и $k_0 = 10 \text{ с}^2$, а инерционные характеристики КА приняты следующими: $J_1 = 4710 \text{ кг м}^2$, $J_2 = 17160 \text{ кг м}^2$, $J_3 = 18125 \text{ кг м}^2$.

При решении двухточечной краевой задачи разворота в (2.7) полагаем $b(t) = \text{const}$ (и $|\mathbf{L}| = \text{const}$), так как характер поведения функции $b(t)$ не влияет на искомое значение $\mathbf{p}_0$ [18]. Поиск $\mathbf{p}_0$ начнем с решения той же задачи для динамически симметричного тела с моментами инерции J_1 и J , где J – момент инерции относительно поперечной оси, равный среднему значению между J_2 и J_3 (исследователи нередко применяют принцип осреднения [33]). Допустимым является значение $J = (J_2 + J_3) / 2$, хотя чаще используют следующую величину [8]

$$J = \frac{J_2 J_3}{J_2 + J_3 - J_1} \left(\sqrt{(1 - J_1 / J_2)(1 - J_1 / J_3)} + 1 \right).$$

Предположив, что КА – динамически симметричное тело, решаем систему (4.2). Найденные из нее значения $\mathbf{p}_0$ и β принимаем за начальное приближение к истинным значениям, соответствующим оптимальному решению. Они уточняются до тех пор, пока не будут удовлетворять системе (1.2), (2.7), (3.2) с учетом $b(t) = \text{const}$ (что соответствует $\mathbf{M} = 0$) при условиях $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$, $\Lambda(t_{pr}) = \Lambda_f$, предъявляемых к вращению КА. Полагаем $b(t) = J\beta / T$. Зная $\mathbf{p}_0$ и угол β , компоненты начального кинетического момента $\mathbf{L}_{st}$ вычисляем по выражениям:

$$L_{1st} = \frac{J\beta}{T} p_{10}, \quad L_{2st} = \frac{J\beta}{T} p_{20}, \quad L_{3st} = \frac{J\beta}{T} p_{30}. \quad (5.1)$$

Прогноз “свободного” движения осуществляем путем интегрирования системы уравнений (1.2), (2.7), (3.2) и $b(t) = J\beta / T$ с начальными условиями $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$, $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}_{st}$, $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$. Степень отличия $\mathbf{p}_0$ и β от истинного решения отражает оценка $\varepsilon = \text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{pr} \circ \Lambda_f)$, где Λ_{pr} – максимально близкое к Λ_f положение, полученное в ходе моделирования движения КА относительно центра масс, соответствующего вращению по инерции ($M_i = 0$). Значение $\mathbf{p}_0$ уточняем до тех пор, пока $\varepsilon < \varepsilon_{th}$ (ε_{th} – заданная пороговая величина чуть меньше единицы, которая отражает точность рассчитанного решения). Как только условие $\varepsilon \geq \varepsilon_{th}$ будет достигнуто (прогнозируемая ошибка удовлетворит заданной точности), искомые значения $\mathbf{p}_0$ и β (для удовлетворения краевым условиям $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$, $\Lambda(t_{pr}) = \Lambda_f$) считаются найденными, а краевая задача решенной. Вектор $\mathbf{p}_0$ уточнялся в соответствии с рекуррентным правилом:

$$\Lambda_t^{(k+1)} = \Lambda_t^{(k)} \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr},$$

где $\Lambda_t^{(k)}$ – кватернион разворота для расчета $\mathbf{p}_0$ и $\mathbf{L}_{st}$ на k -м приближении. Правые части системы (4.2) (элементы кватерниона разворота $\Lambda_t^{(k)}$) обновляются на каждом k -м шаге итераций, из (4.2) мы находим $\mathbf{p}_0$, β , а также кинетический момент $\mathbf{L}_{st}$ (согласно (5.1)) для интегрирования уравнений (1.2), (2.7), (3.2), и вычисляем прогноз Λ_{pr} . Если $\varepsilon < \varepsilon_{th}$, то рассчитывается новый кватернион разворота $\Lambda_t^{(k+1)}$ для следующего $(k+1)$ -го приближения – процесс уточнения $\mathbf{p}_0$ возобновляется. В правых частях системы (4.2) для начального приближения берем элементы кватерниона $\Lambda_t^{(0)} = \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda_f$. Итерационный процесс останавливается, когда $\varepsilon \geq \varepsilon_{th}$.

Описанная схема итераций напоминает метод решения уравнения вида $x = g(x)$ для скалярной функции $g(x)$ скалярного (одномерного) аргумента x . В описанной схеме аргумент – кватернион Λ_t , а функция – кватернионное произведение $\Lambda_t \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}$ (Λ_f – постоянный кватернион, а Λ_{pr} зависит от аргумента Λ_t через систему (4.2), (5.1) и модель движения, описываемую уравнениями (1.2), (2.7), (3.2) и $b(t) = \text{const} = J\beta/T$). Изменяя Λ_t , получим новый вектор $\mathbf{p}_0$ (как решение системы (4.2) с новыми правыми частями), и новые начальные значения L_{ist} и прогнозируемое положение Λ_{pr} , что приведет к изменению функции $\Lambda_t \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}$. Как только $\text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{pr} \circ \Lambda_f) \geq \varepsilon_{th}$, поиск новых приближений прекращается, считается, что вектор $\mathbf{p}_0$ найден. Поскольку $|\text{vect}(\tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}^{(k)})| < |\text{vect} \Lambda_t^{(k)}|$ для всех k , то можно констатировать, что процесс приближений к искомому значению $\mathbf{p}_0$ сходится. Похожий способ расчета $\mathbf{p}_0$ применялся в решении двухточечной краевой задачи разворота для максимального быстродействия [8].

После решения краевой задачи разворота из положения $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$ в положение $\Lambda(T) = \Lambda_f$ были получены $\mathbf{p}_0 = \{0.381804; 0.1941395; 0.9036236\}$ и (2.13), $Q = 28907.5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$. Соответственно, $m_0 = 5 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Поскольку $m_0 T^2 > 4Q$, то заданный разворот реализуем. Кроме того, k_0 и m_0 соответствуют условию $Q(\exp(T/\sqrt{k_0}) - 1) > 2m_0[T(\exp(T/\sqrt{k_0}) + 1)\sqrt{k_0}/2 - k_0(\exp(T/\sqrt{k_0}) - 1)]$. Поэтому в начальный и конечный моменты времени $|M| = m_0$, оптимальное вращение включает два участка, внутри которых $|M| = \text{const}$. Реализующееся управление имеет три интервала изменения момента M – вначале интенсивная раскрутка КА (когда $m(t) = \text{const} = m_0$), участок с экспоненциальным изменением $m(t)$ (функция $m(t)$ уменьшается с $m(t) = m_0$ до $m(t) = -m_0$), и интенсивное торможение в конце (когда $m(t) = \text{const} = -m_0$). Точкам переключения соответствуют $t_1 = 17.576 \text{ с}$ и $t_2 = 282.424 \text{ с}$, постоянная $r_0 = 178.92 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. В момент времени $t = 150$ с кинетический момент достигает максимальной величины $\Lambda_{\text{max}} = 103.69 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. Энергия вращения во время разворота не превышает $E_{\text{max}} = 0.42 \text{ Дж}$.

Наглядная иллюстрация движения КА во время оптимального разворота приведена на рис. 2–6 (по результатам математического моделирования). На рис. 2 даны графики изменения проекций кинетического момента на

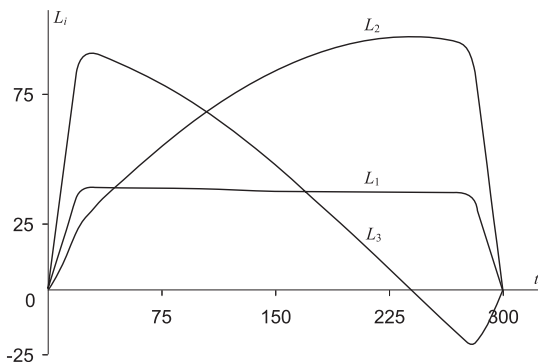


Рис. 2. Изменение проекций кинетического момента КА во время разворота.

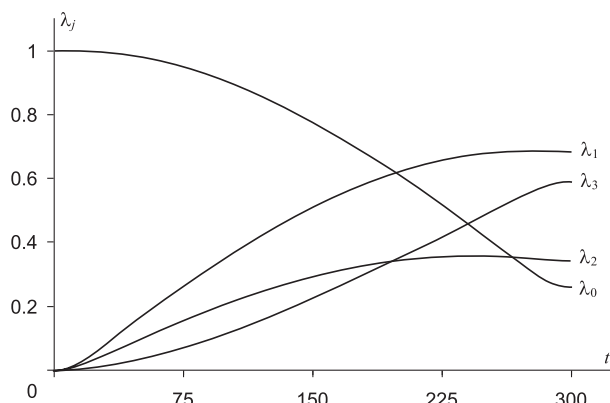


Рис. 3. Изменение компонент кватерниона ориентации $\Lambda(t)$ во время разворота.

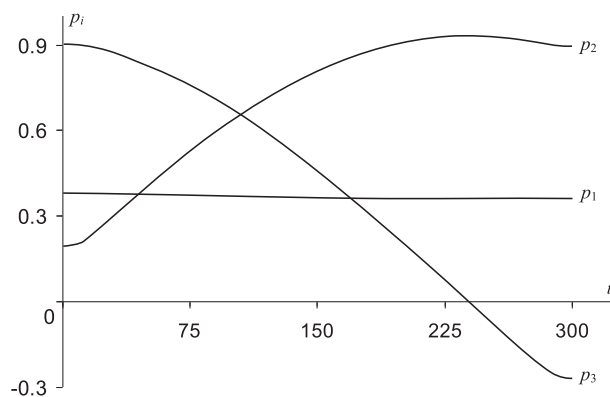


Рис. 4. Вид функций $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ во время оптимального разворота.

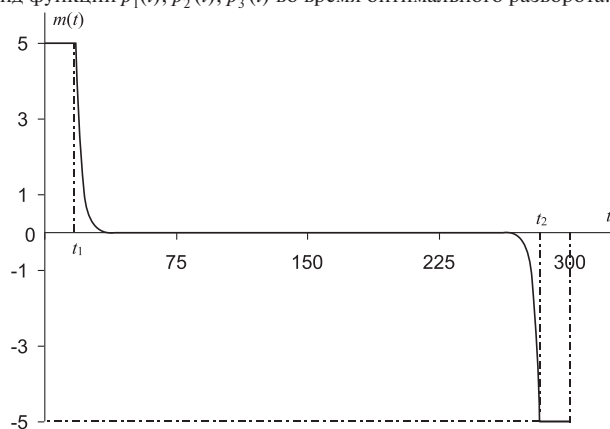


Рис. 5. Оптимальная функция $m(t)$ для модельного разворота.

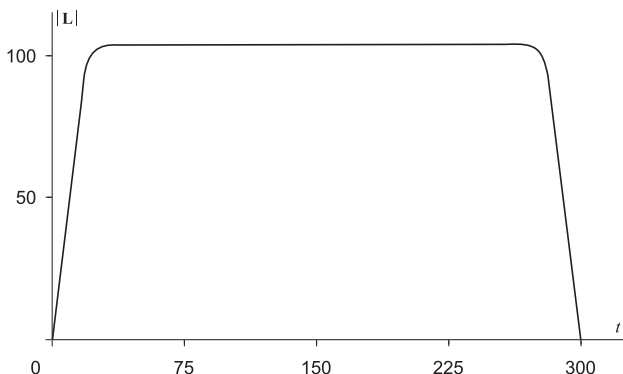


Рис. 6. Изменение модуля кинетического момента при оптимальном управлении.

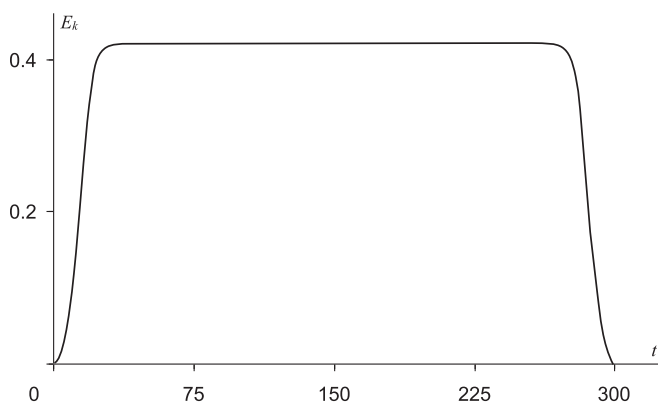


Рис. 7. Изменение кинетической энергии вращения E_k в процессе разворота.

оси связанной системы координат $L_1(t)$, $L_2(t)$, $L_3(t)$ во времени (проекции L_i даны в Н·м·с). Рис. 3 иллюстрирует изменение элементов кватерниона $\Lambda(t)$ в процессе совершаемого маневра ($\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$ отражают текущую ориентацию КА). Характер поведения составляющих $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ показан на рис. 4 (значения p_i , как и λ_j , — безразмерные величины), причем проекция p_1 изменяется незначительно. Оптимальная функция $m(t)$ для рассматриваемого разворота показана на рис. 5 ($m(t)$ дается в Н·м). Изменение модуля кинетического момента КА и кинетической энергии вращения во время оптимального разворота иллюстрируют рис. 6 и рис. 7 (энергия E_k дана в Дж). Свидетельством того, что OX — продольная ось КА, является то обстоятельство, что L_1 знакопостоянна, и характер ее изменения повторяет поведение модуля кинетического момента (в отличие от L_2 и L_3). Для оптимального управления переменные p_i и λ_j — гладкие функции времени; L_i — гладкие функции времени (за исключением $t = 0$ и $t = T$).

Заключение. Исследуется задача оптимального управления разворотом твердого тела (в частности, КА) из исходного положения в предписанное конечное положение. Для оптимизации выбранный показатель качества объединяет

в заданной пропорции вклад управляющих усилий (по энергозатратам), затраченных для совершения маневра и интеграл кинетической энергии вращения. Проблемы экономичности управления вращениями актуальны и в настоящее время, в силу чего рассмотренная задача остается практически важной. Обнаружены ключевые свойства разворота и тип траектории, соответствующей критерию (1.6). Доказано, что постоянной величиной является отношение квадрата модуля кинетического момента к кинетической энергии вращения КА.

Чтобы решить поставленную задачу мы использовали кватернионные модели и принцип максимума Л.С. Понтрягина. Для сформулированной оптимизационной задачи выписаны функция Гамильтона–Понтрягина, сопряженная система уравнений и аналитические выражения для оптимальных управляющих функций. На основе необходимых условий оптимальности определена структура оптимального управления. Даны соотношения для определения пространственного движения КА; при этом доказана единственность оптимального решения.

Главное отличие представленного решения — использование нового функционала качества. Наличие в минимизируемом функционале интеграла энергии ограничивает максимальную кинетическую энергию вращения. Коэффициент k_0 , устанавливающий пропорцию между затратами управляющих усилий и интегралом энергии вращения, определяет, насколько пологим будет изменение модуля кинетического момента во время оптимального разворота. Другое принципиальное отличие заключается в том, что из-за ограниченности управления во время оптимального разворота не исключено наличие участков вращения с постоянным модулем управляющего момента. В статье определены и подробно описаны все возможные варианты реализующегося оптимального управления, найдено условие (критерий), позволяющее определить тип оптимального управления, исходя из заданного коэффициента k_0 минимизируемого функционала и размера области допустимых управлений. В зависимости от значения k_0 оптимальным может быть один из двух вариантов управления: а) вращение с переменным модулем управляющего момента на протяжении всего маневра; б) управление с участками вращения с постоянным максимально возможным модулем управляющего момента — раскрутка в начале разворота и торможение в конце разворота. Приведено аналитическое уравнение, устанавливающее связь между длительностью участков вращения с постоянным модулем управляющего момента и коэффициентом k_0 минимизируемого функционала, а также максимально возможной величиной управляющего момента m_0 . Выписаны формулы (в аналитической форме) для расчета максимальной энергии вращения и максимального модуля кинетического момента. Описана реализация программного разворота.

Полученные результаты отличаются от решения работы [11], где найдено оптимальное релейное управление вместо непрерывного управления, полученного в нашем случае. Представлены выражения для расчета основных характеристик поворотного маневра. Описывается вычислительный алгоритм решения краевой задачи для произвольного распределения масс твердого тела. Приведен пример математического моделирования, демонстрирующий поведение параметров движения. В частном случае динамически симметричного КА решение задачи оптимального управления доведено до конца:

в аналитическом виде получена система уравнений, позволяющая напрямую найти решение двухточечной краевой задачи и рассчитать ключевые константы закона управления (для этого может использоваться устройство [34]).

В последние годы в связи с ростом сроков активного существования КА (10–15 лет), а также применением высокоточных систем ориентации интерес к ЭРД значительно возрос [35]. Неоспоримые преимущества ЭРД – возможность маленькой величины единичного импульса тяги, большая точность дозирования импульсов, практически отсутствует импульс последствия, что позволяет осуществлять особо точную ориентацию. Благодаря невообразимо высоким значениям удельного импульса (до 6000 с) массовое применение ЭРД на КА (в том числе для ориентации КА) – одна из ведущих и закономерных тенденций космической деятельности в мире. В настоящее время многие зарубежные КА используют ионные двигатели для управления ориентацией (например, при решении задач ориентации КА в космической программе США использовали ионные двигатели XIPS-25, созданные корпорацией Boeing Space Systems). В этом случае потребляемая электроэнергия достаточно близко оценивается величиной, пропорциональной первому слагаемому в (1.6); второй интеграл в показателе (1.6) ограничивает кинетическую энергию вращения, делая ее минимально возможной при заданном времени разворота, что также немаловажно в космическом полете. Учитывая необходимость снижения электропотребления ЭРД для управления КА с желательным уменьшением энергии вращения, становится понятным выбор минимизируемого функционала в форме (1.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sinitin L.I., Kramlikh A.V.* Synthesis of the optimal control law for the reorientation of a nanosatellite using the procedure of analytical construction of optimal regulators // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021. V. 1745. P. 012053. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012053>
2. Велищанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Синтез алгоритмов переориентации космического аппарата на основе концепции обратной задачи динамики // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2003. № 5. С. 156–163.
3. *Junkins J.L., Turner J.D.* Optimal spacecraft rotational maneuvers. Elsevier. USA, 1986. 515 p.
4. Решмин С.А. Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в желаемое угловое положение // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2018. № 5. С. 29–39. <https://doi.org/10.31857/S000233880002843-6>
5. *Scrivener S., Thompson R.* Survey of time-optimal attitude maneuvers // *J. Guidance, Control and Dynamics.* 1994. V. 17. № 2. P. 225–233. <https://doi.org/10.2514/3.21187>
6. *Zhou H., Wang D., Wu B., EK Poh.* Time-optimal reorientation for rigid satellite with reaction wheels // *Int. J. Control.* 2012. V. 85. № 10. P. 1–12. <https://doi.org/10.1080/00207179.2012.688873>
7. Решмин С.А. Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в гравитационно-устойчивое положение // *Доклады Академии наук.* 2018. Т. 480. № 6. С. 671–675.
8. Левский М.В. Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2008. № 6. С. 144–157.
9. *Shen H., Tsiotras P.* Time-optimal control of axi-symmetric rigid spacecraft with two controls // *AIAA J. Guidance, Control and Dynamics.* 1999. V. 22. № 5. P. 682–694. <https://doi.org/10.2514/2.4436>

10. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 2. С. 131–147. <https://doi.org/10.7868/S0002338818020117>
11. Бранец В.Н., Черток М.Б., Казначеев Ю.В. Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исслед. 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 352–360.
12. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
13. Айпанов Ш.А., Жакыпов А.Т. Метод разделения переменных и его применение для задачи оптимального разворота космического аппарата // Космич. исслед. 2020, Т. 58, № 1. С. 7384. <https://doi.org/10.31857/S002342062001001X>
14. Стрелкова Н.А. Об оптимальной переориентации твердого тела // Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы. Пермь. ПГУ. 1990. С. 115–133.
15. Левский М.В. Кинематически оптимальное управление переориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 1. С. 119–136.
16. Зеленукина О.В., Челноков Ю.Н. Построение оптимальных законов изменения вектора кинетического момента динамически симметричного твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 4. С. 31–49.
17. Бирюков В.Г., Челноков Ю.Н. Построение оптимальных законов изменения вектора кинетического момента твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 5. С. 3–21.
18. Левский М.В. Синтез оптимального управления терминальной ориентацией космического аппарата с использованием метода кватернионов // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 7–24.
19. Levskii M.V. About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation // Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems. 2015. V. 21. № 2. P. 61–75.
20. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 6. С. 129–145.
21. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое квазиоптимальное решение задачи поворота осесимметричного твердого тела с комбинированным функционалом // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 3. С. 39–49. <https://doi.org/10.31857/S0002338820030105>
22. Сапунков Я.Г. Молоденков А.В. Аналитическое решение задачи оптимального в смысле комбинированного функционала разворота осесимметричного космического аппарата // Автоматика и телемеханика. 2021. № 7. С. 86–106. <https://doi.org/10.31857/S0005231021070059>
23. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое приближенное решение задачи оптимального разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 3. С. 131–141.
24. Левский М.В. Управление разворотом твердого тела (космического аппарата) с комбинированным критерием оптимальности на основе кватернионов // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 5. С. 58–78. <https://doi.org/10.31857/S0572329922600566>
25. Quang M. Lam. Robust and adaptive reconfigurable control for satellite attitude control subject to under-actuated control condition of reaction wheel assembly // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. 2018. V. 9. № 1. P. 47–63.
26. Levskii M.V. Special aspects in attitude control of a spacecraft, equipped with inertial actuators // J. Computer Science Applications and Information Technology. 2017. V. 2. № 4. P. 1–9.
27. Горшков О.А., Муравьев В.А., Шагайда А.А. Холловские и ионные плазменные двигатели для космических аппаратов. М.: Машиностроение, 2008. 280 с.
28. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961. 392 с.
29. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974. 488 с.
30. Любушин А.А. О применении модификаций метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления // ЖВМиМФ. 1982. Т. 22. № 1. С. 30–35.

31. Левский М.В. Способ управления разворотом космического аппарата и система для его реализации. Патент на изобретение РФ № 2114771//Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 1998, № 19. Опубликовано 10.07.1998. С. 234–236.
32. Левский М.В. Система управления пространственным разворотом космического аппарата. Патент на изобретение РФ № 2006431// Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 1994, № 2. Опубликовано 20.01.1994. С. 49–50.
33. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
34. Левский М.В. Устройство формирования параметров регулярной прецессии твердого тела. Патент на изобретение РФ № 2146638 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 2000. № 8. Опубликовано 20.03.2000. С. 148.
35. Кульков В.М., Обухов В.А., Егоров Ю.Г., Белик А.А., Крайнов А.М. Сравнительная оценка эффективности применения перспективных типов электроракетных двигателей в составе малых космических аппаратов // Вестн. Самарск. гос. аэрокосмического ун-та. 2012. № 3(34). С. 187–195.

QUATERNION SOLUTION OF THE PROBLEM ON OPTIMUM CONTROL OF THE ORIENTATION OF A SOLID (SPACECRAFT) WITH A COMBINED QUALITY CRITERIA

M. V. Levskii^{a,*}

^a *Maksimov Space System Research and Development Institute, Khrunichev State Research and Production Space Center, Korolev, Moscow oblast, 141091 Russia*

* *e-mail: levskii1966@mail.ru*

Received 16.05.2023

Revised 22.06.2023

Accepted 01.07.2023

Abstract – The problem on optimal rotation of a solid (spacecraft) from an arbitrary initial to a prescribed final angular position in the presence of restrictions on the control variables is studied. The turnaround time is set. To optimize the rotation control program, a combined quality criterion that reflects energy costs is used. The minimized functional combines in a given proportion the integral of the rotational energy and the contribution of control forces to the maneuver. Based on the Pontryagin’s maximum principle and quaternion models of controlled motion of a solid, an analytical solution of the problem has been obtained. The properties of optimal motion are revealed in analytical form. To construct an optimal rotation program, formalized equations and calculation formulas are written. Analytical equations and relations for finding optimal control are given. The key relations that determine the optimal values of the parameters of the rotation control algorithm are given. In addition, a constructive scheme for solving the boundary value problem of the maximum principle for arbitrary turning conditions (initial and final positions and moments of inertia of a solid) is described. For a dynamically symmetric solid, a closed-form solution for the reorientation problem is obtained. A numerical example and mathematical modeling results that confirm the practical feasibility of the developed method for controlling the orientation of a spacecraft are presented.

Keywords: quaternions, orientation control, maximum principle, combined quality criterion, control functions, control algorithm, boundary value problem

REFERENCES

1. L. I. Sinitsin and A. V. Kramlikh, "Synthesis of the optimal control law for the reorientation of a nanosatellite using the procedure of analytical construction of optimal regulators," J. Phys.: Conf. Ser. **1745**, 012053 (2021). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012053>
2. M. A. Velishchanskii, A. P. Krishchenko, and S. B. Tkachev, "Synthesis of spacecraft reorientation algorithms using the concept of the inverse dynamic problem," J. Comput. Syst. Sci. Int. **42**, 811–818 (2003).
3. J. L. Junkins and J. D. Turner, *Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers* (Elsevier, 1986).
4. S. A. Reshmin, "Threshold absolute value of a relay control when time-optimally bringing a satellite to a gravitationally stable position," J. Comput. Syst. Sci. Int. **57**, 713–722 (2018). <https://doi.org/10.1134/S106423071805012X>
5. S. Scrivener and R. Thompson, "Survey of time-optimal attitude maneuvers," J. Guid. Contr. Dyn. **17** (2), 225–233 (1994). <https://doi.org/10.2514/3.21187>
6. H. Zhou, D. Wang, B. Wu, and E. K. Poh., "Time-optimal reorientation for rigid satellite with reaction wheels," Int. J. Contr. **85** (10), 1452–1463 (2012). <https://doi.org/10.1080/00207179.2012.688873>
7. S. A. Reshmin, "The threshold absolute value of a relay control bringing a satellite to a gravitationally stable position in optimal time," Dokl. Phys. **63**, 257–261 (2018). <https://doi.org/10.1134/S1028335818060101>
8. M. V. Levskii, "Pontryagin's maximum principle in optimal control problems of orientation of a spacecraft," J. Comput. Syst. Sci. Int. **47**, 974–986 (2008). <https://doi.org/10.1134/S1064230708060117>
9. H. Shen and P. Tsiotras, "Time-optimal control of Axi-symmetric rigid spacecraft with two controls," AIAA J. Guid. Contr. Dyn. **22** (5), 682–694 (1999). <https://doi.org/10.2514/2.4436>
10. A. V. Molodenkov and Y. G. Sapunkov, "Analytical solution of the minimum time slew maneuver problem for an axially symmetric spacecraft in the class of conical motions," J. Comput. Syst. Sci. Int. **57**, 302–318 (2018). <https://doi.org/10.1134/S1064230718020120>
11. V. N. Branets, M. B. Chertok, and Yu. V. Kaznacheev, "Optimal turn of a rigid body with a single axis of symmetry," Kosm. Issl. **22** (3), 352–360 (1984).
12. V. N. Branets and I. P. Shmyglevskii, *Application of Quaternions to Rigid Body Attitude Problems* (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
13. S. A. Aipanov and A. T. Zhakypov, "The method of separation of variables and its application to the problem of a spacecraft's optimal turn," Cosmic Res. **58**, 53–63 (2020). <https://doi.org/10.1134/S0010952520010013>
14. N. A. Strelkova, "On optimal reorientation of a solid," in *Problems of Mechanics of Controlled Motion. Nonlinear Dynamical Systems* (PGU, Perm, 1990), pp. 115–133 [in Russian].
15. M. V. Levskii, "Kinematically optimal spacecraft attitude control," J. Comput. Syst. Sci. Int. **54**, 116–132 (2015). <https://doi.org/10.1134/S1064230714050116>
16. O. V. Zelepukina and Y. N. Chelnokov, "Construction of optimal laws of variation in the angular momentum vector of a dynamically symmetric rigid body," Mech. Solids **46**, 519–533 (2011). <https://doi.org/10.3103/S0025654411040030>
17. V. G. Biryukov and Y. N. Chelnokov, "Construction of optimal laws of variation of the angular momentum vector of a rigid body," Mech. Solids **49**, 479–494 (2014). <https://doi.org/10.3103/S002565441405001X>
18. M. V. Levskii, "Optimal spacecraft terminal attitude control synthesis by the quaternion method," Mech. Solids **44**, 169–183 (2009). <https://doi.org/10.3103/S0025654409020022>
19. M. V. Levskii, "About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation," Probl. Nonlin. Anal. Eng. Syst. **21** (2), 61–75 (2015).
20. A. V. Molodenkov and Yu. G. Sapunkov, "Analytical solution of the optimal slew problem for an axisymmetric spacecraft in the class of conical motions," J. Comput. Syst. Sci. Int. **55**, 969–985 (2016). <https://doi.org/10.1134/S1064230716060095>
21. A. V. Molodenkov and Yu. G. Sapunkov, "Analytical quasi-optimal solution of the slew problem for an axially symmetric rigid body with a combined performance index," J. Comput. Syst. Sci. Int. **59**, 347–357 (2020). <https://doi.org/10.1134/S1064230720030107>

22. Yu. G. Sapunkov and A. V. Molodenkov, "Analytical solution of the problem on an axisymmetric spacecraft attitude maneuver optimal with respect to a combined functional," *Autom. Remote Contr.* **82**, 1183–1200 (2021). <https://doi.org/10.1134/S0005117921070043>
23. A. V. Molodenkov and Yu. G. Sapunkov, "Analytical approximate solution of the problem of a spacecraft's optimal turn with arbitrary boundary conditions," *J. Comput. Syst. Sci. Int.* **54**, 458–468 (2015). <https://doi.org/10.1134/S1064230715030144>
24. M. V. Levskii, "Control of the rotation of a solid (spacecraft) with a combined optimality criterion based on quaternions," *Mech. Solids* **58**, 1483–1499 (2023). <https://doi.org/10.3103/S002565442360040X>
25. Quang M. Lam, "Robust and adaptive reconfigurable control for satellite attitude control subject to under-actuated control condition of reaction wheel assembly," *Math. Eng. Sci. Aerosp.* **9** (1), 47–63 (2018).
26. M. V. Levskii, "Special aspects in attitude control of a spacecraft, equipped with inertial actuators," *J. Comput. Sci. Appl. Inform. Technol.* **2** (4), 1–9 (2017). <http://dx.doi.org/10.15226/2474-9257/2/4/00121>
27. O. A. Gorshkov, V. A. Murav'ev, and A. A. Shagaida, *Hall and Ion Plasma Engines for Spacecraft* (Mashinostroenie, Moscow, 2008) [in Russian].
28. L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes* (Wiley-Interscienc, New York, 1962; Nauka, Moscow, 1983).
29. L. C. Young, *Lectures on the Calculus of Variations and the Theory of Optimal Control* (Saunders, 1969; Mir, Moscow, 1974).
30. A. A. Lyubushin, "Modifications of the method of successive approximations for solving optimal control problems," *USSR Computat. Math. Math. Phys.* **22** (1), 29–34 (1982). [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(82\)90160-4](https://doi.org/10.1016/0041-5553(82)90160-4)
31. M. V. Levskii, RF Patent No. 2 114 771, Byull. Izobr., No. 19, 234–236 (1998).
32. M. V. Levskii, RF Patent No. 2 006 431, Byull. Izobr., No. 2, 49–50 (1994).
33. V. Ph. Zhuravlev and D. M. Klimov, *Applied Methods in the Vibration Theory* (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].
34. M. V. Levskii, RF Patent No. 2 146 638, Byull. Izobr., No. 8, 148 (2000).
35. V. M. Kulkov, V. A. Obukhov, Y. G. Yegorov, et al., "Comparative evaluation of the effectiveness of the application of perspective types of electric propulsion thrusters in the small spacecraft," *Vestn. Samarsk. Gos. Aerokosm. Univ.*, No. 3(34), 187–195 (2012).

