

*Известия*

ISSN 0572-3299

*Российской академии наук*

---

---

# МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА



2023

1

СОДЕРЖАНИЕ

Кватернионные методы и регулярные модели небесной механики и механики космического полета: использование параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) для описания орбитального (траекторного) движения. II: Возмущенная пространственная ограниченная задача трех тел <i>Ю. Н. Челноков</i>	3
Решение внешней задачи Похгаммера–Кри и изгибные сейсмические колебания трубопровода в бесконечной упругой среде <i>М. Ш. Исраилов</i>	33
Гидромеханическое моделирование заглубленного начального импульсного воздействия на гидрогеофизический массив <i>К. Н. Анахаев, В. В. Беликов</i>	47
Определение предела текучести монокристаллов с гексагональной решеткой при заданном тензоре деформаций и гидростатическом давлении <i>А. Г. Кесарев, А. М. Власова</i>	55
Коррекция бесплатформенной инерциальной навигационной системы при спуске в атмосфере <i>О. Е. Королев</i>	68
Оптимальное управление кинетическим моментом твердого тела (космического аппарата) при выполнении пространственного разворота <i>М. В. Левский</i>	76
К статической устойчивости формы поперечного сечения трубопровода, цилиндрической оболочки, углеродной нанотрубки <i>А. Г. Хакимов</i>	95
О длительном разрушении составного растягиваемого стержня в условиях ползучести <i>Л. В. Фомин, Ю. Г. Басалов</i>	102
Исследование погрешности быстрой тригонометрической интерполяции при решении задачи о напряжениях в бруске <i>А. Д. Чернышов, В. В. Горяйнов, М. И. Попов</i>	115
Применение методов теории критических расстояний для оценки разрушения квазихрупких материалов с вырезами <i>С. В. Сукнев</i>	129
Вычисление параметров напряженно-деформированного состояния полимерного композита в поле постоянного электрического тока <i>П. А. Люкшин, Б. А. Люкшин, С. В. Панин, С. А. Бочкарева</i>	142
Относительные равновесия тяжелой точки на равномерно вращающейся наклонной плоскости <i>А. А. Буров, В. И. Никонов</i>	156
Ауксетики среди двухслойных композитов из кристаллов с кубической симметрией. Аналитический и численный анализ <i>А. И. Демин, М. А. Волков, В. А. Городцов, Д. С. Лисовенко</i>	166



УДК 531.3

**КВАТЕРНИОННЫЕ МЕТОДЫ И РЕГУЛЯРНЫЕ МОДЕЛИ НЕБЕСНОЙ  
МЕХАНИКИ И МЕХАНИКИ КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА:  
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭЙЛЕРА (РОДРИГА–ГАМИЛЬТОНА)  
ДЛЯ ОПИСАНИЯ ОРБИТАЛЬНОГО (ТРАЕКТОРНОГО) ДВИЖЕНИЯ.  
II: ВОЗМУЩЕННАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ**

© 2023 г. Ю. Н. Челноков<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия

\*e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com

Поступила в редакцию 29.10.2021 г.

После доработки 13.03.2022 г.

Принята к публикации 14.03.2022 г.

В работе рассматривается проблема регуляризации особенностей классических уравнений небесной механики и механики космического полета (астродинамики), в которых используются переменные, характеризующие форму и размеры мгновенной орбиты (траектории) изучаемого движущегося тела, и углы Эйлера, описывающие ориентацию используемой вращающейся (промежуточной (intermediate)) системы координат или ориентацию мгновенной орбиты, или плоскости орбиты движущегося тела в инерциальной системе координат. Особенности типа сингулярности (деления на ноль) этих классических уравнений порождаются углами Эйлера и затрудняют аналитическое и численное исследование задач орбитального движения. Эти особенности эффективно устраняются с помощью использования четырехмерных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватернионов поворотов (вращения) Гамильтона. В настоящей (второй) части работы получены новые регулярные кватернионные модели небесной механики и астродинамики, не имеющие выше указанных особенностей и построенные в рамках возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (например, Земля, Луна (или Солнце) и космический аппарат (или астероид)): уравнения траекторного движения, записанные в неголономной или в орбитальной, или в идеальной системах координат, для описания вращательного движения которых использованы параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватернионы поворотов Гамильтона. Получены также новые регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, построенные с использованием двумерных идеальных прямоугольных координат Ганзена, параметров Эйлера и кватернионных переменных, а также с использованием комплексных композиций координат Ганзена и параметров Эйлера (параметров Кейли–Клейна). Преимущество предлагаемых уравнений орбитального движения, построенных с использованием параметров Эйлера, перед уравнениями, построенными с использованием углов Эйлера, обусловливается хорошо известными преимуществами кватернионных кинематических уравнений в параметрах Эйлера, входящих в состав предлагаемых уравнений, перед кинематическими уравнениями в углах Эйлера, входящих в состав классических уравнений.

*Ключевые слова:* возмущенная пространственная ограниченная задача трех тел, регулярные кватернионные модели, параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), кватернион поворота Гамильтона, космический аппарат, неголономная, орбитальная и идеальная системы координат

DOI: 10.31857/S0572329922600293, EDN: KEITGM

**1. Устранение особенностей типа сингулярности (деления на ноль) в классических уравнениях небесной механики и астродинамики, записанных во вращающихся системах координат и использующих углы Эйлера (угловые оскулирующие элементы орбиты) для описания орбитального движения изучаемого тела.** Эффективность аналитического исследования и численного решения задач небесной механики и механики космического полета (астродинамики) во многих случаях повышается за счет использования уравнений орбитального движения, записанных в той или иной вращающейся (промежуточной (intermediate)) системе координат с помощью использования таких понятий как форма, размеры и ориентация мгновенной орбиты изучаемого движущегося тела (например, космического аппарата (КА), астероида). В уравнениях движения такого рода присутствуют переменные, характеризующие угловое движение используемой вращающейся системы координат или ориентацию мгновенной орбиты, или плоскости орбиты движущегося тела.

