

*Известия*

ISSN 1026-3519

*Российской академии наук*

---

---

# МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА



НАУКА  
— 1727 —

2024

4

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

---

Нелокальные решения задач теории упругости о нагружении неограниченного пространства сосредоточенными силами <i>В. В. Васильев, С. А. Лурье, В. А. Салов</i>	3
Прецессионные движения гиростата, имеющего неподвижную точку, в трех однородных силовых полях <i>Г. В. Горр</i>	15
Характерные определяющие числа в полуизотропной связанной термоупругости <i>Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев</i>	36
Идентификация кэп-модели упругопластичности некомпактных сред в условиях сжимающего среднего напряжения <i>А. А. Адамов, И. Э. Келлер, С. Г. Жилин, Н. А. Богданова</i>	55
О Максвелловом представлении гравитационного потенциала симметричного тела <i>Е. А. Никонова</i>	76
Релаксационные процессы вблизи поверхности ударного нагружения импульсным электронным пучком <i>В. А. Морозов, В. С. Иванов, В. М. Кац</i>	90
О вынужденных колебаниях двойного математического маятника <i>А. Г. Петров</i>	103
Моделирование влияния поверхностной пленки на термоупругую неустойчивость при трении композитных тормозных дисков <i>А. Г. Шпенев</i>	118
Кинематический анализ нового пятиподвижного робота параллельной структуры типа “Дельта” <i>А. В. Антонов, П. А. Ларюшкин, А. С. Фомин</i>	135
T-напряжения в ортотропной полосе с центральной полубесконечной трещиной нагруженной вдали от вершины трещины <i>К. Б. Устинов</i>	150

Масштабный эффект при моделировании механических процессов в окрестности скважины на установке истинно трехосного нагружения <i>В. И. Карев, Ю. Ф. Коваленко</i>	166
О максимуме первой резонансной частоты для неоднородных упругих тел <i>А. О. Ватульян, В. О. Юров</i>	180
О неполупростом вырождении волн Лэмба <i>А. И. Каракозова, С. В. Кузнецов</i>	193
Экспериментальное исследование свойств метаматериалов на основе PLA пластика при пробивании жестким ударником <i>С. Ю. Иванова, К. Ю. Осипенко, Н. В. Баничук, Д. С. Лисовенко</i>	207

---

---

УДК 539.3

## НЕЛОКАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ О НАГРУЖЕНИИ НЕОГРАНИЧЕННОГО ПРОСТРАНСТВА СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ

© 2024 г. В. В. Васильев<sup>a, \*</sup>, С. А. Лурье<sup>b, \*\*</sup>, В. А. Салов<sup>a, \*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Центральный НИИ специального машиностроения, Хотьково, Россия

<sup>b</sup>Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия

\*e-mail: vvvas@dol.ru, \*\*e-mail: salurie@mail.ru,

\*\*\*e-mail: snegiricentral@yandex.ru

Поступила в редакцию 26.12.2023 г.

После доработки 16.01.2024 г.

Принята к публикации 17.01.2024 г.

В статье рассматриваются две классические задачи теории упругости. Первой из них является задача Кельвина о неограниченном пространстве, в котором действует сосредоточенная сила. Классическое решение является сингулярным и определяет бесконечно большое перемещение точки приложения силы, что не имеет физического смысла. Для получения физически обусловленного решения используется аппарат нелокальной теории упругости, основанной в отличие от классической теории на рассмотрении элемента среды, обладающего малыми, но конечными размерами, и позволяющей получать регулярные решения традиционных сингулярных задач. Уравнения нелокальной теории включают дополнительную экспериментальную константу, которая имеет размерность длины и не может быть определена для пространственной задачи. В связи с этим рассматривается вторая задача о неограниченной плоскости, растягиваемой двумя сосредоточенными силами, лежащими на одной прямой и направленными в противоположные стороны. Классическое решение этой задачи также является сингулярным и определяет бесконечно большое увеличение расстояния между силами независимо от их величины. Получено решение этой задачи в рамках нелокальной теории упругости, определяющее регулярную зависимость этого расстояния от величины нагрузки. Решение также включает дополнительную константу, которая для плоской задачи определяется экспериментально.

*Ключевые слова:* теория упругости, задача Кельвина, сингулярное решение

DOI: 10.31857/S1026351924040014, EDN: UDUGVE

**1. Введение.** В статье получены регулярные решения классических сингулярных задач теории упругости о напряженно-деформированном состоянии тел, испытывающих сосредоточенные силовые воздействия.

Применительно к теории упругости сингулярные функции можно разделить на две категории. К первой относятся функции, не наблюдаемые в эксперименте и сингулярные по определению. К таким функциям относится, в частности, напряжение, которое является отношением равнодействующей силы к площади области, на которую она действует. Если сила является сосредоточенной, площадь этой области стремится к нулю, а напряжение стремится к бесконечности, то есть оказывается сингулярным. Устранить такую сингулярность не представляется возможным, так как она вводится по определению. Ко второй категории относятся функции, которые наблюдаются в эксперименте. Такой функцией является, в частности, перемещение, которое может быть измерено в процессе эксперимента. Поскольку бесконечно больших перемещений в эксперименте не наблюдается, решения задач теории упругости, приводящие к бесконечно большим перемещениям, представляются не имеющими физического смысла и сингулярность таких решений необходимо устранить.

Для получения регулярных решений классических сингулярных задач теории упругости в настоящей работе используется аппарат нелокальной теории упругости [1–3], уравнения которой получаются в результате анализа элемента среды, имеющего малые, но конечные размеры. В результате уравнения Ламе сохраняют традиционную форму:

$$\mu \Delta U + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} U = 0, \quad (1.1)$$

однако включают нелокальную функцию вектора перемещений  $U$ , которая связана с вектором наблюдаемых перемещений уравнением Гельмгольца:

$$u - s^2 \Delta u = U. \quad (1.2)$$

В правой части уравнений (1.2) стоит решение уравнений (1.1). Если это решение сингулярно, то частное решение уравнений (1.2) также сингулярно. Однако однородные уравнения, соответствующие уравнениям (1.2), имеют фундаментальные решения, которые позволяют устранить сингулярность частного решения и получить регулярное решение для перемещений. Константа  $s$  в уравнениях (1.2) связана с размером элемента, для которого получены уравнения (1.1). Она имеет размерность длины и определяется экспериментально.

**2. Задача Кельвина.** Рассмотрим неограниченную упругую среду, отнесенную к декартовым координатам  $x_1, x_2, x_3$ . Предположим, что в начале координат приложена единичная сила, направленная вдоль одной из осей. Решение уравнений (1.1) определяется тензором функций Грина, имеющим следующий вид [4]:

$$U_{ik} = \frac{1}{4\pi\mu} \left( \frac{\delta_{ik}}{r} + \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_k} \right), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (2.1)$$

Здесь  $U_{ik}$  – перемещение в направлении оси  $x_k$ , вызванное единичной силой, направленной вдоль оси  $x_i$ . Из равенства (2.1) следует, что при  $r \rightarrow 0$  перемещение неограниченно возрастает, что не имеет физического смысла.

В рамках нелокальной теории решение (2.1) следует подставить в правую часть уравнения (1.2). В результате получим:

$$u_{ik} - s^2 \Delta u_{ik} = U_{ik}. \quad (2.2)$$

Решение этого уравнения можно представить в форме:

$$u_{ik} = \frac{1}{4\pi\mu} \left( \delta_{ik} \varphi - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k} \right), \quad (2.3)$$

где функции  $\varphi$  и  $\psi$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца:

$$\varphi - s^2 \Delta \varphi = \frac{1}{r}, \quad \psi - s^2 \Delta \psi = r. \quad (2.4)$$

Действительно, действуя на равенство (2.3) оператором  $L(\cdot) = (1 - s^2 \Delta)(\cdot)$  и учитывая уравнения (2.4), приходим к уравнению (2.2). Найдем частные решения уравнений (2.4). Учитывая, что функция  $1/r(x_1, x_2, x_3)$  является гармонической, а функция  $r(x_1, x_2, x_3)$  – бигармонической, имеем:

$$\varphi_p = \frac{1}{r}, \quad \psi_p = r + \frac{2s^2}{r}.$$

Отсюда следует, что частные решения, как и классическое решение (2.1), являются сингулярными. Фундаментальное решение однородного уравнения Гельмгольца, затухающее при  $r \rightarrow \infty$ , имеет вид [5]:

$$(\varphi_0, \psi_0) = \frac{1}{r} e^{-r/s}.$$

Таким образом, окончательно получим следующие решения уравнений (2.4):

$$\varphi = \frac{1}{r} (1 - e^{-r/s}), \quad \psi = r + \frac{2s^2}{r} (1 - e^{-r/s}). \quad (2.5)$$

В результате нелокальное решение задачи Кельвина, определяющее перемещения точек пространства при действии сосредоточенной силы, приложенной в начале координат, принимает вид:

$$u_{ik} = \frac{1}{4\pi\mu} \left[ \frac{\delta_{ik}}{r} (1 - e^{-r/s}) - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left( r + \frac{2s^2}{r} (1 - e^{-r/s}) \right) \right]. \quad (2.6)$$

Представляя функции (2.5) абсолютно сходящимися степенными рядами по параметру  $r/s$

$$\varphi = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (r/s)^n}{(n+1)!}, \quad \psi = 2s \left( 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (r/s)^{n+2}}{(n+3)!} \right),$$

можно записать решение (2.6) в форме:

$$u_{ik} = \frac{1}{8\pi s\mu(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{r}{s}\right)^n \left[ \frac{2(1-\nu)\delta_{ik}}{n+3} + \frac{x_i x_k}{rs(n+2)(n+4)} \right].$$

При действии силы  $P$  в начале координат получим:

$$u_{ik}(0) = \frac{P\delta_{ik}}{12\pi s\mu}. \quad (2.7)$$

При  $s > 0$  это выражение определяет конечную величину перемещения. Параметр  $s$  определяется экспериментально. Для этого следует экспериментально найти перемещение точки приложения силы  $P$  и воспользоваться формулой (2.7). Однако постановка такого эксперимента технически невозможна. В связи с этим ниже рассматривается более реалистичная плоская задача о действии двух расположенных на одной прямой, но направленных в разные стороны сил.

**3. Неограниченная пластина** под действием сосредоточенных сил. Рассмотрим задачу, показанную на рис. 1.

В двух точках неограниченной пластины действуют две коллинеарные и направленные в разные стороны одинаковые силы. Необходимо найти зависимость расстояния между точками от силы. Решение задачи классической теории упругости о действии на неограниченную пластину силы  $P$ , приложенной в начале координат в направлении оси  $x$ , получается с помощью представления Папковича–Нейбера и имеет вид:

$$U = \frac{1}{\mu h} \left[ \frac{\nabla(rf)}{4(1-\nu)} - f \right], \quad r = ix + jy, \quad r^2 = x^2 + y^2. \quad (3.1)$$

Здесь  $U$  – вектор перемещения,  $h$  – толщина пластины и  $f$  – фундаментальное решение уравнения Лапласа (функция точечного источника). Для нелокального перемещения и силы, направленных по оси  $x$ , решение (3.1) принимает вид:

$$U_x = \frac{P}{2\pi\mu h} \left( \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} (x \ln r) - \ln r \right). \quad (3.2)$$

Дифференцируя, получим:

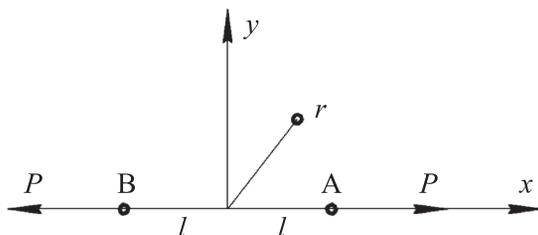


Рис. 1. Неограниченная пластина, нагруженная двумя силами.

$$U_x = \frac{P}{8\pi\mu h(1-\nu)} \left[ \frac{2x}{r} - (3-4\nu) \ln r \right]. \quad (3.3)$$

Рассмотрим задачу, показанную на рис. 1. Для того чтобы найти перемещения от силы  $P$ , приложенной в точке  $A$  с координатой  $x=l$ , в равенстве (3.2) следует заменить  $x$  на  $(x-l)$  и принять  $r^2 = (x-l)^2 + y^2$ . Соответственно, для определения перемещений от силы  $-P$ , приложенной в точке  $B$  с координатой  $x=-l$ , необходимо заменить  $x$  на  $x+l$  и принять  $r^2 = (x+l)^2 + y^2$ . В результате получим:

$$U_x^{A,B} = \frac{\pm P}{8\pi\mu h(1-\nu)} \left[ \frac{2(x \mp l)}{\sqrt{(x \mp l)^2 + y^2}} - (3-4\nu) \ln \sqrt{(x \mp l)^2 + y^2} \right]. \quad (3.4)$$

При действии двух сил в точках  $A$  и  $B$  (рис. 1) поле перемещений принимает вид:

$$\begin{aligned} U_x^{AB} &= U_x^A + U_x^B = \\ &= \frac{P}{8\pi\mu h(1-\nu)} \left[ \frac{2(x-l)}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}} - \frac{2(x+l)}{\sqrt{(x+l)^2 + y^2}} - (3-4\nu) \ln \sqrt{\frac{(x-l)^2 + y^2}{(x+l)^2 + y^2}} \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

При  $y=0$  отсюда следует перемещения точек, лежащих на оси  $x$ :

$$U_x^{AB}(y=0) = \frac{P}{8\pi\mu h(1-\nu)} \ln \sqrt{\frac{(x+l)^2}{(x-l)^2}}. \quad (3.6)$$

При  $x=0$  имеем  $U_x^{AB}=0$ , что соответствует условию симметрии задачи (рис. 1), при  $x=\pm l$ , то есть в точках  $A$  и  $B$ , решение (3.6) является сингулярным. Перемещения оказываются бесконечно большими, что не имеет физического смысла. Зависимость относительного перемещения

$$\bar{U}_x^{AB}(y=0) = 8\pi\mu h(1-\nu) U_x^{AB}(y=0) / P$$

от относительной координаты  $x/l$ , построенная по формуле (3.6), показана на рис. 2.

Получим нелокальное решение рассматриваемой задачи. Преобразуем равенство (3.2), используя следующее тождество:

$$x \ln r = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \varphi = \frac{r^2}{2} \left( \ln r - \frac{1}{2} \right).$$

В результате получим:

$$U_x = \frac{P}{2\pi\mu h} \left( \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \ln r \right). \quad (3.7)$$

Существенно, что в этом равенстве  $\ln r$  является гармонической функцией, а функция  $\varphi$  — бигармонической.

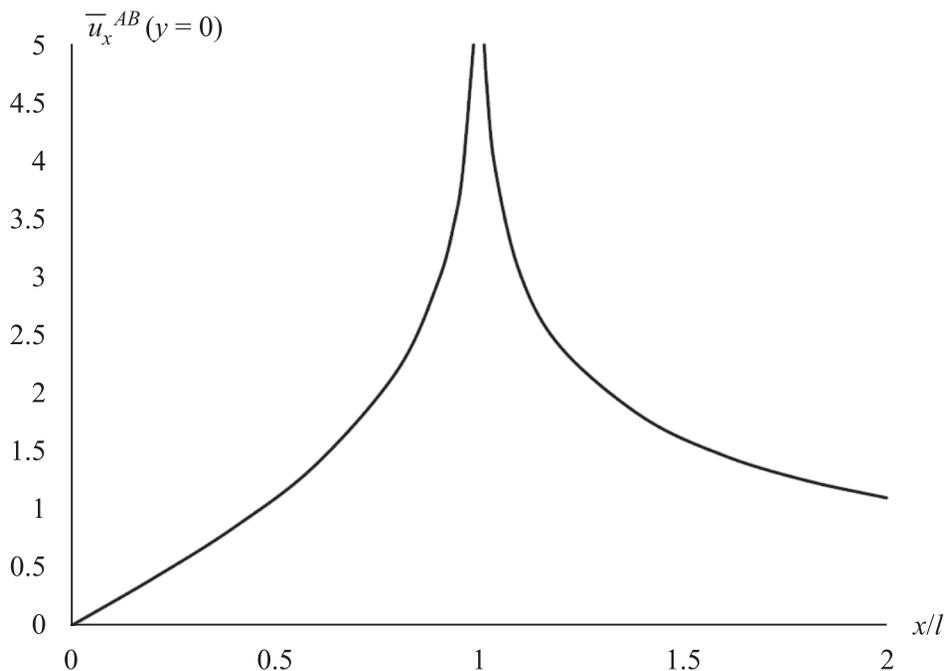


Рис. 2. Зависимость относительного перемещения от  $x/l$ .

Перемещения точки приложения силы определяется решением уравнения Гельмгольца (1.2), в правой части которого стоит классическое решение (3.7), то есть

$$u_x - s^2 \Delta u_x = \frac{P}{2\pi\mu h} \left( \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \ln r \right). \quad (3.8)$$

Общее решение однородного уравнения Гельмгольца [5]:

$$u_x^0 = C_1 I_0(r/s) + C_2 K_0(r/s) \quad (3.9)$$

выражается через модифицированные функции Бесселя [6]:

$$I_0(r/s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r/2s)^{2n}}{(n!)^2}, \quad K_0(r/s) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r/2s)^{2n}}{(n!)^2} [\ln(r/2s) - t_n],$$

$$t_n = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \gamma. \quad (3.10)$$

Здесь  $\gamma = 0.5772$  – постоянная Эйлера и  $t_0 = -\gamma$ ,  $t_1 = 1 - \gamma \dots$ . Из соотношений (3.10) следует, что функция  $I_0$  расходится при  $r \rightarrow \infty$ , поэтому в решении (3.9) следует принять  $C_1 = 0$ . Функция  $K_0$  имеет логарифмическую особенность при  $r=0$ , и это ее свойство можно использовать для устранения аналогичной сингулярности частного решения уравнения (3.8). Рассмотрим уравнение:

$$u_x^{(1)} - s^2 \Delta u_x^{(1)} = \ln r.$$

Функция  $\ln r$  является гармонической (для плоской задачи), и частное решение этого уравнения имеет вид  $u_x^{(1)} = \ln r$ . Рассмотрим второе уравнение, следующее из уравнения (3.8):

$$u_x^{(2)} - s^2 \Delta u_x^{(2)} = \frac{r^2}{2} \left( \ln r - \frac{1}{2} \right).$$

Правая часть этого уравнения является бигармонической функцией. Частное решение этого уравнения состоит из гармонической и бигармонической функций и имеет вид:

$$u_x^{(2)} = \frac{r^2}{2} \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) + 2s^2 \left( \ln r + \frac{1}{2} \right).$$

Таким образом, частные решения уравнения (3.8) имеют сингулярности логарифмического типа, которые могут быть устранены фундаментальным решением (3.9) при соответствующем выборе постоянной  $C_2$ . Окончательно получим:

$$u_x = \frac{P}{2\pi\mu h} \left\{ \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{r^2}{2} \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) + 2s^2 \left( \ln r + \frac{1}{2} + K_0(r/s) \right) \right] - \ln r - K_0(r/s) \right\}.$$

Выполняя дифференцирование, найдем:

$$u_x = \frac{P}{8\pi\mu h(1-\nu)} \left\{ \frac{x^2}{r^2} - \left( 2 \frac{x^2}{r^2} - 1 \right) \left[ 2 \frac{s^2}{r^2} - K_2(r/s) \right] - (3-4\nu) [\ln r + K_0(r/s)] \right\}.$$

При действии сил, приложенных в точках  $A$  или  $B$  (рис. 1), по аналогии с равенством (3.4) имеем:

$$\begin{aligned} u_x^{A,B} &= \frac{\pm P}{8\pi\mu h(1-\nu)} \left\{ \frac{(x \mp l)^2}{(x \mp l)^2 + y^2} - \left[ \frac{2(x \mp l)^2}{(x \mp l)^2 + y^2} - 1 \right] \times \right. \\ &\quad \times \left[ \frac{2s^2}{(x \mp l)^2 + y^2} - K_2 \left( \frac{1}{s} \sqrt{(x \mp l)^2 + y^2} \right) \right] - \\ &\quad \left. - (3-4\nu) \left[ \ln \sqrt{(x \mp l)^2 + y^2} + K_0 \frac{1}{s} \sqrt{(x \mp l)^2 + y^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Соответственно, при одновременном действии сил в точках  $A$  и  $B$  получим:

$$u_x^{AB} = u_x^A + u_x^B = \frac{P}{8\pi\mu h(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \left[ \ln \sqrt{\frac{(x+l)^2 + y^2}{(x-l)^2 + y^2}} - K_0 \left( \frac{1}{s} \sqrt{(x-l)^2 + y^2} \right) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + K_0 \frac{1}{s} \sqrt{(x+l)^2 + y^2} \Big] + \frac{(x-l)^2}{(x-l)^2 + y^2} - \frac{(x+l)^2}{(x+l)^2 + y^2} - \\
& - \left[ \frac{2(x-l)^2}{(x-l)^2 + y^2} - 1 \right] \left[ \frac{2s^2}{(x-l)^2 + y^2} - K_2 \frac{1}{s} \sqrt{(x-l)^2 + y^2} \right] + \\
& + \left[ \frac{2(x+l)^2}{(x+l)^2 + y^2} - 1 \right] \left[ \frac{2s^2}{(x+l)^2 + y^2} - K_2 \frac{1}{s} \sqrt{(x+l)^2 + y^2} \right] \Big\}.
\end{aligned}$$

При  $y=0$  отсюда следует выражение, аналогичное равенству (3.6):

$$\begin{aligned}
u_x^{AB}(y=0) = \frac{P}{8\pi\mu h(1-\nu)} & \left\{ (3-4\nu) \left[ \ln \sqrt{\left(\frac{x+l}{x-l}\right)^2} - \right. \right. \\
& - K_0 \left( \frac{1}{s} \sqrt{(x-l)^2} \right) + K_0 \left( \frac{1}{s} \sqrt{(x+l)^2} \right) \Big] - \\
& \left. - \frac{8s^2 lx}{(x-l)^2(x+l)^2} + K_2 \left( \frac{1}{s} \sqrt{(x-l)^2} \right) - K_2 \left( \frac{1}{s} \sqrt{(x+l)^2} \right) \right\}. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

При  $x=0$ , как и ранее, имеем  $u_x^{AB}=0$ . Найдем перемещение точки  $A$  с координатой  $(x-l)$  (см. рис. 1). Пусть  $x-l=\alpha$  и  $x+l=2l$ . Тогда, как следует из равенства (3.11), это перемещение можно определить как предел выражения

$$u_x^{AB}(A) = \frac{P}{8\pi\mu h(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \left[ \ln \left( \frac{2l}{\alpha} \right) - K_0 \left( \frac{\alpha}{s} \right) + K_0 \left( \frac{2l}{s} \right) \right] - \frac{2s^2}{\alpha^2} + K_2 \left( \frac{\alpha}{s} \right) - K_2 \left( \frac{2l}{s} \right) \right\},$$

при  $\alpha \rightarrow 0$ . При малых значениях  $\alpha$  справедливы следующие асимптотические соотношения:

$$K_0 \left( \frac{\alpha}{s} \right) = -\ln \left( \frac{\alpha}{2s} \right) - \gamma, \quad K_2 \left( \frac{\alpha}{s} \right) = \frac{2s^2}{\alpha^2}.$$

Учитывая эти соотношения, найдем:

$$u_x^{AB}(A) = \frac{P}{8\pi\mu h(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \left[ \ln \left( \frac{l}{s} \right) + \ln \gamma + K_0 \left( \frac{2l}{s} \right) \right] - K_2 \left( \frac{2l}{s} \right) \right\}.$$

Для случая  $s \ll 2l$  функциями Бесселя в этом равенстве можно пренебречь и получить следующее приближенное выражение:

$$u_x^{AB}(A) = \frac{P(3-4\nu)}{8\pi\mu h(1-\nu)} \left[ \ln \left( \frac{l}{s} \right) + 0.5772 \right]. \quad (3.12)$$

Для определения параметра  $s$ , входящего в полученное решение, был проведен эксперимент. Для этого был использован круглый диск из относительно

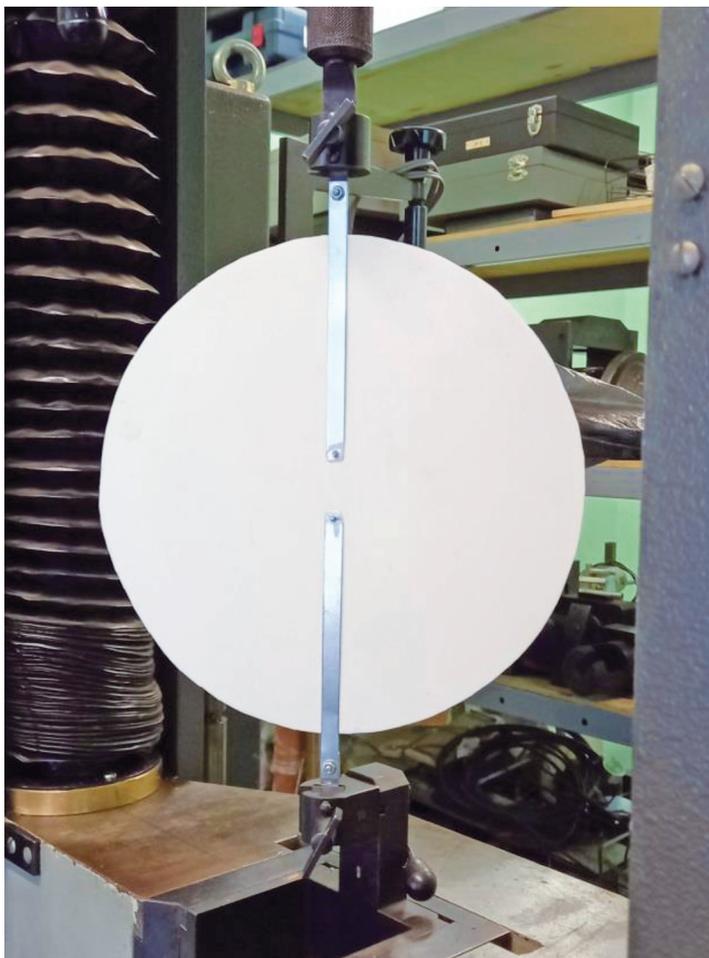
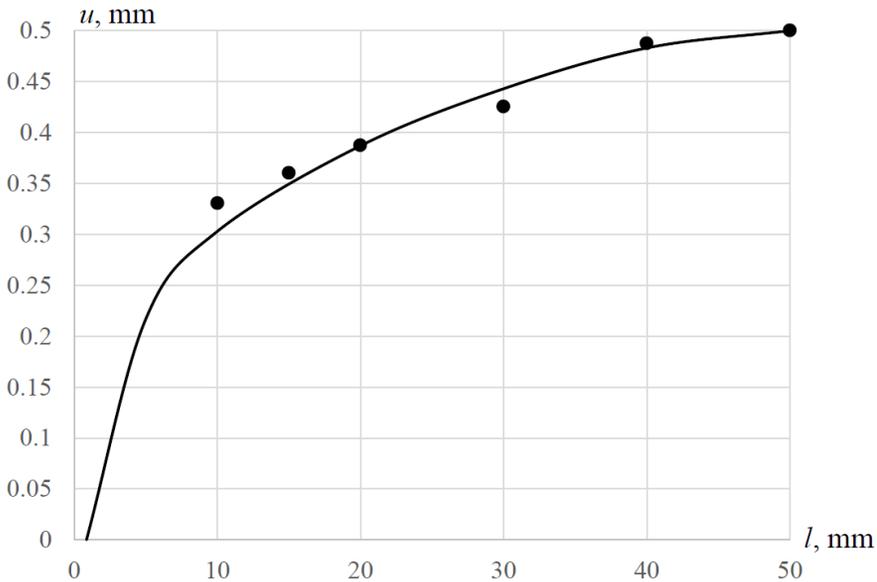


Рис. 3. Диск, растягиваемый сосредоточенными силами.

жесткой силиконовой резины с упругими постоянными  $\mu = 1.25$  МПа,  $\nu = 0.48$ . Диаметр диска 250 мм, толщина  $h = 4.7$  мм. Диск был проколот в окрестности центра двумя заостренными стержнями с диаметром 2 мм, которые располагались на различном расстоянии друг от друга (от 20 до 100 мм). С обеих сторон диска на стержни были установлены тяги, к которым прикладывалась сила  $P$  (рис. 3). Экспериментально определялась зависимость увеличения расстояния между стержнями от силы. Диаметр стержней был выбран в результате предварительных экспериментов. Дело в том, что при малом диаметре стержней наблюдается их локальное внедрение в резину и зависимость между силой и расстоянием между стержнями оказывается нелинейной. Диаметр 2 мм является наименьшим значением, при котором эта зависимость оказывается линейной.



**Рис. 4.** Зависимости перемещения от расстояния  $l$ , соответствующие формуле (3.12) (—) и эксперименту (•).

Для определения параметра  $s$  использовался опыт с расстоянием между точками приложения силы  $2l=40$  мм. При силе  $P=9.8$  Н расстояние между силами увеличилось на 0.78 мм. Тогда из равенства (3.12) получим  $s=1.52$  мм. Предполагается, что полученная величина этого параметра не зависит от расстояния между силами. Для экспериментальной проверки этого предположения были испытаны пластины с различными расстояниями между силами (от 20 до 100 мм). Зависимость перемещения точки приложения силы от  $l$  при  $P=10$  Н показана на рис. 4. Точки соответствуют результатам измерений. Как следует из графика, полученное нелокальное решение подтверждается экспериментом. Из равенства (3.12) можно заключить, что перемещение не обращается в ноль при  $l=0$ . Это объясняется особенностями применяемого метода, в котором вместо значения функции в точке используется значение, осредненное по некоторому интервалу. Из равенства (3.12) следует, что  $u=0$  при  $l=0.85$  мм. Зависимость нелокального перемещения от координаты, соответствующая равенству (3.11), практически совпадает с классическим решением (3.6), показанным на рис. 2. Различие наблюдается только в окрестности точки  $x/l=1$ , в которой классическое решение обращается в бесконечность, а нелокальное является конечным.

**4. Заключение.** Построены нелокальные решения задач теории упругости для упругой среды, нагруженной во внутренних точках сосредоточенными силами. Уравнения нелокальной теории упругости, основанные в отличие от классических уравнений на анализе элемента среды, обладающего малыми,

но конечными размерами, позволяют получить регулярные решения, определяющие конечные значения перемещений в точках приложения сил. Для изотропной среды уравнения включают дополнительную к модулю упругости и коэффициенту Пуассона константу, которая определяется экспериментально. Рассмотрены задача Кельвина для пространства, нагруженного сосредоточенной силой, и плоская задача для пластины, нагруженной самоуравновешенной системой сил.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-11-00275), выданного Институтом прикладной механики РАН.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В.В., Лурье С.А.* Обобщенная теория упругости // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 4. С. 16–27.
2. *Васильев В.В., Лурье С.А.* Дифференциальные уравнения и проблема сингулярности решений в прикладной механике и математике // ПМТФ. 2023. Т. 64. № 1. С. 114–127.  
<http://dx.doi.org/10.15372/PMTF20210413>
3. *Vasiliev V.V., Lurie S.A.* To the problem of discontinuous solutions in applied mathematics // Mathematics. 2023. V.11. P. 3362.  
<https://doi.org/10.3390/math.11153362>
4. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 836 с.
5. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.

### NONLOCAL SOLUTIONS OF THE THEORY OF ELASTICITY PROBLEMS FOR AN INFINITE SPACE LOADED WITH CONCENTRATED FORCES

V. V. Vasiliev<sup>a, \*</sup>, S.A.Lurie<sup>b, \*\*</sup>, V.A. Salov<sup>a, \*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Central Research Institute of Special Engineering, Khotkovo, Russia

<sup>b</sup>Institute of Applied Mechanics RAS, Moscow, Russia

\*e-mail: vvas@dol.ru, \*\*e-mail: salurie@mail.ru, \*\*\*e-mail: snegiricentral@yandex.ru

**Abstract** – Two classical problems of the theory of elasticity are considered in the paper. The first is the Kelvin problem for an infinite space loaded with a concentrated force. The classical solution is singular and specifies an infinitely high displacement of the point of the force application which has no physical meaning. To obtain a physically consistent solution, the nonlocal theory of elasticity is used, which, in contrast to the classical theory, is based on the equations derived for an element of continuum that has small but finite dimensions, and allows one to obtain regular solutions for traditional singular problems. The equations of the

nonlocal theory include an additional experimental constant, which has the dimension of length and cannot be determined for a space problem. Consequently, the second problem for an infinite plane loaded with two concentrated forces lying on the same straight line and acting in the opposite directions is considered. The classical solution of this problem is also singular and specifies an infinitely high elongation of the distance between the forces, irrespective of their magnitude. The solution of this problem is also obtained within the framework of the nonlocal theory of elasticity, which specifies a regular dependence of this distance on the forces magnitude. This solution also includes an additional constant which is determined experimentally for a plane problem.

*Keywords:* theory of elasticity, Kelvin problem, singular solution

## REFERENCES

1. *Vasil'ev V.V., Lurie S.A.* Generalized Theory of Elasticity // *Mech. Solids*. 2015. V. 50. № 4. P. 379–388.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654415040032>
2. *Vasiliev V.V., Lurie S.A.* Differential equations and the problem of singularity of solutions in applied mechanics and mathematic // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2023. V. 64. № 1. P. 98–109.  
<https://doi.org/10.1134/S002189442301011X>
3. *Vasiliev V.V., Lurie S.A.* To the problem of discontinuous solutions in applied mathematics // *Mathematics*. 2023. V. 11. P. 3362.  
<https://doi.org/10.3390/math.11153362>
4. *Nowacki W.* *Theory of Elasticity*. M.: Nauka, 1975, 836 p.
5. *Polyanin A.D.* *Handbook of linear equations of mathematical physics*. M.: Fizmatlit, 2001. 576 p.
6. *Handbook on special functions with formulas, graphs and mathematical tables*. M.: Nauka, 1979. 832 p.

УДК 531.38, 531.39

## ПРЕЦЕССИОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ, В ТРЕХ ОДНОРОДНЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ

© 2024 г. Г. В. Горр<sup>а</sup>, \*

<sup>а</sup> Математический институт им. В. А. Стеклова  
РАН, Москва, Россия

\*e-mail: gvgorr@gmail.com

Поступила в редакцию 25.01.2023 г.

После доработки 05.02.2023 г.

Принята к публикации 06.02.2023 г.

Предметом исследования является задача о прецессиях гиростата с неподвижной точкой в трех однородных силовых полях. Класс рассматриваемых прецессионных движений характеризуется свойствами постоянства угла нутации и соизмеримости скоростей прецессии и собственного вращения гиростата. Уравнения движения гиростата редуцированы к трем дифференциальным уравнениям второго порядка относительно скоростей прецессии и собственного вращения гиростата. Интегрирование этих уравнений проведено в случае прецессионно-изоконических движений (скорости прецессии и собственного вращения равны) и в одном случае резонансных значений скоростей прецессии и собственного вращения – резонанс 2:1). Доказано, что полученные в статье решения характеризуются элементарными функциями времени.

*Ключевые слова:* гиростатический момент, прецессии, силовые поля, новые решения

DOI: 10.31857/S1026351924040029, EDN: UDSUTV

**1. Введение.** Прецессии гиростата определяются свойством постоянства угла между двумя осями, проходящими через неподвижную точку, первая из которых неизменно связана с гиростатом, а вторая неподвижна в пространстве. Важность для практического применения полученных в этой задаче результатов отмечена в работе [1]. Математическое моделирование прецессий гиростата проведено во многих задачах динамики гиростата и твердого тела. В задаче о движении тяжелого твердого тела известны регулярные прецессии гироскопа Лагранжа относительно вертикали [2]; регулярные прецессии гироскопа Гриоли [3] относительно наклонной оси; полурегулярные прецессии гироскопа Гесса [4]; прецессии Брессана [5] относительно горизонтальной оси для гироскопа Гесса; прецессии общего вида относительно вертикали, имеющие место в решении А.И. Докшевича [6].

Исследования прецессий гиростата с постоянным и переменным гиростатическим моментом в полях сложной структуры показали существование многочисленных классов прецессий (см. обзоры [7–9]). Большой интерес представляют и исследования прецессий системы гироскопов Лагранжа и Гесса [10], а также твердых тел с жидким заполнением [11–13].

В задаче о движении твердого тела в двух и трех однородных силовых полях изучены регулярные прецессии [14–16] и прецессии общего вида [17–19]. Эти движения можно отнести к резонансным прецессиям, поскольку для них выполняются равенства: 1.  $\dot{\psi} = \dot{\phi}$ ; 2.  $\dot{\psi} = 2\dot{\phi}$ ; 3.  $\dot{\phi} = 2\dot{\psi}$ . В данных случаях  $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$  – эллиптические функции времени. В силу указанных результатов представляется важной следующая задача: изучение условий существования резонансных прецессий гиростата. Выводы по рассмотрению данной проблемы показали не только некоторые аналогии условий на параметры гиростата, но и принципиальные отличия результатов (например, в задаче о движении гиростата  $\phi(t)$  и  $\psi(t)$  – элементарные функции времени).

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим движение твердого тела, имеющего неподвижную точку, в силовом поле, которое является суперпозицией трех однородных и постоянных силовых полей. Обозначим через  $\boldsymbol{\gamma}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}^{(1)}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}^{(2)}$  единичные векторы, характеризующие направления сил  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$  каждого из полей;  $C$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  – центры приведения сил;  $s = POC$ ,  $\mathbf{r} = P_1OC_1$ ,  $\mathbf{p} = P_2OC_2$ ;  $Oxyz$  – подвижная система координат,  $O$  – неподвижная точка. Пусть тензор инерции тела в системе  $Oxyz$  имеет значение  $A = (A_{ij})$  ( $i, j = 1, 3$ ). Тело вращается вокруг точки  $O$  с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3)$  ( $\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{i}_2$ ,  $\mathbf{i}_3$  – единичные векторы системы  $Oxyz$ ). Для векторов  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$  запишем соотношения:

$$\mathbf{s} = s_1\mathbf{i}_1 + s_2\mathbf{i}_2 + s_3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{r} = r_1\mathbf{i}_1 + r_2\mathbf{i}_2 + r_3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{p} = p_1\mathbf{i}_1 + p_2\mathbf{i}_2 + p_3\mathbf{i}_3 \quad (2.1)$$

Тогда уравнения движения гиростата запишем по аналогии с уравнениями [17, 18]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + s \times \boldsymbol{\gamma} + r \times \boldsymbol{\gamma}^{(1)} + p \times \boldsymbol{\gamma}^{(2)}, \quad (2.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(1)} = \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)} = \boldsymbol{\gamma}^{(2)} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.3)$$

где точка над переменными  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}^{(1)}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}^{(2)}$  обозначает дифференцирование по времени  $t$ . В формулах (2.2), (2.3) полагаем:

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(1)} = 0, \quad \boldsymbol{\gamma}^{(2)} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}^{(1)}, \quad |\boldsymbol{\gamma}| = 1, \quad |\boldsymbol{\gamma}^{(1)}| = 1, \quad (2.4)$$

то есть направления силовых полей будут характеризоваться тройкой  $\boldsymbol{\gamma}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда очевидны равенства  $\mathbf{P} = P\boldsymbol{\gamma}$ ,  $\mathbf{P}_i = P_i\boldsymbol{\gamma}^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ).

Рассмотрим прецессии тела относительно вектора  $\boldsymbol{\gamma}$ . Они характеризуются инвариантным соотношением (ИС):

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma} = a_0 \quad (a_0 = \cos \theta_0) \quad (2.5)$$

где  $\theta_0$  – угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$  ( $\dot{\mathbf{a}} = 0$ ,  $|\mathbf{a}| = 1$ ). Вектор угловой скорости тела на ИС (2.5) представим так [7]:

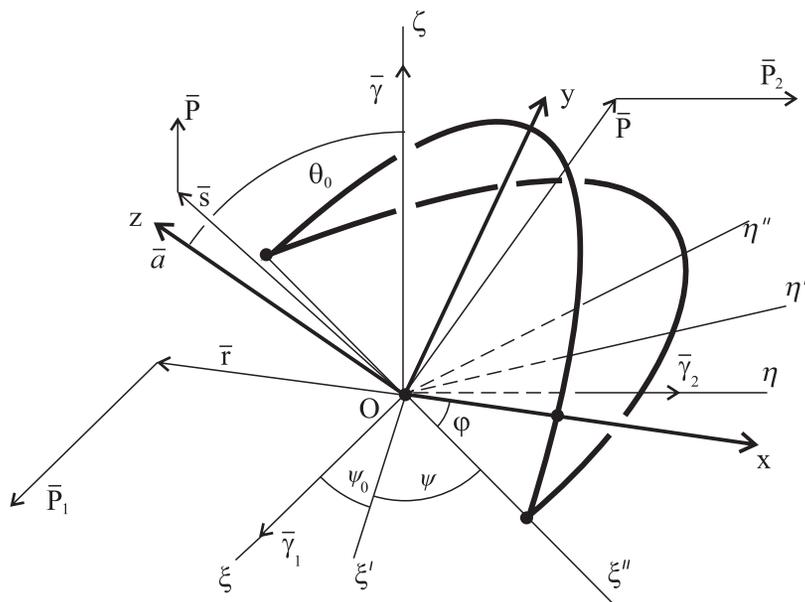


Рис. 1. Геометрическая трактовка прецессий твердого тела.

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{a} + \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\gamma}. \quad (2.6)$$

Переменные  $\phi$ ,  $\psi$  и постоянную  $\theta_0$  можно трактовать как углы Эйлера. Используя метод [7], запишем значение вектора  $\boldsymbol{\gamma}^{(1)}$ :

$$\boldsymbol{\gamma}^{(1)} = b_0 [a_0 \boldsymbol{\gamma} \sin(\psi + \psi_0) - \mathbf{a} \sin(\psi + \psi_0) + (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma}) \cos(\psi + \psi_0)], \quad (2.7)$$

где  $b_0 = 1/a'_0$  ( $a'_0 = \sin \theta_0$ ),  $\psi_0$  – постоянная.

Значение вектора  $\boldsymbol{\gamma}^{(2)}$  найдем по второй формуле системы (2.4):

$$\boldsymbol{\gamma}^{(2)} = b_0 [\mathbf{a} \cos(\psi + \psi_0) - a_0 \boldsymbol{\gamma} \cos(\psi + \psi_0) + (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma}) \sin(\psi + \psi_0)]. \quad (2.8)$$

Таким образом, при получении (2.7), (2.8) полагалось, что  $\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma} \neq \mathbf{0}$ , то есть случай равномерных вращений тела исключаем из рассмотрения. Подвижную систему координат выберем следующим образом: направим вектор  $\mathbf{i}_3$  по вектору  $\mathbf{a}$ . Тогда в силу ИС (2.5), первого уравнения из (2.3) имеем [7, 8]:

$$\boldsymbol{\gamma} = a'_0 \sin \phi \cdot \mathbf{i}_1 + a'_0 \cos \phi \cdot \mathbf{i}_2 + a_0 \mathbf{i}_3 \quad (\mathbf{i}_3 = \mathbf{a}) \quad (2.9)$$

Учитывая (2.6), (2.9), запишем компоненты  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  вектора  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\omega_1 = a'_0 \dot{\psi} \sin \phi, \quad \omega_2 = a'_0 \dot{\psi} \cos \phi, \quad \omega_3 = \dot{\phi} + a_0 \dot{\psi}. \quad (2.10)$$

На рисунке приведена геометрическая трактовка прецессий тела относительно вектора  $\boldsymbol{\gamma}(O\xi\eta\zeta$  – неподвижная система координат).

*Замечание 1.* При описании кинематических свойств в виде соотношений (2.5)–(2.10) использован метод [7], который отличается от методов, применяемых в работах [14–16].

*Замечание 2.* Уравнения (2.2), (2.3) имеют интеграл энергии

$$A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(1)} + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)}) = 2E, \quad (2.11)$$

где  $E$  – постоянная. Как показано в работах [7, 8], нахождение условий существования прецессий в задачах динамики твердого тела на основании (2.11) значительно упрощается.

**3. Преобразование уравнения (2.2) на ИС (2.5).** Внесем в уравнение (2.2) значение  $\boldsymbol{\omega}$  из (2.6) и рассмотрим полученное уравнение в базисе  $\mathbf{a}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$ ,  $\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma}$  с учетом (2.7), (2.8):

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) + \ddot{\psi}(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - \dot{\psi}^2[\mathbf{a} \cdot (A\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma})] - \dot{\psi}[\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma})] - [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{s} \times \boldsymbol{\gamma})] - \\ - b_0 \sin(\psi + \psi_0) \cdot \{a_0[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}] + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}\} - \\ - b_0 \cos(\psi + \psi_0) \cdot \{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma} - a_0[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\gamma})]\} = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \ddot{\psi}(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + 2\dot{\phi}\dot{\psi}[\mathbf{a} \cdot (A\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma})] + \dot{\phi}^2[\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{a} \times A\mathbf{a})] + \dot{\phi}[\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma})] - \\ - b_0 \sin(\psi + \psi_0) \cdot \{a_0(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}) - \\ - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p})]\} - b_0 \cos(\psi + \psi_0) \cdot \{a_0(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) + [\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{p})]\} = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}[A\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a})] + \ddot{\psi}[A\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma})] + \dot{\phi}\dot{\psi}[2(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - a_0^2 \text{Sp}(A) - 2a_0(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma})] + \\ + \dot{\psi}^2[a_0(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - (A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma})] - \dot{\phi}[a_0(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\lambda}) - (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\gamma})] + \dot{\psi}[(\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{a}) - a_0(\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\gamma})] - \\ - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{s}) + a_0(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - a_0' [(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \cos(\psi + \psi_0) - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \sin(\psi + \psi_0)] = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $\text{Sp}(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$  – след матрицы  $A$ .

По аналогии с (3.1)–(3.3) распишем интеграл (2.10) на ИС (2.5), (2.6):

$$\begin{aligned} (A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\dot{\phi}^2 + 2(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma})\dot{\phi}\dot{\psi} + (A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma})\dot{\psi}^2 - 2\{(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + b_0[\sin(\psi + \psi_0) \cdot (a_0(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - \\ - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a}))] + \cos(\psi + \psi_0) \cdot [\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} - a_0(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma})]\} = 2E. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} f_0(\varphi) &= a_0' (s_1 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi) + a_0 s_3, \\ \tilde{f}_0(\varphi) &= a_0' (s_2 \sin \varphi - s_1 \cos \varphi), \\ f_1(\varphi) &= a_0' [(a_0 r_1 + p_2) \sin \varphi + (a_0 r_2 - p_1) \cos \varphi - a_0' r_3], \\ f_2(\varphi) &= a_0' [(r_2 - a_0 p_1) \sin \varphi - (a_0 p_2 + r_1) \cos \varphi + a_0' p_3], \\ f_3(\varphi) &= a_0' [(p_1 - a_0 r_2) \sin \varphi + (p_2 + a_0 r_1) \cos \varphi], \\ f_4(\varphi) &= a_0' [(r_1 + a_0 p_2) \sin \varphi + (r_2 - a_0 p_1) \cos \varphi], \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$f_5(\varphi) = a'_0 [a_0 (s_1 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi) - a'_0 s_3],$$

$$f_6(\varphi) = -a'_0 [a'_0 (r_1 \sin \varphi + r_2 \cos \varphi) + a_0 r_3],$$

$$f_7(\varphi) = a'_0 [a'_0 (p_1 \sin \varphi + p_2 \cos \varphi) + a_0 p_3].$$

Сначала запишем интеграл (3.4) в силу (3.5):

$$(\mathbf{Aa} \cdot \mathbf{a})\dot{\varphi}^2 + 2(\mathbf{Aa} \cdot \boldsymbol{\gamma})\dot{\varphi}\dot{\psi} + (\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma})\dot{\psi}^2 + \\ - 2[f_0(\varphi) + b_0(f_1(\varphi)\sin(\psi + \psi_0) + f_2(\varphi)\cos(\psi + \psi_0))] = 2E. \quad (3.6)$$

Затем обратимся к уравнениям (3.1)–(3.3). На основании (3.5) имеем:

$$\ddot{\varphi}(\mathbf{Aa} \cdot \mathbf{a}) + \ddot{\psi}(\mathbf{Aa} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - \dot{\psi}^2[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma})] + \ddot{f}_0(\varphi) - \dot{\psi}[\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma})] - \\ - b_0(f_3(\varphi)\sin(\psi + \psi_0) + f_4(\varphi)\cos(\psi + \psi_0)) = 0, \quad (3.7)$$

$$\ddot{\varphi}(\mathbf{Aa} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \ddot{\psi}(\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - 2\dot{\varphi}\dot{\psi}[\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma})] - \dot{\varphi}^2[\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{Aa})] + \dot{\varphi}[\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma})] - \\ - b_0[f_1(\varphi)\cos(\psi + \psi_0) - f_2(\varphi)\sin(\psi + \psi_0)] = 0, \quad (3.8)$$

$$\ddot{\varphi}[\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{Aa})] + \ddot{\psi}[\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma})] + \dot{\varphi}\dot{\psi}[2(\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - a_0'^2 \text{Sp}(A) - 2a_0(\mathbf{Aa} \cdot \boldsymbol{\gamma})] + \\ + \dot{\varphi}^2[(\mathbf{Aa} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - a_0(\mathbf{Aa} \cdot \mathbf{a})] + \dot{\psi}^2[a_0(\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - (\mathbf{Aa} \cdot \boldsymbol{\gamma})] + \dot{\varphi}[a_0(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\lambda}) - (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\gamma})] + \\ + \dot{\psi}[(\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{a}) - a_0(\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\gamma})] + f_5(\varphi) + f_6(\varphi)\sin(\psi + \psi_0) + f_7(\varphi)\cos(\psi + \psi_0) = 0. \quad (3.9)$$

**4. Первый класс резонансных прецессий гиростата.** Прецессионно-изоконические движения. В статьях [17–19] действительные решения для прецессий тела установлены только в случае, когда тело динамически симметрично, то есть главные моменты инерции удовлетворяют условиям

$$A_2 = A_1, \quad (4.1)$$

а вектор  $\mathbf{a}$  направлен по оси динамической симметрии:  $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ . Поэтому и для задачи о прецессиях гиростата естественно полагать, что (4.1) сохраняется.

Первый класс прецессии [18] описывается равенством:

$$\dot{\psi} = n\dot{\varphi} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (4.2)$$

Введем обозначения для параметров задачи:

$$L_0 = a_0'^2 n^2 A_1 + (1 + a_0 n)^2 A_3, \quad M_0 = (1 + a_0 n) A_3, \\ N_0 = a_0'^2 A_1 n + a_0(1 + a_0 n) A_3, \quad K_0 = a_0 n A_1 - (1 + a_0 n) A_3 \quad (4.3)$$

и для функций  $F_i(\varphi)$  ( $i = \overline{1, 3}$ ),  $\Phi_i(\varphi)$  ( $i = \overline{1, 4}$ ):

$$F_1(\varphi) = (a_0 s_3 + E) + a'_0 (s_1 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi) + b_0 \Phi_2(\varphi),$$

$$F_2(\varphi) = a'_0(s_1 \cos \varphi - s_2 \sin \varphi) + b_0 \Phi_3(\varphi), \quad (4.4)$$

$$F_3(\varphi) = a'_0[a_0(s_1 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi) - a'_0 s_3] + \Phi_4(\varphi),$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(\varphi) = & H_{n+1} \sin(n+1)\varphi + G_{n+1} \cos(n+1)\varphi + H_n \sin n\varphi + G_n \cos n\varphi + \\ & + H_{n-1} \sin(n-1)\varphi + G_{n-1} \cos(n-1)\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\varphi) = & G_{n+1} \sin(n+1)\varphi - H_{n+1} \cos(n+1)\varphi + G_n \sin n\varphi - H_n \cos n\varphi + \\ & + G_{n-1} \sin(n-1)\varphi - H_{n-1} \cos(n-1)\varphi, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\Phi_3(\varphi) = H_{n+1} \sin(n+1)\varphi + G_{n+1} \cos(n+1)\varphi - H_{n-1} \sin(n-1)\varphi - G_{n-1} \cos(n-1)\varphi,$$

$$\begin{aligned} \Phi_4(\varphi) = & a'_0[-\tilde{G}_{n+1} \sin(n+1)\varphi + \tilde{H}_{n+1} \cos(n+1)\varphi + a_0 b_0^2 (G_n \sin n\varphi - H_n \cos n\varphi) - \\ & - \tilde{G}_{n-1} \sin(n-1)\varphi + \tilde{H}_{n-1} \cos(n-1)\varphi], \end{aligned}$$

$$H_{n+1} = (1 + a_0) \tilde{H}_{n+1}, \quad \tilde{H}_{n+1} = \frac{a'_0}{2}[(r_1 + p_2) \cos \psi_0 - (r_2 - p_1) \sin \psi_0],$$

$$G_{n+1} = (1 + a_0) \tilde{G}_{n+1}, \quad \tilde{G}_{n+1} = \frac{a'_0}{2}[(r_1 + p_2) \sin \psi_0 + (r_2 - p_1) \cos \psi_0],$$

$$H_n = a_0'^2 (r_3 \sin \psi_0 - p_3 \cos \psi_0), \quad G_n = -a_0'^2 (r_3 \cos \psi_0 + p_3 \sin \psi_0), \quad (4.6)$$

$$H_{n-1} = (1 - a_0) \tilde{H}_{n-1}, \quad \tilde{H}_{n-1} = \frac{a'_0}{2}[(p_1 + r_2) \sin \psi_0 - (p_2 - r_1) \cos \psi_0],$$

$$G_{n-1} = (1 - a_0) \tilde{G}_{n-1}, \quad \tilde{G}_{n-1} = -\frac{a'_0}{2}[(p_1 + r_2) \cos \psi_0 + (p_2 - r_1) \sin \psi_0]$$

Запишем уравнения (3.6)–(3.9) при условиях (4.1), (4.2) и учете соотношений (4.3)–(4.6):

$$\ddot{\varphi}^2 = \frac{2F_1(\varphi)}{L_0}, \quad (4.7)$$

$$M_0 \ddot{\varphi} = F_2(\varphi) + a'_0 n (\lambda_1 \cos \varphi - \lambda_2 \sin \varphi) \dot{\varphi}, \quad (4.8)$$

$$N_0 \ddot{\varphi} = b_0 \Phi_1(\varphi) - a'_0 (\lambda_1 \cos \varphi - \lambda_2 \sin \varphi) \dot{\varphi}, \quad (4.9)$$

$$a_0'^2 n K_0 \dot{\varphi}^2 + F_3(\varphi) + a'_0 \dot{\varphi} [a'_0 \lambda_3 n - (1 + a_0 n) (\lambda_1 \sin \varphi + \lambda_2 \cos \varphi)] = 0. \quad (4.10)$$

При анализе (4.7), (4.8), (4.10) будем использовать соотношения:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2b_0}{L_0} (G_{n+1} \sin(n+1)\varphi - H_{n+1} \cos(n+1)\varphi + \dots), \quad (4.11)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{b_0(a_0 + 1)(n+1)}{L_0} (\tilde{H}_{n+1} \sin(n+1)\varphi + G_{n+1} \cos(n+1)\varphi) + \dots$$

$$\begin{aligned} F_2(\varphi) &= b_0(a_0 + 1)(\tilde{H}_{n+1} \sin(n+1)\varphi + \tilde{G}_{n+1} \cos(n+1)\varphi) + \dots, \\ \Phi_1(\varphi) &= b_0(a_0 + 1)(\tilde{H}_{n+1} \sin(n+1)\varphi + \tilde{G}_{n+1} \cos(n+1)\varphi) + \dots, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где многоточием обозначены очевидные слагаемые (см. (4.4), (4.5)). Применяя метод [18], разработанный при  $\lambda_i = 0$  ( $i = 1, 3$ ), из (4.7)–(4.10) получим  $G_{n+1} = 0$ ,  $H_{n+1} = 0$  ( $n > 1$ ) или, в силу (4.6), установим условия на параметры  $p_1, p_2, r_1, r_2$ :

$$r_1 = -p_2, \quad r_2 = p_1 \quad (4.13)$$

Уравнение (4.9) будем исключать из рассмотрения, так как в результате исключения из уравнений (4.8), (4.9) функции  $\lambda_1 \cos \varphi - \lambda_2 \sin \varphi$  найдем уравнение, которое следует из (4.7) при дифференцировании его по времени.

Далее положим  $n = 1$  (очевидно, ограничения (4.13) исключаются):

$$\psi = \varphi. \quad (4.14)$$

В силу условия (4.14) из соотношений (4.3), (4.6) получим:

$$\begin{aligned} L_0 &= (1 + a_0)[(1 - a_0)A_1 + (1 + a_0)A_3], \quad M_0 = (1 + a_0)A_3, \\ N_0 &= (1 + a_0)[(1 - a_0)A_1 + a_0A_3], \quad K_0 = a_0A_1 - (1 + a_0)A_3, \\ H_2 &= (1 + a_0)\tilde{H}_2, \quad \tilde{H}_2 = \frac{a'_0}{2}[(r_1 + p_2)\cos \psi_0 - (r_2 - p_1)\sin \psi_0], \\ G_2 &= (1 + a_0)\tilde{G}_2, \quad \tilde{G}_2 = \frac{a'_0}{2}[(r_1 + p_2)\sin \psi_0 + (r_2 - p_1)\cos \psi_0], \\ H_1 &= a_0'^2(r_3 \sin \psi_0 - p_3 \cos \psi_0), \quad G_1 = -a_0'^2(r_3 \cos \psi_0 + p_3 \sin \psi_0), \\ H_0 &= (1 - a_0)\tilde{H}_0, \quad \tilde{H}_0 = \frac{a'_0}{2}[(p_1 + r_2)\sin \psi_0 - (p_2 - r_1)\cos \psi_0], \\ G_0 &= (1 - a_0)\tilde{G}_0, \quad \tilde{G}_0 = -\frac{a_0'^2}{2}[(p_1 + r_2)\cos \psi_0 + (p_2 - r_1)\sin \psi_0]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

В дальнейшем необходимы параметры:

$$S_1 = a'_0 s_1 + b_0 G_1, \quad S_2 = a'_0 s_2 - b_0 H_1, \quad S_0 = a_0 s_3 + E - b_0(1 + a_0)H_0. \quad (4.16)$$

Запишем функции  $\dot{\varphi}^2$ ,  $F_2(\varphi)$ ,  $\Phi_1(\varphi)$ ,  $F_3(\varphi)$ ; используя формулы (4.4), имеем:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{L_0}[b_0(1 + a_0)(\tilde{G}_2 \sin 2\varphi - \tilde{H}_2 \cos 2\varphi) + S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0], \quad (4.17)$$

$$F_2(\varphi) = b_0(1 + a_0)(\tilde{H}_2 \sin 2\varphi + \tilde{G}_2 \cos 2\varphi) + a'_0(s_1 \cos \varphi - s_2 \sin \varphi) - b_0(1 - a_0)\tilde{G}_0, \quad (4.18)$$

$$\Phi_1(\varphi) = (1 + a_0)(\tilde{G}_2 \cos 2\varphi + \tilde{H}_2 \sin 2\varphi) + G_1 \cos \varphi + H_1 \sin \varphi + (1 - a_0)\tilde{G}_0,$$

$$F_3(\varphi) = a'_0 \{ \tilde{H}_2 \cos 2\varphi - \tilde{G}_2 \sin 2\varphi + a_0[(s_1 + b_0^2 G_1) \sin \varphi + (s_2 - b_0^2 H_1) \cos \varphi] + (\tilde{H}_0 - s_3) \}.$$

Рассмотрим уравнения (4.8), (4.10). В силу того, что тело динамически симметрично (см. (4.1)), не нарушая общности задачи, положим

$$\lambda_2 = 0. \quad (4.19)$$

Тогда из (4.8), (4.10) получим:

$$(M_0\ddot{\phi} - F_2(\phi))^2 = a_0'^2\lambda_1^2\dot{\phi}^2\cos^2\phi, \quad (4.20)$$

$$(a_0'^2K_0\dot{\phi}^2 + F_3(\phi))^2 = a_0'^2\dot{\phi}^2[a_0'\lambda_3 - (1+a_0)\lambda_1\sin\phi]^2. \quad (4.21)$$

Подставим  $\dot{\phi}^2$ ,  $\ddot{\phi}$ ,  $F_2(\phi)$  из (4.11) в уравнение (4.20). Поскольку редуцированное уравнение должно быть тождеством по  $\phi$ , то множители при  $\cos 4\phi$ ,  $\sin 4\phi$  необходимо принять равными нулю:

$$a_0'(A_3 - A_1)^2(\tilde{G}_2^2 - \tilde{H}_2^2) = -\lambda_1^2\tilde{H}_2[(1-a_0)A_1 + (1+a_0)A_3], \quad (4.22)$$

$$a_0'(A_3 - A_1)^2\tilde{G}_2\tilde{H}_2 = \lambda_1^2\tilde{G}_2[(1-a_0)A_1 + (1+a_0)A_3]. \quad (4.23)$$

Если  $\tilde{G}_2 = 0$ ,  $\tilde{H}_2 = 0$ , то рассмотрение уравнений (4.20), (4.21) приводит к равенствам  $S_1 = 0$ ,  $S_2 = 0$ , и из (4.17) следует, что  $\dot{\phi} = \text{const}$ . Данное равенство исключено в постановке задачи. Положим в (4.23)  $\tilde{G}_2 \neq 0$ . Тогда после исключения из уравнений  $\lambda_1^2$  найдем равенство  $\tilde{G}_2 = 0$ . То есть в дальнейшем необходимо положить  $\tilde{G}_2 = 0$ . Это равенство в первоначальных параметрах таково:

$$\tilde{G}_2 = (r_1 + p_2)\sin\psi_0 + (r_2 - p_1)\cos\psi_0 = 0. \quad (4.24)$$

В силу (4.24) из равенства (4.22) найдем значение  $\lambda_1^2$ :

$$\lambda_1^2 = \frac{a_0'\tilde{H}_2(A_3 - A_1)^2}{(1-a_0)A_1 + (1+a_0)A_3}. \quad (4.25)$$

Исследование уравнения (4.21) можно провести по аналогии с исследованием уравнения (4.20). Тогда получим:

$$\lambda_1^2 = \frac{a_0'\tilde{H}_2\sigma_0^2}{(1+a_0)^2[(1-a_0)A_1 + (1+a_0)A_3]}, \quad (4.26)$$

где

$$\sigma_0 = 3a_0(A_1 - A_3) - (A_1 + 3A_3). \quad (4.27)$$

Приравнивая значения (4.25), (4.26), установим условие на параметры  $a_0$ ,  $A_1$ ,  $A_3$ :

$$a_0A_1 - (1+a_0)A_3 = 0. \quad (4.28)$$

Из (4.28) следует, что случай сферического распределения масс гиростата невозможен.

На основании обозначений (4.15) параметр  $K_0 = 0$ . Это равенство в значительной мере упрощает уравнение (4.21), которое запишем в виде:

$$\begin{aligned} & \tilde{H}_2 \cos 2\varphi + a_0 (s_1 + b_0^2 G_1) \sin \varphi + a_0 (s_2 + b_0^2 H_1) \cos \varphi + (H_0 - s_3)]^2 = \\ = & \frac{2}{L_0} [-b_0 (1 + a_0) \tilde{H}_2 \cos 2\varphi + S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0] [a'_0 \lambda_3 - (1 + a_0) \lambda_1 \sin \varphi]^2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Запишем уравнение (4.20):

$$\begin{aligned} & \{2b_0 \tilde{H}_2 [2(1 + a_0) M_0 - L_0 (1 + a_0)] \sin 2\varphi + [M_0 S_1 - a'_0 s_1 (1 + a_0) L_0] \cos \varphi - \\ & - [M_0 S_2 - a'_0 s_2 (1 + a_0) L_0] \sin \varphi + b_0 (1 - a_0) L_0 \tilde{G}_0\}^2 = \\ = & 2a'_0 L_0 [-b_0 (1 + a_0) H_2 \cos 2\varphi + S_1 \cos \varphi - S_2 \sin \varphi + S_0] \lambda_1^2 \cos^2 \varphi. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Полагая в (4.30)  $\varphi_1 = \pi/2$ ,  $\varphi_2 = 3\pi/2$ , найдем условие:

$$M_0 S_2 - a'_0 s_2 (1 + a_0) b_0 L_0 = 0, \quad \tilde{G}_0 = 0. \quad (4.31)$$

При  $\tilde{G}_0 = 0$  имеем в силу (4.15) условие:

$$(p_1 + r_2) \cos \psi_0 + (p_2 - r_1) \sin \psi_0 = 0,$$

рассматривая которое совместно с условием (4.24), установим ограничение на параметры  $p_1, p_2, r_1, r_2$ :

$$p_1 p_2 + r_1 r_2 = 0. \quad (4.32)$$

Учтем в уравнении (4.30) равенства (4.31):

$$\begin{aligned} & \{2\tilde{H}_2 b_0 [2(1 + a_0) M_0 - (1 + a_0) L_0] \sin \varphi + [M_0 S_1 - a'_0 s_1 (1 + a_0) L_0]\}^2 = \\ = & \frac{2a_0^3 \tilde{H}_2 A_3^2}{a_0^2} [-b_0 (1 + a_0)^2 \tilde{H}_2 \cos 2\varphi + S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Из уравнения (4.33), которое должно быть тождеством по  $\varphi$ , следует равенство  $S_2 = 0$ . Рассматривая его совместно с условием (4.31), находим значение  $s_2$ :

$$s_2 = 0. \quad (4.34)$$

Тогда в силу обозначений (4.16) можно определить дополнительное условие  $H_1 = 0$ , которое запишем с учетом (4.15):

$$r_3 \sin \psi_0 - p_3 \cos \psi_0 = 0 \quad (4.35)$$

Специальный вид уравнения (4.29) позволяет применить к его исследованию другой подход, основанный на полиномиальной структуре. Примем  $\sin \varphi$  за переменную  $x$  и учтем в (4.29) условия (4.34), (4.35). Тогда уравнение (4.29) запишем так:

$$R^2(x) = \mu_0 F_1^*(x)(x - \mu_1)^2, \quad (4.36)$$

где

$$R(x) = -2\tilde{H}_2 x^2 + r^{(1)} x + r^{(0)}, \quad F_1^*(x) = 2b_0 (1 + a_0) \tilde{H}_2 + \beta_1 x + \beta_2,$$

$$r^{(1)} = a_0(s_1 + b_0^2 G_1), \quad r^{(0)} = \tilde{H}_2 + H_0 - s_3, \quad \beta_1 = S_1, \quad \beta_2 = S_0 - b_0(1 + a_0)\tilde{H}_2, \quad (4.37)$$

$$\mu_0 = \frac{2(1 + a_0)\lambda_1}{L_0}, \quad \mu_1 = \frac{a'_0\lambda_3}{(1 + a_0)\lambda_1}.$$

В силу действительности параметра  $\mu_1$ , указанного в (4.37), из (4.35) следует, что при  $x = \mu_1$  функция  $R(x)$  обращается в нуль ( $\mu_1$  – корень уравнения  $R(x) = 0$ ). Сокращая левую и правую части (4.35) на  $(x - \mu_1)^2$ , получим:

$$4\tilde{H}_2^2(x - \mu_1)^2 = \mu_0 F^*(x). \quad (4.38)$$

На основании (4.38) и условия  $S_2 = 0$  запишем значение  $\phi^2$  из (4.17):

$$\phi^2 = \frac{2}{L_0}[-b_0\tilde{H}_2(1 + a_0)\cos 2\phi + S_1 \sin \phi + S_0]. \quad (4.39)$$

Проведенные преобразования (см. формулы (4.35)–(4.38)) позволяют из (4.29) получить условие (4.38) в первоначальных значениях (т.е. значениях по  $\phi$ ):

$$\begin{aligned} & \tilde{H}_2 \cos 2\phi + a_0(s_1 + b_0^2 G_1) \sin \phi + (H_0 - s_3) = \\ & = \varkappa_0 [-b_0(1 + a_0)\tilde{H}_2 \cos 2\phi + S_1 \sin \phi + S_0]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Из (4.40) следует:

$$\varkappa_0 = -\frac{1}{b_0(1 + a_0)}, \quad a_0(s_1 + b_0^2 G_1) = -\frac{S_1}{b_0(1 + a_0)}. \quad (4.41)$$

С помощью первого равенства из (4.16) второе соотношение из (4.4) приведем к виду:

$$S_1(a_0^2 + a_0 + 1) = 0. \quad (4.42)$$

Поскольку  $a_0$  действительный параметр, то из (4.42) следует равенство  $S_1 = 0$ . Тогда из первого равенства системы (4.16) находим значение  $s_1$ :

$$s_1 = -\frac{1}{a_0^2} G_1. \quad (4.43)$$

В силу равенства  $S_1 = 0$  из уравнения (4.33) определим, что и первая компонента вектора  $\mathbf{s}$  имеет значение

$$s_1 = 0. \quad (4.44)$$

Из (4.43) следует равенство  $G_1 = 0$ . Принимая во внимание значение  $G_1$  из (4.15) и условие (4.35), получим  $p_3 = 0$ ,  $r_3 = 0$ . На основании этих равенств и условия (4.32), которое параметризуем в виде  $r_1 = \varkappa_0 p_2$ ,  $r_2 = -\varkappa_0 p_1$ , запишем векторы:

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, 0), \quad \mathbf{r} = \varkappa_0(p_2, -p_1, 0), \quad (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = 0). \quad (4.45)$$

Отметим преобразованное значение  $\dot{\varphi}^2$  с учетом значения  $S_0 = b_0(1 + a_0)^2 \tilde{H}_2$ , которое следует из (4.33):

$$\dot{\varphi} = \pm \mu_0 \sin \varphi, \quad \mu_0 = 2\sqrt{\frac{a_0 \tilde{H}_2}{a_0' A_3}}. \quad (4.46)$$

Поскольку уравнение (4.29) рассмотрено частично, то запишем его при найденных условиях на параметры:

$$\left[ \tilde{H}_2 \cos 2\varphi + (H_0 - s_3) \right]^2 = 4b_0(1 + a_0)^2 H_2 \left[ a_0' \lambda_3 - (1 + a_0) \lambda_1 \sin \varphi \right]^2 \sin^2 \varphi. \quad (4.47)$$

При  $\varphi = 0$  из уравнения (4.47) получим:

$$s_3 = H_0 + \tilde{H}_2. \quad (4.48)$$

Учитывая условие (4.48), установим последнее ограничение на параметры:

$$\lambda_3 = 0. \quad (4.49)$$

Подставим  $H_0, \tilde{H}_2$  из (4.15) в равенства (4.48):

$$s_3 = \frac{a_0'}{2} \left[ ((a_0 + 2)r_1 - a_0 p_2) \cos \psi_0 + ((a_0 + 2)p_1 + r_2) \sin \psi_0 \right]. \quad (4.50)$$

Для сравнения полученных результатов и результатов [18] приведем основные формулы данной статьи:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, 0), \quad \mathbf{r} = r_0(p_2, -p_1, 0), \quad (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = 0), \\ s_2 = 0, \quad s_1 = 0, \quad \frac{A_3}{A_1} = \frac{a_0}{1 + a_0} \quad (A_3 < A_1); \quad a_0 \in (0, 1). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Запишем основные результаты [18]:

$$\begin{aligned} \lambda_i = 0 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3), \quad \mathbf{r} = (-p_2, p_1, r_3) \quad (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \neq 0), \\ s_i \neq 0 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad a_0 \in \left( 0, \frac{\sqrt{41} - 5}{2} \right), \quad A_3 < 2A_1, \quad \left( A_3 = A_1, \quad a_0 = \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Отличия (4.51) от (4.52) очевидны; отметим, что в случае (4.51) вариант  $A_3 = A_1$  невозможен. Кроме этого, решение [18] характеризуется эллиптическими функциями:

$$a_0 \in (0, 1), \quad A_2 < A_1. \quad (4.53)$$

**5. Геометрическая интерпретация движения гиростата в случае  $\psi = \varphi$ .** Без ограничения общности рассмотрим (4.46) только с положительным знаком:

$$\dot{\varphi} = \mu_0 \sin \varphi. \quad (5.1)$$

Вычислим  $\varphi(\tau)$ , где  $\tau = \mu_0 t$ :

$$\varphi(\tau) = 2 \arctg e^\tau. \quad (5.2)$$

Из (5.2) следует, что  $\varphi(0) = \pi/2$ , при  $\tau \rightarrow \infty$ :  $\varphi(\tau) \rightarrow \pi$ . Рассмотрим подвижный годограф вектора  $\boldsymbol{\omega}$  из (2.6) в данном случае:

$$\boldsymbol{\omega} = \mu_0 \sin \varphi (\mathbf{a} + \boldsymbol{\gamma}^{(1)}), \quad (5.3)$$

где

$$\boldsymbol{\gamma}^{(1)} = (a'_0 \sin \varphi, a'_0 \cos \varphi, a_0). \quad (5.4)$$

На основании (5.3), (5.4) находим компоненты  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\omega_1 = a'_0 \mu_0 \sin^2 \varphi, \quad \omega_2 = a'_0 \mu_0 \sin \varphi \cos \varphi, \quad \omega_3 = \mu_0 (1 + a_0) \sin \varphi. \quad (5.5)$$

Исключим в (5.5) переменную  $\varphi$ :

$$(1 + a_0)(\omega_1^2 + \omega_2^2) - (1 - a_0)\omega_3^2 = 0, \quad \omega_1 = \frac{a'_0 \omega_3^2}{\mu_0 (1 + a_0)^2}. \quad (5.6)$$

Таким образом, в силу (5.6) подвижный годограф угловой скорости гиростата – линия пересечения конуса второго порядка и параболического цилиндра (образующие его параллельны оси  $Oy$ ). Начальная точка имеет координаты  $a'_0 \mu_0, 0, \mu_0(1 + a_0)$ , а предельная точка ( $\tau \rightarrow \infty$ ) имеет координаты  $(0, 0, 0)$ . То есть при  $\tau \rightarrow \infty$  конец вектора угловой скорости асимптотически стремится к началу координат.

Запишем неподвижный годограф  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\omega_\zeta = \omega_3, \quad \omega_\xi = -\omega_2, \quad \omega_\eta = \omega_1. \quad (5.7)$$

Формулы (5.7) показывают свойство изоконичности движения гиростата – подвижный и неподвижный годографы симметричны друг другу относительно касательной плоскости. Выше показано, что, кроме данного свойства, движение гиростата – асимптотическое к состоянию покоя.

## 6. Прецессионные движения динамически симметричного гиростата в случае, когда скорость прецессии в два раза больше скорости его собственного вращения.