УДК 539.374

ХРУПКОЕ РАЗРУШЕНИЕ УПРУГОГО СЛОЯ С ДЕФЕКТОМ В ВИДЕ ОКРУЖНОСТИ ПРИ ЕГО ДВУХОСНОМ НАГРУЖЕНИИ

© 2024 г. В. В. Глаголев^{а*}, А. А. Маркин^{а**}

^аТулский государственный университет,
Тула, Россия

^{*}*e-mail: vadim@tsu.tula.ru*

^{**}*e-mail: markin-nikram@yandex.ru*

Поступила в редакцию 29.05.2023 г.

После доработки 04.07.2023 г.

Принята к публикации 08.07.2023 г.

На основе экспериментальных данных по комбинированному нагружению бесконечного слоя, ослабленного круговым отверстием в хрупком материале, моделируется его критическое состояние, определяемое энергетическим критерием. Критерий разрушения связан с потоком удельной свободной энергии через дугу взаимодействия и линейным размером. Предлагаемый подход позволяет отразить зависимость критической внешней нагрузки от радиуса кривизны. Предложена и реализована процедура определения значения линейного размера. Используя известные экспериментальные результаты, получена оценка введенного линейного параметра для слоя из гипса марки ГВВС-16.

Ключевые слова: линейная упругость, линейный размер, энергетическое произведение

DOI: 10.31857/S1026351924010126, EDN: VZPHXQ

Введение. Для плоской задачи о нагружении материального слоя с отверстиями возможно получение аналитических решений [1–3], среди которых выделим задачу о нагружении кругового отверстия в бесконечной среде. Рассматривая одноосное нагружение на бесконечности, приходим к задаче Кирша [4] решение которой приводит к нахождению коэффициента концентрации напряжений равному трем, который не зависит от радиуса отверстия. Принимая максимальное главное напряжение в качестве критерия разрушения приходим к тому, что вне зависимости от радиуса отверстия разрушение образца должно происходить при одной нагрузке. Однако экспериментальные данные свидетельствуют о существенной нелинейной зависимости [5–7], при которой для малых значений радиуса отверстия образец практически не реагирует на дефект, а при увеличении радиуса отверстия имеет место асимптотическая сходимость к постоянному значению. Объяснение данному экспериментальному факту в работах [6–8] дается

посредством введения в модель сплошной среды линейного размера (ЛР). В статьях [6, 7] ЛР определяется исходя из решений механики трещин. В статье [8] относительно ЛР рассматривается влияние радиуса кривизны кругового отверстия на эффективный поток энергии растягивающих напряжений. Поток энергии в рамках дуги взаимодействия (ДВ) приводит к разрушению для относительно больших радиусов кривизны при значении внешней нагрузки, найденной по классическому решению задачи Кирша. В данной работе предлагается рассмотреть комбинированное нагружение [9] бесконечного материального слоя с круговым отверстием. На основе экспериментальных данных статьи [7] по критическому значению параметра нагружения для различных круговых вырезов определен ЛР исследуемого материала.

1. Постановка задачи. Рассматривается комбинированное нагружение линейно упругой среды с круговым отверстием согласно схеме рис. 1.

Сжимающая распределенная нагрузка $P_2 = -k_2 p$ вдоль оси x_2 и растягивающая распределенная нагрузка $P_1 = k_1 p$ вдоль оси x_1 линейно связаны с параметром нагружения p , принимаемым положительной величиной. Соответствующая схема нагружения была реализована для материала дигидрат сульфата кальция (двухводного гипса) приготовленного из водного раствора высокопрочного гипса марки ГВС-16 в работе [7] для отверстий диаметра $2a$, равных 1, 2, 5, 10, 15 и 20 мм при $k_1 = 0.143$, $k_2 = 0.764$. Методика эксперимента представлена в работе [9]. Предел прочности бездефектного исследуемого материала при сжатии составил $S_0 = 34.11$ МПа, а при растяжении — $S_1 = 5.38$ МПа [7]. Результаты эксперимента показывают влияние диаметра отверстия на локальную прочность материала. В работе [7] объяснение данного результата строится на основе подхода механики конечных трещин. Рассмотрим полученный результат исходя из анализа потока удельной свободной энергии через ДВ [8], определив при этом соответствующий ЛР — δ_0 исследуемого материала.

Напряженное состояние на контуре кругового отверстия $r = a$ при двухосном растяжении запишем в виде [10]:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0; \sigma_{\theta\theta} = P_1 + P_2 - 2(P_1 - P_2)\cos 2\theta, \quad (1.1)$$

где r, θ — полярные координаты, показанные на рис. 1.

Из (1.1) выпишем отличную от нуля компоненту тензора напряжений с учетом рассматриваемых граничных условий:

$$\sigma_{\theta\theta} = p((k_1 - k_2) - 2(k_1 + k_2)\cos 2\theta) = p(b_1 + b_2\cos 2\theta), \quad (1.2)$$

где $b_1 = -0.621$; $b_2 = -1.814$.

Из (1.2) приходим к двум экстремальным значениям, соответствующим четырем значениям полярного угла $\sigma_{\theta\theta}(0) = \sigma_{\theta\theta}(\pi) = -2.435p$; $\sigma_{\theta\theta}(\pi/2) = \sigma_{\theta\theta}(3\pi/2) = cp = 1.193p$, где $c = b_1 - b_2$. С учетом заявленных прочностных характеристик материала, при которых предел прочности на сжатие более чем в шесть раз превышает предел прочности на растяжение, получаем, что процесс разрушения на окружном вырезе будет локализоваться в окрестности значений полярного угла $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$. Без ограничения общности рассмотрим ДВ в окрестности значения $\theta = \pi/2$, определяемую углом раствора α , согласно рис. 1.

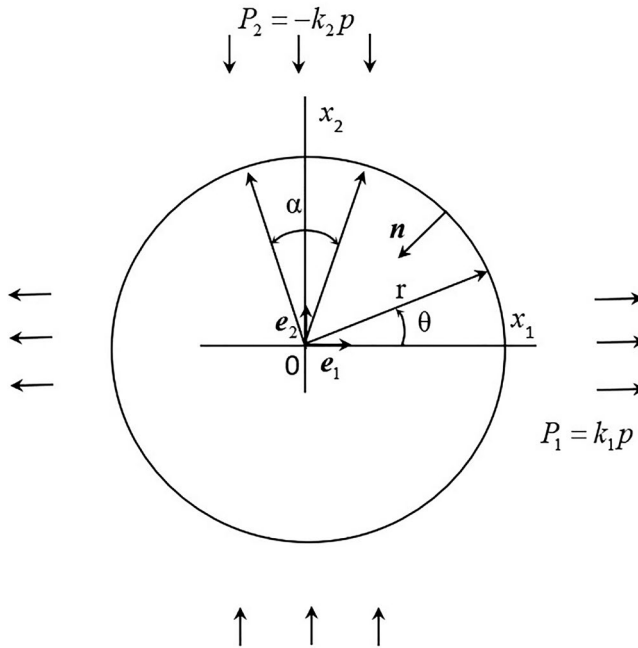


Рис. 1. Схема нагружения кругового отверстия.

2. Нахождение потока энергии через дугу взаимодействия. Следуя работе [8], определим угол раствора следующим образом

$$\alpha = 2 \arcsin \delta_0 / 2a, \quad (2.1)$$

где δ_0 — линейный размер.

Распределение удельной свободной энергии вдоль контура отверстия согласно (1.2) запишем в виде

$$\Psi = \frac{p^2}{2\hat{E}} (b_1 + b_2 \cos 2\theta)^2, \quad (2.2)$$

где $\hat{E} = E$ в случае плоского напряженного состояния; $\hat{E} = E(1 - \nu^2)$ при плоской деформации; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона.

Определим поток удельной свободной энергии через дугу взаимодействия в направлении вектора $\mathbf{e}_2$ в виде:

$$2\gamma = - \int_{(\pi-\alpha)/2}^{(\pi+\alpha)/2} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n} \Psi a d\theta = \int_{(\pi-\alpha)/2}^{(\pi+\alpha)/2} a \Psi \sin \theta d\theta, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к дуге взаимодействия; $\cdot$ — скалярное умножение.

В результате интегрирования (2.3) получаем

$$2\gamma = \frac{p^2 \delta_0 c^2}{2\hat{E}} \left(1 + \frac{b_2}{3c} \left(\frac{\delta_0}{a} \right)^2 + \frac{1}{20} \left(\frac{b_2}{c} \right)^2 \left(\frac{\delta_0}{a} \right)^4 \right). \quad (2.4)$$

Из (2.4) при $\delta_0 = 2a$ получаем $2\gamma = 0.8222 \frac{p^2 \delta_0 c^2}{2\hat{E}}$, в случае $\delta_0 \ll a$ — $2\gamma = \frac{p^2 \delta_0 c^2}{2\hat{E}}$.

Таким образом при одинаковом значении параметра нагружения поток удельной свободной энергии в случае $\delta_0 = 2a$ практически на 20% меньше потока в случае $\delta_0 \ll a$.

Положим, что разрушение охватывает ДВ, когда поток удельной свободной энергии через нее достигает критического значения [8]

$$2\gamma = 2\gamma_c. \quad (2.5)$$

Из (2.4) и (2.5) приходим к выражению для критического значения параметра нагружения

$$p_c = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{\hat{E}}{\delta_0}} \left(1 + \frac{b_2}{3c} \left(\frac{\delta_0}{a} \right)^2 + \frac{1}{20} \left(\frac{b_2}{c} \right)^2 \left(\frac{\delta_0}{a} \right)^4 \right)^{-1/2}. \quad (2.6)$$

Критическое значение параметра нагружения найдем из решения (1.2) положив достижение окружного напряжения при $\theta = \pi/2$ равным пределу прочности на растяжение $p_c = C_1 / c$. Приравняв последнее выражение к значению (2.6) в случае $\delta_0 \ll a$ приходим к выражению критического потока через энергетическое произведение [11]

$$2\gamma_c = \frac{C_1^2}{2\hat{E}} \delta_0. \quad (2.7)$$

Из (2.6), (2.7) получаем

$$\hat{p}_c = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{b_2}{3c} \left(\frac{\delta_0}{a} \right)^2 + \frac{1}{20} \left(\frac{b_2}{c} \right)^2 \left(\frac{\delta_0}{a} \right)^4 \right)^{-1/2}, \quad (2.8)$$

где $\hat{p}_c = p_c / C_1$.

В случае $\delta_0 = 2a$ $\hat{p}_c \approx 0.92$, а в случае $\delta_0 \ll a$ $\hat{p}_c \approx 0.83$. Экстремальное максимальное значение функции (10) $\hat{p}_c \approx 1.26$ находится в точке $\delta_0 / a = \sqrt{-10A/3b_2} \approx 1.48$. Используем точку экстремума функции (10) для определения ЛР.

3. Нахождение линейного размера. На рис. 2 приведем экспериментальные данные работы [7], отнеся их к пределу прочности при растяжении образца. На рис. 2 непрерывной линией приведена аппроксимирующая кривая, построенная

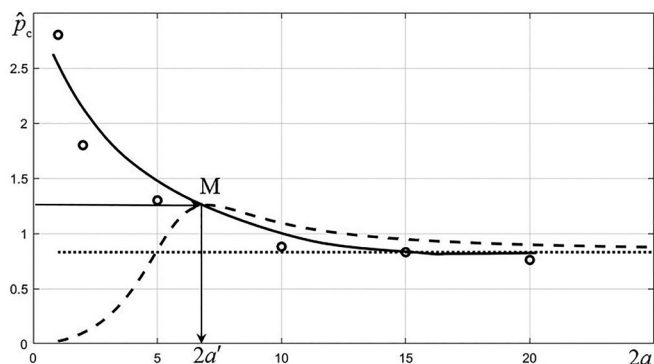


Рис. 2. Данные эксперимента и их интерпретация. Размерность оси абсцисс в мм.

на основе экспоненциальной функции $n_1 e^{n_2 x_1} + n_3$, где n_1, n_2, n_3 — постоянные, определяемые методом наименьших квадратов. Экспериментальные данные работы [7] на рис. 2 выделены кругами. Точечной линией построена прямая $\hat{p}_c = 0.83$.

Для нахождения ЛР проведем прямую $\hat{p}_c = 1.26$ пересечения с аппроксимирующей кривой. Из точки пересечения М опустим перпендикуляр до пересечения с осью абсцисс. Данное значение диаметра $2a'$ отверстия после нормирования будет определять ЛР материала

$$\delta_0 = \sqrt{(-10c / (3b_2))} (2a') / 2.$$

По представленной на рис. 2 зависимости находим $2a' \approx 4$ мм. Таким образом получаем $\delta_0 = 3$ мм. На рис. 2 пунктирной линией построена кривая (2.8) с найденным ЛР. В этом случае допустимый радиус отверстия, для которого возможно проводить расчет предельной нагрузки в рамках предложенного критерия разрушения будет определяться диапазоном $0 \geq a'$.

Заключение. Показано, что формулировка условия прочности в виде достижения потоком удельной свободной энергии через ДВ критического значения позволяет получить зависимость критического состояния от радиуса отверстия и ЛР в упругом слое при комбинированном нагружении на бесконечности. При этом ЛР является характеристикой материала, связывающей предложенный критерий прочности с классическими критериями.

На основе известных экспериментальных данных о критическом состоянии слоев с круговыми отверстиями различных радиусов предложена процедура нахождения ЛР. Проведена оценка ЛР высокопрочного гипса марки ГВВС-16.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00017, <https://rscf.ru/project/23-21-00017/>, в Тульском государственном университете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
2. Inglis C.E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners // Transactions of the Royal Institute of Naval Architects. 1913. V. 55. P. 219–230.
3. Угодчиков А.Г. Решение задач теории упругости методами функций комплексного переменного: Учебное пособие. Н. Н.: Издательство ННГУ, 2001. 396 с.
4. Kirsch G. Die Theorie d. Elastizitat u.d. Bedurfnisse d. Festigkeitslehre // Zeitschrift des Vereines deutscher Ing. 1898. V. 42. P. 797–807.
5. Li. J., Zhang X.B. A criterion study for non-singular stress concentrations in brittle or quasi-brittle materials // Eng. Fract. Mech. 2006. V. 73. № 4. P. 505–523.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2005.09.001>
6. Zhang X.B., Li. J. A failure criterion for brittle and quasi-brittle materials under any level of stress concentration // Eng. Fract. Mech. 2008. V. 78. № 17. P. 4925–4932.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2008.06.020>
7. Сукнев С.В. Применение подхода механики конечных трещин для оценки разрушения квазихрупкого материала с круговым отверстием // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 3. С. 13–25. <http://doi.org/10.31857/S0572329921020161>
8. Глаголев В.В., Маркин А.А. Влияние линейного параметра на хрупкое разрушение упругого слоя с круговым отверстием // ПМТФ. 2023. Т. 64. Вып. 5. С. 159–165.
<http://doi.org/10.15372/PMTF202315252>
9. Сукнев С.В. Разрушение хрупкого геоматериала с круговым отверстием при двухосном нагружении // ПМТФ. 2015. Т. 56. № 6. С. 166–172.
<http://doi.org/10.15372/PMTF20150618>
10. Макаров Е.В., Монахов И.А., Нефедова И.В. Двухосное растяжение пластины с круговым отверстием // Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования. 2015. № 3. С. 17–22.
11. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // Int. J. Solids Struct. 2019. V. 158. P. 141–149.
<http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002>

BRITTLE FRACTURE OF AN ELASTIC LAYER WITH A DEFECT IN THE FORM OF A CIRCLE UNDER BIAXIAL LOADING

V. V. Glagolev^{a*}, and A. A. Markin^{a**}

^aTula State University, Tula, 300012 Russia

*e-mail: vadim@tsu.tula.ru

**e-mail: markin-nikram@yandex.ru

Received 29.05.2023

Revised 04.07.2023

Accepted 08.07.2023

Abstract – Based on experimental data on the combined loading of an infinite layer weakened by a circular hole in a brittle material, its critical state, determined by the energy criterion, is modeled. The failure criterion is related to the free energy flow through the interaction arc and the linear size. The proposed approach allows us to reflect the dependence of the critical external load on the radius of curvature. A procedure for determining the value of the linear size is proposed and implemented. Using known experimental results, an estimate of the introduced linear parameter for a layer of GVV5-16 gypsum was obtained.

Keywords: linear elasticity, linear size, energy product

REFERENCES

1. N. I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity* (Nauka, Moscow, 1966; Noordhoff, Leyden 1975).
2. C. E. Inglis, "Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners," *Trans. Roy. Inst. Naval Archit.* **55**, 219–230 (1913).
3. A. G. Ugodchikov, *Solution of the Theory of Elasticity Problems by Functions of a Complex Variable Methods* (NNGU, N. Novgorod, 2001) [in Russian].
4. G. Kirsch, "Die Theorie der Elastizität und Bedürfnisse der Festigkeitslehre," *Z. Ver. Dtsch. Ing.* **42**, 797–807 (1898).
5. J. Li and X. B. Zhang, "A criterion study for non-singular stress concentrations in brittle or quasi-brittle materials," *Eng. Fract. Mech.* **73** (4), 505–523 (2006).
<https://doi.org/10.1016/j.engframech.2005.09.001>
6. X. B. Zhang and J. Li, "A failure criterion for brittle and quasi-brittle materials under any level of stress concentration," *Eng. Fract. Mech.* **78** (17), 4925–4932 (2008).
<https://doi.org/10.1016/j.engframech.2008.06.020>
7. S. V. Suknev, "Application of the finite fracture mechanics approach to assess the failure of a quasi-brittle material with a circular hole," *Mech. Solids* **56** (3), 301–311 (2021).
<https://doi.org/10.3103/S0025654421030110>
8. V. V. Glagolev and A. A. Markin, "Effect of a linear parameter on the brittle fracture of an elastic layer with a circular hole," *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **64**, 871–877 (2023).
<https://doi.org/10.1134/S0021894423050164>
9. S. V. Suknev, "Fracture of brittle geomaterial with a circular hole under biaxial loading," *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **56**, 1078–1083 (2015).
<https://doi.org/10.1134/S0021894415060188>
10. E. V. Makarov, I. A. Monakhov, and I. V. Nefedova, "Biaxial stretching of the plate a circular hole," *RUDN J. Eng. Res.*, No. 3, 17–22 (2015).
11. V. V. Glagolev and A. A. Markin, "Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter," *Int. J. Solids Struct.* **158**, 141–149 (2019).
<http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002>

УДК 531.38

ДВА СПОСОБА УПРАВЛЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИМ РОБОТОМ МАЯТНИКОВОГО ТИПА НА ПОДВИЖНОЙ ПЛАТФОРМЕ В ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

© 2024 г. Е. А. Микишанина^{а,*}

^аЧувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова, Чебоксары, Россия

*e-mail: evaeva_84@mail.ru

Поступила в редакцию 17.05.2023 г.

После доработки 14.07.2023 г.

Принята к публикации 16.07.2023 г.

Рассматривается проблема управления сферическим роботом с маятниковым приводом, катающимся по платформе, которая способна двигаться поступательно в горизонтальной плоскости абсолютного пространства. На сферический робот наложены голономные и неголономные ограничения. Некоторая точечная цель движется на уровне геометрического центра сферического робота и не касается самой подвижной платформы. Программа движения, позволяющая сферическому роботу преследовать цель, задается посредством двух сервосвязей. Движение за целью робот может осуществлять из любого положения и с любыми начальными условиями. Предлагаются два способа управления данной системой в абсолютном пространстве: посредством управления вынужденным движением платформы (колебания маятника свободные) и посредством управления крутящим моментом маятника (платформа неподвижна или колеблется несогласованно со сферическим роботом). Построены уравнения движения системы. В случае свободных колебаний маятника система уравнений движения обладает первыми интегралами и при необходимости может быть редуцирована на фиксированный уровень этих интегралов. При движении сферического робота по прямой для редуцированной на уровень интегралов системы построены фазовые кривые, графики расстояния от геометрического центра сферического робота до цели, траектории движения выбранной точки платформы при управлении платформой, квадрат управляющего крутящего момента при управлении маятниковым приводом. При движении робота по криволинейной траектории интегрирование ведется в исходных переменных. Строятся графики квадратов угловой скорости маятника и самого сферического робота, а также траектории движения робота в абсолютном пространстве и на подвижной платформе. Численные эксперименты выполнялись в программном пакете Maple.

Ключевые слова: управление, неголономная система, сферический робот, маятниковый привод, подвижная платформа, сервосвязь, преследование

DOI: 10.31857/S1026351924010133, EDN: VZKAHW

1. Введение. Развитие робототехники стимулировало исследования в области динамики и управления неголономными системами. Простой и хорошо изученной неголономной моделью является шар Чаплыгина [1–5]. Немало исследований проведено в области управления шаром Чаплыгина с помощью роторов и гироскопов [6, 7]. Результаты этих и других исследований легли в основу управления сферическим роботом – удобной в использовании роботизированной системой [8–13]. Среди указанных исследований имеются работы не только по динамике робота-шара [8, 10], но и по использованию его как smart-системы [13].

Настоящее исследование посвящено управлению посредством сервосвязей сферическим роботом с маятниковым приводом. Укажем только некоторые работы, посвященные исследованию систем с сервосвязями [14–20]. Первое упоминание о системах с сервосвязями появляется в [18]. Среди современных работ наиболее фундаментальным исследованием по динамике систем с сервосвязями в классическом смысле Бегена, реализуемых посредством управляющих сил, можно считать исследование В.В. Козлова [20], а в [19] предлагается неклассический подход к пониманию сервосвязей, который, в конечном итоге, эквивалентен классическому в смысле Бегена.

Недостатком некоторых работ по исследованию динамики систем с сервосвязями является отсутствие механизмов реализации сервосвязей. В отличие от неголономных связей, которые возникают естественным путем, сервосвязи нельзя рассматривать обособленно от механизмов их реализации. Именно это и отличает сервосвязи от неголономных связей, и именно на этом акцентировал внимание в [21] П. Аппель, который попытался впервые систематизировать некоторые введенные в [18] понятия, касающиеся систем с сервосвязями.

Автором уже были рассмотрены математические модели сферического робота на неподвижной плоскости, управляемого сервосвязью Билимовича [22] и сервосвязью метода погони [12]. В последней работе сферический робот выходил на связь метода погони из состояния покоя.

В данной работе рассматривается система, состоящая из сферического робота с маятниковым приводом, который катится по подвижной горизонтальной платформе за подвижным объектом (целью). Программа движения задается с помощью сервосвязей модифицированного метода погони. Согласно классическому методу погони, скорость робота всегда должна быть направлена на преследуемую цель [15]. Здесь возникает проблема выхода на связь из любого положения и состояния. Поэтому в данной работе предлагается модифицированное условие погони, позволяющее выходить на сервосвязь с любыми начальными условиями. В работе рассматриваются два способа реализации сервосвязей: за счет соответствующего движения платформы при свободных колебаниях маятника и за счет управления крутящим моментом маятника, который генерирует маятниковый привод, при качении сферического робота по неподвижной или движущейся несогласованно с роботом платформе. Уравнения движения системы строятся на основе совместного решения общих уравнений движения с неопределенными множителями и производных по времени от уравнений кинематических связей и сервосвязей. Используется подход, предложенный в [8, 23]. При управлении платформой аналитически находятся траектории точек платформы. По результатам

численного интегрирования строятся графики искомых механических параметров, фазовые кривые и траектории движения робота. Рассматривается движение сферического робота из состояния покоя, а также движение сферического робота, который в начальный момент времени уже движется в некотором направлении, и должен выйти на заданную программу движения.

2. Математическая модель сферического робота маятникового типа на подвижной платформе. Сферический робот, состоящий из сферической оболочки с маятниковым приводом, катится без проскальзывания по подвижной платформе Π (рис. 1), которая в свою очередь может поступательно скользить в горизонтальной плоскости абсолютного пространства. Маятниковый привод представляет собой комбинацию закрепленных в геометрическом центре сферической оболочки осесимметричного маятника по типу волчка Лагранжа и устройства, которое может вынужденно приводить маятник в движение, создавая управляющий крутящий момент.

Введем неподвижную систему координат $OXYZ$ с осью OZ , перпендикулярной плоскости качения робота, и ортом оси $\gamma = (0, 0, 1)^T$.

Обозначим геометрический центр шара C , а центр масс маятника C_i . Введем следующие обозначения в неподвижной системе координат:

- R – радиус сферической оболочки;
- R_i – расстояние от центра C сферической оболочки до центра масс C_i маятника;
- m – масса сферической оболочки;
- m_i – масса маятника;
- $\mathbf{I} = I\mathbf{E}$ – центральный тензор инерции сферической оболочки;
- $\mathbf{i} = \text{diag}(i, i, i + j)$ – центральный тензор инерции маятника;
- $\mathbf{V} = (\dot{X}, \dot{Y}, 0)^T$ – вектор скорости центра C сферической оболочки;
- $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ – вектор скорости центра масс C_i маятника;
- $\mathbf{b} = (b_1, b_2, 0)^T$ – параметрическая траектория точки B платформы с нулевыми в неподвижной системе координат начальными координатами;
- $\dot{\mathbf{b}} = (\dot{b}_1, \dot{b}_2, 0)^T$ – вектор скорости платформы;
- $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T$ – вектор угловой скорости сферической оболочки;
- $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ – вектор угловой скорости маятника;
- $\mathbf{n}$ – вектор, направленный из точки C вдоль оси симметрии маятника.

2.1. Кинематические связи, уравнения движения. Условия непроскальзывания сферической оболочки в точке контакта с платформой Π имеют вид

$$\mathbf{V} = R\boldsymbol{\Omega} \times \gamma + \dot{\mathbf{b}}. \quad (2.1)$$

Условия, являющиеся следствием равенства скоростей сферической оболочки и маятника в точке C крепления маятника к оболочке, имеют вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + R_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}. \quad (2.2)$$

Эволюция вектора $\mathbf{n}$ задается в виде

$$\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}. \quad (2.3)$$

Система связей (2.1)–(2.2), вообще говоря, не является неголономной, а представляет собой комбинацию голономных и неголономных кинематических связей.

Уравнения движения для сферической оболочки с закрепленным в геометрическом центре волчком Лагранжа, катающейся по неподвижной горизонтальной плоскости, получены в [23]. Запишем уравнения движения сферического робота с маятниковым приводом, на движение которого наложены кинематические связи (2.1)–(2.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + a\boldsymbol{\gamma} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{n}) + a\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{n}}) &= -M\mathbf{R}\boldsymbol{\gamma} \times \ddot{\mathbf{b}} - \mathbf{Q} \\ i_0\dot{\boldsymbol{\omega}} + j_0(\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{n})\mathbf{n} + a\mathbf{n} \times (\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{\gamma}) &= -j_0(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})\dot{\mathbf{n}} - m_l R_l \mathbf{n} \times (g\boldsymbol{\gamma} + \ddot{\mathbf{b}}) + \mathbf{Q} \\ \dot{\mathbf{n}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\mathbf{J} = \text{diag}(J, J, I)$, $M = m + m_l$, $J = I + MR^2$, $i_0 = i + m_l R_l^2$, $j_0 = j - m_l R_l^2$, $a = m_l R_l R$, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)^T$ – управляющий крутящий момент, приложенный в точке C , g – ускорение свободного падения. Из уравнений (2.4) следует, что

$$I\dot{\Omega}_3 = -Q_3.$$

Положим для простоты

$$\Omega_3 = Q_3 = 0.$$

2.2. Способы управления. Считаем, что движение системы управляемое. Будем рассматривать два способа управления.

- Управление посредством вынужденного движения платформы при свободных колебаниях маятника. В этом случае вектор управляющего крутящего момента $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{0}$. Требуется определить вектор скорости $\dot{\mathbf{b}}$ платформы П (или траекторию некоторой точки платформы, например, точки B), который позволит сферическому роботу реализовать заданную программу движения.