В качестве таких переменных в механике и астродинамике традиционно используются углы Эйлера (угловые оскулирующие элементы орбиты) или направляющие косинусы. Использование углов Эйлера позволяет записать уравнения орбитального движения в наглядной форме, но приводит к появлению в уравнениях движения громоздких тригонометрических выражений и дополнительных особых точек (деление на ноль), в которых уравнения вырождаются. Так, в состав широко используемых уравнений Ньютона—Эйлера для оскулирующих элементов (медленно изменяющихся переменных) [1, 2] входят дифференциальные уравнения для угловых элементов: долготы восходящего узла, наклона (наклонения) орбиты, углового расстояния перицентра от узла. Эти уравнения вырождаются, когда угол наклона мгновенной орбиты изучаемого тела становится равным нулю или 180 градусам. Использование направляющих косинусов позволяет устранить тригонометрические выражения и указанную особенность уравнений движения изучаемого тела, однако приводит к существенному повышению размерности системы уравнений движения и к потере геометрической наглядности.

Этих недостатков использования углов Эйлера и направляющих косинусов удастся избежать, если в качестве параметров ориентации используемой вращающейся системы координат или мгновенной орбиты изучаемого тела, или плоскости его орбиты выбрать параметры Эйлера (Родрига—Гамильтона). В этом случае для описания ориентации этой системы координат и орбиты изучаемого тела удобно использовать гиперкомплексную переменную — кватернион поворота Гамильтона, компонентами которого являются вещественные параметры Эйлера. При этом в составе уравнений траекторного (орбитального) движения появляется дифференциальное кватернионное уравнение углового движения используемой вращающейся системы координат или мгновенной орбиты, или плоскости орбиты изучаемого тела, имеющее компактную, симметричную и невырождающуюся структуру. Эти уравнения в настоящее время стали широко использоваться в небесной механике и астродинамике, также как и кватернионные уравнения в четырехмерных переменных Кустаанхеймо—Штифеля и параметрах Эйлера, регулярные для орбитального движения тела в гравитационных и других центральных силовых полях (в этих регулярных кватернионных уравнениях устраняются другие особенности (деление на ноль), порождаемые действием гравитационных сил).

Параметры Эйлера (Родрига—Гамильтона) и кватернионы поворотов Гамильтона давно и успешно используются в механике, навигации и управлении движением для описания углового (вращательного) движения твердого тела, в частности, космического аппарата. Использование параметров Эйлера и кватернионов для описания орбитального (поступательного, траекторного) движения и для построения кватернионных динамических уравнений такого движения стало распространенным сравнительно недавно.

В первой части нашей работы [3] дан обзор и анализ известных нам регулярных моделей небесной механики и астродинамики, построенных с использованием вещественных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватернионов поворота Гамильтона на основе дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с помощью их записи в той или иной вращающейся системе координат. В этих моделях устранены особенности (деление на ноль), порождаемые использованием в классических уравнениях углов Эйлера. Рассмотрены приложения этих моделей в задачах оптимального управления орбитальным движением космического аппарата, решаемых с использованием принципа максимума Понтрягина. Показано, что эффективность аналитического исследования и численного решения краевых задач оптимального управления траекторным (орбитальным) движением космических аппаратов может быть кардинально повышена за счет использования указанных регулярных кватернионных моделей астродинамики.

Также дан обзор и анализ публикаций, в которых используются дуальные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) с комплексностью Клиффорда  $s$ , обладающей свойством  $s^2 = 0$ , и дуальные кватернионы (бикватернионы Клиффорда) для решения задач управления общим пространственным движением твердого тела (космического аппарата), представляющим собой композицию углового (вращательного) и траекторного (орбитального) движений, с использованием принципа обратной связи (с использованием дуальных обратных связей).

В этой (второй) части работы нами получены новые регулярные кватернионные уравнения небесной механики и механики космического полета. Уравнения построены в рамках возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. К ним относятся уравнения траекторного движения, записанные в неголономной или в орбитальной, или в идеальной системах координат. Для описания вращательного движения этих систем координат использованы вещественные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватернионы поворотов (вращений) Гамильтона. Из полученных уравнений следуют, как частные, регулярные модели небесной механики и астродинамики, построенные ранее автором статьи и другими исследователями с использованием параметров Эйлера и кватернионов Гамильтона на основе дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел. Полученные в статье уравнения целесообразно использовать для решения в рамках возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (Земля, Луна, космический аппарат) такой актуальной задачи механики космического полета, как полет космического аппарата на Луну.

В статье также выведены другие новые регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. Уравнения построены с использованием двумерных идеальных прямоугольных координат Ганзена, параметров Эйлера и кватернионных переменных, а также комплексных композиций параметров Эйлера (параметров Кейли–Клейна) (используемая в них традиционная комплексность  $i$  обладает свойством  $i^2 = -1$ ).

**2. Исходные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. Задачи регуляризации уравнений.** Рассмотрим три материальные точки  $M_0$ ,  $M_1$  и  $M_2$  с массами  $m_0$ ,  $m_1$  и  $m_2$ , взаимно притягивающие друг друга по закону всемирного тяготения. Неограниченная задача трех тел состоит [1, 2] в определении и изучении всевозможных движений материальных точек  $M_0$ ,  $M_1$  и  $M_2$ . Ограниченная задача трех тел – это задача [1, 2] о движении материальной точки  $M_2 = M$  с нулевой массой  $m_2 = 0$  (точнее с массой  $m_2$ , пренебрежимо малой по сравнению с массами  $m_0$  и  $m_1$ ), притягиваемой по закону Ньютона двумя другими материальными точками  $M_0$  и  $M_1$ , имеющими отличные от нуля массы  $m_0$  и  $m_1$ .