В силу постановки задачи имеем равенство:

$$\psi = 2\varphi. \quad (6.1)$$

При записи (6.1) постоянная, которая может быть введена, принята равной нулю. Запишем обозначения (4.3) при условии  $\psi = 2\varphi$ :

$$\begin{aligned} L_0 &= 4a_0'^2 A_1 + (1 + 2a_0)^2 A_3, & M_0 &= (1 + 2a_0) A_3, \\ N_0 &= 2a_0'^2 A_1 + a_0(1 + 2a_0) A_3, & K_0 &= 2a_0 A_1 - (1 + 2a_0) A_3. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Сохраняя необходимые аналогии обозначений (4.4), (4.5), для случая (6.1) имеем:

$$\begin{aligned} F_1(\varphi) &= b_0 (G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi) + \\ &+ S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned}
 F_2(\varphi) &= a'_0(s_1 \cos \varphi - s_2 \sin \varphi) + b_0 [H_3 \sin 3\varphi + G_3 \cos 3\varphi - H_1 \sin \varphi - G_1 \cos \varphi] = \\
 &= b_0 (H_3 \sin 3\varphi + G_3 \cos 3\varphi) + \tilde{S}_1 \cos \varphi + \tilde{S}_2 \sin \varphi, \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_3(\varphi) &= a'_0[\tilde{G}_3 \sin 3\varphi + \tilde{H}_3 \cos 3\varphi + a_0 b_0^2 (G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi) + \\
 &+ S_1^* \sin \varphi + \tilde{S}_2^* \cos \varphi + \tilde{S}_3^*], \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

$$\Phi_1 = H_3 \sin 3\varphi + G_3 \cos 3\varphi + H_2 \sin 2\varphi + G_2 \cos 2\varphi + H_1 \sin \varphi + G_1 \cos \varphi, \quad (6.6)$$

$$S_1 = a'_0 s_1 + b_0 G_1, \quad S_2 = a'_0 s_2 - b_0 H_1, \quad S_0 = a_0 s_3 + E, \quad (6.7)$$

$$\tilde{S}_1 = a'_0 s_1 - b_0 G_1, \quad \tilde{S}_2 = -(a'_0 s_2 - b_0 H_1), \quad S_1^* = a_0 s_1 - \tilde{G}_1,$$

$$S_2^* = a_0 s_2 + b_0 \tilde{H}_1, \quad \tilde{S}_3^* = -a'_0 s_3, \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned}
 H_3 &= (1 + a_0) \tilde{H}_3, \quad \tilde{H}_3 = \frac{a'_0}{2} [(r_1 + p_2) \cos \psi_0 - (r_2 - p_1) \sin \psi_0], \\
 G_3 &= (1 + a_0) \tilde{G}_3, \quad \tilde{G}_3 = \frac{a'_0}{2} [(r_1 + p_2) \sin \psi_0 + (r_2 - p_1) \cos \psi_0], \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

$$H_2 = a_0'^2 (r_3 \sin \psi_0 - p_3 \cos \psi_0), \quad G_2 = -a_0'^2 (r_3 \cos \psi_0 - p_3 \sin \psi_0),$$

$$H_1 = (1 - a_0) \tilde{H}_1, \quad \tilde{H}_1 = \frac{a'_0}{2} [(p_1 + r_2) \sin \psi_0 - (p_2 - r_1) \cos \psi_0], \quad (6.10)$$

$$G_1 = (1 - a_0) \tilde{G}_1, \quad \tilde{G}_1 = -\frac{a'_0}{2} [(p_1 + r_2) \cos \psi_0 + (p_2 - r_1) \sin \psi_0].$$

Запишем интеграл энергии (4.7) и уравнения (4.8), (4.10), приняв во внимание равенство  $\lambda_2 = 0$ , которое можно получить поворотом подвижной системы координат:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2F_1(\varphi)}{L_0}, \quad (6.11)$$

$$M_0 \ddot{\varphi} = F_2(\varphi) - 2\lambda_1 \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}, \quad (6.12)$$

$$2a_0'^2 K_0 \dot{\varphi}^2 + F_3(\varphi) = a'_0 \dot{\varphi} [\lambda_1 (1 + 2a_0) \sin \varphi - 2a'_0 \lambda_3]. \quad (6.13)$$

Запишем (6.11), уравнение (6.12) и уравнение (6.13). После преобразований последних имеем:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2b_0}{L_0} (G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + \dots), \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned}
 b_0 [3M_0 (G_3 \cos 3\varphi - H_3 \sin 3\varphi + \dots) - L_0 (G_3 \cos 3\varphi - H_3 \sin 3\varphi + \dots)]^2 = \\
 = 4L_0 a_0'^2 \lambda_1^2 (1 + \cos 2\varphi) (G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + \dots), \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [2a_0'^2 K_0 b_0 (G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + \dots) - a_0' L_0 (G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + \dots)]^2 = \\
& = L_0 a_0'^2 b_0 (G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + \dots). \tag{6.16}
\end{aligned}$$

На первом этапе предположим, что  $G_3^2 + H_3^2 = 0$ . Из уравнения (6.15) в силу того, что в левой части старшие гармоники равны шести, в правой части — пяти, получим условие на параметры  $A_1, A_3, A_3, a_0$ :

$$2(1 + a_0)A_1 - (1 + 2a_0)A_3 = 0, \tag{6.17}$$

На основании (6.17) значения  $K_0$  и  $L_0$  таковы:

$$K_0 = -2A_1, \quad L_0 = 6(1 + a_0)A_3.$$

Проводя анализ уравнения (6.16) так же, как уравнения (6.15), получим  $1 + a_0 = 0$ , то есть  $a_0 = -1$ ,  $a_0' = 0$ , что невозможно. Итак, в дальнейшем необходимо положить  $G_3 = 0, H_3 = 0$ . На основании обозначений (6.9) имеем:

$$r_1 = -p_2, \quad r_2 = -p_1. \tag{6.18}$$

Запишем функции (6.3)–(6.6) при полученных условиях:

$$\begin{aligned}
F_1(\varphi) &= b_0 (G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi) + S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0, \\
F_2(\varphi) &= \tilde{S}_1 \cos \varphi + \tilde{S}_2 \sin \varphi, \\
F_3(\varphi) &= a_0' \left[ a_0 b_0^2 (G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi) + S_1^* \sin \varphi + S_2^* \cos \varphi + S_3^* \right], \\
\Phi_1(\varphi) &= \tilde{H}_2 \sin 2\varphi + \tilde{G}_2 \cos 2\varphi + H_1 \sin \varphi + G_1 \cos \varphi.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Рассмотрим первое уравнение из (6.12); учтя (6.18), имеем:

$$\begin{aligned}
& M_0^2 b_0 [(G_2 \cos 2\varphi + H_2 \sin 2\varphi) + \dots]^2 = \\
& = a_0'^2 \lambda_1^2 (G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi) \cos 2\varphi + \dots. \tag{6.20}
\end{aligned}$$

В случае  $M_0 = 0$  параметр  $a_0$  имеет значение

$$a_0 = -\frac{1}{2},$$

при котором из уравнения (6.20) следуют два варианта:

$$1. \lambda_1 = 0; \quad 2. H_2 = 0, \quad G_2 = 0. \tag{6.21}$$

Полагая в (6.20)  $M_0 \neq 0$ , получим два условия:

$$G_2(2b_0 M_0^2 H_2 - a_0'^2 \lambda_1^2 L_0) = 0, \quad b_0 M_0^2 (G_2^2 - H_2^2) = -a_0'^2 H_2 \lambda_1^2 L_0. \tag{6.22}$$

Если в уравнениях (6.22) полагать  $G_2 \neq 0$ , то, исключив параметр  $\lambda_1^2$  (полагая  $\lambda_1 \neq 0$ ), получим  $G_2^2 + H_2^2 = 0$ . Поэтому  $G_2 = 0$  и имеем равенство:

$$H_2 (b_0 M_0^2 + a_0'^2 L_0 \lambda_1^2) = 0. \tag{6.23}$$

Таким образом, в (6.22) необходимо положить:

$$1. G_2=0, H_2=0; 2. G_2=0, H_2 \neq 0, \lambda_1^2 = \frac{M_0^2 H_2}{(a_0')^3 L_0}. \quad (6.24)$$

Случай  $G_2=0, H_2=0$ . Положим в (6.19)  $G_2=0, H_2=0$ :

$$\begin{aligned} F_1(\varphi) &= S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0, & F_2(\varphi) &= \tilde{S}_1 \cos \varphi + \tilde{S}_2 \sin \varphi, \\ F_3(\varphi) &= a_0'(S_1^* \sin \varphi + S_2^* \cos \varphi + S_3^*), & \Phi_1(\varphi) &= H_1 \sin \varphi + G_1 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Функции  $\dot{\varphi}^2(\varphi), \ddot{\varphi}(\varphi)$  таковы:

$$\dot{\varphi}^2(\varphi) = \frac{2(S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0)}{L_0}, \quad \ddot{\varphi}(\varphi) = \frac{1}{L_0}(S_1 \cos \varphi - S_2 \sin \varphi). \quad (6.26)$$

Рассматривая первое уравнение из (6.12), в случае значения функций (6.25), (6.26) и с учетом  $\lambda_1 \neq 0$  находим нулевые значения параметров  $S_1$  и  $S_2$ . В силу первой формулы из (6.26) получим случай регулярной прецессии, который исключается в данной статье.

Случай  $G_2=0, H_2 \neq 0$ . Из обозначений (6.9) следует, что параметры  $\psi_0, p_3$  и  $r_3$  должны удовлетворять условию:

$$r_3 \cos \psi_0 + p_3 \sin \psi_0 = 0. \quad (6.27)$$

Поскольку вычислительная часть анализа первого уравнения из (6.12) аналогична анализу соответствующего уравнения, которое рассмотрено при  $\psi = \varphi$ , то сформулируем только окончательные результаты. Вначале выпишем условие на  $A_1, A_3, a_0$ :

$$4a_0(1 - a_0)A_1 - (1 - 4a_0^2)A_3 = 0. \quad (6.28)$$

В случае сферического распределения масс гиростата из равенства (6.28) имеем:

$$a_0 = \frac{1}{4} \left( \theta_0 = \arccos \frac{1}{4} \right). \quad (6.29)$$

Таким образом, получен интересный результат, поскольку, как показано в работе [17], для аналогичного резонансного случая ( $\psi = 2\varphi$ ) в задаче о движении твердого тела со сферическим распределением масс в трех однородных силовых полях имеет место равенство (6.29). При произвольном распределении масс полученное условие на параметры не совпадает с (6.28).

В результате изучения первого уравнения из (6.12) найдем другие условия на параметры:

$$\begin{aligned} s_2 = 0, \quad p_1 \sin \psi_0 - p_2 \cos \psi_0 = 0, \quad (1 + a_0)s_1 = \tilde{G}_1, \\ \lambda_1^2 = \frac{H_2 M_0^2}{(a_0'^2)^3 L_0}, \quad S_1 = \frac{2(1 - a_0)}{a_0'} \tilde{G}_1. \end{aligned} \quad (6.30)$$

При выполнении равенств (6.30) для функции  $\varphi(t)$  справедливо дифференциальное уравнение

$$\dot{\varphi} = \mu_0 (\sin \varphi + \alpha_0), \quad (6.31)$$

где

$$\mu_0 = 2\sqrt{\frac{b_0 H_2}{L_0}}, \quad \alpha_0 = \frac{S_1}{4b_0 H_2}. \quad (6.32)$$

Выпишем остальные условия, которые устанавливаем из уравнения (6.12) и уравнения (6.13):

$$s_3 = \frac{1}{(a'_0)^3 H_2} \left[ 4a_0'^4 (1 - a_0) \tilde{G}_1 + a_0 H_2 \right], \quad \lambda_3 = -\frac{(1 - a_0)(1 + 2a_0) \tilde{G}_1 \lambda_1}{4H_2}, \quad (6.33)$$

$$E = -a_0 s_3 + \frac{1}{2b'_0 H_2} \left[ a_0'^2 (1 - a_0)^2 \tilde{G}_1^2 + H_2^2 \right].$$

Из равенства (6.27) и второго равенства из (6.30) получим:

$$p_1 r_3 + p_2 p_3 = 0. \quad (6.34)$$

Из уравнения (6.31) имеем:

$$\varphi(\tau) = Q(\tau) \left( Q(\tau) = 2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha_0 \operatorname{tg} \tau}{\sqrt{\alpha_0^2 - 1} - \operatorname{tg} \tau}, \quad \tau = \mu_0 t \right). \quad (6.35)$$

Приведем пример действительности полученного решения. Рассмотрим следующие значения параметров:

$$\psi_0 = 0, \quad a_0 = \frac{1}{4}, \quad a'_0 = \frac{1}{4}\sqrt{15}, \quad p_1 > 0, \quad p_3 < 0, \quad 3p_1 + 2\sqrt{15}p_3 > 0.$$

Тогда нетрудно убедиться, что значение  $\mu_0$  из (6.32) действительно, а значение  $\alpha_0$  из (6.32) удовлетворяет условию  $\alpha_0 > 1$ . Следовательно,  $\varphi(\tau)$  — действительная функция; в силу  $\psi(\tau) = 2\varphi(\tau)$  функция  $\psi(\tau)$  имеет такое же свойство.

Отметим, что функция (6.35) отвечает периодическому изменению функции  $\sin \varphi(\tau)$ . В п. 5 доказано свойство асимптотичности гиростата при  $\psi = \varphi$ . В случае (6.30) также имеет место аналогичный результат; но чтобы исследовать новый случай (отличный от случая п. 5) и принято предположение  $\alpha_0 > 1$ .

Рассмотрим подвижный годограф угловой скорости (2.6):

$$\boldsymbol{\omega} = \mu_0 (\sin \varphi + \alpha_0) (\mathbf{a} + 2\boldsymbol{\gamma}^{(1)}) \quad (6.36)$$

или в скалярной форме из (6.36) имеем:

$$\omega_1 = 2\mu_0 a'_0 (\sin \varphi + \alpha_0) \sin \varphi, \quad \omega_2 = 2\mu_0 a'_0 (\sin \varphi + \alpha_0) \cos \varphi,$$

$$\omega_3 = \mu_0 (1 + 2a_0) (\sin \varphi + \alpha_0). \quad (6.37)$$

Запишем уравнения неподвижного годографа:

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \mu_0 a'_0 (\sin \varphi + \alpha_0) \cos 2\varphi, & \omega_\eta &= -\mu_0 a'_0 (\sin \varphi + \alpha_0) \sin 2\varphi, \\ \omega_\zeta &= \mu_0 (a_0 + 2) (\sin \varphi + \alpha_0). \end{aligned} \quad (6.38)$$

На основании (6.36) устанавливаем, что подвижный годограф – линия пересечения поверхностей

$$(1 + 2a_0)^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) - 4a_0^2 \omega_3^2 = 0, \quad \omega_1 = \frac{2a_0'^2 \omega_3}{\mu_0 (1 + 2a_0)^2} [\omega_3 - \alpha_0 \mu_0 (1 + 2a_0)]. \quad (6.39)$$

Первая поверхность из (6.39) является круговым конусом с вершиной в точке  $O$ ; вторая поверхность – параболический цилиндр с образующими, параллельными оси  $Oy$ .

Исключим переменную  $\varphi$  в параметрических уравнениях (6.37):

$$\begin{aligned} (a_0 + 2)^2 (\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) - a_0'^2 \omega_\zeta^2 &= 0, \\ \omega_\xi &= \frac{a'_0 \omega_\zeta}{\mu_0^2 (a_0 + 2)^3} [\mu_0 (a_0 + 2) - \omega_\zeta] [\mu_0 (a_0 + 2) + \omega_\zeta]. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Как и в случае подвижного годографа из (6.39), первая поверхность из (6.40) также является круговым конусом с вершиной в начальной точке; вторая поверхность из (6.40) – цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси  $O\eta$ , и направляющей кривой третьего порядка.

Таким образом, движение гиростата является периодическим. Для получения его периода применим формулу (6.35), которую запишем в виде:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi(\tau)}{2} = \frac{\alpha_0 \operatorname{tg} \tau}{\sqrt{\alpha_0^2 - 1 - \operatorname{tg} \tau}}.$$

На основании этой формулы установим равенство:

$$\sin \varphi(\tau) = \frac{4\alpha_0 \sin \tau (\sqrt{\alpha_0^2 - 1} \cos \tau - \sin \tau)}{\alpha_0^2 - (\alpha_0^2 + 2) \cos 2\tau - 2\sqrt{\alpha_0^2 - 1} \sin 2\tau}. \quad (6.41)$$

Из соотношений (6.37), (6.38), (6.41) следует, что периоды всех компонент одинаковы и равны  $T = \pi/2\mu_0$ . В силу (6.31) и условия  $\dot{\psi} = 2\dot{\varphi}$  получим, что скорости прецессии и собственного вращения имеют тоже период  $T$ , но углы  $\psi, \varphi$  связаны резонансным условием 1 : 2.

**7. Сравнительный анализ решения п. 6 с решением [17].** Приведем основные соотношения п. 6:

$$\begin{aligned} \lambda &= (\lambda_1, 0, \lambda_3), \quad \mathbf{s} = (s_1, 0, s_3), \quad p_1 r_3 + p_2 p_3 = 0, \quad \operatorname{tg} \psi = -\frac{r_3}{p_3}, \\ 4a_0(1 - a_0)A_1 - (1 - 4a_0^2)A_3 &= 0, \quad A_3 \neq A_1: a_0 \in \left(0, \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Условия существования решения [17] таковы:

$$\begin{aligned} \lambda_i = 0 \quad (i = \overline{1,3}), \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, 0), \quad \mathbf{r} = (-p_2, p_1, 0) \quad (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = 0), \\ 6a_0^2(A_3 - A_1) + a_0(5A_1 - A_3) + (A_1 - 2A_3) = 0, \\ \left[ \left( A_3 = A_1: a_0 = \frac{1}{4} \right), (A_1 = 2A_3: a_0 = 0), \left( A_1 \neq A_3: -\frac{1}{6} < a_0 < \frac{1}{2} \right) \right], \quad s_i \neq 0 \quad (i = \overline{1,3}). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Вначале отметим, что при сферическом распределении масс значения  $a_0$  в (7.1), (7.2) совпадают. Отличие состоит в условиях на векторы  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{r}$ , а также во множествах изменения параметров  $a_0$ . Отметим, что в (7.2) возможен случай распределения масс гиростата, который характеризуется условиями Ковалевской ( $A_2 = A_1 = 2A_3$ ) и значением  $\cos \theta_0 = 0$  ( $\theta_0 = \pi/2$ ). Принципиальным отличием решения п. 6 и решения [17] является свойство функций  $\varphi(t)$ : в п. 6 решение определено через элементарные функции времени, в [17] решение выражается эллиптическими функциями времени.

**Заключение.** В статье получено два решения в замкнутом виде для уравнений движения гиростата в трех однородных силовых полях. Предполагается, что гиростат обладает свойством динамической симметрии относительно оси, образующей постоянный угол с одной из неподвижных осей в пространстве. Первое решение ( $\psi(t) = \varphi(t)$ ) описывается элементарными функциями времени и характеризуется дополнительным свойством асимптотичности к состоянию покоя. Второе решение  $\psi(t) = 2\varphi(t)$  также описывается элементарными функциями времени, но дополнительными свойствами могут быть как асимптотические, так и периодические движения гиростата.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-71-30012.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
2. *Klein F., Sommerfeld A.* Über die Theorie des Kreisels. New York e.a.: Johnson reprint corp., 1965. 966 p.
3. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura et appl. 1947. S. 4. V. 26. fasc. 3–4. P. 271–281.
4. *Горр Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 4. С. 573–587.
5. *Bressan A.* Sulle precessioni d'un corpo rigido costituenti moti di Hess // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1957. V. 27. P. 276–283.
6. *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. Киев: Наук. думка, 1992. 168 с.
7. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. Донецк: ДонНУ, 2009. 222 с.

8. *Gorr G.V., Mазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. Донецк: ДонНУ, 2010. 364 с.
9. *Gorr G.V., Mазнев А.В., Котов Г.А.* Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом. Донецк: ГУ “ИПММ”, 2018. 250 с.
10. *Gorr G.V., Рубановский В.Н.* Об одном новом классе движений системы тяжелых шарнирно связанных твердых тел // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 5. С. 707–712.
11. *Ольшанский В.Ю.* О регулярных прецессиях несимметричного твердого тела с жидким наполнением // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 5. С. 559–571.
12. *Ol'shanskii V. Yu.* New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2019. V. 131. № 12. art. no. 57. [https://ui.adsabs.harvard.edu/link\\_gateway/2019CeMDA.131...57O](https://ui.adsabs.harvard.edu/link_gateway/2019CeMDA.131...57O)  
<https://doi.org/10.1007/s10569-019-9929-x>
13. *Ольшанский В.Ю.* Полурегулярная прецессия несимметричного твердого тела с жидким наполнением // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 5. С. 547–564.  
<https://doi.org/10.31857/S0032823521040111>
14. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // *Egypt. J. Bas. Appl. Sci.* 2015. V. 2. № 3. P. 200–205.  
<https://doi.org/10.1016/j.ejbas.2015.03.002>
15. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // *J. Egypt. Math. Soc.* 2017. V. 25. № 2. P. 216–219.  
<https://doi.org/10.1016/j.joems.2016.08.001>
16. *Ольшанский В.Ю.* Регулярная прецессия гиростата в суперпозиции трех однородных полей // Прикл. математика и механика. 2022. Т. 86. Вып. 6. С. 872–885.  
<https://doi.org/10.31857/S0032823522060121>
17. *Gorr G.V.* Один класс резонансных прецессионных движений твердого тела под действием трех однородных силовых полей // ПММ. 2023. Т. 87. № 1. С. 3–18.  
<https://doi.org/10.31857/S0032823523010071>
18. *Gorr G.V.* Постановка задачи о прецессиях твердого тела с неподвижной точкой в трех однородных силовых полях. Прецессионно-изоконические движения тела // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 3. С. 123–134. <http://doi.org/10.31857/S0572329922600633>
19. *Gorr G.V.* On a class of precessions of a rigid body with a fixed point under the action of forces of three homogeneous force fields // *Rus. J. Nonlinear Dyn.* 2023. V. 19. № 2. P. 249–264.

## PRECESSION MOTIONS OF A GYROSTAT, HAVING A FIXED POINT, IN THREE HOMOGENEOUS FORCE FIELDS

G.V. Gorr<sup>a, \*</sup>

<sup>a</sup>*Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: gvgorr@gmail.com*

**Abstract** – The subject of investigation is the problem on precession motions of a gyrostat with a fixed point in three homogeneous force fields. The class of precessions under consideration is characterized by the constancy of the precession angle and by the commensurability of the precession and proper rotation velocities. Equations of motion of a gyrostat are reduced to a system of three second order

differential equations with respect to velocities of precession and proper rotation. Integration of these equations is conducted in the case of precessionally isoconic motions (the precession velocity equals to the proper rotation velocity) and in the case of 2:1 resonance, when the precession velocity is two times more, than the proper rotation velocity. It is proved that the obtained solutions can be described by elementary functions of time.

*Keywords:* gyrostatic moment; precessions; force fields; new solutions

## REFERENCES

1. *Ishlinskii A.Yu.* Orientation, gyroscopes and inertial navigation. Moscow: Nauka, 1976. 672 p. (in Russian)
2. *Klein F., Sommerfeld A.* Über die Theorie des Kreisels. New York e.a.: Johnson reprint corp., 1965. 966 p.
3. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura et appl. 1947. S. 4. V. 26, fasc. 3–4. P. 271–281.
4. *Gorr G.V.* Precession motions in the rigid body dynamics and in the dynamics of coupled rigid bodies systems // Appl. Math. Mech. 2003. V. 67. № 4. P. 573–587. (in Russian)
5. *Bressan A.* Sulle precessioni d'un corpo rigido costituenti moti di Hess // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1957. V. 27. P. 276–283.
6. *Dokshevich A.I.* Finit form solutions of Euler–Poisson equations. Kiev: Nauk. Dumka, 1992. 168 p. (in Russian)
7. *Gorr G.V., Maznev A.V., Shchetinina E.K.* Precession motions in the rigid body dynamics and in the dynamics of coupled rigid bodies. Donetsk: Donetsk National Univ., 2009. 222 p. (in Russian)
8. *Gorr G.V., Maznev A.V.* Dynamics of a gyrost at having a fixed point. Donetsk: Donetsk National Univ., 2010. 364 p. (in Russian)
9. *Gorr G.V., Maznev A.V., Kotov G.A.* The movement of the gyrost at with a variable gyrostatic moment. Donetsk: Publishing House of the Government Institution “Institute of Applied Mathematics and Mechanics”. 2017. 250 p.
10. *Gorr G.V., Rubanovskii V.N.* On one new class of motions of a system of rigid bodies coupled by hinges // Appl. Math. Mech. 1988. V. 50. № 5. P. 707–712. (in Russian)
11. *Ol'shanskii V.Yu.* On regular precessions of an asymmetrical rigid body with the liquid filling // Appl. Math. Mech. 2018. V. 82. № 5. P. 559–571. (in Russian)
12. *Ol'shanskii V.Yu.* New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // Celest. Mech. Dyn Astron. 2019. V. 131. Iss. 12. Article 57.
13. *Ol'shanskii V.Yu.* Semi-regular precession of an asymmetrical rigid body with the liquid filling // Appl. Math. Mech. 2021. V. 85. № 5. P. 547–564. (in Russian)
14. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // Egypt. J. Bas. Appl. Sci. 2015. V. 2. Iss. 3. P. 200–205.
15. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrost at) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egypt. Math. Soc. 2017. V. 25. Iss. 2. P. 216–219.
16. *Ol'shanskii V.Yu.* Regular precession of a gyrost at in the superposition of three homogeneous force fields // Appl. Math. Mech.. 2020. V. 86. № 6. P. 872.

- 
17. *Gorr G.V.* One class of resonance precession motions of a rigid body under the action of three homogeneous force fields // *Appl. Math. Mech.* 2023. V. 87. № 1. P. 3–18.  
<https://doi.org/10.31857/S0032823523010071>
  18. *Gorr G.V.* Statement of the problem on precessions of a rigid body with a fixed point in three homogenous force fields. Precessional-isoconical motions of the body // *Mechanics of Solids.* 2023. № 3. P. 123–134. (in Russian).  
<https://doi.org/10.31857/S0572329922600633>
  19. *Gorr G.V.* On a Class of Precessions of a Rigid Body with a Fixed Point under the Action of Forces of Three Homogeneous Force Fields // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* 2023. V. 19. № 2. P. 249–264.

УДК 539.3

## ХАРАКТЕРНЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ЧИСЛА В ПОЛУИЗОТРОПНОЙ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

© 2024 г. Е. В. Мурашкин<sup>а, \*</sup>, Ю. Н. Радаев<sup>а, \*\*</sup>

<sup>а</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: murashkin@ipmnet.ru, \*\*e-mail: radayev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 07.06.2024 г.

После доработки 03.07.2024 г.

Принята к публикации 08.07.2024 г.

В механике сплошных сред (особенно в гидроаэромеханике) широко распространены методы моделирования течения (деформации) по характерным числам. Настоящая работа посвящена поиску характерных комбинаций определяющих термоупругих модулей, геометрических и термомеханических параметров краевой задачи. Особенностью моделирования деформирования микрополярных тел по характерным числам является достаточно большое число (13) определяющих модулей. В линейном приближении выводятся определяющие уравнения, уравнения динамики и уравнение теплопроводности полуизотропного микрополярного термоупругого континуума. Проводится размерный анализ основной системы дифференциальных уравнений. Предложен физически согласованный ряд (9 первичных и несколько произвольных) безразмерных характерных комбинаций определяющих постоянных. Выполнен расчет характерных чисел для гармонических волн, распространяющихся вдоль оси свободного теплоизолированного длинного цилиндрического полуизотропного термоупругого волновода.

*Ключевые слова:* теплопроводность, микрополярное термоупругое тело, полуизотропное тело, характеристическое число, размерный анализ, нано/микродлина, нано/микромасштаб

DOI: 10.31857/S1026351924040035, EDN: UDKOJB

**1. Введение.** Современные экспериментальные исследования [1] отчетливо указывают на то, что важной особенностью многих материалов является чувствительность термомеханических свойств к преобразованиям, изменяющим ориентацию пространства на противоположную — инверсиям и зеркальным отражениям<sup>1</sup>. Одной из простейших математических моделей, в которой оказывается возможным учет указанной чувствительности, является модель полуизотропного микрополярного термоупругого

---

<sup>1</sup> При этом важна трехмерность пространства.

континуума, предложенная в работах [2–8]. В микрополярной теории термоупругости, как известно, трансляционные перемещения каждого элемента континуума сопровождаются микроповоротами (спинорными перемещениями). Спинорные и трансляционные перемещения считаются кинематически независимыми [9–11]<sup>2</sup>. Корректное построение определяющих уравнений и энергетических форм термодинамических потенциалов для полуизотропных микрополярных термоупругих сред требует привлечения аппарата алгебры и анализа псевдотензоров [13–17], исходя из принципа ковариантного постоянства целых степеней псевдотензорных единиц.

Исследование процессов распространения гармонических волн в телах с нано/микроструктурными особенностями является важной в прикладном аспекте задачей современной волновой термомеханики [18, 19]. При исследовании такой задачи, а также при моделировании по характерным числам [20–25] важную роль играют безразмерные комбинации определяющих термоупругих модулей, геометрических и термомеханических параметров краевой задачи. Подобные комбинации хорошо известны в гидромеханике в исследованиях термомеханических особенностей течения жидкостей и газов [20, 25] (число Нуссельта (Nu), число Эйлера (Eu), число Рейля (Ra), число Фруда (Fr), число Грасхофа (Gr), число Прандтля (Pr), число Рейнольдса (Re), число Ричардсона (Ri), число Струхала (Sh) и т.д.).

В настоящей работе исследуются характерные комбинации определяющих термоупругих модулей, геометрических и термосиловых параметров краевой задачи. Особенностью моделирования по характерным числам является достаточно большое число (13) определяющих модулей. В линейном приближении выводятся определяющие уравнения, уравнения динамики и уравнение теплопроводности полуизотропного микрополярного термоупругого континуума. Проводится размерный анализ указанной системы уравнений. Предложен физически согласованный ряд (9 первичных и несколько произвольных) безразмерных характерных комбинаций определяющих постоянных. Выполнен расчет характерных чисел для гармонических волн, распространяющихся вдоль оси свободного теплоизолированного длинного цилиндрического полуизотропного термоупругого волновода.

**2. Упругий потенциал и определяющие уравнения связанной полуизотропной термоупругости.** Примем линеаризованную по функциональным аргументам объемную плотность свободной энергии Гельмгольца для анизотропного микрополярного термоупругого континуума<sup>3</sup> в виде [26]:

$$\Psi = \underset{\text{I}}{\text{E}} \epsilon_{(ik)(lm)}^{(ik)(lm)} \epsilon_{(ik)} \epsilon_{(lm)} + \underset{\text{II}}{\text{E}} \kappa_{(ik)(lm)}^{(ik)(lm)} \kappa_{(ik)} \kappa_{(lm)} + \underset{\text{III}}{\text{E}} \epsilon_{(ik)} \kappa_{(lm)}^{(ik)(lm)} + \underset{\text{IV}}{\text{E}} \epsilon_{(ik)} \phi^l +$$

<sup>2</sup> Последнее обстоятельство означает, что они могут быть введены в модель микрополярного тела без привлечения метода множителей Лагранжа.

<sup>3</sup> Заметим, что в работах В. Новацкого [10, 11], в записи энергетической формы термоупругого потенциала все слагаемые с температурой введены со знаком минус. Указанное обстоятельство выглядит достаточно неубедительным с точки зрения положительной определенности энергетической квадратичной формы. Поэтому в формуле (1) все слагаемые вводятся с положительным знаком.

$$\begin{aligned}
& + E_{V \cdot l}^{(ik)} \kappa_{(ik)} \varphi^l + E_{VI}^{(ik)l} \epsilon_{(ik)} \kappa_l + E_{VII}^{(ik)l} \kappa_{(ik)} \kappa_l + E_{VIII(i)l} \varphi^i \varphi^l + E_{IX}^{(il)} \kappa_i \kappa_l + \\
& + E_{X \cdot l}^i \varphi^i \kappa_l + E_{XI}^{(ik)} \epsilon_{(ik)} \theta + E_{XII}^{(ik)} \kappa_{(ik)} \theta + E_{XIII \cdot i} \varphi^i \theta + E_{XIV}^i \kappa_i \theta + E_{XV} \theta^2, \quad (2.1)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
& E_I^{(ik)(lm)}, E_{II}^{(ik)(lm)}, E_{III}^{(ik)(lm)}, E_{IV \cdot l}^{(ik)}, E_{V \cdot l}^{(ik)}, E_{VI}^{(ik)l}, \\
& E_{VII(ik)l}, E_{VIII(il)}, E_{IX}^{(il)}, E_{X \cdot l}^i, E_{XI}^{(ik)}, E_{XII}^{(ik)}, E_{XIII \cdot i}, E_{XIV}^i, E_{XV}
\end{aligned}$$

— определяющие тензоры анизотропного микрополярного термоупругого континуума;  $\theta \rightarrow \theta - \theta_0$  — температурный инкремент (считается малой первого порядка);  $\theta_0$  — референциальная температура;  $\epsilon_{(ik)}$  — симметричная часть асимметричного тензора деформации;  $\kappa_{(ik)}$  — симметричная часть тензора изгиба—кручения;  $\varphi^i$  — вектор, сопутствующий антисимметричной части асимметричного тензора деформации;  $\kappa_i$  — вектор, сопутствующий антисимметричной части тензора изгиба—кручения.

Асимметричный тензор деформации, тензор изгиба—кручения, их симметричные части и сопутствующие векторы определяются в терминах векторов трансляционных  $u^k$  и спинорных  $\phi^k$  перемещений согласно равенствам:

$$\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - \epsilon_{ijk} \phi^k, \quad \kappa_i^s = \nabla_i \phi^s, \quad (2.2)$$

$$\epsilon_{(kl)} = \frac{1}{2}(\nabla_k u_l + \nabla_l u_k), \quad \kappa_{(kl)} = \frac{1}{2}(\nabla_k \phi_l + \nabla_l \phi_k), \quad (2.3)$$

$$\varphi^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{ikl} \epsilon_{[kl]}, \quad \kappa_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} \kappa^{[kl]}, \quad (2.4)$$

где  $\epsilon^{ikj} = \epsilon_{ikj}$  — символы перестановок,  $\nabla_k$  — оператор ковариантного дифференцирования. Символы перестановок, как и метрический тензор  $g_{ij}$ , считаются физически безразмерными объектами. Круглые и квадратные скобки означают операции симметрирования и альтернирования по заключенным в них индексам.

Следствием второго закона термодинамики для полуизотропных микрополярных термоупругих тел являются определяющие уравнения:

$$\begin{aligned}
t^{(ij)} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{(ij)}}, & \mu^{(ik)} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa_{(ik)}}, \\
2\tau_i &= \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi^i}, & 2\mu^i &= \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa_i}, \\
S &= -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, & J^j &= J^j (\nabla_k \ln \theta).
\end{aligned} \quad (2.5)$$

Приведенное уравнение баланса свободной энергии запишем в форме [27, 28]:

$$-(\partial_t \Psi + S \partial_t \theta) + \iota^{(ij)} \partial_t \epsilon_{(ij)} + \mu^{(ik)} \partial_t \kappa_{(ik)} + \tau_i \partial_t \varphi^i + \mu^i \partial_t \kappa_i - \theta^{-1} h^i \nabla_i \theta = \Xi \theta. \quad (2.6)$$

Здесь  $\partial_t$  — производная по времени при фиксированных координатах  $x^k$ ,  $S$  — объемная плотность энтропии,  $\Xi$  — неконтролируемое производство энтропии (в единицу времени, в расчете на единицу объема).

Уравнение баланса энтропии в рамках предлагаемой к рассмотрению схемы исследования принимает вид:

$$\partial_t S = -\nabla_j J^j + \Sigma + \Xi, \quad (2.7)$$

где  $J^j$  — вектор потока энтропии,  $\Sigma$  — объемная плотность контролируемого производства энтропии. В дальнейшем изложении будем полагать отсутствие лучистого тепла, т.е.  $\Sigma = 0$ .

Для неконтролируемого производства энтропии справедлива следующая цепочка равенств:

$$\Xi = -\theta^{-2} h^j \nabla_j \theta = -\theta^{-1} J^j (\nabla_k \ln \theta) \nabla_j \ln \theta. \quad (2.8)$$

Нелинейное уравнение теплопроводности получим подстановкой определяющих уравнений (2.5) в уравнение баланса энтропии (2.7), учитывая

$$\theta J^j = h^j.$$

В силу абсолютной инвариантности температуры алгебраические веса потока тепла и энтропии совпадают.

В итоге получим:

$$\frac{\partial S}{\partial \epsilon_{(ij)}} \partial_t \epsilon_{(ij)} + \frac{\partial S}{\partial \kappa_{(ik)}} \partial_t \kappa_{(ik)} + \frac{\partial S}{\partial \varphi^i} \partial_t \varphi^i + \frac{\partial S}{\partial \kappa_i} \partial_t \kappa_i + \frac{\partial S}{\partial \theta} \partial_t \theta = -\theta^{-1} \nabla_j h^j. \quad (2.9)$$

В качестве закона теплопроводности примем линейный закон Фурье:

$$h^k = - \underset{\text{XVI}}{E}^{ki} \nabla_i \theta, \quad (2.10)$$

где  $\underset{\text{XVI}}{E}^{ki}$  — определяющий тензор теплопроводности.

После линеаризации уравнения теплопроводности (2.9) с учетом (2.11) и (2.10) окончательно получим:

$$\underset{\text{XI}}{E}^{(ij)} \partial_t \epsilon_{(ij)} + \underset{\text{XII}}{E}^{(ij)} \partial_t \kappa_{(ij)} + \underset{\text{XIII}}{E}_i \partial_t \varphi^i + \underset{\text{XIV}}{E}^i \partial_t \kappa_i + \theta_0^{-1} C \partial_t \theta = \theta_0^{-1} \underset{\text{XVI}}{E}^{js} \nabla_j \nabla_s \theta,$$

где  $C$  — теплоемкость тела в расчете на единицу объема.

Определяющие уравнения (2.5), соответствующие квадратичной форме свободной энергии Гельмгольца (2.1), принимают вид:

$$\begin{aligned}
t^{(ik)} &= 2E_I^{(ik)(lm)} \epsilon_{(lm)} + E_{III}^{(ik)(lm)} \kappa_{(lm)} + E_{IV}^{(ik) \cdot l} \varphi^l + E_{VI}^{(ik)l} \kappa_l + E_{XI}^{(ik)} \theta, \\
\mu^{(ik)} &= 2E_{II}^{(ik)(lm)} \kappa_{(lm)} + E_{III}^{(lm)(ik)} \epsilon_{(lm)} + E_V^{(ik) \cdot l} \varphi^l + E_{VII}^{(ik)l} \kappa_l + E_{XII}^{(ik)} \theta, \\
2\tau_i &= 2E_{VIII}^{(il)} \varphi^l + E_X^{ \cdot l} \kappa_l + E_{IV}^{(lm) \cdot i} \epsilon_{(lm)} + E_V^{(lm) \cdot i} \kappa_{(lm)} + E_{XIII}^i \theta, \\
2\mu^i &= 2E_{IX}^{(il)} \kappa_l + E_X^{ \cdot i} \varphi^l + E_{VI}^{(lm)i} \epsilon_{(lm)} + E_{VII}^{(lm)i} \kappa_{(lm)} + E_{XIV}^i \theta, \\
S &= -E_{XI}^{(ik)} \epsilon_{(ik)} - E_{XII}^{(ik)} \kappa_{(ik)} - E_{XIII}^i \varphi^i - E_{XIV}^i \kappa_i - E_{XV} \theta.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Для полуизотропного микрополярного термоупругого тела определяющие тензоры в декартовой системе координат примут вид [29–32]:

$$\begin{aligned}
E_I^{(is)(lm)} &= a \delta_{is} \delta_{lm} + \frac{1}{2}(b+c)(\delta_{il} \delta_{sm} + \delta_{im} \delta_{sl}), \\
E_{II}^{(is)(lm)} &= a \delta_{is} \delta_{lm} + \frac{1}{2}(b+c)(\delta_{il} \delta_{sm} + \delta_{im} \delta_{sl}), \\
E_{III}^{(is)(lm)} &= a \delta_{is} \delta_{lm} + \frac{1}{2}(b+c)(\delta_{il} \delta_{sm} + \delta_{im} \delta_{sl}), \\
E_{IV}^{(kj)} &= (b-c) \delta_{kj}, \quad E_V^{(kj)} = (b-c) \delta_{kj}, \quad E_{VI}^{kj} = -(b-c) \delta_{kj}, \\
E_{XI}^{(ik)} &= d g^{ik}, \quad E_{XII}^{(ik)} = d g^{ik}, \quad E_{XV} = F, \\
E_{VII}^{(is)k} &= E_{VIII}^{(is)k} = E_{IX}^{k(lm)} = E_X^{(is)j} = E_{XIII}^i = E_{XIV}^i = 0.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Кроме того, для полуизотропного тела шаровым оказывается тензор коэффициентов теплопроводности:

$$E_{XVI}^{js} = \lambda g^{js},$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности.

Определяющие постоянные удобно выразить в терминах материальных термомеханических параметров в следующем виде [33–35]:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2G\nu(1-2\nu)^{-1}, \quad b+c_1 = 2G, \quad b-c_1 = 2Gc_1, \\
a_2 &= 2GL^2 c_3, \quad b+c_2 = 2GL^2, \quad b-c_2 = GL^2 c_2, \\
a_3 &= 2GLc_4, \quad b+c_3 = 2GLc_5, \quad c-b_3 = GLc_6, \\
d_1 &= -4G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha, \quad d_2 = -4GL^2 \beta, \quad F = E_{XV} = -\frac{\rho c}{\theta_0},
\end{aligned} \tag{2.13}$$

где  $G$  — модуль сдвига;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $L$  — характерная микродлина;  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  — не имеющие физической размерности псевдоскаляры;  $\alpha_*$  — коэффициент линейного теплового расширения;  $\beta_*$  — коэффициент теплового искажения (см. [2, 7]).

**3. Уравнения динамики и уравнение теплопроводности связанной полуизотропной микрополярной термоупругости.** Уравнения динамики микрополярного континуума выводятся из вариационного принципа виртуальных перемещений в ковариантной форме:

$$\begin{aligned} \nabla_i t^{ik} &= -\rho(f^k - \partial^2 \dots u^k), \\ \nabla_i \mu^i_k &- 2\tau_k = -\rho(l_k - \mathcal{I}\partial^2 \dots \phi_k). \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $f^i$  — вектор массовых сил,  $l_i$  — вектор массовых моментов.

Определяющие уравнения полуизотропной микрополярной среды, учитывая замену (2.13), записываются в форме:

$$\begin{aligned} t^{(is)} &= 2G \left( \nu(1-2\nu)^{-1} g^{is} g^{lm} + g^{il} g^{sm} \right) \epsilon_{(lm)} + \\ &+ GL(c_4 g^{is} g_{lm} \kappa^{(lm)} + c_5 \kappa^{(is)}) - 2G \alpha_* \frac{1+\nu}{1-2\nu} g^{is} \theta, \\ \mu_{(is)} &= 2GL^2(c_3 g_{is} g_{lm} + g_{il} g_{sm}) \kappa^{(lm)} + GL(c_4 g_{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + c_5 \epsilon_{(is)}) - 2GL^2 \beta_* g_{is} \theta, \\ \tau_i &= 2Gc_1 g_{is} \varphi^s + \frac{1}{2} GLc_6 \kappa_i, \\ \mu^i &= 2GL^2 c_2 g^{is} \kappa_s + \frac{1}{2} GLc_6 \varphi^i, \end{aligned} \quad (3.2)$$

Возвращаясь к записи в терминах асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений, получим:

$$\begin{aligned} t_{is} &= G \left[ (1+c_1) \nabla_i u_s + (1-c_1) \nabla_s u_i + 2\nu(1-2\nu)^{-1} g_{is} \nabla_k u^k - \right. \\ &- 2c_1 e_{isl} \phi^l + Lc_4 g_{is} \nabla_l \phi^l + Lc_5 \nabla_{(i} \phi_{s)} - \left. \frac{1}{2} Lc_6 \nabla_{[i} \phi_{s]} - 2g_{is} \alpha_* \frac{1+\nu}{1-2\nu} \theta \right], \\ \mu_{is} &= GL^2 \left[ (1+c_2) \nabla_i \phi_s + (1-c_2) \nabla_s \phi_i + 2c_3 g_{is} \nabla_l \phi^l + \right. \\ &+ L \left( c_4 g_{is} \nabla_l u^l + c_5 \nabla_{(i} u_{s)} - \frac{1}{2} c_6 \nabla_{[i} u_{s]} + \frac{1}{2} c_6 \phi_{sl} \phi^l \right) - \left. 2\beta_* g_{is} \theta \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подставив полученные определяющие уравнения (3.3) в уравнения динамики (3.1), дополнив их уравнением теплопроводности [27, 28] для полуизотропного микрополярного тела, получим замкнутую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &GL^2 [(1+c_2) \nabla^s \nabla_s \phi_i + (1-c_2 + 2c_3) \nabla_i \nabla_k \phi^k + \\ &+ L^{-1} c_4' \nabla_i \nabla^k u_k + L^{-1} c_5' \nabla^k \nabla_k u_i + L^{-1} c_6' \epsilon_{isl} \nabla^s \phi^l] - \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
& -2Gc_1(2\phi_i - e^2 \epsilon_{ikl} g^{ks} \nabla_s u^l) - 2GL^2 \beta \nabla_i \theta = -\rho(l_i - \mathcal{J} \partial_i \phi_i), \\
& \lambda \nabla_s \nabla^s \theta - C \partial_i \theta - 2G \alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} \theta_0 \nabla_s \partial_i u^s - 2GL^2 \beta \theta_0 \nabla_s \partial_i \phi^s = 0,
\end{aligned}$$

где приняты следующие обозначения:

$$c'_4 = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c'_5 = \frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c'_6 = -c_6. \quad (3.5)$$

Размерности основных тензорных величин и определяющих постоянных микрополярной термомеханики в системе СИ представлены в табл. 1 и 2. Кроме того, в табл. 1 и 2 приводятся алгебраические веса, соответствующие используемым псевдоинвариантным элементам объема и площади [36–38].

**4. Размерный анализ связанной системы уравнений динамики полуизотропного микрополярного термоупругого тела.** Здесь и далее введем в рассмотрение функцию d.i.m, действующую на физическое поле и равную значению его размерности в системе СИ. Для безразмерного физического поля  $\varphi$  функция d.i.m принимает пустое значение:

$$\text{d.i.m}(\varphi) = \text{null}. \quad (4.1)$$

Криволинейные координаты не всегда имеют одинаковую размерность. Поэтому, при анализе размерностей следует преобразовать метрическую форму так чтобы криволинейные координаты имели одну и ту же размерность. После чего необходимо осуществить переход к безразмерным криволинейным координатам с помощью размерного множителя. Схематически это можно представить следующим образом:

$$\text{d.i.m}(x^i) = \text{var} \rightarrow \text{d.i.m}(x^i) = \text{m} \rightarrow \text{d.i.m}(x^i) = \text{null}. \quad (4.2)$$

Следуя предложенной процедуре, заменим размерные физические поля и геометрические объекты их безразмерными аналогами с помощью масштабирующей замены переменных и физических полей:

$$\begin{aligned}
x^i & \rightarrow l_1 x^i, \quad t & \rightarrow \tau t, \\
\theta & \rightarrow \theta_0 \theta, \quad \partial_i & \rightarrow \tau^{-1} \partial_i, \\
\mathbf{u} & \rightarrow l_2 \mathbf{u}, \quad \nabla & \rightarrow l_1^{-1} \nabla, \\
\mathbf{t} & \rightarrow G \mathbf{t}, \quad \boldsymbol{\mu} & \rightarrow GL \boldsymbol{\mu}, \\
(2) & & (2) \quad (2)
\end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $x^i$  — координаты;  $l_1$  и  $l_2$  — масштабные факторы длины ( $\text{d.i.m}(l_1) = \text{d.i.m}(l_2) = \text{m}$ );  $\tau$  — масштабный фактор времени ( $\text{d.i.m}(\tau) = \text{c}$ );  $G$  — масштабный фактор силовых напряжений ( $\text{d.i.m}(G) = \text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ );  $GL$  — масштабный фактор моментных напряжений ( $\text{d.i.m}(GL) = \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$ ). В схеме (21) безразмерные переменные, находящиеся в правых частях соотношений, следует

отличать от размерных, например с помощью волны сверху корневого символа, что неизбежно приведет к усложнению записи дифференциальных уравнений. Поэтому для упрощения записи формул в дальнейшем опустим указанное обозначение и будем вести изложение в безразмерных переменных.

С учетом масштабирующей замены (4.3) запишем уравнения (3.4) в векторном виде:

$$\begin{aligned}
 & (1 + c_1) \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + (1 - c_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1}) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + 2l_1 l_2^{-1} c_1 \nabla \times \boldsymbol{\phi} + \\
 & + Ll_2^{-1} c_4' \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} + Ll_2^{-1} c_5' \nabla \cdot \nabla \boldsymbol{\phi} - 2l_1 l_2^{-1} \theta_0 \alpha \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \nabla \theta = \rho G^{-1} l_1^2 \tau^{-2} \ddot{\mathbf{u}}, \\
 & (1 + c_2) \nabla \cdot \nabla \boldsymbol{\phi} + (1 - c_2 + 2c_3) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} + L^{-1} l_2 c_4' \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \\
 & + L^{-1} l_2 c_5' \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + L^{-1} l_1 c_6' \nabla \times \boldsymbol{\phi} - 2L^{-2} l_1^2 c_1 (2\boldsymbol{\phi} - l_1 l_2^{-1} \nabla \times \mathbf{u}) - \\
 & - 2l_1 \theta_0 \beta \nabla \theta = \rho \mathcal{J} G^{-1} L^{-2} l_1^2 \tau^{-2} \ddot{\boldsymbol{\phi}}, \\
 & \nabla \cdot \nabla \theta - C \lambda^{-1} l_1^2 \tau^{-1} \partial \theta - 2G \lambda^{-1} \alpha l_1 l_2 \tau^{-1} \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \nabla \cdot \partial \mathbf{u} - \\
 & - 2G \lambda^{-1} L^2 l_1 \tau^{-1} \beta \nabla \cdot \partial \boldsymbol{\phi} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Анализируя систему дифференциальных уравнений (4.4), можно выделить следующие характерные комбинации определяющих постоянных и масштабирующих параметров:

$$\begin{aligned}
 \text{Ch}_1 &= Ll_2^{-1}, & \text{Ch}_2 &= \rho G^{-1} l_1^2 \tau^{-2}, & \text{Ch}_3 &= \rho \mathcal{J} G^{-1} L^{-2} l_1^2 \tau^{-2}, \\
 \text{Ch}_4 &= l_1 l_2^{-1}, & \text{Ch}_5 &= C \lambda^{-1} l_1^2 \tau^{-1}, & \text{Ch}_6 &= 2G \lambda^{-1} \alpha l_1 l_2 \tau^{-1}, \\
 \text{Ch}_7 &= 2\beta \theta_0 l_1, & \text{Ch}_8 &= 2Ch_4 \theta_0 \alpha \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu}, & \text{Ch}_9 &= 2G \lambda^{-1} \beta L^2 l_1 \tau^{-1}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Отметим, что характерное число  $\text{Ch}_1$  чувствительно к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства. Указанное обстоятельство говорит об исключительной важности данного числа при моделировании процессов деформирования полуизотропных микрополярных термоупругих тел.

Кроме 9 характерных чисел (4.5), характерным числом может являться комбинация физически безразмерных определяющих модулей, т.е.

$$\text{Ch} = F_p(\nu, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \tag{4.6}$$

а также совместные комбинации характерных чисел (4.5) и (4.6). Функция  $F_p$  вычисляется согласно правилу:

$$F_p(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, \nu) = \sum_{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7} A_{p_1 p_2 \dots p_7} c_1^{p_1} c_2^{p_2} c_3^{p_3} c_4^{p_4} c_5^{p_5} c_6^{p_6} \nu^{p_7}, \tag{4.7}$$

где  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7$  — целые числа, связанные соотношением

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = P. \quad (4.8)$$

После подстановки характерных чисел (4.5) в систему (4.4) получим:

$$\begin{aligned} (1 + c_1) \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + (1 - c_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1}) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + 2 \text{Ch}_4 c_1 \nabla \times \boldsymbol{\phi} + \\ + \text{Ch}_1 c_4' \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} + \text{Ch}_1 c_5' \nabla \cdot \nabla \boldsymbol{\phi} - \text{Ch}_8 \nabla \theta = \text{Ch}_2 \ddot{\mathbf{u}}, \\ (1 + c_2) \nabla \cdot \nabla \boldsymbol{\phi} + (1 - c_2 + 2c_3) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} + \text{Ch}_1^{-1} c_4' \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \\ + \text{Ch}_1^{-1} c_5' \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + 2 \text{Ch}_1^{-1} \text{Ch}_4^{-1} c_6' \nabla \times \boldsymbol{\phi} - \\ - 2 \text{Ch}_1^{-2} \text{Ch}_4^{-2} c_1 (2\boldsymbol{\phi} - \text{Ch}_4 \nabla \times \mathbf{u}) - \text{Ch}_7 \nabla \theta = \text{Ch}_3 \ddot{\boldsymbol{\phi}}, \\ \nabla \cdot \nabla \theta - \text{Ch}_5 \partial_t \theta - \text{Ch}_6 \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \nabla \cdot \partial_t \mathbf{u} - \text{Ch}_9 \nabla \cdot \partial_t \boldsymbol{\phi} = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

**5. Распространение связанных гармонических волн полей температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в цилиндрическом волноводе.** Рассмотрим задачу о распространении связанной гармонической волны с частотой  $\omega$  вдоль оси свободного теплоизолированного длинного цилиндрического волновода радиуса  $a$ . В этом случае поля температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений можно представить в форме:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} e^{-i\omega t}, \quad \boldsymbol{\phi} = \mathbf{S} e^{-i\omega t}, \quad \theta = B e^{-i\omega t}, \quad (5.1)$$

где  $\omega$  — циклическая частота гармонической волны;  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{S}$  — (комплексные) векторы пространственной поляризации волны;  $B$  — (комплексная) амплитуда температурного инкремента. Поиск решения удобно проводить в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ .

В рассматриваемом случае удобно принять  $l_1 = l_2 = l$ . Тогда в качестве масштабных факторов линейного размера и времени примем радиус цилиндра  $l = a$  и циклическую частоту  $\tau = \omega^{-1}$ . Замену переменных произведем согласно

$$\begin{aligned} r &\rightarrow ar, & z &\rightarrow az, & t &\rightarrow \omega^{-1} t, \\ \theta &\rightarrow \theta_0 \theta, & \partial &\rightarrow \omega \partial, \\ \mathbf{u} &\rightarrow a \mathbf{u}, & \nabla &\rightarrow a^{-1} \nabla, \\ \mathbf{t}_{(2)} &\rightarrow G \mathbf{t}_{(2)}, & \boldsymbol{\mu} &\rightarrow GL \boldsymbol{\mu}_{(2)}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

В этом случае характерные числа (23) примут вид:

$$\begin{aligned} \text{Ch}_1 &= La^{-1}, & \text{Ch}_2 &= \rho G^{-1} a^2 \omega^2, & \text{Ch}_3 &= \rho \mathcal{J} G^{-1} L^2 a^2 \omega^2, \\ \text{Ch}_4 &= 1, & \text{Ch}_5 &= C \lambda^{-1} a^2 \omega^1, & \text{Ch}_6 &= 2 G \lambda^{-1} \alpha a^2 \omega^1, \\ \text{Ch}_7 &= 2 \beta \theta_0 a, & \text{Ch}_8 &= 2 \theta_0 \alpha \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu}, & \text{Ch}_9 &= 2 G \lambda^{-1} \beta L^2 a \omega^1. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Анализируя выражения (5.3), можно заключить следующее:

$$\text{Ch}_1 \ll 1 \quad (5.4)$$

или

$$L \ll a, \quad (5.5)$$

т.е. характерный линейный размер (радиус цилиндрического волновода) существенно больше характерной нано/микродлины.

Второе характерное число можно преобразовать, вспоминая, что волновое число, соответствующее распространению поперечной/продольной волны, связано с циклической частотой и скоростями соотношениями:

$$\omega^2 = k_{\perp}^2 c_{\perp}^2 = k_p^2 c_p^2. \quad (5.6)$$

Кроме того, учитывая, что квадраты скоростей поперечной и продольной волн равны соответственно:

$$c_{\perp}^2 = G\rho^{-1}, \quad c_p^2 = G\rho^{-1}(1 - \nu)(1 - 2\nu)^{-1}, \quad (5.7)$$

получим

$$\text{Ch}_2 = a^2 k_p^2 c_p^2 c_{\perp}^{-2} = a^2 k_{\perp}^2. \quad (5.8)$$

Отметим, что в качестве масштабных факторов длины можно было бы выбрать волновые числа  $k_p$  или  $k_{\perp}$ , что говорит о гибкости методов моделирования по характерным числам.

**Заключение.** Настоящая работа посвящена моделированию деформирования микрополярных тел по характерным числам. Метод впервые появился в задачах гидроаэромеханики.

1. Развита 13-константная модель полуизотропного микрополярного термоупругого тела в терминах конвенциональных упругих модулей, характерной нано/микродлины, безразмерных микрополярных модулей и термических модулей.

2. Базовая энергетическая квадратичная форма выбрана как анизотропное E-представление свободной энергии Гельмгольца, найденная в результате определенного алгоритма.

3. Рассмотрена “прямая” форма уравнений динамики и уравнения теплопроводности полуизотропного микрополярного термоупругого тела.

4. Выполнен размерный анализ системы дифференциальных уравнений полуизотропного микрополярного термоупругого тела.

5. Предложен физически обоснованный перечень безразмерных характерных чисел, сформированный из микрополярных упругих и термических модулей.

6. Анализ размерностей выполнен исходя из метрической формы, преобразованной так, чтобы криволинейные координаты имели одну и ту же размерность. Затем осуществлен переход к безразмерным криволинейным координатам с помощью размерного множителя.

7. В качестве примера рассмотрено гармоническое волновое поле в длинном теплоизолированном цилиндрическом полуизотропном термоупругом волноводе. Перечень включает характерные комбинации с радиусом волновода, характерными фазовыми скоростями и волновыми числами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 23-21-00262.

**Таблица 1.** Основные тензоры и псевдотензоры микрополярной термомеханики

Терминологическое обозначение	Символьное обозначение	Размерность СИ	Алгебраический вес		
			$[-1]$ $d\tau$	$d\tau$	$[+1]$ $d\tau$
вектор трансляционных перемещений	$\mathbf{u}$	м	0	0	0
псевдовектор спинорных перемещений	$\boldsymbol{\phi}$	null	+1		+1
псевдовектор вихря поля	$\boldsymbol{\omega}$	null	+1	+1	+1
псевдовектор относительного микроповорота	$\boldsymbol{\varphi}$	null	+1	+1	+1
псевдотензор деформации изгиба–кручения	$\boldsymbol{\kappa}^{(2)}$	$M^{-1}$	+1	+1	+1
сопутствующий вектор деформации изгиба–кручения	$\boldsymbol{\kappa}^{(1)}$	$M^{-1}$	0	0	0
ассимметричный тензор деформаций	$\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}$	null		0	0
плотность	$\rho$	$кг \cdot м^{-3}$	+1	-1	0
термодинамическая температура	$\theta$	$кг \cdot м^2 \cdot с^{-2}$	0	0	0
лучистое тепло в расчете на единицу объема	$Q$	$кг \cdot м^{-1} \cdot с^{-2}$	0	0	0
работа	$A$	$кг \cdot м^2 \cdot с^{-2}$	0	0	0
псевдовектор потока энтропии	$\mathbf{J}$	$м^{-2} \cdot с^{-1}$	+1	-1	0
псевдовектор потока тепла	$\mathbf{h}$	$кг \cdot с^{-3}$	+1	-1	0
объемная плотность внутренней энергии	$U$	$кг \cdot м^{-1} \cdot с^{-2}$	+1	-1	0
объемная плотность свободной энергии Гельмгольца	$\Psi$	$кг \cdot м^{-1} \cdot с^{-2}$	+1	-1	0
объемная плотность энтропии	$S$	$м^{-3}$	+1	-1	0
объемная плотность контролируемого производства энтропии	$\Sigma$	$м^{-3} \cdot с^{-1}$	+1	-1	0

Окончание табл. 1

Терминологическое обозначение	Символьное обозначение	Размерность СИ	Алгебраический вес		
			$^{[-1]}d\tau$	$d\tau$	$^{[+1]}d\tau$
объемная плотность неконтролируемого производства энтропии	$\Xi$	$\text{м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$	+1	-1	0
псевдовектор поверхностных сил	$\mathbf{t}_{(1)}$	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{с}^{-2}$	+1	-1	0
тензор силовых напряжений	$\mathbf{t}_{(2)}$	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{с}^{-2}$	+1	-1	0
псевдовектор объемных сил	$\mathbf{X}$	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-2}$	+1	-1	0
вектор массовых сил	$\mathbf{f}$	$\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$	0	0	0
псевдовектор поверхностных моментов	$\mathbf{m}$	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$	0	-2	-1
тензор моментных напряжений	$\boldsymbol{\mu}_{(2)}$	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$	0	-2	-1
сопутствующий псевдовектор моментных напряжений	$\boldsymbol{\mu}_{(1)}$	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$	+1	-1	0
сопутствующий псевдовектор силовых напряжений	$\boldsymbol{\tau}$	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$	0	-2	-1
псевдовектор объемных моментов	$\mathbf{Y}$	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$	0	-2	-1
псевдовектор массовых моментов	$\mathbf{l}$	$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$	-1	-1	-1
коэффициент микроинерции	$\mathfrak{I}$	$\text{м}^2$	-2	-2	-2

**Таблица 2.** Определяющие псевдотензоры и псевдоскаляры полуизотропной микрополярной термоупругости

Терминологическое обозначение	Символьное обозначение	Размерность СИ	Алгебраический вес		
			$^{[-1]}d\tau$	$d\tau$	$^{[+1]}d\tau$
определяющий тензор I	$\mathbf{E}_I^{(ik)(lm)}$	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$	+1	0	-1
определяющий тензор II	$\mathbf{E}_{II}^{(ik)(lm)}$	$\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$	-1	-2	-3
определяющий тензор III	$\mathbf{E}_{III}^{(ik)(lm)}$	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$	0	-1	-2
определяющий тензор IV	$\mathbf{E}_{IV}^{(ik)}$	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$	0	-1	-2

Окончание табл. 2

Терминологическое обозначение	Сим-вольное обозначение	Размерность СИ	Алгебраический вес		
			$^{[-1]}$ $d\tau$	$d\tau$	$^{[+1]}$ $d\tau$
определяющий тензор V	$E_V^{(ik)}$	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$	-1	-2	-3
определяющий тензор VI	$E_{VI}^{(ik)l}$	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-2}$	+1	0	-1
определяющий тензор VII	$E_{VII}^{(ik)l}$	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$	0	-1	-2
определяющий тензор VIII	$E_{VIII}^{(il)}$	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$	-1	-2	-3
определяющий тензор IX	$E_{IX}^{(il)}$	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$	+1		-1
определяющий тензор X	$E_X^l$	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$	0	-1	-2
определяющий тензор XI	$E_{XI}^{(ik)}$	$\text{м}^{-3}$	+1	0	-1
определяющий тензор XII	$E_{XII}^{(ik)}$	$\text{м}^{-2}$	0	-1	-2
определяющий тензор XIII	$E_{XIII}^i$	$\text{м}^{-3}$	0	-1	-2
определяющий тензор XIV	$E_{XIV}^i$	$\text{м}^{-2}$	+1	0	-1
определяющий тензор XV	$E_{XV}$	$\text{с}^{-1}$	+1	0	-1
модуль сдвига	$G$	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$	+1	0	-1
коэффициент Пуассона	$\nu$	null	0	..	0
характерная микродлина	$L$	м	-1	-1	-1
определяющий скаляр i	$c_1$	null		0	0
определяющий скаляр ii	$c_2$	null	0	0	0
определяющий скаляр iii	$c_3$	null	0	0	0
определяющий скаляр iv	$c_4$	null	0	0	0
определяющий скаляр v	$c_5$	null	0	0	0
определяющий скаляр vi	$c_6$	null	0	0	0
коэффициент линейного теплового расширения	$\alpha_*$	$\text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^2$	0	0	0
коэффициент теплового искажения	$\beta_*$	$\text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{с}^2$	+1	+1	+1
коэффициент теплопроводности	$\lambda$	$\text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$	+1	0	-1
теплоемкость на единицу объема	$C$	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-3}$	+1	0	-1

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lakes R.* Composites and metamaterials. Singapore: World Scientific, 2020.
2. *Радаев Ю.Н.* Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. № 3. С. 504–517.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>
3. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* К теории линейных гемитропных микрополярных сред // Вестник Чувашия государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4(46). С. 16–24.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.89.81.031>
4. *Murashkin E.V., Radaev Y.N.* Coupled thermoelasticity of hemitropic media. pseudotensor formulation // Mechanics of Solids. 2023. V. 58. № 3. P. 802–813.  
<http://dx.doi.org/10.3103/s0025654423700127>
5. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашия государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 3(57). С.112–128.  
<http://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.010>
6. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // Вестник Чувашия государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 4(58). С. 86–120.  
<http://doi.org/10.37972/chgpu.2023.58.4.010>
7. *Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В.* Псевдотензорная формулировка механики полуизотропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 4. С. 399–412.  
<https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>
8. *Murashkin E.V., Radaev Y.N.* On a micropolar theory of growing solids // Вестник Самарско-го государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020. Т. 24. № 3. С. 424–444.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>
9. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. Paris: Herman et Fils, 1909. vi+226 p.
10. *Nowacki W.* Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972. 285 p.
11. *Nowacki W.* Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
12. *Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. V. 24. № 4. P. 752–761.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>
13. *Гуревич Г.Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. 408 с. [*G.B. Gurevich* Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen: Noordhoff, 1964. 429 p.]
14. *McConnell A.J.* Application of tensor analysis. New York: Dover Publications Inc., 1957. 318 p.

15. *Сокольников И.С.* Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с. [*Sokolnikoff I.S.* Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p.]
16. *Схоутен Я.А.* Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. 456 с. [*Schouten J.A.* Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 p.]
17. *Synge J.L., Schild A.* Tensor calculus. V. 5. Courier Corporation, 1978. 324 p.
18. *Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.* Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: Физматлит, 2009. 156 с.
19. *Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Саратов. ун-т, 2010. 328 с.
20. *Биркгоф Г.* Гидродинамика: Методы, факты: подобие. М.: Иностранная литература, 1963. 246 с.
21. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 440 с.
22. *Кутателадзе С.С.* Анализ подобия и физические модели. 1986.
23. *Barenblatt G.I.* Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics: dimensional analysis and intermediate asymptotics. Cambridge: Cambridge University Press, 1996. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107050242>
24. *Zohuri B.* Similitude Theory and Applications. In: Dimensional Analysis and Self-Similarity Methods for Engineers and Scientists. Cham: Springer, 2015. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-13476-5\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-13476-5_2)
25. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1950.
26. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 4 (58). С. 86–120. <http://doi.org/10.37972/chgpu.2023.58.4.010>
27. *Murashkin E.V., Radaev Y.N.* Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. V. 58. № 9. P. 802–813. <http://dx.doi.org/10.3103/s0025654423700127>
28. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Теплопроводность микрополярных тел, чувствительных к зеркальным отражениям пространства // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2023. Т. 165. № 4. С. 389–403. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.389-403>
29. *Jeffreys H.* Cartesian Tensors. Cambridge University Press. 1931. 101 p.
30. *Radaev Y. N.* Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. V. 58. № 5. P. 1517–1527. <https://doi.org/10.3103/S0025654423700206>
31. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 106–117. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>
32. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>

33. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Приведение естественных форм полуизотропных энергетических потенциалов к конвенциональным // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 4(54). С. 108–115.  
<http://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009>
34. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике полуизотропных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 3(53). С. 86–100.  
<http://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010>
35. *Мурашкин Е.В.* О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 1(55). С. 110–121.  
<http://doi.org/10.37972/chgpu.2023.55.1.012>
36. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2021. Т. 25. № 4. С. 776–786.  
<http://doi.org/10.14498/vsgtu1883>
37. *Murashkin E.V., Radaev Y.N.* On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // *Mechanics of Solids*. 2022. V. 57. № 2. P. 205–213.  
<http://doi.org/10.3103/s0025654422020108>
38. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* The schouten force stresses in continuum mechanics formulations // *Mechanics of Solids*. 2023. V. 58. № 1. P. 153–160.  
<http://doi.org/10.3103/s0025654422700029>

## CHARACTERISTIC CONSTITUTIVE NUMBERS IN SEMI ISOTROPIC COUPLED THERMOELASTICITY

E. V. Murashkin<sup>a, \*</sup> and Y. N. Radayev<sup>a, \*\*</sup>

<sup>a</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: murashkin@ipmnet.ru*, <sup>\*\*</sup>*e-mail: radayev@ipmnet.ru*

**Abstract** – In continuum mechanics (especially in hydroaeromechanics), methods of modeling flow (deformation) by characteristic numbers are widely used. The present study is devoted to the search for characteristic combinations of constitutive thermoelastic modules, geometric and thermomechanical parameters of the boundary value problem. Modeling the micropolar solids deformation by characteristic numbers is characterized by a sufficiently large number (13) of constitutive modules. The constitutive equations, the dynamic equations and the heat conduction equation for a semi-isotropic micropolar thermoelastic continuum are derived in a linear approximation. A dimensional analysis of the governing system of differential equations is carried out. A physically consistent series (9 primary

and several arbitrary) of dimensionless characteristic combinations of constitutive constants is proposed. The characteristic numbers for harmonic waves propagating along the axis of a stress free thermally insulated long cylindrical semi-isotropic thermoelastic waveguide are obtained and discussed.

*Keywords:* thermal conductivity, micropolar thermoelastic solid, semi-isotropic solid, characteristic number, dimensional analysis, nano/microlength, nano/microscale

## REFERENCES

1. *Lakes R.* Composites and Metamaterials. Singapore: World Scientific, 2020.
2. *Radayev Y.N.* The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2018. V. 22. № 3. P. 504–517.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>
3. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On the theory of linear micropolar hemitropic media // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2020. V. 4. № 46. P. 16–24.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.89.81.031>
4. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Coupled thermoelasticity of hemitropic media. pseudotensor formulation // Mech. Solids. 2023. V. 58. № 3. P. 802–813.  
<http://doi.org/10.3103/s0025654423700127>
5. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On the polyvariance of the base equations of coupled micropolar thermoelasticity // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2023. V. 3. № 57. P. 112–128.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.010>
6. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Multiweights thermomechanics of hemitropic micropolar solids // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2023. V. 4. № 58. P. 86–120.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.58.4.010>
7. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Probl. Prochn. Plastichn. 2020. V. 82. № 4. P. 399–412.  
<https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>
8. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On a micropolar theory of growing solids // Vestn. Samarsk. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2020. V. 24. № 3. P. 424–444.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>
9. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des Corps Déformables. Paris: Herman et Fils, 1909. vi+226 p.
10. *Nowacki W.* Theory of Micropolar Elasticity. Berlin: Springer, 1972. 285 p
11. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
12. *Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On the Neuber theory of micropolarelasticity. A pseudotensor formulation // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2020. V. 24. № 4. P. 752–761.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>
13. *Gurevich G.B.* Foundations of the Theory of Algebraic Invariants. M., L.: GITTL, 1948; Groningen: Noordhoff, 1964.

14. *McConnell A.J.* Application of Tensor Analysis. NY: Dover Publ. Inc., 1957.
15. *Sokolnikoff I.S.* Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964; M.: Nauka, 1971.
16. *Schouten J.A.* Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965.
17. *Syngé J.L., Schild A.* Tensor Calculus. Courier Corporation, 1978.
18. *Kovalev V.A., Radayev Y.N.* Elements of the Classical Field Theory: Variational Symmetries and Geometric Invariants. M.: Fizmatlit, 2009 [in Russian].
19. *Kovalev V.A., Radayev Y.N.* Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics. Saratov: Saratov Univ., 2010 [in Russian].
20. *Birkhoff G.* Hydrodynamics: A Study in Logic, Fact, and Similitude. Dover Publications, 1955.
21. *Sedov L.I.* Similarity and Dimensional Methods in Mechanics. M.: Nauka, 1977; Boca Raton: CRC Press, 1993.  
<https://doi.org/10.1201/9780203739730>
22. *Kutateladze S.S.* Analysis of Similarity and Physical Models. Novosibirsk: Nauka, 1986 [in Russian].
23. *Barenblatt G.I.* Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics: Dimensional Analysis and Intermediate Asymptotics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.  
<https://doi.org/10.1017/CBO9781107050242>
24. *Zohuri B.* Similitude theory and applications. In: Dimensional Analysis and Self-Similarity Methods for Engineers and Scientists. Cham: Springer, 2015. P. 93–193.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-319-13476-5\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-13476-5_2)
25. *Loitsyansky L.G.* Mechanics of Liquids and Gases. M.: Nauka, 1950; NY: Begell House, 1995.
26. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Multiweights thermomechanics of hemitropic micropolar solids // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2023. V. 4. № 58. P. 86–120.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.58.4.010>
27. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Coupled thermoelasticity of hemitropic media. pseudotensor formulation // Mech. Solids. 2023. V. 58. № 9. P. 802–813.  
<http://doi.org/10.3103/s0025654423700127>
28. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Heat conduction of micropolar solids sensitive to mirror reflections of three-dimensional space // Uch. Zap. Kazan. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2023. V. 165. № 4. P. 389–403.  
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.389-403>
29. *Jeffreys H.* Cartesian Tensors. Cambridge Univ. Press, 1931.
30. *Radayev Y.N.* Tensors with constant components in the constitutive equations of hemitropic micropolar solids // Mech. Solids. 2023. V. 58. № 5. P. 1517–1527.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654423700206>
31. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Elements of the theory // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2022. V. 2. № 52. P. 106–117.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>
32. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Applications to continuum mechanics // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2022. V. 2. № 52. P. 118–127.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>

- 
33. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Reducing natural forms of hemitropic energy potentials to conventional ones // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2022. V. 4. № 54. P. 108–115.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009>
  34. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On two base natural forms of asymmetric force and couple stress tensors of potential in mechanics of hemitropic solids // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2022. V. 3. № 53. P. 86–100.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010>
  35. *Murashkin E.V.* On the relationship of micropolar constitutive parameters of thermodynamic state potentials // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2023. V. 1. № 55. P. 110–121.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.55.1.012>
  36. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On a ordering of area tensor elements orientations in a micropolar continuum immersed in an external plane space // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2021. V. 25. № 4. P. 776–786.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>
  37. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // Mech. Solids. 2022. V. 57. № 2. P. 205–213.  
<http://doi.org/10.3103/s0025654422020108>
  38. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* The schouten force stresses in continuum mechanics formulations // Mech. Solids. 2023. V. 58. № 1. P. 153–160.  
<http://doi.org/10.3103/s0025654422700029>

УДК 539.374

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ КЭП-МОДЕЛИ УПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ НЕКОМПАКТНЫХ СРЕД В УСЛОВИЯХ СЖИМАЮЩЕГО СРЕДНЕГО НАПРЯЖЕНИЯ

© 2024 г. А. А. Адамов<sup>a, \*</sup>, И. Э. Келлер<sup>a, \*\*</sup>,  
С. Г. Жилин<sup>b, \*\*\*</sup>, Н. А. Богданова<sup>b, \*\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

<sup>b</sup>Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре,  
Россия

\*e-mail [adamov@icmm.ru](mailto:adamov@icmm.ru), \*\* e-mail [kie@icmm.ru](mailto:kie@icmm.ru), \*\*\*e-mail [zhilin@imim.ru](mailto:zhilin@imim.ru),  
\*\*\*\*e-mail [joyful289@inbox.ru](mailto:joyful289@inbox.ru)

Поступила в редакцию 30.01.2024

После доработки 30.01.2024

Принята к публикации 30.01.2024

Предложена программа базовых испытаний и методика идентификации трехмерной модели упругопластического поведения изотропной пористой либо порошкообразной консолидируемой среды, испытывающей произвольное квазистатическое нагружение в условиях сжимающего среднего напряжения при комнатной температуре. Рассматриваемая среда в условиях сжимающих средних напряжений уплотняется при повышении эффективного напряжения, что приводит к нелинейному изменению упругих модулей, упрочнению и дилатансии (связанности сдвиговых и объемных компонент деформаций) в области текучести. Для описания подобного поведения рассматривается кэп-модель Димаджио и Сэндлера, присутствующая в пакетах прикладных программ. В качестве базовых испытаний рассматриваются свободное и стесненное сжатие цилиндрического образца по специальной программе, содержащей этапы нагрузки и разгрузки при последовательном повышении амплитудного напряжения. Образцы с заданной пористостью для испытаний на свободное сжатие изготавливаются с помощью оснастки испытаний на стесненное сжатие. По начальному наклону кривых разгрузки определяются значения модулей упругости при свободном и стесненном сжатии в некотором диапазоне изменения пористости, по которым определяется коэффициент Пуассона. Пять констант кэп-модели корректно и явно определяются по кривой деформирования материала при стесненном сжатии в широком диапазоне изменения осевой деформации (и плотности), напряжению течения при свободном сжатии образца при некоторой плотности и предположению о равенстве коэффициента поперечной деформации в области текучести коэффициенту Пуассона. Упругие и пластические константы определены по данным испытаний порошкообразного парафина марки Т1 фракции 0.63 мм. Соответствующую

шая модель применима для численного моделирования процессов экструзии и заполнения формы для литья по выплавляемым моделям, процессов изготовления заготовок неплавких полимерных композитов порошковой технологией, штамповки уплотнительных элементов из гибкого графита и других процессов обработки давлением некомпактных сред.