- Управление крутящим моментом маятника с помощью маятникового привода. В этом случае платформа П либо неподвижна ($\dot{\mathbf{b}} \equiv \mathbf{0}$), либо совершает несогласованные с движением робота колебания (вектор скорости $\dot{\mathbf{b}}$ задан). Требуется определить вектор управляющего крутящего момента $\mathbf{Q}$, который позволит сферическому роботу реализовать заданную программу движения.

Каждый из искомых векторов, $\dot{\mathbf{b}}$ в первом случае и $\mathbf{Q}$ во втором случае, содержит по две неопределенные компоненты, поэтому требуется наличие двух сервосвязей. Иначе программа движения не задана.

2.3. Программа движения. Сферический робот преследует некоторую точечную цель, которая движется на уровне его геометрического центра и не касается платформы (рис. 1). Введем вектор $\mathbf{P} = (\xi - X, \eta - Y, 0)$, где (X, Y, R) – координаты геометрического центра C робота, (ξ, η, R) – координаты цели в неподвижной системе координат, причем

$$\rho = |\mathbf{P}| = \sqrt{(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2}$$

– расстояние от геометрического центра C робота до цели.

Для удобства выберем начало системы координат O так, чтобы в момент времени $t = 0$ проекция геометрического центра сферической оболочки C

на плоскость OXY совпадала с точкой O и точкой платформы B , то есть $X_0 = Y_0 = b_{1,0} = b_{2,0} = 0$. Ось OX сонаправим с вектором $P_0 = (\xi_0 - X_0, \eta_0 - Y_0, 0)$, если в начальный момент времени сферический робот покоится, или сонаправим с начальным вектором скорости V_0 , если в начальный момент времени сферический робот уже находится в движении. Таким образом,

$$\dot{Y}_0 = 0.$$

Замечание 1. Здесь и далее нижним индексом "0" будем обозначать значение функции (или вектора) в момент времени $t = 0$: $f_0 = f(0)$.

Вектор скорости цели $V_\xi = (\dot{\xi}, \dot{\eta}, 0)$, а также первоначальные местоположения цели и робота в неподвижной системе координат $OXYZ$ заданы.

Движение за целью будем осуществлять модифицированным методом погони. Классическое условие прямой погони имеет вид

$$\phi = \psi, \quad (2.5)$$

где ϕ — угол, который образует вектор V с положительным направлением оси OX , ψ — угол, который образует вектор P с положительным направлением оси OX . Это условие гарантирует, что вектор скорости V всегда направлен на цель. Так как условие (2.5) должно иметь место $\forall t \in [0, +\infty)$, то реализовать такое условие можно лишь в двух случаях:

- робот начинает двигаться из состояния покоя, то есть $V_0 = 0$;
- вектор скорости в момент времени $t = 0$ уже направлен на цель, то есть $V_0 \uparrow\uparrow P_0$.

Поэтому введем вместо условия (2.5) модифицированное условие погони, позволяющее выходить на условие метода погони из любого положения с любыми начальными условиями

$$\phi = \psi - \psi_0 e^{-t}, \quad \phi_0 = 0, \quad (2.6)$$

причем, если $\psi_0 = 0$, то $\phi = \psi \quad \forall t \in [0, +\infty)$. Условие (2.6) определяет направление движения сферического робота.

Потребуем, чтобы в рамках выполнения программы движения, робот во избежание столкновения держался от цели на приемлемом расстоянии. Для этого зададим две сервосвязи в виде

$$\dot{X} = \alpha(\rho - \tilde{\rho}) \cos \phi, \quad \dot{Y} = \alpha(\rho - \tilde{\rho}) \sin \phi, \quad (2.7)$$

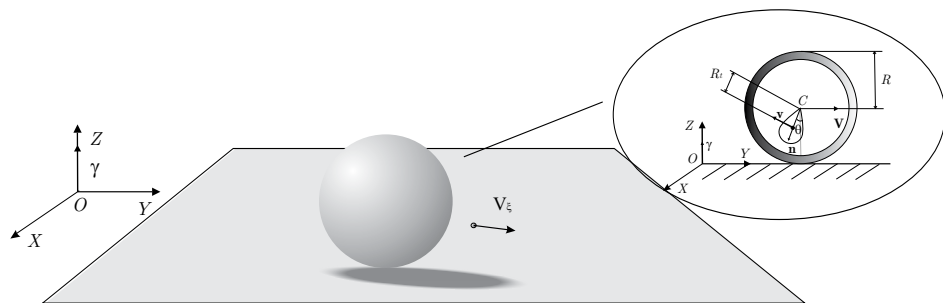


Рис. 1. Конструкция системы.

где $\tilde{\rho}$ — некоторое критическое расстояние, достигнув которого робот должен поменять направление движения на противоположное, α — заданный числовой коэффициент пропорциональности “расстояние-скорость”, угол ϕ задается формулой (2.6).

Если движение робота начинается из состояния покоя, примем

$$\tilde{\rho} = \rho_0 > R, \quad \alpha > \frac{v_{\max}}{\rho_0 - R},$$

где $v_{\max}$ — максимально возможное абсолютное значение скорости цели [12], иначе

$$R < \tilde{\rho} < \rho_0,$$

а значение α определяется из начальных условий, так как сервосвязи (2.7) имеют место $\forall t \in [0, +\infty)$:

$$\alpha = \frac{\dot{X}_0}{\rho_0 - \tilde{\rho}}.$$

Так как координаты робота и цели связаны равенствами

$$X = \xi - \rho \cos \psi, \quad Y = \eta - \rho \sin \psi, \quad (2.8)$$

то функции ψ и ρ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \dot{\xi} \cos \psi + \dot{\eta} \sin \psi - \alpha(\rho - \tilde{\rho}) \cos(\psi - \phi) \\ \dot{\psi} &= \frac{\dot{\eta} \cos \psi - \dot{\xi} \sin \psi + \alpha(\rho - \tilde{\rho}) \sin(\psi - \phi)}{\rho} \end{aligned} \quad (2.9)$$

с заданными начальными условиями ρ_0, ψ_0 .

Замечание 2. Так как система (2.9) может быть решена независимо от уравнений движения, то движение сферического робота за некоторой целью при заданном управлении (2.7) может быть сведено к движению сферического робота по заданной траектории.

Аналогично доказанному в [12], справедливо следующее предложение.

Предложение 1. Функция расстояния $\rho(t)$, являющаяся решением системы (2.9), ограничена, если ограничена скорость преследуемого объекта, причем при

$$\alpha > \frac{v_{\max}}{\tilde{\rho} - R}$$

расстояние $\rho(t) > R \quad \forall t \in [0, +\infty)$.

3. Управление посредством вынужденного движения платформы. Считаем, что платформа управляема, маятник совершает свободные колебания. Тогда

$$Q \equiv 0.$$

Система (2.4) в этом случае обладает первыми интегралами

$$(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1, (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = \text{const}$$

и принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + a\boldsymbol{\gamma} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{n}) + a\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{n}}) &= -MR\boldsymbol{\gamma} \times \ddot{\mathbf{b}} \\ i_0\dot{\boldsymbol{\omega}} + a\mathbf{n} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \lambda) &= -j_0(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})\dot{\mathbf{n}} - m_t R_t \mathbf{n} \times (g\boldsymbol{\gamma} \times \ddot{\mathbf{b}}) \\ \dot{\mathbf{n}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Динамика свободных колебаний маятника при движении сферического робота на управляемой платформе описывается системой

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}} &= -\frac{m_t R_t}{i_0} \mathbf{n} \times (\dot{\mathbf{V}} + g\boldsymbol{\gamma}) - \frac{j_0}{i_0} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\mathbf{n}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где компоненты вектора $\dot{\mathbf{V}} = (\ddot{X}, \ddot{Y}, 0)$ задаются следующим образом

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= \alpha \left[\dot{\xi} \cos(\psi - \phi) + \dot{\eta} \sin(\psi - \phi) - \alpha(\rho - \tilde{\rho}) \cos(\psi - 2\phi) \right] + \\ &\quad + \alpha \sin \phi \left[\tilde{\rho} \dot{\psi} - \psi_0 (\rho - \tilde{\rho}) e^{-t} \right] \\ \ddot{Y} &= \alpha \left[-\dot{\xi} \sin(\psi - \phi) + \dot{\eta} \cos(\psi - \phi) + \alpha(\rho - \tilde{\rho}) \sin(\psi - 2\phi) \right] - \\ &\quad - \alpha \cos \phi \left[\tilde{\rho} \dot{\psi} - \psi_0 (\rho - \tilde{\rho}) e^{-t} \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Вектор скорости платформы равен

$$\dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{b}}_0 + \frac{J}{I} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_0) + \frac{aR}{I} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma} \times (\dot{\mathbf{n}}_0 \times \boldsymbol{\gamma})), \quad (3.3)$$

откуда закон движения точки B платформы Π задается в виде

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{J}{I} X + \frac{aR}{I} n_1 + \left(\dot{b}_{1,0} - \frac{J}{I} \dot{X}_0 - \frac{aR}{I} \dot{n}_{1,0} \right) t - \frac{aR}{I} n_{1,0} \\ b_2 &= \frac{J}{I} Y + \frac{aR}{I} n_2 + \left(\dot{b}_{2,0} - \frac{aR}{I} \dot{n}_{2,0} \right) t - \frac{aR}{I} n_{2,0}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Движение механической системы однозначно задается уравнениями (2.9), (3.1) и (3.3).

Очевидно, что если платформа и сферический робот приходят в движение из состояния покоя, а проекция траектории цели на плоскость OXY ограничена (расположена на участке плоскости OXY конечной площади), то

траектории точек платформы также будут ограничены. В противном случае, почти всегда наблюдается вековой уход траекторий точек платформы.

3.1. Редукция и параметризация системы. Исследуем динамику системы (3.1) более подробно на нулевом уровне первого интеграла $(\omega, \mathbf{n}) = 0$. Аналогичные рассуждение имеют место и для произвольного уровня этого интеграла.

Параметризуем вектор $\mathbf{n}$ углами θ, φ :

$$\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, -\cos \theta)^T,$$

где угол θ задает угол отклонения маятника от вектора $-\gamma$, угол φ задает угол между осью OX и проекцией вектора $\mathbf{n}$ на плоскость OXY .

На указанных уровнях первых интегралов компоненты вектора угловой скорости маятника параметризуем переменными $\omega_\theta, \omega_\varphi$:

$$\omega = (\omega_\theta \sin \varphi + \omega_\varphi \sin \theta \cos \theta \cos \varphi, -\omega_\theta \cos \varphi + \omega_\varphi \sin \theta \cos \theta \sin \varphi, \omega_\varphi \sin^2 \theta)^T$$

где $\dot{\theta} = \omega_\theta$, $\dot{\varphi} = \omega_\varphi$.

Запишем редуцированную систему (3.1) в новых переменных:

$$\dot{\theta} = \omega_\theta$$

$$\dot{\varphi} = \omega_\varphi$$

$$\dot{\omega}_\theta = -\frac{a}{Ri_0} \cos \theta (\ddot{X} \cos \varphi + \ddot{Y} \sin \varphi) - \frac{ag}{Ri_0} \sin \theta + \omega_\varphi^2 \sin \theta \cos \theta \quad (3.5)$$

$$\dot{\omega}_\varphi = \frac{a}{Ri_0 \sin \theta} (\ddot{X} \sin \varphi - \ddot{Y} \cos \varphi) - \frac{2\omega_\theta \omega_\varphi \cos \theta}{\sin \theta}.$$

Замечание 3. Отметим, что система (3.5) имеет особенность в точках $\theta = \pi k, k \in Z$, что является исключительно следствием выбора переменных. Особенность пропадает при движении робота по прямой. Также при свободных колебания маятника проблему можно решить соответствующим выбором начального условия $\theta_0 \neq \pi k, k \in Z$, так как $\theta = \pi k, k \in Z$ характеризует неустойчивое положение маятника. Однако, при управлении сферическим роботом посредством маятникового привода выбор соответствующего начального значения θ_0 не решит проблему. Поэтому при движении робота по криволинейной траектории имеет смысл интегрировать в исходных переменных.

3.2. Движение сферического робота по прямой. Цель и робот движутся по прямой, тогда

$$\psi = \phi = \varphi = 0.$$

Пусть в начальный момент времени платформа покоится, то есть $\dot{\mathbf{b}}_0 \equiv \mathbf{0}$. Система (3.5) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega_\theta \\ \dot{\omega}_\theta &= -\frac{a\alpha}{Ri_0} \dot{\rho} \cos \theta - \frac{ag}{Ri_0} \sin \theta \end{aligned} \quad (3.6)$$

и задает двумерный поток в фазовом пространстве

$$M^2 = \{(\theta, \omega_\theta) \mid \theta \in (-\pi, \pi], \omega_\theta \in \mathbb{R}\}.$$

Функция расстояния ρ находится из предварительного интегрирования уравнения

$$\dot{\rho} = \xi - \alpha(\rho - \tilde{\rho}). \quad (3.7)$$

Построим ряд численных экспериментов.

3.3. Численный эксперимент 1. Цель движется со скоростью $\xi = 0.6$ м/с и в начальный момент времени находится на расстоянии $\rho_0 = 2$ м. Расстояние находится аналитически из (3.7)

$$\rho(t) = \tilde{\rho} + \alpha^{-1}\xi + e^{-\alpha t}(\rho_0 - \tilde{\rho} - \alpha^{-1}\xi). \quad (3.8)$$

Параметры математической модели приведены в табл. 1.

На рис. 2,а построена типовая фазовая кривая и графики функций $b_1(t)$, $\rho(t)$ при движении сферического робота с ненулевыми начальными условиями $\dot{X}_0 = 0.5$ м/с, $\omega_{\theta,0} = 1$ рад/с, $\theta_0 = 0$ рад и $\tilde{\rho} = 1.5$ м.

На рис. 2,б построена типовая фазовая кривая и графики функций $b_1(t)$, $\rho(t)$ при движении сферического робота из состояния покоя, то есть $\dot{X}_0 = 0$ м/с, $\omega_{\theta,0} = 0$ рад/с, $\theta_0 = 0$ рад. Примем $\tilde{\rho} = \rho_0 = 2$ м, $\alpha = 1$ с⁻¹.

Согласно численным экспериментам при движении цели с постоянной скоростью, система (3.6) при $t \rightarrow +\infty$ приобретает периодическую динамику. Имеет место вековой уход траекторий точек платформы вдоль оси OX .

3.4. Численный эксперимент 2. Цель движется с периодической скоростью $\xi = \sin 0.5t$ и в начальный момент времени находится на расстоянии $\rho_0 = 2$ м. Расстояние находится из (3.7) аналитически

$$\rho(t) = \tilde{\rho} + \frac{4\alpha \sin 0.5t - 2 \cos 0.5t}{4\alpha^2 + 1} + e^{-\alpha t} \left(\rho_0 - \tilde{\rho} + \frac{2}{4\alpha^2 + 1} \right). \quad (3.9)$$

На рис. 3,а построены типовая фазовые кривая и графики функций $b_1(t)$, $\rho(t)$ при движении сферического робота с ненулевыми начальными условиями $\dot{X}_0 = 0.5$ м/с, $\omega_{\theta,0} = 1$ рад/с, $\theta_0 = 0$ рад, а также $\tilde{\rho} = 1.5$ м.

Таблица 1. Параметры математической модели

R	0.2 м	m	2 кг	I	0.032 кг м ²
R_t	0.15 м	m_t	2 кг	i_0	0.09 кг м ²
J	0.192 кг м ²	a	0.06 кг м ²	j_0	0 кг м ²

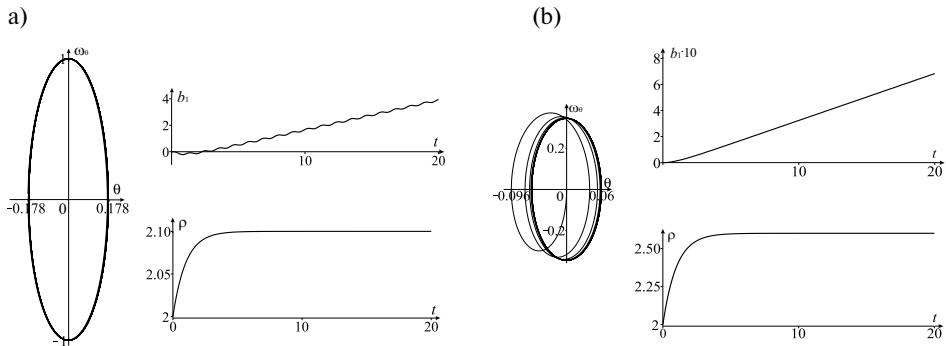


Рис. 2. Типовая фазовая кривая на плоскости (θ, ω_θ) , графики функций $b_1(t)$ и $\rho(t)$ при управлении преследованием цели, двигающейся по прямой с постоянной скоростью. (а) Движение сферического робота с ненулевой начальной скоростью. (б) Движение сферического робота из состояния покоя.

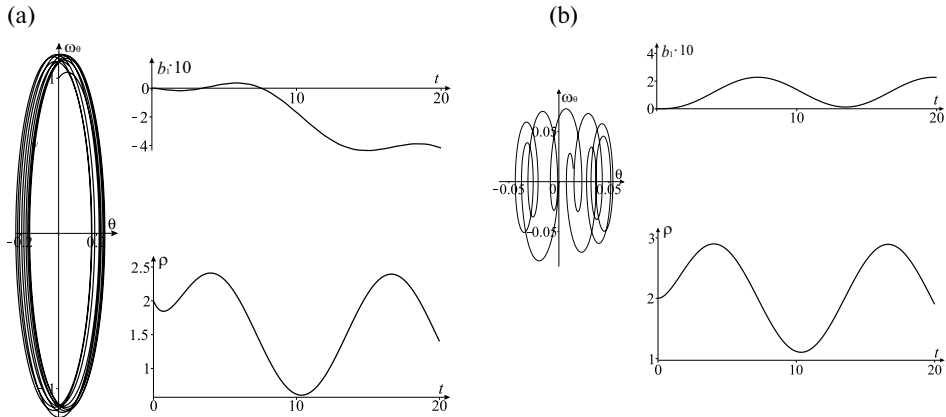


Рис. 3. Типовая фазовая кривая на плоскости (θ, ω_θ) , графики функций $b_1(t)$ и $\rho(t)$ при управлении преследованием цели, двигающейся по прямой с периодической скоростью. (а) Движение сферического робота с ненулевой начальной скоростью. (б) Движение сферического робота из состояния покоя.

На рис. 3,б построены типовая фазовая кривая и графики функций $b_1(t)$, $\rho(t)$ при движении сферического робота из состояния покоя, считая $\tilde{\rho} = \rho_0 = 2$ м, $\alpha = 1$ с⁻¹. Параметры математической модели приведены в табл. 1.

Согласно численным экспериментам при движении цели с периодической скоростью, система (3.6) характеризуется квазипериодической динамикой. Если начальная скорость робота отлична от нуля, то и как в предыдущем случае для траекторий точек платформы имеет место вековой уход. Если робот начинает двигаться из состояния покоя, то платформа совершает квазипериодические колебания вдоль оси OX , функция $b_1(t)$ ограничена $\forall t \in [0, +\infty)$, что очевидно из (3.4).

4. Управление крутящим моментом маятника. Для реализации программы движения сферического робота привод создает управляющий крутящий момент $\mathbf{Q}$, приложенный в точке C крепления маятника. В этом случае система (2.4) с учетом кинематических связей и сервосвязей преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{i}}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \frac{1}{R}[(\mathbf{J}\dot{\mathbf{V}} - \mathbf{I}\ddot{\mathbf{b}}) \times \boldsymbol{\gamma} - a\mathbf{n} \times (\dot{\mathbf{V}} + g\boldsymbol{\gamma}) - j_0 R(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})\dot{\mathbf{n}} - aR\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{n}})] = \mathbf{P} \\ \dot{\mathbf{n}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n},\end{aligned}\quad (4.1)$$

где $\hat{\mathbf{i}} = (i_0 + a(\mathbf{n}, \boldsymbol{\gamma}))\mathbf{E} + j_0 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - a\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\gamma}$, а компоненты вектора $\dot{\mathbf{V}}$ задаются выражениями (3.2). Движение механической системы однозначно задается уравнениями (2.9) и (4.1).

Система (4.1) разрешима при условии

$$i_0 > a,$$

выполнение которого можно гарантировать соответствующим выбором масс и геометрических характеристик [8].

Вектор управляющего крутящего момента соответственно равен

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{R} \left[(\mathbf{J}\dot{\mathbf{V}} - \mathbf{I}\ddot{\mathbf{b}}) \times \boldsymbol{\gamma} - \frac{aR}{i_0 + a(\mathbf{n}, \boldsymbol{\gamma})} \boldsymbol{\gamma} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{n}) - aR\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{n}}) \right].$$

4.1. Движение по прямой. Исследуем динамику системы при движении цели и робота по прямой:

$$\psi = \varphi = \phi = 0.$$

Пусть платформа совершает периодические колебания вдоль оси OX с заданным вектором скорости.

Параметризуя систему (4.1) аналогично предыдущему пункту переменными θ, ω_θ , получим систему

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega_\theta \\ \dot{\omega}_\theta &= \frac{1}{R(i_0 - a \cos \theta)} \left((J - a \cos \theta) \alpha \dot{\rho} - a \sin \theta (g + R\omega_\theta^2) - I\ddot{b}_1 \right),\end{aligned}\quad (4.2)$$

задающую двумерный поток в фазовом пространстве

$$M^2 = \{(\theta, \omega_\theta) \mid \theta \in (-\pi, \pi], \omega_\theta \in \mathbb{R}\}$$

Функция расстояния ρ находится из предварительного интегрирования уравнения (3.7). Квадрат управляющего крутящего момента равен

$$Q^2 = \frac{((Ji_0 - a^2 \cos^2 \theta) \alpha \dot{\rho} - a \sin \theta (ag \cos \theta + i_0 R \omega_\theta^2) - Ii_0 \ddot{b}_1)^2}{R^2 (i_0 - a \cos \theta)^2}$$

4.2. Численный эксперимент 3. При движении цели с постоянной и периодической скоростью система характеризуется квазипериодической динамикой.

Проиллюстрируем ее на примере движения цели со постоянной $\dot{\xi} = 0.6$ м/с. Считаем, что $\rho_0 = 2$ м. Вектор скорости платформы $\mathbf{b} = (\sin 0.4t, 0, 0)$.

На рис. 4 представлены примеры типовых фазовых кривых системы (4.2), графики квадрата управляющего крутящего момента и функции расстояния при движении робота с ненулевыми начальными условиями $\dot{X}_0 = 0.5$ м/с, $\omega_{0,0} = 1$ рад/с, $\theta_0 = 0.5$ рад и $\tilde{\rho} = 1.5$ м (рис. 4,а) и при движении из состояния покоя, $\alpha = 1$ с⁻¹ (рис. 4,б). Параметры математической модели приведены в табл. 1.

5. Численные эксперименты при движении сферического робота по криволинейной траектории. Ниже приведены результаты численных экспериментов в задаче управления сферическим роботом, который преследует цель, двигающуюся с заданным вектором скорости (движение по окружности)

$$\dot{\mathbf{V}} = (-0.4 \cos 0.1t, -0.4 \sin 0.1t, 0).$$

Параметры математической модели даны в табл. 1. Численные решения находились интегрированием в исходных переменных. Рис. 5,а–с соответствуют движению сферического робота из состояния покоя при $\alpha = 0.6$ с⁻¹. Начальным местоположением сфероробота и цели на плоскости OXY соответствуют точки (0, 0) и (2, 0) соответственно, $\tilde{\rho} = \rho_0 = 2$ м. Начальные условия:

$$\mathbf{V}_0 = (0, 0, 0), \quad \boldsymbol{\omega}_0 = (0, 0, 0), \quad \mathbf{n}_0 = (0, 0, -1).$$

На рис. 5,а представлены траектории цели (точечная) и робота (сплошная) на плоскости $OXYZ$, графики квадратов угловых скоростей маятника $\boldsymbol{\omega}^2$ и

(а)

(б)

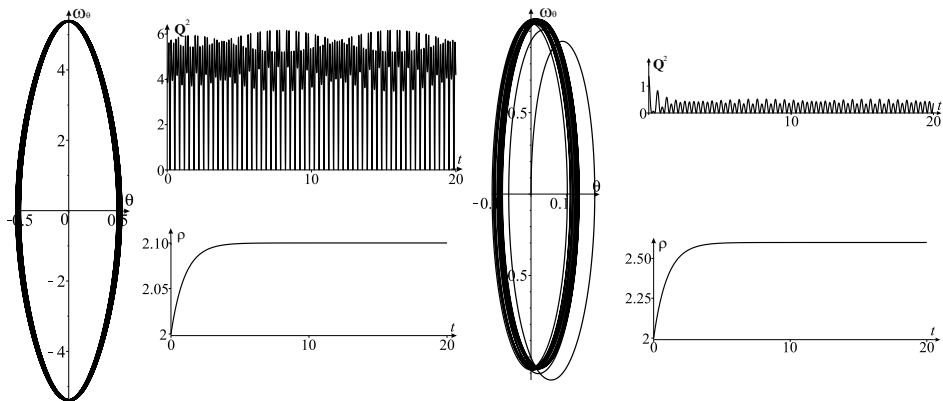


Рис. 4. Типовая фазовая кривая на плоскости (θ, ω_θ) , графики функций $Q^2(t)$ и $\rho(t)$ при управлении преследованием цели, двигающейся по прямой с постоянной скоростью. (а) Движение сферического робота с ненулевой начальной скоростью. (б) Движение сферического робота из состояния покоя.

сфероробота Ω^2 при управлении крутящим моментом маятника. Платформа неподвижна, $\dot{\mathbf{b}} \equiv \mathbf{0}$.

На рис. 5, b представлены траектории сфероробота непосредственно на самой подвижной платформе, графики ω^2 и Ω^2 при управлении крутящим моментом маятника. Платформа колеблется с заданным вектором скорости $\dot{\mathbf{b}} = (\sin 0.4t, 0, 0)$.

На рис. 5, c представлены траектории сфероробота непосредственно на самой платформе, графики ω^2 и Ω^2 при управлении движением платформы.

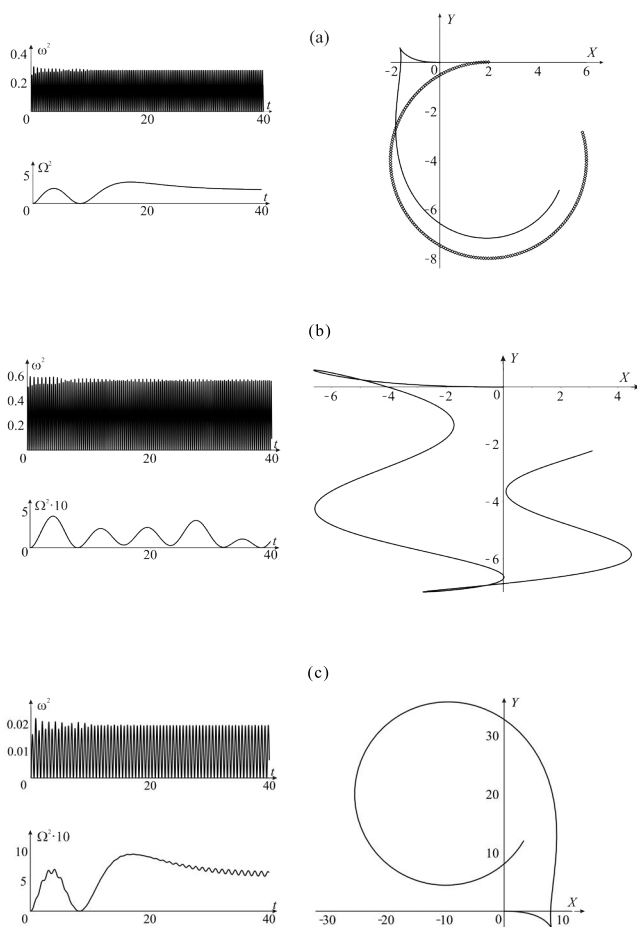


Рис. 5. Движение сферического робота из состояния покоя за целью: (а) по неподвижной платформе при управлении крутящим моментом маятника; (б) по колеблющейся платформе при управлении крутящим моментом маятника; (с) при управлении движением платформы.

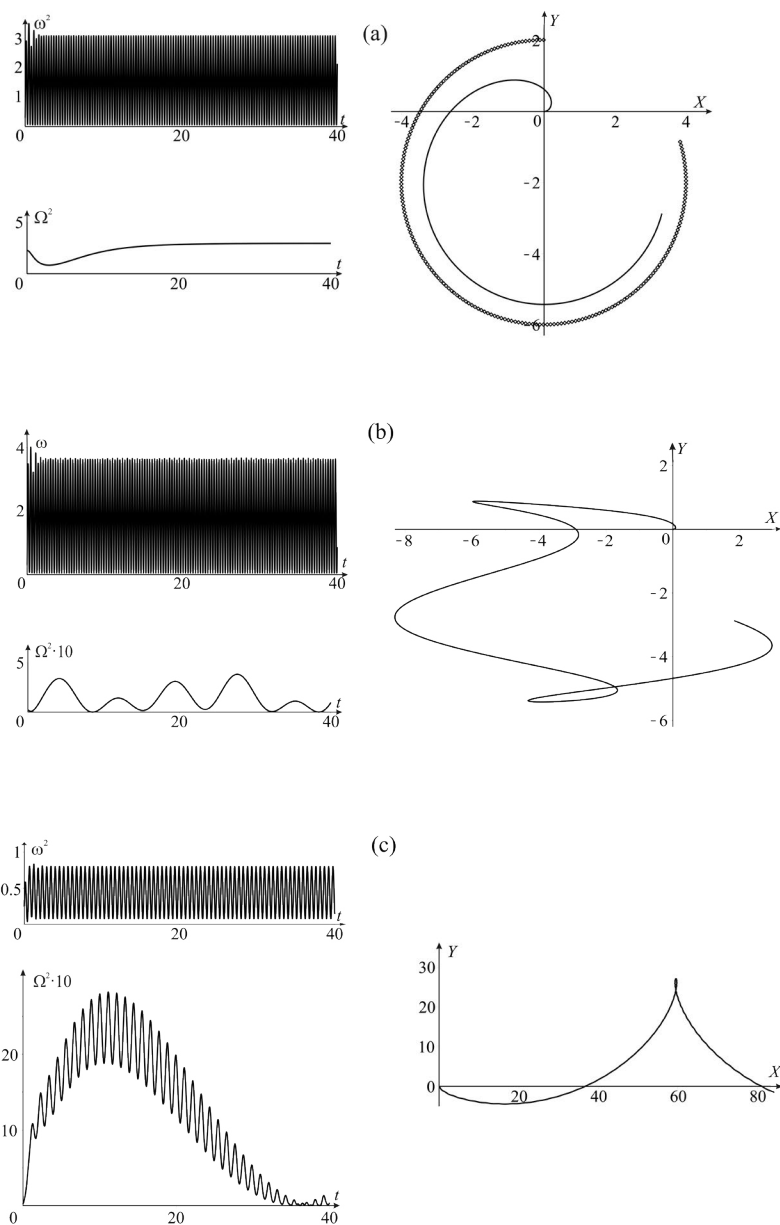


Рис. 6. Движение сферического робота с ненулевыми начальными условиями за целью: (а) по неподвижной платформе при управлении крутящим моментом маятника; (б) по колеблющейся платформе при управлении крутящим моментом маятника; (с) при управлении движением платформы.