Ограниченная задача трех тел представляет собой [1, 2] предельный вариант неограниченной задачи трех тел. Она нашла широкое применение как в классической небесной механике (например, теория движения Луны), так и в механике космического полета (например, задача достижения Луны). Дифференциальные уравнения ограниченной задачи трех тел получаются из уравнений неограниченной задачи трех тел (5.1.04) [1], если в них положить  $m_2 = 0$ , и имеют вид

$$\begin{aligned} d^2\xi_0/dt^2 &= fm_1(\xi_1 - \xi_0)/\Delta_{01}^3, & d^2\eta_0/dt^2 &= fm_1(\eta_1 - \eta_0)/\Delta_{01}^3, & d^2\zeta_0/dt^2 &= fm_1(\zeta_1 - \zeta_0)/\Delta_{01}^3 \\ d^2\xi_1/dt^2 &= fm_0(\xi_0 - \xi_1)/\Delta_{01}^3, & d^2\eta_1/dt^2 &= fm_0(\eta_0 - \eta_1)/\Delta_{01}^3, & d^2\zeta_1/dt^2 &= fm_0(\zeta_0 - \zeta_1)/\Delta_{01}^3 \\ d^2\xi_2/dt^2 &= fm_0(\xi_0 - \xi_2)/\Delta_{02}^3 + fm_1(\xi_1 - \xi_2)/\Delta_{12}^3 + p_\xi & (2.1) \\ d^2\eta_2/dt^2 &= fm_0(\eta_0 - \eta_2)/\Delta_{02}^3 + fm_1(\eta_1 - \eta_2)/\Delta_{12}^3 + p_\eta \\ d^2\zeta_2/dt^2 &= fm_0(\zeta_0 - \zeta_2)/\Delta_{02}^3 + fm_1(\zeta_1 - \zeta_2)/\Delta_{12}^3 + p_\zeta \\ \Delta_{01}^2 &= (\xi_0 - \xi_1)^2 + (\eta_0 - \eta_1)^2 + (\zeta_0 - \zeta_1)^2 \\ \Delta_{02}^2 &= (\xi_0 - \xi_2)^2 + (\eta_0 - \eta_2)^2 + (\zeta_0 - \zeta_2)^2 & (2.2) \\ \Delta_{12}^2 &= (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2 \end{aligned}$$

Здесь  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0; \xi_1, \eta_1, \zeta_1$  и  $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$  – декартовы координаты материальных точек  $M_0, M_1$  и  $M_2$  в инерциальной системе координат  $O\xi\eta\zeta$  (т.е. в системе координат, в которой выполняются законы Ньютона);  $\Delta_{01}, \Delta_{02}, \Delta_{12}$  – взаимные расстояния между точками  $M_0$  и  $M_1, M_0$  и  $M_2, M_1$  и  $M_2$  соответственно;  $f$  – гравитационная постоянная.

Отметим, что в уравнениях (2.1), (2.2) в отличие от уравнений (5.1.04) [1], дополнительно введены проекции  $p_\xi, p_\eta$  и  $p_\zeta$  на оси инерциальной системы координат  $O\xi\eta\zeta$  возмущающего ускорения  $\mathbf{p}$  материальной точки  $M_2$  от других действующих на точку  $M_2 = M$  сил, не вызванных силами гравитационного притяжения, действующими со стороны точек  $M_0$  и  $M_1$ .

Введем векторы  $\mathbf{r}_0 = \overline{M_0M}, \mathbf{r}_1 = \overline{M_1M}, \mathbf{r}_{01} = \overline{M_0M_1}, \mathbf{r}_{10} = \overline{M_1M_0} = -\mathbf{r}_{01}$ . Проекции векторов  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}_1$  на оси инерциальной системы координат  $O\xi\eta\zeta$  соответственно равны  $\xi_2 - \xi_0, \eta_2 - \eta_0, \zeta_2 - \zeta_0$  и  $\xi_2 - \xi_1, \eta_2 - \eta_1, \zeta_2 - \zeta_1$ .

Используя введенные векторы  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}_1$  в качестве новых векторных переменных, из дифференциальных уравнений (2.1) получим следующую векторную форму дифференциальных уравнений возмущенной ограниченной задачи трех тел:

$$d^2\mathbf{r}_0/dt^2 = -(fm_0/r_0^3)\mathbf{r}_0 - (fm_1/r_1^3)\mathbf{r}_1 - (fm_1/r_{01}^3)\mathbf{r}_{01} + \mathbf{p} \quad (2.3)$$

$$d^2\mathbf{r}_1/dt^2 = -(fm_0/r_0^3)\mathbf{r}_0 - (fm_1/r_1^3)\mathbf{r}_1 - (fm_0/r_{01}^3)\mathbf{r}_{10} + \mathbf{p} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{r}_{01} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}_{10} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = -\mathbf{r}_{01}$$

$$r_0 = |\mathbf{r}_0| = \Delta_{02}, \quad r_1 = |\mathbf{r}_1| = \Delta_{12}, \quad r_{01} = |\mathbf{r}_{01}| = |\mathbf{r}_{10}| = \Delta_{01}$$

Дифференциальное уравнение (2.3) описывает движение точки  $M_2 = M$  в системе координат  $M_0X_0Y_0Z_0$ , имеющей начало в точке  $M_0$  и координатные оси  $M_0X_0, M_0Y_0, M_0Z_0$ , параллельные одноименным осям инерциальной системы координат  $O\xi\eta\zeta$ , а дифференциальное уравнение (2.4) – движение этой же точки в системе координат  $M_1X_1Y_1Z_1$ , имеющей начало в точке  $M_1$  и координатные оси  $M_1X_1, M_1Y_1, M_1Z_1$ , также параллельные одноименным инерциальным осям  $O\xi, O\eta, O\zeta$ .

Дифференциальное уравнение (2.3) может рассматриваться независимо от дифференциального уравнения (2.4), если в нем использовать соотношение  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{01}$  и учесть, что вектор  $\mathbf{r}_{01}$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$d^2\mathbf{r}_{01}/dt^2 = -(f(m_0 + m_1)/r_{01}^3)\mathbf{r}_{01} \quad (2.5)$$

невозмущенной задачи двух тел ( $M_0$  и  $M_1$ ), которое, как известно, интегрируется. Поэтому можно считать, что вектор  $\mathbf{r}_{01}$ , фигурирующий в уравнении (2.3), является известной функцией времени:  $\mathbf{r}_{01} = \mathbf{r}_{01}(t)$ . Аналогично, дифференциальное уравнение (2.4) может рассматриваться независимо от дифференциального уравнения (2.3), если в нем использовать соотношение  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{10}$  и учесть, что вектор  $\mathbf{r}_{10} = -\mathbf{r}_{01}$  является известной функцией времени.