*Ключевые слова:* некомпактные среды, уплотнение, кэп-модель пластичности, упругие константы, идентификация, эксперимент, порошкообразный парафин

**DOI:** 10.31857/S1026351924040046, **EDN:** UDFZLA

**1. Введение.** Некоторые технологии получения изделий имеют дело с обработкой давлением некомпактных материалов в условиях сжимающих средних напряжений. Примером подобного процесса является штамповка изделий из проката терморасширенного графита (гибкого графита), пористость которого составляет 60–70%, применяемых для изготовления химически инертных прокладок, электродов, датчиков, устройств вибродемпфирования, теплоизоляции, защиты от электромагнитных полей [1, 2]. В литературе предлагается определять механические и прочностные свойства данного материала исключительно из испытаний на одноосное растяжение и индентирование [3–5]. Воспроизводимые в подобных испытаниях напряженно-деформированные состояния не характеризуются сжимающими средними напряжениями и уплотнением и потому не подходят для расчетов рассматриваемых процессов, в которых подобные состояния реализуются во всем объеме изделия. Еще одним примером является процесс экструзии и заполнения формы порошковым воскообразным материалом, который может быть использован в технологии литья по выплавляемым моделям. Этот способ обладает рядом преимуществ по сравнению с традиционной технологией жидкого заполнения формы, требующей применения дорогостоящих литьевых восков и керамик для исключения образования усадочных дефектов модели при ее затвердевании и растрескивания керамической оболочки на стадиях выплавления и прокали [6]. Определение упруговязкопластических свойств подобных порошковых материалов является нетривиальной задачей [7–9]. Порошковые технологии используются при производстве изделий из неплавких полимеров, имеющих очень большую молекулярную массу, и наполненных композитов на их основе [10, 11]. Разработка методики экспериментальной идентификации подходящих моделей упругопластичности для численного расчета процессов обработки давлением некомпактных сред поэтому представляется необходимой и актуальной задачей.

Необратимое изменение плотности (и пористости) исследуемого класса материалов изменяет его упругие, пластические и предельные свойства. Подходящие модели материала встречаются среди уравнений состояния пористых, порошкообразных, геологических и других некомпактных сред и описывают связанность сдвиговых и объемных деформаций (дилатансию), которую они проявляют. Обзоры подобных трехмерных моделей упругопластичности в рамках теории пластического течения приведены в [12–16].

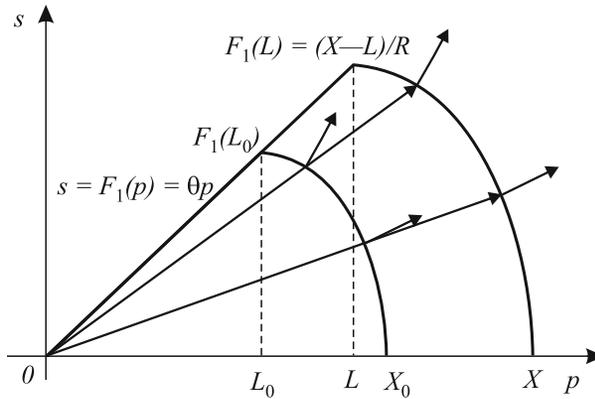
Рассматриваемые в контексте настоящей работы технологические процессы обработки давлением сопровождаются уплотнением, а не разрыхлением, материала, поэтому модель должна иметь замкнутую поверхность текучести в направлении сжимающих средних напряжений при любом значении интенсивности напряжений в пространстве напряжений. Среди подходящих моделей можно выделить кэп-модели, поверхность текучести которых состоит из конической либо пирамидальной части, течение на которой соответствует разрыхлению, и эллиптической крышки, течение на которой соответствует уплотнению материала. Эти модели обладают гибкостью при аппроксимации экспериментальных данных и удобством использования в численных расчетах; две из них, Димаджио–Сэндлера [17] и Швера–Мюррея [18], включены в пакет программ LS-DYNA® [19].

Далее в работе приводится формулировка простейшей кэп-модели Димаджио–Сэндлера, содержащей пять пластических и две упругие константы, и выводятся соотношения, описывающие процессы свободного и стесненного сжатия в рамках этой модели. Также приводится выражение для коэффициента Пуассона через упругие модули при свободном и стесненном сжатии. Представлены результаты испытаний порошкообразного парафина марки Т1 фракции 0.63 мм на свободное и стесненное сжатие по программам монотонного и ступенчатого нагружения с последовательными разгрузками. Далее данные этих базовых экспериментов с различными напряженно-деформированными состояниями со сжимающим средним напряжением используются для калибровки модели, при этом не требуется привлечения каких-либо методов решения обратных некорректных задач. Найденные константы позволяют прогнозировать упругопластическое поведение материала при его нагружении в широком диапазоне напряженных состояний.

**2. Кэп-модель пластического течения некомпактных сред.** Уравнения пластического течения некомпактных сред записываются в терминах переменных  $p, s$ , где  $p = -J_1$ ,  $J_1 = \sigma_{ii}$ , а  $\sigma = J_2^{1/2}$ ,  $J_2 = s_{ij}s_{ij}/2$ ,  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}/3$ ,  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений. Переменная  $p$  равна утроенному среднему напряжению, взятому с противоположным знаком, является положительной при сжимающих средних напряжениях и традиционно используется в механике грунтов и порошкообразных сред. Переменная  $s$  с точностью до множителя равняется интенсивности сдвиговых напряжений. Для пластических сред с зависимостью от среднего напряжения рассматривают кривую текучести в полуплоскости ( $p, s \geq 0$ ), называемой диаграммой Бужинского.

В модели Димаджио–Сэндлера [17] поверхность текучести в пространстве главных напряжений описывается правильным круговым конусом текучести Друкера–Прагера, который замыкается эллиптической “крышкой”. Закон пластического течения, ассоциированный с данной поверхностью, описывает пластическое течение на конической части поверхности, сопровождающийся разрыхлением, и пластическое течение на эллиптической части, сопровождаемое уплотнением. Уравнения, задающие поверхность текучести, выглядят следующим образом:

$$f_1(s, p) = s - F_1(p) = 0, \quad F_1(p) = \alpha + \theta p, \quad p < L \quad (2.1)$$



**Рис. 1.** Кривая текучести в модели Димаджи–Сэндлера на диаграмме Бужинского при равенстве нулю коэффициента сцепления для двух состояний упругости и направления нормалей в точках текучести при пропорциональном нагружении.

и

$$f_2(s, p, L) = s - F_1(p, L) = 0,$$

$$F_2(p, L) = \sqrt{(X(L) - L)^2 - (p - L)^2} / R, \quad L \leq p \leq X, \quad (2.2)$$

где  $\alpha$  – коэффициент сцепления,  $\theta$  – угол внутреннего трения и  $R$  – суть положительные константы, а  $L > 0$  – внутренняя переменная, задающая центр эллипса,  $X = X(L)$  – функция, значение которой задает точку на оси  $p$ , в которой эту ось пересекает крышка (рис. 1). Уравнение

$$X(L) - L = RF_1(L) \quad (2.3)$$

задает условие стыковки конической и эллиптической частей поверхности текучести и закон эволюции эллиптической части при изменении  $L$ . Изменение  $L$  в процессе пластического уплотнения среды описывается уравнением:

$$X = X_0 - \frac{1}{D} \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon_v^p}{W} \right), \quad \varepsilon_v^p = - \int_0^t \dot{\varepsilon}_{kk}^p dt, \quad (2.4)$$

где  $D$ ,  $W$ ,  $X_0$  – положительные константы, а  $\varepsilon_v^p$  – объемная пластическая деформация, взятая с противоположным знаком.

Ассоциированный с функциями (2.1) или (2.2) закон пластического течения

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \partial f_{1,2} / \partial \sigma_{ij} \quad (2.5)$$

принимает вид

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} (s_{ij} + 2(\alpha + \theta p)\theta \delta_{ij}) \quad (2.6)$$

при условии (2.1) течения на конической части поверхности текучести либо

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} (R^2 s_{ij} - 2(p - L)\delta_{ij}) \quad (2.7)$$

при условии (2.2) течения на эллиптической части поверхности текучести. Уравнения (2.6) и (2.7) прогнозируют различные виды дилатансии: пластическое разрыхление

$$\dot{\varepsilon}_v^p = -3\theta \dot{e}^p < 0, \quad (2.8)$$

где  $\dot{e}^p = \sqrt{2\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p}$ ,  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \dot{\varepsilon}_{kk}^p \delta_{ij} / 3$  (при течении на конической части поверхности текучести, когда  $p < L$ ) и пластическое уплотнение

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \frac{3(p - L)}{R^2 s} \dot{e}^p > 0 \quad (2.9)$$

(при течении на эллиптической части поверхности текучести, когда  $L \leq p \leq X$ ) при накоплении сдвиговых деформаций

$$e^p = \int_0^t \dot{e}^p dt.$$

Выражения (2.8) и (2.9) содержат утроенные тангенсы угла наклона нормали к конической либо эллиптической части поверхности текучести, которые можно получить частным дифференцированием (2.1) и (2.2) по  $s$  и  $p$ . Это означает, что направление течения в плоскости  $(\dot{\varepsilon}_v^p, \dot{e}^p)$  совпадает с нормалью к сечению поверхности текучести плоскостью  $(p, s)$ , если ось  $\dot{e}^p$  растянуть с коэффициентом 3. Чтобы ассоциированный закон выполнялся в плоскости Бужинского, можно переопределить выражения для интенсивностей сдвиговых напряжений  $s = (s_{ij} s_{ij} / 6)^{1/2}$  и скоростей касательных пластических деформаций  $\dot{e}^p = \sqrt{6\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p}$ . Однако далее в аналитических выражениях будут оставлены традиционные определения  $s$  и  $\dot{e}^p$ , но значения тангенса угла наклона вектора скоростей пластических деформаций на плоскости Бужинского  $h$  будут рассчитываться из условия нормальности к поверхности текучести:

$$h = \frac{3\dot{e}^p}{\dot{\varepsilon}_v^p} = \frac{R^2 s}{p - L}. \quad (2.10)$$

Модель Димаджио—Сэндлера реализована в пакете программ LS-DYNA® под именем MAT\_025 [19].

В настоящей работе будут рассматриваться процессы при  $L \leq p \leq X$ , сопровождающиеся уплотнением материала. Примем упрощенное описание конической части поверхности текучести, не учитывая коэффициент сцепления: (рис. 1). Тогда (2.3) с учетом (2.1) примет вид

$$X(L) - L = R\theta L \quad (2.11)$$

и условие текучести на эллиптической части поверхности текучести запишется следующим образом:

$$R^2 s^2 = R^2 \theta^2 L^2 - (p - L)^2. \quad (2.12)$$

Выражение (2.5) при этом не изменится. Поверхность текучести в таком случае описывается тремя материальными параметрами —  $\theta$ ,  $R$ ,  $L_0$  (либо  $X_0$ ), а параметры  $D$ ,  $W$  описывают деформационное упрочнение (уплотнение). Уравнения модели в форме (2.12), (2.7) и (2.4) будут далее рассматриваться для двух видов испытаний.

**3. Некоторые соотношения кэп-модели для базовых испытаний.** Для идентификации пяти параметров модели Димаджио—Сэндлера по экспериментальным данным выведем ряд соотношений, частично представленных ранее [20].

*Свободное сжатие.* отождествим радиальную и окружную координаты цилиндра с осями 1 и 2, а направление сжатия — с осью 3. В таком случае  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ ,  $p = -\sigma_{33} = \sigma > 0$ ,  $s_{11} = s_{22} = \sigma/3$ ,  $s_{33} = -2\sigma/3$ ,  $s = \sigma/\sqrt{3}$ . На диаграмме Бужинского данному нагружению соответствует прямая

$$s = p/\sqrt{3}, \quad (3.1)$$

составляющая угол  $\pi/6$  с осью  $p$ . С учетом соотношения (3.1) из уравнения (2.12) получается линейная связь  $s$ ,  $p$  и  $\sigma$  с  $L$ :

$$\sigma = p = \frac{3 + R\sqrt{3[(R^2 + 3)\theta^2 - 1]}}{R^2 + 3} L. \quad (3.2)$$

Условие неотрицательности подкоренного выражения в (3.2) требует, чтобы

$$\theta \geq 1/\sqrt{R^2 + 3}. \quad (3.3)$$

Для этого при любом  $R > 0$  достаточно, чтобы  $\theta \geq 1/\sqrt{3}$ , то есть свободное сжатие соответствовало бы пластическому течению на крышке поверхности текучести.

Компоненты тензора скоростей пластических деформаций (2.7) для данного вида нагружения примут вид

$$\dot{\varepsilon}_{11}^p = \dot{\varepsilon}_{22}^p = \dot{\lambda} \left( \left( \frac{R^2}{3} - 2 \right) \sigma + 2L \right), \quad \dot{\varepsilon}_{33}^p = \dot{\lambda} \left( -2 \left( \frac{R^2}{3} + 1 \right) \sigma + 2L \right),$$

откуда с учетом (3.2) и интегрирования по времени можно получить связь объемной  $\varepsilon_v^p$  и осевой  $\varepsilon^p \equiv -\varepsilon_{33}^p$  пластических деформаций:

$$\varepsilon_v^p = 9 \frac{-R + \sqrt{3[(R^2 + 3)\theta^2 - 1]}}{(R^2 + 3)\sqrt{3[(R^2 + 3)\theta^2 - 1]}} \varepsilon^p. \quad (3.4)$$

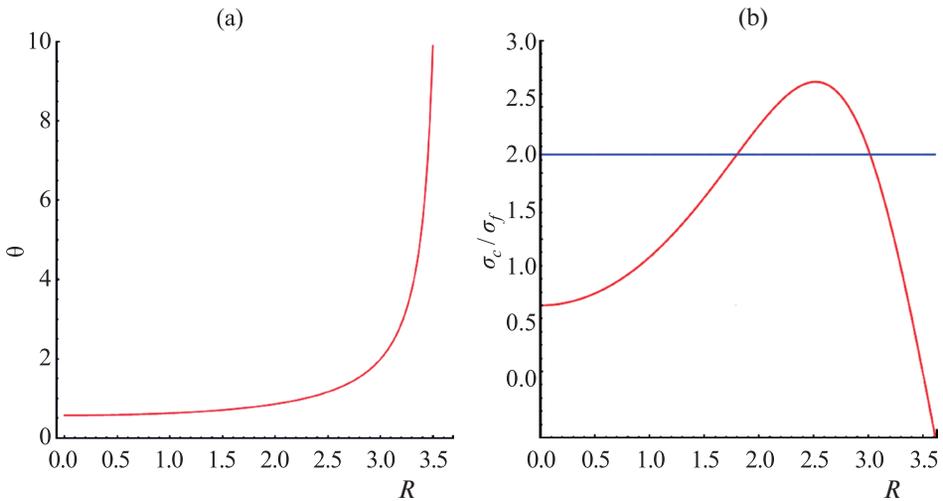


Рис. 2. Зависимости  $\theta$  (а) и  $\sigma_c/\sigma_f$  (б) от  $R$  при  $\nu=0.22$ .

При ограничениях на константы  $R > 0$  и (3.3) коэффициент в (3.4) имеет положительный знак, что согласно (2.4) означает уплотнение. С помощью (2.9), (3.2) и (2.10) можно показать, что в рамках модели траектория деформаций в плоскости  $(\varepsilon_v^p, e^p)$  при свободном сжатии также оказывается прямой линией с тангенсом угла наклона:

$$h = \frac{R \left( 3 + R \sqrt{3 \left( (R^2 + 3)\theta^2 - 1 \right)} \right)}{\sqrt{3 \left( \sqrt{3 \left( (R^2 + 3)\theta^2 - 1 \right)} - R \right)}}. \quad (3.5)$$

Можно найти выражение для коэффициента поперечной деформации (“пластического коэффициента Пуассона”)

$$\nu_p = -\frac{\dot{\varepsilon}_{11}^p}{\dot{\varepsilon}_{33}^p} = \frac{9R + (R^2 - 6)\sqrt{3 \left( (R^2 + 3)\theta^2 - 1 \right)}}{2(R^2 + 3)\sqrt{3 \left( (R^2 + 3)\theta^2 - 1 \right)}}, \quad (3.6)$$

который при испытании на свободное сжатие в рамках модели оказывается константой и изменяется в пределах от  $-1$  до  $0.5$ , если изменять параметры  $R$ ,  $\theta$  в разрешенных пределах. Равенство (3.6) устанавливает зависимость  $\theta(R)$  при заданном значении  $\nu_p$ :

$$\theta^2 = \frac{1}{R^2 + 3} \left( 1 + \frac{27R^2}{(2\nu_p - 1)R^2 + 6(1 + \nu_p)} \right). \quad (3.7)$$

При этом параметр  $R$  ограничен и не может превышать значения

$$R_* = \sqrt{\frac{6(1 + \nu_p)}{1 - 2\nu_p}}. \quad (3.8)$$

График зависимости  $\theta(R)$  при  $\nu = 0.22$  ( $R_* = 3.62$ ) приведен на рис. 2, а. С учетом (3.6) направление вектора  $(\varepsilon_0^p, e^p)$  в плоскости Бужинского, задаваемое выражением (3.5), не зависит от  $R \in [0, R_*]$  и  $q [1/(R^2 + 3)^{1/2}, +\alpha]$  по отдельности, а зависит только от  $\nu_p$ :

$$h = \frac{2\sqrt{3}(1 + \nu_p)}{1 - 2\nu_p}. \quad (3.9)$$

При  $\nu_p = 0.22$  коэффициент  $h$  приблизительно равен 7.55. Доля осевой пластической деформации в объемной пластической деформации (3.9) при свободном сжатии в силу (3.6) также оказывается функцией только  $\nu_p$ :

$$\varepsilon_0^p = (1 - 2\nu_p) \varepsilon^p. \quad (3.10)$$

При  $\nu_p = 0.22$  эта доля составляет 0.56.

Значение коэффициента поперечной деформации можно оценить по изменению поперечного размера образца при испытании на свободное сжатие. Поскольку трудно обеспечить точность подобных измерений в пределах изменения осевых деформаций порядка 10% и более вследствие неизбежного искривления боковой поверхности, рассматривается альтернативное соображение. В упругом диапазоне коэффициент поперечной деформации переходит в коэффициент Пуассона  $\nu$ , который можно определить более точно (см. ниже), не прибегая к измерению поперечного размера образца. Поскольку рассматриваемая модель не способна описывать изменение формы эллиптической части поверхности текучести (определяемой константами  $R$  и  $\theta$ ) в процессе уплотнения, и  $\nu_p$  является константой, для совместности значения коэффициента поперечной деформации при переходе от упругого поведения к упругопластическому необходимо потребовать

$$\nu_p = \nu. \quad (3.11)$$

Линейность соотношений между  $\sigma$  и  $L$ , а также  $e^p$  и  $e_v^p$ , пропорциональность траектории деформаций и постоянство коэффициента поперечной деформации обусловлены истокообразным видом функции (2.1) при  $\alpha = 0$ .

Уравнение (2.4) с учетом (2.11) позволяет связать  $L$  с  $\varepsilon_v^p$ :

$$L = \frac{1}{1 + R\theta} \left( X_0 - \frac{1}{D} \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon_v^p}{W} \right) \right). \quad (3.12)$$

*Стесненное сжатие.* Для данного испытания контролируется напряжение  $\sigma_{33} = -\sigma$ ,  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ ,  $p = \sigma - 2\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{33} = -2(\sigma + \sigma_{11})/3$ ,  $s_{11} = s_{22} = (\sigma + \sigma_{11})/3$ ,  $s = (\sigma + \sigma_{11})/3^{1/2}$ . Из кинематических ограничений стесненного сжатия  $\dot{\varepsilon}_{11}^p = \dot{\varepsilon}_{22}^p = 0$  и уравнений пластического течения (2.7) следует  $s_{11} = s_{22} = 2(p$

–  $L)/R^2$ , откуда  $s_{33} = -4(p - L)/R^2$ ,  $s = 2\sqrt{3}(p - L)/R^2$ , и из критерия текучести (2.12) вытекает

$$p = \left( 1 + \frac{\theta R^2}{\sqrt{R^2 + 12}} \right) L. \quad (3.13)$$

Кроме того, из  $s_{11} = \sigma_{11} + p/3 = 2(p - L)/R^2$  и определения  $p = \sigma - 2\sigma_{11}$  следует  $p = (3R^2\sigma + 12L)/(R^2 + 12)$ . Из (3.13) с учетом последнего равенства следует соотношение

$$\sigma = \frac{1 + \theta\sqrt{R^2 + 12}}{3} L. \quad (3.14)$$

Из (3.14) следует, что при стесненном сжатии на диаграмме Бужинского реализуется прямолинейная траектория нагружения:

$$s = \frac{2\sqrt{3}\theta}{\sqrt{R^2 + 12} + \theta R^2} p, \quad (3.15)$$

наклон которой с осью  $p$  определяется константами  $\theta$  и  $R$  (при условии (3.11) – только  $R$ ). Зависимость внутренней переменной  $L$  от осевой пластической деформации  $\varepsilon^p = -\varepsilon_{33}^p$  определяется законом (3.12) с учетом равенства

$$\varepsilon_v^p = \varepsilon^p. \quad (3.16)$$

В сравнении со свободным сжатием (3.10) стесненное сжатие (3.16) в  $1/(1 - 2\nu_p)$  раз более интенсивно уплотняет материал при одинаковой осевой пластической деформации. Из (2.9) с учетом (3.13) и (3.15) можно показать, что траектория пластических деформаций в плоскости  $(\varepsilon_v^p, e^p)$  при стесненном сжатии оказывается прямой линией

$$e^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_v^p \quad (3.17)$$

с тангенсом угла наклона (2.10)  $h = 2\sqrt{3}$ , приблизительно равным 3.46. При условии (3.7) из равенств (3.2) и (3.14) можно определить зависимость отношения напряжений течения при стесненном и свободном сжатии от параметра  $R$  при заданном значении  $\nu_p$ , которая приведена на рис. 2, б.

Линейность связи  $\sigma$  с  $L$  и пропорциональность траектории напряжений при стесненном сжатии, а также пропорциональность траектории пластических деформаций при свободном сжатии в плоскости Бужинского обусловлены истокообразным видом функции (2.1) при  $\alpha = 0$  (пропорциональность траектории пластических деформаций при стесненном сжатии и пропорциональность траектории напряжений при свободном сжатии в плоскости Бужинского имеет место независимо от значения  $\alpha \geq 0$ ). Более сложные виды описания конической части поверхности текучести [19] существенно обогащают поведение материала при пластическом течении на эллиптической части поверхности текучести. При  $\alpha \neq 0$  в (2.1) траектория напряжений при

стесненном сжатии остается прямолинейной, но не пропорциональной, а траектория деформаций при свободном сжатии отличается и от прямолинейной вблизи начала координат в плоскости Бужинского.

Таким образом, процессы пластического течения материала при свободном и стесненном сжатии согласно модели Димаджио–Сэндлера с нулевым коэффициентом сцепления в обоих случаях сопровождаются пропорциональным ростом сдвиговой и объемной компонент пластических деформаций. Но при стационарном процессе экструзии кинематика требует эволюции состояния материала, описываемой расширением эллиптической части поверхности текучести вследствие уплотнения и перемещением напряженного состояния вдоль поверхности текучести в верхнюю ее точку, в которой реализуется сдвиговое течение. Взаимное течение этих процессов может быть определено в процессе решения краевой задачи.

*Определение упругих модулей и пластических деформаций.* Будем описывать упругие свойства рассматриваемой среды соотношениями обобщенного закона Гука для изотропного материала

$$3p = K\varepsilon_v^e, \quad s_{ij} = 2Ge_{ij}^e \quad (3.18)$$

с модулями  $K(\varepsilon_v^p)$ ,  $G(\varepsilon_v^p)$ , зависящими от объемной пластической деформации, рассматриваемой в качестве меры уплотнения материала (в (3.18) полагается  $\varepsilon_v^e > 0$  при сжатии). Эти величины проще всего вычислить по экспериментально определенным модулям упругости  $E$  и  $M$  при свободном и стесненном сжатии следующим образом. Из связи  $M = E(1-\nu)/(1+\nu)/(1-2\nu)$  с учетом обозначения  $\varphi = E/M \leq 1$  следует выражение для коэффициента Пуассона:

$$\nu = \frac{\varphi - 1 + \sqrt{(\varphi - 1)(\varphi - 9)}}{4}. \quad (3.19)$$

Далее находятся модули:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (3.20)$$

При нахождении зависимостей  $E(\varepsilon_v^p)$ ,  $M(\varepsilon_v^p)$  по экспериментальным данным следует принимать во внимание соответствующую связь объемной пластической деформации  $\varepsilon_v^p$  и осевой пластической деформации  $\varepsilon^p$  (3.14) или (3.16) для свободного либо стесненного сжатия.

Для перестроения кривых упрочнения, полученных в результате испытаний на свободное либо стесненное сжатие, с полных на пластические осевые деформации используются равенства:

$$\varepsilon_v^p = \varepsilon_v - \frac{\sigma}{E(\varepsilon_v)}, \quad \varepsilon_v^p = \varepsilon_v - \frac{\sigma}{M(\varepsilon_v)}. \quad (3.21)$$

**4. Испытания материала и идентификация модели.** Испытания на свободное и стесненное сжатие были выполнены для порошка парафина марки Т1 фракции 0.63 мм. Использовалась универсальная испытательная машина Zwick

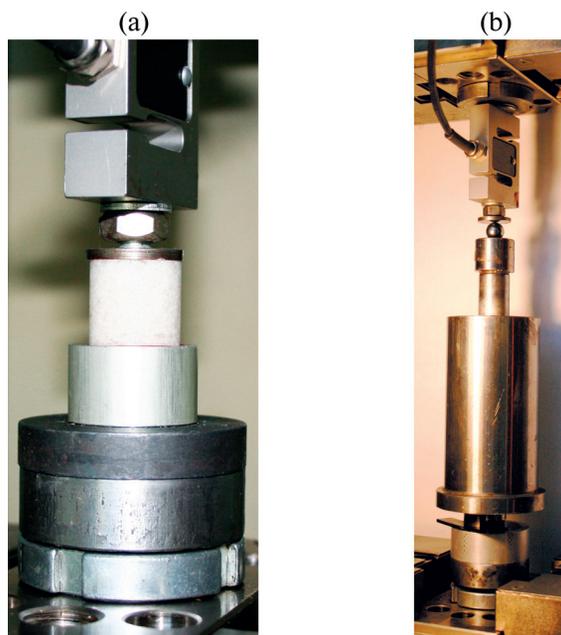
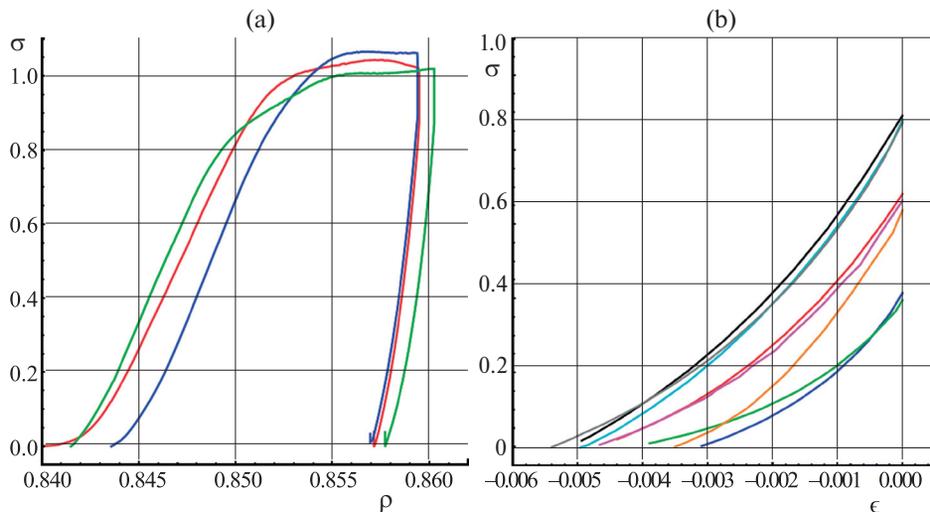


Рис. 3. Оснастка для испытаний на свободное (а) и стесненное (б) сжатие.

Z100SN5A с датчиком силы 1 кН и управлением по датчику перемещения траверсы, скорость перемещения траверсы при нагружении во всех испытаниях составляла 3 мм/мин. Испытания выполнялись при температуре 25 °С. Для изготовления цилиндрических образцов на свободное сжатие диаметром 20 мм использовалась оснастка для испытаний на стесненное сжатие – толстостенная труба с двумя подвижными штоками, поверхности скольжения которых были отполированы. Каждый образец прессовался из  $5.5 \pm 0.01$  г порошка до высоты 21 либо 22 мм. Данные значения обеспечивали вариацию начальной пористости и степень консолидации порошка, достаточную для целостности образца при 4% деформации при испытании на свободное сжатие. На свободное сжатие также испытано несколько образцов после испытания на стесненное сжатие. Всего на свободное сжатие испытано 8 образцов с диапазоном значений начальной плотности 0.79–0.86 г/см<sup>3</sup>. Для испытаний на стесненное и свободное сжатие использовалась оснастка, приведенная на рис. 3. Все поверхности трения и контакта оснастки с образцом при испытании на стесненное сжатие были обработаны смазкой ЦИАТИМ-221Ф. Для исключения трения на плоскостях контакта торцов образцов с оснасткой при испытании на свободное сжатие использована та же смазка и два слоя тонкой фторопластовой пленки.

Программа испытаний включала в себя свободное сжатие образца до высоты 21 либо 20 мм, в результате чего достигалась фиксированная остаточная пористость и плотность массы соответственно 0.83 либо 0.86 г/см<sup>3</sup>, и разгрузку из данного состояния. На рис. 4, а приведены кривые деформирования трех образцов при изменении их высоты от  $20.78 \pm 0.08$  до 20 мм, что соответствует



**Рис. 4.** Кривые деформирования (а) и разгрузки (б) образцов при свободном сжатии. Напряжения в МПа, плотность в г/см<sup>3</sup>.

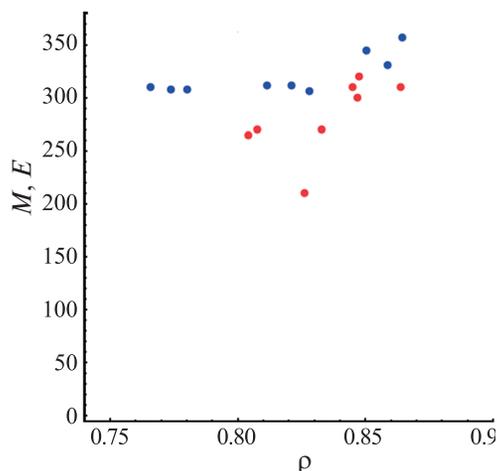
деформации 4% и изменению плотности массы приблизительно от 0.84 до 0.86 г/см<sup>3</sup>. Среднее значение напряжения течения при плотности 0.86 г/см<sup>3</sup> составляет приблизительно 1.05 МПа.

На рис. 4, б приведены кривые разгрузки всех восьми образцов в зависимости от осевой компоненты логарифмической деформации, отсчитываемой от точки начала разгрузки и взятой (как принято для деформаций в настоящей работе) с противоположным знаком. Видно, что разгрузка исследуемого материала сопровождается обратной ползучестью. Каждая кривая была аппроксимирована кубической функцией с четырьмя параметрами, с помощью которой была определена производная в точке начала разгрузки – модуль Юнга. Эта величина зависит от плотности, что можно увидеть на рис. 5. Если не учитывать выброс (связанный с бочкообразованием образца при деформации около 8%), то  $E = 270$  МПа при  $\rho = 0.82$  г/см<sup>3</sup> и  $E = 310$  МПа при  $\rho = 0.85$  г/см<sup>3</sup>.

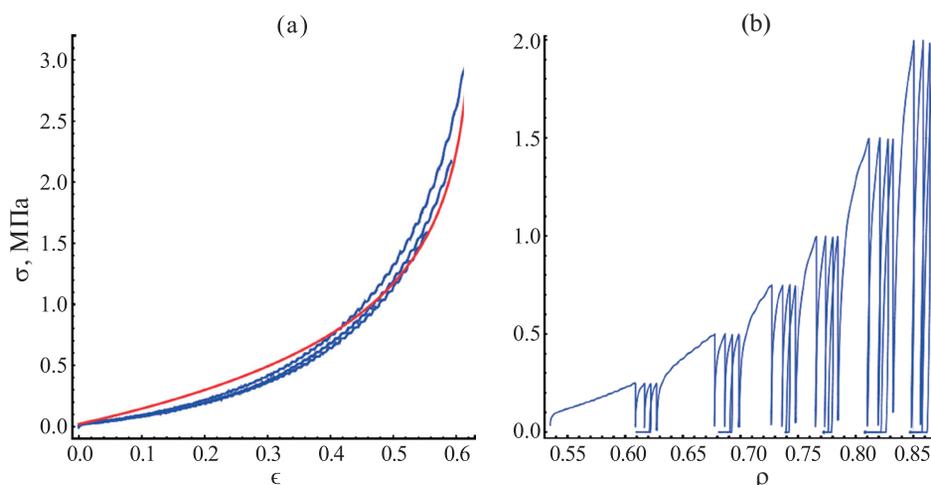
Испытание на стесненное сжатие при монотонном нагружении начиналось с состояния порошка с насыпной плотностью и заканчивалось при положениях траверсы, соответствующих высоте образца 22, 21 и 20 мм. Один образец был сжат до 19 мм, при этом была достигнута плотность массы 0.92 г/см<sup>3</sup>. На рис. 6, а приведены деформационные кривые и их аппроксимация законом

$$\sigma_{\epsilon} = \gamma - \delta \ln \left( 1 - \frac{\epsilon}{W} \right) \quad (4.1)$$

с параметрами  $\gamma = 0.02$  МПа,  $\delta = 0.73$  МПа,  $W = 0.63$ . При аппроксимации учитывалось, что при стесненном сжатии полные объемная и осевая деформации равны между собой и равны пластическим составляющим, поскольку упругая деформация в испытаниях не превышает  $3 \text{ МПа} / 300 \text{ МПа} = 1\%$ , что намного



**Рис. 5.** Упругие модули при свободном (красный) и стесненном (синий) сжатии в зависимости от плотности. По вертикальной оси отложены МПа, по горизонтальной —  $\text{г/см}^3$ .



**Рис. 6.** Кривые деформирования при стесненном сжатии: а) монотонное нагружение, б) нагружение с разгрузками (синий — эксперимент, красный — аппроксимация). По вертикальной оси отложены МПа.

меньше характерных деформаций в данном испытании, составляющих около 60% (рис. 6, а).

В отличие от свободного сжатия, которое можно выполнять при плотностях  $0.83\text{--}0.86 \text{ г/см}^3$ , испытание на стесненное сжатие позволяет охватить весь диапазон — от насыпной плотности до плотности литого материала и даже выше. Поэтому было выполнено испытание на стесненное сжатие со ступенчатым нагружением и промежуточными разгрузками (рис. 6, б), чтобы найти

зависимость модуля упругости при стесненном сжатии от плотности. Результат для трех последних блоков нагружения приведен на рис. 5. Были получены значения  $M = 310$ ,  $E = 270$  МПа при  $\rho = 0.76\text{--}0.83$  г/см<sup>3</sup> и  $M = 345$ ,  $E = 310$  МПа при  $\rho = 0.85\text{--}0.87$  г/см<sup>3</sup>. Для сравнимых значений плотности можно оценить диапазон значений параметра  $\varphi = E/M = 0.87\text{--}0.90$  и по (3.19) — диапазон значений коэффициента Пуассона  $\nu = 0.20\text{--}0.22$ . Отметим, что данный метод не нуждается в измерении поперечных деформаций образца при свободном сжатии, которое не отличается точностью. Далее (и выше — в числовых оценках и данных на рис. 2) используется значение  $\nu = 0.22$ . Упругие константы сведены в табл. 1.

**Таблица 1.** Упругие константы парафина марки Т1 в зависимости от плотности

$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$E$ , МПа	$M$ , МПа	$\nu$
0.76–0.83	270	310	0.22
0.85–0.87	310	345	0.20

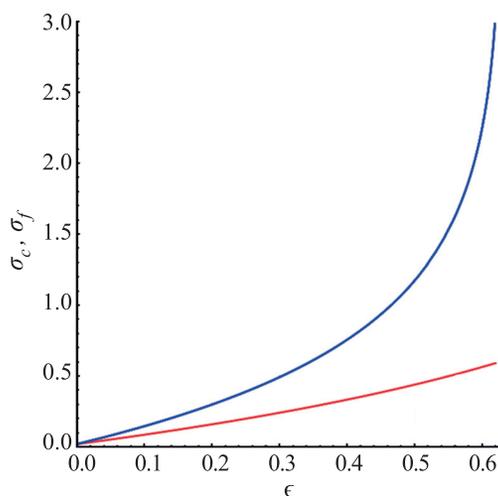
На заключительном этапе идентификации модели необходимо по имеющимся данным определить константы закона упрочнения (3.12), а также  $R$  и  $\theta$ . Можно сказать, что кривая упрочнения при свободном сжатии представлена лишь значением напряжения течения  $\sigma_f^* = 1.05$  МПа, соответствующем плотности  $\rho = 0.86$  г/см<sup>3</sup>. При той же плотности напряжение течения при стесненном сжатии равно  $\sigma_c^* = 2.25$  МПа. Аргумент в (3.12) означает именно состояние (плотность, пористость), поэтому при одинаковой плотности в испытаниях на свободное и стесненное сжатие будут равны значения внутренней переменной  $L$  в (3.2) и (3.14), поэтому отношение  $\sigma_c/\sigma_f = \sigma_c^*/\sigma_f^* = 2.14$  является константой и определяет при известном значении  $\nu_p = \nu = 0.22$  постоянную  $R$ , которая определяется неединственным образом:  $R = 1.8$  либо  $3.0$  (рис. 2, б). При этом среди ориентаций траекторий напряжения или деформации в плоскости Бужинского для рассматриваемых испытаний изменяется лишь коэффициент в (3.14), задающий ориентацию траектории напряжения при стесненном сжатии:  $0.42$  при  $R = 1.8$  либо  $0.31$  при  $R = 3.0$ . Далее из (3.2) и (3.12) получаем

$$X_0 = \frac{3(1 + R\theta)}{1 + \theta\sqrt{R^2 + 12}}\gamma \quad (4.2)$$

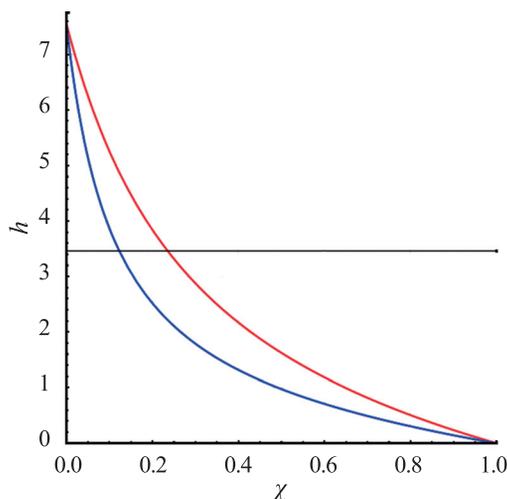
при условии (3.7) и

$$D = \frac{\gamma}{X_0\delta}, \quad (4.3)$$

где  $\gamma$ ,  $\delta$  — параметры аппроксимации (4.1). Получаем  $\theta = 0.79$ ,  $X_0 = 0.036$  МПа и  $D = 0.77$  МПа<sup>-1</sup> при  $R = 1.8$  и  $\theta = 1.99$ ,  $X_0 = 0.041$  МПа и  $D = 0.66$  МПа<sup>-1</sup> при  $R = 3.0$ . Оба набора констант сведены в табл. 2 и дают одинаковые пары кривых упрочнения при свободном и стесненном сжатии (рис. 7), при построении которых использованы выражения (3.2), (3.10), (3.12) и (3.14), (3.16), (3.12) соответственно. Кривая при стесненном сжатии точно соответствует



**Рис. 7.** Кривые упрочнения при свободном (красный) и стесненном (синий) сжатии, описываемые моделью. По вертикальной оси отложены МПа.



**Рис. 8.** Тангенс угла наклона направления вектора деформации в плоскости Бужинского в зависимости от отношения сжимающих напряжений при трехосном сжатии для двух наборов констант (табл. 2): первый — красная кривая, второй — синяя кривая.

аппроксимации экспериментальных данных (рис. 6, а), а кривая при свободном сжатии проходит через единственную экспериментальную точку, которая на рис. 7 вышла за пределы отрезка осевых деформаций, поскольку согласно (3.10) объемные деформации растут по мере увеличения осевых деформаций приблизительно вдвое медленнее при свободном сжатии по сравнению со стесненным сжатием. Если отсчетную конфигурацию образца связывать со

свободно насыпанным порошком (как при испытании на стесненное сжатие), то в указанном диапазоне осевых деформаций кривую упрочнения при свободном сжатии невозможно определить экспериментально, поскольку в этих условиях порошок не способен выступать образцом.

**Таблица 2.** Константы кэп-модели порошкообразного парафина марки Т1

$R$	$\theta$	$X_0$ , МПа	$D$ , МПа <sup>-1</sup>	$W$
1.8	0.79	0.036	0.77	0.63
3.0	1.99	0.041	0.66	0.63

Можно теоретически исследовать, как изменяется ориентация вектора скоростей деформаций в плоскости Бужинского при обоих наборах констант в широком диапазоне изменения наклона прямолинейной траектории нагружения в плоскости Бужинского. Такой диапазон реализуется в испытании на трехосное сжатие по схеме Кармана [20], для которого  $\sigma_{33} = -\sigma$ ,  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = -\chi\sigma$ . Примем  $0 \leq \chi \leq 1$ , тогда  $s_{11} = s_{22} = (1 - \chi)\sigma/3 \geq 0$ ,  $s_{33} = -2(1 - \chi)\sigma/3$ ,  $p = (2\chi + 1)\sigma$ ,  $s = (1 - \chi)\sigma/\sqrt{3}$ , и из условия текучести можно получить:

$$\sigma = \frac{3(2\chi + 1) + R\sqrt{3[(1 - \chi)^2(R^2\theta^2 - 1) + 3\theta^2(2\chi + 1)^2]}}{R^2(1 - \chi)^2 + 3(2\chi + 1)} L. \quad (4.4)$$

Далее согласно (2.10) можно определить коэффициент  $h$ :

$$h = \frac{R^2(\chi - 1)}{\sqrt{3}} \left( 2\chi + 1 - \frac{R^2(1 - \chi)^2 + 3(2\chi + 1)^2}{3(2\chi + 1) + R\sqrt{3[(1 - \chi)^2(R^2\theta^2 - 1) + 3\theta^2(2\chi + 1)^2]}} \right)^{-1}. \quad (4.5)$$

Изменение тангенса угла наклона направления деформации в плоскости Бужинского в зависимости от отношения сжимающих напряжений в испытании на трехосное сжатие по схеме Кармана приведено на рис. 8. Граничные значения  $\chi = 0$  и 1 соответствуют свободному и всестороннему сжатию ( $\chi$  для стесненного сжатия располагается между этими значениями). В этих точках оба набора констант прогнозируют совпадающие направления вектора скоростей деформаций, но при любом значении  $\chi$  из интервала между граничными точками направления вектора скоростей деформаций для рассматриваемых наборов констант различаются. Для стесненного сжатия  $\chi = (\sigma/p - 1)/2$  и с учетом (2.10), (3.14) можно убедиться, что оба набора констант соответствуют одному и тому же направлению вектора скоростей деформаций (со значением  $h = 2\sqrt{3}$ , которому соответствует черная прямая на рис. 8). Поэтому выбрать какой-то один из двух наборов на основании только данных свободного и стесненного сжатия невозможно. Для описания довольно тонкой характеристики отношения объемной и сдвиговой деформаций в зависимости от отношения объемного и сдвигового напряжений, более точного, чем представлено

на рис. 8, необходимо дополнительное испытание (трехосное сжатие, сжатие в упругой оболочке, сжатие в канале и др. [20]).

**Заключение.** В рамках модели Димаджио—Сэндлера упругопластического поведения некомпактных сред выведены вспомогательные соотношения, связывающие регистрируемые величины в базовых экспериментах на свободное и стесненное сжатие. Разработаны программы базовых экспериментов, включающие монотонное и ступенчатое с промежуточными разгрузками нагружение, позволяющие идентифицировать изотропные упругие и пластические свойства исследуемых материалов. Эти программы предусматривают стесненное сжатие в широком диапазоне изменения пористости (и плотности) материала и свободное сжатие материала в весьма узком диапазоне изменения этих переменных состояния. Последнее представляется рациональным для образцов, отштампованных из порошковых материалов, с низкой степенью консолидации. При этом также не возникает избыточных данных, а задача идентификации рассматриваемой модели оказывается корректной. Кривая упрочнения при свободном сжатии получается масштабированием по независимой и зависимой переменным функции упрочнения при стесненном сжатии. Рассматриваемая трехмерная модель способна описывать кривые упрочнения при пластическом течении в других напряженных состояниях, находящемся на эллиптической части поверхности текучести, и изменении напряженного состояния. В рамках рассматриваемой модели из базовых экспериментов на сжатие одновременно находится один параметр (угол внутреннего трения) конической части поверхности текучести в предположении отсутствия сцепления. Разумеется, прогнозные возможности модели при условиях, выходящих за пределы базовых экспериментов, нуждаются в экспериментальной проверке. По упругим модулям, определяемым по начальным участкам разгрузки при испытаниях на свободное и стесненное сжатие, вычисляется коэффициент Пуассона, при этом не требуется связываться с измерениями поперечного размера образца, не лишенными определенных недостатков. Полагается, что коэффициент поперечной деформации, постоянный для свободного сжатия в области пластичности в рамках рассматриваемой модели, не претерпевает разрыва в точке текучести и равен коэффициенту Пуассона. Разработанная методика позволяет определить две упругие константы и пять констант кэп-модели пластичности для достаточно широкого круга некомпактных сред.

Разработанная расчетно-экспериментальная методика использована для определения констант модели упругопластичности Димаджио—Сэндлера порошкообразного парафина марки Т1 фракции 0.63 мм. Для этого выполнены указанные выше базовые эксперименты в условиях квазистатического нагружения при комнатной температуре. Это позволит использовать стандартные возможности пакета программ LS-DYNA® для расчета процессов экструзии порошкообразного литейного воска и заполнения формы для отработки перспективных технологий литья по выплавляемым моделям.

Исследование выполнено в рамках госзадания по темам Пермского федерального исследовательского центра УрО РАН (А.А. Адамов и И.Э. Келлер) и

Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН (С.Г. Жилин и Н.А. Богданова).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калашиник Н.А., Ионов С.Г.* Механические и теплофизические свойства фольг на основе низкоплотных углеродных материалов // Известия высших учебных заведений. Серия: Химия и химическая технология. 2017. Т. 9. Вып. 60. С. 11–16. <https://doi.org/10.6060/tcct.2017609.4y>
2. *Chung D.D.L.* Flexible graphite for gasketing, adsorption, electromagnetic interference shielding, vibration damping, electrochemical applications, and stress sensing // *J. Mater. Eng. Perform.* 2000. № 9. P. 161–163. <https://doi.org/10.1361/105994900770346105>
3. *Dowell M.B., Howard R.A.* Tensile and compressive properties of flexible graphite foils // *Carbon.* 1986. V. 24. № 3. P. 311–323.
4. *Leng Y., Gu J., Cao W., Zhan T.Y.* Influences of density and flake size on the mechanical properties of flexible graphite // *Carbon.* 1998. V. 36. № 7–8. P. 875–881. [https://doi.org/10.1016/S0008-6223\(97\)00196-6](https://doi.org/10.1016/S0008-6223(97)00196-6)
5. *Khelifa M., Fierro V., Macutkevic J., Celzard A.* Nanoindentation of flexible graphite: Experimental versus simulation studies // *Advanced Material Science.* 2018. № 3 (2). P. 2–11. <https://doi.org/10.15761/AMS.1000142>
6. *Сапченко И.Г., Жилин С.Г., Комаров О.Н.* Управление структурой и свойствами пористых комбинированных удаляемых моделей. Владивосток: Дальнаука, 2007. 138 с.
7. *Жилин С.Г., Богданова Н.А., Комаров О.Н.* Влияние параметров уплотнения порошкового тела из воскообразного материала на формирование остаточных напряжений прессовки // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 3(41). С. 110–121. <https://doi.org/10.26293/chgru.2019.41.3.009>
8. *Жилин С.Г., Богданова Н.А., Комаров О.Н., Соснин А.А.* Снижение упругого отклика при уплотнении порошковой парафиностеариновой композиции // Деформация и разрушение материалов. 2020. № 1. С. 29–33. <https://doi.org/10.31044/1814-4632-2020-1-29-33>
9. *Жилин С.Г., Богданова Н.А., Комаров О.Н.* Исследование процессов формирования пористых выплавляемых моделей, применяемых для изготовления высокоточного литья // Известия высших учебных заведений. Цветная металлургия. 2023. № 3(29). С. 54–66. <https://doi.org/10.17073/0021-3438-2023-3-54-66>
10. *Пугачев А.К., Росляков О.А.* Переработка фторопластов в изделия. Л.: Химия, 1987. 168 с.
11. *Люкшин Б.А., Шилько С.В., Панин С.В. и др.* Дисперсно-наполненные полимерные композиты технического и медицинского назначения // *Plasticity of Pressure-Sensitive Materials, Engineering Materials.* Под ред. А.В. Герасимова. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2017. 311 с.
12. *Aubertin M., Li L.* A porosity-dependent inelastic criterion for engineering materials // *Int. J. Plast.* 2004. V. 20. № 12. P. 2179–2208. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2004.05.004>

13. *Altenbach H., Bolchoun A., Kolupaev V.A.* Phenomenological yield and failure criteria // *Plasticity of Pressure-Sensitive Materials, Engineering Materials*. Eds. A. Öchsner, H. Altenbach. Berlin, Heidelberg: Springer. 2014. P. 49–152.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-40945-5\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-40945-5_2)
14. *Kolupaev V.A., Yu M.-H., Altenbach H.* Fitting of the strength hypotheses // *Acta Mechanica*. 2016 V. 227. P. 1533–1556.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-016-1566-9>
15. *Khoei A.R., DorMohammadi H.* A three-invariant cap plasticity with isotropic–kinematic hardening rule for powder materials: Model assessment and parameter calibration // *Comput. Mater. Sci.* 2007. № 41. № 1. P. 1–12.  
<https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2007.02.011>
16. *Келлер И.Э., Петухов Д.С.* Критерии прочности и пластичности. Пермь: Изд-во Пермского национального исследовательского политехнического университета. 2020. 157 с.
17. *DiMaggio F.L., Sandler I.S.* Material models for granular soils // *J. Eng. Mech. Division ASCE*. 1971. № 97. P. 935–950.
18. *Schwer L.E., Murray Y.D.* A three-invariant smooth cap model with mixed hardening // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 1994. V. 18. № 10. P. 657–688.  
<https://doi.org/10.1002/nag.1610181002>
19. *LS-DYNA® Keyword User's Manual. Volume II. Material Models. Version R10.0.* Livermore Software Technology Corporation. 2017.
20. *Адамов А.А., Келлер И.Э., Подкина Н.С.* Базовые эксперименты для идентификации кэп-модели пластичности гибкого графита // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева* Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 3 (45). С. 131–142.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.20.13.013>

## IDENTIFICATION OF THE CAP MODEL OF ELASTOPLASTICITY OF NON-COMPACT MEDIA UNDER COMPRESSIVE MEAN STRESS

A. A. Adamov<sup>a</sup>, I. E. Keller<sup>a</sup>, S. G. Zhilin<sup>b</sup>, N. A. Bogdanova<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science, Perm, Russia*

<sup>b</sup> *Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

\*e-mail [adamov@icmm.ru](mailto:adamov@icmm.ru), \*\* e-mail [kie@icmm.ru](mailto:kie@icmm.ru), \*\*\*e-mail [zhilin@imim.ru](mailto:zhilin@imim.ru),  
\*\*\*\*e-mail [joyful289@inbox.ru](mailto:joyful289@inbox.ru)

**Abstract** – A program of basic tests and a method for identifying a three-dimensional model of the elastoplastic behavior of an isotropic porous or powdery consolidated medium experiencing arbitrary quasi-static loading under compressive medium stress at room temperature are proposed. The medium under consideration under compressive medium stresses is compacted with increasing effective stress, which leads to a nonlinear change in elastic modules, hardening and dilat-

ancy (coupling of shear and volumetric components of deformations) in the yield region. To describe this behavior, the cap model of DiMaggio and Sandler, which is present in application software packages, is considered. As basic tests, the free and constrained compression of a cylindrical sample is considered according to a special program containing the stages of loading and unloading with a sequential increase in the amplitude voltage. Samples with a given porosity for free compression tests are manufactured using a tight compression test rig. According to the initial slope of the discharge curves, the values of the elastic modulus for free and constrained compression are determined in a certain range of porosity changes, according to which the Poisson's ratio is determined. The five constants of the cap model are correctly and explicitly determined by the deformation curve of the material under constrained compression over a wide range of changes in axial deformation (and density), the flow stress under free compression of the sample at some density, and the assumption that the coefficient of transverse deformation in the yield region is equal to the Poisson's ratio. The elastic and plastic constants were determined according to the test data of powdered paraffin grade T1 with a fraction of 0.63 mm. The corresponding model is applicable for numerical simulation of extrusion processes and mold filling for casting by melting models, processes for manufacturing blanks of non-melting polymer composites by powder technology, stamping sealing elements from flexible graphite and other pressure treatment processes of non-compact media.

*Keywords:* non-compact media, densification, cap models of plasticity, elastic constants, identification, experiment, powdered paraffin

## REFERENCES

1. *Kalashnik N.A., Ionov S.G.* Mechanical and thermophysical properties of graphite foils based on low-density carbon materials // *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Khim. Khim. Tekhnol.* 2017. V. 9. № 60. P. 11–16. [in Russian]  
<https://doi.org/10.6060/tcct.2017609.4y>
2. *Chung D.D.L.* Flexible graphite for gasketing, adsorption, electromagnetic interference shielding, vibration damping, electrochemical applications, and stress sensing // *Journal of Materials Engineering and Performance.* 2000. № 9. P. 161–163.  
<https://doi.org/10.1361/105994900770346105>
3. *Dowell M.B., Howard R.A.* Tensile and compressive properties of flexible graphite foils // *Carbon.* 1986. № 24. P. 311–323.
4. *Leng Y., Gu J., Cao W., Zhan T.Y.* Influences of density and flake size on the mechanical properties of flexible graphite // *Carbon.* 1998. № 36. P. 875–881.
5. *Khelifa M., Fierro V., Macutkevic J., Celzard A.* Nanoindentation of flexible graphite: Experimental versus simulation studies // *Advanced Material Science.* 2018. V. 3. № 2. P. 2–11.  
<https://doi.org/10.15761/AMS.1000142>
6. *Sapchenko I.G., Zhilin S.G., Komarov O.N.* Controlling the structure and properties of porous combined removable models. Vladivostok: Dal'nauka, 2007. 138 p. [in Russian].
7. *Zhilin S.G., Bogdanova N.A., Komarov O.N.* Influence of parameters of the compacting of powder body from wax-like material on the forming of residual stresses of pressing.

- Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2019. V. 3. № 41. P. 110–121. [in Russian].  
<https://doi.org/10.26293/chgpu.2019.41.3.009>
8. *Zhilin S.G., Bogdanova N.A., Komarov O.N., Sosnin A.A.* Decrease in the elastic response in compacting a paraffin-stearin powder composition // Russian Metallurgy (Metally). 2020. V. 1. P. 29–33. [in Russian].  
<https://doi.org/10.31044/1814-4632-2020-1-29-33>
  9. *Zhilin S.G., Bogdanova N.A., Komarov O.N.* Porous wax patterns for high-precision investment casting // Izvestiya. Non-Ferrous Metallurgy. 2023. V. 3. № 29. P. 54–66.  
<https://doi.org/10.17073/0021-3438-2023-3-54-66>
  10. *Pugachev A.K., Roslyakov O.A.* Processing of Fluoroplastics into Products. L.: Khimiya, 1987. 168 p.
  11. *Lyukshin B.A. et al.* Dispersedly-Filled Polymer Composites for Technical and Medical Purposes. In: Plasticity of Pressure-Sensitive Materials, Engineering Materials (Ed. A.V. Gerasimov). Novosibirsk: Publishing House of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2017. 311 p.
  12. *Aubertin M., Li L.* A porosity-dependent inelastic criterion for engineering materials // Int. J. Plasticity. 2004. V. 12. № 20. P. 2179–2208.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2004.05.004>
  13. *Altenbach H., Bolchoun A., Kolupaev V.A.* Phenomenological Yield and Failure Criteria // Plasticity of Pressure-Sensitive Materials, Engineering Materials. Eds. A. Öchsner, H. Altenbach. Berlin, Heidelberg: Springer. 2014. P. 49–152.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-40945-5\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-40945-5_2)
  14. *Kolupaev V.A., Yu M.-H., Altenbach H.* Fitting of the strength hypotheses // Acta Mechanica. 2016. V. 6. № 227. P. 1533–1556.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-016-1566-9>
  15. *Khoei A.R., DorMohammadi H.* A three-invariant cap plasticity with isotropic–kinematic hardening rule for powder materials: Model assessment and parameter calibration // Computational Materials Science. 2007. № 41. P. 1–12.  
<https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2007.02.011>
  16. *Keller I.E., Petukhov D.S.* Criteria of Strength and Plasticity. Perm: Perm National Research Polytechnical University Press, 2020. 157 p. [in Russian].
  17. *DiMaggio F.L., Sandler I.S.* Material models for granular soils // J. Eng. Mech. Div. ASCE. 1971. № 97. P. 935–950.
  18. *Schwer L.E., Murray Y.D.* A three-invariant smooth cap model with mixed hardening // Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech. 1994. № 18. P. 657–688.
  19. LS-DYNA® Keyword User's Manual. Volume II. Material Models. Version R10.0. Livermore Software Technology Corporation, 2017.
  20. *Adamov A.A., Keller I.E., Podkina N.S.* Basic experiments for identification of the cap model of flexible graphite plasticity // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University I.Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State. 2020. V. 3. № 45. P. 131–142 [in Russian].  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.20.13.013>

УДК 531.26

## О МАКСВЕЛЛОВОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА СИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА

© 2024 г. Е. А. Никонова<sup>а</sup>, \*

<sup>а</sup>Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление”  
Российской академии наук, Москва, Россия

\*e-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com

Поступила в редакцию 31.12.2023 г.

После доработки 16.02.2024 г.

Принята к публикации 20.02.2024 г.

Обсуждается восходящий к Максвеллу подход к представлению потенциала, в частности потенциала ньютоновского поля тяготения в виде суммы потенциалов мультиполей различных порядков. Указаны критические случаи работы алгоритма по нахождению параметров мультиполя — его осей и момента. Случаи имеют место, когда тело обладает теми или иными симметриями в распределении масс. Сформулированы рекомендации по преодолению выявленных трудностей. Для тела, обладающего трехосным эллипсоидом инерции, приведены явные выражения осей и момента мультиполя второго порядка через интегралы инерции второго порядка. Показано, что оси мультиполя ортогональны круговым сечениям эллипсоида инерции тела. Критические случаи вычисления мультиполя третьего порядка рассмотрены на примере модельного тела с постоянной плотностью, имеющего форму равногранного тетраэдра. Приведен способ вычисления осей и момента мультиполя третьего порядка для такого тела.

*Ключевые слова:* гравитационный потенциал, моменты инерции высших порядков, максвеллово представление потенциала, мультиполь, спутниковое приближение потенциала, равногранный тетраэдр

DOI: 10.31857/S1026351924040052, EDN: UDEHJE

**1. Введение.** В работе рассматривается восходящий к Максвеллу подход [1–3] к представлению потенциала, в частности потенциала гравитационного поля в виде суммы последовательных дифференцирований различных порядков функции  $1/r$  по направлениям  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_k, \dots$ , где  $r = (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^{1/2}$  — расстояние от начала системы отсчета, связанной с телом, до пробной точки пространства. Методика, изначально применявшаяся Максвеллом при исследовании ряда задач электростатики [1], находит свое применение как в вопросах земного магнетизма [4], так и при изучении гравитационного поля Земли [5]. Представление гравитационного потенциала тела в виде ряда по шаровым функциям может рассматриваться

как совокупность потенциалов гравитационных полей, каждое из которых связано с определенным распределением масс в теле. Привлечение максвеллова подхода позволяет изучать источники этих полей [5]. Конструктивный алгоритм определения направлений  $\mathbf{h}_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  может быть построен на основании теоремы Сильвестра о существовании системы вещественных полюсов сферической функции [2, 6]. Этот алгоритм кратко излагается ниже в форме, опирающейся на интегралы инерции тела, гравитационный потенциал которого предполагается построить. В случае, когда тело обладает теми или иными симметриями в распределении масс, соответствующие интегралы инерции обращаются в ноль и обсуждаемый алгоритм не может быть применен явно. В настоящем исследовании обсуждается ряд таких критических случаев, а также приводятся рекомендации по преодолению трудностей с ними связанных. Рассматривается модельное тело в виде однородного равногранного тетраэдра.

В литературе известно много различных способов моделирования гравитационного поля небесных тел. Помимо разложений потенциала притяжения изучаемого небесного тела в ряды по шаровым функциям, по гармоникам сжатого эллипсоида вращения, а также по функциям Ламе (см. [7]) имеет место представление потенциала тела в рамках наиболее универсального способа описания формы поверхности тела в виде многогранника с треугольными гранями. Модель задается набором всех вершин, выраженных в виде векторов в фиксированной с телом системе координат, и набором граней с согласованной ориентацией. В предположении об однородности небесного тела в работах [8, 9], (см. также [10]) дается явное выражение для его потенциала ньютоновского притяжения. Обобщая предположение об однородности распределения массы тела, подход получил свое развитие в работах, например [11, 12], где обсуждается линейное распределение плотности, и работах [13, 14], где рассматривается распределение плотности полиномиального типа.

Можно указать и иные подходы, опирающиеся, например, на замену исходного тела совокупностью гравитирующих масс с известной структурой поля притяжения. Так, например, поле притяжения тел вытянутой формы зачастую приближается полем притяжения гравитирующей гантели – пары массивных точек, удаленных друг от друга на некоторое фиксированное расстояние (см., например, [15–20]); для сплюснутых тел такие точки наделяются комплексными массами и размещаются в комплексной области, но потенциал такой комплексифицированной гантели остается вещественной функцией (см., например, [21, 22], а также [23]). Анализ многочисленных обобщений классической задачи двух неподвижных центров дается в [24], где отмечается роль интенсивных исследований этой задачи, а также приводится обзор широкого круга публикаций по теме исследования. Для более полного учета особенностей распределения масс тела в экваториальной плоскости в работе [25] предлагается модель небесных тел в виде троек соприкасающихся шаров, параметры которых определяются с помощью так называемой “скелетонизации” области, высекаемой в теле его экваториальной плоскостью, (ср. [26]). Представление распределения масс тела четверкой материальной точек

обсуждается, например, в работах [27, 28]. Представления тела в виде конечного, но большого набора гравитирующих точечных масс рассматривается в [29].

**2. Максвеллово представление гравитационного потенциала.** Пусть  $\mathcal{B}$  – гравитирующее тело, ограниченное поверхностью  $\partial\mathcal{B}$ . Потенциал порождаемой им силы притяжения определяется следующим образом [7]. Пусть  $OX_1X_2X_3$  – фиксированная в теле  $\mathcal{B}$  декартова система отсчета, в осях которой положение произвольной точки тела  $Q$  и произвольной точки пространства  $P$ , внешней по отношению к телу, определяется радиусами-векторами:

$$\overline{OQ} = \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T, \quad q = (\mathbf{q}, \mathbf{q})^{1/2}, \quad \overline{OP} = \mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)^T, \quad r = (\mathbf{r}, \mathbf{r})^{1/2}.$$

Пусть  $G$  – гравитационная постоянная, тогда потенциал притяжения тела  $\mathcal{B}$  в точке  $P$  определяется тройным интегралом:

$$U(\mathbf{r}) = -G \iiint_{\mathcal{B}} \frac{dm(\mathbf{q})}{r_{QP}}, \quad r_{QP} = (\mathbf{r} - \mathbf{q}, \mathbf{r} - \mathbf{q})^{1/2}, \quad (2.1)$$

где интегрирование распространено по всему телу  $\mathcal{B}$ . В общем случае  $dm(\mathbf{q})$  обозначает элемент массы, сосредоточенной в элементарном объеме  $d\mathbf{q} = dq_1 dq_2 dq_3$ , окружающем точку  $Q$ . Функция  $m = m(\mathbf{q})$ , вообще говоря, недифференцируема. Поэтому интеграл (2.1) рассматривают как интеграл Римана–Стилтьеса. Если предположить, что масса  $m$  – это дифференцируемая функция координат, то  $dm = \rho(\mathbf{q})d\mathbf{q}$ , где  $\rho(\mathbf{q})$  – плотность в точке  $Q$ . В этом случае

$$U(\mathbf{r}) = -G \iiint_{\mathcal{B}} \frac{\rho(\mathbf{q})d\mathbf{q}}{r_{QP}}.$$

Во внешних по отношению к телу  $\mathcal{B}$  точках пространства потенциал может быть представлен в виде функционального ряда (см., например, [7, 30]):

$$U(\mathbf{r}) = -G \sum_{n=0}^{\infty} U_n,$$

где слагаемые  $U_n$  имеют вид:

$$U_n(\mathbf{r}) = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{(-1)^n}{k_1!k_2!k_3!} I_{k_1k_2k_3} \frac{\partial^n}{\partial r_1^{k_1} \partial r_2^{k_2} \partial r_3^{k_3}} \left( \frac{1}{r} \right), \quad (2.2)$$

здесь  $k_1, k_2, k_3$  – целые неотрицательные числа,

$$I_{k_1k_2k_3} = \iiint_{\mathcal{B}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} dm(\mathbf{x})$$

– моменты инерции (интегралы инерции) порядка  $n$ .

Следуя Максвеллу [1] (см. также [2, 3, 30]), функции  $U_n$  могут быть представлены в виде:

$$U_n(\mathbf{r}) = (-1)^n \frac{p_n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \left( \frac{1}{r} \right), \quad (2.3)$$

где  $\partial/\partial h_k$  – дифференцирование вдоль единичного вектора  $\mathbf{h}_k = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)^T$ ,  $\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 = 1$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ),  $p_n$  – постоянная положительная величина, характеризующаяся распределением массы в теле  $\mathcal{B}$ .

Функция  $1/r$  – гармоническая, следовательно функция  $U_n$  тоже, очевидно, гармоническая, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа. Функция  $U_n$  определяет потенциал так называемого мультиполя  $n$ -го порядка – предельного точечного объекта, задаваемого определенной конфигурацией материальных точек. Постоянную величину  $p_n$  называют моментом мультиполя, а векторы  $\mathbf{h}_k$  – его осями. Свойствам мультиполей и их физической интерпретации посвящены многочисленные исследования (см., например, [1–3, 6, 30]).

Согласно Сильвестру [6] (см. также [2]), вычисление осей мультиполя сводится к решению системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} r^{2n+1} \cdot U_n(\mathbf{r}) &= 0, \\ (\mathbf{r}, \mathbf{r}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $r^{2n+1} \cdot U_n(\mathbf{r})$  – однородный гармонический многочлен степени  $n$ . В монографии [3] для решения системы (2.4) предлагается выполнить подстановку

$$r_1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}v, \quad r_2 = \frac{2u}{1+u^2}v, \quad r_3 = iv, \quad (2.5)$$

где  $u \in (-\infty; +\infty)$  и  $v \in (-\infty; +\infty)$ ,  $i = \sqrt{-1}$ . В результате такой подстановки второе уравнение системы (2.4) оказывается выполненным тождественно. При этом первое уравнение системы (2.4) принимает вид:

$$\frac{v^n}{(u^2 + 1)^n} \cdot P_{2n}(u) = 0. \quad (2.6)$$

Отбрасывая тривиальное решение  $v=0$ , встает задача определения корней многочлена  $P_{2n}(u)$  степени  $2n$  относительно переменной  $u$  с комплексными коэффициентами.

Далее, для всех различных пар корней  $u_1$  и  $u_2$  многочлена  $P_{2n}(u)$ , рассматривают формы:

$$Ar_1 + Br_2 + Cr_3 = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ \xi(u_1) & \eta(u_1) & i \\ \xi(u_2) & \eta(u_2) & i \end{vmatrix} = 0, \quad \xi(u) = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \eta(u) = \frac{2u}{1+u^2}, \quad (2.7)$$

линейные относительно  $r_1, r_2, r_3$ . Выбирают из них лишь те, для которых коэффициенты  $A, B$  и  $C$  из соотношения (2.7) являются вещественными. Согласно [3, 6], в общем случае таких пар будет ровно  $n$ . Пусть отвечающие им

коэффициенты  $(A_k, B_k, C_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , тогда оси мультиполю  $n$ -го порядка определяются как

$$\mathbf{h}_k = \left( \frac{A_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2}}, \frac{B_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2}}, \frac{C_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2}} \right)^T, \quad k = 1, \dots, n.$$

Теперь, когда оси мультиполюлей известны, вычисляют мультиполюльный момент  $p_n$ . Для этого приравнивают правые части соотношений (2.2) и (2.3). Подставляя координаты произвольной точки пространства в получающееся равенство, а также вычисленные оси, приходят к линейному уравнению на величину  $p_n$ . Момент  $p_n$  считают величиной положительной [2, 3], поэтому в случае необходимости изменяют направление одного из векторов  $\mathbf{h}_k$  на противоположное.

**3. Случай неполного набора корней многочлена  $P_{2n}$ .** Случай неполного набора корней многочлена  $P_{2n}$  из (2.6) является критическим для изложенного выше алгоритма, так как при этом не удастся отыскать полного набора осей мультиполюля порядка  $n$ .

Заметим, что подстановка (2.5) является примером одной из шести возможных замен переменных, позволяющих упростить систему (2.4). Например, при подстановке

$$r_1 = \frac{2u}{1+u^2}v, \quad r_2 = \frac{1-u^2}{1+u^2}v, \quad r_3 = iv$$

второе уравнение системы (2.4) также окажется выполненным тождественно, а решение первого уравнения системы (2.4) сводится к определению корней многочлена  $P_{2n}(u)$ , вообще говоря, отличающегося от многочлена из (2.6). Фактически для каждого фиксированного  $n$  имеется шесть различных многочленов, которые можно отнести к одному из двух семейств  $\{P_{2n}^i\}$ ,  $\{\tilde{P}_{2n}^i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Циклическая перестановка индексов величин  $I_{k_1 k_2 k_3} \rightarrow I_{k_3 k_1 k_2} \rightarrow I_{k_2 k_3 k_1}$  позволяет получить выражения всех многочленов из указанных семейств:  $P_{2n}^1 \rightarrow P_{2n}^2 \rightarrow P_{2n}^3$  и  $\tilde{P}_{2n}^1 \rightarrow \tilde{P}_{2n}^2 \rightarrow \tilde{P}_{2n}^3$ . Приведем явный вид многочленов  $P_{2n}^1$ ,  $\tilde{P}_{2n}^1$  при  $n = 1, 2, 3$ , по которым можно восстановить выражения для остальных многочленов из указанных семейств:

$$P_2^1(u) = c_{10}^1 u^2 + c_{11}^1 u - \overline{c_{10}^1} = 0, \quad \tilde{P}_2^1(u) = \overline{c_{10}^1} u^2 + i \cdot c_{11}^1 u + c_{10}^1 = 0,$$

$$c_{10}^1 = -I_{100} + iI_{001}, \quad c_{11}^1 = 2I_{010},$$

$$P_4^1(u) = c_{20}^1 u^4 + c_{21}^1 u^3 + c_{22}^1 u^2 - \overline{c_{21}^1} u + \overline{c_{20}^1} = 0,$$

$$\tilde{P}_4^1(u) = \overline{c_{20}^1} u^4 + i \cdot \overline{c_{21}^1} u^3 - c_{22}^1 u^2 + i \cdot c_{21}^1 u + c_{20}^1 = 0,$$

$$c_{20}^1 = \frac{1}{2}(I_{002} - I_{200}) + iI_{101}, \quad c_{21}^1 = 2(I_{110} - iI_{011}), \quad c_{22}^1 = I_{200} - 2I_{020} + I_{002},$$

$$\begin{aligned}
 P_6^1(u) &= c_{30}^1 u^6 + c_{31}^1 u^5 + c_{32}^1 u^4 + c_{33}^1 u^3 - \overline{c_{32}^1} u^2 + \overline{c_{31}^1} u - \overline{c_{30}^1} = 0, \\
 \tilde{P}_6^1(u) &= \overline{c_{30}^1} u^6 + i \cdot \overline{c_{31}^1} u^5 - \overline{c_{32}^1} u^4 - i \cdot c_{33}^1 u^3 - c_{32}^1 u^2 + i \cdot c_{31}^1 u + c_{30}^1 = 0, \\
 c_{30}^1 &= I_{300} - 3I_{102} + i(I_{003} - 3I_{201}), \quad c_{31}^1 = 6(I_{012} - I_{210} + 2iI_{111}), \\
 c_{32}^1 &= 3(4I_{120} - I_{102} - I_{300} + i(-4I_{021} + I_{003} + I_{201})), \quad c_{33}^1 = 4(3I_{012} + 3I_{210} - 2I_{030}).
 \end{aligned}$$

Сдвиг индексов коэффициентов позволяет получить, например, такой многочлен:

$$\begin{aligned}
 P_4^2(u) &= c_{20}^2 u^4 + c_{21}^2 u^3 + c_{22}^2 u^2 - \overline{c_{21}^2} u + \overline{c_{20}^2}, \\
 c_{20}^2 &= \frac{1}{2}(I_{200} - I_{020}) + iI_{110}, \quad c_{21}^2 = 2(I_{011} - iI_{101}), \quad c_{22}^2 = I_{020} - 2I_{002} + I_{200}.
 \end{aligned}$$

В зависимости от системы координат, связанной с телом  $\mathcal{B}$ , а также от его формы и распределения масс, коэффициенты при старших степенях многочленов  $P_{2n}^1(u)$  и  $\tilde{P}_{2n}^i(u)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , могут обращаться в ноль, при этом сами многочлены уже не будут обладать  $2n$  корнями, что, как отмечалось, является препятствием для определения полного набора из  $n$  осей мультиполя  $n$ -го порядка приведенным выше способом.

Рассмотрим случаи, когда многочлены  $P_{2n}^1(u)$  имеют меньше  $2n$  корней для  $n = 1, 2, 3$ . Многочлены  $P_{2n}^2(u)$ ,  $P_{2n}^3(u)$  могут быть исследованы аналогично. Заметим, что старший коэффициент многочлена  $\tilde{P}_{2n}^1(u)$ , равный  $\overline{c_{10}^1}$ , обращается в ноль в тех же случаях, что и коэффициент  $c_{10}^1$ .

Для  $n = 1$  старший коэффициент  $c_{10}^1$  обращается в ноль, если  $I_{100} = 0$  и  $I_{001} = 0$ . Тогда  $P_2^1(u)$  принимает вид  $c_{11}^1 u = 0$  и имеет корень  $u = 0$ . Дополнительно при  $I_{010} = 0$  многочлен  $P_2^1(u)$  обращается тождественно в ноль, что имеет место в случае, когда начало системы координат совпадает с центром масс тела:  $I_{100} = I_{010} = I_{001} = 0$  и  $P_2(u) \equiv 0$ . В этом случае  $U_1(\mathbf{r}) \equiv 0$ , а мультиполя первого порядка не существует.

Для  $n = 2$  старший коэффициент  $c_{20}^1$  обращается в ноль, если  $I_{002} = I_{200}$  и  $I_{101} = 0$ , т.е. тело  $\mathcal{B}$  является динамически симметричным с осью динамической симметрии  $OX_2$ , а начало системы координат лежит на этой оси. В этом случае многочлен примет вид:  $P_4^1(u) = c_{21}^1 u^3 + c_{22}^1 u^2 - c_{21}^1 u = 0$ . Корни такого многочлена имеют вид:

$$u_1 = 0, \quad u_{2,3} = \frac{I_{200} - I_{020} \pm \sqrt{4I_{110}^2 + 4I_{011}^2 + (I_{200} - I_{020})^2}}{-2I_{110} + 2I_{011}i}.$$

Подставляя в соотношение (2.7) различные пары корней  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$ , можно определить лишь одну ось мультиполя:

$$\mathbf{h}_1 = \frac{1}{\sqrt{(I_{200} - I_{020})^2 + 4I_{110}^2 + 4I_{011}^2}} \cdot (2I_{110}, I_{020} - I_{200}, 2I_{011})^T.$$

Чтобы отыскать вторую ось, предлагается сделать следующее. Полагая  $\mathbf{h}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ , подставим найденную ось  $\mathbf{h}_1$  в соотношение (2.3). Приравнявая коэффициенты в  $U_2(\mathbf{r})$  из соотношений (2.2) и (2.3) при одинаковых степенях  $r_1, r_2, r_3$ , получаем вторую ось и момент мультиполя:

$$\mathbf{h}_2 = (0, 1, 0), \quad p_2 = \sqrt{(I_{200} - I_{020})^2 + 4I_{110}^2 + 4I_{011}^2}.$$

Отметим, что вторая ось оказывается сонаправленной с осью динамической симметрии тела  $\mathcal{B}$ .