Аналогично, рис. 6,а–с соответствуют движению сфероробота с ненулевыми начальными условиями:

$$\mathbf{V}_0 = (0.3, 0, 0), \quad \boldsymbol{\omega}_0 = (0, 0.5, 0), \quad \mathbf{n}_0 = (\sin 0.1, 0, -\cos 0.1).$$

Начальным местоположениям сфероробота и цели на плоскости OXY соответствуют точки $(0, 0)$ и $(0, 2)$ соответственно, $\rho_0 = 2$ м, $\tilde{\rho} = 1.5$ м, $\alpha = 0.6$ с⁻¹.

Заключение. В работе исследованы два способа управления сферическим роботом маятникового типа на подвижной платформе. Управление осуществляется посредством сервосвязей, задающих программу преследования некоторой подвижной точечной цели. Заданные сервосвязи позволяют роботу начинать преследование из любого положения и с любой начальной скоростью.

Реализация сервосвязей осуществляется либо за счет соответствующего движения платформы (колебания маятника свободные), либо за счет управления крутящим моментом маятника, генерируемого маятниковым приводом. Аналитически найдены траектории движения точек платформы, которые могут иметь вековой уход или быть ограниченными. Последнее, например, имеет место, если траектория цели также ограничена, а платформа и сферический робот начинают свое движение из состояния покоя. При ненулевых начальных условиях для точек платформы, как правило, имеет место вековой уход траектории.

Численные эксперименты показали, что в случае управления соответствующим движением платформы при свободных колебаниях маятника квадрат угловой скорости маятника принимает меньшие в несколько раз значения по сравнению с управлением за счет маятникового привода, а вот квадрат угловой скорости сферического робота может достигать довольно высоких значений, особенно при ненулевой начальной скорости робота.

Интересным представляется исследование комбинации управлений и нахождение оптимальных режимов при комбинированном управлении.

Конфликт интересов. Автор заявляет, что не имеет конфликта интересов.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского Научного Фонда № 23-21-10019 и Чувашской республики, <https://rscf.ru/project/23-21-10019/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чаплыгин С.А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб. 1903. Т. 24. С. 139–168.
2. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. The problem of drift and recurrence for the rolling Chaplygin ball // Regul. Chaotic Dyn. 2013. V. 18. № 6. P. 832–859.
3. Borisov A.V., Mikishanina E.A. Dynamics of the Chaplygin ball with variable parameters // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2020. V. 16. № 3. P. 453–465. <https://doi.org/10.20537/nd200304>
4. Kilin A.A. The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis // Regul. Chaotic Dyn. 2002. V. 6. № 3. P. 291–306. <https://doi.org/10.1070/RD2001v006n03ABEH000178>

5. *Schneider D.A.* Nonholonomic Euler–Poincaré equations and stability in Chaplygin’s sphere // *Dyn. Syst.* 2002. V. 17. № 2. P. 87–130.
6. *Bolotin S.* The problem of optimal control of a Chaplygin ball by internal rotors // *Regul. Chaotic Dyn.* 2012. V. 17. № 6. P. 559–570. <https://doi.org/10.1134/S156035471206007X>
7. *Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S.* How to control Chaplygin’s sphere using rotors // *Regul. Chaotic Dyn.* 2012. V. 17. № 3. P. 258–272. <https://doi.org/10.1134/S1560354712030045>
8. *Ivanova T.B., Pivovarova E.N.* Dynamics and control of a spherical robot with an axisymmetric pendulum actuator // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2013. V. 9. № 3. P. 507–520. <https://doi.org/10.20537/nd1303008>
9. *Gajbhiye S., Banavar R.N.* Geometric modeling and local controllability of a spherical mobile robot actuated by an internal pendulum // *Int. J. Robust Nonlinear Control.* 2015. V. 26. P. 2436–2454. <https://doi.org/10.1002/rnc.3457>
10. *Ivanova T.B., Kilin A.A., Pivovarova E.N.* Controlled motion of a spherical robot with feedback. I // *J. Dyn. Control Syst.* 2018. V. 24. № 3. P. 497–510. <https://doi.org/10.1007/s10883-017-9387-2>
11. *Joshi V.A., Banavar R.N., Hippalgaonkar R.* Design and analysis of a spherical mobile robot // *Mech. Mach. Theory.* 2010. V. 45. № 2. P. 130–136. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2009.04.003>
12. *Mikishanina E.A.* Motion control of a spherical robot with a pendulum actuator for pursuing a target // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2022. V. 18. № 5. P. 899–913. <https://doi.org/10.20537/nd221223>
13. *Ylikorpi T., Suomela J.* Ball-shaped robots // *Climbing and walking robots: towards new applications.* Vienna: InTech. 2007. P. 235–256. <https://doi.org/10.5772/5083>
14. *Азизов А.Г.* Движение управляемых механических систем с сервосвязями // *ПММ.* 1990. Т. 54. № 3. С. 366–372.
15. *Кургетов В.И.* О движении управляемых механических систем с условными связями (сервосвязями) // *ПММ.* 1967. Т. 31. № 3. С. 433–446.
16. *Altmann R., Heiland J.* Simulation of multibody systems with servo constraints through optimal control // *Multibody Syst. Dyn.* 2017. V. 40. P. 75–98. <https://doi.org/10.1007/s11044-016-9558-z>
17. *Bajodah A.H., Hodges D.H., Chen Y.H.* Inverse dynamics of servo-constraints based on the generalized inverse // *Nonlinear Dyn.* 2005. V. 39. № 1. P. 179–196. <https://doi.org/10.1007/s11071-005-1925-x>
18. *Bèghin M.H.* Étude théorique des compas gyrostatiques Anschütz et Sperry. Paris: Impr. nationale, 1931.
19. *Татаринов Я.В.* Уравнения классической механики в лаконичных формах. М.: Изд-во ЦПИ при Механико-математическом факультете МГУ. 2005. 88 с.
20. *Kozlov V.V.* The dynamics of systems with servoconstraints. I // *Regul. Chaotic Dyn.* 2015. V. 20. № 3. P. 205–224. <https://doi.org/10.1134/S1560354715030016>
21. *Аппель П.* Динамика системы. Аналитическая механика. Т. 2. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит, 1960. 488 с.
22. *Микишанина Е.А.* Динамика качения сферического робота с маятниковым приводом, управляемого сервосвязью Билимовича // *Теоретическая и математическая физика.* 2022. Т. 211. № 2. С. 281–294. <https://doi.org/10.4213/tmf10227>
23. *Borisov A.V., Mamaev I.S.* Two nonholonomic integrable problems traicing back to Chaplygin // *Regul. Chaotic Dyn.* 2012. V. 17. № 2. P. 191–198. <https://doi.org/10.1134/S1560354712020074>

TWO WAYS TO CONTROL A PENDULUM-TYPE SPHERICAL ROBOT ON A MOVING PLATFORM IN A PURSUIT PROBLEM

E. A. Mikishanina^{a,*}

^a*I.N. Ulianov Chuvash State University, Cheboksary, 428015 Russia*

**e-mail: evaeva_84@mail.ru*

Received 17.05.2023

Revised 14.07.2023

Accepted 16.07.2023

Abstract – We consider the problem of controlling a spherical robot with a pendulum actuator rolling on a platform that is capable of moving translationally in the horizontal plane of absolute space. The spherical robot is subject to holonomic and nonholonomic constraints. Some point target moves at the level of the geometric center of the spherical robot and does not touch the moving platform itself. The motion program that allows the spherical robot to pursue a target is specified through two servo-constraints. The robot can follow a target from any position and with any initial conditions. Two ways to control this system in absolute space are proposed: by controlling the forced motion of the platform (the pendulum oscillates freely) and by controlling the torque of the pendulum (the platform is stationary or oscillates inconsistently with the spherical robot). The equations of motion of the system are constructed. In the case of free oscillations of the pendulum, the system of equations of motion has first integrals and, if necessary, can be reduced to a fixed level of these integrals. When a spherical robot moves in a straight line, for a system reduced to the level of integrals, phase curves, graphs of the distance from the geometric center of the spherical robot to the target, the trajectory of the selected platform point when controlling the platform, and the square of the control torque when controlling the pendulum drive are constructed. When the robot moves along a curved path, integration is carried out in the original variables. Graphs of the squares of the angular velocity of the pendulum and the spherical robot itself are constructed, as well as the trajectory of the robot's motion in absolute space and on a moving platform. Numerical experiments were performed in the Maple software package.

Keywords: control, nonholonomic system, spherical robot, pendulum actuator, moving platform, servo-constraints, pursuit

REFERENCES

1. S. A. Chaplygin, "On a ball's rolling on a horizontal plane," *Mat. Sborn.* **24** 139–168 (1903); *Reg. Chaotic Dyn.* **7** (2), 131–148 (2002).
<https://doi.org/10.1070/RD2002v007n02ABEH000200>
2. A. V. Borisov, A. A. Kilin, and I. S. Mamaev, "The problem of drift and recurrence for the rolling Chaplygin ball," *Regul. Chaotic Dyn.* **18** (6), 832–859 (2013).
<https://doi.org/10.1134/S1560354713060166>
3. A. V. Borisov and E. A. Mikishanina, "Dynamics of the Chaplygin ball with variable parameters," *Rus. J. Nonlin. Dyn.* **16** (3), 453–465 (2020). <https://doi.org/10.20537/nd200304>
4. A. A. Kilin, "The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis," *Regul. Chaotic Dyn.* **6** (3), 291–306 (2002).
<https://doi.org/10.1070/RD2001v006n03ABEH000178>

5. D. A. Schneider, "Nonholonomic Euler–Poincaré equations and stability in Chaplygin's sphere," *Dyn. Syst.* **17** (2), 87–130 (2002). <https://doi.org/10.1080/0268110110112852>
6. S. Bolotin, "The problem of optimal control of a Chaplygin ball by internal rotors," *Regul. Chaotic Dyn.* **17** (6), 559–570 (2012). <https://doi.org/10.1134/S156035471206007X>
7. A. V. Borisov, A. A. Kilin, and I. S. Mamaev, "How to control Chaplygin's sphere using rotors," *Regul. Chaotic Dyn.* **17** (3), 258–272 (2012). <https://doi.org/10.1134/S1560354712030045>
8. T. B. Ivanova and E. N. Pivovarov, "Dynamics and control of a spherical robot with an axisymmetric pendulum actuator," *Rus. J. Nonlin. Dyn.* **9** (3), 507–520 (2013). <https://doi.org/10.20537/nd1303008>
9. S. Gajbhiye and R. N. Banavar, "Geometric modeling and local controllability of a spherical mobile robot actuated by an internal pendulum," *Int. J. Robust Nonlin. Control* **26**, 2436–2454 (2015). <https://doi.org/10.1002/rnc.3457>
10. T. B. Ivanova, A. A. Kilin, and E. N. Pivovarov, "Controlled motion of a spherical robot with feedback. I," *J. Dyn. Control Syst.* **24** (3), 497–510 (2018). <https://doi.org/10.1007/s10883-017-9387-2>
11. V. A. Joshi, R. N. Banavar, and R. Hippalgaonkar, "Design and analysis of a spherical mobile robot," *Mech. Mach. Theory.* **45** (2), 130–136 (2010). <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2009.04.003>
12. E. A. Mikishanina, "Motion control of a spherical robot with a pendulum actuator for pursuing a target," *Rus. J. Nonlin. Dyn.* **18** (5), 899–913 (2022). <https://doi.org/10.20537/nd221223>
13. T. Ylikorpi and J. Suomela, "Ball-shaped robots," in *Climbing and Walking Robots: Towards New Applications*, Ed. by H. Zhang (InTechOpen, Vienna, 2007), pp. 235–256. <https://doi.org/10.5772/5083>
14. A. G. Azizov, "Motion of controllable mechanical systems with servo-constraints," *J. Appl. Math. Mech.* **54** (3), 302–308 (1990). [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(90\)90129-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(90)90129-X)
15. V. I. Kirgetov, "The motion of controlled mechanical systems with prescribed constraints (servoconstraints)," *J. Appl. Math. Mech.* **31** (3), 465–477 (1967). [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(67\)90029-9](https://doi.org/10.1016/0021-8928(67)90029-9)
16. R. Altmann and Heiland J. Simulation of multibody systems with servo constraints through optimal control," *Multibody Syst. Dyn.* **40**, 75–98 (2017). <https://doi.org/10.1007/s11044-016-9558-z>
17. A. H. Bajodah, D. H. Hodges, and Y. H. Chen, "Inverse dynamics of servo-constraints based on the generalized inverse," *Nonlin. Dyn.* **39** (1), 179–196 (2005). <https://doi.org/10.1007/s11071-005-1925-x>
18. M. H. Bèghin, *Étude Théorique des Compas Gyrostatiques Anschütz et Sperry* (Impr. Nationale, Paris, 1931).
19. Ya. V. Tatarinov, *Equations of Classical Mechanics in Concise Forms* (MGU, Moscow, 2005) [in Russian].
20. V. V. Kozlov, "The dynamics of systems with servoconstraints. I," *Regul. Chaotic Dyn.* **20** (3), 205–224 (2015). <https://doi.org/10.1134/S1560354715030016>
21. P. Appell, *Traité de Mécanique Rationnelle*, Vol. 2: *Dynamique des Systèmes. Mécanique Analytique* (Gauthier-Villars, Paris, 1932; Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., Moscow, 1960).
22. E. A. Mikishanina, "Rolling motion dynamics of a spherical robot with a pendulum actuator controlled by the Bilimovich servo-constraint," *Theor. Math. Phys.* **211**, 679–691 (2022). <https://doi.org/10.1134/S0040577922050087>
23. A. V. Borisov and I. S. Mamaev, "Two nonholonomic integrable problems traicing back to Chaplygin," *Regul. Chaotic Dyn.* **17** (2), 191–198 (2012). <https://doi.org/10.1134/S1560354712020074>

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ПОР И НАЧАЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НА ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ СВОЙСТВА ПОРИСТОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИКИ PZT-4

© 2024 г. А. А. Паньков^{а,*}

^аПермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Россия

* e-mail: a_a_pankov@mail.ru

Поступила в редакцию 13.06.2023 г.

После доработки 12.07.2023 г.

Принята к публикации 04.08.2023 г.

Получено численно-аналитическое решение “задачи эффективного модуля” трансверсально-изотропной пористой керамики с учетом ее начального напряженного состояния и эллипсоидальной формы ориентированных пор различной связанности на основе решения связанной стохастической краевой задачи электроупругости механики композитов по методу функций Грина. Осуществлен численный расчет начальных и результирующих значений эффективного пьезоэлектрического модуля пористой пьезокерамики (PZT-4) в зависимости от значений объемной доли, параметра формы и связанности эллипсоидальных, в частности: сферических, дисковых или туннельных пор с учетом начального напряженного состояния пористой пьезокерамики, обусловленного ее начальной осесимметричной деформацией. Выявлены характерные значения объемной доли сферических и дисковых пор с учетом их связанностей, при которых происходит смена знака численных значений начального эффективного пьезоэлектрического модуля по отношению к соответствующему модулю монолитной керамики PZT-4. Определены значения объемной доли, параметра формы и тип связанности пор, при которых реализуются максимальные градиенты линейной зависимости значений результирующего пьезомодуля пористой пьезокерамики от ее начальных макродеформаций. Дан анализ графиков непрерывных зависимостей начального и результирующего значений эффективного пьезоэлектрического модуля от параметра формы пор для различных случаев их объемного содержания, связанности и осесимметричных начальных деформаций пористой пьезокерамики.

Ключевые слова: пористая пьезокерамика, эффективные свойства, эллипсоидальные поры, начальное напряженное состояние, электроупругость, численное моделирование

DOI: 10.31857/S1026351924010149, EDN: VZJQKB

1. Введение. Нелинейные эффекты деформирования композитов обуславливаются, в общем, различными факторами, один из которых наличие в материале начального напряженного состояния [1–3]. Изучение закономерностей и эффектов влияния начального напряженного состояния элементов структуры материала на особенности его последующего нагружения одна из задач механики композитов [1–9]. Решение этой задачи актуально для различных практических приложений, в частности, ультразвукового неразрушающего контроля напряженного состояния нагруженных конструкций [10], методов геомеханики и сейсмических исследований [11]. Линеаризованный подход [3, 6, 7, 12, 13] теории упругости использован ранее для математического моделирования распространения упругих волн в структурно неоднородных упругих средах с начальным напряженным состоянием [14–16]. Этот подход использован также для нахождения асимптотических решений эффективных свойств упругих композитов с идеально периодическими начально-напряженными структурами [17–20], например, когда начальное напряженное состояние слоистой или однонаправлено-волокнистой структур обусловлено их тепловым нагревом [17]. Изучение эффектов влияния начального напряженного состояния на свойства и поведение материала актуально также для пьезоэлектрических и/или пьезомагнитных (магнитострикционных) композитов, которые интегрируются в современные “интеллектуальные” конструкции в качестве информационных элементов, датчиков и/или актюаторов систем управления акустическими и/или аэродинамическими характеристиками поверхностей, геометрической формой, напряженным состоянием, демпфированием вибраций конструкции [21].

Математическое моделирование поведения пьезоактивных композитов на микро-, макроуровнях и прогнозирование их эффективных свойств основывается на постановке и решении связанных краевых задач электромагнитотермоупругости для микрон неоднородной представительной области с использованием методов механики композитов, в частности, асимптотических методов [17–20, 22] и методов на основе двоякопериодических комплексных функций [23, 24] для идеально периодических структур и методов статистической механики композитов для нерегулярных структур [24–26]. Современные методы функций комплексных переменных [24] эффективно используются для решения двумерных задач теплопроводности и теории упругости композитов, в том числе, со “случайной” периодической структурой [24] с ячейкой периодичности в виде статистической реализации некоторой “представительной области” с большим числом случайно расположенных круглых включений; при этом решение “задачи эффективного модуля” осуществляется в реализациях, т.е. посредством вычисления и статистической обработки (усреднения) представительной выборки численных решений краевых задач для различных реализаций случайной структуры ячейки. Методы статистической механики композитов [25–32], в отличие от аналитических и численных методов решения стохастических краевых задач в реализациях, ориентированы на установление непосредственных функциональных зависимостей искомых статистических характеристик, например, математических ожиданий и дисперсий деформационных полей в элементах структуры (для оценки прочности на микро- и макроуровнях) и макроскопических (усредненных) характеристик эффективных физико-механических модулей композитов от заданных статистических характеристик

случайной структуры, например, в виде многоточечных моментных функций структуры [25, 26] или вероятностных законов разупорядочивания (случайного расположения и/или размера) включений в ячейках квазипериодических структур [30] в представительной области композита со свойствами статистической однородности и эргодичности [25]. Многие статистические методы механики композитов [25–32] основаны на использовании функций Грина некоторой однородной “среды сравнения” для сведения поставленной стохастической краевой задачи к соответствующему интегро-дифференциальному уравнению относительно поля пульсаций искомой величины (например, перемещений, температуры, электрического потенциала) в представительной области композита относительно ее макроскопического значения. Далее, решение интегро-дифференциального уравнения осуществляется методом последовательных приближений [25, 26], по которому, например, искомый тензор эффективных упругих свойств композита представляется в виде суммы осредненного по “правилу смеси” значения и поправки бесконечного ряда кратных интегралов от многоточечных статистических моментов (корреляционных функций) рассматриваемой случайной структуры композита. Вычисление этой поправки с учетом реального вида многоточечных статистических моментов структуры представляет собой сложную задачу, известно лишь о расчете поправки – сумме двух членов ряда, учитывающих лишь двухточечные и трехточечные корреляционные функции для двумерной случайной структуры с круговыми включениями. Сходимость этих рядов исследована, как правило, численно или аналитически лишь для частных (предельных) случаев, например, для случая “предельной локальности” [26] многоточечных моментных функций или в сингулярном приближении [27], когда у второй производной функции Грина учитывается лишь сингулярная составляющая (пропорциональная дельта-функции Дирака) и, как следствие, нахождение искомого тензора эффективных упругих свойств композита, в частности, эффективного объемного модуля и модуля сдвига макроизотропного композита (сферопластика) сводится к суммированию соответствующих алгебраических рядов геометрических прогрессий, сходимость которых оценивается аналитически. В сингулярном приближении результаты, полученные для эффективных модулей композита посредством суммирования членов ряда, совпадают с соответствующими решениями, полученными по подходу [27] без разложения в ряд и последующего суммирования, т.е. когда делается непосредственный переход от интегро-дифференциального уравнения к соответствующей системе алгебраических уравнений, в частности, двух алгебраических уравнений для макроизотропного композита. В рамках обобщенного сингулярного приближения получены решения [30, 31] связанных стохастических краевых задач электромагнитотермоупругости для случайных, в том числе, квазипериодических пьезоактивных структур композитов при отсутствии в них начального напряженного состояния. Линеаризованный подход теории упругости для тела с начальным напряженным состоянием обобщен на электромагнитноупругий материал в [32–34], в том числе для решения динамических задач [34].

В представленной работе рассматривается постановка связанной краевой задачи электроупругости с учетом начального комбинированного деформационного и электрического напряженного состояния и ее решение в обобщенном

сингулярном приближении [27] на основе перехода от системы интегро-дифференциальных уравнений электроупругости к соответствующей системе алгебраических уравнений для нахождения эффективных упругих модулей, диэлектрических проницаемостей и пьезоэлектрических констант пористой пьезокерамики с эллипсоидальными порами. Считаем, что осесимметричное начальное напряженное состояние не изменяет класс трансверсальной изотропии пористой керамики.

Цель — новое численно-аналитическое решение задачи “эффективного модуля” для трансверсально-изотропной начально-напряженной пористой поляризованной керамики с эллипсоидальными порами и, на его основе, изучение закономерностей влияния объемной доли, формы и связанности пор и начального осесимметричного электроупругого напряженного состояния на эффективные свойства в рамках обобщенного сингулярного приближения электромагнитоупругости [30–32] статистической механики композитов.

2. Модель пористой керамики. Считаем, что в рассматриваемой представительной области V пористой керамики трансверсально-изотропная микроструктура (рис. 1) образована ориентированными эллипсоидальными, в частности: сферическими, дисковыми или игольчатыми полидисперсными порами со случайным взаимным расположением и заданным соотношением $a_3 / a_{1(2)}$ главных полуосей: $a_1 = a_2, a_3$ вдоль координатных осей $r_{1,2,3}$. Варьируемые величины: $k_{\text{form}} \equiv a_3 / a_{1(2)}$ — параметр формы и v_0 — относительная объемная доля пор при различных типах их связанности. Изолированную (закрытую) пористость, т.е. наличие в пористой керамике не сообщающихся между собой пор моделируем наличием минимальной гарантированной прослойки между порами. Взаимопроникающую (открытую) пористость имеем при равенстве нулю толщины такой прослойки, что обуславливает образование в пористой структуре керамики кластеров из контактирующих и взаимопроникающих пор.

3. Математическая постановка и решение задачи. 3.1. Постановка задачи. При электромеханическом нагружении области V пористой керамики напряжениями σ^{*0} , деформациями ϵ^{*0} и/или внешним электрическим полем с напряженностью E^{*0} в керамическом каркасе возникают поля напряжения σ и индукции D , которые удовлетворяют уравнениям равновесия и непрерывности [32–35]

$$(\sigma_{ij} + \sigma_{kj}^0 u_{i,k})_{,j} = 0, (D_j + D_k^0 u_{j,k})_{,j} = 0 \quad (3.1)$$

с учетом “поправок” в виде дополнительных слагаемых $\sigma_{kj}^0 u_{i,k}, D_k^0 u_{j,k}$, обусловленных наличием заданных начальных полей σ^{*0}, D^0 и дополнительного искомого поля перемещений u . Начальные поля σ^{*0}, D^0 удовлетворяют уравнениям равновесия $\sigma_{ij,j}^0 = 0$ и непрерывности $D_{i,i}^0 = 0$. Первое уравнение в (3.1) преобразуем к виду

$$\sigma_{ij,j} + \sigma_{kj}^0 u_{i,kj} = 0$$

с учетом выполнения равенств $\sigma_{kj,j}^0 = 0$ для поля σ^{*0} начальных напряжений.

В каркасе пористой керамики напряжения σ и индукции D (3.1) выражаются по известным определяющим соотношениям [35]

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn} u_{m,n} - e_{nij} E_n, D_i = e_{imn} u_{m,n} + \lambda_{in} E_n \quad (3.2)$$

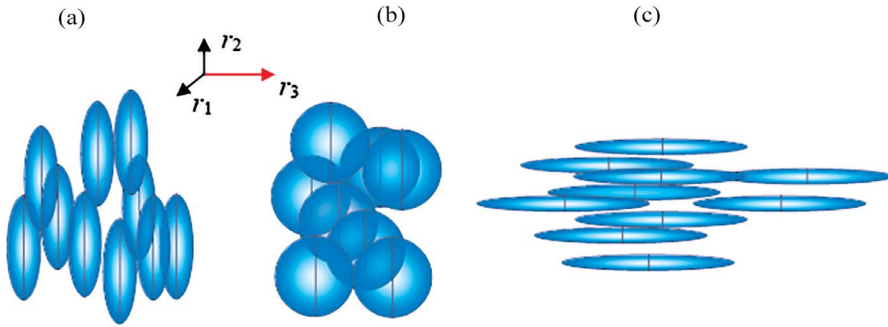


Рис. 1. Фрагменты пористых структур с дисковыми (а), сферическими (б) и игольчатыми (с) эллипсоидальными порами.

через градиенты перемещений $\nabla \mathbf{u}$, напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля с использованием известных тензоров упругих $\mathbf{C}$, пьезоэлектрических $\mathbf{e}$ и диэлектрических λ свойств монолитной керамики. Осредненные оператором “объемного осреднения” $\langle \dots \rangle = 1/V \int_V \dots d\mathbf{r}$ “макроскопические” значения деформационного $\langle \nabla \mathbf{u} \rangle$, $\langle \sigma \rangle$ и электрического $\langle \mathbf{E} \rangle$, $\langle \mathbf{D} \rangle$ полей связаны между собой с учетом начального напряженного состояния

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijmn}^* \langle u_{m,n} \rangle - e_{(\sigma)nij}^* \langle E_n \rangle, \langle D_i \rangle = e_{(D)imn}^* \langle u_{m,n} \rangle + \lambda_{in}^* \langle E_n \rangle \quad (3.3)$$

посредством искоемых тензоров $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{e}_{(\sigma)}^*$, $\mathbf{e}_{(D)}^*$, λ^* эффективных электроупругих свойств пористой керамики как гомогенного однородного материала (3.2). Отметим, что для монолитной (3.2) и пористой керамики (3.3) с начальным осесимметричным по оси r_3 напряженным состоянием (ϵ^{*0} , $\mathbf{E}^{*0}$) transversально-изотропный тензор пьезоэлектрических свойств $\mathbf{e}^*$ в матричной форме записи имеет вид [35]

$$\|e_{ij}^*\| = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15}^* & 0 & 0 \\ e_{31}^* & e_{31}^* & e_{33}^* & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

с учетом замен: $11 \rightarrow 1$, $22 \rightarrow 2$, $33 \rightarrow 3$, 23 и $32 \rightarrow 4$, 13 и $31 \rightarrow 5$, 12 и $21 \rightarrow 6$ парных тензорных индексов на матричные.