Уравнения (2.3) и (2.4) могут также рассматриваться как система двух дифференциальных уравнений с неизвестными векторными переменными  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}_1$ .

Отметим, что координатная запись уравнения (2.3) совпадает (при  $\mathbf{p} = 0$ ) с уравнениями ограниченной задачи трех тел (6.1) [2].

Уравнения (2.3) и (2.4) можно также записать в виде

$$d^2\mathbf{r}_0/dt^2 = -((fm_0/r_0^3) + (fm_1/r_1^3))\mathbf{r}_0 + fm_1((1/r_1^3) - (1/r_0^3))\mathbf{r}_{01} + \mathbf{p} \quad (2.6)$$

$$d^2\mathbf{r}_1/dt^2 = -((fm_0/r_0^3) + (fm_1/r_1^3))\mathbf{r}_1 - fm_0((1/r_0^3) - (1/r_1^3))\mathbf{r}_{01} + \mathbf{p} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{r}_{01} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}_{10} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = -\mathbf{r}_{01}$$

Векторные уравнения (2.3) и (2.4) или (2.6) и (2.7) возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел содержат особые точки  $r_0 = 0$ ,  $r_1 = 0$ , в которых эти уравнения вырождаются. Такого рода особенности (сингулярности) создают не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности в небесной механике и астродинамике, в особенности при изучении движения небесных и космических тел по сильно вытянутым орбитам.

Проблема устранения этих особенностей (как отдельное исключение одной из этих особенностей, так и одновременное исключение обеих особенностей) и составляет предмет классической регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел.

Отметим, что одновременное выполнение условий  $r_0 = 0$  и  $r_1 = 0$  в большинстве задач небесной механики и астродинамики не возможно. Тем не менее, представляет как теоретический, так и практический интерес (с точки зрения построения эффективных высокоточных алгоритмов численного интегрирования дифференциальных уравнений задачи трех тел, необходимых для высокоточного прогноза движения небесных и космических тел) получение таких регулярных уравнений, которые не вырождаются при одновременном выполнении этих условий.

В наших работах [4–8] даны краткие обзоры и анализ кватернионных методов и моделей регулярной небесной механики и механики космического полета, в которых используются четырехмерные переменные Кустаанхеймо–Штифеля и параметры Эйлера, чаще называемые в России параметрами Родрига–Гамильтона, для регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел и возмущенного пространственного центрального движения материальной точки, а также даны обзоры их приложений к решению задач оптимального управления орбитальным движением космического аппарата (КА). С помощью этих методов и моделей устраняются особенности (деление на ноль), порождаемые гравитационными силами и возникающие в уравнениях этих задач при соударении тел.

Наряду с указанными особенностями другие особенности типа сингулярности (деления на ноль) имеют классические модели небесной механики и астродинамики

[1, 2], записанные во вращающихся системах координат и использующие углы Эйлера для описания углового движения этих систем координат, а также модели, описывающие в угловых переменных мгновенную ориентацию орбиты или плоскости орбиты небесного тела, космического аппарата. Отметим, что этих особенностей не имеют классические модели орбитального движения, записанные в декартовых координатах или в векторной форме. Такие модели обладают большой компактностью и наглядностью. Однако во многих случаях они оказываются малоэффективными как для аналитического, так и численного исследования движения небесных тел и космических аппаратов, а также для решения задач оптимального управления траекторным движением КА.

Задачей настоящей статьи является регуляризация (устранение особенностей типа деления на ноль) классических дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, записанных в той или иной используемой вращающейся системе координат и порождаемых использованием углов Эйлера для описания ориентации этих систем координат или ориентации орбиты изучаемого тела. В статье построены новые регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, полученные из классических векторных дифференциальных уравнений (2.3) и (2.4) или (2.6) и (2.7) этой задачи в декартовых координатах с помощью их записи в неголономной или в орбитальной, или в идеальной системе координат и использования для описания углового (вращательного) движения этих систем координат параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватернионов поворотов Гамильтона.

**3. Энергетические соотношения и уравнения в пространственной ограниченной задаче трех тел. Интеграл Якоби.** При построении регулярных уравнений небесной механики и астродинамики используются энергетические характеристики движения тел и дифференциальные уравнения для этих характеристик.

Введем в рассмотрение приведенную энергию  $h_0$  движения точки  $M_2 = M$  в системе координат  $M_0X_0Y_0Z_0$  и приведенную энергию  $h_1$  движения этой точки в системе координат  $M_1X_1Y_1Z_1$ :

$$\begin{aligned} h_0 &= (1/2)v_0^2 - (fm_0)/r_0 - fm_1/r_1, & h_1 &= (1/2)v_1^2 - (fm_0)/r_0 - (fm_1)/r_1 \\ v_0 &= |\mathbf{v}_0|, & \mathbf{v}_0 &= d\mathbf{r}_0/dt; & v_1 &= |\mathbf{v}_1|, & \mathbf{v}_1 &= d\mathbf{r}_1/dt \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  – векторы скоростей движения точки  $M$  в системах координат  $M_0X_0Y_0Z_0$  и  $M_1X_1Y_1Z_1$  соответственно.