Если тензор инерции тела не является шаровым, то выберем такую замену переменных (2.5), которая приводит к случаю, когда  $c_{20}^2 = (I_{200} - I_{020})/2 + iI_{110} \neq 0$ , а многочлен  $P_4^2(u)$  обладает четырьмя корнями, что позволяет найти обе оси мультиполя.

Рассмотрим случай, когда тело  $\mathcal{B}$  обладает трехосным эллипсоидом инерции, а связанная с ним система координат совпадает с его главными центральными осями инерции. В этом случае коэффициент  $c_{21}^1 = 0$ , и многочлен имеет вид:

$$P_4^1(u) = c_{20}^1 u^4 + c_{22}^1 u^2 + c_{20}^1, \quad c_{20}^1 = (I_{002} - I_{200})/2, \quad c_{22}^1 = I_{200} - 2I_{020} + I_{002}.$$

Полагая для определенности  $I_{200} > I_{020} > I_{002}$ , корни  $P_4^1(u) = 0$  имеют вид:

$$u_1 = -u_2 = \sqrt{\frac{I_{002} + I_{200} - 2I_{020} - 2i\sqrt{(I_{200} - I_{020})(I_{020} - I_{002})}}{I_{200} - I_{002}}},$$

$$u_3 = -u_4 = \sqrt{\frac{I_{002} + I_{200} - 2I_{020} + 2i\sqrt{(I_{200} - I_{020})(I_{020} - I_{002})}}{I_{200} - I_{002}}},$$

а оси мультиполя второго порядка при этом записываются как

$$\mathbf{h}_1 = \left( \frac{\sqrt{I_{200} - I_{020}}}{\sqrt{I_{200} - I_{002}}}, 0, -\frac{\sqrt{I_{020} - I_{002}}}{\sqrt{I_{200} - I_{002}}} \right)^T, \quad \mathbf{h}_2 = \left( \frac{\sqrt{I_{200} - I_{020}}}{\sqrt{I_{200} - I_{002}}}, 0, \frac{\sqrt{I_{020} - I_{002}}}{\sqrt{I_{200} - I_{002}}} \right)^T,$$

момент мультиполя равен  $p_2 = I_{200} - I_{002}$ .

Укажем геометрический смысл полученных осей. Рассмотрим круговые сечения эллипсоида инерции  $J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 = 1$ , где  $J_x = I_{020} + I_{002}$ ,  $J_y = I_{200} + I_{002}$ ,  $J_z = I_{200} + I_{020}$  тела  $\mathcal{B}$ . Имеются два таких сечения, они лежат в пересечениях эллипсоида плоскостями, проходящими через его среднюю ось [31]. Вычисления показывают, что найденные оси  $\mathbf{h}_1$  и  $\mathbf{h}_2$  ортогональны этим круговым сечениям.

*Замечание.* Мультипольное представление потенциала спутникового приближения, нашедшего широкое применение в небесной механике и динамике космического полета [7], имеет вид:

$$U_{\text{спутник}} = -G \left( \frac{p_0}{r} + \frac{p_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial h_1 \partial h_2} \left( \frac{1}{r} \right) \right).$$

Если тело обладает шаровым тензором инерции, то  $U_2(\mathbf{r}) \equiv 0$  и мультиполя второго порядка не существует.

Особый случай вычисления мультиполя третьего порядка рассмотрим на примере однородного тела, имеющего форму равногранного тетраэдра. В общем случае такое тело обладает трехосным эллипсоидом инерции, а в главных центральных осях инерции из десяти моментов инерции третьего порядка лишь один не является тождественным нулем.

**4. Мультиполь третьего порядка однородного равногранного тетраэдра.** Пусть твердое тело  $\mathcal{B}$  – однородный равногранный тетраэдр массы  $m$ , а  $Ox_1x_2x_3$  – связанная с ним система отсчета, оси которой направлены вдоль его бимедиан. Эти оси – главные оси инерции тетраэдра [32] (см. также [28, 33, 34]). Если  $2a_1, 2a_2, 2a_3$  – длины бимедиан, то вершины тетраэдра  $P_1, P_2, P_3$  и  $P_4$  в этой системе отсчета задаются радиусами-векторами:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \overline{OP_1} = (a_1, -a_2, -a_3)^T, & \mathbf{r}_2 &= \overline{OP_2} = (-a_1, -a_2, a_3)^T, \\ \mathbf{r}_3 &= \overline{OP_3} = (-a_1, a_2, -a_3)^T, & \mathbf{r}_4 &= \overline{OP_4} = (a_1, a_2, a_3)^T. \end{aligned}$$

Для вычисления величин  $I_{k_1k_2k_3}$  определим границы интегрирования. Так, например, полагая  $-a_3 \leq x_3 \leq a_3$ , область, по которой берется оставшийся двойной интеграл, представим в виде объединения трех областей со следующими границами:

$$\begin{aligned} -a_1 \leq x_1 \leq -a_1 \cdot x_3 / a_3 & \text{ и } x_{23} \leq x_2 \leq x_{21} \\ -a_1 \cdot x_3 / a_3 \leq x_1 \leq a_1 \cdot x_3 / a_3 & \text{ и } x_{22} \leq x_2 \leq x_{21} \\ a_1 \cdot x_3 / a_3 \leq x_1 \leq a_1 & \text{ и } x_{22} \leq x_2 \leq x_{24}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} x_{21}(x_1, x_3) &= a_2 \cdot x_1 / a_1 - a_2 \cdot x_3 / a_3 + a_2, & x_{22}(x_1, x_3) &= a_2 \cdot x_1 / a_1 + a_2 \cdot x_3 / a_3 - a_2, \\ x_{23}(x_1, x_3) &= -a_2 \cdot x_1 / a_1 - a_2 \cdot x_3 / a_3 - a_2, & x_{24}(x_1, x_3) &= -a_2 \cdot x_1 / a_1 + a_2 \cdot x_3 / a_3 + a_2, \end{aligned}$$

причем имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} x_{21}(x_1, -x_3) &= -x_{23}(x_1, x_3), & x_{22}(x_1, -x_3) &= -x_{24}(x_1, x_3), \\ x_{23}(x_1, -x_3) &= -x_{21}(x_1, x_3), & x_{24}(x_1, -x_3) &= -x_{22}(x_1, x_3). \end{aligned}$$

*Утверждение.* Если индексы  $k_i, k_j, i \neq j, i, j = 1, 2, 3$  имеют различную четность, то коэффициент  $I_{k_1k_2k_3} = 0$ .

Доказательство этого факта техническое и заключается в том, что если найдутся два индекса  $k_i, k_j, i \neq j, i, j = 1, 2, 3$  разной четности, то двойной интеграл по  $x_1$  и  $x_2$  является нечетной функцией переменной  $x_3$ . Интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю.

Ненулевые моменты инерции вплоть до третьего порядка имеют следующий вид:

$$I_{000} = m, I_{200} = ma_1^2/5, I_{020} = ma_2^2/5, I_{002} = ma_3^2/5, I_{111} = ma_1a_2a_3/15.$$

В осях  $Ox_1x_2x_3$  главные центральные моменты инерции, отнесенные к массе тетраэдра, имеют вид:

$$J_{200} = (a_2^2 + a_3^2)/5, J_{020} = (a_1^2 + a_3^2)/5, J_{002} = (a_1^2 + a_2^2)/5.$$

*Замечание.* Моменты инерции также могут быть вычислены с помощью их производящей функции. В осях  $Ox_1x_2x_3$  производящая функция моментов инерции  $I_{abc}$  однородного равногранного тетраэдра имеет вид [35] (см. также [36]):

$$F(\mathbf{t}; a_1, a_2, a_3) = 4a_1a_2a_3 \sum_{(1,2,3)} \frac{e^{a_1t_1} \operatorname{ch}(a_2t_2 + a_3t_3) - e^{-a_1t_1} \operatorname{ch}(a_2t_2 - a_3t_3)}{(a_1^2t_1^2 - a_2^2t_2^2)(a_3^2t_3^2 - a_1^2t_1^2)} a_1t_1.$$

В частном случае однородного правильного тетраэдра с бимедианами длины  $2a$  эта функция записывается как

$$F(\mathbf{t}; a) = 4 \sum_{(1,2,3)} \frac{e^{at_1} \operatorname{ch}((t_2 + t_3)a) - e^{-at_1} \operatorname{ch}((t_2 - t_3)a)}{(t_1^2 - t_2^2)(t_3^2 - t_1^2)} t_1.$$

Для нахождения осей мультиполя третьего порядка выпишем многочлен  $P_6^l(u)$ . Подставляя найденные моменты инерции для равногранного тетраэдра, получим:

$$c_{30}^1 = c_{32}^1 = c_{33}^1 = 0, c_{31}^1 = 12i \cdot ma_1a_2a_3/15, P_6^1(u) = c_{31}^1u^5 + \overline{c_{31}^1}u = 0.$$

Паре корней  $u = \pm 1$  отвечает ось мультиполя  $\mathbf{h}_1 = (1; 0; 0)$ , паре корней  $u = \pm i$  отвечает ось мультиполя  $\mathbf{h}_3 = (0; 0; 1)$ . Приравнивая коэффициенты при соответствующих слагаемых в (2.2) и (2.3), находим третью ось  $\mathbf{h}_2 = (0; 1; 0)$ , а также момент мультиполя, который оказывается равным  $p_3 = 6I_{111} = 2m \cdot a_1a_2a_3/5$ .

Легко убедиться, что для любой из шести замен переменных типа (2.5) коэффициент при старшей степени многочлена  $P_6^l(u)$  всегда обращается в ноль.

**5. Выводы.** В работе рассмотрен восходящий к Максвеллу подход к представлению гравитационного потенциала тела в виде суммы потенциалов мультиполей различных порядков. Определены критические случаи работы алгоритма по нахождению параметров мультиполя – его осей и момента, основанного на теореме Сильвестра о существовании системы вещественных полюсов сферической функции. Такие случаи имеют место, когда тело обладает теми или иными симметриями в распределении масс. В исследовании приведены рекомендации по преодолению трудностей с ними связанными.

В случае тела, обладающего трехосным эллипсоидом инерции, получены явные выражения для осей и момента мультиполя второго порядка. Вычисления показали, что оси мультиполя ортогональны круговым сечениям эллипсоида инерции тела.

Рассмотрено модельное тело с постоянной плотностью, имеющее форму равногранного тетраэдра. В общем случае такое тело имеет трехосный эллипсоид инерции, а в главных центральных осях инерции из десяти моментов инерции третьего порядка лишь один не обращается в ноль тождественно. Приведен способ вычисления осей и момента мультиполя третьего порядка такого тела.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Maxwell J.C.* A treatise on electricity and magnetism. V. 1. Oxford: Clarendon Press, 1873. [Максвелл Дж. К. Трактат об электричестве и магнетизме. Т. 1. М.: Наука, 1989. 415 с.]
2. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Издательство иностранной литературы, 1952. 476 с. [*Hobson E.W.* The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. Cambridge: Cambridge University Press, 1931.]
3. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.-Л.: Государственное технико-теоретическое издательство, 1933. 525 с. [*Courant R., Hilbert D.* Methoden der mathematischen Physik. I. Berlin: Verlag von Julius Springer, 1931.]
4. *Умов Н.А.* Построение геометрического образа потенциала Гаусса как прием изыскания законов земного магнетизма // Тр. отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. 1904. Т. 12. Вып. 1. С. 1–26.
5. *Мещеряков Г.А.* Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. М.: Наука, 1991. 214 с.
6. *Sylvester J.J.* Note on spherical harmonics // Philosophical Magazine. 1876. V. 2. P. 291–307.
7. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 800 с.
8. *Werner R.A.* The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1994. V. 59. № 3. P. 253–278. <https://doi.org/10.1007/BF00692875>
9. *Werner R.A., Scheeres D.J.* Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1996. V. 65. № 3. P. 313–344. <https://doi.org/10.1007/BF00053511>
10. *Werner R.A.* Spherical harmonic coefficients for the potential of a constant-density polyhedron // Computers and Geosciences. 1997. V. 23. № 10. P. 1071–1077. [https://doi.org/10.1016/S0098-3004\(97\)00110-6](https://doi.org/10.1016/S0098-3004(97)00110-6)
11. *Pohánka V.* Optimum expression for computation of the gravity field of a polyhedral body with linearly increasing density // Geophysical Prospecting. 1998. V. 46. № 4. P. 391–404. <https://doi.org/10.1046/j.1365-2478.1998.960335.x>
12. *D'Urso M.G.* Gravity effects of polyhedral bodies with linearly varying density. // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2014. V. 120. P. 349–372. <https://doi.org/10.1007/s10569-014-9578-z>
13. *Ren Z., Chen C., Zhong Y., Chen H., Kalscheuer T., Maurer H., Tang J., Hu X.* Recursive analytical formulae of gravitational fields and gradient tensors for polyhedral bodies with polynomial density contrasts of arbitrary non-negative integer orders // Surveys in Geophysics. 2020. V. 41. P. 695–722. <https://doi.org/10.1007/s10712-020-09587-4>

14. *D'Urso M.G., Di Lieto D.* Gravitational fields of polyhedral bodies with 3D polynomial density contrast // *Surveys in Geophysics*. 2024. V. 45. P. 887–975.  
<https://doi.org/10.1007/s10712-023-09822-8>
15. *Белецкий В.В., Пономарева О.Н.* Параметрический анализ устойчивости относительного равновесия в гравитационном поле // *Космические исследования*. 1990. Т. 28. № 5. С. 664–675.
16. *Белецкий В.В.* Обобщенная ограниченная круговая задача трех тел как модель динамики двойных астероидов // *Космические исследования*. 2007. Т. 45. № 5. С. 435–442.
17. *Zeng X., Jiang F., Li J., Baoyin H.* Study on the connection between the rotating mass dipole and natural elongated bodies // *Astrophysics and Space Science*. 2015. V. 356. № 1. P. 29–42.  
<https://doi.org/10.1007/s10509-014-2187-1>
18. *Zeng X., Baoyin H., Li J.* Updated rotating mass dipole with oblateness of one primary: 1. Equilibria in the equator and their stability. // *Astrophysics and Space Science*. 2016. V. 361. № 1. Article 14. P. 1–12.  
<https://doi.org/10.1007/s10509-015-2598-7>
19. *Zeng X., Baoyin H., Li J.* Updated rotating mass dipole with oblateness of one primary: 2. Out-of-plane equilibria and their stability. // *Astrophysics and Space Science*. 2016. V. 361. № 1. Article 15. P. 1–9.  
<https://doi.org/10.1007/s10509-015-2599-6>
20. *Буров А.А., Герман А.Д., Распопова Е.А., Никонов В.И.* О применении к-средних для определения распределения масс гантелеобразных небесных тел. // *Нелинейная динамика*. 2018. Т. 14. № 1. С. 45–52.  
<https://doi.org/10.20537/nd1801004>
21. *Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г.* Общее решение задачи о движении искусственного спутника Земли в нормальном поле притяжения Земли // *Искусственные спутники Земли*. М.: Изд-во АН СССР. 1961. Вып. 8. С. 64–71.
22. *Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г.* Применение обобщенной задачи двух неподвижных центров в теории движения ИСЗ // *Проблемы движения искусственных небесных тел* М.: Изд-во АН СССР. 1963. С. 92–98.
23. *Баландин Д.В., Никонов В.И.* О точках либрации вращающегося “комплексифицированного” треугольника // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. 2016. Т. 71. № 3. С. 25–31.
24. *Аниковский В.В., Журавлев С.Г.* Задача Эйлера и ее приложения в небесной механике и космодинамике // *ПММ*. 2011. Т. 75. № 6. С. 940–950.
25. *Herrera-Sucarrat E., Palmer P. L., Roberts R. M.* Modeling the gravitational potential of a nonspherical asteroid // *J. Guidance, Control, Dynamics*. 2013. V. 36. № 3. P. 790–798.  
<https://doi.org/10.2514/1.58140>
26. *Буров А.А., Герман А.Д., Никонов В.И.* Использование метода К-средних для агрегирования масс продолговатых небесных тел // *Космические исследования*. 2019. Т. 57. № 4. С. 283–289.  
<https://doi.org/10.1134/S0023420619040022>
27. *Burov A. A., Guerman A. D., Nikonova E. A., Nikonov V. I.* Approximation for attraction field of irregular celestial bodies using four massive points // *Acta Astronautica*. 2019. V. 157. P. 225–232.  
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.11.030>
28. *Никонова Е.А.* Равногранный тетраэдр и система точечных масс, равномоментная твердому телу // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия*. 2023. Т. 10. № 1. С. 155–164.  
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.113>

29. *Chanut T. G. G., Aljbaae S., Carruba V.* Mascon gravitation model using a shaped polyhedral source // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015. V. 450. № 4. P. 3742–3749.  
<https://doi.org/10.1093/mnras/stv845>
30. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. М.: Высшая школа, 1970. 713 с.
31. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М.-Л.: Главная редакция общетехнической литературы и номографии, 1936. 302 с. [*Hilbert D., Cohn-Vossen S.* *Anschauliche geometrie*. Berlin: Verlag von J. Springer, 1932.]
32. *Шарыгин И.Ф.* Задачи по геометрии. Стереометрия. Сер. “Библиотечка Квант”. Вып. 31. М.: Наука, 1984. 160 с.
33. *Никонова Е.А.* О стационарных движениях равногранного тетраэдра с неподвижной точкой в центральном поле сил // *ПММ*. 2022. Т. 86. № 2. С. 153–168.  
<https://doi.org/10.31857/S0032823522020096>
34. *Никонова Е.А.* О стационарных движениях равногранного тетраэдра, близкого к правильному, с неподвижной точкой в центральном ньютоновском поле сил // *Изв. РАН. МТТ*. 2022. № 5. С. 120–129.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329922050117>
35. *Буров А.А., Никонова Е.А.* Производящая функция компонент тензора Эйлера-Пуансо // *Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки*. 2021. Т. 498. С. 53–56.  
<https://doi.org/10.31857/S2686740021030068>
36. *Burov A.A., Nikonova E.A.* Generating function of the inertial integrals for small celestial bodies // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2022. V. 134. № 4. Article 37.  
<https://doi.org/10.1007/s10569-022-10087-3>

## ON THE MAXWELL REPRESENTATION OF THE GRAVITATIONAL POTENTIAL FOR A SYMMETRIC BODY

**E. A. Nikonova<sup>a</sup>, \***

*<sup>a</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

*\*e-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com*

**Abstract** — The article analyzes an approach that goes back to Maxwell to the representation of a potential, in particular, the potential of the Newtonian field of gravity as a sum of potentials of multipoles of different orders. Critical cases of the algorithm for finding the parameters of a multipole, namely, its axes and moment, are indicated. The cases take place when the body has certain symmetries in the mass distribution. Recommendations for overcoming the identified difficulties are formulated. For a body with a triaxial ellipsoid of inertia, explicit expressions for the axes and moment of a second-order multipole that are expressed via second-order inertia integrals are given. It is shown that the axes of the multipole are orthogonal to the circular cross-sections of the ellipsoid of inertia of the body. Critical cases of calculating a third-order multipole are considered using the example of a model

body with constant density, that has the shape of an equihedral tetrahedron. A method for calculating the axes and moment of a third-order multipole for such a body is given.

*Keywords:* gravitational potential, moments of inertia integrals of higher orders, Maxwell representation of potential, multipole, isosceles tetrahedron

## REFERENCES

1. *Maxwell J.C.* A treatise on electricity and magnetism. V. 1. Oxford: Clarendon Press, 1873.
2. *Hobson E.W.* The Theory of spherical and ellipsoidal harmonics. Cambridge: Cambridge University Press, 1931.
3. *Courant R., Hilbert D.* Methoden der mathematischen Physik. I. Berlin: Verlag von Julius Springer, 1931.
4. *Umov N.A.* The construction of a geometric image of the Gauss potential as a method of exploring the laws of terrestrial magnetism // Proceedings of department of Physics science of the lovers of natural science. 1904. V. 12. № 1. P. 1–26.
5. *Meshcheryakov G.A.* Problems of potential theory and generalized Earth. M.: Nauka, 1991. [in Russian].
6. *Sylvester J.J.* Note on spherical harmonics // Philosophical Magazine. 1876. V. 2. P. 291–307.
7. *Duboshin G.N.* Celestial mechanics. Basic problems and methods. M.: Nauka, 1975. [in Russian].
8. *Werner R.A.* The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1994. V. 59. No. 3. P. 253–278.
9. *Werner R.A., Scheeres D.J.* Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1996. V. 65. № 3. P. 313–344.
10. *Werner R. A.* Spherical harmonic coefficients for the potential of a constant-density polyhedron // Computers and Geosciences. 1997. V. 23. № 10. P. 1071–1077.
11. *Pohánka V.* Optimum expression for computation of the gravity field of a polyhedral body with linearly increasing density // Geophysical Prospecting. 1998. V. 46. № 4. P. 391–404.
12. *D'Urso M.G.* Gravity effects of polyhedral bodies with linearly varying density. // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2014. V. 120. P. 349–372.
13. *Ren Z., Chen C., Zhong Y., Chen H., Kalscheuer T., Maurer H., Tang J., Hu X.* Recursive Analytical Formulae of Gravitational Fields and Gradient Tensors for Polyhedral Bodies with Polynomial Density Contrasts of Arbitrary Non-negative Integer Orders // Surveys in Geophysics. 2020. V. 41. P. 695–722.
14. *D'Urso M.G., Di Lieto D.* Gravitational Fields of Polyhedral Bodies with 3D Polynomial Density Contrast // Surveys in Geophysics. 2024. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10712-023-09822-8> (Date: 15.02.2024).
15. *Beletsky V.V., Ponomareva O.N.* A parametric Analysis of Relative Equilibrium Stability in the Gravitational Field // Space Researches. 1990. V. 28. № 5. P. 664–675.
16. *Beletsky V.V.* Generalized restricted circular three-body problem as a model for dynamics of binary asteroids // Cosmic Research. 2007. V. 45. № 5. P. 408–416.

17. Zeng X., Jiang F., Li J., Baoyin H. Study on the connection between the rotating mass dipole and natural elongated bodies // *Astrophysics and Space Science*. 2015. V. 356. № 1. P. 29–42.
18. Zeng X., Baoyin H., Li J. Updated rotating mass dipole with oblateness of one primary: 1. Equilibria in the equator and their stability. // *Astrophysics and Space Science*. 2016. V. 361. № 1. Article 14. P. 1–12.
19. Zeng X., Baoyin H., Li J. Updated rotating mass dipole with oblateness of one primary: 2. Out-of-plane equilibria and their stability. // *Astrophysics and Space Science*. 2016. V. 361. № 1. Article 15. P. 1–9.
20. Burov A.A., Guerman A.D., Raspopova E.A., Nikonov V.I. On the use of the K-means algorithm for determination of mass distributions in dumbbell-like celestial bodies // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2018. V. 14. № 1. P. 45–52.
21. Aksenov E.P., Grebenikov E.A., Demin V.G. General solution of the problem of the motion of an artificial satellite in the normal field of the Earth's attraction // *Planetary and Space Science*. 1962. V. 9. № 8. P. 491–498.
22. Aksenov E.P., Grebenikov E.A., Demin V.G. Application of the Generalized Problem of Two Fixed Centers in the Theory of Motion of Artificial Earth Satellites // *Problems of Motion of Artificial Celestial Bodies (Izv. Akad. Nauk SSSR, Moscow)*. 1963. P. 92–101.
23. Balandin D.V., Nikonov V.I. Libration points of a rotating complexified triangle // *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2016. V. 71. № 3. P. 51–57.
24. Anikovskii V.V., Zhuravlev S.G. Euler's problem and its applications in celestial mechanics and space dynamics // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2011. V. 75. № 6. P. 660–666.
25. Herrera-Sucarrat E., Palmer P.L., Roberts R.M. Modeling the Gravitational Potential of a Nonspherical Asteroid // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2013. V. 36. № 3. P. 790–798.
26. Burov A.A., Guerman A.D., Nikonov V.I. Using the K-means method for aggregating the masses of elongated celestial bodies // *Cosmic Research*. 2019. V. 57. № 4. P. 266–271.
27. Burov A.A., Guerman A.D., Nikonova E.A., Nikonov V.I. Approximation for attraction field of irregular celestial bodies using four massive points // *Acta Astronautica*. 2019. V. 157. P. 225–232.
28. Nikonova E.A. Isosceles Tetrahedron and an Equipomental System of a Rigid Body // *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*. 2023. V. 10. № 1. P. 156–165.
29. Chanut T.G.G., Aljbaae S., Carruba V. Mascon gravitation model using a shaped polyhedral source // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015. V. 450. № 4. P. 3742–3749.
30. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. *Partial differential equations of mathematical physics*. Moscow: Higher school, 1970. [in Russian].
31. Hilbert D., Cohn-Vossen S. *Anschauliche geometrie*. Berlin: Verlag von J. Springer, 1932.
32. Sharygin I.F. *Problems in Solid Geometry (Science for Everyone)*. Moscow: Mir Publishers, 1986.
33. Nikonova E.A. On Stationary Motions of an Isosceles Tetrahedron with a Fixed Point in the Central Field of Forces // *Mechanics of Solids*. 2022. V. 57. № 7. P. 1620–1632.
34. Nikonova E.A. Stationary Motions of a Close to Regular Isosceles Tetrahedron with a Fixed Point in the Central Newtonian Force Field // *Mechanics of Solids*. 2022. V. 57. № 5. P. 1059–1067.
35. Burov A.A., Nikonova E.A. The Generating Function for the Components of the Euler–Poinsoot Tensor // *Doklady Physics*. 2021. V. 66. № 5. P. 139–142.
36. Burov A.A., Nikonova E.A. Generating function of the inertial integrals for small celestial bodies // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2022. V. 134. № 4. Article 37.

УДК 531.3

## РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ УДАРНОГО НАГРУЖЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

© 2024 г. В. А. Морозов<sup>а, \*</sup>, В. С. Иванов<sup>а, \*\*</sup>, В. М. Кац<sup>а, \*\*\*</sup>

<sup>а</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия  
<sup>\*e-mail:</sup> v.morozov@spbu.ru, <sup>\*\*e-mail:</sup> st048035@student.spbu.ru, <sup>\*\*\*e-mail:</sup> v.kats@spbu.ru

Поступила в редакцию 02.02.2024 г.

После доработки 20.02.2024 г.

Принята к публикации 22.02.2024 г.

Представлены результаты исследования по короткому ударному воздействию импульсного электронного пучка на алюминиевую преграду. На основе проведенных экспериментов дан анализ формирования волн напряжений вблизи нагружаемой поверхности. Показано, что формирование волн начинается не с поверхности образца, как при лазерном нагружении, а в некоторой области, определяемой глубиной пробега электронов в среде. От границы данной области начинается релаксация амплитуды волны сжатия. Установлено, что в релаксационной области происходят сильно неравновесные нестационарные процессы, которые характеризуются изменением скорости продольной волны сжатия и напряжения от некоторого значения, определяемого параметрами удара, до своего стационарного значения. Отмечено, что релаксационный процесс осуществляется одноволновым способом, несмотря на большую амплитуду напряжения, и только после его завершения происходит разделение волн на упругую часть (упругий предвестник) и пластическую часть.

*Ключевые слова:* ударное нагружение, формирование волны, релаксация, электронный пучок.

DOI: 10.31857/S1026351924040069, EDN: UCUETS

**1. Введение.** Экспериментальные исследования вблизи поверхности ударного нагружения представляют значительные трудности и практически не реализуемы традиционными методами нагружения твердых тел (соударение, использование взрывчатых веществ и т.д.). Разработанные в последние десятилетия способы генерации коротких механических импульсов в твердых телах с помощью лазеров и пучков заряженных частиц, а также развитие методов регистрации таких импульсов напряжения позволяют проводить исследования поведения материалов в тонкой приповерхностной зоне ударного нагружения. Эта область характеризуется существенно неустановившимися неравновесными ударно-волновыми процессами,

описание которых в реальных средах не решается в рамках представлений механики сплошных сред [1, 2]. При этом подавляющая часть работ, посвященных поведению сплошной среды при ударном нагружении, посвящена изучению установившихся или квазиустановившихся процессов. Процессы на начальной стадии нагружения (неустановившиеся процессы вблизи поверхности нагружения) при этом моделируются введением интегральных величин, например параметра инкубационного времени [3]. Такой подход достаточно хорошо описывает прочностные характеристики материала, отступая на некоторое малое расстояние от поверхности нагружения или спустя малое время от начала процесса, но оставляет открытым вопрос о выборе адекватной области, рассматриваемой как зона релаксации, что требует отдельного трудоемкого исследования для каждой конкретной задачи. Эта трудность объясняется отсутствием оценки параметров релаксации у разработанных моделей динамического нагружения. Разработка модели релаксации, дающей конечные оценки таких параметров, является актуальной задачей механики.

В работах [4, 5] при воздействии импульсным лазером на поверхность алюминиевых образцов был обнаружен и исследован аномальный характер зависимостей скорости распространения волны и величин продольного и поперечного составляющих напряжения от расстояния вблизи поверхности ударного нагружения. Вид полученных зависимостей показал их релаксационный характер от некоторого значения, определяемого величиной ударной нагрузки, до значений при установившемся ударно-волновом процессе. Был сделан вывод о высокой динамической жесткости алюминия вблизи поверхности ударного нагружения, объясняющей такой характер изменения указанных параметров.

Ввиду отсутствия достоверной модели, описывающей процессы формирования и распространения волн вблизи поверхности нагружения, а также сложности измерения амплитуды упругого предвестника в этой области, кривые затухания упругого предвестника обычно строятся, начиная с некоторой глубины (2–3 мм) материала, и экстраполируются на плоскость удара, либо амплитуда упругого предвестника считается постоянной по мере распространения упругопластической волны [6, 7].

В работе [8] предложена модель, описывающая затухание амплитуды упругого предвестника с учетом обнаруженных в работах [4, 5] релаксационных явлений вблизи поверхности нагружения. Экспериментальные исследования, описанные в работе [9], подтвердили как наличие релаксационных процессов в области  $\leq 10^{-3}$  м от плоскости нагружения, так и высказанное в работе [8] предположение, что об упругопластическом характере поведения материала можно говорить только по окончании релаксационных процессов в приповерхностной зоне, обусловленных сильно неравновесным состоянием среды. Следовательно, начальная амплитуда упругого отклика материала неадекватна начальной нагрузке и интерполяция данных о величине упругого предвестника по начальному значению ударной нагрузки не является корректной.

Настоящая работа посвящена исследованию релаксационных процессов вблизи поверхности ударного нагружения импульсным электронным пучком. Такое нагружение в отличие от лазерного имеет ряд специфических

особенностей, которые и будут рассмотрены далее. Существенным качественным отличием электронного облучения твердого тела от лазерного является большая глубина проникновения электронов по сравнению с электромагнитными колебаниями (светом). К настоящему времени накопилось большое количество работ как теоретических, так и экспериментальных, освещающих процессы прохождения электронов через вещество. Процесс взаимодействия электронных пучков с твердыми телами определяется как свойствами самого пучка (энергетическим спектром частиц в пучке, распределением по плотности, углом падения электронов на мишень), так и свойствами среды (плотностью, атомным весом, потенциалом ионизации и др.). Основным видом потерь при прохождении электронов с кинетической энергией  $< 0.5$  МэВ (как в нашей работе) через вещество являются потери на ионизацию. При такой энергии существенную долю составляют отраженные от поверхности электроны.

Когда энергетически заряженные частицы падают на поверхность твердого тела, значительная часть поглощенной энергии проявляется как энергия акустических колебаний (фононов). Одним из проявлений фононного возбуждения является генерирование упругих волн. Поглощенная веществом энергия электронного пучка называется дозой облучения, а производная от энергии по координате есть функция глубины дозы облучения или профиль энергетического вклада. Его отыскание сводится в основном к статистическим методам Монте-Карло. Профиль энергетического вклада является важной характеристикой, поскольку он определяет механические напряжения, которые появляются в твердых телах при воздействии электронных пучков. По мере увеличения вкладываемой электронным пучком энергии возможно пластическое деформирование материала мишени, образование дефектов, упрочнение поверхности и даже его частичное плавление и испарение.

**2. Формирование волн напряжений вблизи нагружаемой поверхности.** Качественное описание формирования волн напряжений вблизи поверхности материала, нагружаемого кратковременным импульсным электронным пучком, проведенное на основе выполненных экспериментов, пожалуй, впервые, приведено в работе [10]. В монографии [11] рассмотрены особенности формирования волн напряжений в термоупругой среде. В частности, проанализировано формирование волн вблизи нагружаемой поверхности. В книге [12] рассматривается формирование знакопеременных импульсов нагрузки вблизи поверхности нагружения, генерируемых импульсным тепловыделением от электронного излучения, в акустическом приближении. Представлены результаты компьютерного моделирования генерации волн сжатия и растяжения в металлической мишени. Предполагается, что скорость распространения волны сжатия меняется слабо. Однако, как будет показано в настоящей работе и отмечено в работе [5], эта скорость, релаксируя от неравновесного к стационарному состоянию, меняется существенно.

Математические модели, описывающие термоупругое взаимодействие сильноточных электронных пучков с различными материалами, как правило, используют несвязанную теорию термоупругости. В соответствии с этой

теорией в случае одномерного нагружения динамическое уравнение термоупругости имеет следующий вид [13]:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Gamma \frac{\partial E(x,t)}{\partial x}, \quad (2.1)$$

где  $E(x,t)$  – энергия в единице объема определяется по закону

$$E(x,t) = \rho \int_{T_0(x)}^{T_0(x)+\Delta T(x,t)} c_v(T') dT', \quad (2.2)$$

$T_0(x)$  – начальная температура в точке  $x$ ;  $c_v$  – удельная теплоемкость при постоянном объеме;  $\Delta T(x,t)$  – изменение температуры в точке  $x$  в момент времени  $t$ ;  $\Gamma$  – параметр Грюнайзена, предполагаемый независимым от времени.

В соответствии с уравнением (2.1) смещение в любой точке определяется вложенной удельной энергией, величина которой зависит от параметров электронного пучка и характеристик облучаемого материала.

При рассмотрении процесса формирования волны смещения при термоупругом ударе электронным пучком необходимо учитывать также размеры зоны и форму профиля вклада электронов в материал. На границах зоны вклада формируются две волны смещения противоположных направлений. Одна волна распространяется в глубь материала, вторая волна после отражения на передней (облучаемой) поверхности меняет знак напряжения на противоположный и с некоторым запаздыванием  $t^*$ , равным времени прохождения по зоне вклада, распространяется далее в том же направлении, что и первая. В результате происходит наложение двух волн, причем форма результирующей волны зависит от соотношения между длительностью электронного импульса  $\tau$  и  $t^*$ . С целью изучения количественных характеристик взаимодействия этих волн в процессе возникновения и распространения по материалу в работе [10] была разработана экспериментальная методика, позволяющая одновременно измерять смещения облучаемой (передней) и свободной (тыльной) поверхностей мишени с помощью лазерного интерферометра Майкельсона.

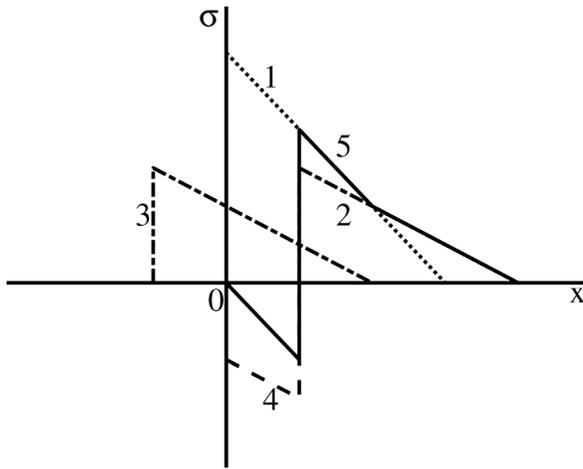
Для описания нагружения среды импульсным электронным пучком в настоящей работе рассмотрим решение линейного волнового уравнения относительно напряжения:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = Q(t, x), \quad x \geq 0. \quad (2.3)$$

Граничные и начальные условия:

$$\sigma|_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t}|_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x}|_{x=0} = 0.$$

Здесь  $\sigma$  – напряжение,  $c$  – продольная скорость звука.



**Рис. 1.** Формирование импульсов напряжения. 1 – начальные напряжения, 2 – полуволна, идущая в глубь материала, 3 – полуволна, идущая к свободной поверхности, 4 – отраженная волна, 5 – суперпозиция волн.

Функция энерговыделения в правой части уравнения (2.3) определяется согласно закону Бугера:

$$Q(x,t) = \chi \rho_0 q_0 e^{-\chi \rho_0 R} f(t), \quad (2.4)$$

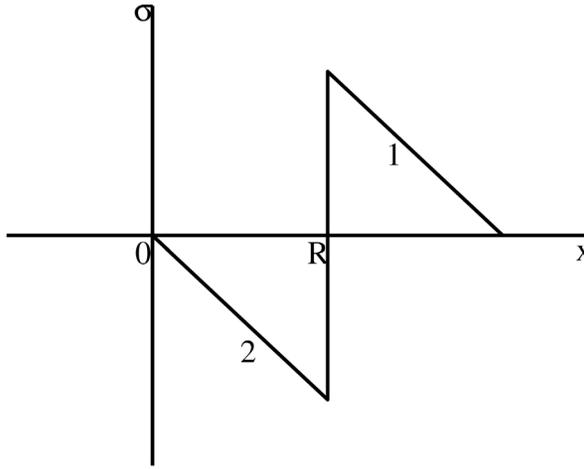
где  $\chi$  – массовый коэффициент поглощения энергии излучения,  $\rho_0$  – начальная плотность,  $q_0$  – плотность потока мощности,  $R$  – глубина проникновения излучения в среду,  $f(t)$  – временная функция ввода энергии.

Как известно, внутри упругого материала прямоугольный импульс напряжения распадается на два половинной амплитуды [11, 12]. Они распространяются в обе стороны со скоростью волны  $c$ . Рассмотрим случай мгновенного тепловыделения вблизи поверхности нагружения. Одна волна половинной амплитуды движется к свободной (облучаемой) поверхности и отражается от нее, другая – в глубь материала. Согласно закону Бугера (2.4), начальный фронт волны будет экспоненциальным. Следуя работе [11], для простоты рассмотрения заменим его треугольником (рис. 1).

Пусть начальное напряжение имеет вид  $f(x)$  (экспонента, треугольник, прямоугольник и т.д.), то в момент времени  $t$  оно будет следующим:

$$\sigma(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f(x-ct) + \frac{1}{2} f(x+ct), & x > ct, \\ -\frac{1}{2} f(-x+ct) + \frac{1}{2} f(x+ct), & x < ct. \end{cases} \quad (2.5)$$

При  $x = ct$  функция  $f(t)$  имеет разрыв, равный  $f(0)$ . Первое слагаемое первой строки соответствует волне половинной амплитуды, бегущей влево к границе. Для второй строки это слагаемое соответствует части волны, отраженной от



**Рис. 2.** Сформировавшиеся импульсы напряжения. 1 – импульс сжатия, 2 – импульс растяжения.

свободной поверхности. Вторые слагаемые обеих строк уравнения (2.5) указывают на движение части волны вправо.

Длина области вклада энергии пучка электронов определяется их энергией. Пусть она имеет размер  $R$ . При этом длина формирующегося импульса будет  $2R$  (рис. 2). Его форма существенно зависит от безразмерного соотношения характерных параметров рассматриваемой задачи:

$$\Theta = c \tau \chi \rho_0, \quad (2.6)$$

где  $\tau$  – длительность электронного импульса.

В случае тепловыделения в области вклада энергии электронного пучка треугольной формы и прямоугольного по времени при  $\Theta = 0$  волна напряжения имеет разрыв между сжимающей и растягивающей полуволнами (рис. 2). При  $\Theta < 1$  перепад напряжений становится все более пологим, а при  $\Theta = 1$  треугольная полуволна сжатия уходит от полуволны растяжения, и при дальнейшем увеличении длительности тепловыделения ненапряженный участок между полуволнами все более увеличивает свою длину.

В настоящей работе  $\tau = 10^{-7}$  с,  $\chi = 3$  м<sup>3</sup>/кг,  $\rho_0 = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 6200$  м/с. Согласно выражению (2.6)  $\Theta = 5$  ( $> 1$ ), поэтому далее будем рассматривать релаксацию амплитуды только сжимающей полуволны и скорость ее распространения, а также траекторию движения волны.

Таким образом, анализ формирования волн вблизи нагружаемой среды коротким импульсным электронным пучком показал, что их формирование начинается не с поверхности образца, как при лазерном облучении, а в некоторой области, определяемой глубиной пробега электронов в среде  $R$ , что является принципиальным отличием. Как будет показано далее, релаксация амплитуды волны начинается не с поверхности образца, а от границы  $R$  области вклада энергии электронного пучка, где сформировался импульс напряжения сжатия.

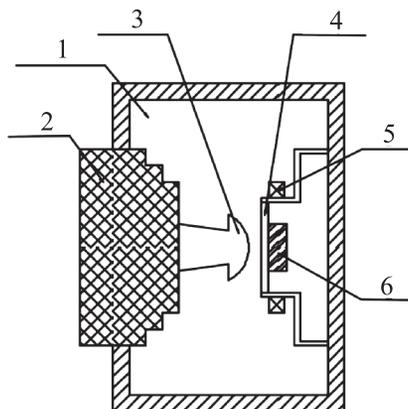


Рис. 3. 1 – вакуумная камера, 2 – высоковольтный ввод, 3 – катод, 4 – образец, 5 – измеритель тока (пояс Роговского), 6 – пьезодатчик.

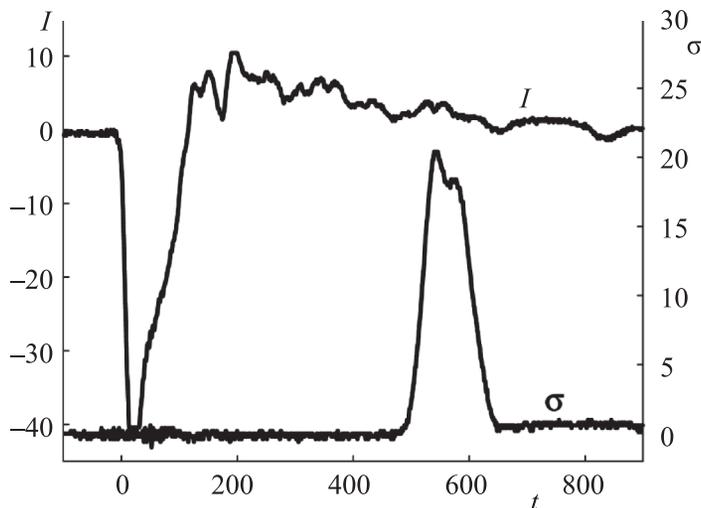


Рис. 4. Характерная осциллограмма импульса тока пучка  $I$  (отн. ед.) и импульса напряжения сжатия  $\sigma$  (отн. ед.) (время  $t$  в нс).

**3. Экспериментальная методика и результаты эксперимента.** В работе в качестве источника электронного пучка использовался генератор коротких высоковольтных импульсов ГКВИ-300 со средней энергией электронов в спектре 200 кэВ и длительностью импульса 100 нс. Воздействие электронного пучка на образцы осуществлялось в вакуумной камере при давлении остаточных газов  $\sim 10^2$  Па и комнатной температуре. Исследуемые образцы выполнялись в виде пластин диаметром 30 мм, толщиной от 0.5 до 3 мм из поликристаллического алюминия. Тыльная сторона образцов была отполирована. К ней через слой вакуумного масла прижимался специально разработанный широкополосный

пьезоэлектрический датчик, информация с которого передавалась на широкополосный осциллограф. Схема эксперимента представлена на рис. 3.

Для измерения времени прохождения импульса напряжения от места его формирования до сечения, где проводилось измерение с помощью пьезодатчика, применялась схема синхронизации. Задающим элементом схемы являлся измеритель тока электронного пучка (пояс Роговского), сигнал с которого подавался на вход запуска развертки осциллографа (СН1). На второй вход осциллографа (СН2) сигнал приходил с пьезодатчика. По интервалу времени между этими сигналами и определялось время прохождения импульса напряжения по образцу. Изменение амплитуды импульса по мере его прохождения также фиксировалось пьезодатчиком. Осциллограмма, приведенная на рис. 4, иллюстрирует сказанное выше.

В табл. 1 приведены времена ( $t$ ) прохождения импульса через образцы различной толщины, на основании которых построена экспериментальная траектория движения импульса сжатия  $x(t)$  (рис. 5). Начало координат введено с учетом глубины формирования импульса сжатия (см. рис. 2, точка  $R$ ) и отстоит от нагружаемой поверхности на 150 мкм. Последовательное увеличение толщины образцов позволило задать пять интервалов приращения координаты распространения импульса.

**Таблица 1.** Зависимость координаты траектории движения импульса сжатия ( $x$ ) от времени ( $t$ )

$t$ , нс	65	120	170	245	295
$x$ , мм	0.46	0.83	1.15	1.62	1.93

Для построения зависимости скорости распространения импульса напряжения сжатия от времени  $v(t)$  на каждом из пяти интервалов траектории движения импульса  $x(t)$  была оценена средняя скорость как отношение величины интервала  $\Delta x_i$  к времени его прохождения  $\Delta t_i$  с координатой  $t_i$  в середине интервала  $\Delta t_i$ . Данные для построения этой зависимости приведены в табл. 2. По данным табл. 2 построен график изменения скорости распространения импульса напряжения сжатия от времени, приведенный на рис. 5.

**Таблица 2.** Средние скорости распространения импульса сжатия

Интервал	I	II	III	IV	V
Длина интервала, $\Delta x_i$ , мм	0.46	0.37	0.32	0.47	0.31
Время прохождения интервала импульсом, $\Delta t_i$ , нс	65	55	50	75	50
Время достижения импульсом середины интервала $t_i$ , нс	32.5	92.5	145	207.5	270
Средняя скорость на интервале $v_i$ , м/с	7100	6700	6400	6300	6200

Из рис. 5 следует, что скорость распространения импульса сжатия релаксирует в неравновесной области от начального значения 7100 м/с до

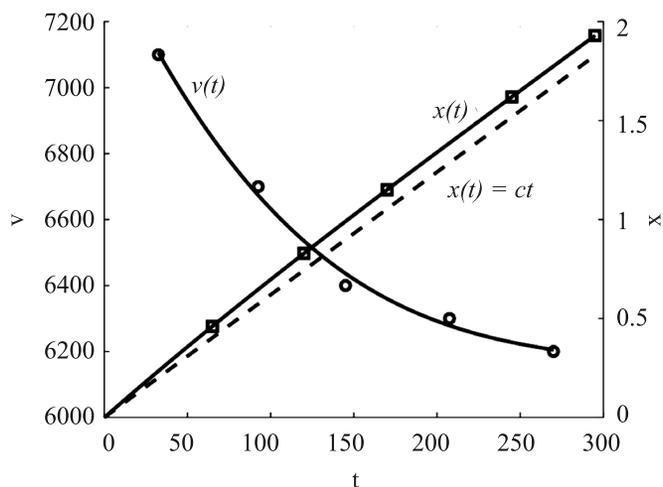


Рис. 5. Изменение скорости распространения импульса напряжения  $v(t)$  (м/с), изменение координаты  $x(t)$  (мм), зависимость  $x(t) = ct$  (время  $t$  в нс).

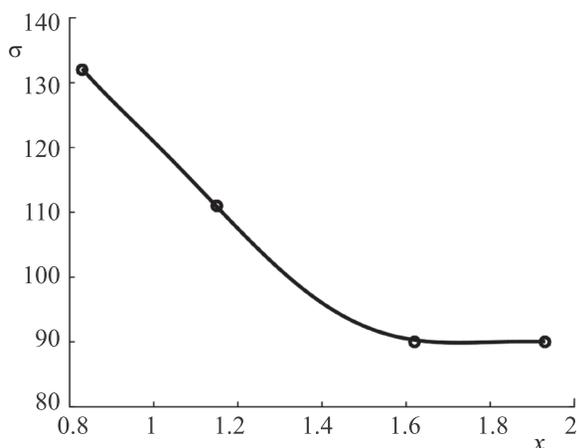


Рис. 6. Изменение амплитуды импульса напряжения сжатия (МПа) от координаты (мм).

стационарного значения 6200 м/с. График траектории движения импульса  $x(t)$  также иллюстрирует релаксационный характер распространения импульса сжатия, отклоняясь от стационарной траектории  $x(t) = ct$ .

Как было сказано выше, в каждом выбранном сечении образца с помощью пьезодатчика измерялся профиль напряжения сжатия. На рис. 6 приведена кривая изменения амплитуды напряжения сжатия от координаты  $\sigma(x)$ . Данный рисунок показывает также релаксационный характер изменения амплитуды импульса сжатия в неравновесной области от его первоначального значения 320 МПа до стационарного значения 90 МПа.

Таким образом, проведенные исследования по короткому ударному воздействию электронного пучка на алюминиевую преграду выявили явление релаксации скорости движения упругого импульса напряжения  $v(t)$  (рис. 5) и его амплитуды  $\sigma(x)$  (рис. 6) в неравновесной области от некоторого первоначального значения до их стационарного значения. Время релаксации составило  $t_p = 145$  нс, а длина релаксации  $x_p = 1.5$  мм.

**Заключение.** Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что при воздействии кратковременного импульсного пучка электронов на металлические преграды (на примере алюминия) в приповерхностной области наблюдаются сильнонеравновесные релаксационные процессы. Формирование волны напряжения имеет принципиальное отличие от лазерного импульсного воздействия. Оно заключается в том, что осуществляется в некоторой области, длина которой определяется глубиной пробега электронов пучка в среде. Сам процесс формирования импульсов сжатия и растяжения определяется соотношением параметров пучка и среды, таких как длительность электронного импульса, скорость распространения импульсов, энергия электронов и плотность среды. Только после завершения формирования импульса напряжения начинается релаксация его амплитуды. Необходимо отметить, что релаксационный процесс осуществляется одноволновым способом и только после его завершения происходит разделение волны сжатия на упругую часть (упругий предвестник) и пластическую часть, о чем сообщалось в наших работах ранее [9, 14].

Восстановление первоначального давления в области энерговыделения плотных электронных пучков является важной задачей для исследования прочности материалов и еще далеко не решенной. Полученные результаты содержат информацию, которая может найти применение в решении ряда вопросов по взаимодействию сильноточных электронных пучков с преградой.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Khantuleva T.A.* Specific features of processes far from equilibrium // *Mathematical Modeling of Shock-Wave Processes in Condensed Matter: From Statistical Thermodynamics to Control Theory. Shock Wave and High Pressure Phenomena*. Springer, 2022. P. 31–63.  
[https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0\\_2](https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0_2)
2. *Khantuleva T.A.* The shock-induced planar wave propagation in condensed matter // *Mathematical Modeling of Shock-Wave Processes in Condensed Matter. From Statistical Thermodynamics to Control Theory. Shock Wave and High Pressure Phenomena*. Singapore: Springer, 2022. P. 209–249.  
[https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0\\_7](https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0_7)
3. *Petrov Y.V., Utkin, A.A.* Failure-delay effect under influence pulse dynamic loads // *Mech. Solids*. 2022. V. 57. № 1. P. 75–85. <https://doi.org/10.3103/S0025654422010125> [*Петров Ю.В., Уткин А.А.* Эффект запаздывания разрушения при импульсных динамических нагрузках // *Изв. РАН. МТТ*. 2022. № 1. С. 89–102.]  
<https://doi.org/10.31857/S0572329922010081>

4. Судьенков Ю.В., Филиппов Н.М., Ронжин О.Ф., Недбай А.И. Влияние скорости нагружения на поведение упруго-вязкопластических материалов // Письма в ЖТФ. 1980. Т. 6. № 18. С. 102–105.
5. Судьенков Ю.В. Релаксация упругих постоянных алюминия вблизи поверхности ударного нагружения // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9. № 23. С. 1418–1422.
6. Wood D. On longitudinal plane waves of elastic-plastic strain in solids // J. Appl. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 521–525.  
<https://doi.org/10.1115/1.4010552>
7. Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортвов В.Е. Ударно-волновые явления в конденсированных средах. М.: Янус-К, 1996. 407 с.
8. Байзаков О.Д., Морозов В.А., Судьенков Ю.В. Модель затухания упругой волны с учетом релаксационных явлений в приповерхностной зоне ударного нагружения // Газодинамика и теплообмен. Вып. 9. Динамика однородных и неоднородных сред. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. С. 187–191.
9. Морозов В.А., Судьенков Ю.В. Формирование и развитие импульсных напряжений в твердых телах с учетом релаксационных явлений в приповерхностной зоне ударного нагружения // Физическая механика. Вып. 6. Динамические процессы в газах и твердых телах. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1990. С. 150–159.
10. Мещеряков Ю.И., Морозов В.А. О взаимодействии волн сжатия, инициируемых сильноточным импульсным пучком электронов в твердых телах. // ЖТФ. 1979. Том 49. № 9. С. 1982–1986.
11. Галиев Ш.У., Бабич Ю.Н., Жураховский С.В., Нечитайло Н.В., Ромащенко В.А. Численное моделирование волновых процессов в ограниченных средах. Киев: Наукова думка, 1989. 200 с.
12. Канель Г.И. Ударные волны в физике твердого тела. М.: Физматлит, 2018. 208 с.
13. Oswald R.B., McLean F.B., Schalthorn D.R., Buxton L.D. One-dimensional thermoelastic response of solids to pulsed energy deposition. // J. Appl. Phys. 1971. V. 42. № 9. P. 3463–3473.  
<https://doi.org/10.1063/1.1660755>
14. Morozov V.A., Bogatko V.I. Elastoplastic wave formation in a near-surface region under short-term loading // Dokl. Phys. 2008. V. 53 № 8. P. 462–465.  
<https://doi.org/10.1134/S1028335808080144> = Морозов В.А., Богатко В.И. Формирование упругопластической волны в приповерхностной области при кратковременном нагружении // Доклады академии наук. 2008. Том 421. № 6. С. 765–768.

## RELAXATION PROCESSES CLOSE TO THE SURFACE OF THE IMPACTS TRESS APPLICATION CAUSED BY THE PULSE ELECTRON BEAM

V. A. Morozov<sup>a, \*</sup>, V. S. Ivanov<sup>a, \*\*</sup>, V. M. Kats<sup>a, \*\*\*</sup>

*St. Petersburg University, St. Petersburg, Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: v.morozov@spbu.ru*, <sup>\*\*</sup>*e-mail: st048035@student.spbu.ru*, <sup>\*\*\*</sup>*e-mail: v.kats@spbu.ru*

**Abstract** – The paper presents outcomes of the study of short-timed shock action of the pulse electron beam on the aluminum obstacle. Analysis of the generation of the stress wave near the loaded surface based on the experimental data is provided.

It is proved that wave generation in this case in contrast to the action of laser beam takes place inside material in the area governed by the depth of electrons invasion. Relaxation of the stress wave starts from the border of this area. It was established that strongly non-equilibrium processes are taken place in this relaxation area causing dramatic change depending on the shock parameters of the velocity of the stress and strength waves compared to their stationary values. It is underlined that relaxation process has solo-wave nature in spite of the high stress amplitude. Separation of the elastic and plastic stresses propagation takes place only after the end of relaxation process.

*Keywords:* impact stress, wave shaping, relaxation, electron beam

## REFERENCES

1. *Khantuleva T.A.* Specific Features of Processes Far from Equilibrium // *Mathematical Modeling of Shock-Wave Processes in Condensed Matter: From Statistical Thermodynamics to Control Theory Shock Wave and High Pressure Phenomena.* Springer, 2022. P. 31–63.  
[https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0\\_2](https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0_2)
2. *Khantuleva T.A.* The Shock-Induced Planar Wave Propagation in Condensed Matter. // *Mathematical Modeling of Shock-Wave Processes in Condensed Matter: From Statistical Thermodynamics to Control Theory Shock Wave and High Pressure Phenomena.* Singapore: Springer, 2022. P. 209–249.  
[https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0\\_7](https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0_7)
3. *Petrov Y.V., Utkin A.A.* Failure-Delay Effect under Influence Pulse Dynamic Loads. // *Mech. Solids.* 2022. V. 57. P. 75–85.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654422010125>
4. *Sudenkov Yu.V., Filippov N.M., Ronzhin O.F., Nedbai A.I.* Action of the loading rate on performance of the elastic-viscous-plastic media (in Russian) // *Pisma v ZhTF.* 1980. V. 6. № 18. P. 1102–1105.
5. *Sudenkov Yu.V.* Relaxation of elastic constant of aluminum close to the surface of the impact stress (in Russian) // *Pisma v ZhTF.* 1983. V. 9. № 23. P. 1418–1422.
6. *Wood D.* On Longitudinal Plane Waves of Elastic-Plastic Strain in Solids // *J. Appl. Mech.* 1952. V. 19. № 4. P. 521–525.  
<https://doi.org/10.1115/1.4010552>
7. *Kanel G.I., Razorenov S.V., Utkin A.V., Fortov V.E.* Shock-wave effects in condensed media. (in Russian). M.: Yanus-K, 1996. 407 p.
8. *Baizakov O.D., Morozov V. A., Sudenkov Yu.V.* Model of elastic wave dumping (in Russian). In: *Gazodinamika i teploobmen. V. 9: Dynamics of homogeneous and non-homogeneous media.* L.: Leningrad University Publishing, 1987. P. 187–191.
9. *Morozov V.A., Sudenkov Yu.V.* Generation and evolution of pulse stresses in solid bodies with respect to relaxation processes close to the surface of the impact stress application (in Russian). In: *Fizicheskaya mekhanika. V. 6. Dynamic processes in gases and solid bodies.* L.: Leningrad University Publishing, 1990. P. 150–159.
10. *Meshcheryakov Yu.I., Morozov V.A.* On interaction of pressure waves initiated with high-current pulse electron beam in solid body (in Russian) // *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki.* 1979. V. 49. № 9. P. 1982–1986.

- 
11. *Galiev Sh.U., Babich Yu.N., Zhurakhovskii S.V., Nechitailo N.V., Romashchenko V.A.* Numerical simulation of wave processes in bounded media. (in Russian). Kyiv: Naukova dumka, 1989. 200 p.
  12. *Kanel G.I.* Shock waves in physics of solid state (in Russian). M.: Fizmatlit, 2018. 208 p.
  13. *Oswald R.B., McLean F.B., Schalhorn D.R., Buxton L.D.* One- Dimensional Thermoelastic Response of Solids to Pulsed Energy Deposition // *J. Appl. Phys.* 1971. V. 42. P. 3463–3473.  
<https://doi.org/10.1063/1.1660755>
  14. *Morozov V.A., Bogatko V.I.* Elastoplastic Wave Formation in a Near-Surface Region under Short-Term Loading // *Dokl. Phys.* 2008. V. 53. № 8. P. 462–465.  
<https://doi.org/10.1134/S1028335808080144>

УДК 531.01, 621.3

## О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ДВОЙНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

© 2024 г. А. Г. Петров<sup>а, \*</sup>

<sup>а</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Иилинского РАН, Москва, Россия  
<sup>\*</sup>e-mail: petrovipmech@gmail.com

Поступила в редакцию 05.03.2024 г.

После доработки 24.03.2024 г.

Принята к публикации 25.03.2024 г.

Для консервативных механических систем известен метод нормальных координат, в котором используется теорема о приведении двух квадратичных форм к сумме квадратов. В этом случае система дифференциальных уравнений расщепляется на систему независимых осцилляторов. Линейная диссипативная механическая система с конечным числом степеней свободы определяется тремя квадратичными формами: кинетической и потенциальной энергией системы, а также диссипативной функцией Рэлея. Исследуется линейная задача о вынужденных колебаниях двойного маятника, когда коэффициенты трения пропорциональны массам. Тогда все три квадратичные формы одним преобразованием приводятся к сумме квадратов. В нормальных координатах система расщепляется на две независимые системы второго порядка. Построено аналитическое решение в самом общем виде при произвольных длинах стержней и точечных масс. Дан полный анализ колебаний в нерезонансном случае и в случае резонансов. Получены также формулы для погрешности аналитических формул, если пропорциональность коэффициентов трения и масс нарушается.

*Ключевые слова:* метод Лагранжа, двойной маятник, квадратичные формы, нормальные координаты, диссипативные системы

**DOI:** 10.31857/S1026351924040072, **EDN:** UCUDNT

**Введение.** Общая теория малых линейных колебаний систем с конечным числом степеней свободы для консервативных систем дана в 1762–1765 гг. Лагранжем. В этом случае механическая система определяется двумя квадратичными формами: кинетической и потенциальной энергией системы. Вейерштрасс показал в 1858 г., что в силу положительной определенности кинетической энергии можно ввести нормальные координаты, в которых кинетическая энергия приведет к сумме квадратов, а потенциальная энергия к сумме квадратов с некоторыми множителями. В нормальных координатах уравнения расщепляются на независимые осцилляторы, решения которых выражаются через тригонометрические и показательные

функции. Прежние исследователи (следуя Лагранжу) ошибочно предполагали, что в случае кратных корней характеристического уравнения нормальные координаты не будут существовать и что в окончательных интегралах уравнений движения время будет входить не только через тригонометрические и показательные функции. Соответствующие библиографические ссылки приведены в монографии [1].

Многие задачи интегрирования и качественного анализа дифференциальных уравнений значительно упрощаются при переходе к нормальным координатам и широко применяются для исследования колебаний консервативных механических систем [1–3]. Одновременное приведение к диагональной форме двух вещественных симметричных матриц  $A$  и  $B$  всегда выполнимо [4, 5], если одна из них соответствует знакоопределенной квадратичной форме.

При анализе вынужденных колебаний диссипативных механических систем кроме квадратичных форм для кинетической и потенциальной энергий возникает третья квадратичная форма – диссипативная функция Релея. Как известно [6–8], три квадратичные формы не всегда возможно привести к диагональным и в связи с этим анализируются условия, при которых это возможно. Наиболее общее условие приведения трех квадратичных форм с матрицами  $A$ ,  $B$  и  $C$  к диагональному виду получено в работе Новикова [9]. Для систем с  $n$  степенями свободы оно состоит из равенства нулю  $n^2$  элементов матрицы  $AB^{-1}C - CB^{-1}A = 0$ ,  $\text{Det}[B] = 0$ . При выполнении этих условий уравнения Лагранжа расщепляются на  $n$  независимых уравнений второго порядка.

В работе [10] показано, что  $n^2$  уравнений сводятся к  $n(n-1)/2$  независимых уравнений. Если квадратичные формы зависят от двух переменных  $n = 2$ , то условием расщепления является единственное условие равенства нулю определителя третьего порядка коэффициентов трех квадратичных форм. Для систем с тремя степенями свободы  $n = 3$  из условия Новикова получены три уравнения для матриц  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Даны примеры применения полученного условия для анализа малых колебаний механической системы с двумя и тремя степенями свободы с учетом сил трения. Для вынужденных колебаний двойного маятника показано, что условием расщепления уравнений Лагранжа является пропорциональность коэффициентов трения массам маятника. Таким путем исследованы вынужденные колебания двойного маятника при равенстве длин стержней маятника. Преобразование к нормальным координатам выражается через тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

В данной работе нормализующее преобразование удалось упростить и выразить через простые алгебраические функции. С его помощью построено аналитическое решение в самом общем виде, когда длины стержней и массы маятника произвольны. Дан полный анализ колебаний в нерезонансном случае и в случае резонансов. Получены простые формулы для максимальных отклонений маятника в случае резонансов. Найдены частоты, при которых угловые переменные равны нулю (антирезонанс). Рассмотрены случаи малых и больших диссипативных сил, для которых колебания описываются в упрощенной аналитической форме. Получены также формулы для погрешности аналитических формул, если пропорциональность коэффициентов трения и масс нарушается.

**1. Решение уравнений колебания в нормальных координатах.** Система линейных уравнений для вынужденных колебаний диссипативной механической системы с двумя степенями свободы под действием сил, меняющихся по гармоническому закону, имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = \frac{\partial N}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \quad (1.1)$$

где  $T$ ,  $\Pi$ ,  $R$  и  $N$  – кинетическая и потенциальная энергия, диссипативная функция Рэлея и потенциал внешних сил:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (a_{11} \dot{x}_1^2 + 2a_{12} \dot{x}_1 \dot{x}_2 + a_{22} \dot{x}_2^2), \quad \mathfrak{R} = \frac{1}{2} (b_{11} \dot{x}_1^2 + 2b_{12} \dot{x}_1 \dot{x}_2 + b_{22} \dot{x}_2^2), \\ \Pi &= \frac{1}{2} (c_{11} x_1^2 + 2c_{12} x_1 x_2 + c_{22} x_2^2), \quad N = (N_1 x_1 + N_2 x_2) \sin \omega t. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Воспользуемся теоремой [10].

*Теорема.* Пусть даны три квадратичные формы двух переменных  $T$ ,  $R$ ,  $\Pi$   $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ . Тогда для существования невырожденного преобразования

$$X = QY, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

приводящего их к виду

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (a'_{11} \dot{y}_1^2 + a'_{22} \dot{y}_2^2), \quad \mathfrak{R} = \frac{1}{2} (b'_{11} \dot{y}_1^2 + b'_{22} \dot{y}_2^2), \\ \Pi &= \frac{1}{2} (c'_{11} y_1^2 + c'_{22} y_2^2), \quad N = (N'_1 \dot{y}_1 + N'_2 \dot{y}_2) \sin \omega t, \end{aligned} \quad (1.4)$$

необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из коэффициентов исходных квадратичных форм, обратился в ноль:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.5)$$

Система уравнений в нормальных переменных расщепляется на два независимых уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_i}{dt^2} + A_i \frac{dy_i}{dt} + B_i y_i &= E_i \sin \omega t, \\ A_i &= b'_{ii} / a'_{ii}, \quad E_i = N'_i / a'_{ii}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Решение полученной системы для установившихся колебаний имеет вид:

$$y_i = P_i \sin \omega t - S_i \cos \omega t, \quad P_i = \frac{E_i (B_i - \omega^2)}{(B_i - \omega^2)^2 + A_i^2 \omega^2}, \quad S_i = \frac{E_i A_i \omega}{(B_i - \omega^2)^2 + A_i^2 \omega^2}. \quad (1.7)$$

Переходный процесс из состояния покоя до установления дает решение уравнения начальными условиями  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$

$$y_i(t) = P_i \sin \omega t - S_i \cos \omega t + J_i(t),$$

$$J_i(t) = e^{-A_i t/2} \left( \left( \frac{S_i - 2P_i \omega_i}{2\omega_i} \right) \sin(\omega_i t) + S_i \cos(\omega_i t) \right), \quad \omega_i = \sqrt{B_i - A_i^2/4}. \quad (1.8)$$

**2. Алгебраическое преобразование, нормализующее систему дифференциальных уравнений.** В работе [10] преобразование, нормализующее систему дифференциальных уравнений, выражено через тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Ниже предлагается упрощенная форма такого преобразования, которое выражается только через алгебраические функции. Замену (1.3), приводящую формы к нормальному виду, можно построить следующим образом. В матричном виде составляется система уравнений:

$$MX = 0, \quad M = \begin{pmatrix} -Ba_{11} + c_{11} & -Ba_{12} + c_{12} \\ -Ba_{12} + c_{12} & -Ba_{22} + c_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Из решения квадратного уравнения для  $B$  (равенство нулю определителя)

$$(-Ba_{11} + c_{11})(-Ba_{22} + c_{22}) - (-Ba_{12} + c_{12})^2 = 0 \quad (2.1)$$

находим два собственных значения  $B_1, B_2$ :

$$B_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac, \quad b = -a_{11}c_{22} - a_{22}c_{11} + 2a_{12}c_{12}, \quad (2.2)$$

$$a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad c = c_{11}c_{22} - c_{12}^2.$$

Эти значения положительны в силу положительной определенности квадратичных форм  $T$  и  $\Pi$ . Поэтому дискриминант  $D$  не может быть отрицательным числом. Вырожденный случай  $D=0$ , при котором оба корня равны, исключаем. Его нужно рассматривать отдельно.

Таким образом, без ограничения общности считаем, что  $D > 0$  и  $B_1 < B_2$ . Собственным значениям  $B_1, B_2$  соответствуют два собственных вектора:

$$X_1 = \begin{pmatrix} B_1 a_{12} - c_{12} \\ -B_1 a_{11} + c_{11} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} B_2 a_{12} - c_{12} \\ -B_2 a_{11} + c_{11} \end{pmatrix}.$$

Нормализующая замена имеет следующий вид:

$$x_1 = (B_1 a_{12} - c_{12})y_1 + (B_2 a_{12} - c_{12})y_2,$$

$$x_2 = (-B_1 a_{11} + c_{11})y_1 + (-B_2 a_{11} + c_{11})y_2. \quad (2.3)$$

Она приводит квадратичные формы к виду (1.4) с коэффициентами

$$a'_{ii} = a_{11} \Delta B_i^2 - 2\Delta B_i c_{11} + a_{22} c_{11}^2 - 2a_{12} c_{11} c_{12} + a_{11} c_{12}^2, \quad c'_{ii} = a'_{ii} B_i, \quad (2.4)$$

$$N'_i = N_1 (B_i a_{12} - c_{12}) + N_2 (-B_i a_{11} + c_{11}), \quad i=1, 2, \quad \Delta = a_{11} a_{22} - a_{12}^2.$$

Коэффициенты  $b'_{11}$ ,  $b'_{22}$  не приводятся из-за громоздкости.

**3. Погрешность решения укороченной системы.** Однако условие (1.5) может точно не выполняться, но его можно смягчить, если считать выполнение не точно, а приближенно. Оценку погрешности такого приближения можно получить следующим образом.

Пусть линейная замена (2.3) приводит две квадратичные формы  $T$  и  $\Pi$  к сумме квадратов, а третья квадратичная форма  $R$  остается не приведенной к такому виду:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2), \quad R = \frac{1}{2}(A_1 y_1^2 + 2A_{12} \dot{y}_1 \dot{y}_2 + A_2 y_2^2), \quad \Pi = \frac{1}{2}(B_1 y_1^2 + B_2 y_2^2).$$

Если коэффициент  $A_{12}$  достаточно мал, то его можно не учитывать, но укороченная система дифференциальных уравнений будет описывать колебания системы с достаточной точностью.

Укороченная система уравнений имеет вид (1.6), а полная система:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + A_1 \frac{dy_1}{dt} + A_{12} \frac{dy_2}{dt} + B_1 y_1 &= E_1 \sin \omega t, \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} + A_2 \frac{dy_2}{dt} + A_{12} \frac{dy_1}{dt} + B_2 y_2 &= E_2 \sin \omega t, \\ E_1 &= U_1 q_{11} + U_2 q_{21}, \quad E_2 = U_1 q_{12} + U_2 q_{22}. \end{aligned}$$

Наличие  $A_{12}$  вносит погрешность, которую можно оценить следующим образом. Решаем систему методом комплексных амплитуд. Подставляя в уравнения решения в виде  $y_1 = Y_1 e^{i\omega t}$ ,  $y_2 = Y_2 e^{i\omega t}$ , получим:

$$\begin{aligned} \lambda_1 Y_1 &= E_1 - i\omega A_{12} Y_2, \quad \lambda_2 Y_2 = E_2 - i\omega A_{12} Y_1, \\ E_1 &= U_1 q_{11} + U_2 q_{21}, \quad E_2 = U_1 q_{12} + U_2 q_{22}, \\ \lambda_i &= B_i - \omega^2 + i\omega A_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Предполагая параметр  $A_{12}$  малым, решаем алгебраическую систему уравнений методом возмущений:

$$\begin{aligned} Y_i &= Y_i^0 + \Delta Y_i, \quad Y_i^0 = E_i / \lambda_i, \quad \Delta Y_1 = -i\omega A_{12} Y_2^0 / \lambda_1 + O(A_{12}^2), \\ \Delta Y_2 &= -i\omega A_{12} Y_1^0 / \lambda_2 + O(A_{12}^2). \end{aligned}$$

Назовем относительной погрешностью решения без учета  $A_{12}$  величину

$$\delta = \frac{|\Delta Y_1| + |\Delta Y_2|}{|Y_1^0| + |Y_2^0|} = \omega A_{12} \frac{(|E_1| + |E_2|) / (\lambda_1 \lambda_2)}{(|E_1| \lambda_2 + |E_2| \lambda_1) / (\lambda_1 \lambda_2)}. \quad (3.1)$$

Отсюда с помощью неравенства  $|a + ib| > 1/\sqrt{2}(a + b)$  для любых  $a \geq 0, b \geq 0$  получаем

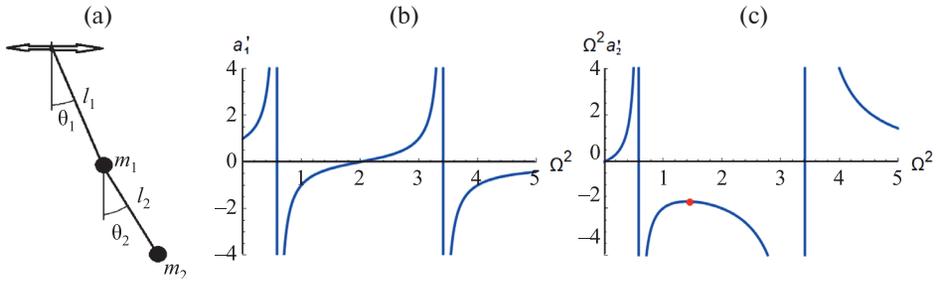


Рис. 1. Схема двойного маятника (а), амплитудный коэффициент угловой переменной  $\theta_1$  (б), коэффициент, пропорциональный амплитуде угловой переменной  $\theta_2$  (с).

$$|\lambda_i| = B_i - \omega^2 + i\omega A_i \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |B_i - \omega^2| + \omega A_i \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta \leq \frac{\sqrt{2}\omega A_{12} (|E_1| + |E_2|)}{\left( |E_1| (|B_1 - \omega^2| + \omega A_1) + |E_2| (|B_2 - \omega^2| + \omega A_2) \right)} < \frac{\sqrt{2} A_{12}}{A_1 + A_2}.$$

Таким образом, величина

$$\frac{\sqrt{2} |A_{12}|}{A_1 + A_2} \quad (3.2)$$

определяет верхнюю оценку относительной погрешности (3.1) решения (1.7).

**4. Двойной плоский маятник.** Малые колебания около положения равновесия двойного плоского маятника, у которого точка подвеса движется по горизонтали по гармоническому закону  $x = a \sin \omega t$  (рис. 1, а), рассматриваем в неинерциальной системе отсчета, в которой точка подвеса неподвижна. Запишем выражения  $T$ ,  $R$ ,  $\Pi$  и  $N$  как функции обобщенных координат  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  и скоростей  $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$  [10]:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2, \quad \mathfrak{R} = \frac{1}{2}r_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}r_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2, \quad (4.1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gl_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}m_2gl_2\theta_2^2, \quad N = q\omega^2((m_1 + m_2)l_1\theta_1 + m_2l_2\theta_2)\sin \omega t,$$

где  $N$  – потенциал сил инерции и в диссипативной функции  $R$  предполагается линейный по относительной угловой скорости закон трения в шарнирах с коэффициентами трения  $r_1, r_2$ .

Из равенства нулю определителя (1.5) находим условие пропорциональности коэффициентов трения и масс  $r_1 = rm_1, r_2 = rm_2$ . При этом условии находится преобразование, приводящее квадратичные формы к сумме квадратов. Прежде чем получить это преобразование, приведем все характеристические функции к безразмерному виду с помощью замен:

$$t = \tau \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad l_1 = l, \quad l_2 = l\mu, \quad m_1 = (1 - \mu)(m_1 + m_2), \quad m_2 = \mu(m_1 + m_2), \quad (4.2)$$

$$r = \varepsilon(m_1 + m_2)\sqrt{gl^3}, \quad \omega^2 = \Omega^2 \frac{g}{l},$$

где  $\tau, \lambda, \mu, \Omega$  – безразмерные переменные.