3.2. Эффективные свойства пористой керамики. Искомые тензоры $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{e}_{(\sigma)}^*$, $\mathbf{e}_{(D)}^*$, λ^* (3.3) эффективных свойств transversально-изотропной пористой керамики найдем

$$\mathbf{C}^* = \langle \mathbf{C} \rangle + \Delta^c, \mathbf{e}_{(\sigma)}^* = \langle \mathbf{e} \rangle + \Delta_{(\sigma)}^e, \mathbf{e}_{(D)}^* = \langle \mathbf{e} \rangle + \Delta_{(D)}^e, \lambda^* = \langle \lambda \rangle + \Delta^\lambda \quad (3.5)$$

как частный случай полученного ранее решения [32] для двухфазного микронеоднородного композита с начальным напряженным состоянием через поправки

$$\begin{aligned}
\Delta_{ijmn}^c &= v_o(1-v_o)(-C_{ijdb}\bar{A}_{dbmn} + e_{pij}\bar{F}_{pmn}) \\
\Delta_{(\sigma)nij}^e &= v_o(1-v_o)(-e_{pij}\bar{H}_{pn} + C_{ijpq}\bar{B}_{pqn}) \\
\Delta_{(D)imn}^e &= v_o(1-v_o)(-e_{ipq}\bar{A}_{pqmn} - \lambda_{ip}\bar{F}_{pmn}) \\
\Delta_{kn}^\lambda &= -v_o(1-v_o)(\lambda_{kp}\bar{H}_{pn} + e_{kpq}\bar{B}_{pqn})
\end{aligned} \tag{3.6}$$

к соответствующим осредненным по объему значениям

$$\langle \mathbf{C} \rangle = \mathbf{C}(1-v_o), \langle \mathbf{e} \rangle = \mathbf{e}(1-v_o), \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle = \boldsymbol{\lambda}(1-v_o),$$

где тензоры $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \dots$ (3.6) входят в разложения

$$\bar{u}_{ij} = \bar{A}_{ijmn}u_{mn}^* + \bar{B}_{ijn}E_n^*, \quad \bar{E}_i = \bar{F}_{imn}u_{mn}^* + \bar{H}_{in}E_n^* \tag{3.7}$$

с учетом представления пульсаций ($\mathbf{r} \in \mathbf{V}$)

$$u'_{i,j}(\mathbf{r}) \equiv u_{i,j}(\mathbf{r}) - u_{ij}^* = \bar{u}_{ij}i'_o(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}'(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}^* = \bar{\mathbf{E}}i'_o(\mathbf{r})$$

производных перемещений $u'_{i,j}(\mathbf{r})$ и электрической напряженности $\mathbf{E}'(\mathbf{r})$ в области $\mathbf{V}$, $i'_o(\mathbf{r}) = i_o(\mathbf{r}) - v_o$ – пульсация индикаторной функции $i_o(\mathbf{r})$ пор (здесь $i_o = 1$ в области пор и $i_o = 0$ – каркасе пористой керамики), $v_o = \langle i_o \rangle$ – относительное объемное содержание туннельных пор в области $\mathbf{V}$, в общем, $v_o \in (0;1)$. В выражениях (3.6), (3.7) компоненты тензоров $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{F}}$ и $\bar{\mathbf{H}}, \bar{\mathbf{B}}$ решения двух независимых систем линейных алгебраических уравнений по методу функций Грина в “обобщенном сингулярном приближении” [32].

3.3. Метод функций Грина. Введем в рассмотрение функции Грина

$$\mathbf{G} = \begin{Bmatrix} U_{ik} & U_i^{(1)} \\ \Phi_k & \Phi^{(1)} \end{Bmatrix} \tag{3.8}$$

для однородной анизотропной пьезоэлектрической “среды сравнения” [27, 31], где $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{p})$, $\mathbf{p} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$. В первом столбце матрицы (3.8) величины U_{ik} , Φ_k это перемещения по оси r_i и электрический потенциал в точке $\mathbf{r}$ от действия в точке $\mathbf{r}_1$ единичной силы вдоль координатной оси r_k . Во втором столбце матрицы (3.8) величины $U_i^{(1)}$, $\Phi^{(1)}$ это перемещения по оси r_i и электрический потенциал в точке $\mathbf{r}$ от действия в точке $\mathbf{r}_1$ единичного электрического источника соответственно. Свойства среды сравнения задаем через тензоры упругих свойств $\mathbf{C}_o$, диэлектрической проницаемости $\boldsymbol{\lambda}_o$ и пьезоэлектрических модулей $\mathbf{e}_o$, которые (в различных приближениях) можно приравнять, в частности, к осредненным по объему свойствам $\mathbf{C}_o = \langle \mathbf{C} \rangle$, $\boldsymbol{\lambda}_o = \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle$, $\mathbf{e}_o = \langle \mathbf{e} \rangle$ или к свойствам монолитной керамики $\mathbf{C}_o = \mathbf{C}$, $\boldsymbol{\lambda}_o = \boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{e}_o = \mathbf{e}$ или к искомому эффективному свойствам композита $\mathbf{C}_o = \mathbf{C}^*$, $\boldsymbol{\lambda}_o = \boldsymbol{\lambda}^*$, $\mathbf{e}_o = \mathbf{e}^*$ по схеме самосогласования [26, 27, 30].

В результате от постановки краевой задачи (3.1), (3.2) перейдем к системе интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} u_i'(\mathbf{r}) &= \int_V U_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \tilde{g}_j(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V U_i^{(1)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \tilde{q}^{(1)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \\ \phi'(\mathbf{r}) &= \int_V \Phi_j(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \tilde{g}_j(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V \Phi^{(1)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \tilde{q}^{(1)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

относительно пульсаций $\mathbf{u}'(\mathbf{r})$, $\phi'(\mathbf{r})$, которые обусловлены действием в однородной среде ($\mathbf{C}_\bullet$, $\lambda_\bullet$, $\mathbf{e}_\bullet$) распределенных объемных сил $\tilde{g}_i = g_{ij,j}$ и электрических источников $\tilde{q}^{(1)} = q_{i,i}^{(1)}$, где поля

$$\begin{aligned} g_{ij} &= C_{ijmn}' u_{mn}^* - e_{nij}' E_n^* + C_{ijmn}' u_{m,n}' + e_{nij}' \phi_{,n}' + \sigma_{kj}' u_{i,k}^0 \\ q_j^{(1)} &= e_{jmn}' u_{mn}^* + \lambda_{jn}' E_n^* + e_{jmn}' u_{m,n}' - \lambda_{jn}' \phi_{,n}' + D_k^{(0)} u_{jk}^* + D_k^{(0)} u_{j,k}' \end{aligned} \quad (3.10)$$

с учетом равенств $(\sigma_{kj}' u_{ik}^*)_{,j} = \sigma_{kj,j}' u_{ik}^* = 0$ в силу выполнения уравнений равновесия $\sigma_{nj,j}^{(0)} = 0$ для начальных напряжений $\sigma^0(\mathbf{r})$ в области $\mathbf{V}$ и независимости макроскопических величин u_{mn}^* , E_n^* от координат $\mathbf{r}$. Здесь использованы обозначения пульсаций

$$\sigma'^0(\mathbf{r}) = \sigma^0(\mathbf{r}) - \sigma^{*0}, \quad \mathbf{D}'^0(\mathbf{r}) = \mathbf{D}^0(\mathbf{r}) - \mathbf{D}^{*0} \quad (3.11)$$

для начального напряженного состояния, отклонений микронеоднородных свойств композита от однородных свойств среды сравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{C}'_\bullet(\mathbf{r}) &\equiv \mathbf{C}(\mathbf{r}) - \mathbf{C}_\bullet = \tilde{\mathbf{C}} + \mathbf{C}'(\mathbf{r}), \quad \lambda'_\bullet(\mathbf{r}) \equiv \lambda(\mathbf{r}) - \lambda_\bullet = \tilde{\lambda} + \lambda'(\mathbf{r}), \\ \mathbf{e}'_\bullet(\mathbf{r}) &\equiv \mathbf{e}(\mathbf{r}) - \mathbf{e}_\bullet = \tilde{\mathbf{e}} + \mathbf{e}'(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где тензоры разностей $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} - \mathbf{C}_\bullet$, $\tilde{\lambda} = \lambda - \lambda_\bullet$, $\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e} - \mathbf{e}_\bullet$. С использованием “теоремы о свертках” дифференцирование $\partial / \partial r_{(1)i}$ функций $\mathbf{g}(\mathbf{r}_1)$, $\mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{r}_1)$ в подынтегральных выражениях интегро-дифференциальных уравнений (3.9) может быть заменено дифференцированием $-\partial / \partial r_{(1)i}$ или $\partial / \partial r_i$ соответствующих ядер — функций Грина $\mathbf{U}$, $\Phi, \dots$ (3.8) [25–27] с учетом их разностного аргумента $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ и асимптотических равенств нулю при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \rightarrow \infty$. В результате получим уравнения

$$\begin{aligned} u_i'(\mathbf{r}) &= \int_V U_{ij,s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) g_{js}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V U_{i,s}^{(1)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) q_s^{(1)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \\ \phi'(\mathbf{r}) &= \int_V \Phi_{j,s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) g_{js}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V \Phi_{,s}^{(1)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) q_s^{(1)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

относительно полей пульсаций перемещений $\mathbf{u}'(\mathbf{r})$, электрического потенциала $\phi'(\mathbf{r})$ и их производных

$$\begin{aligned} u_{i,n}'(\mathbf{r}) &= \int_V U_{ij,sn}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) g_{js}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V U_{i,sn}^{(1)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) q_s^{(1)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1, \\ \phi_{,n}'(\mathbf{r}) &= \int_V \Phi_{j,sn}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) g_{js}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V \Phi_{,sn}^{(1)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) q_s^{(1)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

после дифференцирования $\partial / \partial r_n$ левых и правых частей (3.13) с учетом выражений (3.10).

В обобщенном сингулярном приближении [30–32] в интегро-дифференциальных уравнениях (3.14) у вторых производных функций Грина

$$\nabla \nabla \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \approx \mathbf{G}^s \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad \mathbf{G}^s = \begin{pmatrix} U_{ijn}^s & U_{imn}^{s(1)} \\ \Phi_{imn}^s & \Phi_{mn}^{s(1)} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

учитывают лишь составляющие, пропорциональные обобщенной дельта-функции $\delta(\mathbf{r})$, с использованием однородной пьезоэлектрической “среды сравнения” с эллипсоидальным “зерном неоднородности”. Геометрическая форма и характер связанности пор (включений) в представительной области пористой керамики (композита) учитывается формой эллипсоидального “зерна неоднородности” и выбором свойств, т.е. значениями тензоров $\mathbf{C}_*$, $\mathbf{e}_*$, λ_* однородной электроупругой “среды сравнения”. Начальные $\mathbf{C}^{*0}$, $\mathbf{e}^{*0}$, λ^{*0} и результирующие $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{e}^*$, λ^* значения тензоров эффективных свойств пористой керамики для случая изолированных пор получим при приравнивании свойств среды сравнения к свойствам монолитной керамики $\mathbf{C}_* = \mathbf{C}$, $\lambda_* = \lambda$, $\mathbf{e}_* = \mathbf{e}$, а для случая взаимопроникающих пор – к осредненным по объему значениям $\mathbf{C}_* = \langle \mathbf{C} \rangle$, $\lambda_* = \langle \lambda \rangle$, $\mathbf{e}_* = \langle \mathbf{e} \rangle$ (для этого случая возможно уточнение по схеме самосогласования, когда $\mathbf{C}_0^* = \mathbf{C}^*$, $\lambda_0^* = \lambda^*$, $\mathbf{e}_* = \mathbf{e}^*$). Начальное напряженное состояние элементов структуры (каркаса пористой структуры) $\zeta_0 = \{\sigma^0, \mathbf{D}^0\}$ в представительной области $\mathbf{V}$ и, в целом, на макроуровне $\zeta_0^* = \{\sigma^{*0}, \mathbf{D}^{*0}\}$ пористой пьезокерамики задаются, в общем, через компоненты тензора начальных макродеформаций ϵ^{*0} , компоненты вектора начальной макронапряженности $\mathbf{E}^{*0}$ области $\mathbf{V}$. При этом тензоры σ^{*0} , $\mathbf{D}^{*0}$ связаны с заданными значениями тензоров ϵ^{*0} , $\mathbf{E}^{*0}$ посредством тензоров начальных эффективных свойств $\mathbf{C}^{*0}$, $\mathbf{e}^{*0}$, λ^{*0} [30, 31] пористой пьезокерамики. В результате, например, при заданной начальной осевой деформации $\epsilon_{33}^{*0} \neq 0$, когда другие компоненты $\epsilon_{ij}^{*0} = 0$, $\mathbf{E}^{*0} = 0$ имеем, в общем, ненулевые значения компонент начального напряженного состояния элементов структуры ζ_0 и, в целом, композита ζ_0^* . Значения начального напряженного состояния фаз $\zeta_{0f}^* \equiv \langle \zeta_0 \rangle_f = \{\sigma_f^0, \mathbf{D}_f^0\}$, в частности, тензоры $\sigma_{1,2}^0$, $\mathbf{D}_{1,2}^0$ пористой пьезокерамики как двухфазного композита могут быть найдены, например, по известному решению [30, 31], полученному для случая $\zeta_0 = 0$.

4. Результаты численного моделирования. С использованием полученных решений (3.5)–(3.15) осуществлен расчет начальных e_{311}^{*0} (рис. 2) и результирующих “деформационных” e_{311}^* (рис. 3–8) значений эффективного пьезоэлектрического модуля трансверсально-изотропной пористой пьезокерамики в зависимости от объемной доли v_* и связанности, т.е. изолированных (сплошные линии) или взаимопроникающих (пунктирные линии) сферических ($k_{\text{form}} = 1$, рис. 2–4), дисковых ($k_{\text{form}} = 0.2$, рис. 2, рис. 5, рис. 6) или туннельных ($k_{\text{form}} \rightarrow \infty$, рис. 2, 7, 8) пор и начальных осесимметричных деформаций: $\epsilon_{11,22}^{*0}$, ϵ_{33}^{*0} гидростатического ($\epsilon_{11}^{*0} = \epsilon_{22}^{*0}$) в плоскости изотропии и осевого (ϵ_{33}^{*0}) вдоль оси симметрии деформирований материала. При этом на рис. 2 представлены графики зависимости отношения e_{311}^{*0} / e_{311} начальных значений эффективного пьезоэлектрического модуля e_{311}^{*0} пористой пьезокерамики к величине модуля e_{311} монолитной керамики PZT-4, а на рис. 3–8 – отношение e_{311}^* / e_{311}^{*0} результирующего e_{311}^* и начального e_{311}^{*0} значений эффективного пьезоэлектрического модуля пористой

пьезокерамики при различных осесимметричных ее начальных деформациях. При предельном значении пористости $\nu_0 \rightarrow 1$ начальный $e_{311}^{0*} \rightarrow 0$ (рис. 2) и результирующий $e_{311}^* \rightarrow 0$ пьезомодули стремятся к нулю и, как следствие, для относительной величины e_{311}^* / e_{311}^{0*} (рис. 3, 5, 7) имеем неопределенность типа “0/0”; численный расчет и построение графиков осуществлено до значения пористости $\nu_0 = 0.99$. Дополнительно, для начальных значений эффективного модуля e_{311}^{0*} пористой пьезокерамики на рис. 9 даны графики непрерывной зависимости величины e_{311}^* / e_{311}^{0*} от параметра формы k_{form} пор при их различном объемном содержании ν_0 . Соответствующие зависимости результирующего эффективного модуля e_{311}^* от параметра формы k_{form} , объемной доли ν_0 пор и различных начальных деформаций ($\epsilon_{11}^{0*} = \epsilon_{22}^{0*}$, ϵ_{33}^{0*}) пористой пьезокерамики даны на рис. 10.

5. Заключение. Получено решение (3.5)–(3.15) “задачи эффективного модуля” трансверсально-изотропной пористой керамики с учетом ее начального напряженного состояния и эллипсоидальной формы ориентированных пор различной связанности на основе численно-аналитического решения связанной стохастической краевой задачи электроупругости механики композитов по методу функций Грина. С использованием полученных решений осуществлен расчет начальных e_{311}^{0*} (рис. 2, 9) и результирующих e_{311}^* (рис. 3–8, 10) значений эффективного пьезоэлектрического модуля трансверсально-изотропной пористой пьезокерамики PZT-4 в зависимости от значений объемной доли ν_0 , параметра формы $k_{\text{form}} \equiv a_3 / a_{1(2)}$ и типа связанности эллипсоидальных (рис. 9, 10), в частности: сферических (рис. 3, 4), дисковых (рис. 5, 6) или туннельных (рис. 7, 8) пор с учетом начального напряженного состояния пористой пьезокерамики, обусловленного ее начальными осесимметричными деформациями $\epsilon_{11,22}^{0*}$, ϵ_{33}^{0*} в плоскости изотропии ($\epsilon_{11,22}^{0*}$) и вдоль оси симметрии (ϵ_{33}^{0*}) материала. Выявлены (рис. 2) характерные значения объемной доли ν_0 сферических ($k_{\text{form}} = 1$) и дисковых ($k_{\text{form}} = 0.2$) пор с учетом их связанностей, при которых происходит смена знака

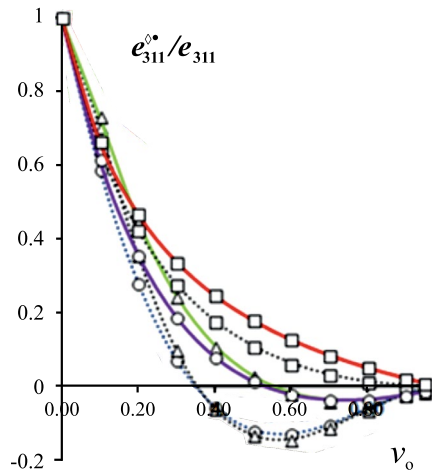


Рис. 2. Начальный эффективный пьезомодуль e_{311}^{0*} пористой керамики PZT-4 (e_{311}) в зависимости от объемной доли ν_0 сферических (о), дисковых (Δ) или туннельных ($\square$) пор.

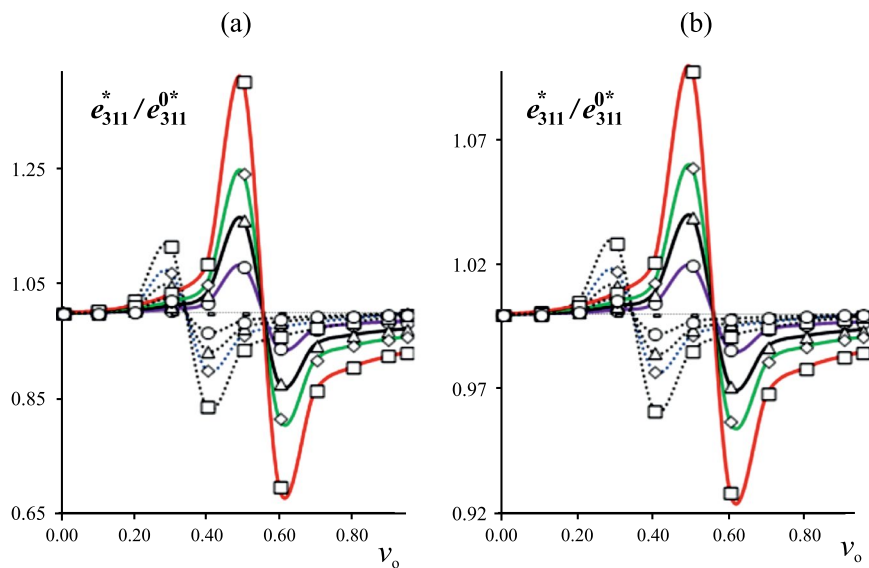


Рис. 3. Эффективный пьезомодуль e_{311}^* пористой керамики PZT-4 в зависимости от содержания v_o сферических пор для случая $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$ (—), 0.01 (○), 0.02 (Δ), 0.03 (◇), 0.05 (□) при $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ (a), $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ (—), 0.01 (○), 0.02 (Δ), 0.03 (◇), 0.05 (□) при $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$ (b), $E^{0*} = 0$.

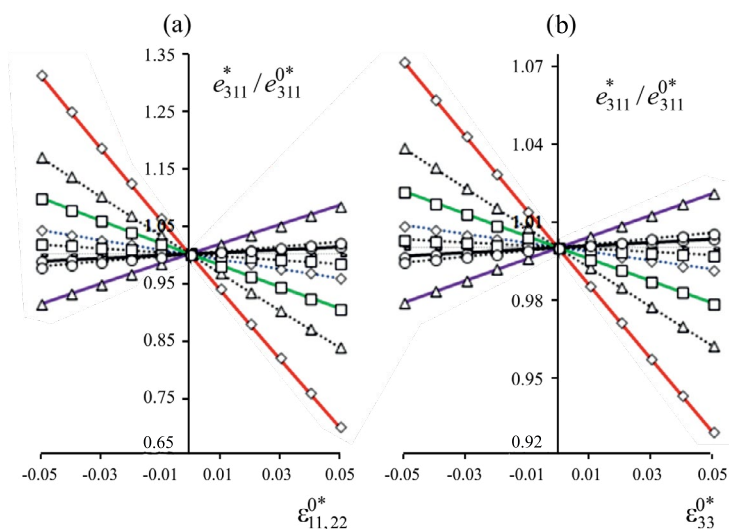


Рис. 4. Эффективный пьезомодуль e_{311}^* пористой керамики PZT-4 с объемной долей $v_o = 0.2$ (○), 0.4 (Δ), 0.6 (◇), 0.8 (□) сферических пор в зависимости от начальных макродеформаций $\epsilon_{11,22}^{0*} \neq 0$ при $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ (a), $\epsilon_{33}^{0*} \neq 0$ при $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$ (b), $E^{0*} = 0$.

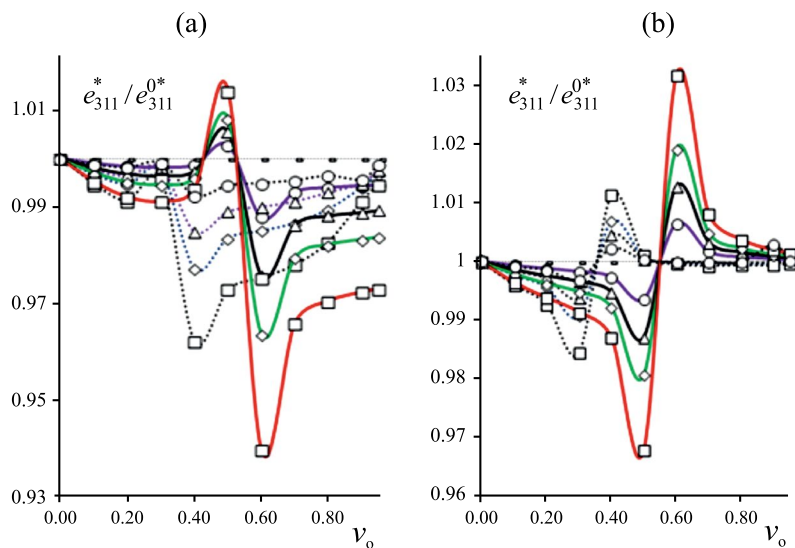


Рис. 5. Эффективный пьезомодуль e_{311}^* пористой керамики PZT-4 в зависимости от содержания v_o дисковых пор для случая $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$ (—), 0.01 (○), 0.02 (Δ), 0.03 (◇), 0.05 (□) при $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ (a), $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ (—), 0.01 (○), 0.02 (Δ), 0.03 (◇), 0.05 (□) при $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$ (b), $E^{0*} = 0$.

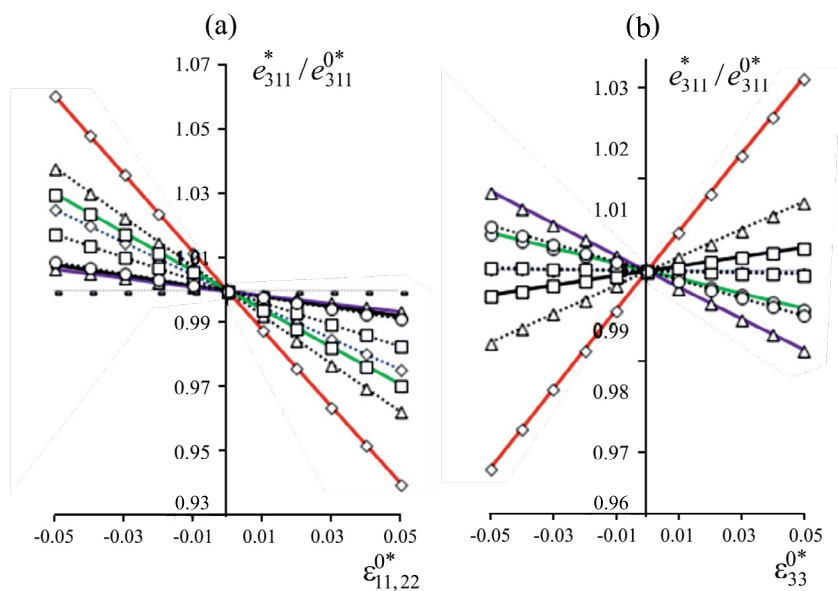


Рис. 6. Эффективный пьезомодуль e_{311}^* пористой керамики PZT-4 с объемной долей $v_o = 0.2$ (○), 0.4 (Δ), 0.6 (◇), 0.8 (□) дисковых пор в зависимости от начальных макродеформаций $\epsilon_{11,22}^{0*} \neq 0$ при $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ (a), $\epsilon_{33}^{0*} \neq 0$ при $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$ (b), $E^{0*} = 0$.

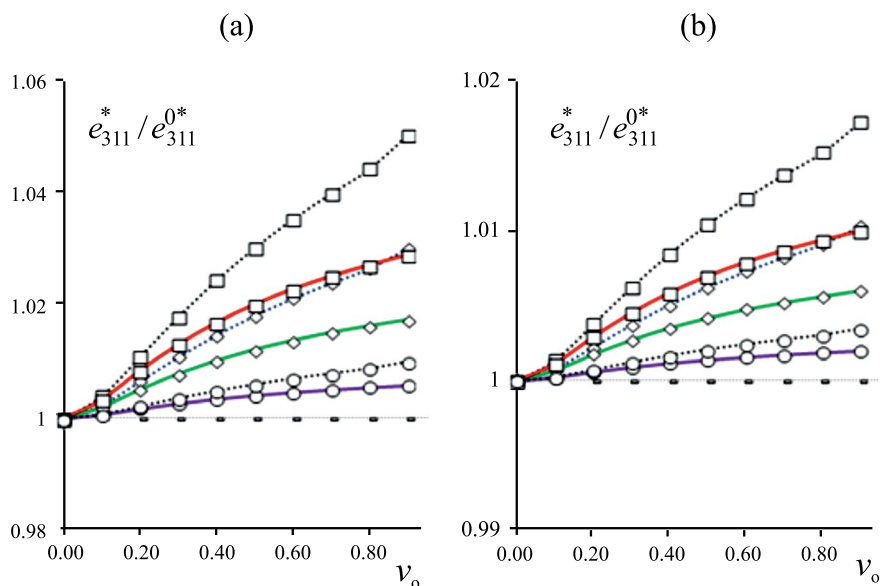


Рис. 7. Эффективный пьезомодуль e_{311}^* пористой керамики PZT-4 в зависимости от содержания ν_o туннельных пор для случая $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$ (—), 0.01 (○), 0.03 (◇), 0.05 (◻) при $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ (a), $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ (—), 0.01 (○), 0.03 (◇), 0.05 (◻) при $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$ (b), $E^{0*} = 0$.

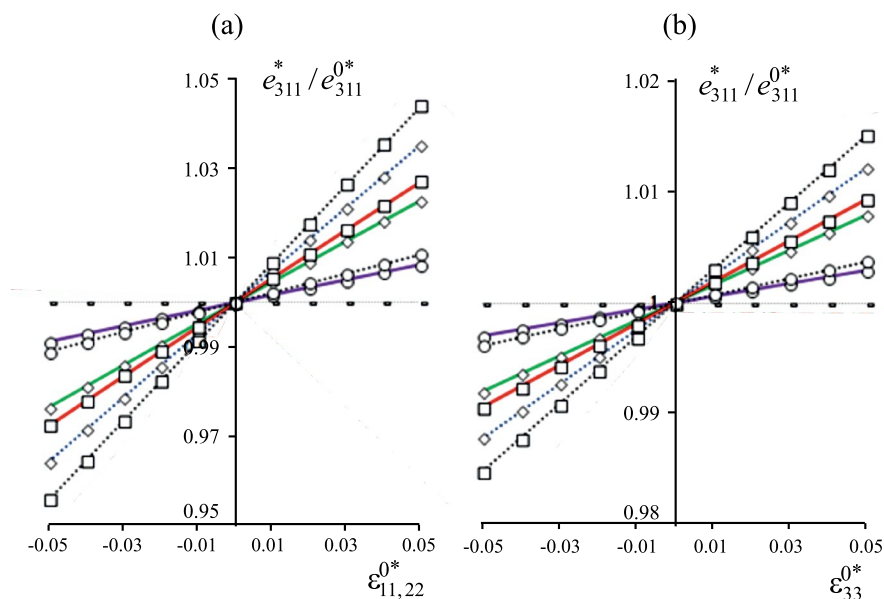


Рис. 8. Эффективный пьезомодуль e_{311}^* пористой керамики PZT-4 с объемной долей туннельных пор $\nu_o = 0.2$ (○), 0.6 (◇), 0.8 (◻) в зависимости от начальных макродеформаций $\epsilon_{11,22}^{0*} \neq 0$ при $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ (a), $\epsilon_{33}^{0*} \neq 0$ при $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$ (b), $E^{0*} = 0$.

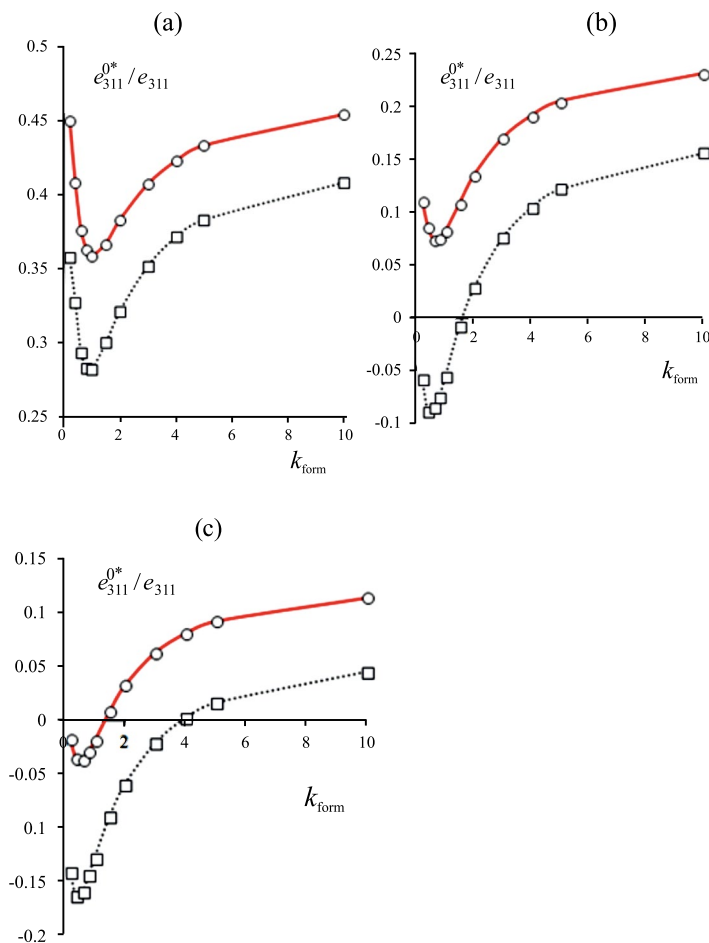


Рис. 9. Начальный эффективный пьезомодуль e_{311}^{0*} пористой керамики PZT-4 в зависимости от параметра $k_{form} \equiv a_3/a_{1(2)}$ формы эллипсоидальных изолированных (○) и взаимопроникающих (□) пор при объемной доле $v_0 = 0.2$ (а), 0.4 (б), 0.6 (с).