Дифференцируя соотношения (3.1) по времени и учитывая уравнения (2.3) и (2.4), получаем различные формы дифференциальных уравнений для энергий  $h_0$  и  $h_1$  [9]:

$$\begin{aligned} dh_0/dt &= -fm_1[r_{01}^{-3}(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}_{01}) + r_1^{-3}(\mathbf{v}_{01} \cdot \mathbf{r}_1)] + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{p} = \\ &= fm_1r_1^{-3}(r_{01}\dot{r}_{01} - \mathbf{v}_{01} \cdot \mathbf{r}_0) - fm_1r_{01}^{-3}(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}_{01}) + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{p} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} dh_1/dt &= -fm_0[r_{01}^{-3}(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_{01}) + r_0^{-3}(\mathbf{v}_{10} \cdot \mathbf{r}_0)] + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{p} = fm_0[r_{10}^{-3}(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_{01}) + r_0^{-3}(\mathbf{v}_{01} \cdot \mathbf{r}_0)] + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{p} = \\ &= fm_0r_0^{-3}(r_{01}\dot{r}_{01} + \mathbf{v}_{01} \cdot \mathbf{r}_1) + fm_0r_{01}^{-3}(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_{01}) + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{p} \\ \mathbf{v}_0 &= d\mathbf{r}_0/dt, & \mathbf{v}_{01} &= d\mathbf{r}_{01}/dt; & \mathbf{v}_1 &= d\mathbf{r}_1/dt, & \mathbf{v}_{10} &= d\mathbf{r}_{10}/dt \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь центральная точка – символ скалярного произведения векторов.

Отметим, что уравнения энергий (3.2) и (3.3) справедливы для общей возмущенной ограниченной задачи трех тел и что особенности (сингулярности) этих уравнений обусловлены ненулевой скоростью  $\mathbf{v}_{01}$  движения тела  $M_1$  относительно тела  $M_0$ .

Отметим также, что для задачи двух тел

$$h_0 = (1/2)v_0^2 - (fm_0)/r_0 \quad (m_1 = 0); \quad h_1 = (1/2)v_1^2 - (fm_1)/r_1 \quad (m_0 = 0)$$

и уравнения для энергий  $h_0$  и  $h_1$  принимают вид

$$\dot{h}_0 = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{p}, \quad \dot{h}_1 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{p}$$

Здесь и далее верхняя точка – символ дифференцирования по времени.

При  $\mathbf{p} = 0$  (отсутствии возмущающего ускорения  $\mathbf{p}$ ) они интегрируются, давая первые интегралы задачи двух тел

$$h_0 = (1/2)v_0^2 - (fm_0)/r_0 = \text{const} \quad (m_1 = 0); \quad h_1 = (1/2)v_1^2 - (fm_1)/r_1 = \text{const} \quad (m_0 = 0)$$

Для задачи двух неподвижных центров  $\mathbf{r}_{01} = -\mathbf{r}_{10} = \text{const}$ ,  $\mathbf{v}_{01} = -\mathbf{v}_{10} = \mathbf{0}$ . Поэтому в уравнениях (3.2) и (3.3) исчезают слагаемые с множителями  $r_0^{-3}$  и  $r_1^{-3}$ . Уравнения для энергий  $h_0$  и  $h_1$  принимают вид

$$dh_0/dt = -fm_1 r_{01}^{-3} ((d\mathbf{r}_0/dt) \cdot \mathbf{r}_{01}) + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{p}; \quad dh_1/dt = -fm_0 r_{01}^{-3} ((d\mathbf{r}_1/dt) \cdot \mathbf{r}_{10}) + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{p}$$

$$\mathbf{r}_{01} = \text{const}, \quad \mathbf{r}_{10} = \text{const}$$

(становятся регулярными).

Эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt}(h_0 + fm_1 r_{01}^{-3} (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_{01})) = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{p}; \quad \frac{d}{dt}(h_1 + fm_0 r_{01}^{-3} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{10})) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{p}$$

и при  $\mathbf{p} = 0$  интегрируются, давая первые интегралы задачи двух неподвижных центров

$$h_0 + fm_1 r_{01}^{-3} (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_{01}) = (1/2)v_0^2 - (fm_0)/r_0 - (fm_1)/r_1 + fm_1 r_{01}^{-3} (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_{01}) = \text{const}$$

$$h_1 + fm_0 r_{01}^{-3} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{10}) = (1/2)v_1^2 - (fm_0)/r_0 - (fm_1)/r_1 + fm_0 r_{01}^{-3} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{10}) = \text{const}$$

Как известно, для уравнений невозмущенной ограниченной круговой задачи трех тел (когда  $\mathbf{p} = 0$ ) существует первый интеграл, называемый интегралом Якоби [1, 2].

Обозначим через  $x_0, y_0, z_0$  декартовые координаты точки  $M$  в системе координат  $M_0 X_0 Y_0 Z_0$  (проекция вектора  $\mathbf{r}_0$  на оси этой системы координат), а через  $x_{01}, y_{01}, z_{01}$  – проекции вектора  $\mathbf{r}_{01}$  на оси этой же системы координат (координаты точки  $M_1$  в системе координат  $M_0 X_0 Y_0 Z_0$ ). Проектируя уравнение (2.6) на оси системы координат  $M_0 X_0 Y_0 Z_0$ , получим скалярные уравнения возмущенной ограниченной задачи трех тел в следующем виде:

$$\begin{aligned} d^2 x_0 / dt^2 &= - (fm_0 / r_0^3) x_0 + fm_1 [(1/r_1^3)(x_{01} - x_0) - (1/r_{01}^3) x_{01}] + p_x \\ d^2 y_0 / dt^2 &= - (fm_0 / r_0^3) y_0 + fm_1 [(1/r_1^3)(y_{01} - y_0) - (1/r_{01}^3) y_{01}] + p_y \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} d^2 z_0 / dt^2 &= - (fm_0 / r_0^3) z_0 + fm_1 [(1/r_1^3)(z_{01} - z_0) - (1/r_{01}^3) z_{01}] + p_z \\ r_0^2 &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \quad r_{01}^2 = x_{01}^2 + y_{01}^2 + z_{01}^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$r_1^2 = (x_{01} - x_0)^2 + (y_{01} - y_0)^2 + (z_{01} - z_0)^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

Здесь  $x_1, y_1, z_1$  и  $p_x = p_\xi, p_y = p_\eta, p_z = p_\zeta$  – проекции векторов  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{p}$  на оси системы координат  $M_0 X_0 Y_0 Z_0$  (они равны соответствующим проекциям этих векторов на оси системы координат  $M_1 X_1 Y_1 Z_1$ ).