В этих переменных функции принимают вид:

$$T = \frac{\dot{\theta}_1^2}{2} + \lambda\mu\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}\lambda^2\mu\dot{\theta}_2^2, \quad \mathfrak{R} = \frac{1}{2}\varepsilon\left((1 - \mu)\dot{\theta}_1^2 + \mu(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2\right), \quad (4.3)$$

$$\Pi = \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{1}{2}\lambda\mu\theta_2^2, \quad N = \frac{a\Omega^2}{l}(\theta_1 + \lambda\mu\theta_2)\sin\Omega\tau.$$

Здесь точками обозначены производные по переменной  $\tau$ , несущественный множитель  $(m_1 + m_2)gl$  опущен.

С помощью подстановки коэффициентов квадратичных форм (1.2)

$$a_{11} = 1, \quad a_{22} = \lambda^2\mu, \quad a_{12} = \lambda\mu, \quad b_{11} = \varepsilon, \quad b_{22} = \varepsilon\mu, \quad b_{12} = -\varepsilon\mu, \quad (4.4)$$

$$c_{11} = 1, \quad c_{22} = \lambda\mu, \quad c_{12} = 0, \quad N_1 = \frac{a\Omega^2}{l}, \quad N_2 = \frac{a\Omega^2}{l}\lambda\mu$$

в характеристическое уравнение (2.1) получаем квадратное уравнение

$$1 - B(3 + \lambda + \lambda^2\mu) + B^2(2 + \lambda + 2\lambda^2\mu) = 0.$$

Оно имеет два корня  $B_1, B_2$ :

$$B_{1,2} = \frac{1 + \lambda \mp K}{2\lambda(1 - \mu)}, \quad K = \sqrt{(1 - \lambda)^2 + 4\lambda\mu}. \quad (4.5)$$

Через них с помощью (4.4) выражается преобразование (2.3)

$$\theta_1 = y_1(B_1a_{12} - c_{12}) + y_2(B_2a_{12} - c_{12}) = \lambda\mu(y_1B_1 + y_2B_2), \quad (4.6)$$

$$\theta_2 = y_1(-B_1a_{11} + c_{11}) + y_2(-B_2a_{11} + c_{11}) = y_1(-B_1 + 1) + y_2(-B_2 + 1),$$

приводящее формы (4.3) к каноническому виду:

$$T = \frac{1}{2}(a'_{11}\dot{y}_1^2 + a'_{22}\dot{y}_2^2), \quad R = \frac{1}{2}(b'_{11}\dot{y}_1^2 + b'_{22}\dot{y}_2^2), \quad \Pi = \frac{1}{2}(c'_{11}y_1^2 + c'_{22}y_2^2),$$

$$N = (N'_1\dot{y}_1 + N'_2\dot{y}_2)\sin\omega t.$$

Коэффициенты форм вычисляются по формулам (2.4) и преобразуются к виду:

$$a'_{11} = \frac{K\mu(-K + 1 + \lambda(-1 + 2\mu))}{2(-1 + \mu)}, \quad a'_{22} = -\frac{K\mu(K + 1 + \lambda(-1 + 2\mu))}{2(-1 + \mu)}$$

$$b'_{11} = a'_{11} \frac{\varepsilon}{\lambda} \frac{B_1}{B_2}, \quad b'_{22} = a'_{22} \frac{\varepsilon}{\lambda} \frac{B_2}{B_1}, \quad c'_{11} = a'_{11}B_1, \quad c'_{22} = a'_{22}B_2, \quad N'_1 = N'_2 = \frac{a\Omega^2}{l}\lambda\mu.$$

Уравнения Лагранжа в новых переменных принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_i}{dt^2} + A_i \frac{dy_i}{dt} + B_i y_i &= E_i \sin \Omega \tau, \quad i=1, 2, \\ A_1 &= \frac{\varepsilon B_1}{\lambda B_2}, \quad A_2 = \frac{\varepsilon B_2}{\lambda B_1}, \quad E_1 = \frac{a \Omega^2}{l} e_1, \quad E_2 = \frac{a \Omega^2}{l} e_2, \\ e_1 &= \frac{2\lambda(1-\mu)}{K(K-1+\lambda(1-2\mu))}, \quad e_2 = \frac{2\lambda(1-\mu)}{K(K+1-\lambda(1-2\mu))}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Решение уравнений для установившихся колебаний в переменных  $y_1, y_2$  находится подстановкой коэффициентов (4.7) в формулы:

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{a \Omega^2}{l} (P_i \sin \Omega \tau - S_i \cos \Omega \tau), \quad P_i = \frac{e_i (B_i - \Omega^2)}{(B_i - \Omega^2)^2 + A_i^2 \Omega^2}, \\ S_i &= \frac{e_i A_i \Omega}{(B_i - \Omega^2)^2 + A_i^2 \Omega^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В исходных переменных решение получается подстановкой формул (4.8) в (4.6).

**5. Нерезонансный случай.** В системе имеются две резонансные частоты:  $\Omega_1^2 = B_1$  и  $\Omega_2^2 = B_2$ . При малом трении  $\varepsilon \ll 1$  вне окрестностей резонансных частот решение с погрешностью порядка  $\varepsilon$  можно получить в рамках консервативной системы. Нормальные моды (4.8) имеют вид:

$$y_i = \frac{a \Omega^2}{l} \frac{e_i}{(B_i - \Omega^2)} \sin \Omega \tau, \quad (5.1)$$

Отсюда с помощью (4.6) находим амплитуду  $a_1$  колебаний угловой переменной  $\theta_1$ :

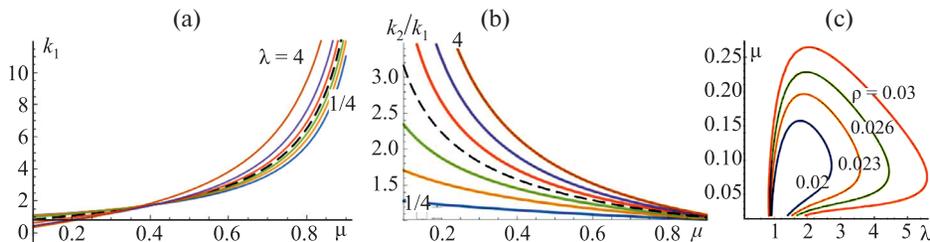
$$\begin{aligned} \theta_1 &= \lambda \mu (y_1 B_1 + y_2 B_2) = a_1 \sin \Omega \tau, \quad a_1 = \frac{a \Omega^2}{l} a'_1, \\ a'_1 &= \lambda \mu \left( \frac{e_1 B_1}{(B_1 - \Omega^2)} + \frac{e_2 B_2}{(B_2 - \Omega^2)_i} \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Функция  $a'_1$  представляет собой дробь. Ее числитель и знаменатель можно выразить через параметры маятника с помощью (4.5) и (4.7)

$$\lambda \mu \left( (B_2 - \Omega^2) e_1 B_1 + (B_1 - \Omega^2) e_2 B_2 \right) = \frac{1}{\lambda(1-\mu)} - \Omega^2, \quad (5.3)$$

$$(B_1 - \Omega^2)(B_2 - \Omega^2) = \frac{-1 + (1 + \lambda)\Omega^2}{\lambda(-1 + \mu)} + \Omega^4, \quad (5.4)$$

$$a'_1 = \frac{\frac{1}{\lambda(1-\mu)} - \Omega^2}{(B_1 - \Omega^2)(B_2 - \Omega^2)}. \quad (5.5)$$



**Рис. 2.** Зависимости от параметра  $\mu$  максимального амплитудного коэффициента  $k_1$  (a), отношения  $k_2/k_1$  (b); границы областей переменных  $\lambda, \mu$  при  $\gamma = 0.02; 0.023; 0.026; 0.03$  для которых относительная погрешность решения менее 1% (c).

Из равенства нулю числителя находится частота антирезонанса:

$$\Omega^2 = \Omega_0^2 = \frac{1}{\lambda(1 - \mu)}. \tag{5.6}$$

На рис. 1, b изображена зависимость  $a'_1$  от квадрата частоты  $\Omega^2$  при  $\lambda = 1, \mu = 1/2$ . Амплитуда  $a_1$  при  $\lambda = 1, \mu = 1/2$  обращается в ноль при  $\Omega^2 = 2$ .

Аналогично находится амплитуда  $a_2$  угловой переменной  $\theta_2$ :

$$\theta_2 = y_1(-B_1 + 1) + y_2(-B_2 + 1) = a_2 \sin \Omega \tau, \quad a_2 = \frac{a \Omega^2}{l} a'_2, \tag{5.7}$$

$$a'_2 = \left( \frac{e_1(-B_1 + 1)}{(B_1 - \Omega^2)} + \frac{e_2(-B_2 + 1)}{(B_2 - \Omega^2)} \right)_i, \quad e_1(-B_1 + 1) = 1/K, \quad e_2(-B_2 + 1) = -1/K.$$

Отсюда получаем: на отрезке  $B_1 < \Omega^2 < B_2$  функция приводится к виду

$$a'_2 = \frac{B_2 - B_1}{K(B_1 - \Omega^2)(B_2 - \Omega^2)}. \tag{5.8}$$

На отрезке  $(B_1, B_2)$  функция отрицательна и стремится к  $-\infty$  на его концах. Можно найти максимальное значение функции  $\Omega^2 a'_2$  с помощью следующих преобразований:

$$\begin{aligned} \Omega^2 a'_2 &= \frac{B_2 - B_1}{K} \frac{\Omega^2}{(B_1 - \Omega^2)(B_2 - \Omega^2)} = \frac{B_2 - B_1}{K} \frac{1}{\left(\frac{B_1}{\Omega} - \Omega\right)\left(\frac{B_2}{\Omega} - \Omega\right)} = \\ &= \frac{(B_2 - B_1)}{K\left(\frac{B_1 B_2}{\Omega^2} + \Omega^2 - (B_1 + B_2)\right)} \leq \frac{(B_2 - B_1)}{K\left(2\sqrt{B_2}\sqrt{B_1} - (B_1 + B_2)\right)} = -\frac{(B_2 - B_1)}{K\left(\sqrt{B_2} - \sqrt{B_1}\right)^2}. \end{aligned}$$

Причем равенство достигается при частоте  $\Omega^2 = (B_1, B_2)^{1/2}$ . Вывод: амплитуда второй угловой переменной  $a_2 = (a/l)\Omega^2 a'_2$  на отрезке  $B_1 < \Omega^2 < B_2$  при частоте  $(B_1, B_2)^{1/2}$  достигает наибольшего значения:

$$\max(\Omega^2 a'_2) = -\frac{(B_2 - B_1)}{K(\sqrt{B_2} - \sqrt{B_1})^2} = -\frac{1}{1 + \lambda - 2\sqrt{\lambda(1 - \mu)}}.$$

Этот вывод иллюстрирует рис. 1, с. На нем изображена зависимость функции  $\Omega^2 a'_2$  от квадрата частоты  $\Omega^2$  при  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1/2$ . Максимум, равный  $-1 - \sqrt{2}/2$ , достигается в том случае, если  $\Omega^2 = \sqrt{2}$ . В этой точке абсолютной значение амплитуды второй угловой переменной имеет наименьшее значение среди всех амплитуд на отрезке  $\Omega^2 \in (B_1, B_2)$ .

Интерес представляет горизонтальное отклонение нижней массы маятника  $x = l_1\theta_1 + l_2\theta_2$ . Введем относительную величину отклонения, отнесенную к суммарной длине маятника:

$$\theta = \frac{x}{l_1 + l_2} = \frac{\theta_1 + \lambda\theta_2}{1 + \lambda} = \frac{a_1 + \lambda a_2}{1 + \lambda} \sin \Omega\tau. \quad (5.9)$$

Уравнение  $a_1 + \lambda a_2 = 0$  для частоты антирезонанса с помощью формул (5.5) и (5.8) приводится к виду:

$$\frac{1}{\lambda(1 - \mu)} - \Omega^2 + \lambda \frac{B_2 - B_1}{K} = \frac{1}{\lambda(1 - \mu)} - \Omega^2 + \frac{1}{(1 - \mu)} = 0.$$

Отсюда находим частоту антирезонанса для угловой координаты нижней массы маятника:

$$\Omega^2 = \Omega_0^2 = \frac{1 + \lambda}{\lambda(1 - \mu)}.$$

Таким образом, при частоте  $\Omega = \sqrt{1 + \lambda} / \sqrt{\lambda(1 - \mu)}$  нижняя масса маятника остается неподвижной, а при частоте в  $\sqrt{1 + \lambda}$  раз меньшей  $1/\sqrt{\lambda(1 - \mu)}$  неподвижной является верхняя масса маятника.

Из этих зависимостей следует исключить  $\varepsilon$ -окрестности резонансных точек. В них угловые переменные обращаются в бесконечности. В резонансных точках следует учитывать трение и, как показано в следующем пункте, угловые переменные в этих точках достигают больших значений порядка  $1/\varepsilon$ .

**6. Случай резонансов.** Рассмотрим асимптотику решения при  $\varepsilon \rightarrow 0$  (малое трение) при резонансной частоте  $\Omega^2 = B_1$ . С помощью (4.8) находим:

$$y_1 = -S_1 \cos \Omega\tau, \quad S_1 = \frac{a\sqrt{B_1}}{l} \frac{e_1}{A_1} = \frac{a}{l\varepsilon} \frac{\lambda(1 + \lambda + K)^{3/2}}{(\sqrt{2}K(-1 + \lambda - 2\lambda\mu + K))}. \quad (6.1)$$

Вторую переменную  $y_2$  порядка 1 в формуле (4.6) для угловых переменных можно не учитывать, что приводит для них к следующим зависимостям:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \lambda\mu B_1 y_1 = -\frac{a}{l\varepsilon} k_1 \cos \Omega\tau, \quad k_1 = \frac{\lambda^2 \mu \sqrt{2(1 + \lambda + K)}}{K(K - 1 + \lambda - 2\lambda\mu)}, \\ \theta_2 &= (-B_1 + 1)y_1 = -\frac{a}{l\varepsilon} k_2 \cos \Omega\tau, \quad k_2 = \frac{(1 + \lambda + K)^{3/2}}{2\sqrt{2}(1 - \mu)K}, \quad k_1 = \frac{K - (1 - \lambda + 2\lambda\mu)}{\lambda\mu(1 + \lambda - K)}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

На рис. 2, а представлены зависимости амплитудных коэффициентов  $k_1$  от параметра масс  $\mu$  при различных значениях отношений длин:  $\lambda = l_2/l_1 = 1/4, 1/2, 3/4, 1, 4/3, 2$  и  $4$ . Значения  $1/4$  и  $4$  для соответствующих кривых указаны на рисунке. На рис. 2, б представлены зависимости отношения амплитудных коэффициентов  $k_2/k_1$  для угловых переменных  $\theta_1, \theta_2$  соответственно от параметра масс  $\mu$  при тех же значениях отношений длин. Графики строятся с помощью формул (6.2). При  $\lambda = 1$  кривые изображены штриховыми линиями.

**7. Случай большой силы сопротивления.** При  $\varepsilon \rightarrow \infty$  с помощью (4.8) и (4.6) получаем следующее асимптотическое разложение для угловых переменных:

$$\theta_1 = -\frac{a(1+\lambda\mu)}{l\varepsilon(1-\mu)}\Omega\cos\Omega\tau + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right), \quad \theta_2 = -\frac{a(1+\lambda)}{l\varepsilon(1-\mu)}\Omega\cos\Omega\tau + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right). \quad (7.1)$$

Этими формулами удобно пользоваться при параметре  $\varepsilon \gg 1$ .

**8. Маятник с равными длинами стержней.** Для маятника с равными длинами при  $\lambda = 1$  формулы упрощаются:

$$\begin{aligned} K &= 2\sqrt{\mu}, \quad B_{1,2} = \frac{1}{1 \pm \sqrt{\mu}}, \quad A_{1,2} = \varepsilon \frac{1 \mp \sqrt{\mu}}{1 \pm \sqrt{\mu}}, \quad E_{1,2} = \frac{a\Omega^2}{l} \frac{1 \pm \sqrt{\mu}}{2\mu}, \\ y_1 &= \frac{a\Omega^2}{l} \frac{(1+\sqrt{\mu})^2}{2\mu} \frac{[1 - (1+\sqrt{\mu})\Omega^2] \sin\Omega\tau - \varepsilon(1-\sqrt{\mu})\Omega\cos\Omega\tau}{[1 - (1+\sqrt{\mu})\Omega^2]^2 + \varepsilon^2(1-\sqrt{\mu})^2\Omega^2}, \quad (8.1) \\ y_2 &= \frac{a\Omega^2}{l} \frac{(1-\sqrt{\mu})^2}{2\mu} \frac{[1 - (1-\sqrt{\mu})\Omega^2] \sin\Omega\tau - \varepsilon(1+\sqrt{\mu})\Omega\cos\Omega\tau}{[1 - (1-\sqrt{\mu})\Omega^2]^2 + \varepsilon^2(1+\sqrt{\mu})^2\Omega^2}, \\ \theta_1 &= \lambda\mu(y_1B_1 + y_2B_2), \quad \theta_2 = y_1(-B_1 + 1) + y_2(-B_2 + 1). \end{aligned}$$

Отсюда с помощью (4.6) и (4.5) находятся угловые переменные:

$$\theta_1 = \frac{\mu}{1-\mu} \left( (1-\sqrt{\mu})y_1 + (1+\sqrt{\mu})y_2 \right), \quad \theta_2 = \frac{\sqrt{\mu}}{1-\mu} \left( (1-\sqrt{\mu})y_1 - (1+\sqrt{\mu})y_2 \right). \quad (8.2)$$

При отсутствии диссипативных сил угловые переменные имеют вид:

$$\theta_1 = \frac{a\Omega^2}{l} \frac{(1-(1-\mu)\Omega^2)}{1-2\Omega^2+(1-\mu)\Omega^4} \sin\Omega\tau, \quad \theta_2 = \frac{a\Omega^2}{l} \frac{\sin\Omega\tau}{1-2\Omega^2+(1-\mu)\Omega^4}.$$

При частоте  $\Omega^2 = (1-\mu)^{-1}$  угловая переменная  $\theta_1 = 0$ , а переменная  $\theta = (\theta_1 + \theta_2)/2 = 0$  при частоте  $\Omega^2 = 2(1-\mu)^{-1}$ . Это антирезонансные частоты.

При резонансной частоте  $\Omega = \sqrt{B_1}$  собственная функция  $y_1$  принимает большие значения порядка  $1/\varepsilon$ , а собственная функция  $y_2$  — меньшие значения порядка  $1$ :

$$y_{1\max} = -\frac{a(1+\sqrt{\mu})^{3/2}}{2l(1-\sqrt{\mu})\mu\varepsilon} \cos\Omega\tau, \quad y_2 = O(1).$$

При этой частоте угловые переменные примут вид:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{\mu}{1-\mu}(1-\sqrt{\mu})y_{1\max}, \quad \theta_2 = \frac{\sqrt{\mu}}{1-\mu}(1-\sqrt{\mu})y_{1\max} \Rightarrow \\ \Rightarrow \theta_{1\max} &= -\frac{a}{2l\varepsilon} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\mu}}}{1-\sqrt{\mu}} \cos \Omega\tau, \quad \theta_{2\max} = \frac{\theta_{1\max}}{\sqrt{\mu}}.\end{aligned}$$

Аналогично находятся угловые переменные при частоте  $\Omega = \sqrt{B_2}$ :

$$\begin{aligned}y_{2\max} &= -\frac{a}{2l} \frac{(1-\sqrt{\mu})^{3/2}}{(1+\sqrt{\mu})\mu\varepsilon} \cos \Omega\tau, \quad y_2 = O(1), \\ \theta_{1\max} &= \frac{\mu}{1-\sqrt{\mu}}y_{2\max}, \quad \theta_{2\max} = \frac{\sqrt{\mu}}{1-\sqrt{\mu}}y_{2\max} \Rightarrow \\ \Rightarrow \theta_{1\max} &= -\frac{a}{2l\varepsilon} \frac{\sqrt{1-\sqrt{\mu}}}{1+\sqrt{\mu}} \cos \Omega\tau, \quad \theta_{2\max} = -\frac{\theta_{1\max}}{\sqrt{\mu}}.\end{aligned}$$

Из полученных формул следует, что максимальные амплитуды колебаний угловых переменных при второй резонансной частоте  $\sqrt{B_2}$  меньше амплитуды при первой частоте  $\sqrt{B_1}$  в

$$\left( \frac{1+\sqrt{\mu}}{1-\sqrt{\mu}} \right)^{3/2}$$

раза. Например, при равных массах  $\mu = 1/2$  в 14 раз.

Наконец, при большой силе сопротивления из формул (8.1) и (8.2) разложение по параметру  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\theta_1 = -\frac{a}{l\varepsilon} \frac{(1+\mu)}{(1-\mu)} \Omega \cos \Omega\tau + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right), \quad \theta_2 = -\frac{a}{l\varepsilon} \frac{2}{(1-\mu)} \Omega \cos \Omega\tau + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right).$$

Первый член разложения следует также из (7.1) при  $\lambda = 1$ .

### 9. Относительная погрешность при невыполнении условия расщепления.

Приведенные формулы определяют общее аналитическое решение задачи о вынужденных колебаниях двойного математического маятника при единственном условии пропорциональности диссипативных коэффициентов массам маятника:  $r_2/r_1 = m_2/m_1$ . Если же это условие не выполняется, то диссипативную функцию

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}r_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}r_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2$$

можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \frac{1}{2}r(m_1\dot{\theta}_1^2 + m_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2) + \frac{1}{2}\Delta r(m_1\dot{\theta}_1^2 - m_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2), \\ r &= \frac{m_1r_2 + m_2r_1}{2m_1m_2}, \quad \Delta r = \frac{m_2r_1 - m_1r_2}{2m_1m_2}\end{aligned}$$

и она заменой (4.6) приведет к виду:

$$R = \frac{1}{2} (b_{11} \dot{y}_1^2 + 2b_{12} + b_{22} \dot{y}_2^2), \quad b_{11} = rb_{11}^0 + \Delta r b_{11}^1, \quad b_{22} = rb_{22}^0 + \Delta r b_{22}^1, \quad b_{12} = \Delta r b_{12}^1.$$

Относительная погрешность решения без учета  $b_{12}$  для малых  $\Delta r$  вычисляется по формуле:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{2b_{12}}{b_{11} + b_{22}} \approx \frac{\Delta r}{r} k, \quad \rho = \frac{\Delta r}{r}, \quad k = \frac{\sqrt{2}b_{12}^1}{b_{11}^0 + b_{22}^0} = \frac{2\sqrt{2}\lambda^3 (1 - \mu)^2 \mu}{(1 + \lambda^2 + \lambda(-2 + 4\mu))(1 + 2\lambda\mu + \lambda^2\mu)}.$$

При фиксированном и достаточно малом значении параметра  $\rho$  границей области параметров  $\lambda, \mu$  с относительной погрешностью менее 1% является контур  $k(\lambda, \mu) = 0.01/\rho, \rho = \Delta r/r$ . Параметры  $\lambda, \mu$ , находящиеся вне контура, удовлетворяют неравенству

$$k(\lambda, \mu) \leq \frac{0.01}{\rho}.$$

В этой области переменных  $\lambda, \mu$  относительная погрешность решения без учета  $\Delta r$  менее 1%.

На рис. 2, с представлены границы этих областей для  $\rho = 0.02; 0.023; 0.026; 0.03$ .

**Заключение.** Представлена методика аналитического исследования вынужденных колебаний механических систем с двумя степенями свободы с помощью перехода к нормальным координатам. Фактически реализовано известное высказывание Ж.Л. Лагранжа, что в механической задаче существует система координат, в которой дифференциальные уравнения движения и их решение имеют наипростейший вид. Это достигается с помощью одновременной диагонализации трех матриц: кинетической, потенциальной энергии и диссипативной функции. Упрощенные предложенным способом уравнения движения позволили провести исчерпывающий анализ вынужденных малых колебаний двойного маятника с горизонтальной вибрацией точки подвеса. В задаче имеются 4 произвольных параметра: две длины и две массы. Представлен полный анализ этой системы.

Наиболее простой вид имеют антирезонансные частоты маятника:

$$\sqrt{\frac{g(l_1 + l_2)}{l_1 l_2} \frac{(m_1 + m_2)}{m_1}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{g}{l_2} \frac{m_1 + m_2}{m_1}},$$

при которых остаются неподвижными нижняя и верхняя масса маятника соответственно; наибольшие амплитуды угловых координат, достигаемые при резонансной частоте  $\sqrt{B_1}$ :

$$a_1 = \frac{(1 + \sqrt{\mu})^{3/2}}{2(1 - \sqrt{\mu})\varepsilon} + O(1), \quad a_2 = \frac{a_1}{\sqrt{\mu}} + O(1);$$

выражения для угловых координат маятника при достаточно большом трении:

$$\theta_1 = -\frac{a(1+\lambda\mu)}{l\varepsilon(1-\mu)}\Omega\cos\Omega\tau + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right), \quad \theta_2 = -\frac{a(1+\lambda)}{l\varepsilon(1-\mu)}\Omega\cos\Omega\tau + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right);$$

выражения для частот вибрации, при которых соответствующие угловые координаты имеют максимальные амплитуды.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500443-0).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уиттекер Э.Т. Аналитическая динамика. М.: 2004. 500 с.
2. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008. 304 с.
3. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
4. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Физматлит, 2001. 262 с.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М: Наука, 1967. 552 с.
6. Беллман Р.Э. Введение в теорию матриц. М: Наука, 1976. 352 с.
7. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М: Мир, 1989. 655 с.
8. Mitra S.K. Simultaneous diagonalization of rectangular matrices // Linear Algebra Appl. 1982. V. 47. P. 139–150.  
[https://doi.org/10.1016/0024-3795\(82\)90231-2](https://doi.org/10.1016/0024-3795(82)90231-2)
9. Новиков М.А. Одновременная диагонализация трех вещественных симметричных матриц // Известия вузов. Математика. 2014. № 12. С. 70–82.
10. Петров А.Г. О существовании нормальных координат для вынужденных колебаний линейных диссипативных систем // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 5. С. 93–102.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329922050129>

### ON FORCED OSCILLATIONS OF A DOUBLE MATHEMATICAL PENDULUM

A. G. Petrov<sup>a, \*</sup>

<sup>a</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: petrovipmech@gmail.com*

**Abstract** – For conservative mechanical systems, the method of normal coordinates is known, which uses the theorem on the reduction of two quadratic forms to the sum of squares. In this case, the system of differential equations is split into a system of independent oscillators. A linear dissipative mechanical system with a finite number of freedom degrees is defined by three quadratic forms: the kinetic energy of the system and potential energy of the system, and the dissipative Rayleigh function. We study the linear problem of forced oscillations of a double pendulum when the friction coefficients are proportional to the masses. Then all three quadratic forms are reduced to the sum of squares by a single transformation.

In normal coordinates the system splits into two independent systems of second order. An analytical solution is constructed in the most general form for arbitrary rod lengths and point masses. A complete analysis of the oscillations in the non-resonant case and in the case of resonances is given. Formulas for the error of the analytical formulas if the proportionality of the friction coefficients and masses is violated are also obtained.

*Keywords:* Lagrange method, double pendulum, quadratic forms, normal coordinates, dissipative systems

## REFERENCES

1. *Whittaker E. T.* A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge at the university press. Second edition, 1917.
2. *Zhuravlev V. F.* Fundamentals of theoretical mechanics // Moscow: Fizmatlit, 2008. P. 304.
3. *Chetaev N. G.* Stability of movement. Works on analytical mechanics. Moscow: Publishing House of the USSR Academy of Sciences. 1962. P. 535.
4. *Gantmacher F.R.* Lectures on analytical mechanics // M. Fizmatlit, 2001.
5. *Gantmacher F.R.* Theory of matrices. Moscow: Nauka, 1967. P. 552.
6. *Bellman R.* Introduction to Matrix Analysis. N. Y.: McGraw-Hill, 1970.
7. *Horn R. A., Johnson C. R.* Matrix Analysis. — Cambridge University Press, 1986
8. *Mitra S.K.* Simultaneous diagonalization of rectangular matrices // Linear Algebra Appl. 1982. V. 47. P. 139–150.  
[https://doi.org/10.1016/0024-3795\(82\)90231-2](https://doi.org/10.1016/0024-3795(82)90231-2)
9. *Novikov M. A.* Simultaneous diagonalization of three real symmetric matrices // Izv. VUZ. Matematika. 2014, №12, pp. 70–82.
10. *Petrov A. G.* On the existence of normal coordinates for forced oscillations of linear dissipative systems // Izv. RAS. MTT. 2022. № 5. pp. 93–102.

УДК 621.891

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ПЛЕНКИ НА ТЕРМОУПРУГУЮ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ТРЕНИИ КОМПОЗИТНЫХ ТОРМОЗНЫХ ДИСКОВ

© 2024 г. А. Г. Шпенев<sup>а, \*</sup>

<sup>а</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: kel-a-kris@list.ru

Поступила в редакцию 23.11.2023 г.

После доработки 19.02.2024 г.

Принята к публикации 03.04.2024 г.

В работе рассматривается процесс возникновения термоупругой неустойчивости во время нестационарного трения анизотропных дисковых образцов при наличии пленки третьего тела на поверхности трения. Данный процесс имеет место при работе высоконагруженных тормозных систем (в авиации и железнодорожном транспорте), специализированных сцеплений автотранспорта и в других механизмах. Наличие пленки приводит к снижению износа поверхности одновременно с возникновением значительной нелинейности интенсивности изнашивания. Методом конечных разностей проведено моделирование взаимного влияния изнашивания, фрикционного разогрева, упругих деформаций и эволюции пленки на поверхности трения. Изучен процесс трения и изнашивания дисков с учетом истории серии торможений. Рассмотрена кольцевая форма распределения поверхностных давлений и температур и проведено сравнение эволюции износа дисков от торможения к торможению для случаев наличия пленки, ее отсутствия и экспериментально измеренного износа.

*Ключевые слова:* термоупругая неустойчивость, износ, композиты, трибология, углеродные композиты, изнашивание композитов, третье тело, трибология композитов.

**DOI:** 10.31857/S1026351924040088, **EDN:** UCSSCR

**1. Введение.** Подавляющая часть современного мирового авиапарка оборудована тормозными системами, работающими по схеме трения “кольцо–кольцо” с дисками, изготовленными из волокнистых композитов на основе углерода. Непрерывное развитие авиатехники приводит к постоянному росту как механической, так и термической нагруженности рабочих поверхностей тормозных дисков. Хотя углерод способен выдерживать высокие температуры и контактные давления при трении [1], высокая удельная плотность энергии трения на рабочей поверхности приводит к развитию термоупругой неустойчивости [2]. При этом контактные давления и

высокие температуры концентрируются в отдельных областях поверхности трения (“горячих пятен”), в то время как на остальной поверхности трения вообще может отсутствовать контактное взаимодействие [3]. Данное явление может иметь в качестве последствий не только вибрации и нестабильные характеристики тормозного усилия трибосопряжения [4], но и повышенный износ поверхностей трения [5]. Трибологические характеристики композитных материалов на основе углерода во многом определяются пленкой вторичных структур, образующейся на поверхности трения [6]. Свойства этой пленки зависят от многих параметров как самого материала [7], так и конфигурации контактирующих поверхностей и их геометрических размеров [8]. Последнее может иметь решающее значение в процессе развития термоупругой неустойчивости при трении углеродных композитных дисков. Суть явления термоупругой неустойчивости заключается в самопроизвольном нарушении равномерного распределения контактных давлений и температур по поверхности трения за счет положительной обратной связи между ними. Локальное повышение давления за счет флуктуаций влечет за собой дополнительный разогрев поверхности за счет фрикционного тепла. Это в свою очередь приводит к дополнительному расширению материала и увеличению локального контактного давления. Если поток фрикционного тепла достаточно высок, контакт между поверхностями происходит только в нескольких локальных участках (“горячих пятен”). Так как при образовании “горячих пятен” реальная конфигурация контакта претерпевает значительные трансформации, происходит значительное изменение толщины поверхностной пленки на площадках контакта. Таким образом, возникает взаимное влияние процессов образования поверхностной пленки и развития термоупругой неустойчивости: пленка влияет на износ поверхности и тем самым на выравнивание поверхностных давлений и температур за счет приработки. При этом изменение конфигурации реального контакта за счет образования “горячих пятен” влияет на параметры поверхностной пленки.

**2. Цель работы.** Целью работы является моделирование взаимного влияния процесса образования пленки вторичных структур на поверхности трения углеродного композита и процесса развития термоупругой неустойчивости при трении. Будет определено, как поверхностная пленка влияет на зарождение и эволюцию “горячих пятен” на поверхности контакта тормозных дисков и на их износ при циклических торможениях. Для этого будет проведено моделирование серии торможений зеркальной пары трения по схеме “кольцо–кольцо” в условиях близких к существующим в авиационных тормозных системах. Будет исследовано изменение рельефа поверхности дисков от торможения к торможению и проведено сравнение полученных результатов с моделированием без учета влияния поверхностной пленки, а также с известными результатами экспериментальных исследований.

**3. Постановка задачи.** В работе рассматривается процесс трения пары кольцеобразных анизотропных дисков из пакета, состоящего из чередующихся подвижных и вращающихся дисков (такая схема применяется в авиации, высокоскоростных поездах и в некоторых сцеплениях). Рассмотрим

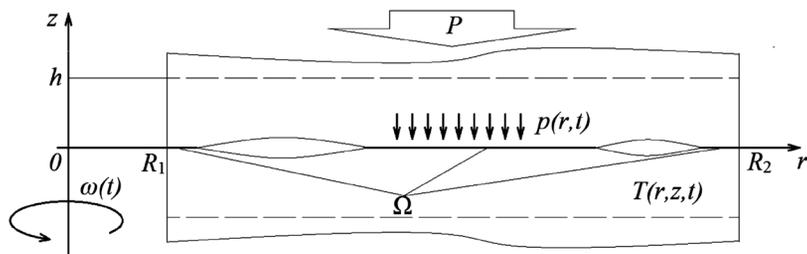


Рис. 1. Схема контакта пары дисков.

пару контактирующих кольцеобразных дисков (вращающийся и неподвижный, рис. 1) имеющих толщину  $2h$ , внутренний радиус  $R_1$  и внешний радиус  $R_2$ . Введем цилиндрическую систему координат  $(0, r, \varphi, z)$  с центром в точке пересечения оси симметрии дисков с плоскостью их контакта и осью  $Oz$ , совпадающей с осью их вращения. Свойства материала дисков считаем однородными и трансверсально анизотропными. Ось анизотропии параллельна оси вращения диска. Предполагаем, что условия на поверхностях трения с разных сторон каждого диска одинаковы и диск в процессе трения остается симметричен относительно своей срединной плоскости, перпендикулярной оси вращения. Тогда рассматривая поверхность трения между парой дисков можно считать, что плоскости их симметрии остаются плоскими в процессе трения и все условия (температура, напряжения и деформации) остаются симметричными относительно этих плоскостей в каждом диске. Также отсюда следует симметрия условий в соприкасающихся дисках относительно плоскости трения. Кроме того, считаем, что при трении сохраняются условия осевой симметрии относительно оси вращения. Тогда для исследования эволюции напряженно-деформированного состояния дисков в процессе трения достаточно рассмотреть сечение одного из дисков плоскостью, проходящей через ось симметрии. При этом, так как каждый из дисков остается симметричным относительно собственной срединной плоскости, рассмотрим половину сечения диска в виде прямоугольника высоты  $h$  и ширины  $R_2 - R_1$  (где  $2h$  — толщина диска). Сечение покоится на жестком основании (плоскость симметрии), на котором отсутствуют перемещения и через которое не происходит теплопередача (что следует из условий симметрии). Так как материал анизотропный, теплопроводность в радиальном направлении отличается от теплопроводности в осевом направлении. Также боковые поверхности ( $r = R_1$  и  $r = R_2$ ) считаем теплоизолированными, так как теплопередача на боковых поверхностях тормозных дисков пренебрежимо мала из-за особенностей конструкции многодисковых трибосопряжений. Напряженно-деформированное состояние сечения описывается одномерной моделью Винклера, при которой возможны только перемещения, нормальные к поверхности контакта. Контакт между рабочими поверхностями дисков происходит в области  $\Omega$ . Из соображений осевой симметрии контакта следует, что  $\Omega$  представляет собой набор кольцеобразных областей, чей размер и расположение определяются распределением термических деформаций, контактных давлений и износом поверхности. Такую постановку задачи возможно также применить для

моделирования работы краевых дисков в пакете, установленных на жестких теплоизолированных плоских держателях. Диски сжимает внешнее усилие  $P$ , и они скользят друг относительно друга с угловой скоростью  $\omega$ . Будем считать, что в процессе единичного акта торможения угловая скорость падает до нуля по линейному закону:

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{\omega_0}{t_{br}} t,$$

где  $\omega_0$  — начальная угловая скорость вращения дисков, а  $t_{br}$  — время торможения. Тогда скорость скольжения поверхностей будет определяться формулой вида:

$$V(r, t) = 2\pi\omega(t)r = 2\pi\omega_0 \left( 1 - \frac{t}{t_{br}} \right) r, \quad R_1 < r < R_2.$$

На поверхности контакта действуют следующие граничные условия для нормальных перемещений поверхности (они будут различаться для области реального контакта  $\Omega$  и области, в которой присутствует зазор между рабочими поверхностями):

$$\begin{aligned} u_E(r, t) + u_W(r, t) - u_T(r, t) &= u_\Delta(t), \quad r \in \Omega, \\ u_G(r, t) + u_W(r, t) - u_T(r, t) &= u_\Delta(t), \quad r \notin \Omega, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $u_E$  — нормальное перемещение поверхности под действием упругих деформаций,  $u_T$  — нормальное перемещение поверхности под действием термического расширения,  $u_W$  — линейный износ поверхности,  $u_G$  — половина зазора между поверхностями в области отсутствия контакта,  $u_\Delta$  — половина нормального сближения срединных плоскостей дисков. Так как напряженно-деформированное состояние материала моделируется одномерной моделью Винклера, нормальные перемещения поверхности под действием упругих деформаций  $u_T$  определяются формулой:

$$u_E(r, t) = \frac{p(r, t)}{K_E}, \quad (3.2)$$

где  $K_E$  — коэффициент податливости поверхности диска в направлении  $0z$ ;  $p(r, t)$  — давление на поверхности контакта двух дисков. Нормальные перемещения поверхности под действием термического расширения определяются по формуле:

$$u_T(r, t) = a_z \int_0^h T(z, r, t) dz, \quad (3.3)$$

где  $T(r, z, t)$  — температура материала диска,  $a_z$  — коэффициент линейного расширения материала в направлении  $0z$ . Температура материала диска может быть определена из уравнения теплопроводности в плоскости сечения [9]:

$$\lambda_r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 < z \leq h, \quad t > 0, \quad (3.4)$$

где  $\lambda_r$  и  $\lambda_z$  – коэффициенты теплопроводности материала диска в сечении в направлениях  $r$  и  $z$ ,  $c$  – теплоемкость материала,  $\rho$  – его плотность. Начальное условие для уравнения (3.4) представляется равенством  $T(r, z, 0) = 0$ . Условия теплоизоляции на границах слоя и фрикционного разогрева рабочей поверхности имеют вид:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \right|_{r=R_1, r=R_2}, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \right|_{z=h}, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{q(r, t)}{\lambda_z} \right|_{z=0},$$

где  $q(r, t)$  – плотность потока энергии фрикционного разогрева:

$$q(r, t) = \frac{1}{2} \mu p(r, t) V(r, t),$$

где  $\mu$  – коэффициент трения между дисками. Из соображений равновесия также получаем:

$$2\delta \int_{R_1}^{R_2} p(r, t) r dr = P.$$

В соответствии с существующими теоретическими [8] и экспериментальными исследованиями [10, 11] линейная интенсивность изнашивания шероховатого материала может быть представлена в виде линейной зависимости от толщины поверхностной пленки и контактного давления:

$$\dot{u}_W(r, t) = K_S p(r, t) V(r, t) (H_{\max} - H), \quad r \in \Omega,$$

где  $K_S$  – коэффициент интенсивности прироста толщины пленки за счет износа материала,  $H_{\max}$  – максимальная толщина поверхностной пленки, при которой она полностью разделяет трущиеся поверхности и износ прекращается. Тогда в соответствии с работой [8] линейная скорость изнашивания поверхности будет определяться через параметры области контакта в виде:

$$\dot{u}_W = \frac{p(r, t) V(r, t) H_{\max}}{\frac{1}{K_S} + \frac{1}{K_W} \cdot \frac{S}{L}}, \quad r \in \Omega, \quad (3.5)$$

где  $S$  и  $L$  – площадь и периметр области контакта,  $K_W$  – коэффициент интенсивности уменьшения объема пленки за счет потери вещества через периметр области контакта. Эти коэффициенты могут быть определены экспериментально при сочетании методов трибологических испытаний и микроструктурного исследования поверхности трения композита [10]. В случае если мы не учитываем влияние поверхностной пленки, интенсивность износа будет иметь вид:

$$\dot{u}_W^* = K p(r, t) V(r, t), \quad r \in \Omega,$$

где  $K$  – коэффициент интенсивности изнашивания. Износ поверхности имеет вид:

$$u_W(r, t) = \int_0^t \dot{u}_W(r, \tau) d\tau, \quad r \in \Omega. \quad (3.6)$$

Таким образом, подставив формулы (3.2), (3.3), (3.5) и (3.6) в формулу (3.1) и используя формулу (3.4), получаем интегро-дифференциальную систему уравнений (3.7), описывающую процесс трения и изнашивания композитного диска в течение цикла торможения:

$$\begin{aligned} \frac{p(r,t)}{K_E} + \int_0^t \dot{u}_W(r,\tau) d\tau - a_z \int_0^h T(r,z,t) dz = u_\Delta(t), \quad r \in \Omega, \\ \lambda_r \frac{\partial^2 T(r,z,t)}{\partial r^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T(r,z,t)}{\partial z^2} = c\rho \frac{\partial T(r,z,t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Граничные условия для системы будут иметь вид:

$$\begin{aligned} T(r,z,0) = 0, \quad u_W(r,t)|_{t=0} = u_0(r), \\ \frac{\partial T(r,z,t)}{\partial r} = 0 \Big|_{r=R_1}, \quad \frac{\partial T(r,z,t)}{\partial z} = 0 \Big|_{z=h}, \quad \frac{\partial T(r,z,t)}{\partial z} = -\frac{\mu}{2\lambda_z} p(r,t)V(r,t) \Big|_{z=0}, \quad (3.8) \\ 2\pi \int_{R_1}^{R_2} p(r,t) r dr = P, \end{aligned}$$

где  $u_0(r)$  – рельеф поверхности трения до начала процесса торможения. Перед первым циклом торможения полагаем  $u_0(r) = 0$ .

**4. Методика решения.** Интегро-дифференциальная система уравнений (3.7) может быть решена сочетанием методов конечных разностей и итерационного метода. Введем дискретизацию по координатам  $(r,z,t)$  на отрезках  $r \in [R_1, R_2]$ ;  $z \in [0, h]$ ;  $t \in [0, t_{br}]$  с шагом  $(\Delta r, \Delta z, \Delta t)$  соответственно:

$$r_i = R_1 + i\Delta r, \quad i = 0..I, \quad I = \frac{R_2 - R_1}{\Delta r}, \quad (4.1)$$

$$z_j = j\Delta z, \quad j = 0..J, \quad J = \frac{h}{\Delta z}, \quad (4.2)$$

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0..N, \quad N = \frac{t_{br}}{\Delta t}. \quad (4.3)$$

Функцию  $T(z,r,t)$  будем отыскивать в точках (4.1), (4.2), (4.3), значения в этих точках обозначим  $T_{i,j}^n$ ; функции  $p(r,t)$  и  $u_W$  будем отыскивать в точках (4.2) и (4.3), значения в этих точках обозначим  $p_i^n$  и  $u_{W_i}^n$  соответственно. Функцию  $u_\Delta(t)$  – рассматриваем в точках (4.3), обозначая ее значения  $u_\Delta^n$ . Уравнение (3.7.1) в разностном виде примет вид:

$$\frac{hp_i^n}{E_z} + u_{W_i}^n - a_z \Delta z \sum_{j=1}^J T_{i,j}^n = u_\Delta^n, \quad r_i \in \Omega. \quad (4.4)$$

Уравнение теплопроводности (3.7.2) заменим на явную разностную схему:

$$\lambda_r \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{\Delta r^2} + \lambda_z \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{\Delta z^2} = c\rho \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t}, \quad (4.5)$$

$$i = 1..I - 1, j = 1..J - 1, n = 0..N - 1.$$

Граничное условие (3.8) – вторая строка, в разностном виде будет иметь вид:

$$T_{0,j}^{n+1} = T_{1,j}^{n+1}, \quad T_{N,j}^{n+1} = T_{N-1,j}^{n+1}, \quad j = 0..J, \quad n = 0..N - 1,$$

$$\frac{T_{i,0}^{n+1} - T_{i,1}^{n+1}}{\Delta z} = \frac{\mu}{2\lambda_z} p_i^{n+1} V(r_i, t_{n+1}), \quad T_{i,J}^{n+1} = T_{i,J-1}^{n+1}, \quad i = 0..I, \quad n = 0..N - 1.$$

Граничное условие (3.8) – третья строка, в разностном виде примет вид:

$$2\pi\Delta r \sum_{i=1}^I r_i p_i^{n+1} = P. \quad (4.6)$$

Износ поверхности трения  $u_{W_i}^n$  будет иметь вид:

$$u_{W_i}^n = H_{\max} \Delta t \sum_{\eta=1}^n \frac{p_i^\eta V(r_i, t_\eta)}{\frac{1}{K_S} + \frac{S/L_i^\eta}{K_W}}, \quad (4.7)$$

где соотношение периметра к площади пятна контакта  $S/L_i^\eta$ , к которому принадлежит точка  $r_i$ , определяется по формуле:

$$S/L_i^\eta = \frac{R_{2i}^\eta - R_{1i}^\eta}{2}, \quad (4.8)$$

где  $R_{1i}^\eta$  и  $R_{2i}^\eta$  – внутренний и внешний радиусы кольца контакта соответственно, к которому принадлежит точка  $r_i$  в момент времени  $t_\eta$ . В случае если мы не учитываем влияние поверхностной пленки,  $u_{W_i}^n$  будет иметь вид:

$$u_{W_i}^n = K \ddot{A} t \sum_{\zeta=1}^n p_i^\zeta V(r_i, t_\zeta) \quad (4.9)$$

Суммарный средний линейный износ диска за одно торможение можно получить по формуле:

$$U_W = \frac{\sum_{i=0}^I u_{W_i}^N}{I}.$$

После окончания цикла торможения из-за неравномерного распределения давлений в процессе трения износ по радиусу диска также будет распределен неравномерно ( $u_{W_i}^n \neq \text{const}$ ), таким образом, на диске образуется рельеф, который может повлиять на распределение давлений при последующих торможениях.

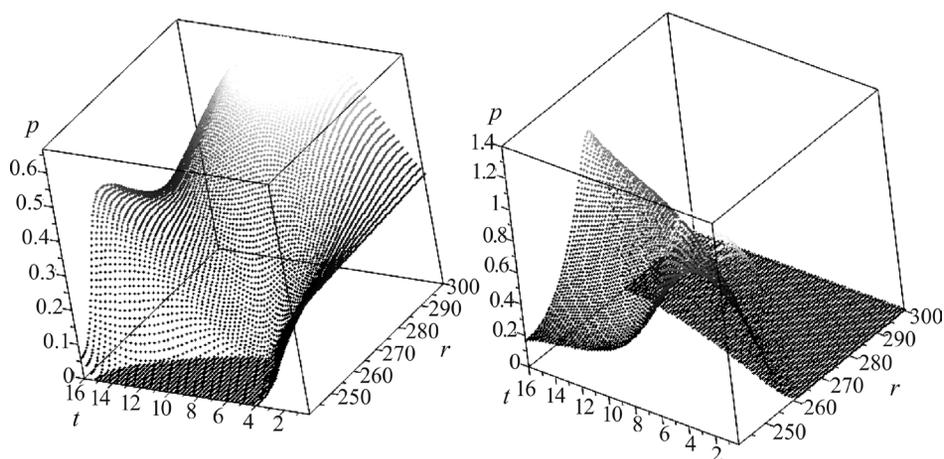
В процессе решения применялась следующая схема расчетов:

0. В начальный момент времени распределение температур  $T_{i,j}^0$  и износ  $u_{wi}^0$  заданы граничными условиями: температура равна нулю, износ определен рельефом рабочей поверхности после предыдущего торможения.
1. Определяем сближение  $u_{\Delta}^{n+1}$  и области контакта  $\Omega$  методом последовательных приближений таким образом, чтобы выполнялись равенства (4.4) и (4.6):
  - a. Для очередного  $\bar{u}_{\Delta}^{n+1}$  ищем  $\bar{p}_i^{n+1}$  по формуле (4.4).
  - b. Если  $\bar{p}_i^{n+1} \leq 0$ , то  $r_i \notin \Omega$ , как следует из (3.1).
  - c. Для всех  $r_i \in \Omega$  проверяем условие (4.6). Если нагрузка получается меньше  $P'$ , то увеличиваем  $\bar{u}_{\Delta}^{n+1}$ , в противном случае уменьшаем  $\bar{u}_{\Delta}^{n+1}$ .
  - d. Если разница между полученной нагрузкой и заданной больше 0.01%, возвращаемся к шагу a.
2. Получив  $u_{\Delta}^{n+1}$  и соответствующее ему  $\Omega$  из (4.4), получаем новое распределение давлений  $p_i^{n+1}$ .
3. В соответствии с полученным распределением контактных давлений  $p_i^{n+1}$ , по формуле (4.5) отыскиваем распределение температур на следующем шаге по времени  $T_{i,j}^{n+1}$ .
4. Отыскиваем износ на новом шаге по времени в соответствии с формулами (4.7) и (4.8) или по формуле (4.9), если мы не учитываем влияние поверхностной пленки.
5. Переходим к пункту 1 и новому шагу по времени.

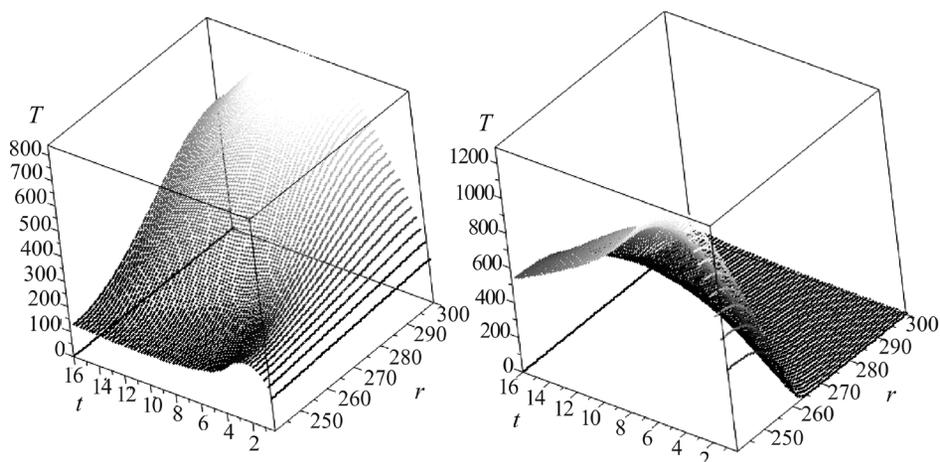
В табл. 1 указаны численные значения параметров, использовавшихся при расчетах, соответствующих условиям работы авиационного тормоза. Параметры трибосопряжения и механические свойства материала указаны в соответствии с работой [5], коэффициент линейного износа без учета поверхностной пленки  $K$  указан в соответствии с работой [11], коэффициенты изнашивания при наличии пленки  $H_{\max}$ ,  $K_w$  и  $K_s$  в соответствии с работой [10] для материала “АДФ-ОС”, исследованного в этих работах. Количество разбиений по координатам  $r$ ,  $z$  и  $t$  равно соответственно:

$$I = 120, J = 60, N = 8000.$$

**5. Результаты и выводы.** На рис. 2 показан график распределения поверхностных давлений  $p(r, t)$  при расчете, учитывающем наличие поверхностной пленки, для первых двух торможений. Из графика видно, что при первом торможении изначально равномерное распределение контактных давлений быстро исчезает. Контактные давления концентрируются на внешнем радиусе диска, а ближе к внутреннему радиусу становятся нулевыми (то есть возникает область отсутствия контакта между поверхностями). Это является следствием неравномерности распределения потока фрикционной тепловой энергии по радиусу диска: скорость скольжения на внешнем радиусе больше. Таким образом, за счет положительной обратной связи между температурой поверхности (рис. 3) и контактными давлениями (рис. 2) развивается термоупругая неустойчивость, что приводит к большему износу внешней области рабочей поверхности диска и образованию поверхностного рельефа. При



**Рис. 2.** Зависимость контактных давлений  $p(r, t)$  (МПа) от радиальной координаты  $r$  (мм) и временной координаты  $t$  (с) для первого (слева) и второго (справа) последовательных торможений с учетом наличия поверхностной пленки.



**Рис. 3.** Зависимость контактных температур на поверхности трения  $T(r, 0, t)$  (°C) от радиальной координаты  $r$  (мм) и временной координаты  $t$  (с) для первого (слева) и второго (справа) последовательных торможений с учетом наличия поверхностной пленки.

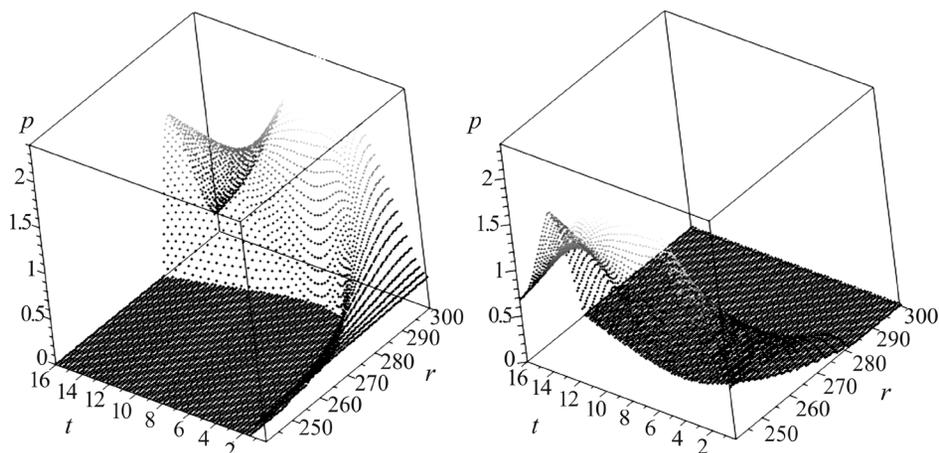
следующем торможении начальные контактные давления за счет наличия рельефа поверхности концентрируются ближе к внутреннему радиусу диска, что вызывает разогрев (рис. 3) и износ внутренней области рабочей поверхности. В результате форма поверхности меняется циклически, в течение цикла из двух торможений. Таким образом, торможения можно разбить на “четные” и “нечетные”, с различным распределением температур и контактных давлений, которые чередуются друг с другом. При “четных” торможениях реальная область контакта находится ближе к внешнему радиусу диска, при

**Таблица 1.** Параметры материала и процесса трения, используемые в расчетах.

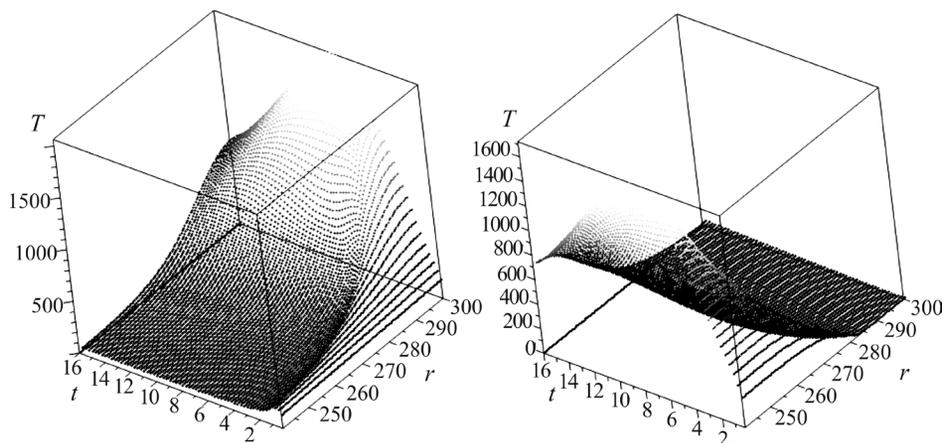
Параметр	Обозначение	Величина	Ед. изм
<i>Параметры композита</i>			
Плотность	$\rho$	$1.75 \cdot 10^3$	кг/м <sup>3</sup>
Теплоемкость	$c$	800–2000 <sup>1</sup>	Дж/кг·°С
Теплопроводность в осевом направлении	$\lambda_z$	$20 \cdot 10^{-3}$	Вт/мм·°С
Теплопроводность в радиальном направлении	$\lambda_r$	$30 \cdot 10^{-3}$	Вт/мм·°С
Коэффициент теплового расширения	$a_z$	$2 \cdot 10^{-6}$	1/°С
Коэффициент трения	$\mu$	0.5	—
Коэффициент податливости диска	$K_E$	400	МПа/мм
Коэффициент изнашивания без пленки	$K$	$24.3 \cdot 10^{-7}$	МПа <sup>-1</sup>
Максимальная толщина пленки	$H_{\max}$	9	мкм
Коэффициент роста толщины пленки	$K_S$	$2.43 \cdot 10^{-9}$	мкм <sup>-1</sup> ·МПа <sup>-1</sup>
Коэффициент потери массы пленки	$K_W$	$12.69 \cdot 10^{-6}$	МПа <sup>-1</sup>
<i>Параметры процесса трения</i>			
Начальная скорость вращения диска	$\omega_0$	12	об./с
Среднее контактное давление	$P/\pi(R_2^2 - R_1^2)$	0.3	МПа
Время торможения	$t_{br}$	16	с
<i>Параметры диска</i>			
Внутренний радиус	$R_1$	240	мм
Внешний радиус	$R_2$	300	мм
Толщина	$2h$	30	мм

<sup>1</sup>Использовалась переменная теплоемкость, так как углеродные материалы демонстрируют значительную зависимость этого параметра от температуры.

“нечетных” – к внутреннему. Как следствие, в каждой отдельной точке будут чередоваться от торможения к торможению высокие и низкие контактные температуры и давления. Этот эффект хорошо известен как из экспериментальных наблюдений [12], так и из других расчетных моделей [5]. На рис. 4 и 5 показаны распределения поверхностных давлений  $p(r, t)$  и температур  $T(r, 0, t)$  при расчете без учета наличия поверхностной пленки для первых двух торможений. Хотя общий циклический характер расположения областей контакта сохраняется, пики температур и давлений становятся выше (1600–2000°С

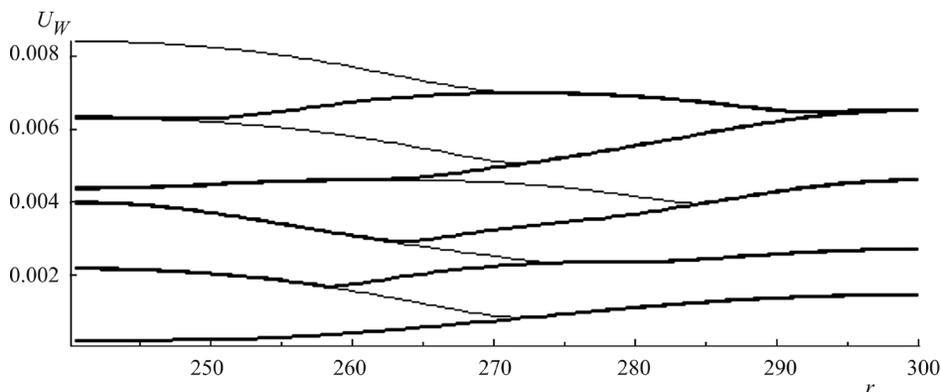


**Рис. 4.** Зависимость контактных давлений  $p(r, t)$  (МПа) от радиальной координаты  $r$  (мм) и временной координаты  $t$  (с) для первого (слева) и второго (справа) последовательных торможений без учета наличия поверхностной пленки.

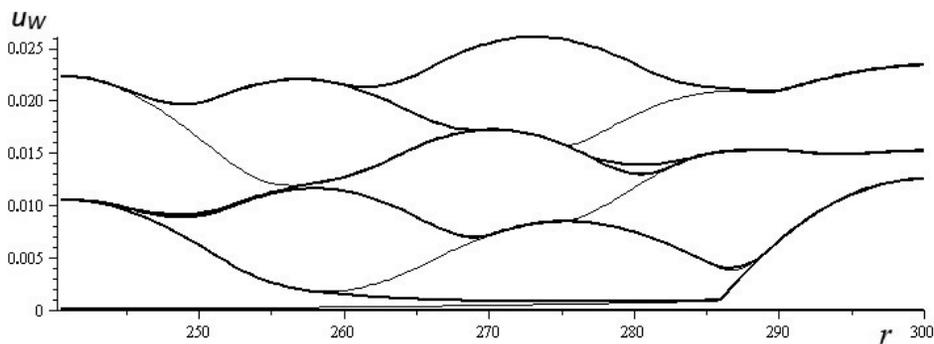


**Рис. 5.** Зависимость контактных температур на поверхности трения  $T(r, 0, t)$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) от радиальной координаты  $r$  (мм) и временной координаты  $t$  (с) для первого (слева) и второго (справа) последовательных торможений без учета наличия поверхностной пленки.

против  $800\text{--}1200^{\circ}\text{C}$  и  $\approx 2.4$  МПа против  $\approx 1.4$  МПа). Это приводит к большей глубине износа в “горячих” пятнах и к развитию различных картин термоупругой неустойчивости при последующих торможениях с учетом поверхностной пленки и без. На рис. 6 показана зависимость износа поверхности диска от радиальной координаты (то есть форма рельефа поверхности диска) после серии из 10 торможений с учетом наличия поверхностной пленки. Из графика на рис. 6 видно, как происходит чередование “четных” и “нечетных” торможений с концентрацией износа на внешней и на внутренней областях диска соответственно. На рис. 7 показана зависимость износа поверхности



**Рис. 6.** Зависимость линейного износа  $u_W$  (мм) от радиальной координаты  $r$  (мм) (форма изношенной поверхности) для 10 последовательных торможений с учетом наличия поверхностной пленки. Жирными линиями выделены нечетные торможения.



**Рис. 7.** Зависимость линейного износа  $u_W$  (мм) от радиальной координаты  $r$  (мм) (форма изношенной поверхности) для 10 последовательных торможений без учета наличия поверхностной пленки. Жирными линиями выделены нечетные торможения.

диска от радиальной координаты (то есть форма рельефа поверхности диска) после серии из 10 торможений без учета наличия поверхностной пленки. Из сравнения графиков на рис. 6 и 7 следует, что расчетное изменение рельефа от торможения к торможению происходит более хаотично, чем при расчете, учитывающем наличие пленки. Так же сравнение с экспериментальными данными, полученными при снятии профилограмм с изношенных тормозных авиационных дисков [12] качественное соответствие формы рельефа авиационных дисков форме графиков па рис. 6.

Важным параметром, на который влияет неравномерное распределение контактных давлений и структура поверхностной пленки при трении, является суммарный средний износ диска за одно торможение. На рис. 8 показан средний износ за одно торможение для смоделированных выше серий торможений. Для торможений, смоделированных без учета поверхностной пленки,

средний износ примерно в 2.5 раза выше при тех же условиях, чем для торможений, учитывающих наличие пленки. В табл. 2 представлено сравнение среднего износа с учетом пленки, без учета пленки и экспериментальных данных (в соответствии с работой [5]). Экспериментальное значение среднего износа за одно торможение также близко к расчетному значению для модели, учитывающей наличие пленки. Это происходит потому, что коэффициент изнашивания, используемый при моделировании без учета пленки, измеряется при испытаниях кольцеобразных образцов, чей размер гораздо меньше (примерно в 12 раз) размера тормозного диска (хотя схема контакта применяется аналогичная [11]). На рис. 9 показана зависимость отношения интенсивности изнашивания с учетом пленки к интенсивности изнашивания без учета пленки  $I = \dot{u}_W / \dot{u}_W^*$  от геометрического параметра контакта  $S/L$ . Из графика следует, что интенсивность изнашивания с учетом пленки меньше интенсивности изнашивания без учета пленки ( $I < 1$ ) при геометрическом факторе  $S/L$ , большем 2.5 мм; рост геометрического фактора соответствует росту абсолютных размеров области контакта. Значение геометрического фактора, при котором интенсивности изнашивания равны друг другу ( $I = 1$ ), соответствует размерам области контакта для испытаний на машине трения, при которых и был определен коэффициент интенсивности изнашивания без учета влияния поверхностной пленки  $K$  [11]. Для моделируемого полноразмерного тормозного диска геометрический фактор равен 30 мм, что означает падение интенсивности изнашивания приблизительно в 3 раза по сравнению с маленьким образцом. Следует отметить, что учет наличия пленки в случае возникновения термоупругой неустойчивости приводит к нелинейной зависимости интенсивности изнашивания от контактного давления: концентрация контактных давлений в “горячем пятне” приводит к их росту с одновременным падением геометрического фактора  $S/L$ , что приводит к дополнительному росту интенсивности изнашивания. В этом случае феноменологические модели, использующие нелинейную зависимость интенсивности изнашивания от контактного давления вида (5.1), будут показывать хорошее соответствие экспериментальным данным [5]:

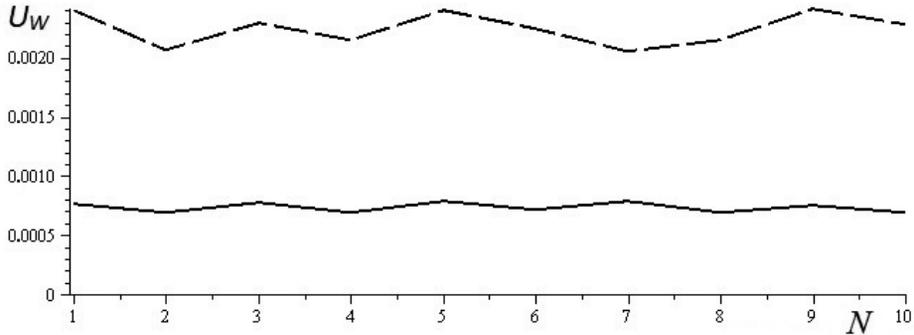
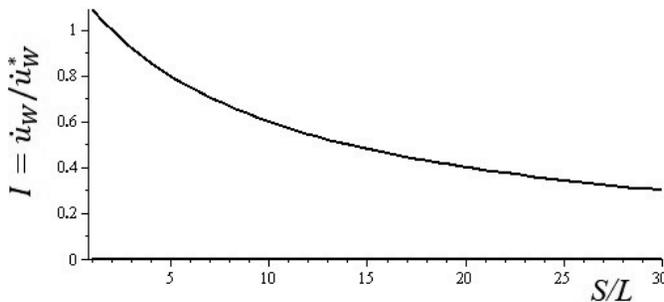
$$\dot{u}_W^* = K^* \left( \frac{p}{\tilde{p}} \right)^\alpha V, \quad \alpha > 1. \quad (5.1)$$

Однако константы в такой зависимости ( $K^*, \tilde{p}, \alpha$ ) не могут быть определены при стандартных испытаниях на малых образцах, их возможно определить только при имитационных испытаниях на образцах с близким геометрическим фактором к моделируемому узлу трения (например, на больших инерционных машинах трения).

**Заключение.** Поверхностная пленка вторичных структур может вносить значительный вклад в развитие термоупругой неустойчивости при трении высоконагруженных пар трения. Наличие поверхностной пленки значительной толщины и развитая термоупругая неустойчивость характерны для трибосопряжений с определенными геометрическими параметрами (достаточно широкая дорожка трения в сочетании с высоким отношением площади

**Таблица 2.** Средний линейный износ диска, мкм/торм

Без учета наличия поверхностной пленки	С учетом наличия поверхностной пленки	Экспериментально измеренный износ
2.3	0.68	0.1–1

**Рис. 8.** Зависимость среднего линейного износа за одно торможение  $U_w$  (мм) от номера торможения  $N$  для 10 последовательных торможений с учетом наличия пленки (сплошная линия) и без учета наличия пленки (пунктирная линия).**Рис. 9.** Зависимость отношения интенсивности изнашивания с учетом пленки к интенсивности изнашивания без учета пленки ( $I = \dot{u}_w / \dot{u}_w^*$ ) от геометрического параметра контакта  $S/L$  (мм).

контактной поверхности к ее периметру). При этом большинство стандартных экспериментальных исследований проводится на образцах малых геометрических размеров, что делает полученные таким образом данные малоприменимыми для описания процессов трения и изнашивания полноразмерных трибосопряжений. Материалы, демонстрирующие стабильные и линейные характеристики (коэффициенты трения и изнашивания) в отсутствие заметной поверхностной пленки и термоупругой неустойчивости, будут показывать сложное нелинейное поведение при их наличии. Для корректного моделирования работы подобных сопряжений наряду со стандартными модельными экспериментами на малых образцах также необходимо:

- исследовать влияние поверхностной пленки на трение и износ материалов (например, методами АСМ и СЭМ [10]);

• проводить математическое моделирование работы узла с помощью методов, учитывающих неравномерность термического расширения материала за счет фрикционного разогрева и динамику влияния поверхностной пленки на износ рабочей поверхности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, грант № 19-19-00548-П.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gadow R., Jiménez M.* Carbon fiber-reinforced carbon composites for aircraft brakes // *American Ceramic Society Bulletin*. 2019. V. 98. P. 28–34.
2. *Barber, J.R.* Thermoelastic instabilities in the sliding of conforming solids // *Proc. R. Soc. London A*. 1969. V. 312. № 1510. P. 381–394.  
<http://doi.org/10.1098/rspa.1969.0165>
3. *Graf M., Ostermeyer G.-P.* Efficient computation of thermoelastic instabilities in the presence of wear // *Wear*. 2014. V. 312. № 1–2. P. 11–20.  
<https://doi.org/10.1016/j.wear.2014.01.008>
4. *Adams G.G.* Self-excited oscillations of two elastic half-spaces sliding with a constant coefficient of friction // *ASME J. Appl. Mech.* 1995. V. 62. № 4. P. 867–872.  
<https://doi.org/10.1115/1.2896013>
5. *Shpenev A.G.* The influence of the thermoelastic instability on the wear of composite brake discs // *J. Frict. Wear*. 2021. V. 42. P. 30–37.  
<https://doi.org/10.3103/S1068366621010104>
6. *Johansson P., Marklund P., Björling M., Shi Y.* Effect of humidity and counterface material on the friction and wear of carbon fiber reinforced PTFE composites // *Tribology International*. 2021. Vol. 157. P. 106869.  
<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2021.106869>
7. *Щербачева О.О., Буковский П.О., Муравьева Т.И., Шпeneв А.Г., Кривошеев А.Ю., Каледин А.В., Шикунев С.Л., Курлов В.Н.* Исследование влияния материала контртела на трибологические характеристики углеродных композитов на основе тканевых препрегов // *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейронные исследования*. 2024. № 5. С. 58–65.
8. *Fillot N., Iordanoff I., Berthier Y.* Wear modeling and the third body concept // *Wear*. 2007. V. 262. № 7–8. P. 949–957.  
<https://doi.org/10.1016/j.wear.2006.10.011>
9. *Kubacka E., Ostrowski P.* Influence of composite structure on temperature distribution—an analysis using the finite difference method // *Materials*. 2023. V. 16. P. 5193.  
<https://doi.org/10.3390/ma16145193>
10. *Shpenev A.G., Muravyeva T.I., Shkalei I.V. et al.* Influence of the surface film (third body) on the friction and wear process of carbon-fiber composites // *J. Surf. Investig.* 2022. V. 16. P. 397–401.  
<https://doi.org/10.1134/S1027451022030326>
11. *Bukovskiy P.O., Morozov A.V., Kulakov V.V. et al.* High-temperature tribotechnical properties of carbon–carbon friction composites // *J. Frict. Wear*. 2022. V. 43, P. 322–329.  
<https://doi.org/10.3103/S1068366622050026>
12. *Shpenev A.G., Kenigfest A.M., Golubkov A.K.* Theoretical and experimental study of carbon brake discs frictionally induced thermoelastic instability // *Springer Proceedings Phys.* 2016. V. 175. P. 551–559.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-319-26324-3\\_39](https://doi.org/10.1007/978-3-319-26324-3_39)

## MODELING OF THE SURFACE FILM INFLUENCE ON THERMOELASTIC INSTABILITY DURING FRICTION OF COMPOSITE BRAKE DISCS

A. G. Shpenev<sup>a, \*</sup>

<sup>a</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS*

<sup>\*</sup>*e-mail: kel-a-kris@list.ru*

**Abstract** – The paper examines the process of thermoelastic instability occurrence during unsteady friction of anisotropic disk samples in the presence of a third body film on the friction surface. This process takes place during the operation of highly loaded braking systems (in aviation and railway transport), specialized clutches of motor vehicles and in other mechanisms. The presence of surface film leads to a decrease in surface wear simultaneously with the emergence of significant non-linearity in the wear rate. The finite difference method was used to simulate the mutual influence of wear, frictional heating, elastic deformations and the evolution of the film on the friction surface. The process of friction and wear of discs was studied taking into account the history of a series of braking events. The annular shape of surface pressures and temperatures distribution is considered. A comparison was made of the evolution of disc wear from braking to braking for the cases of the film presence, its absence, and experimentally measured wear.

**Keywords:** thermoelastis instability, wear, composite, tribology, C/C composite, composite wear, third body, composite tribology

### REFERENCES

1. *Gadow R., Jiménez M.* Carbon fiber-reinforced carbon composites for aircraft brakes // American Ceramic Society Bulletin. 2019. V. 98. P. 28–34.
2. *Barber J.R.* Thermoelastic instabilities in the sliding of conforming solids // Proc. R. Soc. London A. 1969. V. 312. № 1510. P. 381–394
3. *Graf M., Ostermeyer G.-P.* Efficient computation of thermoelastic instabilities in the presence of wear // Wear. 2014. V. 312. P. 11–20.  
<https://doi.org/10.1016/j.wear.2014.01.008>
4. *Adams G.G.* Self-excited oscillations of two elastic half-spaces sliding with a constant coefficient of friction // ASME J. Appl. Mech. 1995. V. 62. P. 867–872.  
<https://doi.org/10.1115/1.2896013>
5. *Shpenev A.G.* The influence of the thermoelastic instability on the wear of composite brake discs // J. Frict. Wear. 2021. Vol. 42. P. 30–37.  
<https://doi.org/10.3103/S1068366621010104>
6. *Johansson P., Marklund P., Björling M., Shi Y.* Effect of humidity and counterface material on the friction and wear of carbon fiber reinforced PTFE composites // Tribology International. 2021. V. 157. P. 106869.  
<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2021.106869>

7. *Shcherbakova O.O., Bukovsky P.O., Muravyeva T.I., Shpenev A.G., et al.* Study of the counterbody material influence on the tribological characteristics of carbon composites based on fabric prepregs // *J. Surf. Investig.: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2024. Accepted manuscript.
8. *Fillot N., Jordanoff I., Berthier Y.* Wear modeling and the third body concept // *Wear*. 2007. V. 262, P. 949–957.  
<https://doi.org/10.1016/j.wear.2006.10.011>
9. *Kubacka E, Ostrowski P.* Influence of Composite Structure on Temperature Distribution—An Analysis Using the Finite Difference Method // *Materials*. 2023. V. 16. P. 5193.  
<https://doi.org/10.3390/ma16145193>
10. *Shpenev A.G., Muravyeva T.I., Shkalei I.V. et al.* Influence of the Surface Film (Third Body) on the Friction and Wear Process of Carbon-Fiber Composites // *J. Surf. Investig.* 2022. V. 16, P. 397–401.  
<https://doi.org/10.1134/S1027451022030326>
11. *Bukovskiy P.O., Morozov A.V., Kulakov V.V. et al.* High-Temperature Tribotechnical Properties of Carbon–Carbon Friction Composites // *J. Frict. Wear*. 2022. V. 43, P. 322–329.  
<https://doi.org/10.3103/S1068366622050026>
12. *Shpenev A.G., Kenigfest A.M, Golubkov A.K.* Theoretical and Experimental Study of Carbon Brake Discs Frictionally Induced Thermoelastic Instability // *Springer Proceedings Phys.* 2016. V. 175. P. 551–559.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-319-26324-3\\_39](https://doi.org/10.1007/978-3-319-26324-3_39)

УДК 621.01, 62-231.1, 531.1

## КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НОВОГО ПЯТИПОДВИЖНОГО РОБОТА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ТИПА “ДЕЛЬТА”

© 2024 г. А. В. Антонов<sup>а</sup>, \*, П. А. Ларюшкин<sup>б</sup>, \*\*, А. С. Фомин<sup>а</sup>, \*\*\*

<sup>а</sup>Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва

<sup>б</sup>Московский государственный технический университет  
им. Н.Э. Баумана, Москва

\*e-mail: antonov.av@imash.ru, \*\*e-mail: pav.and.lar@gmail.com,

\*\*\*e-mail: alexey-nvkz@mail.ru

Поступила в редакцию 17.03.2024 г.