численных значений начального эффективного пьезоэлектрического модуля e_{311}^{0*} по отношению к соответствующему модулю e_{311} монолитной керамики PZT-4. Определены (рис. 3) характерные значения объемной доли v_0^* , в частности, сферических пор, при которых увеличению результирующих значений пьезомодуля e_{311}^* (относительно его соответствующего начального значения e_{311}^{0*}) сменяется снижением результирующих значений, при этом значение v_0^* для случая открытой пористости примерно в два раза меньше соответствующего значения для изолированной пористости и на значение v_0^* не влияет величина начального деформирования $\epsilon_{11,22}^{0*}$ и/или ϵ_{33}^{0*} ; эти эффекты не наблюдаются на графиках зависимости e_{311}^*/e_{311}^{0*} от v_0 для случая туннельных пор (рис. 7). Установлено

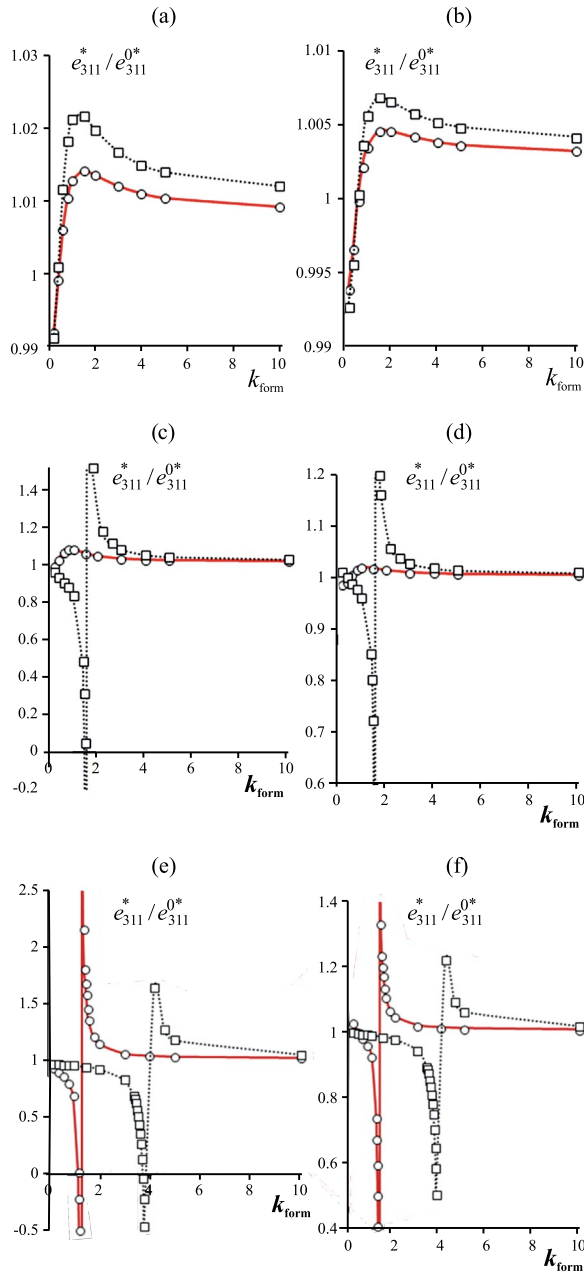


Рис. 10. Эффективный пьезомодуль e^*_{311} пористой керамики PZT-4 в зависимости от параметра $k_{\text{form}} \equiv a_3/a_{(2)}$ формы эллипсоидальных изолированных (о) и взаимопроникающих (□) пор при объемной доле $v = 0.2$ (а, б), 0.4 (с, д), 0.6 (е, ф) для случаев $\epsilon^{0*}_{11,22} = 0.05$, $\epsilon^{0*}_{33} = 0$ (а, с, е), $\epsilon^{0*}_{11,22} = 0$, $\epsilon^{0*}_{33} = 0.05$ (б, д, ф) при $E^{0*} = 0$.

(рис. 4, 6, 8), что величина e_{311}^* / e_{311}^{0*} относительных значений результирующего пьезомодуля e_{311}^* пористой пьезокерамики линейно зависит от ее начальных макродеформаций $\epsilon_{11,22}^{0*}$, ϵ_{33}^{0*} и, например, для случая сферических пор (рис. 4) максимальные (по модулю) градиенты роста и убывания относительных значений e_{311}^* / e_{311}^{0*} реализуются соответственно при значениях объемной доли $v_o \approx 0.4$ и 0.6 изолированных сферических пор. При этом для случая туннельных пор (рис. 8) имеем возрастающие линейные зависимости величины e_{311}^* / e_{311}^{0*} от начальных макродеформаций $\epsilon_{11,22}^{0*}$, ϵ_{33}^{0*} , при этом максимальный градиент имеем при объемной доле $v_o \approx 0.8$ открытых (взаимопроникающих) туннельных пор. Доказано, что начальное гидростатическое деформирование $\epsilon_{11,22}^{0*}$ более существенно влияет на результирующие значения пьезомодуля e_{311}^* пористой пьезокерамики (рис. 10, а, с, е), чем ее начальная осевая деформация ϵ_{33}^{0*} (рис. 10, b, d, f) при всех рассматриваемых значениях объемной доли v_o , параметра формы k_{form} и связанности, в особенности, сферических (рис. 3, 4) пор. Выявлен (рис. 9) немонотонный характер с наличием точек минимума зависимости величины e_{311}^* / e_{311}^{0*} от параметра формы k_{form} эллипсоидальных пор, определены величины объемной доли пор v_o и характерные значения параметра формы k_{form} , при которых происходит смена знака численных значений начального эффективного пьезоэлектрического модуля e_{311}^{0*} по отношению к соответствующему модулю e_{311}^{0*} монолитной керамики PZT-4. При этом графики зависимости величины e_{311}^* / e_{311}^{0*} от параметра формы k_{form} для изолированных пор лежат выше, чем для взаимопроникающих пор для всех рассмотренных значений объемной доли v_o . Немонотонный характер (рис. 10) также имеет зависимость величины e_{311}^* / e_{311}^{0*} от параметра формы k_{form} эллипсоидальных пор с наличием точки максимума для случая малой объемной доли пор v_o (рис. 10, a, b) и наличием разрывов (обусловленных сменой знака величины e_{311}^{0*}) значений этой функции при значении k_{form}'' для случая средних и больших значений объемной доли v_o (рис. 10, c–f). Вид функций e_{311}^* / e_{311}^{0*} от k_{form} однотипен для случаев изолированных и взаимопроникающих пор с характерным смещением по оси абсцисс k_{form} (рис. 10).

Таким образом, эффект начального напряженного состояния наиболее сильно проявляется для пьезомодуля e_{311}^* керамики со сферическими порами (рис. 1, b) при объемной доле $v_o \approx 0.5$ и 0.6 для случая изолированных, 0.3 и 0.4 — для случая взаимопроникающих сферических пор, при этом особенно существенно — для случая трансверсального начального деформирования $\epsilon_{11,22}^{0*}$ в плоскости $r_1 r_2$ и пропорционально величине этих деформаций (рис. 3, a). Для керамики с ориентированными дисковыми порами (рис. 1, a, рис. 5) эффект начального напряженного состояния проявляется на значениях пьезомодуля e_{311}^* гораздо слабее, чем для случая сферических пор (рис. 3), при этом экстремумы имеем при таких же значениях пористости $v_o \approx 0.5$ и 0.6 для изолированных, 0.3 и 0.4 — для взаимопроникающих дисковых пор. Имеем монотонные, практически, линейно возрастающие зависимости величины e_{311}^* / e_{311}^{0*} от значений туннельной пористости v_o (рис. 7) при всех рассматриваемых начальных макродеформациях $\epsilon_{11,22}^{0*}$, ϵ_{33}^{0*} в отличие от немонотонных зависимостей e_{311}^* / e_{311}^{0*} от v_o для случая сферических (рис. 3) и дисковых (рис. 5) пор. Отметим, что графики зависимостей значений начального пьезомодуля e_{311}^{0*} от параметра формы k_{form} (рис. 9) имеют характерный экстремум — точку минимума при значении $k_{\text{form}} \approx 1$, т.е. для случая сферических

пор. При этом максимальный эффект от наличия начального напряженного состояния проявляется также при $k_{\text{form}} \approx 1$ (рис. 10, а, б) при относительно малой пористости, например, $\nu_0 = 0.2$. Наличие точек разрыва на графиках (рис. 10, с–f) обусловлено отсутствием пьезоэффекта ($e_{311}^{0*} = 0$) при значении параметра формы $k_{\text{form}} \approx 1.5$, т.е. эффект начального напряженного состояния обуславливает появление пьезоэффекта ($e_{311}^* \neq 0$) для пористой керамики с “овальной” формой пор.

Благодарности. Результаты получены при выполнении государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации на выполнение фундаментальных научных исследований (проект № FSNM-2023-0006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity. Oxford: Pergamon Press, 1982. 630 p. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
2. Гузь А.Н. Об определении приведенных упругих постоянных композитных слоистых материалов с начальными напряжениями // Доклады АН УССР. Сер. А. 1975. № 3. С. 216–219.
3. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2-х т. Киев: Наук. Думка, 1986. 910 с.
4. Алехин В.В., Аннин Б.Д., Колтаков А.Г. Синтез слоистых материалов и конструкций. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1988. 128 с.
5. Akbarov S.D., Guliev M.S. Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite prestretched compound circular cylinder made of incompressible materials // Int. Appl. Mech. 2009. V. 45. № 10. P. 1141–1151. <https://doi.org/10.1007/s10778-010-0255-y>
6. Akbarov S.D. Recent investigations on dynamic problems for an elastic body with initial (residual) stresses // Int. Appl. Mech. 2007. V. 43. № 12. P. 1305–1324. <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0003-8>
7. Akbarov S.D. Stability loss and buckling delamination: Three-dimensional linearized approach for elastic and viscoelastic composites. Springer, 2013. 448 p. <http://dx.doi.org/10.1007/97893964293029099>
8. Гулиев М.С., Сейфулаев А.И., Абдуллаева Д.Н. Исследование распространения упругих волн в составном цилиндре с начальным кручением // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. № 5. С. 404–413.
9. Белянкова Т.И., Калинин В.В. Свойства преднапряженных изотропных материалов при учете упругих модулей высших порядков // Наука Юга России. 2017. № 2. С. 3–12.
10. Гузь А.Н. Об ультразвуковом неразрушающем методе определения напряжений в элементах конструкций и в приповерхностных слоях материалов: фокус на украинские исследования (обзор) // Прикладная механика. 2014. Т. 50. № 3. С. 3–30.
11. Kuliev G.G., Jabbarov M.D. To elastic waves propagation in strained nonlinear anisotropic media // Proceedings the sciences of Earth of academy sciences Azerbaijan. 1998. N2. P. 103–112.
12. Guz A.N. Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. Springer, 1999. 555 p.
13. Akbarov S.D. Dynamics of pre-strained bi-material elastic systems: Linearized three-dimensional approach. Springer, 2016. 1004 p.
14. Gupta S., Majhi D.K., Kundu S., Vishwakarma S.K. Propagation of torsional surface waves in a homogeneous layer of finite thickness over an initially stressed heterogeneous half-space // Appl. Math. Comput. 2012. V. 218. № 9. P. 5655–5664. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.11.060>

15. *Hu W.T., Chen W.Y.* Influence of lateral initial pressure on axisymmetric wave propagation in hollow cylinder based on first power hypo-elastic model // *J. of Central South University*. 2014. V. 21. № 2. P. 753–760.
16. *Yesil U.B.* Forced and natural vibrations of an orthotropic pre-stressed rectangular plate with neighboring two cylindrical cavities // *Comput. Mater. Continua*. 2017. V. 53. № 1. P. 1–22.
17. *Kolpakov A.G.* Effect of inflation of initial stresses on the homogenized characteristics of composite // *Mechanics of Materials*. 2005. V. 37. № 8. P. 840–854.
<https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2004.08.002>
18. *Kolpakov A.G.* On the dependence of the velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // *Computers & Structures*. 1992. V. 44. № 1–2. P. 97–101.
19. *Kolpakov A.G.* Averaged characteristics of stressed laminated media // *J. of Engineering Physics*. 1995. V. 68. № 5. P. 605–613. <https://doi.org/10.1007/BF00858059>
20. *Колпаков А.Г.* Усредненные модели упругих композиционных материалов и элементов конструкций: дис. ... доктор физико-математических наук: 01.02.04. Новосибирск, 2002. 291 с.
21. *Pan'kov A.A., Anoshkin A.N., Pisarev P.V., Bayandin S.R.* Using an electromechanical analogy to describe the damping characteristics of an MFC actuator // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2021. V. 1093. P. 012023.
<http://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/1093/1/012023>
22. *Победра Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
23. *Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А.* Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
24. *Mityushev V.* Random 2D composites and the generalized method of Schwarz // *Advances in Mathematical Physics*. 2015. V. 2015. <http://dx.doi.org/10.1155/2015/535128>
25. *Волков С.Д., Ставров В.П.* Статистическая механика композитных материалов. Мн.: Изд-во БГУ, 1978. 208 с.
26. *Соколкин Ю.В., Ташикин А.А.* Механика деформирования и разрушения структурно неоднородных тел. М.: Наука, 1984. 115 с.
27. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микрон неоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
28. *Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Леценко П.В.* Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. Киев: Наук. думка, 1989. 208 с.
29. *Канаун С.К.* Метод эффективного поля в механике композитных материалов. Петрозаводск: Изд-во Петрозавод. ун-та, 1993. 600 с.
30. *Паньков А.А.* Пьезокомпозиты и датчики: монография в 3-х частях / Часть 1. Статистическая механика пьезокомпозитов. Пермь: Изд-во Пермского национального исследовательского политехнического университета, 2022. 234 с.
31. *Паньков А.А.* Коэффициенты электромагнитной связи композита с пьезоактивными фазами // *Физическая мезомеханика*. 2011. Т. 14. № 2. С. 93–99.
32. *Pan'kov A.A.* Effect of initial stress state on effective properties of piezocomposite // *Mechanics of Composite Materials*. 2022. V. 58. № 5. P. 733–746.
<https://doi.org/10.22364/mkm.58.5.11>
33. *Guo X., Wei P.* Dispersion relations of elastic waves in one – dimensional piezoelectric/piezomagnetic phononic crystal with initial stresses // *Ultrasonics*. 2016. V. 66. P. 72–85.
<https://doi.org/10.1016/j.ultras.2015.11.008>
34. *Dasdemir A.* Forced vibrations of pre – stressed sandwich plate – strip with elastic layers and piezoelectric core // *Int. Appl. Mech*. 2018. V. 54. № 4. P. 480–493.
<https://doi.org/10.1007/s10778-018-0901-3>
35. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // *Физическая акустика*. Т. 1: Методы и приборы ультразвуковых исследований. Часть А. М.: Мир, 1966. С. 204–326.

INFLUENCE OF PORE SHAPE AND INITIAL STRESS STATE ON THE ELECTROELASTIC PROPERTIES OF POROUS PIEZOCERAMICS PZT-4

A. A. Pankov^{a*}

^aPerm National Research Polytechnic University Perm, 614990 Russia

* e-mail: a_a_pankov@mail.ru

Received 13.06.2023

Revised 12.07.2023

Accepted 04.08.2023

Abstract – A numerical-analytical solution to the “effective modulus problem” of transversally isotropic porous ceramics is obtained, taking into account its initial stressed state and the ellipsoidal shape of oriented pores of various connectivity based on the solution of the associated stochastic boundary value problem of electroelasticity of composite mechanics using the Green’s function method. A numerical calculation of the initial and resulting values of the effective piezoelectric modulus of porous piezoceramics (PZT-4) was carried out depending on the values of the volume fraction, shape parameter and connectivity of ellipsoidal, in particular: spherical, disk or tunnel pores, taking into account the initial stressed state of the porous piezoceramics due to its initial axisymmetric deformation. Characteristic values of the volume fraction of spherical and disk pores are identified, taking into account their connections, at which the sign of the numerical values of the initial effective piezoelectric modulus changes with respect to the corresponding module of PZT-4 monolithic ceramics. The values of the volume fraction, shape parameter and type of pore connectivity at which the maximum gradients of the linear dependence of the values of the resulting piezoelectric modulus of porous piezoceramics on its initial macrodeformations are realized are determined. An analysis of graphs of continuous dependences of the initial and resulting values of the effective piezoelectric modulus on the pore shape parameter is given for various cases of their volumetric content, connectivity and axisymmetric initial deformations of porous piezoceramics.

Keywords: porous piezoceramics, effective properties, ellipsoidal pores, initial stress state, electroelasticity, numerical modeling

REFERENCES

1. K. Washizu, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity* (Pergamon Press, Oxford, 1982; Mir, Moscow, 1987).
2. A. N. Guz', "On the determination of the reduced elastic constants of composite layered materials with initial stresses," *Dolk. AN USSR. Ser. A*, No. 3, 216–219 (1975).
3. A. N. Guz', *Elastic Waves in Bodies with Initial Stresses*, Vol. 1: *General Problems*; Vol. 2: *Dependencies of Propagation* (Naukova Dumka, Kiev, 1986) [in Russian].
4. V. V. Alekhin, B. D. Aninin, and A. G. Kolpakov, *Synthesis of Layered Materials and Structures* (Inst. Gidrodyn. SO AN SSSR, Novosibirsk, 1988) [in Russian].
5. S. D. Akbarov and M. S. Guliev, "Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite prestretched compound circular cylinder made of incompressible materials," *Int. Appl. Mech.* **45** (10), 1141–1151 (2009). <https://doi.org/10.1007/s10778-010-0255-y>

6. S. D. Akbarov, "Recent investigations on dynamic problems for an elastic body with initial (residual) stresses," *Int. Appl. Mech.* **43** (12), 1305–1324 (2007).
<https://doi.org/10.1007/s10778-008-0003-8>
7. S. D. Akbarov, *Stability Loss and Buckling Delamination: Three-Dimensional Linearized Approach for Elastic and Viscoelastic Composites* (Springer, 2013).
<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-30290-9>
8. M. S. Guliev, A. I. Seifulaev, and D. N. Abdulaeva, "Investigation of the distribution of elastic waves in the composite cylinder with the initial torsion," *Stroit. Mech. Inzh. Konstr. Sooruzh.*, No. 5, 404–413 (2018).
9. T. I. Belyankova and V. V. Kalinchuk, "Properties of prestressed isotropic materials taking into account higher-order elastic moduli," *Nauka Yuga Rossii*, No. 2, 3–12 (2017).
10. A. N. Guz', "On the ultrasonic non-destructive method for determining stresses in structural elements and in near-surface layers of materials: focus on Ukrainian research (Review)," *Appl. Mech.*, **50** (3), 3–30 (2014).
11. G. G. Kuliev and M. D. Jabbarov, "To elastic waves propagation in strained nonlinear anisotropic media," *Proc. Sci. Earth Acad. Sci. Azerbaijan*, No. 2, 103–112 (1998).
12. A. N. Guz', *Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies* (Springer, 1999).
13. S. D. Akbarov, *Dynamics of Pre-Strained Bi-Material Elastic Systems: Linearized Three-Dimensional Approach* (Springer, 2016).
14. S. Gupta, D. K. Majhi, S. Kundu, and S. K. Vishwakarma, "Propagation of torsional surface waves in a homogeneous layer of finite thickness over an initially stressed heterogeneous half-space," *Appl. Math. Comput.* **218** (9), 5655–5664 (2012).
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.11.060>
15. W. T. Hu and W. Y. Chen, "Influence of lateral initial pressure on axisymmetric wave propagation in hollow cylinder based on first power hypo-elastic model," *J. Central South Univ.* **21** (2), 753–760 (2014).
16. U. B. Yesil, "Forced and natural vibrations of an orthotropic pre-stressed rectangular plate with neighboring two cylindrical cavities," *Comput. Mater. Continua.* **53** (1), 1–22 (2017).
17. A. G. Kolpakov, "Effect of influence of initial stresses on the homogenized characteristics of composite," *Mech. Mater.* **37** (8), 840–854 (2005).
<https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2004.08.002>
18. A. G. Kolpakov, "On the dependence of the velocity of elastic waves in composite media on initial stresses," *Comput. Struct.* **44** (1–2), 97–101 (1992).
19. A. G. Kolpakov, "Averaged characteristics of stressed laminated media," *J. Eng. Phys.* **68** (5), 605–613 (1995). <https://doi.org/10.1007/BF00858059>
20. A. G. Kolpakov, Doctoral Dissertation in Physics and Mathematics (NGU, Novosibirsk, 2002).
21. A. A. Pan'kov, A. N. Anoshkin, P. V. Pisarev, and S. R. Bayandin, "Using an electromechanical analogy to describe the damping characteristics of an MFC actuator," *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* **1093**, 012023 (2021).
<http://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/1093/1/012023>
22. B. E. Pobedrya, *Mechanics of Composite Materials* (Mos. Gos. Univ, Moscow, 1984) [in Russian].
23. E. I. Grigolyuk and L. A. Fil'shtinskii, *Perforated Plates and Shells* (Nauka, Moscow, 1970) [in Russian].
24. V. Mityushev, "Random 2D composites and the generalized method of Schwarz," *Adv. Math. Phys.* **2015**, 535128 (2015). <http://dx.doi.org/10.1155/2015/535128>
25. S. D. Volkov and V. P. Stavrov, *Statistical Mechanics of Composite Materials* (Belarus. Gos. Univ., Minsk, 1978) [in Russian].
26. Yu. V. Sokolkin and A. A. Tashkinov, *Mechanics of the Deformation and Failure of Structurally Inhomogeneous Bodies* (Nauka, Moscow, 1984) [in Russian].

27. T. D. Shermergor, *Theory of Elasticity of Microheterogeneous Media* (Nauka, Moscow, 1977) [in Russian].
28. L. P. Khoroshun, B. P. Maslov, and P. V. Leschenko, *Prediction of Effective Properties of Piezoactive Composite Materials* (Naukova Dumka, Kiev, 1989) [in Russian].
29. S. K. Kanaun and V. M. Levin, *The Effective Field Method in the Mechanics of Composite Materials* (Petrozavodsk. Gos. Univ. Petrozavodsk, 1993) [in Russian].
30. A. A. Pan'kov, *Piezocomposites and Sensors*, Vol. 1: *Statistical Mechanics of Piezocomposites* (Perm Gos. Politech. Univ., Perm, 2022) [in Russian].
31. A. A. Pan'kov, "Electromagnetic coupling factors for a composite and piezoactive phases," *Phys. Mesomech.* **14** (2), 93–99 (2011).
32. A. A. Pan'kov, "Effect of initial stress state on effective properties of piezocomposite," *Mech. Compos. Mater.* **58** (5), 733–746 (2022).
<https://doi.org/10.1007/s11029-022-10063-w>
33. X. Guo and P. Wei, "Dispersion relations of elastic waves in one—dimensional piezoelectric/piezomagnetic phononic crystal with initial stresses," *Ultrasonics* **66**, 72–85 (2016).
<https://doi.org/10.1016/j.ultras.2015.11.008>
34. A. Dasdemir, "Forced vibrations of pre—stressed sandwich plate—strip with elastic layers and piezoelectric core," *Int. Appl. Mech.* **54** (4), 480–493 (2018).
<https://doi.org/10.1007/s10778-018-0901-3>
35. D. A. Berlincourt, D. R. Curran, and H. Jaffe, "Piezoelectric and Piezomagnetic Materials and Their Function in Transducers," in *Physical Acoustics*, Vol. 1: *Principles and Methods*, Ed. by W. P. Mason (Academic Press, 1964), pp. 169–270.
<https://doi.org/10.1016/B978-1-4832-2857-0.50009-5>

УДК 531.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЭКСОСКЕЛЕТА СИСТЕМОЙ ТРЕХ ЗВЕНЬЕВ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ С РЕГУЛИРУЕМОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

© 2024 г. А. О. Блинов^{а,*}, А. В. Борисов^{а,***},

Р. Г. Мухарлямов^{б,***}, М. А. Новикова^{а,****}

^аФилиал ФГБОУ ВО НИУ «МЭИ» в г. Смоленске, Смоленск, Россия

^бИнститут физических исследований и технологий ФГАОУ ВО Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

*e-mail: alex-blinov67@yandex.ru

**e-mail: borisowandrej@yandex.ru

***e-mail: robgar@mail.ru

****e-mail: mar.novikova@ro.ru

Поступила в редакцию 21.02.2023 г.

После доработки 04.05.2023 г.

Принята к публикации 06.05.2023 г.

В статье предложена пространственная модель экзоскелета для опорно-двигательного аппарата человека, представленная тремя подвижными звеньями переменной длины и двумя точечными массами. Управление жесткостью звеньев осуществляется изменением напряжения, подаваемого на магнитно-реологическую жидкость, заполняющую участки переменной длины. Модель можно использовать для разработки комфортабельных экзоскелетов, кинематические характеристики которых близки к кинематическим характеристикам опорно-двигательного аппарата человека. Уравнения динамики модели составляются с использованием локальных систем координат.

Требуемые законы изменения обобщенных координат задаются уравнениями программных связей, определяющих зависимость дифференцируемых периодических функций от времени. Управляющие моменты и продольные силы определяются методами решения обратных задач динамики и реализуются изменением напряженностей магнитных полей, влияющих на изменение жесткости магнитно-реологической жидкости. Управляющие жесткостью звена напряженности магнитных полей реализуются ступенчатыми функциями. Синтезирована анимация движения механизма, показывающая адекватность предложенной процедуры моделирования. Соединения звеньев моделируются шарнирами и двигателями, реализующими необходимое вращательное движение. Управление динамикой модели осуществляется изменением длин звеньев и углов между звеньями.

Ключевые слова: экзоскелет, звено переменной длины, жесткость, магнитно-реологическая жидкость, система, дифференциальные уравнения, шарнир, управление, динамика, численное решение, анимация

DOI: 10.31857/S1026351924010158, EDN: VZJQFU

1. Введение. Несмотря на значительно увеличивающееся количество публикаций и патентов по теме “экзоскелет” [1], остаются актуальными проблемы их использования. Одной из причин недостаточной комфортабельности является наличие массивных абсолютно твердых звеньев, оказывающих существенное влияние на динамику человеко-машинной системы. В реальном опорно-двигательном аппарате человека расстояния между осями вращения в суставах изменяются [2–4], что должно учитываться при проектировании экзоскелетов. Помимо отсутствия изменения длины звена, сама масса звена экзоскелета, сопоставимая по порядку величины с массой человека, оказывает значительное влияние на движения человека в экзоскелете [5–9]. Поэтому требуется адаптация и обучение человека движениям в экзоскелете. Оценке пользы от применения современных моделей экзоскелетов, затрат энергии у человека и ее экономии от использования экзоскелетов посвящены работы [10–23]. В статье [24] представлен процесс создания структур для отображения необходимых исследований, которые помогут разработчикам экзоскелетов. В данной статье развивается идея применения в конструкции экзоскелетов звеньев переменной длины [1, 5–9]. Предлагается управление длиной участка переменной длины с использованием магнитно-реологической жидкости, путем изменения ее вязкости под действием прилагаемого внешнего магнитного поля. Научных публикаций с описанием применения магнитно-реологических сред в мехатронных антропоморфных устройствах не так много [25–30]. Имеется ряд работ, в которых описываются свойства магнитно-реологических жидкостей и их различные применения [31–45]. В данном списке работы размещены в хронологическом порядке и видно, что первые подходящие модели, которые впоследствии были использованы при описании магнитно-реологических жидкостей, созданы достаточно давно. Константы, необходимые для конструирования модели, рассматриваемой в данной работе, взяты из приведенного списка публикаций. На основе этих данных получена зависимость силы сопротивления магнитно-реологической жидкости от внешнего магнитного поля, необходимая для управления динамикой звена переменной длины с регулируемой жесткостью.

2. Постановка задачи. Основная задача численно-аналитических расчетов, требуемых для создания прототипа, решается в несколько этапов. Прежде всего, следует составить систему дифференциальных уравнений динамики модели экзоскелета, составленной из трех звеньев переменной длины с регулируемой жесткостью. Затем, решая обратную задачу динамики, необходимо найти управляющие моменты и силы, на основе которых определяется закон изменения во времени зависимости внешнего магнитного поля, управляющего свойствами магнитно-реологической жидкости.

3. Модель экзоскелета, состоящая из трех звеньев переменной длины с регулируемой жесткостью. Рассмотрим 3D-модель экзоскелета, состоящего из трех звеньев переменной длины с регулируемой жесткостью в одноопорной фазе движения. Пусть первое, нижнее звено A_0A_1 моделирует голень опорной ноги. Второе, среднее звено A_1A_2 – бедро опорной ноги. Третье, верхнее звено A_2A_3 – корпус экзоскелета. В точках механизма A_2 и A_3 имеются сосредоточенные массы m_p и m_H , приближенно моделирующие переносимую ногу и голову совместно с руками соответственно. Следует отметить, что если представление голени

и бедра опорной ноги экзоскелета тонкими звеньями, является достаточно адекватной аппроксимацией реальных звеньев опорно-двигательного аппарата человека, то моделирование корпуса тонким стержнем, а переносимой ноги, головы и рук точечными массами является весьма грубым приближением, позволяющим провести лишь качественный анализ динамических свойств предлагаемой конструкции экзоскелета. При составлении уравнений движения используем метод, основанный на применении локальных систем координат, предложенный в работе [46]. Введем неподвижную декартову систему координат $A_0x_0y_0z_0$ (рис. 1), с началом в точке A_0 , где закреплён шарнир.