Уравнения (3.4) и (3.5) при  $p_x = 0, p_y = 0, p_z = 0$  совпадают с уравнениями (6.1) и (6.2) [2].

Проектируя уравнение (2.7) на оси системы координат  $M_1 X_1 Y_1 Z_1$ , получим скалярные уравнения возмущенной ограниченной задачи трех тел в следующем виде:

$$\begin{aligned} d^2x_1/dt^2 &= -(fm_1/r_1^3)x_1 + fm_0[(1/r_0^3)(x_{10} - x_1) - (1/r_0^3)x_{10} + p_x \\ d^2y_1/dt^2 &= -(fm_1/r_1^3)y_1 + fm_0[(1/r_0^3)(y_{10} - y_1) - (1/r_0^3)y_{10} + p_y \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} d^2z_1/dt^2 &= -(fm_1/r_1^3)z_1 + fm_0[(1/r_0^3)(z_{10} - z_1) - (1/r_0^3)z_{10} + p_z \\ r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad r_0^2 = x_{10}^2 + y_{10}^2 + z_{10}^2 \\ r_0^2 &= (x_{10} - x_1)^2 + (y_{10} - y_1)^2 + (z_{10} - z_1)^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь  $x_1, y_1, z_1$  – декартовы координаты точки  $M$  в системе координат  $M_1X_1Y_1Z_1$  (проекция вектора  $\mathbf{r}_1$  на оси этой системы координат, равные проекциям этого вектора на оси системы координат  $M_0X_0Y_0Z_0$ ,  $x_{10} = -x_{01}, y_{10} = -y_{01}, z_{10} = -z_{01}$  – проекции вектора  $\mathbf{r}_{10} = -\mathbf{r}_{01}$  на оси системы координат  $M_1X_1Y_1Z_1$  (координаты точки  $M_0$  в системе координат  $M_1X_1Y_1Z_1$ ).

Рассмотрим частный случай ограниченной задачи трех тел – круговую ограниченную задачу трех тел. Будем считать, что материальная точка  $M_0$  – Земля, вокруг которой по круговой орбите движется по законам Кеплера материальная точка  $M_1$  – Луна. Будем также считать, что плоскость круговой орбиты Луны совпадает с координатной плоскостью  $M_0X_0Y_0Z_0$ . Тогда для координат  $x_{01}, y_{01}, z_{01}$  Луны будем иметь следующие выражения [2]:

$$x_{01} = a \cos(nt), \quad y_{01} = a \sin(nt), \quad z_{01} = 0 \quad (3.8)$$

При этом полагается, что ось  $M_0X_0$  проходит через начальное положение Луны (этот момент времени принят за начальную эпоху отсчета времени).

Радиус круговой орбиты Луны  $a$  и угловая скорость  $n$  движения ее по круговой орбите связаны известным соотношением

$$n^2 = f(m_0 + m_1)/a^3, \quad a = |\mathbf{r}_{01}| = r_{01} \quad (3.9)$$

Проекции вектора скорости Луны в системе координат  $M_0X_0Y_0Z_0$  получим, дифференцируя соотношения (3.8) по времени:

$$\dot{x}_{01} = -a n \sin(nt) = -n y_{01}, \quad \dot{y}_{01} = a n \cos(nt) = -n x_{01}, \quad \dot{z}_{01} = 0 \quad (3.10)$$

Соотношения (3.8)–(3.10) могут быть также получены интегрированием уравнения (2.5) с учетом выше сделанных предположений о движении тела  $M_1$  (Луны) и о выборе системы координат  $M_0X_0Y_0Z_0$ .

Из уравнений (3.4) и (3.6) можно получить [9] следующие дифференциальные уравнения для энергий  $h_0$  и  $h_1$  движения точки  $M$  в системах координат  $M_0X_0Y_0Z_0$  и  $M_1X_1Y_1Z_1$  в случае возмущенной круговой ограниченной задачи трех тел:

$$\frac{dh_0}{dt} = -\frac{fm_1}{r_0^3} \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_{01}) - n \frac{d}{dt} (y_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{y}_0) + \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \cdot \mathbf{p} + n(y_0 p_x - x_0 p_y) \quad (3.11)$$

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{fm_0}{r_0^3} \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{10}) - n \frac{d}{dt} (y_1 \dot{x}_1 - x_1 \dot{y}_1) + \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \cdot \mathbf{p} + n(y_1 p_x - x_1 p_y) \quad (3.12)$$

где скалярные произведения

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_{01} = x_0 x_{01} + y_0 y_{01} = a (\cos(nt) x_0 + \sin(nt) y_0)$$

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{10} = x_1 x_{10} + y_1 y_{10} = -a (\cos(nt) x_1 + \sin(nt) y_1)$$

Уравнения (3.11) и (3.12) можно записать в следующем виде:

$$\frac{dH_0}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \cdot \mathbf{p} + n(y_0 p_x - x_0 p_y) \quad (3.13)$$

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \cdot \mathbf{p} + n(y_1 p_x - x_1 p_y) \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} H_0 &= h_0 + fm_1 r_{01}^{-3} (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_{01}) + n(y_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{y}_0) = \\ &= \frac{1}{2}(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) - \frac{fm_0}{r_0} - \frac{fm_1}{r_1} + \frac{fm_1}{r_{01}^3} (x_0 x_{01} + y_0 y_{01}) + n(y_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{y}_0) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} H_1 &= h_1 + fm_0 r_{01}^{-3} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{10}) + n(y_1 \dot{x}_1 - x_1 \dot{y}_1) = \\ &= \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) - \frac{fm_0}{r_0} - \frac{fm_1}{r_1} + \frac{fm_0}{r_{01}^3} (x_1 x_{10} + y_1 y_{10}) + n(y_1 \dot{x}_1 - x_1 \dot{y}_1) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Величины (функции времени)  $H_0$  и  $H_1$  отличаются на константу:

$$H_1 = H_0 + (1/2)f(m_0 - m_1)/a$$

Для равных масс  $H_1 = H_0$ .