После доработки 03.04.2024 г.

Принята к публикации 07.04.2024 г.

В настоящее время различные роботы типа “Дельта” широко используются для решения многих технологических задач. В данной работе предлагается новый пятиподвижный робот параллельной структуры типа “Дельта” с четырьмя линейными и одним вращательным приводами. Основная часть статьи посвящена кинематическому анализу данного робота, а именно разработке алгоритмов решения обратной и прямой кинематических задач. Для демонстрации предлагаемых методик рассматриваются два численных примера. В первом примере решается задача обратной кинематики и определяются перемещения в приводных шарнирах, необходимые для реализации пространственной траектории выходного звена. Во втором примере показано решение прямой задачи кинематики и получены шесть различных конфигураций робота, соответствующих одному набору значений приводных координат. Предложенные алгоритмы являются основой для последующего определения скоростей и ускорений звеньев робота и его динамического анализа и могут быть адаптированы для других роботов параллельной структуры типа “Дельта”.

*Ключевые слова:* дельта-робот, параллельная структура, обратная кинематика, прямая кинематика, конфигурация робота

DOI: 10.31857/S1026351924040093, EDN: UCLGYF

**1. Введение.** Дельта-робот, разработанный Клавелем в середине 1980-х гг., является одним из самых известных и широко используемых роботов параллельной структуры. Предложенная Клавелем структура кинематических цепей в виде рычажных механизмов позволяет обеспечить поступательные движения выходного звена на достаточно больших скоростях. Конструкция дельта-робота была представлена в патенте [1] в виде устройства с четырьмя степенями свободы, в котором выходное звено реализует

движение Шёнфлиса: три кинематические цепи рычажной структуры были дополнены четвертой центральной цепью, обеспечивающей вращательную степень свободы.

Роботы типа “Дельта” имеют два типа приводов: линейные и вращательные. Системы с линейными приводами используют в качестве приводных звеньев ползуны [2, 3] с горизонтальными, вертикальными или наклонными направляющими [4]. Роботы типа “Дельта” с вращательными приводами также могут иметь наклонные оси приводных шарниров. Например, в работе [5] предложен робот NUWAR — робот типа “Дельта” с наклонными осями приводных шарниров; такая конструкция способствует увеличению размеров рабочей зоны по сравнению с обычным дельта-роботом. В патенте [6] представлена другая конструкция, в которой данные оси переориентированы и смещены. В статье [7] предложен оригинальный робот типа “Дельта”, использующий в каждой кинематической цепи тросовую систему вместо параллелограммного механизма.

Уникальная конструкция дельта-робота стала основой для множества похожих разработок. Среди них можно выделить четырехподвижный робот типа “Дельта” с одинаковыми симметрично расположенными кинематическими цепями [8]. Выходное звено данного робота исполнено в виде рычажного механизма в форме буквы Н. Для увеличения рабочей зоны робота и исключения особых положений был разработан другой вариант — робот 14 с линейными и вращательными приводами [9]. В этом роботе конструкция выходного звена была изменена путем замены вращательных шарниров и шестерен на поступательные шарниры и реечно-шестерную передачу. Продолжением данных исследований является работа [10], в которой предложен новый робот Par4 с выходным звеном в форме параллелограмма, которое может вращаться на  $\pm 180^\circ$ . По сравнению с оригинальной моделью дельта-робота [1], конструкция Par4 выглядит более надежной и перспективной для практических применений.

Существуют также модели роботов типа “Дельта” с другим числом степеней свободы, например двухподвижный плоский робот типа “Дельта”, обеспечивающий выходному звену два линейных перемещения [11]. В работе [12] предложен пятиподвижный робот типа “Дельта” с гибридной структурой, в котором к выходному звену прикреплен модуль, обеспечивающий ему две дополнительные вращательные степени свободы. В статье [13] представлено шестиподвижное задающее устройство Delthaptic, разработанное на основе двух дельта-роботов и используемое для дистанционного управления движением. Другое шестиподвижное устройство с конструкцией типа “Дельта” показано в работе [14]. В данном устройстве дельта-робот дополнен двухподвижным пятизвенным механизмом карданного подвеса и одноподвижным вращательным модулем.

Настоящая статья посвящена исследованию роботов типа “Дельта” с линейными приводами, в частности кинематическому анализу нового пятиподвижного робота параллельной структуры. Данный анализ заключается в формировании алгоритмов решения обратной и прямой задач кинематики. Обратная задача состоит в определении перемещений в приводных шарнирах (приводных координат), необходимых для реализации заданной траектории

движения выходного звена робота. Решение этой задачи является основой последующих этапов кинематического исследования робота, таких как анализ рабочих зон, скоростей и ускорений звеньев, а также последующего анализа динамики. Кроме того, решение обратной задачи кинематики закладывается непосредственно в систему управления роботом. В свою очередь, решение прямой задачи кинематики состоит в определении конфигурации выходного звена робота согласно заданным перемещениям в приводных шарнирах. Решение данной задачи может быть использовано при анализе рабочих зон робота, составлении уравнений его движения в пространстве приводных координат, а также для оценки конфигурации выходного звена на основе данных датчиков, которые обычно размещаются в приводных шарнирах. Это необходимо при разработке алгоритмов управления, отслеживающих траекторию движения выходного звена.

Статья имеет следующую структуру. Раздел 2 содержит описание структуры нового пятиподвижного робота типа “Дельта” и принципов его работы. В разделе 3 представлен алгоритм решения обратной задачи кинематики в аналитическом виде. Раздел 4 посвящен разработке алгоритма, позволяющего вычислить все возможные решения прямой задачи кинематики. В разделе 5 приведены примеры решения обратной и прямой задач кинематики согласно разработанному методикам. Раздел 6 содержит обсуждение некоторых особенностей предложенных алгоритмов. Раздел 7 подводит итоги проведенной работы и указывает направления будущих исследований.

**2. Структура робота.** Рассмотрим семейство роботов типа “Дельта” с линейными приводами, выходное звено которых имеет от трех до пяти степеней свободы. На рис. 1 показано развитие структуры этих роботов. Робот на рис. 1, а включает три одинаковые кинематические цепи I типа —  $\underline{P}(SS)_2$ ; каждая цепь ограничивает вращение подвижной платформы вокруг оси, перпендикулярной плоскости соответствующего параллелограмма, оставляя платформе три поступательные степени свободы<sup>1</sup>. Для получения четырех степеней свободы заменим одну  $\underline{P}(SS)_2$  цепь на две цепи II типа —  $\underline{PSS}$  (рис. 1, б). Данная замена исключает одно ограничение на вращение, и теперь подвижная платформа робота имеет четыре степени свободы: три поступательные и одну вращательную вокруг любой оси, параллельной линии пересечения плоскостей двух параллелограммов. Новая структура с пятью степенями свободы, предлагаемая и исследуемая в данной работе, имеет центральную цепь III типа —  $\underline{RUPUR}$  (рис. 1, в). Эта цепь не накладывает связей на движение платформы и наделяет выходное звено дополнительной вращательной степенью свободы вокруг оси второго вращательного шарнира.

Настоящая статья посвящена исследованию пятиподвижного робота, поэтому рассмотрим его структуру более подробно. На рис. 2, а показана кинематическая схема робота с обозначением звеньев. Робот включает неподвижное звено (основание) 1 и подвижную платформу 10, соединенные пятью

---

<sup>1</sup> Обозначения P, R, U и S соответствуют поступательным, вращательным, универсальным и сферическим шарнирам; подчеркивание означает, что шарнир является приводным.

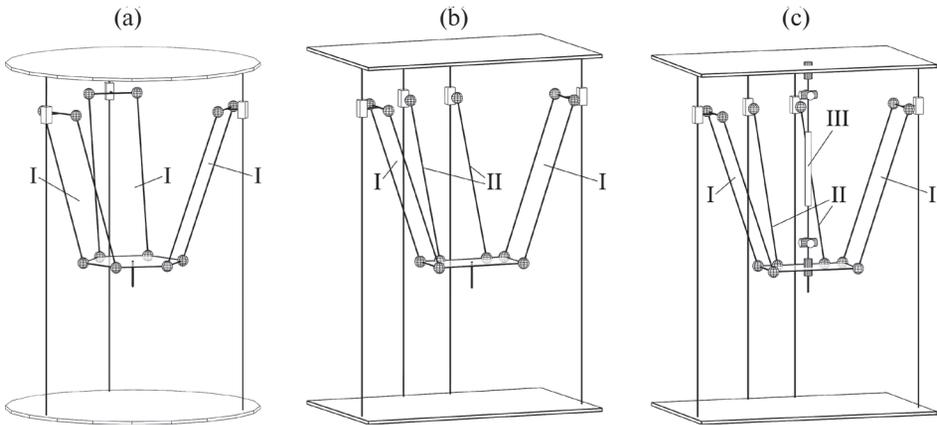


Рис. 1. Развитие роботов параллельной структуры типа “Дельта”: (а) исходная структура с тремя степенями свободы [15]; (б) измененная структура с четырьмя степенями свободы [16]; (с) новая структура с пятью степенями свободы.

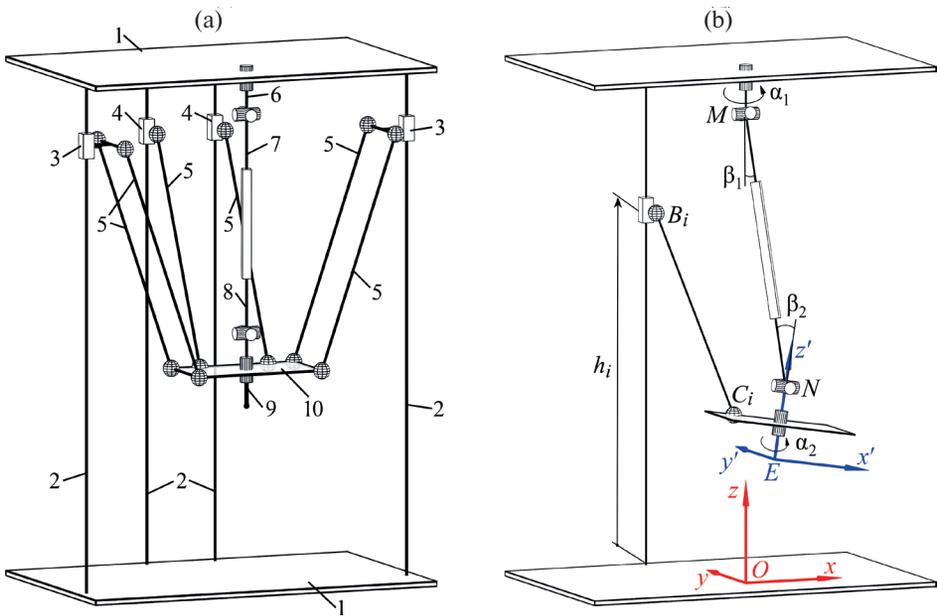


Рис. 2. Исследуемый пятиподвижный робот параллельной структуры типа “Дельта”: (а) обозначения звеньев; (б) системы координат и кинематические обозначения.

кинематическими цепями: четыре цепи расположены по периметру (две цепи I типа и две цепи II типа) и одна цепь III типа установлена в центре. Цепи I типа состоят из линейных направляющих 2, установленных на основании 1, ползунов 3 и штанг 5. Цепи II типа состоят из линейных направляющих 2, ползунов 4 и штанг 5. Центральная цепь III типа включает вилку 6, кулису 7,

камень 8 и выходное звено 9. Звенья 3, 4 и 6 являются приводными. Звенья 2 и 3, 2 и 4, 7 и 8 образуют поступательные шарниры; звенья 3 и 5, 4 и 5, 5 и 10 образуют сферические шарниры; звенья 1 и 6, 9 и 10 образуют вращательные шарниры; звенья 6 и 7, 8 и 9 образуют универсальные шарниры. Кроме того, звенья 3, 5 и 10 каждой цепи II типа образуют параллелограмм.

При такой структуре вращения выходного звена 9 развязано от движения платформы 10 с четырьмя степенями свободы. Две цепи I типа и две цепи II типа контролируют три поступательные степени свободы платформы и ее наклон, а центральная цепь III типа обеспечивает вращение выходного звена относительно платформы. Такая структура робота упрощает его управление, что может быть полезно на практике. Возможные применения робота включают аддитивные технологии, обработку деталей машин и другие операции, требующие пяти степеней свободы и значительных линейных перемещений в одном направлении.

**3. Обратная кинематика.** Решение обратной задачи кинематики состоит в определении относительных положений звеньев в приводных шарнирах при заданной конфигурации выходного звена. Первые включают перемещения  $h_i$  в линейных приводах и угол поворота  $\alpha_1$  в приводе центральной цепи, где  $i = 1, \dots, 4$  — порядковый номер кинематической цепи (рис. 2, б). Конфигурацию выходного звена можно описать при помощи декартовых координат  $x_E$ ,  $y_E$  и  $z_E$  точки  $E$ , выраженных относительно неподвижной системы координат  $Oxyz$ , угла  $\varphi_y$ , определяющего ориентацию подвижной платформы, и угла  $\alpha_2$ , определяющего ориентацию выходного звена относительно платформы. Без потери общности предположим, что точка  $E$  находится на оси вращательного шарнира выходного звена. Алгоритм решения обратной задачи кинематики имеет следующий вид.

Введем систему координат  $Ex'y'z'$ , связанную с подвижной платформой в точке, которая совпадает с точкой  $E$  выходного звена (рис. 2, б), так что системы координат  $Oxyz$  и  $Ex'y'z'$  имеют одинаковую ориентацию при  $\varphi_y = 0$ . Обозначим  $x'_{Ci}$ ,  $y'_{Ci}$  и  $z'_{Ci}$  координаты центра сферического шарнира платформы (точка  $C_i$ ) в этой системе координат (для кинематических цепей с параллелограммами мы можем выбрать  $C_i$  как среднюю точку между смежными сферическими шарнирами). Мы можем вычислить координаты  $x_{Ci}$ ,  $y_{Ci}$  и  $z_{Ci}$  той же точки относительно системы координат  $Oxyz$  следующим образом:

$$\begin{bmatrix} x_{Ci} \\ y_{Ci} \\ z_{Ci} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\varphi_y) & 0 & \sin(\varphi_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi_y) & 0 & \cos(\varphi_y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{Ci} \\ y'_{Ci} \\ z'_{Ci} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Далее запишем уравнение, связывающее координаты в выражении (3.1) с координатами  $x_{Bi}$ ,  $y_{Bi}$  и  $z_{Bi}$  центра сферического шарнира ползуна (точка  $B_i$ ) и постоянной длиной  $l_{BiCi}$  штанги  $B_iC_i$ :

$$l_{BiCi}^2 = (x_{Ci} - x_{Bi})^2 + (y_{Ci} - y_{Bi})^2 + (z_{Ci} - z_{Bi})^2. \quad (3.2)$$

Наконец, полагая  $z_{Bi} = h_i$  и учитывая то, что координаты  $x_{Bi}$  и  $y_{Bi}$  известны из геометрии робота, мы можем найти приводную координату  $i$ -й цепи:

$$h_i = \pm \sqrt{l_{BiCi}^2 - (x_{Ci} - x_{Bi})^2 - (y_{Ci} - y_{Bi})^2} + z_{Ci}. \quad (3.3)$$

В приведенном выше выражении знак “–” соответствует конфигурации с ползуном ниже подвижной платформы, а знак “+” означает, что ползун находится над ней.

Остается определить угол поворота  $\alpha_1$  привода, который передает свое вращение выходному звену через центральную кинематическую цепь с универсальными шарнирами. Пусть  $\beta_1$  — угол между осью поступательной пары и валом привода, а  $\beta_2$  — угол между этой осью и осью вращательного шарнира выходного звена (рис. 2, б). Данные углы связаны следующим образом [17]:

$$\operatorname{tg}(\alpha_2) = \frac{\cos(\beta_2)}{\cos(\beta_1)} \operatorname{tg}(\alpha_1). \quad (3.4)$$

Для нахождения углов  $\beta_1$  и  $\beta_2$  сначала вычислим координаты точки  $N$  (центра универсального шарнира, установленного на подвижной платформе), используя соотношение, аналогичное выражению (3.1). После этого угол  $\beta_1$  можно посчитать как угол между осью  $Oz$  и прямой  $NM$ , а угол  $\beta_2$  — как угол между прямыми  $NM$  и  $EN$ , где точка  $M$  — центр универсального шарнира, установленного на основании. Стоит отметить, что угол  $\beta_2$  зависит от значения угла  $\varphi_y$ . На практике центральная цепь может быть изготовлена с применением шарниров равных угловых скоростей, так что угол  $\alpha_1$  будет всегда равен углу  $\alpha_2$ .

**4. Прямая кинематика.** Решение прямой задачи кинематики состоит в определении конфигурации выходного звена при заданных перемещениях в приводных шарнирах, то есть в нахождении параметров  $x_E, y_E, z_E, \varphi_y$  и  $\alpha_2$  при известных значениях  $h_i, i = 1, \dots, 4$ , и  $\alpha_1$ . В п. 2 было показано, что движение центральной цепи не влияет на движение платформы. Поэтому сначала рассмотрим решение прямой задачи кинематики для подвижной платформы при заданных значениях  $h_i$ .

Рассмотрим соотношение (3.2). Данное выражение представляет собой систему четырех нелинейных и взаимосвязанных уравнений относительно четырех переменных:  $x_E, y_E, z_E$  и  $\varphi_y$ . Без потери общности мы можем выбрать координаты точки  $C_4$  в качестве переменных вместо координат точки  $E$ : это позволит упростить последующие расчеты. Обозначая эти переменные  $x, y$  и  $z$ , мы можем переписать уравнение (3.2) следующим образом:

$$x^2 + y^2 + z^2 + a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0, \quad (4.1)$$

где коэффициенты  $a_i, c_i$  и  $d_i$  при  $i = 1, 2, 3$  линейно зависят от  $\cos(\varphi_y)$  и  $\sin(\varphi_y)$ ; коэффициенты  $a_4, c_4$  и  $d_4$  постоянны и не зависят от  $\varphi_y$ ; коэффициенты  $b_i$  постоянны для всех  $i = 1, \dots, 4$ .

Далее вычтем уравнение (4.1) для  $i = 4$  из трех оставшихся уравнений и получим систему из трех линейных уравнений относительно переменных  $x, y$  и  $z$ , которую можно представить в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \\ a_2 - a_4 & b_2 - b_4 & c_2 - c_4 \\ a_3 - a_4 & b_3 - b_4 & c_3 - c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_4 - d_1 \\ d_4 - d_2 \\ d_4 - d_3 \end{bmatrix} \text{ или } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (4.2)$$

Пусть  $\mathbf{A}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , обозначает матрицу  $\mathbf{A}$ , в которой  $i$ -й столбец заменен вектором  $\mathbf{b}$ . С учетом данных обозначений, мы можем решить систему уравнений (4.2), используя метод Крамера [18, с. 207]:

$$x = F_1 / F_0, \quad y = F_2 / F_0, \quad z = F_3 / F_0, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} F_0 = \det(\mathbf{A}) &= \sum_{\substack{j,k=0,1,2 \\ j+k \leq 2}} f_{0jk} c_\varphi^j s_\varphi^k, & F_1 = \det(\mathbf{A}_1) &= \sum_{\substack{j,k=0,1,2 \\ j+k \leq 2}} f_{1jk} c_\varphi^j s_\varphi^k, \\ F_2 = \det(\mathbf{A}_2) &= \sum_{\substack{j,k=0,\dots,3 \\ j+k \leq 3}} f_{2jk} c_\varphi^j s_\varphi^k, & F_3 = \det(\mathbf{A}_3) &= \sum_{\substack{j,k=0,1,2 \\ j+k \leq 2}} f_{3jk} c_\varphi^j s_\varphi^k. \end{aligned} \quad (4.4)$$

В приведенных выше выражениях коэффициенты  $f_{0jk}$ ,  $f_{1jk}$ ,  $f_{2jk}$  и  $f_{3jk}$  имеют известные и постоянные значения;  $c_\varphi$  и  $s_\varphi$  — сокращенные обозначения  $\cos(\varphi_y)$  и  $\sin(\varphi_y)$ . Можно видеть, что  $F_0$ ,  $F_1$  и  $F_3$  — полиномы второй степени относительно  $c_\varphi$  и  $s_\varphi$ , тогда как  $F_2$  — полином третьей степени, поскольку второй столбец матрицы  $\mathbf{A}$  имеет постоянные элементы, а два других столбца линейно зависят от  $c_\varphi$  и  $s_\varphi$ .

Далее подставим выражение (4.3) в уравнение (4.1) для  $i = 4$ . Предположим, что  $F_0 \neq 0$  (случай  $F_0 = 0$  будет рассмотрен в п. 6). Тогда уравнение примет вид:

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + a_4 F_1 F_0 + b_4 F_2 F_0 + c_4 F_3 F_0 + d_4 F_0^2 = 0,$$

что при подстановке выражений (4.4) эквивалентно следующему соотношению:

$$\sum_{\substack{j,k=0,\dots,6 \\ j+k \leq 6}} g_{jk} c_\varphi^j s_\varphi^k = 0, \quad (4.5)$$

где коэффициенты  $g_{jk}$  имеют известные и постоянные значения.

Выражение (4.5) представляет собой полиномиальное уравнение шестой степени относительно  $c_\varphi$  и  $s_\varphi$ . Преобразуем его в уравнение относительно одной переменной  $t$ , используя универсальную тригонометрическую подстановку:

$$c_\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad s_\varphi = \frac{2t}{1+t^2}, \quad t = \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_y}{2}\right). \quad (4.6)$$

Подставляя выражения (4.6) в (4.5), после преобразований получим:

$$(t^2 + 1)^2 \sum_{j=0}^8 m_j t^j = 0, \quad (4.7)$$

где коэффициенты  $m_j$  имеют известные и постоянные значения.

Второй множитель в выражении (4.7) представляет собой уравнение восьмой степени, решения которого соответствуют восьми различным значениям угла  $\varphi$ . Определив  $\varphi$ , можно вычислить параметры  $F_0, \dots, F_3$  и найти переменные  $x, y$  и  $z$  из уравнения (4.3). Таким образом, было получено решение прямой задачи кинематики для подвижной платформы<sup>2</sup>. Оставшийся угол  $\alpha_2$  можно найти из соотношения (3.4).

**5. Примеры.** Для демонстрации предложенных теоретических алгоритмов рассмотрим два примера кинематического анализа робота со следующими параметрами (в метрах):

1. Длины звеньев:  $l_{B_i C_i} = 0.30$  для всех  $i = 1, \dots, 4$ .
2. Координаты точек  $B_i$  и  $M$  относительно системы координат  $Oxyz$ :  $x_{B_1} = 0.15, y_{B_1} = 0, x_{B_2} = 0.04, y_{B_2} = 0.19, x_{B_3} = -0.04, y_{B_3} = 0.19, x_{B_4} = -0.15, y_{B_4} = 0, z_{B_1} = \dots = z_{B_4} = 0, x_M = 0, y_M = 0, z_M = 0.65$ .
3. Координаты точек  $C_i$  и  $N$  относительно системы координат  $Ex'y'z'$ :  $x'_{C_1} = 0.08, y'_{C_1} = 0, x'_{C_2} = 0.04, y'_{C_2} = 0.04, x'_{C_3} = -0.04, y'_{C_3} = 0.04, x'_{C_4} = -0.08, y'_{C_4} = 0, z'_{C_1} = \dots = z'_{C_4} = 0.05, x'_N = 0, y'_N = 0, z'_N = 0.10$ .

*5.1. Пример решения обратной задачи кинематики.* Предположим, что точка  $E$  выходного звена должна следовать по спирали с  $n$  витками, обернутыми вокруг тора с радиусами направляющей и образующей окружностей  $R$  и  $r$  соответственно, расположенного на высоте  $z_0$  над плоскостью  $Oxy$  (рис. 3). Пусть также подвижная платформа меняет свой угол наклона от  $-\varphi_0$  до  $+\varphi_0$ , в то время как выходное звено совершает один полный оборот. Данную траекторию можно задать параметрическим способом с помощью параметра  $s \in [0, 1]$  следующим образом:

$$\begin{aligned}x_E(s) &= (R + r \cos(2\pi ns)) \cos(2\pi s), & \varphi_y(s) &= \varphi_0(2s - 1), \\y_E(s) &= (R + r \cos(2\pi ns)) \sin(2\pi s), & \alpha_2(s) &= 2\pi s, \\z_E(s) &= z_0 + r \sin(2\pi ns).\end{aligned}$$

Для примера положим  $n = 15, R = 0.1$  м,  $r = 0.025$  м,  $z_0 = 0.2$  м и  $\varphi_0 = \pi/6$  рад. На рис. 4 приведено решение обратной задачи кинематики, полученное предложенным алгоритмом. Высокочастотные колебания в координатах  $h_1, \dots, h_4$  соответствуют движению по виткам спирали, в то время как низкочастотные колебания соответствуют движению вокруг оси тора. Как и ожидалось, угол  $\alpha_1$  изменяется от 0 до  $2\pi$  рад, что соответствует полному обороту выходного звена. Данное изменение имеет практически линейный характер из-за небольших изменений углов  $\beta_1$  и  $\beta_2$  согласно выражению (3.4).

*5.2. Пример решения прямой задачи кинематики.* Во втором примере рассмотрим решение прямой задачи кинематики. Сначала предположим, что нужно решить обратную задачу кинематики для следующих (произвольно выбранных) значений параметров, определяющих конфигурацию выходного звена:

<sup>2</sup> Файл программы MATLAB, реализующей представленный алгоритм решения прямой задачи кинематики, находится в свободном доступе онлайн по ссылке: <http://doi.org/10.17632/j6c63s927b.1>

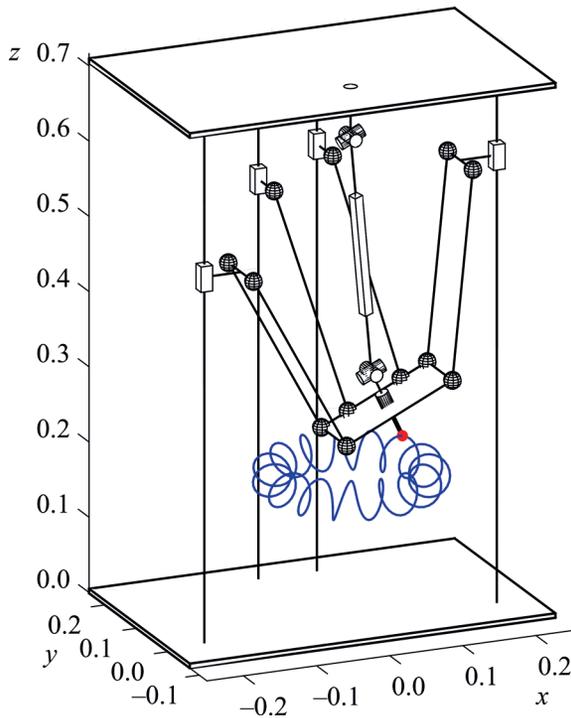


Рис. 3. Траектория движения выходного звена робота при решении обратной задачи кинематики (координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  в метрах).

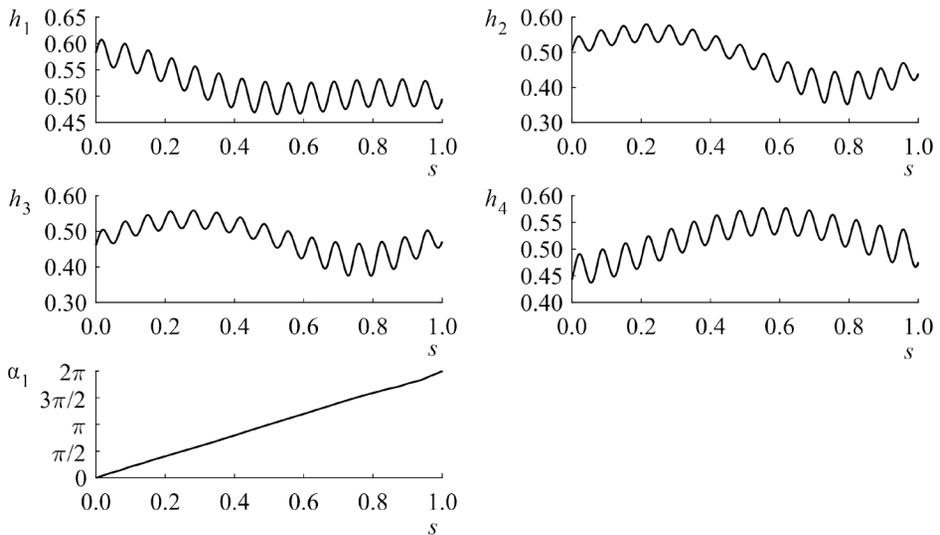


Рис. 4. Решение обратной задачи кинематики (параметры  $h_1, \dots, h_4$  в метрах,  $\alpha_1$  в радианах).

$x_E = 0.0121$  м,  $y_E = -0.0732$  м,  $z_E = 0.1857$  м,  $\varphi_y = 0.1594$  рад,  $\alpha_2 = 0.5123$  рад.

Используя алгоритм, представленный в п. 3, можно получить следующие значения приводных координат, соответствующие данной конфигурации (с точностью до десятитысячных):

$h_1 = 0.5088$  м,  $h_2 = 0.4282$  м,  $h_3 = 0.4408$  м,  $h_4 = 0.5241$  рад,  $\alpha_1 = 0.5231$  рад.

Далее решим задачу прямой кинематики для указанных выше значений приводных координат. С помощью алгоритма из п. 4 были найдены шесть различных действительных решений уравнения (4.7), которые соответствуют шести различным конфигурациям робота, представленным в табл. 1 и показанным на рис. 5. Можно видеть, что решение 3 совпадает со значениями, использованными в обратной кинематике, — это подтверждает корректность предложенного алгоритма. Решения 5 и 6 соответствуют перевернутому положению платформы, решения 2 и 5 — расположению платформы над ползунами. Три данные конфигурации, скорее всего, будут недостижимы на практике из-за конструктивных особенностей робота, но оставшиеся конфигурации 1, 3 и 4 возможны, если сферические шарниры допускают большие угловые отклонения или если вместо них используются универсальные шарниры.

**Таблица 1.** Решения прямой задачи кинематики

№ решения	1	2	3	4	5	6
$x_E$ , м	-0.0441	-0.0230	0.0121	0.0431	-0.0187	-0.0046
$y_E$ , м	-0.1079	0.1974	-0.0732	0.1027	0.0475	-0.1334
$z_E$ , м	0.3446	0.6810	0.1857	0.3184	0.7538	0.4278
$\varphi_y$ , рад	-1.8149	0.1588	0.1594	1.6591	2.9246	3.1343
$\alpha_2$ , рад	-0.3623	0.5138	0.5123	-0.2837	-0.4683	-0.5230

**6. Обсуждение результатов.** Алгоритм решения обратной задачи кинематики является достаточно простым и имеет аналитический вид. Необходимо лишь проверить, что рассматриваемая конфигурация робота принадлежит его рабочей зоне, так что уравнение (3.3) имеет действительное решение для каждой кинематической цепи. С другой стороны, предложенный алгоритм решения прямой задачи кинематики может быть вычислительно затратным из-за трудоемкости расчетов, необходимых для получения уравнения (4.7) и его последующего решения. В связи с этим прямую задачу кинематики становится целесообразно решать численно, например применяя метод Ньютона для уравнения (3.2). В данном случае представленный в п. 4 алгоритм необходимо использовать только один раз, чтобы правильно выбрать первое начальное приближение для численного метода. Отметим несколько особенностей предложенного алгоритма.

При выводе выражения (4.5) было сделано предположение, что  $F_0 \neq 0$ . В этом случае можно найти различные значения угла  $\varphi_y$  согласно разработанному алгоритму. Параметр  $F_0$  зависит от данного угла, и мы не можем гарантировать, что он отличен от нуля для каждого полученного решения.

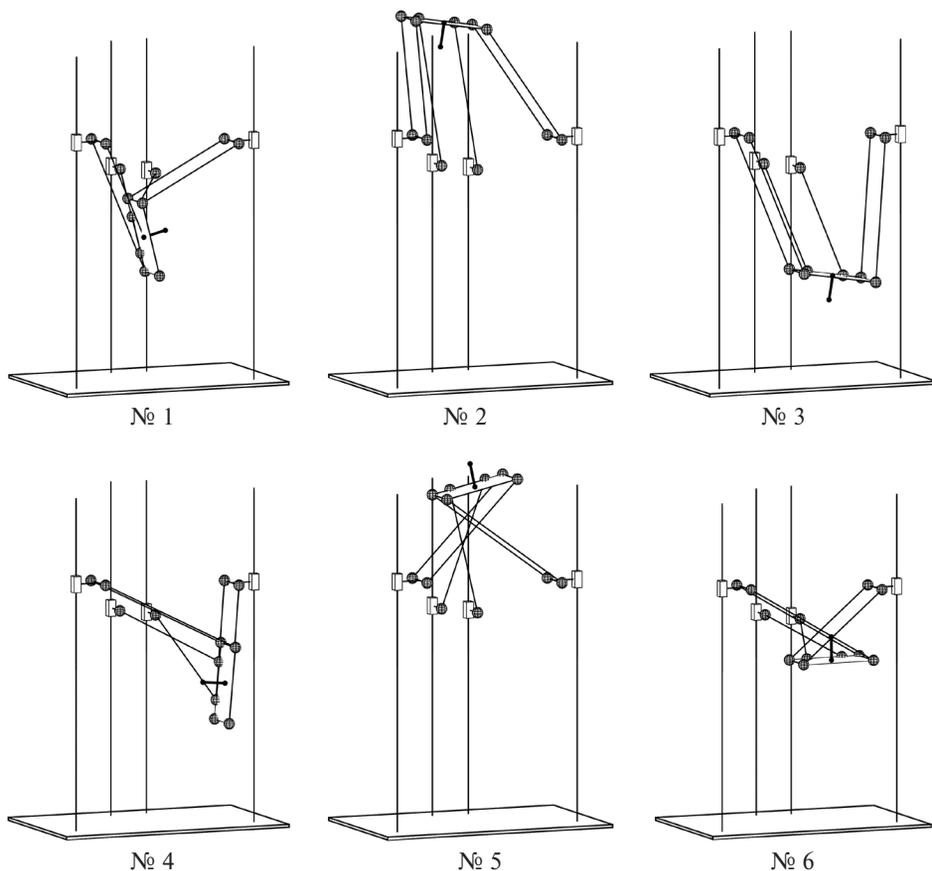


Рис. 5. Шесть конфигураций робота, соответствующие шести различным решениям прямой задачи кинематики (табл. 1); центральная цепь скрыта для ясности.

Если  $F_0 = 0$  для некоторого угла  $\varphi_y$ , использовать уравнение (4.2) для вычисления переменных  $x$ ,  $y$  и  $z$  нельзя, поскольку матрица  $\mathbf{A}$  вырождается и ее ранг уменьшается. Для решения задачи прямой кинематики необходимо рассмотреть два независимых линейных уравнения из системы (4.2) и квадратное уравнение (4.1): в результате можно получить одно квадратное уравнение относительно одной переменной, исключая две другие с помощью линейных уравнений. В этом случае мы определим две различные конфигурации подвижной платформы для одного значения угла  $\varphi_y$ . Например, при “симметричной” геометрии робота, как рассматривалось в примерах выше, и при  $h_1 = \dots = h_4$  существует решение  $\varphi_y = 0$  (подвижная платформа горизонтальна), при котором  $F_0 = 0$ . Используя вышеупомянутый подход, мы получим две конфигурации подвижной платформы для данного угла: одна над ползунами, а другая под ними. Если же ранг матрицы  $\mathbf{A}$  уменьшается на два, становится невозможно выбрать три независимых уравнения для нахождения переменных

$x$ ,  $y$  и  $z$ . В результате задача прямой кинематики может иметь бесконечное количество решений, а робот, скорее всего, находится в особом (сингулярном) положении, соответствующем потере управляемости, — данный анализ выходит за рамки текущей работы.

Также нельзя утверждать, что полученное в выражении (4.7) полиномиальное уравнение восьмой степени имеет восемь действительных решений, соответствующих восьми различным конфигурациям робота. После ряда исследований с различными геометрическими параметрами робота и различными значениями приводных координат мы получили максимум шесть действительных решений, и один из примеров был представлен в предыдущем разделе. Кроме того, даже если уравнение (4.7) имеет восемь действительных решений, нельзя гарантировать, что  $F_0 \neq 0$  для всех решений. Исследование данного случая и определение максимально возможного количества конфигураций робота, соответствующих одному набору значений приводных координат, также выходит за рамки настоящей статьи, но представляет интерес для будущих исследований.

**Заключение.** В статье представлен новый пятиподвижный робот параллельной структуры типа “Дельта”, выходное звено которого имеет три поступательные и две вращательные степени свободы. Вращательные степени свободы расширяют область возможных применений робота по сравнению с классическим трехподвижным дельта-роботом. Для исследуемого робота получен простой алгоритм решения обратной задачи кинематики в аналитическом виде. В свою очередь, анализ прямой кинематики показал, что данная задача может иметь несколько различных решений, соответствующих различным конфигурациям робота для одного и того же набора значений приводных координат. Согласно численному примеру, можно получить шесть действительных решений прямой задачи кинематики и шесть соответствующих им конфигураций робота, однако определение максимально возможного числа таких конфигураций является предметом будущих исследований.

Разработанные алгоритмы решения обратной и прямой задач кинематики являются основой последующих этапов кинематического анализа, включающих построение рабочих зон, определение скоростей, ускорений звеньев и особых положений робота, а также фундаментом динамического анализа, заключающегося в составлении уравнений движения. Решение перечисленных задач позволит спроектировать реальную робототехническую систему, подобрать параметры приводов и решить проблему управления движением. Предложенные в статье методы решения кинематических задач могут быть также адаптированы к другим роботам параллельной структуры.

**Финансирование работы.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-79-10409, <https://rscf.ru/project/21-79-10409/>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Clavel R.* Device for displacing and positioning an element in space. 1987. International Patent. № WO 87/03528. <https://patents.google.com/patent/WO1987003528A1>

2. Zobel P.B., Di Stefano P., Raparelli T. The design of a 3 dof parallel robot with pneumatic drives // Proceedings of the 27th International Symposium on Industrial Robots. Milan. 1996. P. 707–710. <https://scholar.google.com/scholar?cluster=3056625163939636285>
3. Wurst K.-H. LINAPOD – Machine tools as parallel link systems based on a modular design // Parallel Kinematic Machines. London: Springer. 1999. P. 377–394. [https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0885-6\\_27](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0885-6_27)
4. Bouri M., Clavel R. The linear Delta: developments and applications // Proceedings of the ISR 2010 (41st International Symposium on Robotics) and ROBOTIK 2010 (6th German Conference on Robotics). Munich: VDE. 2010. P. 1–8. <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/5756938>
5. Miller K. Synthesis of a manipulator of the new UWA robot // Proceedings of the Australian Conference on Robotics and Automation. Brisbane. 1999. P. 228–233. <https://scholar.google.com/scholar?cluster=8043028388201036794>
6. De Bie P.P. Load handling robot with three single degree of freedom actuators. 2014. US Patent Application. № 2014/0230594 A1. <https://patents.google.com/patent/US20140230594A1>
7. Tsumaki Y., Eguchi H., Tadakuma R. A novel Delta-type parallel mechanism with wire-pulleys // Proceedings of the 2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Vilamoura-Algarve: IEEE. 2012. P. 1567–1572. <https://doi.org/10.1109/IROS.2012.6385588>
8. Pierrot F., Company O. H4: a new family of 4-DOF parallel robots // Proceedings of the 1999 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. Atlanta: IEEE. 1999. P. 508–513. <https://doi.org/10.1109/AIM.1999.803222>
9. Krut S., Benoit M., Ota H., Pierrot F. I4: a new parallel mechanism for Scara motions // Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Taipei: IEEE. 2003. V. 2. P. 1875–1880. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2003.1241868>
10. Nabat V., De la O Rodriguez M., Company O. et al. Par4: very high speed parallel robot for pick-and-place // Proceedings of the 2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Edmonton: IEEE. 2005. P. 553–558. <https://doi.org/10.1109/IROS.2005.1545143>
11. Huang T., Li Z., Li M. et al. Conceptual design and dimensional synthesis of a novel 2-DOF translational parallel robot for pick-and-place operations // J. Mech. Des. 2004. V. 126. № 3. P. 449–455. <https://doi.org/10.1115/1.1711822>
12. Wu Y., Yang Z., Fu Z. et al. Kinematics and dynamics analysis of a novel five-degrees-of-freedom hybrid robot // Int. J. Adv. Rob. Sys. 2017. V. 14. № 3. <https://doi.org/10.1177/1729881417716634>
13. Vulliez M., Zeghloul S., Khatib O. Design strategy and issues of the Delthaptic, a new 6-DOF parallel haptic device // Mech. Mach. Theory. 2018. V. 128. P. 395–411. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2018.06.015>
14. Uchiyama M., Tsumaki Y., Yoon W.-K. Design of a compact 6-DOF haptic device to use parallel mechanisms // Robotics Research. Berlin-Heidelberg: Springer. 2007. P. 145–162. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-48113-3\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-540-48113-3_14)
15. Clavel R. Conception d'un robot parallèle rapide à 4 degrés de liberté: PhD thesis / EPFL. Lausanne. 1991. <https://doi.org/10.5075/epfl-thesis-925>

16. *Laryushkin P., Fomin A., Antonov A.* Kinematic and singularity analysis of a 4-DOF Delta-type parallel robot // *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* 2023. V. 45. № 4. P. 218. <https://doi.org/10.1007/s40430-023-04128-7>
17. *Wang G., Qi Z.* Approximate determination of the joint reaction forces in the drive system with double universal joints // *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.* 2017. V. 232. № 7. P. 1191–1207. <https://doi.org/10.1177/0954406217702681>
18. *Strang G.* Introduction to Linear Algebra. 6th ed. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press. 2023. <https://scholar.google.com/scholar?cluster=13285834974906872344>

## KINEMATIC ANALYSIS OF A NOVEL 5-DOF DELTA-TYPE PARALLEL ROBOT

**A. V. Antonov<sup>a, \*</sup>, P. A. Laryushkin<sup>b, \*\*</sup>, A. S. Fomin<sup>a, \*\*\*</sup>**

<sup>a</sup> *Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow*

<sup>b</sup> *Bauman Moscow State Technical University, Moscow*

<sup>\*</sup>*e-mail: antonov.av@imash.ru, \*\*e-mail: pav.and.lar@gmail.com,*

<sup>\*\*\*</sup>*e-mail: alexey-nvkz@mail.ru*

**Abstract** – Nowadays, various Delta-type robots are widely used in many technological fields. In this work, we propose a novel 5-DOF Delta-type parallel robot with four linear and one rotational actuators. The major part of the article is devoted to the kinematic analysis of the robot, including solving its inverse and forward kinematic problems. To demonstrate the developed techniques, we consider two numerical examples. In the first one, we solve the inverse kinematics and determine the actuator displacements required to realize a spatial trajectory of the output link. The forward kinematic analysis, presented in the second example, results in six different assembly modes of the robot for the given set of the actuator displacements. The proposed algorithms represent the basis for subsequent velocity, acceleration, and dynamic analysis of the robot, and they can be adapted to other Delta-type parallel robots.

*Keywords:* Delta robot, parallel structure, inverse kinematics, forward kinematics, assembly mode

## REFERENCES

1. *Clavel R.* Device for displacing and positioning an element in space. 1987. International Patent, № WO 87/03528. <https://patents.google.com/patent/WO1987003528A1>
2. *Zobel P.B., Di Stefano P., Raparelli T.* The design of a 3 dof parallel robot with pneumatic drives // *Proceedings of the 27th International Symposium on Industrial Robots. Milan.* 1996. P. 707–710. <https://scholar.google.com/scholar?cluster=3056625163939636285>
3. *Wurst K.-H.* LINAPOD – Machine tools as parallel link systems based on a modular design // *Parallel Kinematic Machines.* London: Springer. 1999. P. 377–394. [https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0885-6\\_27](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0885-6_27).

4. *Bouri M., Clavel R.* The linear Delta: developments and applications // Proceedings of the ISR 2010 (41st International Symposium on Robotics) and ROBOTIK 2010 (6th German Conference on Robotics). Munich: VDE. 2010. P. 1–8.  
<https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/5756938>
5. *Miller K.* Synthesis of a manipulator of the new UWA robot // Proceedings of the Australian Conference on Robotics and Automation. Brisbane. 1999. P. 228–233.  
<https://scholar.google.com/scholar?cluster=8043028388201036794>
6. *De Bie P.P.* Load handling robot with three single degree of freedom actuators. 2014. US Patent Application, № 2014/0230594 A1.  
<https://patents.google.com/patent/US20140230594A1>
7. *Tsumaki Y., Eguchi H., Tadakuma R.* A novel Delta-type parallel mechanism with wire-pulleys // Proceedings of the 2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Vilamoura-Algarve: IEEE. 2012. P. 1567–1572.  
<https://doi.org/10.1109/IROS.2012.6385588>.
8. *Pierrot F., Company O.* H4: a new family of 4-DOF parallel robots // Proceedings of the 1999 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. Atlanta: IEEE. 1999. P. 508–513.  
<https://doi.org/10.1109/AIM.1999.803222>.
9. *Krut S., Benoit M., Ota H., Pierrot F.* I4: a new parallel mechanism for Scara motions // Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Taipei: IEEE. 2003. V. 2. P. 1875–1880.  
<https://doi.org/10.1109/ROBOT.2003.1241868>.
10. *Nabat V., De la O Rodriguez M., Company O. et al.* Par4: very high speed parallel robot for pick-and-place // Proceedings of the 2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Edmonton: IEEE. 2005. P. 553–558.  
<https://doi.org/10.1109/IROS.2005.1545143>.
11. *Huang T., Li Z., Li M. et al.* Conceptual design and dimensional synthesis of a novel 2-DOF translational parallel robot for pick-and-place operations // J. Mech. Des. 2004. V. 126. № 3. P. 449–455.  
<https://doi.org/10.1115/1.1711822>.
12. *Wu Y., Yang Z., Fu Z. et al.* Kinematics and dynamics analysis of a novel five-degrees-of-freedom hybrid robot // Int. J. Adv. Rob. Sys. 2017. V. 14. № 3.  
<https://doi.org/10.1177/1729881417716634>
13. *Vulliez M., Zegloul S., Khatib O.* Design strategy and issues of the Delthaptic, a new 6-DOF parallel haptic device // Mech. Mach. Theory. 2018. V. 128. P. 395–411.  
<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2018.06.015>
14. *Uchiyama M., Tsumaki Y., Yoon W.-K.* Design of a compact 6-DOF haptic device to use parallel mechanisms // Robotics Research. Berlin-Heidelberg: Springer. 2007. P. 145–162.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-540-48113-3\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-540-48113-3_14).
15. *Clavel R.* Conception d'un robot parallèle rapide à 4 degrés de liberté: PhD thesis / EPFL. Lausanne. 1991.  
<https://doi.org/10.5075/epfl-thesis-925>.
16. *Laryushkin P., Fomin A., Antonov A.* Kinematic and singularity analysis of a 4-DOF Delta-type parallel robot // J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng. 2023. V. 45. № 4. P. 218.  
<https://doi.org/10.1007/s40430-023-04128-7>
17. *Wang G., Qi Z.* Approximate determination of the joint reaction forces in the drive system with double universal joints // Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci. 2017. V. 232. № 7. P. 1191–1207.  
<https://doi.org/10.1177/0954406217702681>
18. *Strang G.* Introduction to Linear Algebra. 6th ed. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press. 2023. <https://scholar.google.com/scholar?cluster=13285834974906872344>

УДК 531.3

## Т-НАПРЯЖЕНИЯ В ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЕ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ, НАГРУЖЕННОЙ ВДАЛИ ОТ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ

© 2024 г. К. Б. Устинов<sup>а, \*</sup>

<sup>а</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского, РАН, Москва, Россия

\*e-mail: [ustinov@ipmnet.ru](mailto:ustinov@ipmnet.ru)

Поступила в редакцию 29.03.2024 г.

После доработки 17.04.2024 г.

Принята к публикации 21.04.2024 г.

На основании точного аналитического решения двумерной задачи о полосе из ортотропного материала с главными осями тензора упругости направленными параллельно и перпендикулярно ее границам, и центральной полубесконечной трещиной получены выражения для Т-напряжений. Сбалансированная система нагрузок в виде четырех независимых активных мод нагружения предполагается приложенной достаточно далеко от вершины трещины. Показано, что для двух (антисимметричных) мод нагружения Т-напряжения равны нулю, а для двух других (симметричных) — определяются одним либо двумя параметрами, составленными из компонент тензора упругости. Зависимости Т-напряжений для симметричных мод нагружения получены в виде двукратных интегралов от комбинаций элементарных функций, зависящих от одного из безразмерных параметров, второй из безразмерных параметров входит в выражение для Т-напряжений только одной из мод в виде мультипликативного коэффициента.

*Ключевые слова:* Т-напряжения, интегральное преобразование, двустороннее преобразование Лапласа, метод Винера–Хопфа

DOI: 10.31857/S1026351924040104, EDN: UCLGVK

**1. Введение.** Напряженное состояние вблизи вершины трещины определяется в первую очередь главным сингулярным членом, имеющим порядок  $r^{-1/2}$ , где  $r$  — расстояние до вершины трещины. Коэффициенты при этой сингулярности для нормальных и касательных напряжений, носящих название коэффициентов интенсивности напряжений [1], являются главными параметрами, с помощью которых описываются процессы развития трещин, в том числе направление их роста (см., напр., обзор [2]). Следующий член разложения поля напряжения вблизи вершины трещины имеет порядок  $r^0$  (т.е. константы) и носит название Т-напряжения. Для трещин со свободными берегами единственной ненулевой компонентой данного члена разложения тензора напряжений, очевидно, может быть компонента

нормальных напряжений, действующих на площадках перпендикулярных линии трещины. Роль Т-напряжений важна, в частности, в задачах об устойчивости прямолинейного пути распространения трещины при растяжении [3]. Концепция Т-напряжений использовалась также для объяснения других явлений, связанных с распространением трещин [4–7], в том числе в критериях, определяющих направление роста трещин [2]. Вычислению Т-напряжений посвящен большой ряд работ, авторы которых используют аналитические [8], полуаналитические [9] и численные, прежде всего МКЭ, методы [10, 11]. Обзор по Т-напряжениям, их экспериментальному определению, методам расчета и использованию в механике разрушения был дан в работе [12].

Задачи, связанные с распространением трещин в полосе, привлекают внимание как из-за их важности для различных приложений: расчета напряжений, вычисления коэффициентов интенсивности напряжений для стандартных испытаний на разрушение, таких как трех- и четырехточечный изгиб; изучение процессов разрушения в многослойных конструкциях; исследования адгезионных взаимодействий и отслоений покрытий, так и благодаря ее относительной простоте, позволяющей анализировать и выделять особенности процесса распространения трещин в подобных и более сложных системах [13–26].

Среди аналитических подходов к решению задач о полубесконечных трещинах следует отметить применение интегральных преобразований (преобразования Фурье либо двустороннего преобразования Лапласа) с последующим применением метода Винера–Хопфа [27–32]. Достоинством данного подхода является применимость полученных решений для всего диапазона упругих параметров. Данный подход позволяет получить аналитические выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в виде интегралов от алгебраических функций. Аналитическое решение задачи для анизотропной полосы было получено с помощью данного подхода в работе [33] для частного вида нагрузки. В работе [34] было получено удобное для использования численное решение аналогичной задачи, пригодное для диапазона наиболее часто встречающихся упругих свойств, однако не охватывающего всего диапазона. Решение для системы симметрично приложенных на бесконечности нагрузок было получено в работе [35] и обобщено в [36] на случай произвольной системы нагрузок, приложенной на бесконечности. Достоинством решения [35, 36] является его пригодность для всего диапазона термодинамически допустимых значений упругих констант ортотропного тела. Обобщение решения [36] на случай полосы, составленной из двух полуполос равной толщины из одинакового линейно упругого ортотропного материала с главными осями тензора упругости, симметрично наклоненными к границе раздела, было сделано в работе [37]; обобщение на случай полосы, составленной из двух анизотропных полуполос различной толщины и различных свойств для некоторой комбинации параметров путем применения масштабирования, было сделано в работе [38].

Однако в работах [35–38] исследования ограничивались вычислением КИН. В работе [39] для трещины в изотропной полосе данный подход был применен для вычисления Т-напряжений. В настоящей работе этот подход применяется для вычисления Т-напряжений в ортотропной полосе.

В реальных задачах внешние нагрузки действуют на некоторых конечных расстояниях от вершины трещины. Однако если эти расстояния много больше толщины слоя, то согласно принципу Сен-Венана данные нагрузки можно считать приложенными на бесконечности. Относительная погрешность, вызванная использованием данного допущения, экспоненциально убывает с увеличением расстояния между точкой приложения нагрузки и вершиной трещины по сравнению с толщиной слоя. Данное обстоятельство оправдывает использованное ранее [35–39] и в настоящей работе отнесение системы приложенных усилий на бесконечность.

**2. Формулировка задачи.** Рассмотрим линейно упругую ортотропную пластину  $-h < y < h$  с центральной полубесконечной трещиной  $y=0, x < 0$  в декартовой системе координат с началом, совпадающим с вершиной трещины (рис. 1). Без потери общности можно положить  $h = 1$ .

Предполагаются выполненными условия плоской деформации или плоско-го напряженного состояния, так что закон Гука может быть записан в виде [40]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \bar{\beta}_{11}\sigma_{xx} + \bar{\beta}_{12}\sigma_{yy}, \\ \varepsilon_{yy} &= \bar{\beta}_{12}\sigma_{xx} + \bar{\beta}_{22}\sigma_{yy}, \\ 2\varepsilon_{xy} &= \bar{\beta}_{66}\sigma_{xy}.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Здесь  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  — компоненты тензора напряжения;  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$  — компоненты тензора малых деформаций;  $\beta_{jk}$  — компоненты матрицы податливости, либо исходные, либо модифицированные для условий плоской деформации:

$$\bar{\beta}_{jk} = \begin{cases} \beta_{jk} & \text{плоское напряженное состояние,} \\ \beta_{jk} - \frac{\beta_{j3}\beta_{k3}}{\beta_{33}} & \text{плоская деформация.} \end{cases}\quad (2.2)$$

Полный набор уравнений включает также уравнения равновесия:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \quad (2.3)$$

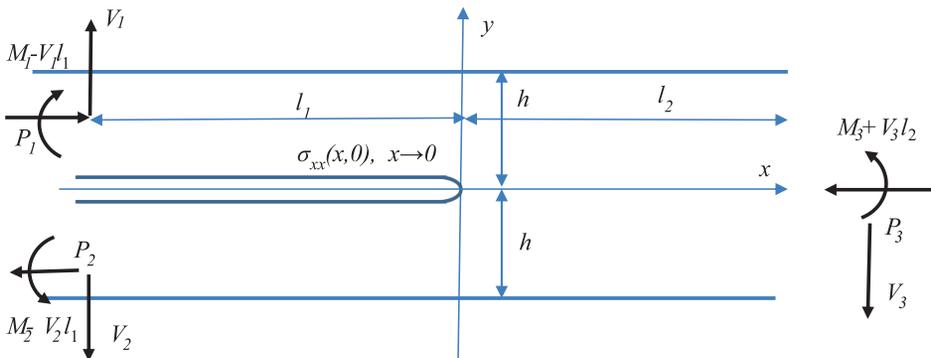


Рис. 1. Геометрия и система приложенных нагрузок.

и уравнение совместности:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \quad (2.4)$$

Граничные условия включают:

– отсутствие напряжений на внешней границе полосы и берегах трещины:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, h) = \sigma_{xy}(x, h) = \sigma_{yy}(x, -h) = \sigma_{xy}(x, -h) = 0, \quad |x| < \infty, \\ \sigma_{yy}^{(u)}(x, 0) = \sigma_{xy}^{(u)}(x, 0) = \sigma_{yy}^{(d)}(x, 0) = \sigma_{xy}^{(d)}(x, 0), \quad x < 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где индексы  $u, d$  соответствуют верхнему и нижнему берегу трещины.

Нагрузки приложены достаточно далеко от вершины трещины так, что их можно рассматривать как приложенные на бесконечности, в виде трех изгибающих моментов,  $M_1, M_2, M_3$ , трех продольных сил,  $P_1, P_2, P_3$ , и трех поперечных сил,  $V_1, V_2, V_3$ , с компенсирующими моментами,  $V_1 l_1, V_2 l_1, V_3 l_2, l_1 \rightarrow \infty, l_2 \rightarrow \infty$  (рис. 1) [41, 42].

Вследствие глобального равновесия только шесть из девяти силовых параметра независимы:

$$P_3 = P_1 - P_2, \quad M_3 = M_1 - M_2 + \frac{P_1 + P_2}{2}, \quad V_3 = V_1 - V_2. \quad (2.6)$$

Таким образом, шесть величин  $P_1, P_2, M_1, M_2, V_1, V_2$  могут быть выбраны в качестве параметров, описывающих внешнюю нагрузку. Ввиду существования двух независимых комбинаций внешних усилий, не приводящих к относительному смещению берегов трещин [14, 15, 20, 42], так называемых “пассивных нагрузок”, можно выделить четыре независимые активные моды нагружения, вызывающие относительные смещения берегов трещины. Следуя работе [41], выберем четыре моды, соответствующие ненулевым значениям соответствующих параметров:

$$\begin{aligned} M = - \int_0^{\infty} x \sigma_{yy}(x, 0) dx, \quad V = \int_0^{\infty} \sigma_{yy}(x, 0) dx, \quad P_K = \int_0^{\infty} \sigma_{xy}(x, 0) dx, \\ \tau_{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_{xy}(x, 0). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Введенные таким образом силовые параметры могут быть выражены через приложенные усилия следующим образом [41]:

$$\begin{aligned} M &= \frac{M_1 + M_2}{2}, \\ P_K &= \frac{3}{4h} (M_2 - M_1) + \frac{P_1 + P_2}{8}, \\ V &= \frac{V_1 + V_2}{2}, \\ \tau_{\infty} &= \frac{3}{4h} (V_2 - V_1). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Задача состоит в нахождении  $\Gamma$ -напряжений, т.е. предела компоненты тензора напряжения  $\sigma_{xx}$  при приближении к вершине трещины двигаясь вдоль ее берегов для четырех мод активного нагружения.

**3. Решение для слоя; вычисление  $\Gamma$ -напряжений.** Распределение нормальных и касательных напряжений вдоль линии продолжения трещины было получено в работе [36] для всех четырех указанных мод нагружения (2.7). Задача была решена путем применения двустороннего преобразования Лапласа к системе уравнений и граничным условиям и использованием метода Винера–Хопфа [43–45]. Выражения для Лаплас-образов нормальных напряжений, действующих вдоль линии продолжения центральной полубесконечной трещины в ортотропной полосе, полученные в работе [36], могут быть записаны следующим образом

$$\hat{\sigma}_{yy}^+ = \frac{\Gamma^3(1/2 + ph\lambda^{-1/4}\pi^{-1})}{\Gamma^3(1 + ph\lambda^{-1/4}\pi^{-1})} J_+^{-1}(p) \Pi(p), \quad \text{Re}(p) > 0, \quad (3.1)$$

$$J_+(p) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ \sqrt{\rho-1} \text{th}^3(\text{sh} \lambda^{-1/4}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\sqrt{\rho+1} \text{sh}(\text{sh} \lambda^{-1/4} \sqrt{2(\rho-1)}) + \sqrt{\rho-1} \text{sh}(\text{sh} \lambda^{-1/4} \sqrt{2(\rho+1)})}{(\rho-1) \text{ch}(\text{sh} \lambda^{-1/4} \sqrt{2(\rho+1)}) - (\rho+1) \text{ch}(\text{sh} \lambda^{-1/4} \sqrt{2(\rho-1)}) + 2} \right] \frac{ds}{is-p} \right\}, \quad (3.2)$$

$$\Pi(p) = \frac{2^{3/4} 3^{1/2}}{\pi^{3/2} (\rho+1)^{1/4}} \left[ V + \left( M + \frac{h}{\lambda^{1/4}} Y(\rho) V \right) p \right], \quad (3.3)$$

где

$$Y(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dL(s)}{ds} \frac{ds}{s} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [L(s) - L(0)] \frac{ds}{s^2}, \quad (3.4)$$

$$L(s) = \ln \left[ s^3 \sqrt{\rho-1} \frac{\sqrt{\rho+1} \text{sh}(s\sqrt{2(\rho-1)}) + \sqrt{\rho-1} \text{sh}(s\sqrt{2(\rho+1)})}{(\rho-1) \text{ch}(s\sqrt{2(\rho+1)}) - (\rho+1) \text{ch}(s\sqrt{2(\rho-1)}) + 2} \right], \quad \rho > 1, \quad (3.5)$$

$$L(s) = \ln \left[ s^3 \sqrt{1-\rho} \frac{\sqrt{\rho+1} \sin(s\sqrt{2(1-\rho)}) + \sqrt{1-\rho} \text{sh}(s\sqrt{2(\rho+1)})}{(\rho-1) \text{ch}(s\sqrt{2(\rho+1)}) - (\rho+1) \cos(s\sqrt{2(1-\rho)}) + 2} \right], \quad -1 < \rho < 1.$$

Здесь  $\Gamma$  – гамма-функция Эйлера. Функция, определяемая (3.1), голоморфна при  $\text{Re}(p) > 0$ , следовательно ее оригинал  $\sigma_{yy}(x, 0)$  тождественно равен нулю при  $x < 0$ , как и должно быть.

Функция  $Y(\rho)$  была вычислена в работе [36] и табулирована в [42].

Прямое и обратное преобразование Лапласа определены следующим образом [45, 46]:

$$\hat{f}(p, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-px} dx, \tag{3.6}$$

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \hat{f}(p, y) e^{px} dp, \tag{3.7}$$

где контур  $L$  соответствует мнимой оси комплексной плоскости  $p$ , а направление обхода – сверху вниз. Здесь и далее циркумфлекс над символом обозначает трансформанту от соответствующей функции.

Знание распределения нормальных и касательных напряжений, действующих на продолжении линии трещины, а следовательно, знание распределения напряжений на границе верхней и нижней полуполос, позволяет сформулировать первую основную задачу для данных областей для нахождения всех интересующих величин, включая Т-напряжение.

Отметим, что, подобно изотропному случаю [39], ненулевые Т-напряжения могут возникнуть только благодаря симметричным модам нагружения (М и Т в рассматриваемом случае). В этой связи распределения напряжений только благодаря этим модам выписаны в (3.1)–(3.5) и будут рассматриваться далее.

Рассмотрим верхний слой. Внутри области справедливы уравнения (2.1)–(2.4), вид граничных условий следует из (2.5) и (3.1)

$$\sigma_{yy}(x, h) = \sigma_{xy}(x, h) = 0, \quad \sigma_{yy}(x, 0) = qy(x), \quad \sigma_{xy}(x, 0) = 0, \quad |x| < \infty. \tag{3.8}$$

Введение функции напряжений Эри  $F$  как

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{3.9}$$

позволяет тождественно удовлетворить уравнения равновесия (2.3). Подстановка (3.9) в (2.1), а затем в сводит систему уравнений упругости для двумерного случая к одному уравнению относительно одного неизвестного (функции напряжений), например [40]:

$$\beta_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (\beta_{66} + 2\beta_{12}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \tag{3.10}$$

Уравнение удобно записать, выразив коэффициенты податливости через безразмерные параметры  $0 < \lambda < \infty, -1 < \rho < \infty$  [34]:

$$\lambda = \frac{\beta_{11}}{\beta_{22}}, \quad \rho = \frac{\beta_{66} + 2\beta_{12}}{2\sqrt{\beta_{11}\beta_{22}}}. \tag{3.11}$$

Применение двустороннего преобразования Лапласа (3.6) к уравнению (3.10) с использованием (3.11) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для образа:

$$p^4 \hat{F}(p, y) + 2\sqrt{\lambda} \rho p^2 \frac{\partial^2 \hat{F}(p, y)}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial^4 \hat{F}(p, y)}{\partial y^4} = 0. \quad (3.12)$$

Решение уравнения удовлетворяющее граничным условиям есть

$$\hat{F}(p, y) = C_1 \cos(k_1 p y) + C_2 \cos(k_2 p y) + C_3 \sin(k_1 p y) + C_4 \sin(k_2 p y), \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{k_2(k_2 \sin(k_1 p) \sin(k_2 p) + k_1 \cos(k_1 p) \cos(k_2 p) - k_1)}{p^2 \left( (k_1^2 + k_2^2) \sin(k_1 p) \sin(k_2 p) + 2k_1 k_2 (\cos(k_1 p) \cos(k_2 p) - 1) \right)}, \\ C_2 &= \frac{k_1(k_1 \sin(k_1 p) \sin(k_2 p) + k_2 \cos(k_1 p) \cos(k_2 p) - k_2)}{p^2 \left( (k_1^2 + k_2^2) \sin(k_1 p) \sin(k_2 p) + 2k_1 k_2 (\cos(k_1 p) \cos(k_2 p) - 1) \right)}, \\ C_3 &= \frac{k_2(k_1 \sin(k_1 p) \cos(k_2 p) - k_2 \cos(k_1 p) \sin(k_2 p))}{p^2 \left( (k_1^2 + k_2^2) \sin(k_1 p) \sin(k_2 p) + 2k_1 k_2 (\cos(k_1 p) \cos(k_2 p) - 1) \right)}, \\ C_4 &= \frac{k_1(k_2 \cos(k_1 p) \sin(k_2 p) - k_1 \sin(k_1 p) \cos(k_2 p))}{p^2 \left( (k_1^2 + k_2^2) \sin(k_1 p) \sin(k_2 p) + 2k_1 k_2 (\cos(k_1 p) \cos(k_2 p) - 1) \right)}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \lambda^{-1/4} \sqrt{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}}, \quad k_1 \pm k_2 = \lambda^{-1/4} \sqrt{2} \sqrt{\rho \pm 1}, \quad k_1 k_2 = \lambda^{-1/2}, \\ k_1^2 + k_2^2 &= 2\lambda^{-1/2} \rho, \quad k_1^2 - k_2^2 = 2\lambda^{-1/2} \sqrt{\rho^2 - 1}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Применение первой из формул (3.9) к (3.16) дает выражение для трансформанты напряжения  $\sigma_{xx}(x, y)$ . В частности, для  $y = 0$  имеем:

$$\hat{\sigma}_{xx}(p, 0) = (f(p) + 1) \hat{q}_y(p). \quad (3.16)$$

Здесь

$$f(p) = \frac{-\rho \cos(k_1 p) \cos(k_2 p) - \sin(k_1 p) \sin(k_2 p) + \rho}{\sqrt{\lambda} (\rho \sin(k_1 p) \sin(k_2 p) + \cos(k_1 p) \cos(k_2 p) - 1)}. \quad (3.17)$$

Оригинал функции  $q_y(p)$  равен нулю при  $x < 0$ , следовательно, не имеет членов порядка  $x^0$  в степенном разложении возле нуля. Таким образом, для нахождения Т-напряжения, т.е. члена порядка  $x^0$  в степенном разложении напряжения возле нуля, мы можем добавить в выражение (3.16) функцию  $\hat{q}_y(p)$  с произвольным коэффициентом. При этом желательно выбрать данный коэффициент таким образом, чтобы интеграл обратного преобразования Лапласа сходилась по возможности быстрее, что предполагает выбор его значения равным  $-1$ , так что

$$\hat{\sigma}_{xx}(p, 0) = f(p) \hat{q}_y(p). \quad (3.18)$$

Применение обратного преобразования (3.7) к (3.18) дает распределение напряжений  $\sigma_{xx}$  вдоль линии трещины:

$$\sigma_{xx}(x, 0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L f(p) \hat{q}_y(p) e^{px} dp. \tag{3.19}$$

Данное представление справедливо для отрицательных  $x$ . Здесь контур интегрирования – вертикальная линия в комплексной плоскости  $p$ , проходящая между нулем и ближайшем к нулю полюсом  $p_1$  с положительной действительной частью функции (3.17). Для  $x = 0$  формула (3.19) вместе с (3.17), (3.1)–(3.5), где  $\hat{q}_y(p) = \hat{\sigma}_{yy}^+(p)$ , дает выражение для Т-напряжений. Однако наличие двух параметров  $\lambda, \rho$  в подынтегральных выражениях приводит к тому, что использование данных формул становится неудобным. Подстановка  $p = \lambda^{-1/4} p'$  позволяет вынести параметр  $\lambda$  из-под интеграла, после чего выражение для Т-напряжений преобразуется к виду:

$$T = T_M M + \lambda^{-1/4} T_V V, \tag{3.20}$$

здесь  $T_M, T_V$  – величины Т-напряжений, вызванных действием единичного момента  $M$  и единичной пары сил  $V$  с компенсирующим моментом. Подстановка  $p' = \gamma + it, 0 < \gamma < \text{Re } p_1$ , приводит к следующим выражениям для  $T_M, T_V$ :

$$T_M = 6M - \frac{2^{3/4} 3^{1/2}}{\pi^{3/2} (\rho+1)^{1/4}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f'(it+\gamma) \frac{\Gamma^3(1/2+(it+\gamma)\pi^{-1})}{\Gamma^3(1+(it+\gamma)\pi^{-1})} J_+^{-1}(it+\gamma) dt, \tag{3.21}$$

$$T_V = -\frac{2^{3/4} 3^{1/2}}{\pi^{3/2} (\rho+1)^{1/4}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f'(it+\gamma) \frac{\Gamma^3(1/2+(it+\gamma)\pi^{-1})}{\Gamma^3(1+(it+\gamma)\pi^{-1})} \times \\ \times J_+^{-1}(it+\gamma) [1 + (it+\gamma)Y(\rho)] dt. \tag{3.22}$$

В выражении (3.21) внеинтегральный член соответствует вычету подынтегральной функции в нуле, в выражении (3.22) внеинтегральный член отсутствует, поскольку вычет подынтегральной функции в нуле равен нулю.

Функции (3.17) и (3.2) для  $\lambda = 1$  преобразуется следующим образом:

$$f'(p) = \frac{\rho \left( -\left( \cos(\sqrt{2}p\sqrt{\rho-1}) + \cos(\sqrt{2}p\sqrt{\rho+1}) \right) - \cos(\sqrt{2}p\sqrt{\rho-1}) + \cos(\sqrt{2}p\sqrt{\rho+1}) + 2\rho \right)}{\cos(\sqrt{2}p\sqrt{\rho-1}) + \cos(\sqrt{2}p\sqrt{\rho+1}) - \rho \left( \cos(\sqrt{2}p\sqrt{\rho+1}) - \cos(\sqrt{2}p\sqrt{\rho-1}) \right) - 2}, \tag{3.23}$$

$$J'_+(p) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ \sqrt{\rho-1} \text{th}^3(s) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\sqrt{\rho+1} \text{sh}(s\sqrt{2(\rho-1)}) + \sqrt{\rho-1} \text{sh}(s\sqrt{2(\rho+1)})}{(\rho-1) \text{ch}(s\sqrt{2(\rho+1)}) - (\rho+1) \text{ch}(s\sqrt{2(\rho-1)}) + 2} \right] \frac{ds}{is-p} \right\}. \tag{3.24}$$

Функция  $Y(\rho)$  по-прежнему определяется формулами (3.4), (3.5).

**4. Численные результаты.** Величины  $T_M, T_V$  как функции  $\rho$  рассчитывались для значений  $\gamma > 0$ , не превышающих действительной части ближайшего нуля знаменателя функции (3.23), уменьшающегося с ростом  $\rho$ . Результаты вычислений приведены в табл. 1. Из представленных результатов видно, что обе функции  $T_M, T_V$  возрастают с увеличением  $\rho$ , причем функция  $T_V$  меняет знак.

**Таблица 1.** Т-напряжения, вызванные действием изгибающего момента и пары поперечных сил (с компенсирующим моментом)

$\rho$	$Y$	$T_V$	$T_M$
-0.99	0.173	-1.27535	3.97972
-0.9	0.246	-1.26183	4.11123
-0.4	0.415	-1.19768	4.47525
-0.2	0.462	-1.16935	4.5786
0	0.504	-1.13935	4.66992
0.4	0.578	-1.07563	4.827
0.9	0.658	-0.99112	4.99027
1		<b>-0.9748</b>	<b>5.0196</b>
1.1	0.691	-0.95989	5.048067
2	0.806	-0.79592	5.270964
5	1.111	-0.24484	5.774636
10	1.458	0.644107	6.280166
20	2.036	2.319428	6.873
40	2.832	5.276163	7.5276
70	3.719	9.141553	8.087
100	4.432	12.59656	8.455

Величина для  $\rho = 1$  взята соответствующей изотропному телу [39].

В настоящее время получил распространение другой набор независимых мод нагружения расслаиваемый полосы [14, 15, 20], а именно:

1. Симметричное нагружение изгибающими моментами (совпадает с одним из рассмотренных случаев):

$$(M_1 = M_2 = M, M_3 = P_1 = P_2 = P_3 = V_1 = V_2 = V_3 = 0). \quad (4.1)$$

2. Нагружение одинаковыми по величине и разнонаправленными продольными силами и компенсирующим моментом, приложенным к нижней отслаиваемой части полосы:

$$(P_1 = P_2 = P_3, M_2 = P_1, M_1 = M_3 = P_3 = V_1 = V_2 = V_3 = 0). \quad (4.2)$$

3. Нагружение парой поперечных сил с компенсирующими моментами, приложенными к обоим отслаиваемым частям полосы (совпадает с одним из рассмотренных случаев):

$$(V_1 = V_2 = D, M_1 = M_2 = M_3 = P_1 = P_2 = P_3 = V_3 = 0). \quad (4.3)$$

4. Нагружение двумя одинаковыми по абсолютной величине и разнонаправленными поперечными силами с компенсирующими моментами, одна из которых приложена к верхней отслаиваемой полуполосе, а другая – к цельной части:

$$(V_1 = V_3 = S, M_1 = M_3 = M_2 = V_2 = P_1 = P_2 = P_3 = 0). \quad (4.4)$$

Сравнение данных мод с модами, рассмотренными выше, приводит к следующему представлению эквивалентному (3.20) :

$$T = T_M \left( M + \frac{P_S}{2} \right) + T_V \left( D + \frac{S}{2} \right). \quad (4.5)$$

**Заключение.** Рассмотрена задача о полосе из ортотропного материала с главными осями тензора упругости, направленными параллельно и перпендикулярно ее границам и центральной полубесконечной трещиной. Сбалансированная система нагрузок в виде четырех независимых активных мод нагружения предполагается приложенной достаточно далеко от вершины трещины. На основании точного аналитического решения данной задачи получены выражения для Т-напряжений, т.е. главного несингулярного члена в разложении вблизи вершины трещины нормального напряжения, действующего по нормали к линии трещины.

Показано, что для двух (антисимметричных) мод нагружения Т-напряжения равны нулю, а для двух других (симметричных) – определяются одним либо двумя безразмерными параметрами, составленными из компонент тензора упругости.

Зависимости Т-напряжений для симметричных мод нагружения получены в виде двукратных интегралов от комбинаций элементарных функций, зависящих от одного из безразмерных параметров, при этом второй безразмерный параметр входит в выражение для Т-напряжений только одной из мод в виде мультипликативного коэффициента.