В модели используются различные модели шарниров и их комбинации. Так, в шарнире A_0 имеется комбинация двух цилиндрических шарниров с взаимно

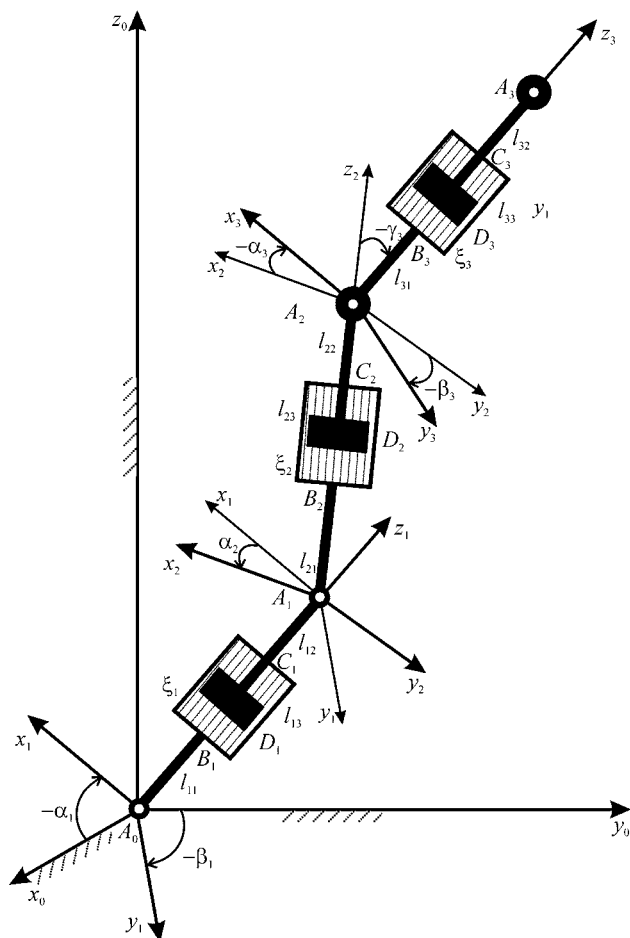


Рис. 1. Пространственная модель трех звеньев экзоскелета переменной длины с регулируемой жесткостью (показано состояние с приложенным внешним магнитным полем, когда магнитные частицы ориентированы вдоль силовых линий поля).

ортогональными осями вращения. Такая конструкция соответствует движениям в голеностопном суставе человека, в котором при ходьбе практически не наблюдается поворота голени вокруг своей продольной оси. Поэтому в модели голеностопного сустава не используется сферический шарнир. В точке A_1 находится цилиндрический шарнир, моделирующий коленный сустав человека. Тазобедренный сустав человека является сферическим шарниром, поэтому в точке A_2 расположен сферический шарнир, моделирующий все имеющиеся реальные степени подвижности. При составлении системы дифференциальных уравнений применим подвижные локальные системы координат $A_0x_1y_1z_1$, $A_1x_2y_2z_2$ и $A_2x_3y_3z_3$, жестко связанные с шарнирами A_0 , A_1 и A_2 , в которых реализуются повороты звеньев. Такой способ описания использует углы между звеньями, соответствующие режиму работы реальных приводов роботизированного экзоскелета, посредством которых изменяются относительные углы. Оси z_1 , z_2 и z_3 направим вдоль подвижных звеньев A_0A_1 , A_1A_2 и A_2A_3 . На (рис. 1) показаны углы поворотов, предусмотренные в модели.

Звенья одинаковой конструкции A_0A_1 , A_1A_2 и A_2A_3 состоят из абсолютно твердых штоков A_1D_1 , A_2D_2 и A_3D_3 с поршнями D_1 , D_2 и D_3 , находящимися внутри корпусов B_1C_1 , B_2C_2 и B_3C_3 . Корпуса являются тонкостенными цилиндрами с намотанными на них электромагнитными катушками. Цилиндры внутри заполнены магнитно-реологической жидкостью. Снизу к цилиндрам жестко прикреплены абсолютно твердые стержни A_0B_1 , A_1B_2 и A_2B_3 , на концах которых расположены шарниры. В шарнирах предполагается возможность создания необходимых управляющих моментов.

Каждое звено имеет по два весомих абсолютно жестких стержня: $A_0B_1 = l_{11}$, $D_1A_1 = l_{12}$, $A_1B_2 = l_{21}$, $D_2A_2 = l_{22}$, $A_2B_3 = l_{31}$, $D_3A_3 = l_{32}$, где первый индекс равен номеру звена, второй – номеру участка на звене. Длины цилиндров с магнитно-реологической жидкостью: $B_1C_1 = l_{13}$, $B_2C_2 = l_{23}$, $B_3C_3 = l_{33}$. Их диаметры будем считать пренебрежимо малыми в сравнении с длиной, т.е. допустим, что цилиндр с магнитно-реологической жидкостью моделируется стержнем. Массы отдельных элементов звеньев равны: m_{11} , m_{12} , m_{13} соответственно. Моменты инерции стержней относительно осей вращений соответственно равны I_{11} , I_{12} , I_{13} . В первом приближении допустим, что сами поршни D_1 , D_2 и D_3 имеют пренебрежимо малую массу и моменты инерции по сравнению со стержнями D_1A_1 , D_2A_2 и D_3A_3 . Вычисление тензора инерции цилиндра с поршнем, заполненного магнитно-реологической жидкостью, требует отдельного исследования, в данной работе ограничимся существенно приближенным моделированием в целом цилиндра стержнем. Длины звеньев изменяются вследствие относительного движения поршней со штоками D_1A_1 , D_2A_2 и D_3A_3 внутри цилиндров с магнитно-реологической жидкостью B_1C_1 , B_2C_2 и B_3C_3 вдоль направлений звеньев A_0A_1 , A_1A_2 и A_2A_3 . Магнитно-реологическая жидкость реализует силы сопротивления F_1 , F_2 и F_3 , действующие вдоль штоков с поршнями. В результате действия внешнего магнитного поля магнитные частицы частично ориентируются вдоль силовых линий магнитного поля, причем с увеличением напряженности магнитного поля, доля ориентированных частиц увеличивается, тем самым увеличивается сила сопротивления магнитно-реологической жидкости движению поршня. Следовательно, обеспечивается

управляемое изменение длины звена в соответствии с фазой ходьбы и нагрузкой от соседних звеньев.

Положения звеньев экзоскелета однозначно определяются углами $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$, $\beta_3(t)$, $\gamma_3(t)$ и переменными длинами участков звеньев между поршнем и дном цилиндра $B_1D_1 = \xi_1(t)$, $B_2D_2 = \xi_2(t)$ и $B_3D_3 = \xi_3(t)$ (рис. 1). Следовательно, модель имеет девять степеней свободы. Управляющие моменты, развиваемые в шарнирах A_0 , A_1 и A_2 с идеальными связями, обозначим $M_{1\alpha}$, $M_{1\beta}$, $M_{2\alpha}$, $M_{3\alpha}$, $M_{3\beta}$, $M_{3\gamma}$ и будем считать мгновенно развивающими требуемое усилие.

Кинетическая энергия рассматриваемого механизма вычисляется путем интегрирования по всем весомым участкам A_0B_1 , B_1C_1 , D_1A_1 , A_1B_2 , B_2C_2 , D_2A_2 , A_2B_3 , B_3C_3 , D_3A_3 .

$$T = \frac{1}{2} \left(m_p V_{A_2}^2 + m_H V_{A_3}^2 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_0^{l_{ij}} \rho_{ij} V_{ij}^2 d\zeta_{ij} \right). \quad (3.1)$$

Здесь: i – номер звена ($i = 1, 2, 3$); j – номер участка на звене, причем $j = 1$ соответствует нижним участкам A_0B_1 , A_1B_2 и A_2B_3 , $j = 2$ соответствует штокам с поршнями D_1A_1 , D_2A_2 и D_3A_3 , $j = 3$ соответствует цилиндрам B_1C_1 , B_2C_2 и B_3C_3 ; ζ_{ij} – координата бесконечно малой частицы j -того инерционного участка i -того звена, ρ_{ij} – плотность j -того участка i -того звена, при этом $m_{ij} = \rho_{ij} l_{ij}$, $I_{ij} = \rho_{ij} l_{ij}^3 / 3$, l_{ij} , m_{ij} , I_{ij} – длина, масса, момент инерции j -того участка i -того звена, m_p – масса переносимой ноги, расположенная в точке A_2 , $V_{A_2}^2$ – квадрат скорости точки A_2 , моделирующей тазобедренный сустав, m_H – масса головы и рук, расположенная в точке A_3 , $V_{A_3}^2$ – квадрат скорости точки A_3 , моделирующей голову человека, V_{ij}^2 – квадрат скорости бесконечно малой частицы j -того участка i -того звена.

Кинетическая энергия (3.1) предложенной модели громоздка, вследствие того, что звенья совершают сложное движение вокруг шарниров, поэтому приведем формулу кинетической энергии первого звена

$$T_1 = \frac{1}{2} \left[(I_{11} + I_{12} + I_{13} + (l_{11}^2 + l_{11}l_{12} + 2l_{11}\xi_1 + l_{12}\xi_1 + \xi_1^2)m_{12} + (l_{11}^2 + l_{11}l_{13})m_{13}) \times \right. \\ \left. \times (\dot{\alpha}_1^2 \cos^2 \beta_1 + \dot{\beta}_1^2) + m_{12} \dot{\xi}_1^2 \right].$$

С использованием уравнений Лагранжа второго рода была составлена система дифференциальных уравнений движения для предложенной на (рис. 1) модели опорной ноги экзоскелета в виде трех звеньев переменной длины с регулируемой жесткостью. Система дифференциальных уравнений движения является слишком громоздкой и в тексте статьи не приводится.

Рассмотрим поведение магнитно-реологической жидкости. Вследствие приложения сил со стороны соседних стержней, действия реакции со стороны неподвижной опоры и силы тяжести происходит относительное движение поршней D_1 , D_2 и D_3 в цилиндрах B_1C_1 , B_2C_2 и B_3C_3 , содержащих магнитно-реологическую жидкость, которая, вследствие изменения вязкости оказывает различное сопротивление движению поршня. В отсутствие внешнего магнитного поля поведение частиц магнитно-реологической жидкости хаотичное. При этом

магнитно-реологическая жидкость не оказывает значительного сопротивления движению поршня. На (рис. 1) показаны ориентированные магнитные частицы в случае приложения внешнего магнитного поля. Изменением вязкости магнитно-реологической жидкости управляет внешнее магнитное поле, реализуемое при помощи намотанных на цилиндр катушек. При приложении внешнего магнитного поля жидкость оказывает сопротивление движению поршня, которое тем больше, чем больше ориентированных частиц в ней содержится. Становится возможным регулировать жесткость звеньев A_0A_1 , A_1A_2 и A_2A_3 при изменении их длины. Управление изменением вязкости магнитно-реологической жидкости реализуется с использованием внешнего магнитного поля, что приводит к изменению силы сопротивления движению поршня внутри цилиндра. Зависимость силы сопротивления, реализуемой магнитно-реологической жидкостью от напряженности магнитного поля, имеет следующий вид [35,37]:

$$F = \pi r^2 \left\{ \left[1 + \phi_L \left(\alpha_n + \frac{(\zeta_n + \beta_n \lambda_n + \beta_n \cos 2\theta)}{2} + (\chi_n - 2\beta_n \lambda_n) \frac{\sin^2 2\theta}{4} \right) \right] \eta_f \dot{\gamma} + \frac{9\phi_L \mu_0 H^2 (n-1)(\chi_f + 1) \sin 2\theta}{16n_c} \right\}. \quad (3.2)$$

Здесь: ϕ_L — объемная доля микронных частиц, равная $\phi_L = 0.0127$, n_c — максимальное число частиц в цепочке $n_c = 50$, $\alpha_n, \dots, \lambda_n$ — кинетические коэффициенты, v_L — объем микронной частицы, $\dot{\gamma}$ — скорость сдвига, η_f — вязкость магнитно-реологической жидкости $\eta_f = 1.36$ Па с, θ — угол между вектором, направленным вдоль прямой, соединяющей центры двух микронных частиц и вектором напряженности внешнего магнитного поля $\theta = 0.37$ рад [35, 37].

Далее получим зависимости управляющих моментов, продольных сил, напряженностей внешних магнитных полей, управляющих движением предложенной модели трех звеньев опорной ноги экзоскелета с переменной длиной и регулируемой жесткостью.

4. Определение управляющих воздействий в модели опорной ноги экзоскелета.

Для определения управляющего момента и продольной силы управляющих движением модели опорной ноги экзоскелета, состоящей из звеньев переменной длины с регулируемой жесткостью, зададим углы поворота и изменение длин звеньев непрерывными дважды дифференцируемыми функциями, синтезирующими близкое к антропоморфному движение модели.

$$\alpha_1(t) = a_1 \pi + b_1 c_1 \sin[d_1 - \pi(1 - \cos \omega t)/2] \quad (4.1)$$

$$\alpha_2(t) = a_2 \pi + b_2 c_2 \sin[d_2 - \pi(1 - \cos \omega t)/2] \quad (4.2)$$

$$\alpha_3(t) = a_3 \pi + b_3 c_3 \sin[d_3 - \pi(1 - \cos \omega t)/2] \quad (4.3)$$

$$\beta_1(t) = a_4 \pi + b_4 c_4 \sin[d_4 - \pi(1 - \cos \omega t)/2] \quad (4.4)$$

$$\beta_3(t) = a_5\pi + b_5c_5 \sin[d_5 - \pi(1 - \cos\omega t)/2] \quad (4.5)$$

$$\gamma_3(t) = a_6\pi + b_6c_6 \sin[d_6 - \pi(1 - \cos\omega t)/2] \quad (4.6)$$

$$\xi_1(t) = e_1l_1 - l_{11} - l_{12} + l_1l_\xi \cos 2\omega t \quad (4.7)$$

$$\xi_2(t) = e_2l_2 - l_{21} - l_{22} + l_2l_\xi \cos 2\omega t \quad (4.8)$$

$$\xi_3(t) = e_3l_3 - l_{31} - l_{32} + l_3l_\xi \cos 2\omega t. \quad (4.9)$$

Параметры механизма и ходьбы приняты равными: $t_k = 0.36$ с – время одноопорной фазы движения, $\omega = \pi/t_k \approx 8.73$ рад/с – угловая скорость, параметры ходьбы $a_1 = a_4 = a_5 = a_6 = 1$, $a_2 = 0.9$, $a_3 = 0.5$, $b_1 = b_6 = 0.1$, $b_2 = 0.12$, $b_3 = 0.2$, $b_4 = 1.0$, $b_5 = 0.5$, $c_1 = c_3 = c_4 = 0.25$, $c_2 = c_5 = c_6 = 0.279$, $d_i = \pi/2$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) выби-
рались из условия синтеза движения звеньев экзоскелета, близкого к антропоморфному; $e_1 = e_2 = 1.3$, $e_3 = 1.2$, $l_\xi = 0.05$ – коэффициенты изменения длины звена, $l_1 = 0.385$ м, $l_2 = 0.477$ м, $l_3 = 0.771$ м – длины звеньев: голени, бедра, корпуса, соответствующие реальным данным человека [47]. Длины на звене распределялись следующим образом: $l_{11} = l_{12} = l_1/2$, $l_{21} = l_{22} = l_2/2$, $l_{31} = l_{32} = l_3/2$.

Параметры механизма, используемые в уравнениях движения следующие [47]: массы звеньев $m_1 = 2.91$ кг, $m_2 = 8.93$ кг, $m_3 = 23.86$ кг распределялись поровну между двумя весомыми абсолютно твердыми участками звеньев, т.е. $m_{i1} = m_{i2} = m_i/2$ ($i = 1, 2, 3$). Массы цилиндров с магнитно-реологической жидкостью считаем одинаковыми и равными: $m_{i3} = 1.6$ кг ($i = 1, 2, 3$). Точечную массу, расположенную в шарнире A_2 и моделирующую переносимую ногу с учетом стопы примем равной $m_p = 18.62$ кг, а расположенную в точке A_3 массу головы и рук $m_H = 10.62$ кг. Моменты инерции весомых участков звеньев относительно осей, проходящих через их нижние точки равны: $I_{11} = 0.018$ кг м², $I_{21} = 0.085$ кг м², $I_{31} = 0.591$ кг м², $I_{i1} = I_{i2}$ ($i = 1, 2, 3$). Длины цилиндров с магнитно-реологической жидкостью для расчета момента инерции принимались равными $l_{i3} = 0.15$ м, а моменты инерции $I_{i3} = 0.012$ кг м² ($i = 1, 2, 3$). Ускорение свободного падения $g = 9.81$ м/с².

Графики зависимостей первых производных от времени, задаваемых формулами (4.1)–(4.9) представлены на рис. 3.

Зависимости вторых производных от времени, задаваемые формулами (4.1)–(4.9) представлены на рис. 4.

В результате алгебраического решения относительно управляющих моментов и продольных сил системы уравнений движения для рассматриваемой модели (рис. 1) при задании движения выражениями (4.1)–(4.9), найдены зависимости управляющих моментов от времени, представленные на рис. 5. Момент $M_{3\gamma} = 0$ во все время движения, т.к. при моделировании тонким стержнем и отсутствии звена сверху не возникает усилий при вращении стержня вокруг продольной оси.

Зависимости управляющих продольных сил от времени представлены на рис. 6.

Анализируя полученные графики, следует отметить, что, несмотря на задание движения периодическими функциями синусоидального типа,

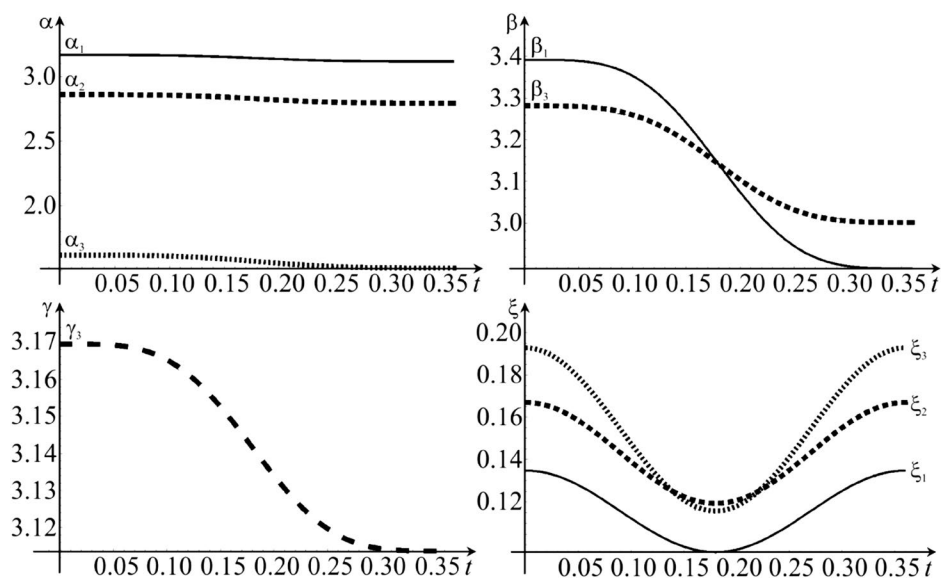


Рис. 2. Зависимости задаваемых формулами (4.1)–(4.9) обобщенных координат от времени.

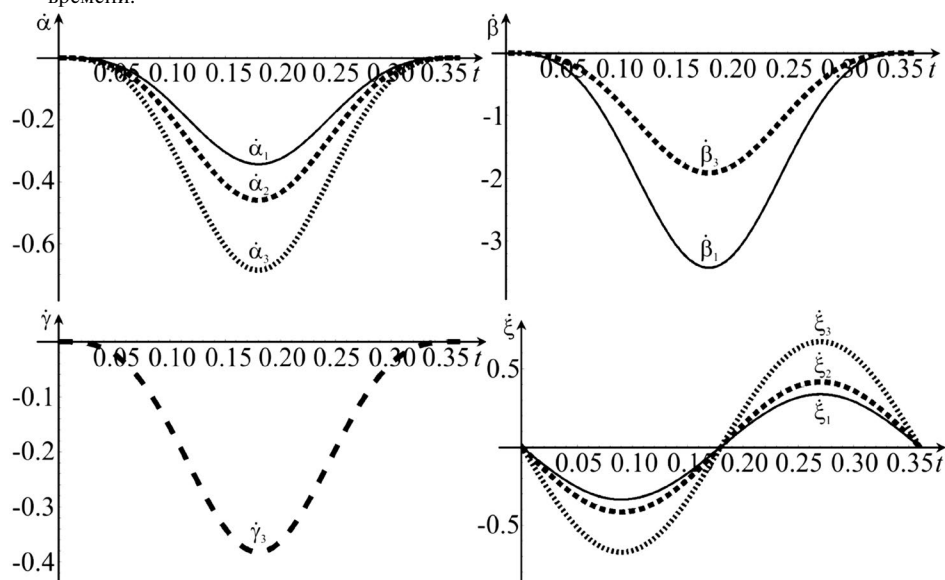


Рис. 3. Зависимости обобщенных скоростей от времени.

управляющие моменты и силы представляют собой более сложные зависимости с несколькими максимумами и минимумами, что связано со сложностью и нелинейностью модели.

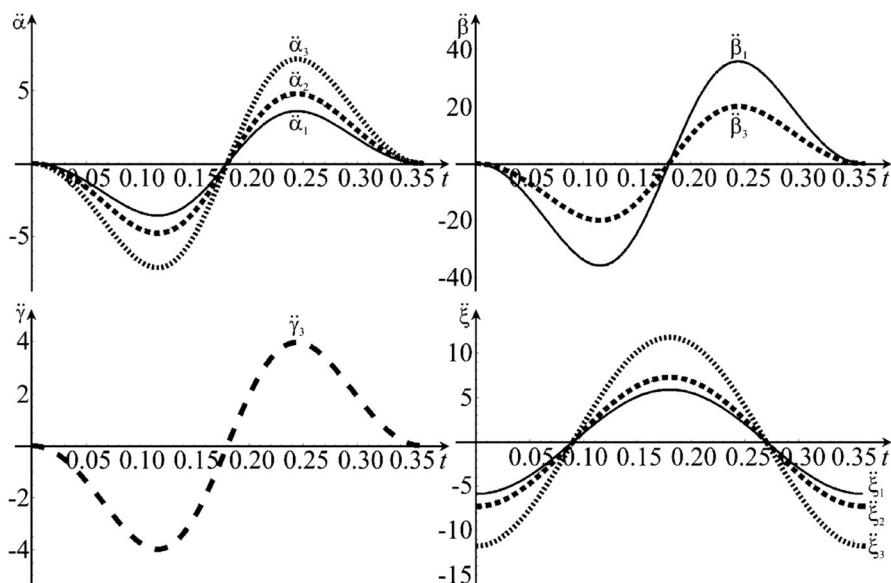


Рис. 4. Зависимости обобщенных ускорений от времени.

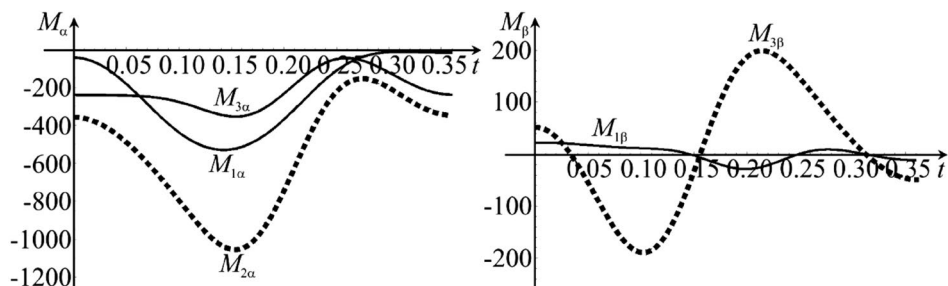


Рис. 5. Зависимости управляющих моментов в шарнирах экзоскелета от времени.

Используя (3.2) и аппроксимируя ступенчатыми функциями, представленную на (рис. 6) силу, находим взятую по модулю напряженность внешнего магнитного поля которую необходимо создать для управления жесткостью звеньев для их функционирования в экзоскелете (рис. 7).

Полученные значения напряженности прилагаемого внешнего магнитного поля можно развивать при помощи катушек, намотанных на цилиндр с магнитно-реологической жидкостью.

5. Оценка энергетических затрат при движении модели опорной ноги экзоскелета. Определяем энергетические затраты в шарнирных приводах механизма как работу управляющих моментов в предположении об отсутствии сил сопротивления и рекуперации энергии при торможении звена.

$$A = \sum_{i=1}^k \int_0^T |M_i \dot{\phi}_i| dt \quad (5.1)$$

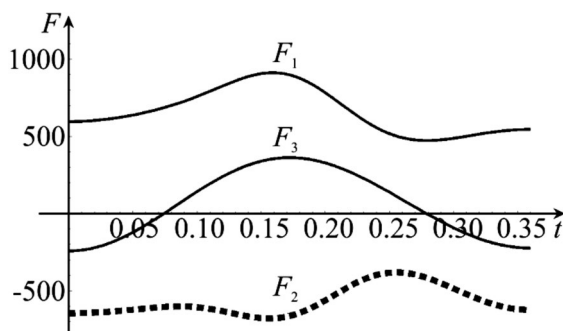


Рис. 6. Зависимости управляющих продольных сил в звеньях экзоскелета от времени.

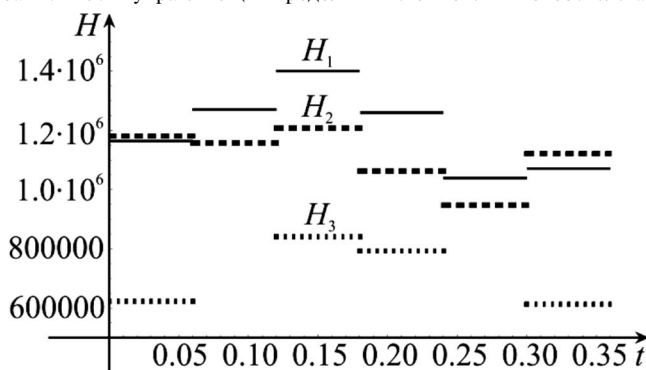


Рис. 7. Зависимость управляющей жесткостью звена напряженности внешнего магнитного поля.

$$A = \int_0^T \sum_{i=1}^n |Q_i \dot{q}_i| dt. \quad (5.2)$$

Здесь T — время движения ($T = t_k$), M_i — моменты, развиваемые приводами аппарата, k — количество независимых приводов в шарнирах ($k = 6$), Q_i , $\dot{q}_i$ — обобщенные силы и обобщенные скорости, n — количество участков переменной длины ($n = 3$). Знак модуля используется вследствие отсутствия механизма рекуперации энергии. Так как затраты энергии подсчитываются как интегралы, т.е. суммы бесконечно малых работ, то, если бы не было знака модуля, отрицательные работы при торможении звеньев вычитались бы так, если бы приводы работали в режиме генераторов энергии, что не предусмотрено конструкцией данной модели экзоскелета.

В результате применения формул (5.1)–(5.2) к расчету энергетических затрат приводов, осуществляющих повороты звеньев при найденных управляющих моментах и силах, получаем: $A = 260.1$ Дж, являющиеся суммарными энергозатратами механизма.

6. Анимационная визуализация движения модели опорной ноги экзоскелета.

Для наглядного представления о движении модели полезно строить анимацию движения механизма. Для предложенной модели приведем несколько кадров

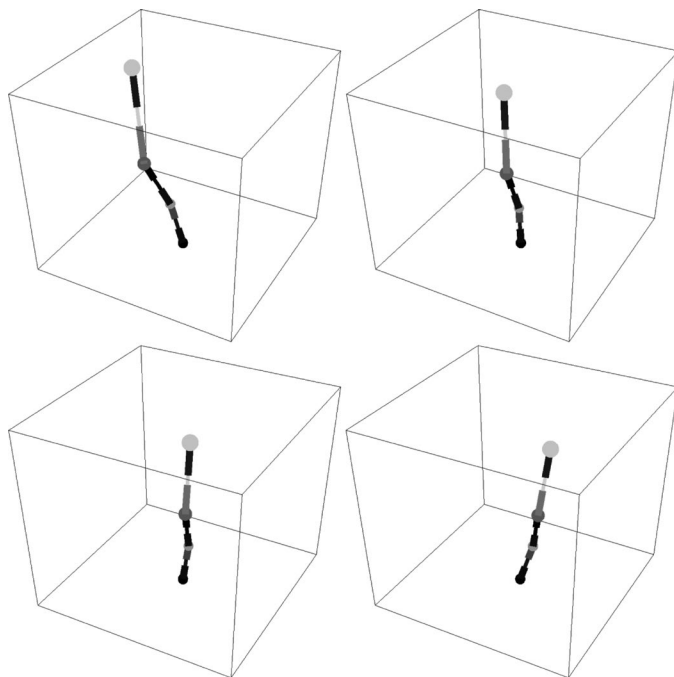


Рис. 8. Кадры анимации движения механизма.

(рис. 8) из анимационного ролика, в котором механизм движется в соответствии с тем, как заданы изменения углов и длин звеньев формулами (4.1)–(4.9).

Представленные кадры анимации демонстрируют приблизительно антропоморфное движение опорной ноги экзоскелета от момента постановки ноги на опору до ее отрыва от поверхности.

Заключение. Проведено моделирование движения опорной ноги экзоскелета в виде трех звеньев с использованием аналитически задаваемых углов и изменения длин звеньев дифференцируемыми функциями, задающими антропоморфное периодическое движение. Определены управляющие моменты и силы, необходимые для реализации заданного движения модели. Знание продольной силы, действующей вдоль звена, позволяет вычислить зависимость напряженности магнитного поля от времени, необходимой для управляемого изменения жесткости звеньев экзоскелета при заданном движении. На основании проведенного исследования установлено, что возможно осуществлять управление жесткостью звеньев переменной длины экзоскелета с помощью внешнего магнитного поля. Модель может найти применение при создании комфортабельных экзоскелетов с регулируемой жесткостью звеньев для широкого круга пользователей.