Отметим, что величины

$$c_{0z} = x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0, \quad c_{1z} = x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1$$

присутствующие в соотношениях (3.15) и (3.16) с обратными знаками, являются моментами векторов скоростей  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  точки  $M$  относительно координатных осей  $M_0 Z_0$  и  $M_1 Z_1$  соответственно, а величины  $x_0 p_y - y_0 p_x$  и  $x_1 p_y - y_1 p_x$ , присутствующие в уравнениях (3.13) и (3.14) также с обратными знаками, являются моментами относительно этих осей вектора возмущающего ускорения  $\mathbf{p}$ .

Уравнения возмущенной ограниченной круговой задачи трех тел получаются из уравнений (2.3) и (2.4) или (2.6) и (2.7) при задании проекций вектора  $\mathbf{r}_{01}$  в системе координат  $M_0 X_0 Y_0 Z_0$  соотношениями (3.8) и при задании проекций вектора  $\mathbf{r}_{10}$  в системе координат  $M_1 X_1 Y_1 Z_1$  соотношениями

$$x_{10} = -a \cos(nt), \quad y_{10} = -a \sin(nt), \quad z_{01} = 0$$

соответственно. Из уравнений (3.13) и (3.14) следует, что уравнения невозмущенной ограниченной круговой задачи трех тел, когда возмущающее ускорение  $\mathbf{p} = 0$ , имеют первые интегралы

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2}(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) - \frac{fm_0}{r_0} - \frac{fm_1}{r_1} + \\ &+ \frac{fm_1}{r_{01}^3} (x_0 x_{01} + y_0 y_{01}) + n(y_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{y}_0) = H_0(t_0) = \text{const} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) - \frac{fm_0}{r_0} - \frac{fm_1}{r_1} + \\ &+ \frac{fm_0}{r_{01}^3} (x_1 x_{10} + y_1 y_{10}) + n(y_1 \dot{x}_1 - x_1 \dot{y}_1) = H_1(t_0) = \text{const} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Отметим, что интеграл (3.17) совпадает с интегралом (6.9) [2] невозмущенной ограниченной круговой задачи трех тел (интегралом Якоби).

**4. Дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, записанные во вращающихся системах координат. Введение в уравнения движения параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватернионов поворотов.** Введем в рассмотрение две вращающиеся системы координат  $M'_0 X'_0 Y'_0 Z'_0$  и  $M'_1 X'_1 Y'_1 Z'_1$ , оси которых  $M'_0 X'_0$  и  $M'_1 X'_1$  направлены по радиус-векторам  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}_1$  соответственно. Направления

двух других осей в общем случае может быть произвольным. Обозначим через  $\omega_0$  и  $\omega_1$  векторы абсолютных угловых скоростей вращения систем координат  $M'_0X'_0Y'_0Z'_0$  и  $M'_1X'_1Y'_1Z'_1$ , а через  $\omega_{0i}$  и  $\omega_{1i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – проекции этих векторов на оси систем координат  $M'_0X'_0Y'_0Z'_0$  и  $M'_1X'_1Y'_1Z'_1$  соответственно.

Для описания ориентации (углового положения) системы координат  $M'_0X'_0Y'_0Z'_0$  в системе координат  $M_0X_0Y_0Z_0$  (а, следовательно, и в инерциальной системе координат  $O\xi\eta\zeta$ ) будем использовать нормированный кватернион поворота  $\lambda_0$ , а для описания ориентации системы координат  $M'_1X'_1Y'_1Z'_1$  в системе координат  $M_1X_1Y_1Z_1$  (а, следовательно, и в инерциальной системе координат  $O\xi\eta\zeta$ ) будем использовать нормированный кватернион поворота  $\lambda_1$ :

$$\lambda_i = \lambda_{i0} + \lambda_{i1}\mathbf{i} + \lambda_{i2}\mathbf{j} + \lambda_{i3}\mathbf{k}, \quad \|\lambda_i\|^2 = \lambda_{i0}^2 + \lambda_{i1}^2 + \lambda_{i2}^2 + \lambda_{i3}^2 = 1, \quad i = 0, 1$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – векторные мнимые единицы Гамильтона;  $\lambda_{ij}$  ( $j = 0, 3$ ) – компоненты кватерниона ориентации  $\lambda_i$  (параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера) [10–13]), характеризующие ориентацию системы координат  $M'_iX'_iY'_iZ'_i$  в инерциальной системе координат.

Запишем векторное дифференциальное уравнение (2.3) во вращающейся системе координат  $M'_0X'_0Y'_0Z'_0$ , а векторное дифференциальное уравнение (2.4) во вращающейся системе координат  $M'_1X'_1Y'_1Z'_1$ :