Работа выполнена при финансовой поддержке госзадания (№ госрегистрации 124012500441-6).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Irwin G.R.* Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // *J. App. Mech.* 1957. V. 24. № 3. P. 361–364. <https://doi.org/10.1115/1.4011547>
2. *Ярема С.Я., Иваницкая Г.С.* Предельное равновесие и развитие косых трещин. Обзор критериев // *Физ.-хим. механика материалов.* 1986. Т. 22. № 1. С. 45–57.
3. *Cotterell B.* Notes on paths and stability of cracks // *Int. J. Fract. Mech.* 1966. V. 2. P. 526–533. <https://doi.org/10.1007/BF00193691>

4. *Larsson S.G., Carlsson A.J.* Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials // *J. Mech. Phys. Solids*. 1973. V. 21. № 4. P. 263–77.  
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(73\)90024-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(73)90024-0)
5. *Zhou R., Zhu P., Li Z.* The shielding effect of the plastic zone at mode-II crack tip // *Int. J. Fract.* 2011. V. 171. P.195–200.  
<https://doi.org/10.1007/s10704-011-9627-5>
6. *Williams J, Ewing P.D.* Fracture under complex stress – angled crack problem // *Int. J. Fract. Mech.* 1972. V. 8. P. 441–446.  
<https://doi.org/10.1007/BF00191106>
7. *Finnie I., Saith A.* A note on the angled crack problem and the directional stability of cracks // *Int. J. Fract.* 1973. V. 9. P. 484–486.  
<https://doi.org/10.1007/BF00036331>
8. *Kfoury A.P.* Some evaluations of the elastic T-term using Eshelby’s method // *Int. J. Fract.* 1986. V. 30. P. 301–315.  
<https://doi.org/10.1007/BF00019710>
9. *Kim J.-H., Vlassak J.J.* T-stress of a bi-material strip under generalized edge loads // *Int. J. Frac.* 2006. V. 142. P. 315–322.  
<https://doi.org/10.1007/s10704-006-9033-6>
10. *Кургузов В.Д., Демешкин А.Г., Кузнецов Д.А.* Трехточечный изгиб образцов с эксцентричной краевой трещиной при смешанном нагружении // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2023. Т. 16. № 3. С. 345–357.  
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.3.29>
11. *Ayatollahi M.R., Pavier M.J., Smith D.J.* Determination of T-stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading // *Int. J. Fract.* 1998. V. 91. P. 283–298.  
<https://doi.org/10.1023/A:1007581125618>
12. *Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R.* A review of T-stress and its effects in fracture mechanics // *Eng. Frac. Mech.* 2015. V. 134. P. 218–241.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.10.013>
13. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
14. *Suo Z., Hutchinson J.W.* Interface crack between two elastic layers // *Int. J. Fract.* 1990. V. 43. P. 1–18.  
<https://doi.org/10.1007/BF00018123>
15. *Hutchinson, J.W., Suo, Z.* Mixed mode cracking in layered materials // *Adv. Appl. Mech.* 1991. V. 29. P. 63–191.  
[https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70164-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70164-9)
16. *Andrews M.G., Massabò R.* The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // *Eng. Fract. Mech.* 2007. V. 74. № 17. P. 2700–2720.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2007.01.013>
17. *Li S., Wang J., Thouless M.D.* The effects of shear on delamination in layered materials // *J. Mech. Phys. Solids*. 2004. V. 52. № 1. P. 193–214.  
[https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00070-X](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00070-X)
18. *Massabò R., Brandinelli L., Cox B.N.* Mode I weight functions for an orthotropic double cantilever beam // *Int. J. Eng. Sci.* 2003. V. 41. № 13–14. P. 1497–1518.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(03\)00029-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(03)00029-6)
19. *Ustinov K.B.* On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // *Eng. Failure Anal.* 2015. V. 47. Part B. P. 338–344.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2013.09.022>

20. *Begley M.R., Hutchinson J.W.* The mechanics and reliability of films, multilayers and coatings. Cambridge University Press. 2017.  
<https://doi.org/10.1017/9781316443606>
21. *Banks-Sills L.* Interface fracture and delaminations in composite materials. Springer Briefs in Applied Sciences and Technology. Springer, International Publishing, Cham. 2018.
22. *Глаголев В.В., Маркин А.А.* Влияние модели поведения тонкого адгезионного слоя на значение  $j$ -интеграла // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 2. С. 90–98.  
<http://doi.org/10.31857/S0572329922020118>
23. *Глаголев В.В., Маркин А.А.* Предельные состояния адгезионных слоев при комбинированном нагружении // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 6. С. 39–46.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329923600019>
24. *Кургузов В.Д.* Моделирование отслоения тонких пленок при сжатии // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7. № 1. С. 91–99.  
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.10>
25. *Ватульян А.О., Морозов К.Л.* Об исследовании отслоения от упругого основания на основе модели с двумя коэффициентами постели // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 2. С. 64–76.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329920020130>
26. *Ватульян А.О., Морозов К.Л.* Исследование процесса отслоения неоднородного покрытия // Прикладная механика и техническая физика. 2021. 62. № 6 (370). С. 138–145.  
<http://doi.org/10.15372/PMTF20210616>
27. *Попов Г.Я.* Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 2. С. 342–355.
28. *Салганик Р.Л.* О хрупком разрушении склеенных тел // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 5. С. 957–962.
29. *Fichter W.B.* The stress intensity factor for the double cantilever beam // Int. J. Fract. 1983. V. 22. P.133–143.  
<http://doi.org/10.1007/BF00942719>
30. *Foote R.M.L., Buchwald V.T.* An exact solution for the stress intensity factor for a double cantilever beam // Int. J. Fract. 1985. V. 29. P. 125–134.  
<http://doi.org/10.1007/BF00034313>
31. *Златин А.Н., Храпков А.А.* Полубесконечная трещина, параллельная границе упругой полуплоскости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 31. С. 1009–1010.
32. *Салганик Р.Л., Устинов К.Б.* Задача о деформировании упруго заделанной пластины, моделирующей частично отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация) // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 4. С. 50–62.
33. *Georgiadis H.G., Papadopoulos G.A.* Elastostatics of the orthotropic double-cantilever-beam fracture specimen // Z. Angew. Math. Phys. 1990. V. 41. P. 889–899.  
<http://doi.org/10.1007/BF00945841>
34. *Suo Z.* Delamination specimens for orthotropic materials // J. Appl. Mech. 1990. V. 57. № 3. P. 627–634.  
<https://doi.org/10.1115/1.2897068>
35. *Устинов К.Б., Лисовенко Д.С., Ченцов А.В.* Ортотропная полоса с центральной полубесконечной трещиной под произвольными нормальными нагрузками, приложенными вдали от вершины трещины // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23. № 4. С. 657–670.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1736>

36. *Ustinov K.B., Massabò R., Lisovenko D.* Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution // *Eng. Failure Analysis*. 2020. V. 110. P. 104410.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2020.104410>
37. *Устинов К.Б., Борисова Н.Л.* Расслоение полосы состоящей из двух одинаковых ортотропных полуполос с осями изотропии симметрично наклоненными к границе раздела // *Изв. РАН МТТ*. 2024. № 5.
38. *Ustinov K.B., Idrisov D.M.* On delamination of bi-layers composed by orthotropic materials: exact analytical solutions for some particular cases // *ZAMM. Z. Angew. Math. Mech.* 2021. V. 101. № 4. e202000239.  
<https://doi.org/10.1002/zamm.202000239>
39. *Ustinov K.B., Monetto I., Massabò R.* Analytical solutions for an isotropic strip with a central semi-infinite crack: T-stresses, displacements of boundaries, stress intensity factor due to a force acting at the crack // to be published 2024
40. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
41. *Ustinov K.* On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer // *Eur. J. Mech. A Solids*. 2019. V. 75. P. 56–69.  
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.01.013>
42. *Ustinov K., Massabò R.* On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers // *Int. J. Sol. Struct.* 2022. V. 248. P. 111600.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111600>
43. *Noble B.* Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations. 1959. [Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.]
44. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
45. *Khrapkov A.* Winer-Hopf Method in Mixed Elasticity Theory Problems. В.Е. Vedeneev VNIIG Publishing House, 2001.
46. *Doetsch G.* Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-transformations und der Z-transformations, Oldenbourg, München, 1956. [Дёч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. 207 с.]

## T-STRESS IN AN ORTHOTROPIC STRIP WITH A CENTRAL SEMI-INFINITE CRACK LOADED FAR FROM THE CRACK TIP

К. В. Устинов<sup>a, \*</sup>

<sup>a</sup>*A. Yu. Ishlinsky Institute for problem in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: ustinov@ipmnet.ru*

**Abstract** – Based on an exact analytical solution to the two-dimensional problem of a strip of orthotropic material with the main axes of the elasticity tensor directed parallel and perpendicular to its boundaries and a central semi-infinite crack, expressions for T-stresses are obtained. A balanced load system in the form of four independent active loading modes is assumed to be applied sufficiently far from the crack tip. It is shown that for two (antisymmetric) loading modes the T-stresses are equal to zero, and for the other two (symmetric) they are determined by one or two parameters composed of components of the elasticity tensor. The

dependences of T-stresses for symmetric loading modes are obtained in the form of double integrals from combinations of elementary functions depending on one of the dimensionless parameters; the second of the dimensionless parameters is included in the expression for T-stresses of only one of the modes in the form of a multiplicative coefficient.

*Keywords:* T-stress, integral transforms, bi-lateral Laplace transform, method of Wiener-Hopf

## REFERENCES

1. *Irwin G.R.* Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate // *J. Appl. Mech.* 1957. V. 24. P. 361–364.  
<https://doi.org/10.1115/1.4011547>
2. *Yarema S.Ya., Ivanitskaya G.S.* Limit equilibrium and development of oblique cracks. Review of criteria // *Phys.-Chem. mechanics of materials.* 1986. V. 1. P. 45–57 [In Russian].
3. *Cotterell B.* Notes on Paths and Stability of Cracks // *Int. J. Fract. Mech.* 1966. V. 2. № 3. P. 526–533.  
<https://doi.org/10.1007/BF00193691>
4. *Larsson S.G., Carlsson A.J.* Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials // *J. Mech. Phys. Solids.* 1973. V. 21. № 4. P. 263–277.  
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(73\)90024-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(73)90024-0)
5. *Zhou R., Zhu P., Li Z.* The Shielding Effect of the Plastic Zone at Mode-II Crack Tip // *Int. J. Fract.* 2011. V. 171. № 2. P. 195–200.  
<https://doi.org/10.1007/s10704-011-9627-5>
6. *Williams J., Ewing P.D.* Fracture Under Complex Stress – Angled Crack Problem // *Int. J. Fract. Mech.* 1972. V. 8. № 4. P. 441–446.  
<https://doi.org/10.1007/BF00191106>
7. *Finnie I., Saith A.* A note on the angled crack problem and the directional stability of cracks // *Int. J. Fract.* 1973. V. 9. № 4. P. 484–486.  
<https://doi.org/10.1007/BF00036331>
8. *Kfoury A.P.* Some evaluations of the elastic T-term using Eshelby's method // *Int. J. Fract.* 1986. V. 30. P. 301–315.  
<https://doi.org/10.1007/BF00019710>
9. *Kim J.-H., Vlassak J.J.* T-stress of a bi-material strip under generalized edge loads // *Int. J. Frac.* 2006. V. 142. P. 315–322.  
<https://doi.org/10.1007/s10704-006-9033-6>
10. *Kurguzov V.D., Demeshkin A.G., Kuznetsov D.A.* Three-point bending of eccentric edge crack specimens under mixed mode loading // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* 2023. V. 16. № 3. P. 345–357.  
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.3.29>
11. *Ayatollahi M.R., Pavier M.J., Smith D.J.* Determination of T-stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading // *Int. J. Fract.* 1998. V. 91. P. 283–298.  
<https://doi.org/10.1023/A:1007581125618>
12. *Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R.* A review of T-stress and its effects in fracture mechanics // *Eng. Frac. Mech.* 2015. V. 134. P. 218–241.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.10.013>

13. *Aleksandrov V.M., Mkhitarian S.M.* Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers. M.: Nauka, 1983. 487 p. [In Russian].
14. *Suo Z., Hutchinson J.W.* Interface crack between two elastic layers // *Int. J. Fract.* 1990. V. 43. P. 1–18.  
<https://doi.org/10.1007/BF00018123>
15. *Hutchinson, J.W., Suo, Z.* Mixed Mode Cracking in Layered Materials // *Adv. Appl. Mech.* Ed. J.W. Hutchinson, T.Y. Wu. 1992. V. 29. P. 63–191.  
[https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70164-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70164-9)
16. *Andrews M.G., Massabò R.* The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // *Eng. Fract. Mech.* 2007. V. 74. № 17. P. 2700–2720.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2007.01.013>
17. *Li S., Wang J., Thouless M.D.* The effects of shear on delamination in layered materials // *J. Mech. Phys. Solids* 2004. V. 52. № 1. P. 193–214.  
[https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00070-X](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00070-X)
18. *Massabò R., Brandinelli L., Cox B.N.* Mode I weight functions for an orthotropic double cantilever beam // *Int. J. Eng. Sci.* 2003. V. 41. № 13–14. P. 1497–1518.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(03\)00029-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(03)00029-6)
19. *Ustinov K.B.* On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // *Eng. Failure Anal.* 2015. V. 47. № 14. P. 338–344.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2013.09.022>
20. *Begley M.R., Hutchinson J.W.* *The Mechanics and Reliability of Films, Multilayers and Coatings.* Cambridge University Press, 2017.  
<https://doi.org/10.1017/9781316443606>
21. *Banks-Sills L.* *Interface Fracture and Delaminations in Composite Materials,* Springer Briefs in Applied Sciences and Technology. Cham: Springer, International Publishing, 2018.
22. *Glagolev V.V., Markin A.A.* Influence of the model of the behavior of a thin adhesion layer on the value of the  $J$ -integral // *Mech. Solids.* 2022. V. 57. № 2. P. 278–285.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654422020169>
23. *Glagolev V.V., Markin A.A.* Limit States of Adhesive Layers under Combined Loading // *Mech. Solids.* 2023. V. 58. № 6. P. 1960–1966.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654423600204>
24. *Kurguzov V.D.* Modeling of delamination of thin films under compression // *Computational continuum mechanics.* 2014. V. 7. № 1. P. 91–99 [In Russian].
25. *Vatulyan A.O., Morozov K.L.* Investigation of Delamination from an Elastic Base Using a Model with Two Coefficients of Subgrade Reaction // *Mech. Solids.* 2020. № 2. P. 207–217.  
<https://doi.org/10.3103/S002565442002017X>
26. *Vatulyan A.O., Morozov K.L.* Study of the process of delamination of a non-uniform coating // *Appl. Mech. Tech. Phys.* 2021. V. 62. № 6 (370). P. 138–145 [In Russian].
27. *Popov G.Ya.* Bending of a semi-infinite slab lying on a linearly deformable base // *PMM.* 1961. V. 2. P. 342–355 [In Russian].
28. *Salganik R.L.* On brittle fracture of glued bodies // *PMM.* 1963. V. 27. № 5. P. 957–962 [In Russian].
29. *Fichter W.B.* The stress intensity factor for the double cantilever beam // *Int. J. Fract.* 1983. V. 22. № 2. P. 133–143.  
<https://doi.org/10.1007/BF00942719>

30. *Foot R.M.L., Buchwald V.T.* An exact solution for the stress intensity factor for a double cantilever beam // *Int. J. Fract.* 1985. V. 29. № 3. P. 125–134.  
<https://doi.org/10.1007/BF00034313>
31. *Zlatin A.N., Khrapkov A.A.* A Semi-Infinite Crack Parallel to the Boundary of the Elastic Half-Plane // *Sov. Phys. Dokl.* 1986. V. 31. P. 1009–1010.
32. *Салганик Р.Л., Устинов К.Б.* Задача о деформировании упруго заделанной пластины, моделирующей частично отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация) // *Изв. РАН. МТТ.* 2012. № 4. С. 50–62.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654412040061>
33. *Georgiadis H.G., Papadopoulos G.A.* Elastostatics of the orthotropic double-cantilever-beam fracture specimen // *Z. Angew. Math. Phys.* 1990. V. 41. № 6. P. 889–899.  
<https://doi.org/10.1007/BF00945841>
34. *Suo Z.* Delamination specimens for orthotropic materials // *J. Appl. Mech.* 1990. V. 57. № 3. P. 627–634.  
<https://doi.org/10.1115/1.2897068>
35. *Ustinov K.B., Lisovenko D.S., Chentsov A.V.* Orthotropic strip with a central semi-infinite crack under arbitrary normal loads applied far from the crack tip // *Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Physical and mathematical sciences.* 2019. V. 23. № 4. P. 657–670 [In Russian].  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1736>
36. *Ustinov K.B., Massabò R., Lisovenko D.* Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution // *Eng. Failure Analysis* 2020. V. 110. P. 104410.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2020.104410>
37. *Ustinov K.B., Borisova N.L.* Splitting of a strip consisting of two identical orthotropic half-strips with isotropy axes symmetrically inclined to the interface // *Mech. Solids*, submitted. 1990. V. 41. P. 889–899.
38. *Ustinov K.B., Idrisov, D.M.* On delamination of bi-layers composed by orthotropic materials: exact analytical solutions for some particular cases // *ZAMM. Z. Angew. Math. Mech.* 2021. V. 101. № 4. P. e202000239.  
<https://doi.org/10.1002/zamm.202000239>
39. *Ustinov K.B., Monetto I., Massabò R.* Analytical solutions for an isotropic strip with a central semi-infinite crack: T-stresses, displacements of boundaries, stress intensity factor due to a force acting at the crack // to be published 2024.
40. *Lekhnitsky.* Theory of elasticity of an anisotropic elastic body 1963c
41. *Ustinov K.* On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer // *Eur. J. Mech. A Solids.* 2019. V. 75. P. 56–69.  
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.01.013>
42. *Ustinov K., Massabò R.* On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers // *Int. J. Sol. Struct.* 2022. 248 P. 111600 [doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111600](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111600)
43. *Noble B.* Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. *Physics Today.* 1959. 12, 9, 50.  
<https://doi.org/10.1063/1.3060974>
44. *Gakhov F.D.* Boundary Value Problems. 1966. Pergamon Press.
45. *Khrapkov A.* Winer-Hopf Method in Mixed Elasticity Theory Problems. 2001. В.Е. Веденев VNIIG Publishing House.
46. *Doetsch G.* Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-transformations und der Z-transformations, Oldenbourg, München, 1956.

УДК 539.42+ 622.23.01

## МАСШТАБНЫЙ ЭФФЕКТ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ОКРЕСТНОСТИ СКВАЖИНЫ НА УСТАНОВКЕ ИСТИННО ТРЕХОСНОГО НАГРУЖЕНИЯ

© 2024 г. В. И. Карев<sup>а</sup>, Ю. Ф. Коваленко<sup>а, \*</sup>

<sup>а</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: [perfolinkgeo@yandex.ru](mailto:perfolinkgeo@yandex.ru)

Поступила в редакцию 02.04.2024 г.

После доработки 26.04.2024 г.

Принята к публикации 27.04.2024 г.

При проведении лабораторных испытаний образцов горных пород, имеющих целью определение их механических и прочностных свойств, одна из основных проблем состоит в переносе результатов испытаний образцов, имеющих относительно малые размеры, на достаточно большие участки горного массива, часто имеющего сложную структуру. Это связано с тем, что обобщенных численных показателей, характеризующих степень влияния структурных неоднородностей различных размеров на деформирование и разрушение горных пород и массивов, пока не имеется. Кроме того, на изучаемые процессы, помимо неоднородностей, оказывают и другие факторы, такие как напряженное состояние массива, наличие геологических нарушений, макротрещиноватость и др. В работе эти вопросы изучены на основе сравнения результатов экспериментов, выполненных на Испытательной системе трехосного независимого нагружения ИПМех РАН по схеме “полюй цилиндр” на образцах с центральным отверстием диаметром 10 и 20 мм, и физического моделирования деформационных процессов в окрестности скважин при понижении давления на их забое для пород-коллекторов нефтяного месторождения Приразломное. Полученные результаты иллюстрируют проявление масштабного эффекта.

*Ключевые слова:* масштабный эффект, установка истинно трехосного нагружения, схема “полюй цилиндр”, физическое моделирование, скважина, образец, вынос песка

DOI: 10.31857/S1026351924040118, EDN: UCLBPL

**1. Введение.** По определению, данному М.И. Койфманом в работе [1], “Масштабный эффект – это принципиальные закономерности, а также конкретные для различных пород количественные зависимости, характеризующие изменение в зависимости от линейных размеров (площади сечения, объема) образцов горных пород или частей горного массива реальных механических свойств...” Он проявляется в той или иной мере у всех

неоднородных по составу и структуре материалов. Данное понятие применяется в научных работах главным образом при изучении механических свойств горных пород. Масштабный эффект сказывается практически на всех известных свойствах материалов: механических, фильтрационных, волновых и т.д.

Данный вопрос изучался многими специалистами и учеными, но до сих пор оценка влияния размеров образцов на прочность горных пород является актуальной задачей ввиду многообразия видов горных пород и их структурных особенностей, приобретенных в зависимости от условий образования в ходе различных геологических процессов. Имеющиеся данные экспериментов в массивах, сложенных различными породами, показывают, что для геоматериалов и горных пород наблюдается общая тенденция — с увеличением объемов, вовлекаемых в процесс деформирования, модули деформации массива существенно снижаются. Это же относится и к прочностным характеристикам пород [2–7].

Количественные показатели масштабного эффекта изучались пока на малом числе объектов и преимущественно в отношении предела прочности породы при одноосном сжатии. Еще в меньшей степени масштабный эффект изучен в отношении деформационных свойств пород.

Наиболее сильно масштабный эффект проявляется в условиях концентрации напряжений у отверстий, полостей, выработок, когда характерный размер неоднородности напряжений сопоставим с характерными размерами структуры материала. В работах [8, 9] теоретически и экспериментально исследовано влияние диаметра отверстия в изотропной однородной линейно-упругой пластине из квазихрупкого геоматериала на возникновение трещины отрыва на ее контуре при неравномерно распределенном сжатии на бесконечности с учетом масштабного фактора. В ходе опыта определялась критическая нагрузка, при которой в пластине достигалось предельное состояние (образование трещин отрыва, исходящих от отверстия) в зависимости от диаметра отверстия. Опыты выявили существенный масштабный эффект, заключающийся в значительном влиянии диаметра отверстия на локальную прочность материала. С его уменьшением критическое давление (давление образования трещины отрыва) возрастало, достигая предела прочности на сжатие.

На Испытательной системе трехосного независимого нагружения (ИСТНН) была проведена серия экспериментов по изучению влияния диаметра центрального отверстия в кубических образцах на их деформирование и разрушение в ходе проведения экспериментов по схеме “полый цилиндр”.

Для понимания соответствия величин критических депрессий, полученных при испытаниях образцов по схеме “полый цилиндр”, предельным депрессиям в скважине приведены результаты физического моделирования на установке ИСТНН деформационных процессов в окрестности скважины при понижении давления на ее забое.

**2. Экспериментальная установка.** Установка ИСТНН создана в ИПМех РАН и представляет собой исследовательский комплекс для изучения деформационных, прочностных и фильтрационных характеристик горных пород в условиях истинно трехосного независимого нагружения [10]. Установка ИСТНН позволяет нагружать образцы горных пород в форме куба с ребром

40 и 50 мм по любым траекториям нагружения независимо по каждому из трех направлений. Это дает возможность осуществлять прямое физическое моделирование процессов деформирования и разрушения породы в окрестности нефтяных и газовых скважин при изменении давления на их забое.

По сравнению с другими испытательными машинами, осуществляющими сложное нагружение с использованием жестких нажимных плит, установка ИСТНН обеспечивает равномерное приложение нагрузок по всей площади образца в течение всего процесса деформирования, включая стадию разрушения. Существенно упрощается анализ результатов экспериментов, так как отпадает необходимость учета возможности концентрации напряжений вблизи ребра образца

Наибольшее давление рабочей жидкости в гидроцилиндре установки составляет 200 МПа, при этом гидроцилиндр развивает усилие 500 кН. Это позволяет на образцах с гранью 40 мм создавать напряжения до 280 МПа. Образцы для испытания на установке ИСТНН изготавливаются на специально созданном обрабатывающем комплексе, включающем два станка – камнерезный и шлифовальный. Этот комплекс позволяет изготавливать кубические образцы высокой точности и любой ориентации относительно оси скважины.

**3. Методика проведения экспериментов по модифицированной схеме “полый цилиндр”.** В классических опытах по схеме “полый цилиндр” используются цилиндрические образцы длиной около 10–12 см и диаметром около 4–5 см. По центру каждого цилиндра просверливается отверстие диаметром 8–10 мм. Нагружение проводится по схеме Кармана, т.е. нагрузка на образец осуществляется равномерным боковым обжатием и осевой сжимающей нагрузкой. В ходе испытания боковая и вертикальная сжимающие нагрузки на образец увеличиваются с постоянной скоростью до момента выявления признаков выноса песка. В ходе эксперимента фиксируется момент начала выноса песка и непрерывно измеряется вес выносимого песка, поступающего из отверстия на весы под действием силы тяжести.

Установка ИСТНН позволяет проводить специальные эксперименты, аналогичные экспериментам по схеме “полый цилиндр” на установках с кармановской схемой нагружения, на кубических образцах с центральным отверстием. С этой целью в нагружающем узле установки ИСТНН используются специально изготовленные две нажимные плиты с центральными каналами, рис. 1.

В образцах, предназначенных для испытаний по схеме “полый цилиндр”, по центру грани в направлении одной из осей просверливается отверстие диаметром 10 или 20 мм. В ходе эксперимента через канал в наконечнике верхней активной нажимной плиты, совпадающий с отверстием в образце, продувается воздух под давлением около 1 ат. Для отвода прошедшего через канал в образце газа в наконечнике нижней нажимной плиты также имеется отверстие, совпадающее с каналом в образце. Через него образовавшийся при разрушении отверстия песок под действием продуваемого воздуха по специальной трубке поступает на электронные весы, соединенные с компьютером.

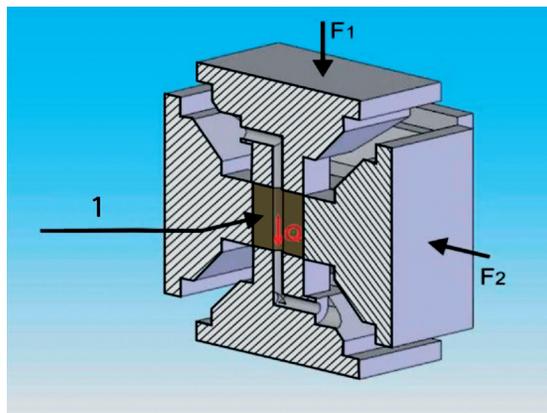


Рис. 1. Схематичное изображение нагружающего узла установки ИСТНН для проведения испытаний по схеме “полый цилиндр”: 1 – образец.

В ходе эксперимента к граням образца прикладываются равные сжимающие напряжения  $s$ , которые ступенчато увеличиваются в ходе опыта. При этом регистрируются деформации образца в трех направлениях и измеряется вес песка, выносимого из образца потоком воздуха. Точность электронных весов составляет 0.001 г, а запись осуществляется через каждые 2 с. Испытание образца продолжается до разрушения отверстия.

Проведение на установке ИСТНН опытов по схеме “полый цилиндр” можно рассматривать как моделирование создания депрессии на забое горизонтальной скважины. При этом величина обжатия образца отвечает разности между горным давлением и забойным давлением, так что ситуация, когда давление в скважине практически отсутствует (“осушение скважины”), отвечает всестороннему обжатию образца напряжением, равным горному давлению на глубине отбора керна.

Испытания на установке ИСТНН обладают значительными преимуществами:

- ИСТНН позволяет нагружать кубический образец независимо по каждой из трех осей по любой программе нагружения, отвечающей реальным напряжениям, действующим в пласте;

- в ходе испытания образца установка ИСТНН позволяет измерять деформации образца по каждой из трех осей и фиксировать начало разрушения стенок отверстия по отклонению кривых деформирования образца от линейности. Как показали опыты, это обстоятельство дает дополнительную важную информацию об устойчивости стенок скважины.

Подробно ознакомиться с результатами экспериментов по схеме “полый цилиндр”, выполненных на установке ИСТНН, можно в работах [11, 12].

**4. Результаты экспериментальных исследований с использованием нагружения по схеме “полый цилиндр”.** На рис. 2 и 3 показаны результаты испытания по схеме “полый цилиндр” образца породы П10-5 с центральным отверстием

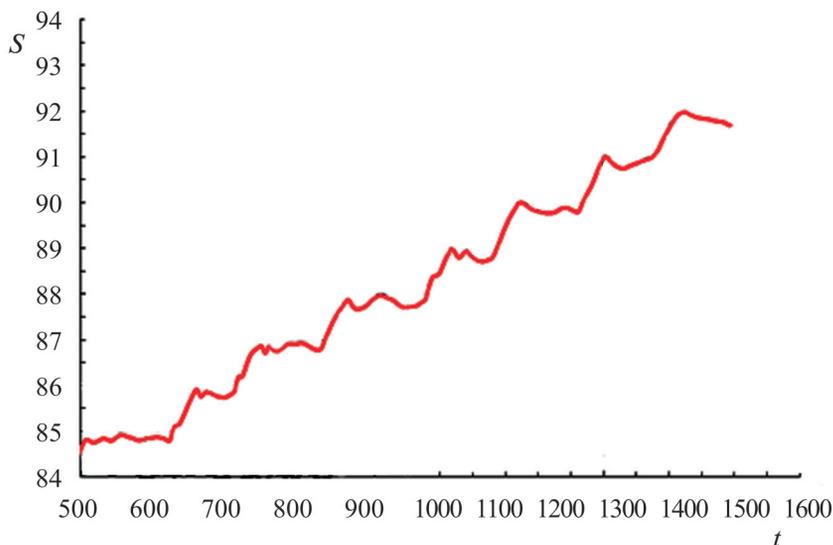


Рис. 2. Программа нагружения образца с отверстием 10 мм:  $S$  – напряжение обжатия образца, МПа;  $t$  – время, с.

диаметром 10 мм, отобранного из коллектора Приразломного нефтяного месторождения с глубины 2537.5 м.

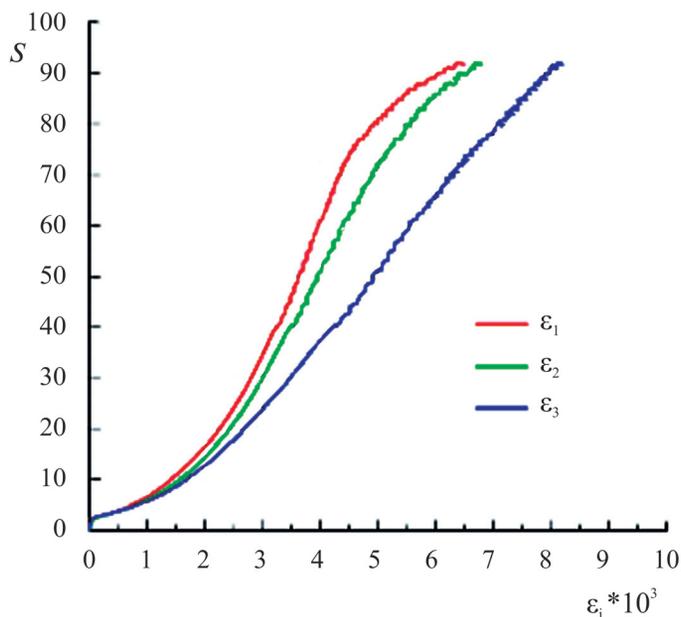
На рис. 2 показана программа нагружения образца, а на рис. 3 – кривые деформирования образца по трем осям во время опыта. Ось 3 была направлена вдоль отверстия, а оси 1 и 2 – перпендикулярно его оси.

Из рис. 3 видно, что неупругое деформирование образца, которое привело к его разрушению, началось при внешнем сжатии около 70 МПа. Тогда из решения задачи Ламе [13] для толстостенного цилиндра с внешним радиусом 20 мм и внутренним радиусом 5 мм, нагруженного внешним давлением 70 МПа, для кольцевого напряжения на контуре отверстия имеем  $S_{\theta}^* = 149.3$  МПа. Использование решения Ламе здесь правомерно, поскольку установка ИСТНН при нагружении обеспечивает равномерное приложение нагрузок по всей площади образца в течение всего процесса нагружения, что обеспечивает однородность полей деформаций и напряжений внутри образца в ходе эксперимента.

На рис. 4 приведена фотография образца после опыта. На ней видно, что отверстие в образце после испытания оказалось сильно деформированным и забитым разрушенной породой.

В таблице представлены результаты испытания на установке ИСТНН по схеме “полый цилиндр” образцов породы с центральным отверстием 10 мм, отобранных с разных глубин коллектора Приразломного нефтяного месторождения.

В табл. 1 горное давление  $q = \gamma H$ , где  $H$  – глубина залегания пласта,  $\gamma$  – средний удельный вес вышележащих пород,  $\gamma = 2.3$  г/см<sup>3</sup>. Из таблицы видно, что разрушение отверстия в большинстве образцов происходило при



**Рис. 3.** Кривые деформирования образца с отверстием 10 мм:  $S$  – напряжение обжатия образца, МПа;  $\epsilon_i$  – деформации по трем осям образца.



**Рис. 4.** Образец с отверстием после испытания.

величинах внешнего обжатия  $S^*$  выше горного. Применительно к скважине это означает, что разрушение ее стенок не произойдет вплоть до полного “осушения” скважины, т.е. полного сброса давления на ее забое. Однако это не соответствует наблюдаемым на практике фактам, согласно которым на Приразломном месторождении разрушение стенок необсаженных скважин зачастую начиналось при небольших депрессиях.

**Таблица 1.** Результаты экспериментов по схеме “полый цилиндр” для образцов с отверстием 10 мм

№ образца	Глубина отбора керна, м	Горное давление $q$ , МПа	Напряжение $S^*$ начала разрушения отверстия, МПа
П1-5	2542.75	58.5	65
П2-5	2548.5	58.6	63
П3	2453.6	56.4	68
П4-5	2566.75	59.0	62
П5-5	2514.75	57.8	53
П6-5	2521	58.0	70
П7-5	2517	57.9	62
П10-5	2537.5	58.4	70
П11-5	2528.75	58.2	51

Такое различие между полученными в опытах результатах и наблюдаемым на практике становится понятным, если принять во внимание масштабный эффект. Дело в том, что в опытах по схеме “полый цилиндр” диаметр ствола скважины (около 220 мм) моделируется отверстием диаметром 10 мм. Совершенно очевидно, что при таком моделировании на первый план выходят вопросы влияния на прочность породы кривизны отверстия, величина зерна породы (тем более, как показали эксперименты, размер зерна в изучаемых породах достаточно большой), размера образца по сравнению с диаметром отверстия и т.д. Все эти факторы влияют на механические свойства в одну сторону, а именно приводят к значительному увеличению прочностных характеристик породы, извлекаемых из опытов, по сравнению с реальными.

Чтобы выявить влияние размера отверстия на величину масштабного эффекта в проведенных экспериментах, было проведено испытание по схеме “полый цилиндр” образца П10 с отверстием диаметром 20 мм. Образец П10 был изготовлен из того же куска керна, что и образец П10-5 с отверстием диаметром 10 мм, а опыт проводился абсолютно по той же схеме, что и испытание образца П10-5.

Результаты испытания образца П10 по схеме “полый цилиндр” приведены на рис. 5 и 6. На рис. 5 показана программа нагружения образца, а на рис. 6 – кривые его деформирования по трем осям во время опыта. Ось 3 была направлена вдоль отверстия, а оси 1 и 2 – перпендикулярно его оси.

Из рис. 6 видно, что уже при внешнем сжатии около 30 МПа началось неупругое деформирование образца. Тогда из решения задачи Ламе [13] для толстостенного цилиндра с внешним радиусом 20 мм и внутренним радиусом 10 мм, нагруженного внешним давлением 30 МПа, для кольцевого напряжения на контуре отверстия имеем  $S_0^* = 80$  МПа.

Эти значения значительно ниже, чем для образца с отверстием 10 мм (соответственно 70 и 149 МПа). Применительно к скважине напряжение разрушения отверстия отвечает давлению на забое 28.4 МПа.

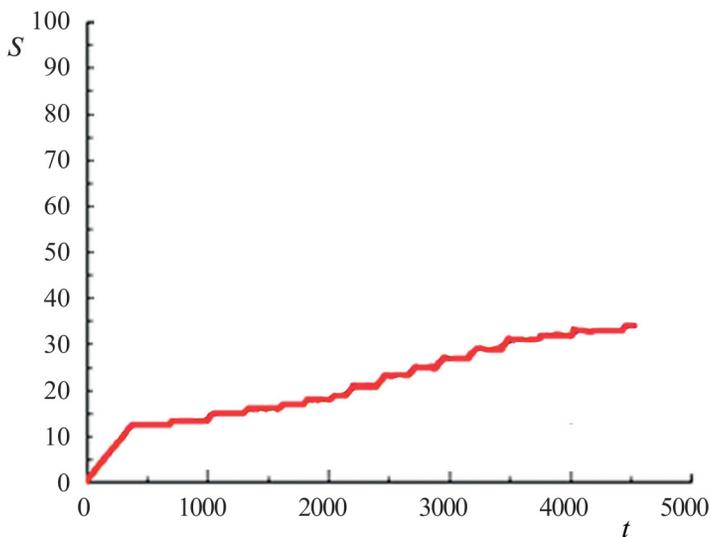


Рис. 5. Программа нагружения образца с отверстием 20 мм:  $S$  – напряжение обжатия образца, МПа;  $t$  – время, с.

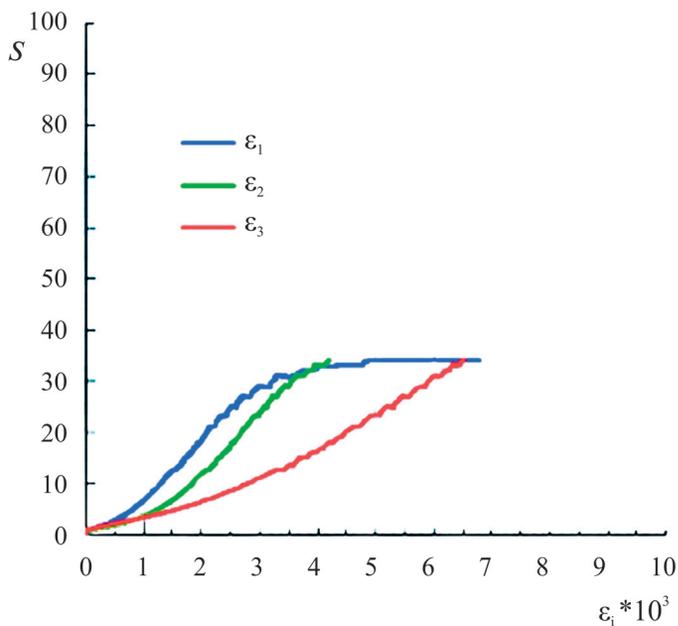


Рис. 6. Кривые деформирования образца с отверстием 20 мм:  $S$  – напряжение обжатия образца, МПа;  $\varepsilon_i$  – деформации по трем осям образца.

Таким образом, увеличение диаметра отверстия в два раза резко снизило величину напряжения разрушения, что подтверждает сделанный выше вывод о значительном влиянии масштабного эффекта на прочность образцов с отверстиями малого диаметра в сторону ее существенного завышения.

**5. Эксперименты по прямому физическому моделированию механических процессов в окрестности скважины при понижении давления в ней.** Чтобы понять, насколько полученные в опытах по схеме “полый цилиндр” значения напряжений, при которых происходит разрушение отверстий, близки к реально наблюдаемым на скважинах, на установке ИСТНН было выполнено прямое физическое моделирование процессов деформирования и разрушения породы в окрестности скважины при различных режимах ее работы. В этих экспериментах кубический образец с гранью 40 мм фактически моделирует “точку” на контуре скважины. В этом случае влияние масштабного эффекта на изучаемые механические и прочностные свойства породы сводится к минимуму, поскольку размер образца и размер исследуемой области на контуре скважины совпадают.

На рис. 7 показана программа нагружения образца на установке ИСТНН, отвечающая моделированию деформационных процессов на контуре необсаженной скважины при понижении давления на ее забое [14]. Представлены зависимости от времени напряжений  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , прикладываемых в ходе опыта к граням образца по осям 1, 2, 3 в нагружающем узле установки ИСТНН и

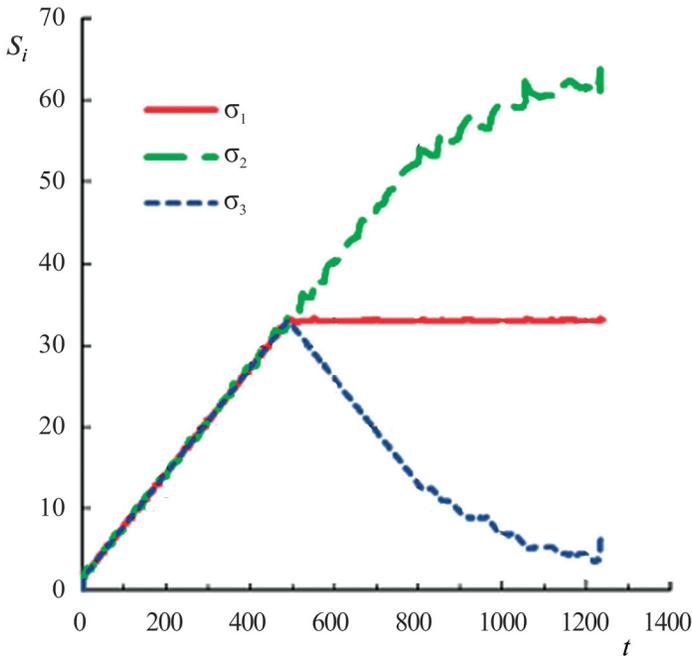


Рис. 7. Программа нагружения образца П 10-4:  $S_i$  – напряжения, прикладываемые к граням образца, МПа;  $t$  – время, с.

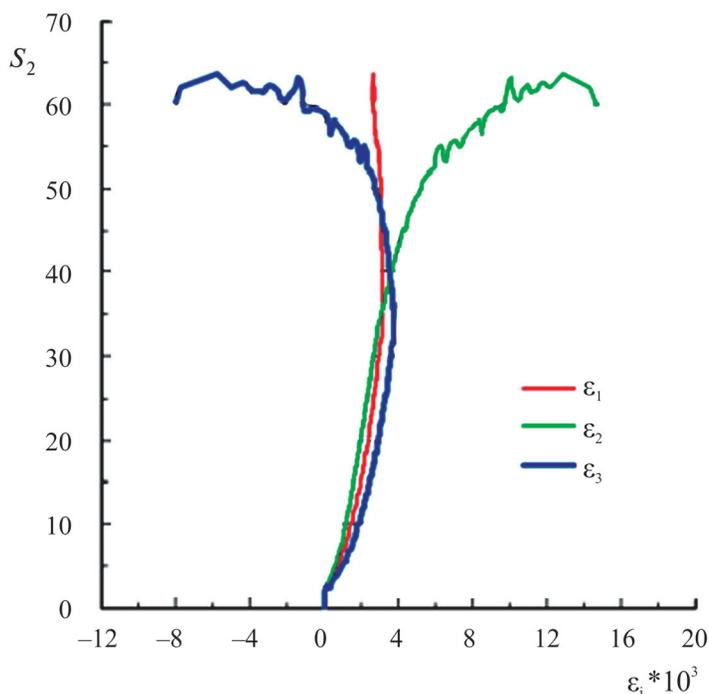


Рис. 8. Кривые деформирования образца П 10-4 в ходе опыта:  $S_2$  – параметр нагружения, МПа;  $\varepsilon_i$  – деформации по трем осям образца.

отвечающих эффективным напряжениям  $|S_z|$ ,  $|S_\theta|$ ,  $|S_r|$ , действующим на контуре скважины. Испытанный образец П10-4 был отобран из коллектора Приразломного нефтяного месторождения практически с той же глубины, что и два предыдущих.

На рис. 8 приведены кривые деформирования образца П 10-4 по трем осям в зависимости от параметра нагружения  $S_2$ .

Из рис. 8 видно, что разрушение образца П 10-4 в опыте по физическому моделированию произошло при значении напряжения  $S_2$ , отвечающему кольцевому напряжению  $S_\theta^w$  на контуре скважины, около 64 МПа, что близко к величине напряжения  $S_\theta^* = 80$  МПа, при котором произошло разрушение отверстия диаметром 20 мм в образце П10 в опыте по схеме “полый цилиндр”.

Поскольку горное давление  $q$  на глубине отбора образца П10-4 составляет около 58 МПа, а величина давления на забое скважины  $p_w$  связана с кольцевым напряжением  $S_\theta^w$  на ее контуре соотношением  $p_w = q - S_\theta^w/2$  [14], для давления на забое скважины, при котором начинается разрушение на ее контуре, находим  $p_w = 26$  МПа. Это значение близко к значению 28.4 МПа, полученному из испытания образца с отверстием 20 мм по схеме “полый цилиндр”.

Эти факты являются еще одним подтверждением, что повышенная прочность образцов с отверстиями 10 мм в опытах по схеме “полый цилиндр” объясняется влиянием масштабного эффекта.

**Заключение.** Выполненные на установке ИСТНН испытания образцов пород из коллектора Приразломного нефтяного месторождения по схеме “полый цилиндр” с центральными отверстиями 10 и 20 мм и эксперименты по физическому моделированию деформационных процессов на контуре необсаженной скважины при понижении давления на ее забое показали:

– эксперименты по схеме “полый цилиндр”, которые можно рассматривать как прямое моделирование процесса понижения давления на забое необсаженной скважины, при малой величине отверстия (около 10 мм) в силу масштабного эффекта не позволяют количественно определить величину допустимых депрессий, не приводящих к разрушению отверстия;

– увеличение диаметра отверстия в два раза (до 20 мм) резко снизило величину напряжения разрушения, что подтверждает сделанный выше вывод о значительном влиянии масштабного эффекта на прочность образцов с отверстиями малого диаметра в сторону ее существенного завышения;

– еще одним подтверждением того, что завышенная прочность образцов с отверстиями 10 мм в опытах по схеме “полый цилиндр” объясняется влиянием масштабного эффекта, является то обстоятельство, что напряжение разрушения образца с отверстием 20 мм очень близко к тем значениям, которые получились при физическом моделировании процессов деформирования и разрушения породы в окрестности необсаженной скважины при понижении давления на ее забое;

– полученные результаты о значительном увеличении прочности отверстий небольшого диаметра вследствие масштабного эффекта объясняют, почему на практике, даже при создании глубоких депрессий, в обсаженных скважинах не наблюдается растрескивание и разрушение породы в окрестности перфорационных отверстий, приводящих к росту продуктивности скважин. Это вполне объяснимо малым диаметром перфорационных отверстий – при кумулятивной перфорации он составляет 8–12 мм (при длине до 350 мм), что сопоставимо с диаметром отверстий в опытах “полый цилиндр”;

Работа выполнена по теме госзадания (№ госрегистрации 124012500441-6).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Койфман М.И., Протодьяконов М.М., Тедер Р.И. Механические свойства горных пород. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 169 с.
2. Койфман М.И. О влиянии размеров на прочность горных пород / Исследование физико-механических свойств горных пород применительно к задачам управления горным давлением. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 6–14.
3. Ермолович Е.А., Овчинников А.В., Анисеев А.А., Хаустов В.В. Влияние размеров образца на прочность мела // Изв. Тульского государственного университета. Науки о Земле. 2020. № 2. С. 263–271.
4. Komurlu E. Loading rate conditions and specimen size effect on strength and deformability of rock materials under uniaxial compression // Int. J. Geo-Eng. 2018. V. 9. № 17. P. 1–11.  
<https://doi.org/10.1186/s40703-018-0085-z>

5. *Kun Du, Xuefeng Li, Rui Su, Ming Tao, Shizhan Lv, Jia Luo, Jian Zhou.* Shape ratio effects on the mechanical characteristics of rectangular prism rocks and isolated pillars under uniaxial compression // *Int. J. Min. Sci. Technol.* 2022. V. 32. № 2. P. 347–362.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijmst.2022.01.004>
6. *Усольцева О.М., Цой П.А., Семенов В.Н.* Влияние размера образцов на деформационно-прочностные свойства горных пород // *Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук.* 2020. Т. 7. № 2. С. 53–59.  
<https://doi.org/10.15372/FPVGN2020070209>
7. *Durmeková T., Bednarik M., Dikejová P., Adamcova R.* Influence of specimen size and shape on the uniaxial compressive strength values of selected Western Carpathians rocks // *Environmental Earth Sciences.* 2022. V. 81. Article 247.  
<https://doi.org/10.1007/s12665-022-10373-1>
8. *Сукнев С.В.* Разрушение хрупкого геоматериала с круговым отверстием при двухосном нагружении // *ПМТФ.* 2015. Т. 56. № 6. С. 166–172.
9. *Сукнев С.В.* Применение подхода механики конечных трещин для оценки разрушения квазихрупкого материала с круговым отверстием // *Изв. РАН. МТТ.* 2021. № 3. С. 13–25. <http://doi.org/10.31857/S0572329921020161>
10. *Karev V., Kovalenko Yu.* Triaxial loading system as a tool for solving geotechnical problems of oil and gas production // *True Triaxial Testing of Rocks.* Leiden: Taylor & Francis / Balkema. 2013. P. 301–310.
11. *Коваленко Ю.Ф., Устинов К.Б., Карев В.И.* Геомеханический анализ образования вывалов на стенках скважин // *Изв. РАН. МТТ.* 2022. № 6. С. 148–163.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329922060125>
12. *Устинов К.Б., Карев В.И., Коваленко Ю.Ф., Барков С.О., Химуля В.В., Шевцов Н.И.* Экспериментальное исследование влияния анизотропии на ориентацию вывалов в скважинах // *Изв. РАН. МТТ.* 2023. № 3. С. 21–35.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329922600384>
13. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. 576 с.
14. *Karev V., Kovalenko Y., Ustinov K.* *Geomechanics of Oil and Gas Wells.* † Springer. 2020. 184 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-26608-0>

## SCALE EFFECT IN MODELING OF MECHANICAL PROCESSES IN THE VICINITY OF A BORHOLE ON A TRUE TRIAXIAL LOADING SETUP

V. I. Karev<sup>a</sup>, Yu. F. Kovalenko<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

\*e-mail: [perfolinkgeo@yandex.ru](mailto:perfolinkgeo@yandex.ru)

**Abstract** – One of the main problems when conducting laboratory tests of rock specimens aimed at determining their mechanical and strength properties is to transfer the test results of relatively small specimens to sufficiently large areas of a rock massif, often with a complex structure. This is due to the fact that generalized numerical indicators characterizing the degree of influence of structural heterogeneities of various sizes on the deformation and destruction of rocks and massifs are not yet available. In addition to heterogeneity, other factors also affect the pro-

cesses under study, such as the stress state of the massif, the presence of geological disturbances, macrofractures, etc. These issues are studied in this paper based on a comparison of the results of experiments performed on the Triaxial Independent Loading Test System of the Institute of Problems in Vechnics of the Russian Academy of Sciences using the “hollow cylinder” scheme on specimens with a central hole of 10 and 20 mm in diameter and physical modeling of deformation processes in the vicinity of wells with a decrease in pressure at their bottomhole for reservoir rocks of the Prirazlomnoye oil field.

*Keywords:* scale effect, true triaxial loading setup, hollow cylinder scheme, physical modeling, borehole, specimen, sand production

## REFERENCES

1. *Koifman M.I., Protodyakonov M.M., Teder R.I.* Mechanical Properties of Rocks. Moscow: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1963, p. 169. [in Russian].
2. *Koifman M.I.* About the influence of dimensions on the strength of rocks / Research of physical and mechanical properties of rocks in relation to the tasks of mountain pressure control. M.: Izd. of the USSR Academy of Sciences, 1962. P. 6–14. [in Russian].
3. *Ermolovich E.A., Ovchinnikov A.V., Anikeev A.A., Haustov V.V.* Influence of the specimen size on the strength of chalk // Proceedings of Tula State University. Earth Sciences. 2020. № 2. P. 263–271. [in Russian].
4. *Komurlu E.* Loading rate conditions and specimen size effect on strength and deformability of rock materials under uniaxial compression // Geo-Engineering. 2018. V. 9. № 17. P. 1–11.  
<https://doi.org/10.1186/s40703-018-0085-z>
5. *Kun Du, Xuefeng Li, Rui Su, Ming Tao, Shizhan Lv, Jia Luo, Jian Zhou.* Shape ratio effects on the mechanical characteristics of rectangular prism rocks and isolated pillars under uniaxial compression // International Journal of Mining Science and Technology. 2022. V. 32. P. 347–362.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijmst.2022.01.004>
6. *Usoltseva O.M., Tsoi P.A., Semyonov V.N.* Influence of specimen size on deformation and strength properties of rocks // Fundamental and Applied Issues of Mining Sciences. 2020. V. 7. № 2. P. 53–59.  
<https://doi.org/10.15372/FPVGN2020070209> [in Russian].
7. *Durmeková T., Bednarik M., Dikejová P., Adamcova R.* Influence of specimen size and shape on the uniaxial compressive strength values of selected Western Carpathians rocks // Environmental Earth Sciences. 2022. V. 81. № 9.  
<https://doi.org/10.1007/s12665-022-10373-1>. 17
8. *Suknev S.V.* Fracture of a brittle geomaterial with a circular hole under biaxial loading // PMTF. 2015. V. 56. № 6. P. 166–172. [in Russian].
9. *Suknev S.V.* Application of Finite Crack Mechanics Approach for Fracture Assessment of Quasi-brittle Material with a Circular Hole // Izv. RAS. MTT. 2021. № 3. P. 13–25. [in Russian].

10. *Karev V., Kovalenko Yu.* Triaxial loading system as a tool for solving geotechnical problems of oil and gas production // True Triaxial Testing of Rocks. Leiden: Taylor & Francis / Balkema. 2013. P. 301–310.
11. *Kovalenko Yu.F., Ustinov K.B., Karev V.I.* Geomechanical analysis of formation of breakouts in well walls // Izv. RAS. MTT. 2022. № 6. P. 148–163. [in Russian].
12. *Ustinov K.B., Karev V.I., Kovalenko Yu.F., Barkov S.O., Khimulya V.V., Shevtsov N.I.* Experimental study of the effect of anisotropy on the orientation of breakouts in wells // Izv. RAS. MTT. 2023. № 3. P. 21–35. [in Russian].
13. *Timoshenko S.P., Goodyear J.* Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1979. 560 p. [in Russian].
14. *Karev V., Kovalenko Y., Ustinov K.* Geomechanics of Oil and Gas Wells. Springer. 2020. 184 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-26608-0>

УДК 539.3

## О МАКСИМУМЕ ПЕРВОЙ РЕЗОНАНСНОЙ ЧАСТОТЫ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

© 2024 г. А. О. Ватульян<sup>а, \*</sup>, В. О. Юров<sup>б, \*\*</sup>

<sup>а</sup> Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

<sup>б</sup> Южный математический институт ВЦ РАН, Владикавказ, Россия

\*e-mail: aovatulyan@sfedu.ru, \*\*e-mail: vitja.jurov@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.05.2024 г.

После доработки 08.06.2024 г.

Принята к публикации 11.06.2024 г.

В работе рассмотрена неклассическая задача оптимизации, связанная с развитием производства новых функционально-градиентных материалов. Предлагается производить оптимизацию первой собственной частоты колебаний за счет выбора закона изменения модулей упругости, а не формы, как это делается в большинстве работ, посвященных оптимизации. Такая постановка задачи становится практически обоснованной с развитием 3D-печати, производства ФГМ-керамики с заданными свойствами. В качестве примера рассмотрены задачи о колебаниях ФГМ стержня и ФГМ балки с пружинными граничными условиями на одном из концов.

*Ключевые слова:* неоднородность, оптимизация, стержень, колебания

DOI: 10.31857/S1026351924040121, EDN: UCJCJK

**Введение.** Решение задач оптимизации свойств упругих тел направлено на улучшение некоторых характеристик (максимизация первой резонансной частоты или критической силы) за счет выбора формы или переменности упругих модулей. Подробный исторический обзор приводится в монографии [1], где отмечается, что задачи оптимизации упругих конструкций берут свое начало с работы Г. Галилея по оптимизации профиля консольной балки, нагруженной силой на конце. Таким образом, первый тип задач оптимизации связан с нахождением законов изменения геометрических характеристик (в основном толщины для пластин и формы поперечного сечения для колонн и балок), обеспечивающих минимальный вес при заданной нагрузке, или, что эквивалентно, максимальную прочность при заданном весе. Второй тип задач связан с максимизацией критической силы в задачах устойчивости колонн [2, 3], где фундаментальные результаты принадлежат Ж. Лагранжу, Т. Клаузену и Е.Л. Николаи. Третий тип задач – динамические, как и задачи устойчивости, связаны со спектральными задачами [4]. Динамические задачи по оптимизации частот собственных

колебаний струны и балки были впервые рассмотрены в работах М.Г. Крейна [5] и Ф. Ниордсона [6].

Особо отметим работу [6], так как в ней впервые предложен подход к максимизации первой собственной частоты на основе нахождения максимального значения для функционала Релея и позволяющий свести задачу к итерационному решению краевой задачи для нелинейного дифференциального оператора. Там же решена задача о нахождении оптимального распределения толщины балки, которое обеспечивает максимальное увеличение первой собственной частоты изгибных колебаний. Этот подход далее развит и описан для ряда задач в работе [7].

С ростом применения на практике армированных композитов возникли задачи по оптимизации внутренней структуры упругих тел, которые в большинстве случаев решались на основе моделей кусочно-однородных и анизотропных тел. Однако в работах [8, 9] решены задачи об оптимизации первой собственной частоты для продольно неоднородной балки. В обеих работах получены оптимальные законы изменения безразмерного модуля Юнга, причем в [8] учтены предварительные напряжения, а в [9] приведены результаты для всех основных типов граничных условий (консоль, шарнирное опирание, закрепленные торцы).

В настоящее время с развитием технологий производства материалов и конструкций из функционально-градиентных материалов (ФГМ) стала актуальной задача по отысканию непрерывных оптимальных распределений плотности, пористости, упругих модулей, позволяющих увеличить резонансную частоту. Так, например, в работе [10] при помощи использования генетического алгоритма решена задача об определении переменного модуля упругости для увеличения критической силы. В работе [11] рассмотрена задача увеличения критической силы для колонны, где в качестве управляющих функций фигурируют как модуль Юнга, так и форма поперечного сечения.

Большинство работ по максимизации первой резонансной частоты выполнено в рамках вариации геометрических характеристик. В работе [12] изучается задача о максимизации основной резонансной частоты башни за счет оптимизации формы ее поперечного сечения. Оптимальное решение для диаметра и толщины секций разыскивается в классе кусочно-линейных функций. Предложено использование МКЭ с кубической аппроксимацией прогиба и реализован алгоритм по отысканию оптимального решения. В работе [13] изучена задача об оптимизации первой собственной частоты для круглой анизотропной пластинки. Управляющей функцией является переменная толщина пластинки, а решение задачи строится при помощи метода разложения по малому параметру для определенного типа анизотропии. В работе [14] описан итерационный алгоритм решения оптимизационной задачи, основанный на методе возмущений. Решена задача об оптимизации частоты колебаний при помощи управления площадью поперечного сечения. В работе [15] в рамках градиентного подхода осуществляется максимизация первой резонансной частоты для трехмерного стержня с использованием МКЭ.

В настоящей работе получены условия оптимальности для полей деформации при исследовании задачи о максимизации первой резонансной

частоты упругого тела за счет вариации модуля (модулей) упругости, приведены примеры.

**1. Общие условия оптимальности.** Рассмотрим установившиеся колебания неоднородного тела, занимающего объем  $V$  и ограниченного гладкой поверхностью  $S$ . Уравнения колебаний имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

определяющие соотношения запишем в виде закона Гука для анизотропной среды:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l}, \quad (1.2)$$

где  $c_{ijkl}$  — компоненты тензора упругих модулей, обладающие обычными свойствами симметрии и положительной определенности.

Будем считать, что граница  $S$  состоит из двух частей  $S_u, S_\sigma$ , на которых заданы однородные граничные условия:

$$u_i \Big|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j \Big|_{S_\sigma} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь  $n_j$  — компоненты вектора внешней нормали к поверхности  $S$ .

Умножим (1) на  $u_i$  и проинтегрируем по объему  $V$ . Получим:

$$\int_V \sigma_{ij,j} u_i dV + \omega^2 \int_V \rho u_i u_i dV = 0.$$

Используя теорему Гаусса—Остроградского и граничные условия (1.3), получим:

$$J = \omega^2 = \frac{\int_V c_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} dV}{\int_V \rho u_i u_i dV} = \frac{\Pi}{K}. \quad (1.4)$$

Поставим задачу максимизации первой резонансной частоты за счет выбора условного модуля упругости  $E(x)$ . Введем новый тензор (с безразмерными компонентами)  $R_{ijkl}$  следующим образом:  $c_{ijkl} = E(x)R_{ijkl}$ , где компоненты  $R_{ijkl}$  не зависят от координат; в случае изотропного тела эти компоненты зависят только от коэффициента Пуассона.

Будем считать, что среднее по объему значение модуля фиксировано:

$$\frac{1}{V} \int_V E(x) dV = m_0, \quad (1.5)$$

и введем функционал

$$J_1 = \frac{1}{V} \int_V E(x) dV - m_0. \quad (1.6)$$

Затем сформируем функционал:

$$J_*[E] = J + \Lambda J_1, \quad (1.7)$$

где  $\Lambda$  – множитель Лагранжа.

Проварьируем функционал (1.7) и найдем его первую вариацию:

$$\begin{aligned} \delta J_* &= \left. \frac{\partial}{\partial t} J_*[E + t\delta E] \right|_{t=0} = \\ &= \frac{\int_V (\delta E R_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} + 2ER_{ijkl} \delta u_{i,j} u_{k,l}) dV}{\int_V \rho u_i u_i dV} - 2\omega^2 \frac{\int_V (\rho \delta u_i u_i) dV}{\int_V \rho u_i u_i dV} + \frac{\Lambda}{V} \int_V \delta E dV. \end{aligned}$$

Условие стационарности функционала  $J_*$  дает

$$\delta J_* = \int_V [\Phi \delta E + \Phi_i \delta u_i] dV = 0, \quad (1.8)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi &= R_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} + 2\Lambda K_0 V^{-1}, \\ \Phi_i &= 2 \left[ (ER_{ijkl} u_{k,l})_{,j} + \rho \omega^2 u_i \right], \\ K_0 &= \frac{1}{2} \int_V \rho u_i u_i dV. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Учитывая независимость вариаций  $\delta E, \delta u_i$ , получим следующее условие оптимальности:

$$2\Pi = R_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} = \Lambda_*, \quad \Lambda_* = -2\Lambda K_0 V^{-1}. \quad (1.10)$$

Дополняя (1.10) уравнениями движения и условием нормировки (1.5), получаем полную систему:

$$(ER_{ijkl} u_{k,l})_{,j} + \rho \omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \frac{1}{V} \int_V E(x) dV = m_0.$$

Таким образом, задача об оптимальном законе изменения модуля  $E(x)$  сводится к нелинейной краевой задаче относительно  $E, u_i$ , которая может быть решена только численно, например итерационным способом, подобно изложенному в работе [6].

**2. Условие оптимальности в изотропном случае для параметров Ламе.** В рамках такого же подхода можно получить условие оптимальности в изотропном случае для двух функций – параметров Ламе  $\lambda(x)$  и  $\mu(x)$ , характеризующих упругие свойства неоднородного материала. Для этого можно использовать полученный выше функционал (1.4), причем для изотропного случая:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \left( \lambda (u_{k,k})^2 + \mu (u_{i,j} + u_{j,i})(u_{i,j} + u_{j,i}) \right) dV,$$

а условие оптимальности будем отыскивать при дополнительных условиях:

$$J_1 = \frac{1}{V} \int_V \lambda dV - \lambda_0 = 0, \quad J_2 = \frac{1}{V} \int_V \mu dV - \mu_0 = 0.$$

В этом случае сформируем функционал:

$$J_* = J + \Lambda_1 J_1 + \Lambda_2 J_2,$$

где  $\Lambda_1, \Lambda_2$  – множители Лагранжа, и из условия  $\delta J_* = 0$ , приравнявая нулю коэффициенты при независимых вариациях, находим следующие условия оптимальности:

$$(u_{k,k})^2 + \Lambda_1 (2K_0 V)^{-1} = 0, \quad (2.1)$$

$$(u_{i,j} + u_{j,i})(u_{i,j} + u_{j,i}) + \Lambda_2 (2K_0 V)^{-1} = 0,$$

$$(\lambda u_{k,k})_{,j} + (\mu (u_{i,j} + u_{j,i}))_{,j} + \rho \omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Таким образом, имеем:

$$(u_{k,k})^2 = \lambda_1^2 = \text{const}, \quad (2.3)$$

$$(u_{i,j} + u_{j,i})(u_{i,j} + u_{j,i}) = \lambda_2^2 = \text{const}.$$

Эти условия характеризуют постоянство некоторых инвариантов тензора деформаций.

Из них можно определить  $u_{i,j}$  (один из простейших вариантов  $u_i = a_{ij} x_j + b_i$ ,  $a_{ij}, b_i$  – постоянные), а затем из соотношений (2.2) получить систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для нахождения функций  $\lambda, \mu$ :

$$(\lambda a_{kk})_{,j} + (\mu (a_{ik} + a_{ki}))_{,k} + \rho \omega^2 (a_{ik} x_k + b_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

Возвращаясь к условию (1.10), отметим, что оно содержит выражение для условной потенциальной энергии деформаций. Для одномерных задач (изгиб, растяжение, кручение стержня) это выражение может быть упрощено, откуда сразу получается условие на соответствующую деформационную характеристику, позволяющее достаточно просто получить аналитическое решение задачи. Так, например, для стержня  $V = S \times [0, l]$  ( $S$  – поперечное сечение) в случае продольных колебаний (заложены гипотезы  $u_1 = u_2 = 0$ ,  $u_3 = u(x)$ ,  $x = x_3$ ) имеем  $2\Pi = F(u)^2$ , где  $u$  – характеризует продольное смещение,  $F$  – площадь поперечного сечения. Далее, находя  $u$  из условия  $(u')^2 = \lambda_1^2$ , получаем уравнение первого порядка относительно  $E(x)$ . Наряду с гладким решением  $u(x) = x$  существует негладкое решение с изломом  $u(x) = \{x, x < x_0, 2x_0 - x, x \geq x_0\}$ .

Как показали расчеты для случая жесткой заделки на левом конце первое (гладкое) решение отвечает первой собственной частоте, а второе (негладкое) решение отвечает второй собственной частоте.

В случае изгибных колебаний (заложены гипотезы модели Эйлера–Бернулли)  $u_1 = -x_2 w'(x)$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = w(x)$ ,  $x = x_3$  имеем  $2\Pi = J(w'')^2$ , где  $J$  – момент инерции,  $w$  – прогиб нейтральной оси стержня, и условие оптимальности  $(w'')^2 = \lambda_2^*$  позволяет сразу определить прогиб и получить дифференциальное уравнение второго порядка для  $E(x)$ .

В качестве частных случаев рассмотрим задачи о продольных и изгибных колебаниях стержня, с различными типами граничных условий. Будем считать для простоты, что плотность постоянна  $\rho = \rho_0$ .

**3. Продольные колебания. Пример 1.** Обезразмерив задачу о продольных колебаниях неоднородного стержня, получим:

$$(gu')' + \kappa u = 0, \quad u(0) = 0, \quad g(1)u'(1) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (3.1)$$

где  $g$  – безразмерный модуль Юнга,  $\kappa$  – безразмерный спектральный параметр, пропорциональный квадрату частоты колебаний,  $u = u(x)$  – в данном случае безразмерная функция, описывающая продольные смещения. Будем искать такую функцию  $g = g(x)$ , которая удовлетворяет условию

$$\int_0^1 g(x) dx = 1 \quad (3.2)$$

и для которой первое собственное значение  $\kappa$  примет максимальное значение. Используя условие оптимальности, которое имеет вид  $(u')^2 = \text{const}$ , с точностью до амплитудного множителя получаем  $u(x) = x$ . Решая дифференциальное уравнение (3.1), получаем:

$$g = \frac{3}{2}(1 - x^2).$$

На основе соотношения Релея или на основе численных расчетов получаем  $\kappa = 3$ . Заметим, что первое собственное значение для однородной балки  $\kappa = 0.25\pi^2 \approx 2.467$  и выигрыш составляет порядка 20%.

Найдено также негладкое решение задачи:

$$u(x) = \begin{cases} x, & x < 1/3, \\ 2/3 - x, & x \geq 1/3, \end{cases}$$

которому отвечает функция

$$g = 27 \begin{cases} (1 - 9x^2)/18, & x < 1/3, \\ (4x - 3x^2 - 1)/6, & x \geq 1/3 \end{cases}$$

и собственное значение  $\kappa = 27$ , которое является вторым.

**4. Изгибные колебания. Пример 2.** Рассмотрим безразмерное уравнение изгибных колебаний неоднородной балки:

$$(g(x)w''(x, \kappa))'' - \kappa w(x, \kappa) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (4.1)$$

где  $g(x) = E(x)E_0^{-1}$ ,  $\kappa = \rho_0 Fl^4 \omega^2 E_0^{-1} J^{-1}$ ,  $E_0$  – характерное значение модуля упругости (например, среднее значение). Будем искать такую функцию  $g = g(x)$ , которая удовлетворяет условию (3.2) и для которой первое собственное значение  $\kappa$  принимает максимальное значение. При этом можно рассмотреть следующие типы граничных условий:

а) шарнирное опирание

$$w|_{x=0} = w|_{x=1} = (gw'')|_{x=0} = (gw'')|_{x=1} = 0; \quad (4.2)$$

б) консоль

$$w|_{x=0} = w'|_{x=0} = (gw'')|_{x=1} = (gw'')'|_{x=1} = 0; \quad (4.3)$$

в) заделка обоих концов

$$w|_{x=0} = w'|_{x=0} = w|_{x=1} = w'|_{x=1} = 0; \quad (4.4)$$

г) консоль при наличии упругой заделки на конце  $x=0$

$$\left( (gw'')' + c_1 w \right)|_{x=0} = (gw'' - c_2 w')|_{x=0} = (gw'')|_{x=1} = (gw'')'|_{x=1} = 0. \quad (4.5)$$

Здесь  $c_1, c_2$  – положительные параметры, характеризующие характеристики упругости в заделке [16].

Были построены оптимальные решения для граничных условий (4.2)–(4.4), которые совпали с рассмотренными ранее в работе [9]. Заметим, что при условиях (4.2) и (4.3) существуют, соответственно, гладкие решения в виде полиномов 4-го порядка:

$$w(x) = x(1-x), \quad g = 5(x^4 - 2x^3 + x),$$

$$w(x) = x^2, \quad g = 20\varphi(x), \quad \varphi(x) = \left( \frac{x^4}{24} - \frac{x}{6} + \frac{1}{8} \right), \quad (4.6)$$

а при условиях (4.4) функция  $w(x)$  имеет два разрыва второй производной, а  $g(x)$  – разрывы первой производной. Эти решения можно представить в виде:

$$w(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0.25, \\ 0.125 - (0.5 - x)^2, & 0.25 \leq x \leq 0.75, \\ (1-x)^2, & x > 0.75; \end{cases}$$

можно записать с учетом симметрии относительно середины отрезка:

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x), & x < 0.5, \\ g_1(1-x), & x \geq 0.5, \end{cases}$$

$$g_1(x) = \frac{15360}{23} \begin{cases} \frac{23}{6144} + \frac{x^4}{24} - \frac{x}{64}, & x < \frac{1}{4}, \\ \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{32} + \frac{x}{96} - \frac{7}{2048}, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Результаты нахождения спектрального параметра приведены в табл. 1.

**Таблица 1.** Первое собственное значение для трех вариантов граничных условий

	Однородная балка	Оптимальный закон
Шарнирное опирание (4.2)	$\kappa = \pi^4 \approx 97.41$	$\kappa = 120$
Консоль (4.3)	$\kappa \approx 12.36$	$\kappa = 20$
Заделка обоих концов (4.4)	$\kappa \approx 500.564$	$\kappa \approx 667.826$

Оказалось, что по сравнению с однородным случаем первое собственное значение  $\kappa$  удается увеличить соответственно на 23, 61 и 33%.

Обратимся теперь к задаче с граничными условиями (4.5). Получим соотношение Релея. Для этого умножим уравнение (4.1) на  $w$  и проинтегрируем по отрезку  $[0, 1]$ :

$$\int_0^1 ((gw'')'' w - \kappa w^2) dx = 0.$$

Выражая спектральный параметр и интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\int_0^1 (gw'')'' w dx}{\int_0^1 w^2 dx} = \frac{(gw'')' w \Big|_0^1 - (gw'') w' \Big|_0^1 + \int_0^1 g(w'')^2 dx}{\int_0^1 w^2 dx} = \\ &= \frac{c_1 w^2(0) + c_2 (w')^2(0) + \int_0^1 g(w'')^2 dx}{\int_0^1 w^2 dx}. \end{aligned}$$

Условие оптимальности принимает тот же вид  $(w'')^2 = \text{const}$ . Решение с точностью до амплитудного множителя будем искать в виде  $w(x) = x^2 + kx + b$ . Заметим, что в зависимости от граничных условий решение задачи может иметь или не иметь разрывов второй производной, что демонстрируют случаи (4.6) и (4.7). Следовательно, не для всех значений параметров  $c_1, c_2$  гладкое решение вида  $w(x) = x^2 + kx + b$  существует.

Решая (4.1) относительно  $g(x)$ , находим:

$$g = \frac{\kappa}{2} \left( \frac{x^4}{12} + k \frac{x^3}{6} + b \frac{x^2}{2} \right) + mx + p, \quad (4.8)$$

где  $k = \kappa(3c_1 - \kappa)/\Delta$ ,  $b = \kappa(\kappa + 24c_2)/(6\Delta)$ ,  $m = -c_1b/2$ ,  $p = c_2k/2$ ,  
 $\Delta = \kappa^2 - 4\kappa c_1 - 12\kappa c_2 + 12c_2 c_1$ .

В результате решение запишется в виде:

$$w(x) = x^2 + \kappa x \frac{(3c_1 - \kappa)}{\Delta_1 \Delta_2 - 3\kappa^2} + \kappa \frac{1}{6} \frac{(24c_2 + \kappa)}{\Delta_1 \Delta_2 - 3\kappa^2},$$

$$g = \kappa \left( \frac{x^4}{24} + \frac{(3c_1 - \kappa)}{2\Delta} \left( \kappa \frac{x^3}{6} + c_2 \right) + \frac{(\kappa + 24c_2)}{12\Delta} \left( \kappa \frac{x^2}{2} - c_1 x \right) \right).$$

Параметр  $\kappa$  определяется из условия (3.2). Возникающее кубическое уравнение

$$\frac{\kappa}{720} \frac{(\kappa^2 - 9\kappa c_1 - 192\kappa c_2 + 432c_1 c_2)}{(\kappa^2 - 4\kappa c_1 - 12\kappa c_2 + 12c_1 c_2)} = 1$$

решается численно. Для анализа полученного результата рассмотрим 2 частных случая:

*Случай 1* ( $c_2 \rightarrow \infty$ ):  $((gw'')' + c_1 w)|_{x=0} = 0$ ,  $w'(0) = 0$ .

Параметры в (4.8) принимают вид  $k = 0$ ,  $b = \kappa/3\Delta_1$ ,  $m = -c_1\kappa/6\Delta_1$ ,  
 $p = \kappa(3c_1 - \kappa)/24\Delta_1$ ,  $\Delta_1 = c_1 - \kappa$ , что позволяет записать решение оптимизационной задачи в виде:

$$w(x) = x^2 + \kappa/(3c_1 - 3\kappa),$$

$$g = \kappa \left( \frac{x^4}{24} + \frac{\kappa x^2}{12\Delta_1} - \frac{c_1 x}{6\Delta_1} + \frac{(3c_1 - \kappa)}{24\Delta_1} \right). \quad (4.9)$$

Параметр  $\kappa$  определим из условия (3.2), которое сводится теперь к квадратному уравнению, имеющему решение следующего вида:

$$\kappa = \frac{9}{8}c_1 + \frac{45}{2} - \frac{3}{8}\sqrt{9c_1^2 + 40c_1 + 3600}. \quad (4.10)$$

*Случай 2* ( $c_2 \rightarrow \infty$ ):  $w(0) = 0$ ,  $(gw'' - c_2 w')|_{x=0} = 0$ .