Работа выполнена при финансовой поддержке за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00491, <https://rscf.ru/project/22-21-00491/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисов А.В., Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г.* О математическом моделировании динамики многозвеньных систем и экзоскелетов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2021. № 5. С. 162–176. <https://doi.org/10.31857/S0002338821040028>
2. *Borisov A.V., Chigarev A.V.* The causes of a change in the length of a person's link and their consideration when creating an exoskeleton // Biomed. J. Sci. Tech. Res. 2020. V. 25. P. 18769–18771. <https://doi.org/10.26717/BJSTR.2020.25.004137>
3. *Piña-Martínez E., Rodríguez-Leal E.* Inverse modeling of human knee joint based on geometry and vision systems for exoskeleton applications // Math. Probl. Eng. 2015. V. 2015. P. 145734. <http://dx.doi.org/10.1155/2015/145734>
4. *Nordin M., Frankel H.* Basic biomechanics of the musculoskeletal system. Lippincott–London: Williams & Wilkins, 2001. 467 p.
5. *Borisov A.V., Chigarev A.V.* Mathematical models of exoskeleton. Dynamics, strength, control. Springer, 2022. 232 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-97733-7>
6. *Борисов А.В., Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г., Филиппенков К.Д.* Роботизированная управляемая электромеханическая модель двух звеньев переменной длины аэрокосмического назначения // Известия ВУЗов. Авиационная техника. 2022. № 1. С. 60–69.
7. *Борисов А.В., Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г.* Управление динамикой составной конструкции со звеньями переменной длины // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 2. С. 72–87. <https://doi.org/10.31857/S0572329921020057>
8. *Blinov A., Borisov A., Konchina L., Kulikova M., Maslova K.* Simulation of the movement of the supporting leg of an exoskeleton with two links of variable length in 3D // J. Appl. Informatics. 2021. V. 16. № 4. P. 122–134. <https://doi.org/10.37791/2687-0649-2021-16-4-122-134>
9. *Blinov A., Borisov A., Filippenkov K., Konchina L., Maslova K.* Modeling the dynamics of an exoskeleton link of variable length using the Lagrange – Maxwell system of differential equations of motion // J. Appl. Informatics. 2022. V. 17. № 3. P. 117–130. <https://doi.org/10.37791/2687-0649-2022-17-3-117-130>
10. *Franks P.W., Bryan G.M., Martin R.M., Reyes R., Lakmazaheri A.C., Collins S.H.* Comparing optimized exoskeleton assistance of the hip, knee, and ankle in single and multi-joint configurations // Wearable Technologies. 2021. V. 2. e16. <https://doi.org/10.1017/wtc.2021.14>
11. *Das Gupta S., Bobbert M.F. and Kistemaker D.A.* The metabolic cost of walking in healthy young and older adults – A systematic review and meta analysis // Sci. Rep. 2019. V. 9. P. 9956. <https://doi.org/10.1038/s41598-019-45602-4>
12. *Sanchez N., Simha S.N., Donelan J.M. and Finley J.M.* Using asymmetry to your advantage: Learning to acquire and accept external assistance during prolonged split-belt walking // J. Neurophysiol. 2020. V. 125. № 2. P. 344–357. <https://doi.org/10.1152/jn.00416.2020>
13. *Young A.J. and Ferris D.P.* State of the art and future directions for lower limb robotic exoskeletons // IEEE Trans. Neural Syst. Rehabil. Eng. 2017. V. 25. № 2. P. 171–182. <https://doi.org/10.1109/TNSRE.2016.2521160>
14. *Sawicki G.S., Beck O.N., Kang I. and Young A.J.* The exoskeleton expansion: Improving walking and running economy // J. Neuroeng. Rehabilitation. 2020. V. 17. P. 25. <https://doi.org/10.1186/s12984-020-00663-9>
15. *Ding Y., Kim M., Kuindersma S., Walsh C.J.* Human-in-the-loop optimization of hip assistance with a soft exosuit during walking // Sci. Robot. 2018. V. 3. № 15. P.5438. <https://doi.org/10.1126/scirobotics.aar5438>
16. *Lee S., Kim J., Baker L., Long A., Karavas N., Menard N., Galiana I., Walsh C.J.* Autonomous multi-joint soft exosuit with augmentation-power-based control parameter tuning reduces energy cost of loaded walking // J. Neuroeng. Rehabilitation. 2018. V. 15. P. 66. <https://doi.org/10.1186/s12984-018-0410-y>
17. *Malcolm P., Galle S., Derave Wand De Clercq D.* Bi-articular knee-ankle-foot exoskeleton produces higher metabolic cost reduction than weight-matched mono-articular exoskeleton // Front. Neurosci. 2018. V. 12. P. 69. <https://doi.org/10.3389/fnins.2018.00069>

18. *Lim B., Lee J., Jang J., Kim K., Park Y.J., Seo K., Shim Y.* Delayed output feedback control for gait assistance with a robotic hip exoskeleton // *IEEE Trans. Robot.* 2019. V. 35. № 4. P. 1055–1062. <https://doi.org/10.1109/TRO.2019.2913318>
19. *MacLean M.K. and Ferris D.P.* Energetics of walking with a robotic knee exoskeleton // *J. Appl. Biomech.* 2019. V. 35. № 5. P. 320–326. <https://doi.org/10.1123/jab.2018-0384>
20. *Cao W., Chen C., Hu H., Fang K., Wu X.* Effect of hip assistance modes on metabolic cost of walking with a soft exoskeleton // *IEEE Trans. Autom. Sci. Eng.* 2020. V. 18. № 2. P. 426–436. <https://doi.org/10.1109/TASE.2020.3027748>
21. *Medrano R.L., Thomas G.C., Rouse E.J.* Methods for measuring the just noticeable difference for variable stimuli: Implications for perception of metabolic rate with exoskeleton assistance // 8th IEEE RAS/EMBS International Conference for Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob). NY.: IEEE. 2020. P. 483–490. <https://doi.org/10.1109/BioRob49111.2020.9224374>
22. *Franks P.W., Bianco N.A., Bryan G.M., Hicks J.L., Delp S.L., Collins S.H.* Testing simulated assistance strategies on a hipknee-ankle exoskeleton: A case study // 8th IEEE RAS/EMBS International Conference for Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob). NY.: IEEE. 2020. P. 700–707. <https://doi.org/10.1109/BioRob49111.2020.9224345>
23. *Bryan G.M., Franks P.W., Klein S.C., Peuchen R.J., Collins S.H.* A hip–knee–ankle exoskeleton emulator for studying gait assistance // *Int. J. Robot. Res.* 2020. V. 40. № 4–5. P. 722–746. <https://doi.org/10.1177/0278364920961452>
24. *Bengler K., Harbauer C.M., Fleischer M.* Exoskeletons: A challenge for development // *Wearable Tech.* 2023. V. 4. e1. <https://doi.org/10.1017/wtc.2022.28>
25. *Carlson J.* Magnetorheological Fluid Actuators // *Adaptronics and Smart Structures: Basics, Materials, Design, and Applications*. Saarbrücken: Springer, 1999. P. 180–195.
26. *Laflamme S.* Online learning algorithm for structural control using magnetorheological actuators. Massachusetts institute of technology, 2007. 88 p.
27. *Ahmadkhanlou F., Zite J.L., Washington G.N.* A magnetorheological fluid-based controllable active knee brace // *Proc. SPIE.* 2007. V. 6527. P. 652700. <https://doi.org/10.1117/12.715902>
28. *Chen J., Liao W.* Design, testing and control of a magnetorheological actuator for assistive knee braces // *Smart Mater. Struct.* 2010. V. 19. № 2. P. 035029. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/19/3/035029>
29. *Bougrinat Y.* Design and development of a lightweight ankle exoskeleton for human walking augmentation // *Mechatronics*. 2019. V. 64. P. 102297. <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2019.102297>
30. *Blinov A., Borisov A., Konchina L., Novikova M.* Applying the models of magneto- rheological substances in the study of exoskeleton variable-length link with adjustable stiffness // *J. Appl. Inform.* 2022. V. 17. № 2. P. 133–142. <https://doi.org/10.37791/2687-0649-2022-17-2-133-142>
31. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М. Наука, 1970. 492 с.
32. *Покровский В.Н.* Статистическая механика разбавленных суспензий. М.: Наука, 1978. 136 с.
33. *Лактина Е.В., Пшеничников А.Ф.* Дисперсия магнитной восприимчивости и микроструктура магнитной жидкости // *Коллоидный журнал*. 2006. Т. 68. № 3. С. 327–337.
34. *Коновалова Н.И., Мартынов С.И.* Динамика магнитных частиц в вязкой жидкости // *Изв. вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки*. 2009. № 3. С. 3–11.
35. *Чириков Д.Н.* Вязкоупругие свойства магнитных жидкостей. Дисс. канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 2012. 102 с.
36. *Jason P. Rich, Patrick S. Doyle, Gareth H. McKinley* Magnetorheology in an aging, yield stress matrix fluid // *Rheol. Acta*. 2012. V. 51. P. 579–593. <https://doi.org/10.1007/s00397-012-0632-z>
37. *Чириков Д.Н.* Теоретическое исследование реологических свойств бидисперсных магнитных жидкостей: заключительный отчет о НИР. Екатеринбург, 2013. 17 с.
38. *Новопашин С.А., Серебрякова М.А., Хмель С.Я.* Методы синтеза магнитных жидкостей // *Теплофизика и аэромеханика*. 2015. Т. 22. № 4. С. 411–427.
39. *Lebedev A.V.* Viscosity of magnetic fluids must be modified in calculations of dynamic susceptibility // *J. Magn. Magn. Mater.* 2017. V. 431. P. 30–32. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2016.09.110>

40. Магнитореологические жидкости: технологии создания и применение: монография / Е.С. Беляев и др. под ред. А.С. Плехова. Ниж. Новгород.: Нижегородский гос. техн. ун-т им. Р.Е. Алексеева, 2017. 94 с.
41. Alekhina Y.A., Makarova L.A., Rusakova T.S., Semisalova A.S., Perov N.S. Properties of magnetorheological elastomers in crossed AC and DC magnetic fields // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. 2017 Т. 10. № 1. С. 45–50.
<https://doi.org/10.17516/1997-1397-2017-10-1-45-50>
42. Пучков П.В. О применении магнитных жидкостей в качестве смазочного материала в узлах трения машин и механизмов // Технические науки. 2018. Т. 1. № 78. С. 95–99.
43. Макарова Л.А. Исследование магнитных и электрических свойств композитных реологических материалов на основе ферромагнитных и сегнетоэлектрических наполнителей. Дисс. канд. физ.-мат. наук, МГУ. 2018. 182 с.
44. Юсупбеков Х.А., Собиров М.М., Юлдашев А.Р. Активные подвески автомобиля с амортизаторами переменной жесткости // Наука, техника и образование. 2020. № 2(66). С. 18–27.
45. Найдерт К.В., Целищев В.А. Прикладные свойства магнитореологических жидкостей. Уфа.: УГАТУ, 2021. 118 с.
46. Черноусько Ф.Л., Афанасьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
47. Борисов А.В. Моделирование опорно-двигательного аппарата человека и применение полученных результатов для разработки модели антропоморфного робота. М.: Спутник +, 2009. 212 с.

EXOSKELETON DYNAMICS SIMULATION WITH THE SYSTEM OF THREE VARIABLE-LENGTH LINKS OF ADJUSTABLE STIFFNESS

A. O. Blinov^{a,*}, A. V. Borisov^{a,**}, R. G. Mukharlyamov^{b,***},
and M. A. Novikova^{a,****}

^a Smolensk Branch, Moscow Power Engineering Institute, Smolensk, 214013 Russia

^b People's Friendship University of Russia (RUDN), Moscow, 117198 Russia

*e-mail: alex-blinov67@yandex.ru

**e-mail: borisowandrej@yandex.ru

***e-mail: robgar@mail.ru

****e-mail: mar.novikova@ro.ru

Received 21.02.2023

Revised 04.05.2023

Accepted 06.05.2023

Abstract – The article proposes a spatial model of an exoskeleton for the human musculoskeletal system, represented by three movable links of variable length and two-point masses. The stiffness of the links is controlled by changing the voltage supplied to the magnetic rheological fluid, which fills sections of variable length. The model can be used to develop comfortable exoskeletons, the kinematic characteristics of which are close to the kinematic characteristics of the human musculoskeletal system. The model dynamics equations are constructed using local coordinate systems.

The required laws of change of generalized coordinates are specified by the equations of program connections that determine the dependence of differentiable periodic functions on time. Control moments and longitudinal forces are determined

by methods of solving inverse dynamics problems and are realized by changing the magnetic field strengths, which affect the change in the stiffness of the magnetic-rheological fluid. The magnetic field strengths that control the stiffness of the link are implemented by step functions. An animation of the movement of the mechanism has been synthesized, showing the adequacy of the proposed modeling procedure. The connections of the links are modeled by joints and motors that implement the necessary rotational motion. The dynamics of the model is controlled by changing the lengths of the links and the angles between the links.

Keywords: exoskeleton, variable-length link, stiffness, magnetic-rheological fluid, system, differential equations, joint, control, dynamics, numerical solution, animation

REFERENCES

1. A. V. Borisov, I. E. Kaspirovich, and R. G. Mukharlyamov, "On mathematical modeling of the dynamics of multilink systems and exoskeletons," *J. Comput. Syst. Sci. Int.* **60**, 827–841 (2021). <https://doi.org/10.1134/S106423072104002X>
2. A. V. Borisov and A. V. Chigarev, "The causes of a change in the length of a person's link and their consideration when creating an exoskeleton," *Biomed. J. Sci. Tech. Res.* **25**, 18769–18771 (2020). <https://doi.org/10.26717/BJSTR.2020.25.004137>
3. E. Piña-Martínez and E. Rodríguez-Leal, "Inverse modeling of human knee joint based on geometry and vision systems for exoskeleton applications," *Math. Probl. Eng.* **2015**, 145734 (2015). <http://dx.doi.org/10.1155/2015/145734>
4. M. Nordin and H. Frankel, *Basic Biomechanics of the Musculoskeletal System* (Williams & Wilkins, Lippicott –London, 2001).
5. A. V. Borisov and A. V. Chigarev, *Mathematical Models of Exoskeleton. Dynamics, Strength, Control* (Springer, 2022). <https://doi.org/10.1007/978-3-030-97733-7>
6. A. V. Borisov, I. E. Kaspirovich, R. G. Mukharlyamov, and K. D. Filippenkov, "Robotic controlled electromechanical model of two links of variable length for aerospace purposes," *Izv. VUZov. Aviats. Tekhn.*, No. 1, 60–69 (2022).
7. A. V. Borisov, I. E. Kaspirovich, and R. G. Mukharlyamov, "Dynamic control of compound structure with links of variable length," *Mech. Solids* **56**, 197–210 (2021). <https://doi.org/10.3103/S0025654421020059>
8. A. Blinov, A. Borisov, L. Konchina, et al., "Simulation of the movement of the supporting leg of an exoskeleton with two links of variable length in 3D," *J. Appl. Inform.* **16** (4), 122–134 (2021). <https://doi.org/10.37791/2687-0649-2021-16-4-122-134>
9. A. Blinov, A. Borisov, K. Filippenkov, et al., "Modeling the dynamics of an exoskeleton link of variable length using the Lagrange – Maxwell system of differential equations of motion," *J. Appl. Inform.* **17** (3), 117–130 (2022). <https://doi.org/10.37791/2687-0649-2022-17-3-117-130>
10. P. W. Franks, G. M. Bryan, R. M. Martin, et al., "Comparing optimized exoskeleton assistance of the hip, knee, and ankle in single and multi-joint configurations," *Wearable Technol.* **2**, e16 (2021). <https://doi.org/10.1017/wtc.2021.14>
11. S. Das Gupta, M. F. Bobbert, and D. A. Kistemaker, "The metabolic cost of walking in healthy young and older adults – A systematic review and meta analysis," *Sci. Rep.* **9**, 9956 (2019). <https://doi.org/10.1038/s41598-019-45602-4>
12. N. Sanchez, S. N. Simha, J. M. Donelan, and J. M. Finley, "Using asymmetry to your advantage: Learning to acquire and accept external assistance during prolonged split-belt walking," *J. Neurophysiol.* **125** (2), 344–357 (2020). <https://doi.org/10.1152/jn.00416.2020>

13. A. J. Young and D. P. Ferris, "State of the art and future directions for lower limb robotic exoskeletons," *IEEE Trans. Neural Syst. Rehabil. Eng.* **25** (2), 171–182 (2017). <https://doi.org/10.1109/TNSRE.2016.2521160>
14. G. S. Sawicki, O. N. Beck, I. Kang, and A. J. Young, "The exoskeleton expansion: Improving walking and running economy," *J. Neuroeng. Rehabil.* **17**, 25 (2020). <https://doi.org/10.1186/s12984-020-00663-9>
15. Y. Ding, M. Kim, S. Kuindersma, and C. J. Walsh, "Human-in-the-loop optimization of hip assistance with a soft exosuit during walking," *Sci. Robot.* **3** (15), eaar5438 (2018). <https://doi.org/10.1126/scirobotics.aaar5438>
16. S. Lee, J. Kim, L. Baker, et al., "Autonomous multi-joint soft exosuit with augmentation-power-based control parameter tuning reduces energy cost of loaded walking," *J. Neuroeng. Rehabil.* **15**, 66 (2018). <https://doi.org/10.1186/s12984-018-0410-y>
17. P. Malcolm, S. Galle, W. Derave, and D. De Clercq, "Bi-articular knee-ankle-foot exoskeleton produces higher metabolic cost reduction than weight-matched mono-articular exoskeleton," *Front. Neurosci.* **12**, 69 (2018). <https://doi.org/10.3389/fnins.2018.00069>
18. B. Lim, J. Lee, J. Jang, et al., "Delayed output feedback control for gait assistance with a robotic hip exoskeleton," *IEEE Trans. Robot.* **35** (4), 1055–1062 (2019). <https://doi.org/10.1109/TRO.2019.2913318>
19. M. K. MacLean and D. P. Ferris, "Energetics of walking with a robotic knee exoskeleton," *J. Appl. Biomech.* **35** (5), 320–326 (2019). <https://doi.org/10.1123/jab.2018-0384>
20. W. Cao, C. Chen, H. Hu, et al., "Effect of hip assistance modes on metabolic cost of walking with a soft exoskeleton," *IEEE Trans. Autom. Sci. Eng.* **18** (2), 426–436 (2020). <https://doi.org/10.1109/TASE.2020.3027748>
21. R. L. Medrano, G. C. Thomas, and E. J. Rouse, "Methods for measuring the just noticeable difference for variable stimuli: Implications for perception of metabolic rate with exoskeleton assistance," in *Proc. of 8th IEEE RAS/EMBS Int. Conf. for Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob)* (IEEE, New York, 2020), pp. 483–490. <https://doi.org/10.1109/BioRob49111.2020.9224374>
22. P. W. Franks, N. A. Bianco, G. M. Bryan, et al., "Testing simulated assistance strategies on a hipknee-ankle exoskeleton: A case study," in *Proc. of 8th IEEE RAS/EMBS Int. Conf. for Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob)* (IEEE, New York, 2020), pp. 700–707. <https://doi.org/10.1109/BioRob49111.2020.9224345>
23. G. M. Bryan, P. W. Franks, S. C. Klein, et al., "A hip–knee–ankle exoskeleton emulator for studying gait assistance," *Int. J. Robot. Res.* **40** (4-5), 722–746 (2020). <https://doi.org/10.1177/0278364920961452>
24. K. Bengler, C. M. Harbauer, and M. Fleischer, "Exoskeletons: A challenge for development," *Wearable Tech.* **4**, e1 (2023). <https://doi.org/10.1017/wtc.2022.28>
25. J. Carlson, "Magnetorheological Fluid Actuators," in *Adaptronics and Smart Structures: Basics, Materials, Design, and Applications* (Springer, Saarbrücken, 1999), pp. 180–195.
26. S. Laflamme, *Online Learning Algorithm for Structural Control Using Magnetorheological Actuators* (MIT, Cambridge, 2007).
27. F. Ahmadvkhanlou, J. L. Zite, and G. N. Washington, "A magnetorheological fluid-based controllable active knee brace," *Proc. SPIE* **6527**, 652700 (2007). <https://doi.org/10.1117/12.715902>
28. J. Chen and W. Liao, "Design, testing and control of a magnetorheological actuator for assistive knee braces," *Smart Mater. Struct.* **19** (2), 035029 (2010). <https://doi.org/10.1088/0964-1726/19/3/035029>
29. Y. Bougrinat, "Design and development of a lightweight ankle exoskeleton for human walking augmentation," *Mechatron.* **64**, 102297 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2019.102297>
30. A. Blinov, A. Borisov, L. Konchina, and M. Novikova, "Applying the models of magnetorheological substances in the study of exoskeleton variable-length link with adjustable stiffness," *J. Appl. Inform.* **17** (2), 133–142 (2022). <https://doi.org/10.37791/2687-0649-2022-17-2-133-142>
31. L. I. Sedov, *Continuum Mechanics*, Vol. 1 (Nauka, Moscow, 1970) [in Russian].
32. V. N. Pokrovskii, *Statistical Mechanics of Dilute Suspensions* (Nauka, Moscow 1978) [in Russian].

33. E. V. Lakhtina and A. F. Pshenichnikov, "Dispersion of magnetic susceptibility and the microstructure of magnetic fluid," *Colloid J.* **68** (3), 294–303 (2006). <https://doi.org/10.1134/S1061933X06030057>
34. N. I. Konovalova and S. I. Martynov, "Dynamics of magnetic particles in a viscous liquid," *Izv. VU-Zov. Povolzh. Reg. Fiz.-Mat. Nauki*, No. 3, 3–11 (2009).
35. D. N. Chirikov, Candidate's Dissertation in Mathematics and Physics (UrFU, Ekaterinburg, 2012).
36. J. P. Rich, P. S. Doyle, and G. H. McKinley, "Magnetorheology in an aging, yield stress matrix fluid," *Rheol. Acta.* **51**, 579–593 (2012). <https://doi.org/10.1007/s00397-012-0632-z>
37. D. N. Chirikov, *Theoretical Study of Rheological Properties of Bidisperse Magnetic Fluids: Final Research Report* (UrFU, Ekaterinburg, 2013) [in Russian].
38. S.A. Novopashin, M.A. Serebryakova, and S. Ya. Khmel, "Methods of magnetic fluid synthesis (review)," *Thermophys. Aeromech.* **22** (4), 397–412 (2015). <https://doi.org/10.1134/S0869864315040010>
39. A. V. Lebedev, "Viscosity of magnetic fluids must be modified in calculations of dynamic susceptibility," *J. Magn. Magn. Mater.* **431**, 30–32 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2016.09.110>
40. E. S. Belyaev et al., *Magnetorheological Fluids: Technologies of Creation and Application*, Ed. by A. S. Plekhov (NGTU im E. Alekseeva, Nizhnii Novgorod, 2017) [in Russian].
41. Y. A. Alekhina, L. A. Makarova, T. S. Rusakova, et al., "Properties of magnetorheological elastomers in crossed AC and DC magnetic fields," *Zh. Sib. Federal. Univ. Ser.: Mat. Fiz.* **10** (1), 45–50 (2017). <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2017-10-1-45-50>
42. P. V. Puchkov, "On the use of magnetic fluids as a lubricant in friction units of machines and mechanisms," *NovaInfo* **1** (78), 95–99 (2018).
43. L. A. Makarova, Candidate's Dissertation in Mathematics and Physics (MGU, Moscow, 2018).
44. H. A. Yusupbekov, M. M. Sobirov, and A. R. Yuldashev, "Active suspension of a car with variable shock absorbers," *Nauka Tekhn. Obraz.*, No. 2(66), 18–27 (2020).
45. K. V. Naigert and V. A. Tselishchev, *Applied Properties of Magnetorheological Fluids* (UGATU, Ufa, 2021) [in Russian].
46. F. L. Chernousko, I. M. Ananyevsky, S. A. Reshmin, *Control of Nonlinear Dynamical Systems. Methods and Applications* (Fizmatlit, Moscow, 2006; Springer, Berlin, 2008).
47. A. V. Borisov, *Modeling of the Human Musculoskeletal System and the Application of the Results Obtained to Develop a Model of an Anthropomorphic Robot* (Sputnik+, Moscow, 2009) [in Russian].

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Э.И. ГРИГОЛЮКА

13 декабря 2023 г. исполняется 100 лет со дня рождения выдающегося отечественного ученого-механика члена-корреспондента АН СССР, Заслуженного деятеля науки Российской Федерации, действительного члена Международной академии астронавтики, профессора, доктора технических наук Эдуарда Ивановича Григолюка (13.12.1923–29.04.2005).

Круг научных интересов Э.И. Григолюка был огромен и включал в себя различные направления механики деформируемого твердого тела и смежных с нею проблем. Эта широта научных интересов была естественным результатом многолетнего сотрудничества Э.И. Григолюка с ведущими предприятиями оборонно-промышленного комплекса СССР и РФ.

В конце 40-х – начале 50-х годов XX века Э.И. Григолюк в связи с расчетом корпусов двигателей летательных аппаратов разработал общую теорию биметаллических и неоднородных тонкостенных конструкций. Вторая половина 50-х годов была посвящена работам над созданием перспективных прямоточных воздушно-реактивных двигателей для МКР “Бура” и “Буран” и над разработкой отечественной ядерной энергетической установки “Бук” в ОКБ-670 М.М. Бондарюка (впоследствии – ОКБ “Красная звезда”).

Широко известны научные труды Э.И. Григолюка по общей теории трехслойных конструкций, проблемам колебаний и устойчивости тонкостенных оболочек различных очертаний, по неклассической теории колебаний упруго деформируемых сред, по расчету напряженно-деформированного состояния перфорированных конструкций, по исследованию взаимодействия ударных волн с конструкциями, а также удара и погружения упругих конструкций в жидкость, по контактным проблемам теории оболочек, по теории оптимизации нагрева оболочек и пластин, по расчету многослойных оболочек из композиционных материалов. В последние годы жизни Э.И. Григолюк много внимания уделял расчету автомобильных конструкций: так под его руководством разрабатывались нормы прочности несущих систем автомобилей, различные варианты теории пневматических шин.

Э.И. Григолюк был редактором многочисленных переводов книг зарубежных авторов. Он был автором блестящих исследований по творчеству таких известных ученых нашего Отечества, как С.П. Тимошенко и И.Г. Бубнов. Им издано тщательно отредактированное практически полное собрание трудов С.П. Тимошенко. С 1952 по 1980 годы Э.И. Григолюк работал редактором реферативного журнала “Механика”.

Следует отметить еще одну сторону многогранной деятельности Э.И. Григолюка: его работу в качестве заместителя (с 1954 г.) и позднее (с 1960 г.) председателя комиссии по прочности двигателей АН СССР, а также председателя секции “Динамика и прочность автомобильных конструкций” АН СССР. За научную и общественную деятельность Э.И. Григолюк был отмечен государственными наградами и именными медалями.

Э.И. Григолюку удалось создать свою научную школу механиков и огромный коллектив учеников и единомышленников. Многие ученики Э.И. Григолюка успешно работают в науке, промышленности и в сфере образования, продолжая развивать творческие идеи своего выдающегося учителя.

ФЕДОР НИКОЛАЕВИЧ ШКЛЯРЧУК

(22.01.1935–29.07.2023)

29 июля 2023 г. на 89-м году жизни скончался выдающийся ученый и талантливый педагог, доктор технических наук, профессор, Заслуженный деятель науки РФ, член Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике Шклярчук Федор Николаевич.

Федор Николаевич родился в селе Новогеоргиевка Покровского района Приморского края. В 1958 году окончил Куйбышевский авиационный институт по специальности самолетостроение. Затем трудился в научно-исследовательском институте эксплуатации и ремонта авиационной техники (г. Люберцы). С 1960 по 1963 год учился в очной аспирантуре Московского авиационного института (МАИ), а затем работал в МАИ, где прошел путь от ассистента до профессора и заведующего кафедрой. В 2010 году он перешел на работу в Институт прикладной механики Российской академии наук.

Круг научных интересов Ф.Н. Шклярчука был огромен и включал в себя различные направления механики деформируемого твердого тела. Основными направлениями его научной деятельности были: колебания упругих оболочек частично заполненных жидкостью; численные методы расчета динамических характеристик составных тонкостенных конструкций; нелинейная динамика крупногабаритных космических конструкций. Особым достижением был предложенный им вариационный метод сведения трехмерной гидродинамической задачи для произвольных оболочек вращения к одномерной. Ф.Н. Шклярчук внес большой вклад в разработку метода отсеков. Особенно стоит выделить разработанный им для тонкостенных отсеков с произвольным поперечным сечением математический аппарат ортогональных функций, позволяющий для построения матриц жесткости таких отсеков использовать точные аналитические решения теории оболочек. Им предложен новый подход к численному решению начальной задачи, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, основанный на методе Галеркина с использованием корректирующих функций.

Научные труды Ф.Н. Шклярчука тесно связаны с запросами современной техники. В последние годы он активно занимался разработкой математических моделей адаптивных конструкций. В своих работах по этой тематике Федор Николаевич исследовал возможности использования для управления деформированным состоянием конструкций “интеллектуальных” материалов (пьезокерамики, сплавов с памятью формы). Им было предложено оригинальное техническое решение для управления аэроупругими характеристиками крыльев.

Ф.Н. Шклярчук на протяжении многих лет был членом редколлегии “Известия РАН. Механика твердого тела”. Он был не только крупным ученым, но и яркой личностью, отзывчивым и доброжелательным человеком, готовым делиться своими знаниями и опытом.

Редколлегия журнала “Известия РАН. МТТ”, коллеги и ученики Федора Николаевича выражают соболезнования родным и близким. Память о нем навсегда останется в наших сердцах.