Аналогично имеем:

$$b = 0, \quad k = 3\kappa/(4\Delta_2), \quad m = -\kappa(24c_2 + \kappa)/(48\Delta_2), \quad p = 3\kappa c_2/(8\Delta_2), \quad \Delta_2 = 3c_2 - \kappa,$$

$$w(x) = x^2 + 3\kappa x/(12c_2 - 4\kappa), \quad g = \kappa \left( \frac{x^4}{24} + \frac{\kappa x^3}{16\Delta_2} - \frac{(24c_2 + \kappa)x}{48\Delta_2} + \frac{3c_2}{8\Delta_2} \right), \quad (4.11)$$

$$\kappa = 160 + 24c_2 - 8\sqrt{9c_2^2 + 105c_2 + 400}. \quad (4.12)$$

Асимптотические представления решений (4.9), (4.11) при больших  $c_1, c_2$  имеют вид:

$$g = \kappa\varphi(x) + \kappa^2 \left( \frac{x^2}{12} - \frac{x}{6} + \frac{1}{12} \right) \frac{1}{c_1} + o\left(\frac{1}{c_1}\right) \quad (\text{Случай 1}), \quad (4.13)$$

$$g = \kappa\varphi(x) + \kappa^2 \left( \frac{x^3}{48} - \frac{x}{16} + \frac{1}{24} \right) \frac{1}{c_2} + o\left(\frac{1}{c_2}\right) \quad (\text{Случай 2}). \quad (4.14)$$

На основе приведенных асимптотических представлений параметр  $\kappa$  также может быть определен как один из корней квадратного уравнения, возникающего при удовлетворении условию (3.2):

$$\kappa = -\frac{9}{10}c_1 + \frac{3}{10}\sqrt{9c_1^2 + 400c_1}, \quad (4.15)$$

$$\kappa = -\frac{8}{5}c_2 + \frac{8}{5}\sqrt{c_2^2 + 25c_2}. \quad (4.16)$$

Используя асимптотический подход при анализе кубического уравнения в общем случае, удастся получить следующее представление для нужного решения:

$$\kappa = \frac{40}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{15}{3}\right)^2 \frac{1}{c_2} + \left(\frac{20}{3}\right)^2 \frac{1}{c_1}}}. \quad (4.17)$$

**5. Результаты численных расчетов.** Выполним расчеты первого собственного значения для однородной и оптимальной балок. В случае конечных значений  $c_1, c_2$  будем находить  $\kappa$  численно и при помощи формулы (4.17). В случае, когда  $c_2 \rightarrow \infty$ , будем сравнивать точное  $\kappa$ , найденное из (4.10), и асимптотическое из (4.15). Аналогично сравним (4.12) и (4.16) для случая  $c_2 \rightarrow \infty$ .

*Замечание 2.* У возникающих квадратного и кубического уравнений относительно  $\kappa$  соответственно 2 и 3 корня. В (4.10), (4.12), (4.17) и в табл. 2 указан

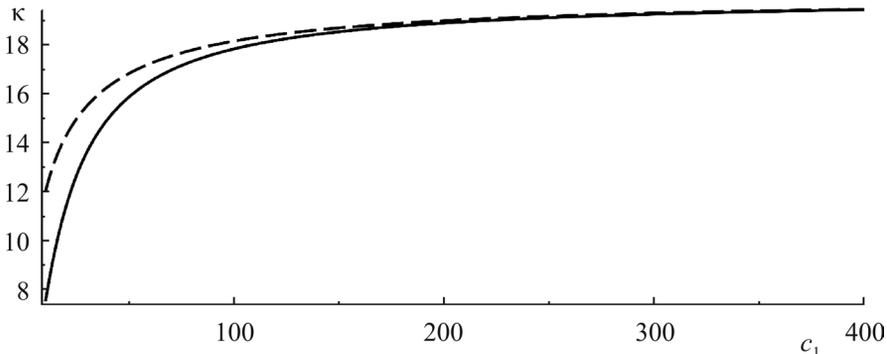


Рис. 1. Собственное значение  $\kappa$ : по (4.10) — сплошная линия, по (4.15) — пунктир.

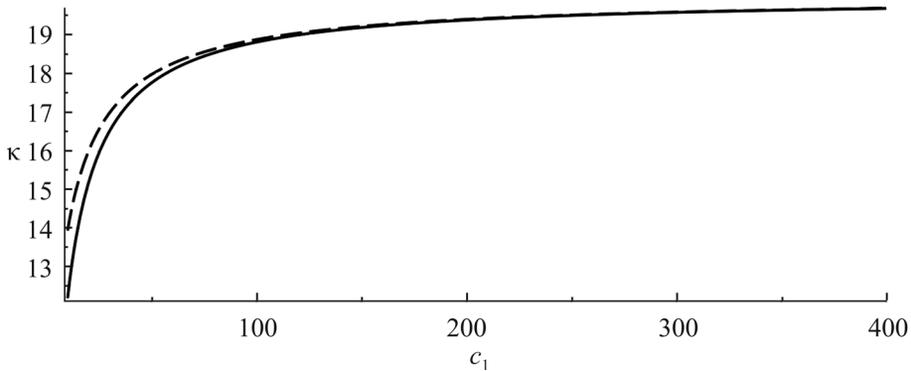


Рис. 2. Собственное значение  $\kappa$ : по (4.12) – сплошная линия, по (4.16) – пунктир.

только один из них, поскольку остальные приводят к знакопеременной функции  $g(x)$ ; соответственно, в (4.15), (4.16) указаны положительные корни, а отрицательные опущены.

Таблица 2. Первое собственное значение для различных параметров закрепления

	$\kappa$ – однородное (численно)	$\kappa$ – оптимальное	$\kappa$ – оптимальное   (асимптотики)
$c_1 = c_2 \rightarrow \infty$	12.362	20	20
$c_1 = c_2 = 10\,000$	12.348	19.965 (численно)	19.965   (4.17)
$c_1 = c_2 = 1000$	12.220	19.656 (численно)	19.664   (4.17)
$c_1 = 100, c_2 = 350$	11.331	17.557 (численно)	17.928   (4.17)
$c_1 = 350, c_2 = 100$	11.639	18.248 (численно)	18.404   (4.17)
$c_1 = 1000, c_2 \rightarrow \infty$	12.313	19.876   (4.10)	19.877   (4.15)
$c_1 = 100, c_2 \rightarrow \infty$	11.454	17.846   (4.10)	18.167   (4.15)
$c_1 \rightarrow \infty, c_2 = 1000$	12.269	19.778   (4.12)	19.783   (4.16)
$c_1 \rightarrow \infty, c_2 = 100$	11.886	18.819   (4.12)	18.885   (4.16)

**Заключение.** Рассмотрена общая задача оптимизации первой собственной частоты колебаний за счет управления законом изменения упругих модулей функционально-градиентного упругого тела. Рассмотрены примеры для изгибных колебаний балки с модифицированными граничными условиями (пружинного типа).

Работа выполнена за счет гранта РФФ № 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/> в Южном федеральном университете

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
2. Гринев В.Б., Филиппов А.П. Об оптимальных очертаниях стержней в задачах упругой устойчивости. // Строительная механика и расчет сооружений. 1975. № 2. С. 21–27.
3. Гринев В.Б., Филиппов А.П. Об оптимальных стержнях в задачах устойчивости под действием распределенной нагрузки // Строительная механика и расчет сооружений. 1975. № 6. С. 23–27.
4. Братусь А.С., Картелишвили В.М. Приближенные аналитические решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 119–139.
5. Крейн М.Г. О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости // ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 3. С. 323–348.
6. Niordson F.I. On the optimal design of a vibrating beam // Quart. Appl. Math. 1965. V. 23. № 1. P. 47–53.
7. Ольхофф Н. Оптимальное проектирование конструкций. М.: Мир, 1981. 277 с.
8. Rammerstorfer F.G. On the optimal distribution of the young's modulus of a vibrating, prestressed beam // J. Sound Vib. 1974. V. 37. № 1. P. 140–145.
9. Gupta V.K., Murthy P.N. Optimal design of uniform non-homogeneous vibrating beams // J. Sound Vib. 1978. V. 59. № 4. P. 521–531.
10. Alshabata N.T. Optimal design of functionally graded material columns for buckling problems // J. Mech. Eng. Sci. 2018. V. 12. № 3. P. 3914–3926.  
<https://doi.org/10.15282/JMES.12.3.2018.11.0342>
11. Adali S. Optimal shape and non-homogeneity of a non-uniformly compressed column // Int. J. Solids Struct. 1979. V. 15. P. 935–949.
12. Takewaki, I.: Optimal frequency design of tower structures via an approximation concept. // Comput. Struct. 1996. V. 58(3). P. 445–452.
13. Sarkisyan V.S., Gukasyan G.M., Grigoryan A.A. Optimal design of a circular plate with rectilinear anisotropy // J. Math. Sci. 2001. V. 104. P. 1569–1574.  
<https://doi.org/10.1023/A:1011300122949>
14. Бушувев А.Ю. Применение метода возмущений и функций чувствительности в задаче оптимизации систем с распределенными параметрами // Инженерный журнал: наука и инновации. 2015. Вып. 6 (42).  
<https://doi.org/10.18698/2308-6033-2015-6-1411>
15. Amir E., Amir O. Free form shape optimization of three dimensional beams using cross section analysis // Int. J. Solids Struct. 2023. V. 277–278. P. 112331.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2023.112331>
16. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит, 2019. 272 с.

ON THE MAXIMUM OF THE FIRST RESONANCE FREQUENCY  
FOR INHOMOGENEOUS ELASTIC BODIESA. O. Vatulyan<sup>a, \*</sup>, V. O. Yurov<sup>b</sup>

<sup>a</sup>I.I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science,  
Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

<sup>b</sup>Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center of Russian Academy  
of Sciences, Vladikavkaz, Russia

\*e-mail: aovatulyan@srfedu.ru, \*\*e-mail: vitja.jurov@yandex.ru

**Abstract** – The paper considers a non-classical optimization problem associated with the development of the production of new functionally graded materials. It is proposed to optimize the first natural frequency of oscillations by choosing the law of change in elastic moduli, and not the shape, as is done in most works devoted to optimization. This formulation of the problem becomes practically justified with the development of 3D printing and the production of FGM ceramics with specified properties. As an example, the problems of oscillations of a FGM rod and a FGM beam with spring boundary conditions at one of the ends are considered.

*Keywords:* inhomogeneity, optimization, rod, oscillations

## REFERENCES

1. *Banichuk N.V.* Shape Optimization for Elastic Bodies. M.: Nauka, 1980. 255 p. [in Russian]
2. *Grinev V.B., Filippov A.P.* On optimal shapes of bars in stability problems // *Stroit. Mekh. Rasch. Sooruzh.* 1975. № 2. P. 21–27. [in Russian]
3. *Grinev V.B., Filippov A.P.* On optimal bars in stability problems under distributed loadings // *Stroit. Mekh. Rasch. Sooruzh.* 1975. № 6. P. 23–27. [in Russian]
4. *Bratus A.S., Kartvelishvili V.I.* Approximate analytical solutions to optimization problems of stability and vibration frequency of elastic thin-walled structures // *Izv. AN SSSR, Mekh. Tv. Tela.* 1981. V. 6. P. 119–139. [in Russian]
5. *Krein M.G.* On some maximum and minimum problems for characteristic numbers and on Lyapunov stability regions // *Prikl. Mat. Mekh.* 1951. V. 15. № 3. P. 323–348. [in Russian]
6. *Niordson F.I.* On the optimal design of a vibrating beam // *Quart. Appl. Math.* 1965. V. 23, № 1. P. 47–53.
7. *Olkhoff N.* Optimal design of structures. M.: Mir, 1981. 277 p. [in Russian]
8. *Rammerstorfer F.G.* On the optimal distribution of the young's modulus of a vibrating, prestressed beam // *Journal of Sound and Vibration.* 1974. V. 37(1). P. 140–145.
9. *Gupta V.K., Murthy P.N.* Optimal design of uniform non-homogeneous vibrating beams // *Journal of Sound and Vibration,* 1978. V. 59(4). P. 521–531.
10. *Alshabat N.T.* Optimal design of functionally graded material columns for buckling problems // *Journal of Mechanical Engineering and Sciences.* 2018. V. 12. № 3. P. 3914–3926. <https://doi.org/10.15282/jmes.12.3.2018.11.0342>
11. *Adali S.* Optimal shape and non-homogeneity of a non-uniformly compressed column // *Int. J. Solids Structures.* 1979. V. 15. P. 935–949.
12. *Takewaki I.* Optimal frequency design of tower structures via an approximation concept. // *Comput. Struct.* 1996. V. 58(3). P. 445–452.
13. *Sarkisyan V.S., Gukasyan G.M., Grigoryan A.A.* Optimal Design of a Circular Plate with Rectilinear Anisotropy *Journal of Mathematical Sciences.* 2001. V. 104(5). P. 1569–1574. <https://doi.org/10.1023/A:1011300122949>
14. *Bushuev A.Yu.* Application of the perturbation method and sensitivity functions in the optimization problem of systems with distributed parameters // *Engineering Journal: Science and Innovation.* 2015. Iss. 6. [in Russian]
15. *Amir E., Amir O.* Free form shape optimization of three dimensional beams using cross section analysis // *International Journal of Solids and Structures,* 2023. V. 277–278. 112331. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2023.112331>
16. *Vatulyan A.O.* Coefficient Inverse Problems of Mechanics. M.: Fizmatlit, 2019. 272 p. [in Russian]

УДК 539.3

## О НЕПОЛУПРОСТОМ ВЫРОЖДЕНИИ ВОЛН ЛЭМБА

© 2024 г. А. И. Каракозова<sup>а</sup>, С. В. Кузнецов<sup>б, \*</sup>

<sup>а</sup>Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

<sup>б</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.02.2024.

После доработки 28.03.2024.

Принята к публикации 22.04.2024.

В рамках шестимерного формализма Коши впервые обнаружены аномальные поверхностные волны, возникающие при неполупростом вырождении фундаментальной матрицы. Условие неполупростого вырождения получено в явной форме для волн Лэмба, распространяющихся в слое с произвольной упругой анизотропией и свободными границами. Получен новый тип дисперсионного уравнения и соответствующее дисперсионное решение. Обсуждается связь с поверхностными волнами нерэлеевского типа.

*Ключевые слова:* формализм Коши, направленная волна, анизотропия, дисперсия, вырождение

DOI: 10.31857/S1026351924040139, EDN: UCHHEM

**1. Введение.** Установлено, что в некоторых случаях анизотропии экспоненциально затухающая с глубиной рэлеевская волна превращается в более сложную волну, в которой вариация по глубине определяется некоторым полиномом, умноженным на экспоненту [1–6]. Такая волна известна, как волна нерэлеевского типа [7, 8]. Для анализа волн Рэлея в анизотропных средах разработано несколько методов.

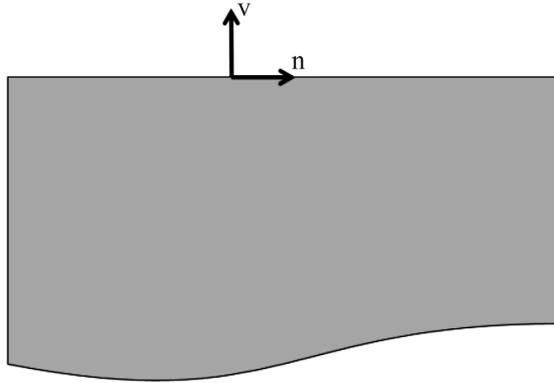
*1.1. Полупростая фундаментальная матрица.* Ниже рассматривается более простой случай волн Рэлея, распространяющихся в анизотропном полупространстве с полупростой фундаментальной матрицей.

*1.1.1. Трехмерный формализм.* Исторически первым появился трехмерный формализм, используемый для решения обыкновенного матричного дифференциального уравнения второго порядка, полученного путем подстановки представления для гармонической плоской волны [9]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{m}(i\mathbf{r}\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) \exp(i\mathbf{r}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)) \quad (1.1)$$

в уравнение движения для анизотропной упругой среды

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \rho \partial_{tt}^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (1.2)$$



**Рис. 1.** Полупространство;  $\mathbf{n}$  – волновой вектор;  $\mathbf{v}$  – единичная нормаль к свободной границе.

где  $\mathbf{u}$  – поле смещения;  $\mathbf{m}$  – амплитуда вектора;  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{n}$  – единичные векторы, см. рис. 1;  $r$  – волновое число;  $c$  – фазовая скорость;  $t$  – время;  $\mathbf{C}$  – тензор упругости четвертого порядка, предполагаемый строго эллиптическим;  $\rho$  – плотность материала; двойные точки в уравнении (1.2) означают свертку по двум индексам;  $i = \sqrt{-1}$ .

Подставляя представление (1.1) в уравнение (1.2), получаем искомое обыкновенное уравнение второго порядка; см. [7, 10–15]:

$$\left( \mathbf{A}_1 \partial_{xx}^2 + \mathbf{A}_2 \partial_x + \mathbf{A}_3 \right) \cdot \mathbf{m}(x) = 0, \quad (1.3)$$

где

$$x = ir\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} \quad (1.4)$$

и

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} - \rho c^2 \mathbf{I}, \quad (1.5)$$

здесь  $\mathbf{I}$  – единичный тензор второго порядка ( $3 \times 3$ -матрица). Общее решение уравнения имеет вид [16]:

$$\mathbf{m}(x) = \sum_{k=1}^3 C_k \mathbf{m}_k e^{\gamma_k x}, \quad (1.6)$$

где  $C_k$  – произвольные комплексные коэффициенты, определяемые с точностью до множителя из граничных условий;  $\mathbf{m}_k$  – собственные векторы комплексной матрицы

$$\left( \gamma_k^2 \mathbf{A}_1 + \gamma_k \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 \right) \cdot \mathbf{m}_k = 0. \quad (1.7)$$

В множители  $\gamma_k$  являются корнями соответствующего уравнения Кристоффеля:

$$\det(\gamma_k^2 \mathbf{A}_1 + \gamma_k \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3) = 0. \quad (1.8)$$

Заметим, что только корни с положительной мнимой частью обеспечивают затухание с глубиной волн Рэлея [14]. Также было обнаружено [7, 8], что для некоторых типов упругой анизотропии два собственных вектора уравнения могут совпадать, что приводит к необходимости введения обобщенного собственного вектора [17]; этот случай, известный как неполупростое вырождение, более подробно рассматривается в разделе 2.

*1.1.2. Шестимерные формализмы.* Известны два шестимерных формализма: формализм Стро [15, 16], см. также [1–6, 18–25], и формализм Коши [26, 27]. Оба эти формализма эквивалентны в терминах дисперсионных уравнений [28]. При рассмотрении формализма Коши вводится новый 6-вектор

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{m}(x) \\ \mathbf{w}(x) \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

где

$$\mathbf{w}(x) = \partial_x \mathbf{m}(x). \quad (1.10)$$

С учетом (1.10), уравнение (1.3) в терминах вектора  $\mathbf{Y}$  приобретает вид:

$$\partial_x \mathbf{Y}(x) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{Y}(x), \quad (1.11)$$

где  $\mathbf{G}$  – фундаментальная матрица [28]

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_3 & -\mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

см. в [1–6, 24, 25] для его аналога в формализме Стро. Осуществляя приведение фундаментальной матрицы  $\mathbf{G}$  к Жордановой нормальной форме, дает [17]

$$\mathbf{G} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{W}^{-1}, \quad (1.13)$$

где  $\mathbf{W}$  – матрица  $6 \times 6$ , содержащая либо собственные векторы, если  $\mathbf{G}$  полупростая, либо собственные и обобщенные собственные векторы, если  $\mathbf{G}$  неполупростая; в обоих случаях  $\mathbf{W}$  не ортогональна ввиду несимметричности  $\mathbf{G}$ , кроме того,  $\mathbf{W}$  невырожденная матрица [17]; матрица  $\mathbf{D}$  либо диагональная, если  $\mathbf{G}$  полупростая, либо  $\mathbf{D}$  содержит как диагональные элементы, так и жорданов(ы) блок(и).

Случай полупростой матрицы  $\mathbf{G}$  и, соответственно, диагональной матрицы  $\mathbf{D}$  приводит к общему решению уравнения, которое можно представить в виде [16]:

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{W} \cdot \text{diag}(e^{\gamma_1 x}, \dots, e^{\gamma_6 x}) \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{Y}_0, \quad (1.14)$$

где  $\gamma_k$ ,  $k = 1, \dots, 6$  – собственные значения фундаментальной матрицы  $\mathbf{G}$ ;  $\mathbf{Y}_0$  – произвольный 6-вектор, определяемый граничными условиями. Уравнение вместе с граничным условием на свободной границе при  $x = 0$  дает:

$$\mathbf{t}_v(x)|_{x=0} \equiv (\mathbf{A}_4; \mathbf{A}_1) \cdot \mathbf{Y}(x)|_{x=0} = 0. \quad (1.15)$$

Наряду с условием (0.15), необходимо условие затухания Зоммерфельда при  $x \rightarrow \infty$  [29, 30]:

$$\mathbf{Y}(x)|_{x \rightarrow -\infty} = 0, \quad (1.16)$$

обеспечивающее экспоненциальное затухание с глубиной для волн Рэлея [31, 32]. Отметим, что условие (1.16) подразумевает, что в решении могут сохраняться только собственные значения с положительной мнимой частью.

*1.2. Неполупростая фундаментальная матрица.* Как уже отмечалось ранее, случай неполупростого вырождения фундаментальной матрицы приводит к появлению волн нерэлеевского типа [1–8, 33, 34, 35] с более сложным поведением смещений, имеющих следующую поляризацию [7, 8]:

$$\mathbf{m}(x) = C_1 \mathbf{m}_1 e^{\gamma_1 x} + (C_2 \mathbf{m}_2 + C_3 \mathbf{g}_2 x) e^{\gamma_2 x}, \quad (1.17)$$

где  $\gamma_1$  – некротное собственное значение с  $\text{Im}(\gamma_1) > 0$ , которое соответствует истинному собственному вектору  $\mathbf{m}_1$ ;  $\gamma_2$  – кратное собственное значение с  $\text{Im}(\gamma_2) > 0$ , которое соответствует истинному собственному вектору  $\mathbf{m}_2$  и обобщенному собственному вектору  $\mathbf{g}_2$ . Заметим, что векторы  $\mathbf{m}_1$ ,  $\mathbf{m}_2$  и  $\mathbf{g}_2$  являются линейно независимыми [2, 36]. Наконец, случай двух жордановых блоков третьего порядка приводит к следующему вектору поляризации:

$$\mathbf{m}(x) = (C_1 \mathbf{m}_1 + C_2 \mathbf{g}_1 x + C_3 \mathbf{g}_2 x^2) e^{\gamma_1 x}, \quad (1.18)$$

где  $\gamma_1$  – кратное собственное значение с  $\text{Im}(\gamma_1) > 0$ , которое соответствует истинному собственному вектору  $\mathbf{m}_1$  и двум обобщенным собственным векторам  $\mathbf{g}_1$  и  $\mathbf{g}_2$ . Аналогично предыдущему случаю, векторы  $\mathbf{m}_1$ ,  $\mathbf{g}_1$  и  $\mathbf{g}_2$  являются линейно независимыми [36]. Как показано в разделе 2, в случае волн Лэмба допустимы только жордановы блоки второго ранга.

*Замечание 1.2.* Физическую ситуацию, приводящую к неполупростому вырождению матрицы (появлению жорданова блока), можно продемонстрировать, рассмотрев собственные векторы следующей однопараметрической  $2 \times 2$ -матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Заметим, что при  $\alpha = 0$  рассматриваемая матрица становится не полупростой, но при  $\alpha \neq 0$  она полупростая и имеет два собственных вектора:

$$\mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{1 + \alpha} \\ \alpha \\ \sqrt{1 + \alpha} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{m}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{1 + \alpha} \\ \alpha \\ \sqrt{1 + \alpha} \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Скалярное произведение этих собственных векторов имеет вид:

$$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 = \frac{\alpha - 1}{1 + \alpha}. \quad (1.21)$$

И при  $\alpha \rightarrow 0$  скалярное произведение  $\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 \rightarrow -1$ , что означает, что эти собственные векторы коллинеарны и направлены в противоположные стороны. Таким образом, вблизи неполупростого вырождения собственные векторы (в нашем случае парциальные волны), будучи изначально линейно независимыми, начинают вырождаться.

*1.3. Постановка задачи.* В данной работе с помощью шестимерного формализма Коши в сочетании с методом экспоненциальных матриц анализируется дисперсия волн Лэмба, распространяющихся в однородном анизотропном слое со свободными границами и при неполупростом вырождении фундаментальной матрицы. Анализ полей перемещений показывает, что они в значительной степени зависят от нормальной жордановой формы фундаментальной матрицы, которая может быть как полупростой, так и неполупростой, см. (1.6) и (1.17). В следующем разделе анализируется подробная спектральная структура фундаментальной матрицы и соответствующее экспоненциальное представление для волн Лэмба, распространяющихся в однородном анизотропном слое со свободными границами.

**2. Формализм Коши для волн Лэмба.** Ниже анализируются волны Лэмба, распространяющиеся в однородном слое со свободными границами, рис. 2.

*2.1. Спектральный анализ фундаментальной матрицы.*

*2.1.1. Разложение по жордановой нормальной форме.* Полупростая фундаментальная матрица  $\mathbf{G}$ , допускающая нормальную жорданову форму

$$\mathbf{G} = \mathbf{W} \cdot \text{diag}(\gamma_1; \dots; \gamma_6) \cdot \mathbf{W}^{-1} \quad (2.1)$$

и экспоненциальное общее решение, задаваемое уравнением (1.14), имеет собственные значения  $\gamma_k$ ,  $k = 1, \dots, 6$ , которые в случае волн Лэмба могут быть как вещественными, так и комплексными числами, без необходимости накладывать какие-либо ограничения на мнимую часть, поскольку условие затухания Зоммерфельда (1.16) для волн Лэмба не требуется [28]. Заметим также, что поскольку  $\mathbf{G}$  – вещественная матрица, все комплексные собственные значения должны появляться в комплексно-сопряженных парах [17].

*2.1.2. Характеристические полиномы.* Характеристический многочлен матрицы  $\mathbf{G}$  имеет вид:

$$P(\gamma) \equiv \det(\mathbf{G} - \gamma \mathbf{1}) = 0, \quad (2.2)$$

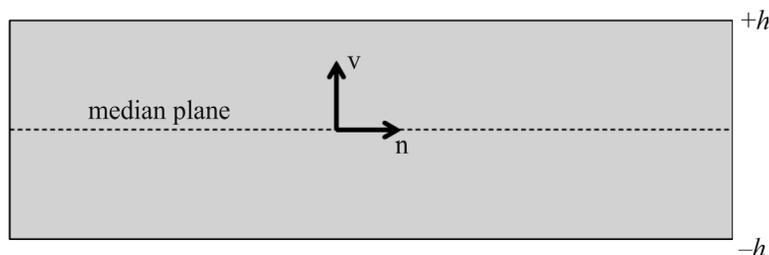


Рис. 2. Однородный анизотропный слой со свободными границами толщиной  $2h$ .

где  $\mathbf{I}$  обозначает единичную матрицу  $6 \times 6$ . Учитывая, что матрица  $\mathbf{G}$  имеет блочную структуру, заданную уравнением (1.12), характеристический полином становится [37]

$$P(\gamma) = \det(\gamma^2 \mathbf{I} + \gamma \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_3) = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение показывает, что  $\gamma=0$  является собственным значением, когда

$$\rho c^2 \in \text{Sp}(\mathbf{A}_3). \quad (2.4)$$

Действительно, из условия (2.4),  $\det(\mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_3) = 0$ , поэтому  $\gamma=0$  становится корнем уравнения (2.3).

*2.1.3. Спектральный анализ.* Замечание о блочной структуре матрицы  $\mathbf{G}$  и блочной структуре вектора  $\mathbf{Y}$  позволяет записать для собственного вектора

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

соответствующее уравнение:

$$\gamma \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

где

$$\mathbf{M} = -\mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_3; \quad \mathbf{N} = -\mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_2. \quad (2.7)$$

Из уравнения следует

$$\gamma \mathbf{m} = \mathbf{w} \quad (2.8)$$

и

$$\gamma \mathbf{w} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{w}, \quad (2.9)$$

откуда

$$\gamma^2 \mathbf{m} = (\mathbf{M} + \gamma \mathbf{N}) \cdot \mathbf{m}. \quad (2.10)$$

Умножение обеих сторон уравнения на  $\mathbf{A}_1$ , а затем свертка с вектором  $\bar{\mathbf{m}}$  дают скалярный многочлен

$$a\gamma^2 + b\gamma + c = 0, \quad (2.11)$$

где

$$a = \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{m}; \quad b = \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{m}; \quad c = \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{m}. \quad (2.12)$$

Уравнения гарантируют, что коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  являются вещественными, а из-за предполагаемой сильной эллиптичности тензора упругости,  $a > 0$ . Теперь из уравнения следует, что собственные значения удовлетворяют следующему соотношению:

$$\gamma = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}. \quad (2.13)$$

Необходимо отметить, что (2.13) не является уравнением для нахождения собственных значений, так как уравнение (2.13) содержит лишь часть соответствующего собственного вектора. Однако уравнение (2.13) показывает, что для конкретного собственного вектора (2.5) выражение в правой части (2.13) может соответствовать либо некратному корню, если дискриминант не равен нулю, либо кратному корню, если дискриминант обращается в нуль. Последний случай соответствует неполупростому вырождению фундаментальной матрицы  $\mathbf{G}$ . Таким образом, единственным неполупростым вырождением фундаментальной матрицы  $\mathbf{G}$  может быть вырождение второго ранга, а в фундаментальной матрице может быть не более трех блоков Жордана.

2.2. Экспоненциальные решения.

2.2.1. *Полупростая фундаментальная матрица.* Экспоненциальное решение для волн Лэмба, распространяющихся в однородном анизотропном слое, в случае полупростой фундаментальной матрицы  $\mathbf{G}$  совпадает с соответствующим экспоненциальным решением для волн Рэлея, которое дается уравнением (0.22).

2.2.2. *Неполупростые фундаментальные матрицы.* Если фундаментальная матрица  $\mathbf{G}$  содержит жордановы блоки, то соответствующие экспоненциальные решения имеют вид:

А. Одиночный блок Жордана

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{W} \cdot \text{diag} \left( e^{\gamma_1 x}, \dots, e^{\gamma_4 x}, \begin{pmatrix} e^{\gamma_5 x} & 0 \\ x e^{\gamma_5 x} & e^{\gamma_5 x} \end{pmatrix} \right) \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{Y}_0. \quad (2.14)$$

Последний (столбец) вектор в  $\mathbf{W}$  – это обобщенный собственный вектор, который ортогонален первым пяти собственным векторам [36].

Б. Два жорданова блока

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{W} \cdot \text{diag} \left( e^{\gamma_1 x}, e^{\gamma_2 x}, \begin{pmatrix} e^{\gamma_3 x} & 0 \\ x e^{\gamma_3 x} & e^{\gamma_3 x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{\gamma_5 x} & 0 \\ x e^{\gamma_5 x} & e^{\gamma_5 x} \end{pmatrix} \right) \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{Y}_0. \quad (2.15)$$

При этом два (столбца) вектора в  $\mathbf{W}$ , а именно четвертый и шестой, являются обобщенными собственными векторами, которые ортогональны друг другу и другим собственным векторам.

В. Три жорданова блока

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{W} \cdot \text{diag} \left( \begin{pmatrix} e^{\gamma_1 x} & 0 \\ x e^{\gamma_1 x} & e^{\gamma_1 x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{\gamma_3 x} & 0 \\ x e^{\gamma_3 x} & e^{\gamma_3 x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{\gamma_5 x} & 0 \\ x e^{\gamma_5 x} & e^{\gamma_5 x} \end{pmatrix} \right) \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{Y}_0. \quad (2.16)$$

При этом три (столбца) вектора в  $\mathbf{W}$ , а именно второй, четвертый и шестой, являются обобщенными собственными векторами, которые ортогональны друг другу и другим собственным векторам.

2.2.3. *Поля смещения для неполупростых фундаментальных матриц.* Если фундаментальная матрица  $\mathbf{G}$  содержит жордановы блоки, то соответствующие экспоненциальные решения имеют вид:

А. Одиночный жорданов блок

$$\mathbf{m}(x) = C_1 \mathbf{m}_1 e^{\gamma_1 x} + \dots + C_4 \mathbf{m}_4 e^{\gamma_4 x} + C_5 \mathbf{m}_5 e^{\gamma_5 x} (1 + x) + C_6 \mathbf{m}_6 e^{\gamma_5 x}, \quad (2.17)$$

где  $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_5$  – “верхние” части собственных векторов, а  $\mathbf{m}_6$  – “верхняя” часть обобщенного собственного вектора, см. [16, 36].

Б. Два жорданова блока

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(x) = & C_1 \mathbf{m}_1 e^{\gamma_1 x} + C_2 \mathbf{m}_2 e^{\gamma_2 x} + C_3 \mathbf{m}_3 e^{\gamma_3 x} (1+x) + C_4 \mathbf{m}_4 e^{\gamma_3 x} + \\ & + C_5 \mathbf{m}_5 e^{\gamma_5 x} (1+x) + C_6 \mathbf{m}_6 e^{\gamma_5 x}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_5$  – “верхние” части собственных векторов, а  $\mathbf{m}_4, \mathbf{m}_6$  – “верхние” части обобщенных собственных векторов.

В. Три жорданова блока

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(x) = & C_1 \mathbf{m}_1 e^{\gamma_1 x} (1+x) + C_2 \mathbf{m}_2 e^{\gamma_1 x} + C_3 \mathbf{m}_3 e^{\gamma_3 x} (1+x) + C_4 \mathbf{m}_4 e^{\gamma_3 x} + \\ & + C_5 \mathbf{m}_5 e^{\gamma_5 x} (1+x) + C_6 \mathbf{m}_6 e^{\gamma_5 x}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_5$  – “верхние” части собственных векторов, а  $\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_4, \mathbf{m}_6$  – “верхние” части обобщенных собственных векторов.

*Замечание 2.2.* Ввиду уравнений (1.4), (2.12) и (2.13), экспонента  $e^{\gamma_k x}$ , соответствующая жордановым блокам, является чисто мнимой

$$e^{\gamma_k x} = i \sin(\gamma_k r \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}), \quad (2.20)$$

поскольку соответствующий  $\gamma_k$  – вещественный, что вытекает из уравнения (2.13). Аналогично соответствующий собственный вектор и обобщенный собственный вектор также должны быть чисто мнимыми, поскольку уравнение содержит только вещественные матрицы. Рассмотрим теперь комплексный скалярный коэффициент  $C_k$ :

$$C_k = \alpha_k + i\beta_k \quad (2.21)$$

с  $\alpha_k, \beta_k \neq 0$ , тогда вещественная часть выражения  $C_k \mathbf{m}_k e^{\gamma_k x} (1+x)$  становится

$$\operatorname{Re}(C_k \mathbf{m}_k e^{\gamma_k x} (1+x)) = (\beta_k r \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} - \alpha_k) \sin(\gamma_k r \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) \operatorname{Im}(\mathbf{m}_k). \quad (2.22)$$

Уравнение показывает, что частичное решение  $C_k \mathbf{m}_k e^{\gamma_k x} (1+x)$ , соответствующее жорданову блоку, не является ни симметричным, ни асимметричным относительно срединной плоскости  $x=0$ . Таким образом, решения, связанные с жордановыми блоками, могут привести к новому типу волн Лэмба “смешанного режима”.

*2.3. Уравнение дисперсии.*

*2.3.1. Импедансная матрица.* Введем матрицу акустического импеданса  $6 \times 6$  [28, 38]:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_4 & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{A}_4 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.24)$$

Матрица  $\mathbf{Z}$  преобразует 6-вектор  $\mathbf{Y}(x)$  в 6-вектор, состоящий из перемещений и поверхностных сил, действующих на горизонтальную плоскость в точке  $x = \text{const}$ :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{m}(x) \\ \mathbf{t}_v(x) \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y}(x). \quad (2.25)$$

Заметим, что  $\mathbf{Y}(x)$  определяется одним из уравнений (1.14), (2.14)–(2.16) и поэтому в значительной степени зависит от нормальной жордановой формы матрицы  $\mathbf{G}$ .

*2.3.2. Дисперсионное уравнение.* Независимо от полупростоты или неполупростоты фундаментальной матрицы  $\mathbf{G}$ , дисперсионное уравнение для волн Лэмба в слое со свободными границами можно представить в виде [28, 38]:

$$\det \left( (\mathbf{0}; \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{Z} \cdot \exp(-2irh\mathbf{G}) \cdot \mathbf{Z}^{-1}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) = 0, \quad (2.26)$$

где согласно уравнениям (0.14), (0.35)–(0.37) экспонента матрицы  $\exp(-2irh\mathbf{G})$  зависит от ее нормальной жордановой формы.

**Заключение.** Настоящее исследование посвящено спектральному анализу волн Лэмба, распространяющихся в однородном анизотропном слое со свободными границами. Проведенный анализ показывает возможность неполупростого вырождения фундаментальной матрицы. Выявлена возможность появления жордановых блоков, отмечено, что жордановы блоки могут быть максимально второго ранга. Также впервые получены поля перемещений для случая неполупростого вырождения. Показано, что при неполупростом вырождении фундаментальной матрицы возникают волны Лэмба, напоминающие волны нерэлеевского типа. Одним из отличительных свойств обнаруженных волн является их необычная поляризация. Как показывают уравнения (2.17)–(2.19), мода волн Лэмба, соответствующая жорданову блоку, не является ни симметричной, ни асимметричной; см. замечание 2.2.

Проведенный анализ основан на шестимерном формализме Коши в сочетании с методом экспоненциальных матриц и спектральным разложением фундаментальной матрицы. Исследование полей смещений показывает, что они в значительной степени зависят от жордановой нормальной формы фундаментальной матрицы, которая может быть как полупростой, так и неполупростой. Можно ожидать, что этот анализ послужит лучшему пониманию возможных спектральных и дисперсионных аномалий волн Лэмба, распространяющихся в анизотропных пластинах [39], а также выявлению условий аномального затухания волн Лэмба по глубине [40, 41].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант 24-49-02002.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barnett D.M., Lothe J.* Consideration of the existence of surface wave (Rayleigh wave) solutions in anisotropic elastic crystals // *J. Phys. F: Metal Phys.* 1974. V. 4. P. 671–686. <https://doi.org/10.1088/0305-4608/4/5/009>

2. *Chadwick P., Smith G.D.* Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials // *Adv. Appl. Mech.* 1977. V. 17. P. 303–376.  
[https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70223-0](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70223-0)
3. *Ting T.C.T., Barnett D.M.* Classification of surface waves in anisotropic elastic materials // *Wave Motion.* 1997. V. 26. № 3. P.207–218.  
[https://doi.org/10.1016/S0165-2125\(97\)00027-9](https://doi.org/10.1016/S0165-2125(97)00027-9)
4. *Ting T.C.T.* On extraordinary semisimple matrix  $\mathbf{N}(\mathbf{v})$  for anisotropic elastic materials // *Quart. Appl. Math.* 1997. V. 55. № 4. P. 723–738.
5. *Wang Y.M., Ting T.C.T.* The Stroh formalism for anisotropic materials that possess an almost extraordinary degenerate matrix  $\mathbf{N}$  // *Int. J. Solids Struct.* 1997. V. 34. № 4. P. 401–413.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(96\)00024-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(96)00024-8)
6. *Clements D.L.* A note on surface waves in anisotropic media // *Acta Mech.* 1985. V. 56. P. 31–40.  
<https://doi.org/10.1007/BF01306022>
7. *Kuznetsov S.V.* “Forbidden” planes for Rayleigh waves // *Quart. Appl. Math.* 2002. V. 60. P. 87–97.  
<https://doi.org/10.1090/qam/1878260>
8. *Kuznetsov S.V.* Surface waves of non-Rayleigh type // *Quart. Appl. Math.* 2003. V. 61. P. 575–582.  
<https://doi.org/10.1090/qam/1999838>
9. *Royer D., Dieulesaint E.* *Elastic Waves in Solids 1. Free and Guided Propagation*, NY: Springer, 1996. 370 p.
10. *Musgrave M.J.P.* On the propagation of elastic waves in aeolotropic media. I. General principles // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1954. V. 226. № 1166. P. 339–355.  
<https://doi.org/10.1098/rspa.1954.0258>
11. *Buchwald V.T.* Rayleigh waves in transversely isotropic media // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1961. V. 14. № 3. P. 293–317.  
<https://doi.org/10.1093/qjmam/14.3.293>
12. *Syngé J.L.* Elastic waves in anisotropic media // *J. Math. Phys.* 1956. V. 35. № 1–4. P. 323–334.  
<https://doi.org/10.1002/SAPM1956351323>
13. *Lim T.C., Farnell G.W.* Search for forbidden directions of elastic surface-wave propagation in anisotropic crystals // *J. Appl. Phys.* 1968. V. 39. P. 4319–4325.  
<https://doi.org/10.1063/1.1656967>
14. *Lim T.C., Farnell G.W.* Character of pseudo surface waves on anisotropic crystals // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1969. V. 45. P. 845–851.  
<https://doi.org/10.1121/1.1911556>
15. *Farnell G.W.* Properties of elastic surface waves // *Phys. Acoust.* 1970. V. 6. P. 109–166.  
<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-395666-8.50017-8>
16. *Hartman P.* *Ordinary Differential Equations*. N.Y.: Wiley, 1964. 612 p.
17. *Golub G.H., Van Loan C.F.* *Matrix Computations* (3rd ed.), Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996. 750 p.
18. *Stroh A.N.* Dislocations and cracks in anisotropic elasticity // *Philos. Mag.* 1958. V. 3. № 30. P. 625–646.  
<https://doi.org/10.1080/14786435808565804>
19. *Stroh A.N.* Steady state problems in anisotropic elasticity // *J. Math. Phys.* 1962. V. 41. № 1–4. P. 77–103.  
<https://doi.org/10.1002/sapm196241177>
20. *Mase G.T.* Rayleigh wave speeds in transversely isotropic materials // *J. Acoust. Soc. Am.* 1987. V. 81. № 5. P. 1441–1446.

21. *Wu K.C.* Generalization of the Stroh formalism to 3-dimensional anisotropic elasticity // *J. Elast.* 1998. V. 51. P. 213–225.  
<https://doi.org/10.1023/A:1007523219357>
22. *Hwu C.* Stroh-like formalism for the coupled stretching-bending analysis for composite laminates // *Int. J. Solids Struct.* 2003. V. 40. P. 3681–3705.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00161-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00161-6)
23. *Hwu C., Becker W.* Stroh formalism for various types of materials and deformations // *J. Mech.* 2022. V. 38. P. 433–444.  
<https://doi.org/10.1093/jom/ufaf031>
24. *Fu Y.B.* Hamiltonian interpretation of the Stroh formalism in anisotropic elasticity // *Proc. Roy. Soc. A.* 2007. V. 463. № 2088. P. 3073–3087.  
<https://doi.org/10.1098/rspa.2007.0093>
25. *Edmondson R.T., Fu Y.B.* Stroh formulation for a generally constrained and pre-stressed elastic material // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2009. V. 44. № 5. P. 530–537.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.11.001>
26. *Kuznetsov S.V.* Abnormal dispersion of flexural Lamb waves in functionally graded plates // *Z. Angew. Math. Phys.* 2019. V. 70. Paper 89.  
<https://doi.org/10.1007/s00033-019-1132-0>
27. *Kuznetsov S.V.* Closed form analytical solution for dispersion of Lamb waves in FG plates // *Wave Motion.* 2019. V. 84. P. 1–7.  
<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2018.09.018>
28. *Kuznetsov S.V.* Lamb waves in stratified and functionally graded plates: discrepancy, similarity, and convergence // *Waves Random Complex Media.* 2021. V. 31. № 6. P. 1540–1549.  
<https://doi.org/10.1080/17455030.2019.1683257>
29. *Michalski K.A., Mosig J.R.* The Sommerfeld half-space problem revisited: from radio frequencies and Zenneck waves to visible light and Fano modes // *J. Electromagnetic Waves Appl.* 2016. V. 30. № 1. P. 1–42.  
<https://doi.org/10.1080/09205071.2015.1093964>
30. *Shanin A.V., Korolkov A.I.* Sommerfeld-type integrals for discrete diffraction problems // *Wave Motion.* 2020. V. 97. Paper 102606.  
<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2020.102606>
31. *Barnett D.M., Lothe J.* Free surface (Rayleigh) waves in anisotropic elastic half-spaces: The surface impedance method // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1985. V. 402. № 1822. P. 135–152.  
<https://doi.org/10.1098/rspa.1985.0111>
32. *Tanuma K.* Stroh Formalism and Rayleigh Waves. In: *Stroh Formalism and Rayleigh Waves.* Springer: Dordrecht, 2007.
33. *Wang L.* Space of degeneracy in the Stroh eigensystem and surface waves in transversely isotropic elastic media // *Wave Motion.* 2004. V. 40. № 2. P. 173–190.
34. *Ting T.C.T.* An explicit secular equation for surface waves in an elastic material of general anisotropy // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 2002. V. 55. № 2. P. 297–311.  
<https://doi.org/10.1093/qjmam/55.2.297>
35. *Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.V.* Velocities, dispersion, and energy of SH-waves in anisotropic laminated plates // *Acoust. Phys.* 2014. V. 60. P. 200–207.  
<https://doi.org/10.1134/S106377101402002X>
36. *Pease III M.C.* *Methods of Matrix Algebra.* London: Academic Press, 1965. 424 p.
37. *Habgood K., Arel I.* A condensation-based application of Cramer’s rule for solving large-scale linear systems // *J. Discrete Algorithms.* 2012. V. 10. P. 98–109.  
<https://doi.org/10.1016/j.jda.2011.06.007>
38. *Goldstein R.V., Kuznetsov S.V.* Long-wave asymptotics of Lamb waves // *Mech. Solids.* 2018. V. 52. P. 700–707.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654417060097>

39. *Ilyashenko A.V. et al.* Theoretical aspects of applying Lamb waves in nondestructive testing of anisotropic media // *Russ. J. Nondestruct. Test.* 2017. V. 53. P. 243–259. <https://doi.org/10.1134/S1061830917040039>
40. *Li S. et al.* Explicit/implicit multi-time step co-simulation in unbounded medium with Rayleigh damping and application for wave barrier // *Eur. J. Environ. Civ. Eng.* 2020. V. 24. № 14. P. 2400–2421. <https://doi.org/10.1080/19648189.2018.1506826>
41. *Li S. et al.* Benchmark for three-dimensional explicit asynchronous absorbing layers for ground wave propagation and wave barriers // *Comput. Geotech.* 2021. V. 131. Article 103808. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2020.103808>

## NON-SEMISIMPLE DEGENERACY OF LAMB WAVES

**A. I. Karakozova<sup>a</sup>, S. V. Kuznetsov<sup>b, \*</sup>**

<sup>1</sup>*Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Ishlinski Institute for Problems in Mechanics, Moscow, Russia*

\*e-mail: [kuzn-sergey@yandex.ru](mailto:kuzn-sergey@yandex.ru)

**Abstract** – Anomalous guided waves appearing at a non-semisimple degeneracy of the fundamental matrix are observed and analysed in the framework of the Cauchy sextic formalism. The non-semisimple degeneracy condition is explicitly constructed for the most general case of Lamb waves propagating in a traction-free layer with arbitrary elastic anisotropy. A new type of dispersion equation and the corresponding dispersion solution are obtained. The connection with surface waves of the non-Rayleigh type is discussed.

*Keywords:* Cauchy formalism; guided wave; anisotropy; dispersion; degeneracy

## REFERENCES

1. *Barnett D.M., Lothe J.* Consideration of the existence of surface wave (Rayleigh wave) solutions in anisotropic elastic crystals // *J. Phys. F: Metal Phys.* 1974. V. 4. P. 671–686. <https://doi.org/10.1088/0305-4608/4/5/009>
2. *Chadwick P., Smith G.D.* Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials // *Adv. Appl. Mech.* 1977. V. 17. P. 303–376. [https://doi.org/10.1016/s0065-2156\(08\)70223-0](https://doi.org/10.1016/s0065-2156(08)70223-0)
3. *Ting T.C.T., Barnett D.M.* Classification of surface waves in anisotropic elastic materials // *Wave Motion*, 1997. V. 26. P. 207–218. [https://doi.org/10.1016/S0165-2125\(97\)00027-9](https://doi.org/10.1016/S0165-2125(97)00027-9)
4. *Ting T.C.T.* On extraordinary semisimple matrix  $N(v)$  for anisotropic elastic materials // *Quart. Appl. Math.* 1997. V. 55. P. 723–738.
5. *Wang Y.M., Ting T.C.T.* The Stroh formalism for anisotropic materials that possess an almost extraordinary degenerate matrix  $N$  // *Int. J. Solids Struct.* 1997. V. 34. P. 401–413. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(96\)00024-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(96)00024-8)
6. *Clements D.L.* A note on surface waves in anisotropic media // *Acta Mech.* 1985. V. 56. P. 31–40. <https://doi.org/10.1007/BF01306022>

7. *Kuznetsov S.V.* “Forbidden” planes for Rayleigh waves // *Quart. Appl. Math.* 2002. V. 60. P. 87–97.  
<https://doi.org/10.1090/qam/1878260>
8. *Kuznetsov S.V.* Surface waves of non-Rayleigh type // *Quart. Appl. Math.* 2003. V. 61. P. 575–582.  
<https://doi.org/10.1090/qam/1999838>
9. *Royer D., Dieulesaint E.* *Elastic Waves in Solids 1. Free and Guided Propagation*, NY: Springer, 1996. 370 p.
10. *Musgrave M.J.P.* On the propagation of elastic waves in aeolotropic media. I. General principles // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1954. V. 226. P. 339–355.  
<https://doi.org/10.1098/rspa.1954.0258>
11. *Buchwald V.T.* Rayleigh waves in transversely isotropic media // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1954. V. 14. P. 293–317.  
<https://doi.org/10.1093/qjmam/14.3.293>
12. *Synge J.L.* Elastic waves in anisotropic media // *J. Math. Phys.* 1956. V. 35. P. 323–334.  
<https://doi.org/10.1002/SAPM1956351323>
13. *Lim T.C., Farnell G.W.* Search for forbidden directions of elastic surface-wave propagation in anisotropic crystals // *J. Appl. Phys.* 1968. V. 39. P. 4319–4325.  
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2006.03.004>
14. *Lim T.C., Farnell G.W.* Character of pseudo surface waves on anisotropic crystals // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1969. V. 45. P. 845–851.  
<https://doi.org/10.1121/1.1911556>
15. *Farnell G.W.* Properties of elastic surface waves // *Phys. Acoust.* 1970. V. 6. P. 109–166.  
<https://doi.org/B978-0-12-395666-8.50017-8>
16. *Hartman P.* *Ordinary Differential Equations*. N.Y.: Wiley, 1964. 612 p.
17. *Golub G.H., Van Loan C.F.* *Matrix Computations* (3rd ed.). Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996. 750 p.
18. *Stroh A.N.* Dislocations and cracks in anisotropic elasticity // *Philos. Mag.* 1958. V. 3. P. 625–646.  
<https://doi.org/10.1080/14786435808565804>
19. *Stroh A.N.* Steady state problems in anisotropic elasticity // *J. Math. Phys.* 1962. V. 41. P. 77–103.
20. *Mase G.T.* Rayleigh wave speeds in transversely isotropic materials // *J. Acoust. Soc. Am.* 1987. V. 81. № 5. P. 1441–1446.
21. *Wu K.C.* Generalization of the Stroh formalism to 3-dimensional anisotropic elasticity // *J. Elast.* 1998. V. 51. P. 213–225.  
<https://doi.org/10.1023/A:1007523219357>
22. *Hwu C.* Stroh-like formalism for the coupled stretching-bending analysis for composite laminates // *Int. J. Solids Struct.* 2003. V. 40. P. 3681–3705.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00161-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00161-6)
23. *Hwu C., Becker W.* Stroh formalism for various types of materials and deformations // *J. Mech.* 2022. V. 38. P. 433–444.  
<https://doi.org/10.1093/jom/ufac031>
24. *Fu Y.B.* Hamiltonian interpretation of the Stroh formalism in anisotropic elasticity // *Proc. Roy. Soc. A.* 2007. V. 463. P. 3073–3087.  
<https://doi.org/10.1098/rspa.2007.0093>
25. *Edmondson R.T., Fu Y.B.* Stroh formulation for a generally constrained and pre-stressed elastic material // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2009. V. 44. P. 530–537.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.11.001>
26. *Kuznetsov S.V.* Abnormal dispersion of flexural Lamb waves in functionally graded plates // *Z. Angew. Math. Phys.* 2019. V. 70. Paper 89.  
<https://doi.org/10.1007/s00033-019-1132-0>

27. *Kuznetsov S.V.* Closed form analytical solution for dispersion of Lamb waves in FG plates // *Wave Motion*. 2019. V. 84. P. 1–7.  
<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2018.09.018>
28. *Kuznetsov S.V.* Lamb waves in stratified and functionally graded plates: discrepancy, similarity, and convergence // *Waves Random Complex Media*. 2021. V. 31. P. 1540–1549.  
<https://doi.org/10.1080/17455030.2019.1683257>
29. *Michalski K.A., Mosig J.R.* The Sommerfeld half-space problem revisited: from radio frequencies and Zenneck waves to visible light and Fano modes // *J. Electromagnetic Waves Appl.* 2016. V. 30. P. 1–42.  
<https://doi.org/10.1080/09205071.2015.1093964>
30. *Shanin A.V., Korolkov A.I.* Sommerfeld-type integrals for discrete diffraction problems // *Wave Motion*. 2020. V. 97. Paper 102606.  
<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2020.10260>
31. *Barnett D.M., Lothe J.* Free surface (Rayleigh) waves in anisotropic elastic half-spaces: The surface impedance method // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1985. V. 402. P. 135–152.  
<https://doi.org/10.1098/rspa.1985.0111>
32. *Tanuma K.* Stroh Formalism and Rayleigh Waves. In: *Stroh Formalism and Rayleigh Waves*. Springer: Dordrecht, 2007.
33. *Wang L.* Space of degeneracy in the Stroh eigensystem and surface waves in transversely isotropic elastic media // *Wave Motion*. 2004. V. 40. P. 173–190.
34. *Ting T.C.T.* An explicit secular equation for surface waves in an elastic material of general anisotropy // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 2002. V. 55. P. 297–311.  
<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2004.03.001>
35. *Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.V.* Velocities, dispersion, and energy of SH-waves in anisotropic laminated plates // *Acoust. Phys.* 2014. V. 60. P. 200–207.  
<https://doi.org/10.1134/S106377101402002X>
36. *Pease III M.C.*, *Methods of Matrix Algebra*, London: Academic Press, 1965. 424 p.
37. *Habgood K., Arel I.* A condensation-based application of Cramer’s rule for solving large-scale linear systems // *J. Discrete Algorithms*. 2012. V. 10. P. 98–109.
38. *Goldstein R.V., Kuznetsov S.V.* Long-wave asymptotics of Lamb waves // *Mech. Solids*. 2018. V. 52. P. 700–707.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654417060097>
39. *Ilyashenko A.V. et al.* Theoretical aspects of applying Lamb waves in nondestructive testing of anisotropic media // *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 2017. V. 53(4). P. 243–259.  
<https://doi.org/10.1134/S1061830917040039>
40. *Li S. et al.* Explicit/implicit multi-time step co-simulation in unbounded medium with Rayleigh damping and application for wave barrier // *European Journal of Environmental and Civil Engineering*. 2020. V. 24(14). P. 2400–2421.  
<https://doi.org/10.1080/19648189.2018.1506826>
41. *Li S. et al.* Benchmark for three-dimensional explicit asynchronous absorbing layers for ground wave propagation and wave barriers // *Computers and Geotechnics*. 2021. V. 131. Article 103808.  
<https://doi.org/10.1080/19648189.2018.1506826>

УДК 539.3

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ МЕТАМАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ PLA ПЛАСТИКА ПРИ ПРОБИВАНИИ ЖЕСТКИМ УДАРНИКОМ

© 2024 г. С. Ю. Иванова<sup>а</sup>, К. Ю. Осипенко<sup>а</sup>,  
Н. В. Баничук<sup>а</sup>, Д. С. Лисовенко<sup>а, \*</sup>

<sup>а</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия  
\*e-mail: lisovenk@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 02.06.2024 г.

После доработки 28.06.2024 г.

Принята к публикации 30.06.2024 г.

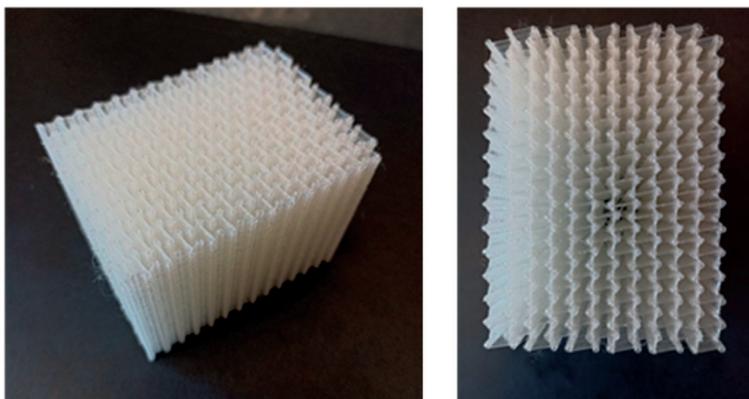
Экспериментально изучались механические свойства метаматериалов, имеющих различную ячеистую внутреннюю структуру, при пробивании по нормали жестким сферическим ударником. На 3D-принтере из e-PLA пластика были изготовлены ауксетические и неауксетические образцы метаматериалов, имеющие хиральную структуру из ячеек, соответственно, в форме вогнутых или выпуклых шестиугольников. На основе проведенных экспериментов по пробиванию сравнивались свойства хиральных ауксетических и неауксетических образцов одинаковой массы для случаев, когда внутри ячеек находился воздух и когда ячейки были заполнены желатином. Относительная потеря кинетической энергии ударника при пробивании заполненных желатином образцов была существенно выше для ауксетического метаматериала, чем для неауксетика. Для незаполненных (“воздушных”) образцов относительная потеря кинетической энергии была незначительно выше у неауксетика.

*Ключевые слова:* метаматериалы, ауксетики, экспериментальные исследования, проникание, пробивание, жесткие ударники

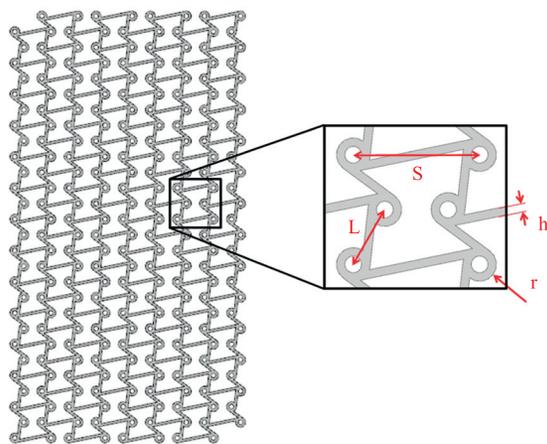
DOI: 10.31857/S1026351924040146 EDN: UCEOZU

Данная работа посвящена продолжению экспериментальных исследований механических свойств создаваемых метаматериалов с ячеистой структурой из металла [1] или e-PLA пластика [2] при пробивании жестким сферическим ударником. На 3D-принтере из e-PLA пластика были изготовлены ауксетические (АС) и неауксетические образцы метаматериалов, имеющие хиральную структуру из ячеек, соответственно, в форме вогнутых или выпуклых шестиугольников (рис. 1а–г). В отличие от обычных материалов с положительным коэффициентом Пуассона для ауксетических материалов сжатие в одном (например, продольном) направлении приводит не к растяжению, а к сжатию также и в другом (поперечном) направлении [3–9].

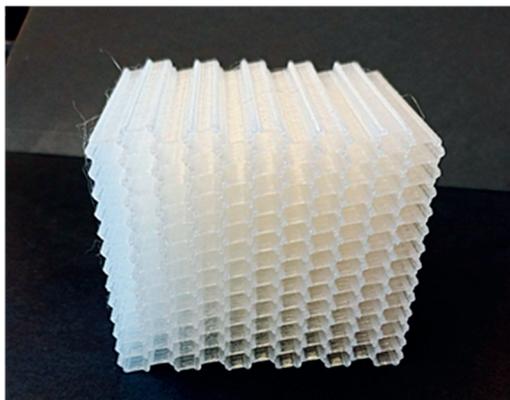
(a)



(b)



(c)



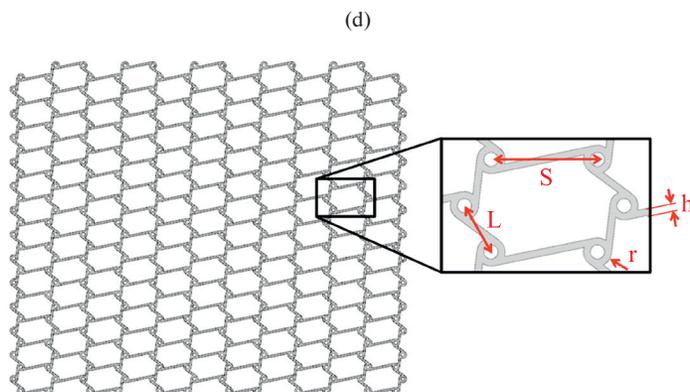


Рис. 1. Образцы метаматериалов и их внутренняя хиральная структура: а), б) – ауксетические; в), г) – неауксетические. На рис. (б) и (г)  $S=6$  мм,  $L=3$  мм,  $h=0.4$  мм,  $r=0.8$  мм.

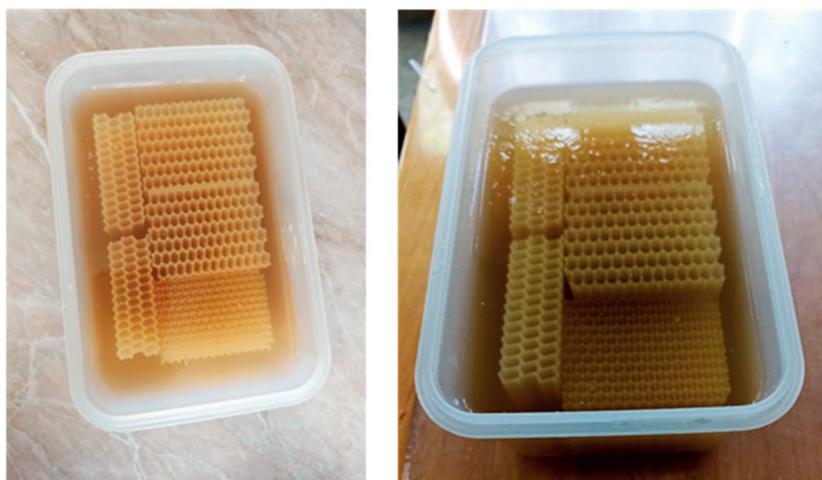


Рис. 2. Подготовленные образцы, заполненные желатином.

Целью проведенных исследований было изучить влияние ауксетических свойств рассматриваемых образцов метаматериалов на относительную потерю кинетической энергии ударника по сравнению с неауксетическими образцами той же массы. При этом наряду с образцами, ячейки которых были заполнены воздухом, испытывались образцы, заполненные пищевым желатином (см. рис. 2).

Для рассматриваемых хиральных структур проверялась установленная в работе [2] для хиральной звездчатой структуры (hexachirals honeycomb) возможность отклонения направления движения ударника после пробивания от подлетного направления.

Пробивание образцов осуществлялось стальным сферическим ударником, имеющим диаметр 10 мм и массу 4.06 г. Образцы устанавливались на

**Таблица 1.** Толщина и масса образцов с воздушным заполнением ячеек, значения скорости входа и выхода ударника для каждого образца

Номер эксперимента	Рисунок	Структура образца	Толщина $H$ , мм	Масса $m$ , г	Скорость входа $v_1$ , м/с	Скорость выхода $v_2$ , м/с
1	1(б)	ауксетик, 5 слоев	25	38.4	146.7	124
2	1(б)	ауксетик, 5 слоев	25	39.4	141	115
3	1(г)	неауксетик, 5 слоев	40.5	41.3	147	118.5
4	1(г)	неауксетик, 5 слоев	40.5	41.4	150	124.5
5	1(б)	ауксетик, 8 слоев	38.5	62	154.5	112.5
6	1(б)	ауксетик, 8 слоев	38.5	61.7	150	108
7	1(г)	неауксетик, 8 слоев	62.5	66.9	152.1	105
8	1(г)	неауксетик, 8 слоев	62.5	66.5	139.3	97.5
9	1(г)	ауксетик, 11 слоев	52	79.6	153.8	100.5
10	1(г)	ауксетик, 11 слоев	52	80.2	150	98
11	1(б)	ауксетик, 11 слоев	52	83.6	150	92.5
12	1(г)	неауксетик, 11 слоев	85	84	150	84
13	1(г)	неауксетик, 11 слоев	85	88.8	145	87

экспериментальном стенде и жестко закреплялись так, чтобы боковая поверхность была перпендикулярна направлению движения ударника, который разгонялся пневматической пушкой. Давление в камере пушки выставлялось таким образом, чтобы скорость вылета ударника составляла приблизительно 150 м/с. Скорость ударника на вылете из ствола пушки принималась за скорость входа в преграду ( $v_1$ ), сопротивлением воздуха движению тела можно было пренебречь в силу небольших размеров экспериментальной установки. Скорость входа измерялась с помощью оптического рамочного хронографа ИБХ-АСС-0021 "Стрелец" и осциллографа. Скорость ударника на выходе из преграды ( $v_2$ ) определялась с помощью высокоскоростной видеокамеры FASTCAM mini AX200, на которую записывался весь процесс пробивания. Камера размещалась таким образом, что на видеозаписи ударник пробивает образец, двигаясь справа налево. Боковая сторона образцов, которая

**Таблица 2.** Толщина и масса образцов с заполнением ячеек желатином, значения скорости входа и выхода ударника для каждого образца

Номер эксперимента	Рисунок	Структура образца	Толщина $H$ , мм	Масса $m$ , г	Скорость входа $v_1$ , м/с	Скорость выхода $v_2$ , м/с
14	1(б)	ауксетик, 5 слоев	25	130.1	147	103.3
15	1(б)	ауксетик, 5 слоев	25	137.9	148.3	102
16	1(г)	неауксетик, 3 слоя	25	133.6	150	113.2
17	1(г)	неауксетик, 3 слоя	25	131.6	150	118.8
18	1(б)	ауксетик, 8 слоев	38.5	205.7	159	78
19	1(б)	ауксетик, 8 слоев	38.5	211	153	66
20	1(б)	ауксетик, 8 слоев	38.5	206	156	67.5
21	1(г)	неауксетик, 5 слоев	40.5	215.2	150	96
22	1(г)	неауксетик, 5 слоев	40.5	211	144	90
23	1(б)	ауксетик, 11 слоев	52	280	150	31.4
24	1(б)	ауксетик, 11 слоев	52	269.5	150.2	33.8
25	1(б)	ауксетик, 11 слоев	52	269.5	153	30.8
26	1(б)	ауксетик, 11 слоев	52	276.5	153	45.8
27	1(г)	неауксетик, 7 слоев	55	285.5	147	60
28	1(г)	неауксетик, 7 слоев	55	280	156.6	48
29	1(г)	неауксетик, 7 слоев	55	278	153.3	50.3

подвергалась удару, во всех случаях имела размеры  $\sim 70 \times 72$  мм. Результаты экспериментов приведены в табл. 1 (заполнение ячеек – воздух) и табл. 2 (заполнение – желатин).

На рис. 3, а представлена зависимость относительной потери кинетической энергии ударника  $\delta = (v_1^2 - v_2^2)/v_1^2$  (%) от массы  $m$  [г] пробиваемых образцов. Для наглядности добавлены линейные линии тренда для АС-образцов (синяя) и неауксетиков (красная). Видно, что линии тренда проходят очень

близко, при этом сотовые неауксетические образцы чуть лучше сопротивляются пробиванию. Были также подготовлены и испытаны ауксетические и неауксетические образцы, заполненные желатином (из расчета 50 г желатина на 500 г воды) и примерно равные по массе. Экспериментальные зависимости величины  $\delta$  от  $m$  для ауксетических и неауксетических структур с желатиновым наполнением приведены на рис. 3, б и показывают, что АС-образцы в данном случае существенно эффективнее неауксетических образцов.

В условиях проведенных экспериментов отклонение направления движения ударника после пробивания образцов с рассматриваемым видом хиральности (в отличие от хиральных звездчатых структур (hexachirals honeycomb) из работы [2]) было незначительным или (в большинстве случаев) не наблюдалось совсем.

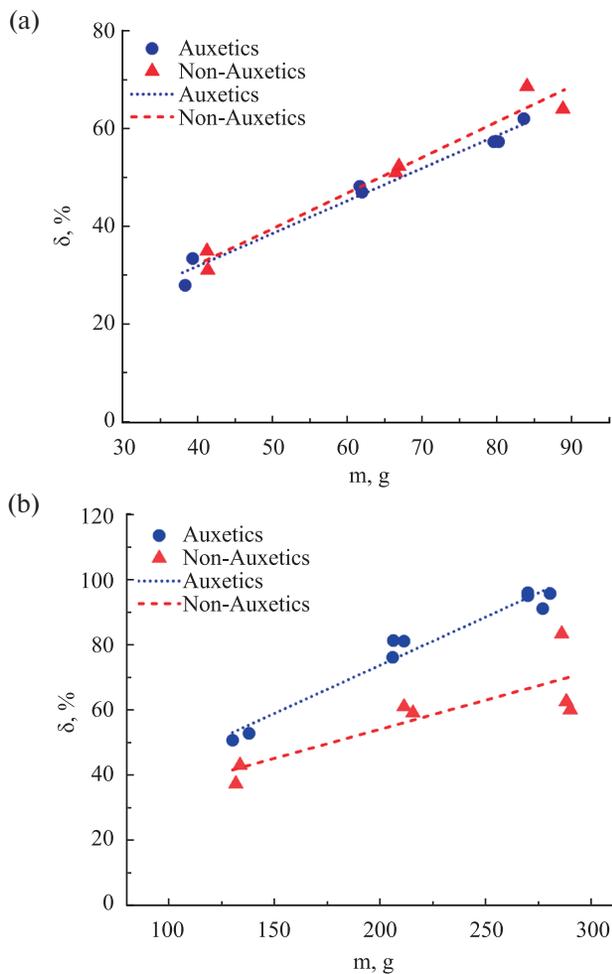


Рис. 3. Зависимость относительной потери кинетической энергии ударника  $\delta$  [%] от массы  $m$  [г] пробиваемых образцов: с заполнением ячеек воздухом (а) и желатином (б).

**Заключение.** Проведенные эксперименты показали лучшую сопротивляемость заполненных желатином хиральных АС-образцов из e-PLA пластика по сравнению с неауксетическими при пробивании жестким сферическим телом. Для АС-образцов из пластика с воздухом в ячейках вышеописанный (и установленный ранее для металлических структур в работе [1]) эффект не наблюдался. Это, возможно, связано с особенностями разрушения более хрупкого пластика, по сравнению с металлом, и может быть предметом для дальнейшего изучения.

Работа выполнена по темам госзадания (номера госрегистрации 124012500437-9, 124013000674-0). Авторы выражают благодарность А.И. Демину за помощь в подготовке 3D-моделей образцов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванова С.Ю., Осипенко К.Ю., Кузнецов В.А., Соловьев Н.Г., Баничук Н.В., Лисовенко Д.С.* Экспериментальное исследование свойств ауксетических и неауксетических метаматериалов из металла при проникании в них жестких ударников // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 2. С. 176–180.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329922600773>
2. *Иванова С.Ю., Осипенко К.Ю., Демин А.И., Баничук Н.В., Лисовенко Д.С.* Изучение свойств метаматериалов с отрицательным коэффициентом Пуассона при пробивании жестким ударником // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 5. С. 120–130.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329923600366>
3. *Lim T.-C.* Auxetic Materials and Structures. Singapore: Springer, 2015.  
<http://doi.org/10.1007/978-981-287-275-3>
4. *Kolken H.M.A., Zadpoor A.A.* Auxetic Mechanical Metamaterials // RSC Adv. 2017. V. 7. № 9. P. 5111–5129.  
<http://doi.org/10.1039/C6RA27333E>
5. *Ren X., Das R., Tran P., et al.* Auxetic Metamaterials and Structures: A Review // Smart Mater. Struct. 2018. V. 27. № 2. P. 023001.  
<https://doi.org/10.1088/1361-665X/aaa61c>
6. *Wu W., Hu W., Qian G. et al.* Mechanical design and multifunctional applications of chiral mechanical metamaterials: A review // Mater. Des. 2019. V. 180. P. 107950.  
<https://doi.org/10.1016/j.matdes.2019.107950>
7. *Городцов В.А. Лисовенко Д.С.* Ауксетики среди материалов с кубической анизотропией // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 4. С. 7–24.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329920040054>
8. *Шутикова М.В.* Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 1. С. 3–40.  
<http://doi.org/10.31857/S0572329921060118>
9. *Gao Y., Huang H.* Energy absorption and gradient of hybrid honeycomb structure with negative Poisson's ratio // Mech. Solids. 2022. V. 57. № 5. P.1118–1133.  
<http://doi.org/10.3103/S0025654422050053>

### EXPERIMENTAL STUDY OF THE PROPERTIES OF METAMATERIALS BASED ON PLA PLASTIC WHEN PERFORATED BY A RIGID STRIKER

S. Yu. Ivanova<sup>a</sup>, K. Yu. Osipenko<sup>a</sup>, N. V. Banichuk<sup>a</sup>, D. S. Lisovenko<sup>a</sup>, \*

<sup>a</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: lisovenk@ipmnet.ru*

**Abstract** – The mechanical properties of metamaterials with different cellular internal structures were experimentally studied when perforated along the normal by a rigid spherical striker. Auxetic and non-auxetic samples of metamaterials with a chiral structure of cells, respectively, in the form of concave or convex hexagons, were produced using a 3D printer from e-PLA plastic. Based on the penetration experiments, the properties of chiral auxetic and non-auxetic samples of the same mass were compared for the cases when there was air inside the cells and when the cells were filled with gelatin. The relative loss of kinetic energy of the striker when perforating gelatin-filled samples was significantly higher for the auxetic metamaterial than for the non-auxetic one. For unfilled (“air”) samples, the relative loss of kinetic energy was slightly higher for the nonauxetic.

**Keywords:** metamaterials, auxetics, experimental studies, penetration, perforation, rigid strikers

## REFERENCES

1. *Ivanova S.Yu., Osipenko K.Yu., Kuznetsov V.A., Solovyov N.G., Banichuk N.V., Lisovenko D.S.* Experimental investigation of the properties of auxetic and non-auxetic metamaterials made of metal during penetration of rigid strikers // *Mech. Solids*. 2023. V. 58. № 2. P. 524–528.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654422601616>
2. *Ivanova S.Yu., Osipenko K.Yu., Demin A.I., Banichuk N.V., Lisovenko D.S.* Studying the properties of metamaterials with a negative Poisson’s ratio when punched by a rigid impactor // *Mech. Solids*. 2023. V. 58. № 5. P. 1536–1544.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654423600897>
3. *Lim T.-C.* Auxetic Materials and Structures. Singapore: Springer, 2015.  
<http://doi.org/10.1007/978-981-287-275-3>
4. *Kolken H.M.A., Zadpoor A.A.* Auxetic Mechanical Metamaterials // *RSC Adv*. 2017. V. 7. № 9. P. 5111–5129.  
<http://doi.org/10.1039/C6RA27333E>
5. *Ren X., Das R., Tran P., et al.* Auxetic Metamaterials and Structures: A Review // *Smart Mater. Struct*. 2018. V. 27. № 2. P. 023001.  
<https://doi.org/10.1088/1361-665X/aaa61c>
6. *Wu W., Hu W., Qian G. et al.* Mechanical design and multifunctional applications of chiral mechanical metamaterials: A review // *Mater. Des*. 2019. V. 180. P. 107950.  
<https://doi.org/10.1016/j.matdes.2019.107950>
7. *Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S.* Auxetics among materials with cubic anisotropy // *Mech. Solids*. 2020. V. 55. № 4. P. 461–474.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654420040044>
8. *Shitikova M.V.* Fractional operator viscoelastic models in dynamic problems of mechanics of solids: A Review // *Mech. Solids*. 2022. V. 57. № 1. P. 1–33.  
<http://doi.org/10.3103/S0025654422010022>
9. *Gao Y., Huang H.* Energy absorption and gradient of hybrid honeycomb structure with negative Poisson’s ratio // *Mech. Solids*. 2022. V. 57. № 5. P. 1118–1133.  
<http://doi.org/10.3103/S0025654422050053>