$$\begin{aligned} \ddot{r}_0 - r_0(\omega_{02}^2 + \omega_{03}^2) + fm_0r_0^{-2} &= -fm_1r_0r_0^{-3} + fm_1(r_0^{-3} - r_1^{-3})x'_1 + p'_1 = \\ &= -fm_1r_0r_1^{-3} + fm_1(r_1^{-3} - r_0^{-3})x'_{01} + p'_1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$2\omega_{03}\dot{r}_0 + r_0\dot{\omega}_{03} + r_0\omega_{01}\omega_{02} = fm_1(r_0^{-3} - r_1^{-3})y'_1 + p'_2 = fm_1(r_1^{-3} - r_0^{-3})y'_{01} + p'_2 \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} 2\omega_{02}\dot{r}_0 + r_0\dot{\omega}_{02} - r_0\omega_{01}\omega_{03} &= -fm_1(r_0^{-3} - r_1^{-3})z'_1 - p'_3 = -fm_1(r_1^{-3} - r_0^{-3})z'_{01} - p'_3 \\ 2d\lambda_0/dt &= \lambda_0 \circ \Omega_0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\lambda_0 = \lambda_{00} + \lambda_{01}\mathbf{i} + \lambda_{02}\mathbf{j} + \lambda_{03}\mathbf{k}, \quad \Omega_0 = \omega_{01}\mathbf{i} + \omega_{02}\mathbf{j} + \omega_{03}\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 - r_1(\omega_{12}^2 + \omega_{13}^2) + fm_1r_1^{-2} &= -fm_0r_1r_0^{-3} + fm_0(r_0^{-3} - r_1^{-3})x''_0 + p''_1 = \\ &= -fm_0r_1r_0^{-3} + fm_0(r_0^{-3} - r_1^{-3})x''_{01} + p''_1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$2\omega_{13}\dot{r}_1 + r_1\dot{\omega}_{13} + r_1\omega_{11}\omega_{12} = fm_0(r_0^{-3} - r_1^{-3})y''_0 + p''_2 = fm_0(r_0^{-3} - r_1^{-3})y''_{01} + p''_2 \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} 2\omega_{12}\dot{r}_1 + r_1\dot{\omega}_{12} - r_1\omega_{11}\omega_{13} &= -fm_0(r_0^{-3} - r_1^{-3})z''_0 - p''_3 = -fm_0(r_0^{-3} - r_1^{-3})z''_{01} - p''_3 \\ 2d\lambda_1/dt &= \lambda_1 \circ \Omega_1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\lambda_1 = \lambda_{10} + \lambda_{11}\mathbf{i} + \lambda_{12}\mathbf{j} + \lambda_{13}\mathbf{k}, \quad \Omega_1 = \omega_{10}\mathbf{i} + \omega_{12}\mathbf{j} + \omega_{13}\mathbf{k}$$

Здесь и далее символ  $\circ$  (центральный кружок) означает кватернионное умножение.

В уравнениях возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (4.1)–(4.3) и (4.4)–(4.6) в качестве переменных выступают расстояния  $r_0$  и  $r_1$  от точки  $M$  до точек  $M_0$  и  $M_1$ , производные от них  $\dot{r}_0$  и  $\dot{r}_1$  (проекции векторов скоростей  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  точки  $M$  в системах координат  $M_0X_0Y_0Z_0$  и  $M_1X_1Y_1Z_1$  соответственно на направления радиус-векторов  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}_1$ ), проекции  $\omega_{02}$ ,  $\omega_{03}$  и  $\omega_{12}$ ,  $\omega_{13}$  векторов абсолютных угловых скоростей  $\omega_0$  и  $\omega_1$  вращения систем координат  $M'_0X'_0Y'_0Z'_0$  и  $M'_1X'_1Y'_1Z'_1$  на оси этих же систем ко-

ординат  $M'_0X'_0Y'_0Z'_0$  и  $M'_1X'_1Y'_1Z'_1$  соответственно и параметры Родрига–Гамильтона  $\lambda_{0j}$  и  $\lambda_{1j}$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) (компоненты кватернионов  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$ ), характеризующие ориентацию систем координат  $M'_0X'_0Y'_0Z'_0$  и  $M'_1X'_1Y'_1Z'_1$  в инерциальной системе координат  $O\xi\eta\zeta$ . Фигурирующие в уравнениях проекции  $\omega_{01}$  и  $\omega_{11}$  векторов угловых скоростей  $\omega_0$  и  $\omega_1$  на направления радиус-векторов  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}_1$  соответственно являются произвольно задаваемыми параметрами. Величины  $x'_1, y'_1, z'_1; x'_{01}, y'_{01}, z'_{01}$  и  $p'_1, p'_2, p'_3$  в этих уравнениях являются проекциями радиус-векторов  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{01}$  и вектора возмущающего ускорения  $\mathbf{p}$  на оси вращающейся системы координат  $M'_0X'_0Y'_0Z'_0$ , а величины  $x''_0, y''_0, z''_0; x''_{01}, y''_{01}, z''_{01}$  и  $p''_1, p''_2, p''_3$  – проекциями радиус-векторов  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_{01}$  и вектора ускорения  $\mathbf{p}$  на оси вращающейся системы координат  $M'_1X'_1Y'_1Z'_1$ .

Декартовы координаты  $x_0, y_0, z_0$  и  $x_1, y_1, z_1$  точки  $M$  в системах координат  $M_0X_0Y_0Z_0$  и  $M_1X_1Y_1Z_1$  находятся через указанные переменные по формулам

$$\begin{aligned} x_i &= r_i(\lambda_{i0}^2 + \lambda_{i1}^2 - \lambda_{i2}^2 - \lambda_{i3}^2), & y_i &= 2r_i(\lambda_{i1}\lambda_{i2} + \lambda_{i0}\lambda_{i3}) \\ z_i &= 2r_i(\lambda_{i1}\lambda_{i3} - \lambda_{i0}\lambda_{i2}), & i &= 0, 1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

которые в кватернионной записи принимают вид

$$\mathbf{R}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k} = r_i\lambda_i \circ \mathbf{i} \circ \bar{\lambda}_i, \quad i = 0, 1 \quad (4.8)$$

Здесь и далее верхняя черта – сопряженный кватернион, например,  $\bar{\lambda}_0 = \lambda_{00} - \lambda_{01}\mathbf{i} - \lambda_{02}\mathbf{j} - \lambda_{03}\mathbf{k}$ ; дифференцирование кватерниона выполняется в предположении неизменности ортов  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

Проекции  $v'_{0k}$  и  $v'_{1k}$  векторов скоростей  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  точки  $M$  в системах координат  $M_0X_0Y_0Z_0$  и  $M_1X_1Y_1Z_1$  на оси систем координат  $M'_0X'_0Y'_0Z'_0$  и  $M'_1X'_1Y'_1Z'_1$  соответственно находятся по формулам

$$v'_{i1} = \dot{r}_i, \quad v'_{i2} = r_i\omega_{i3}, \quad v'_{i3} = -r_i\omega_{i2}, \quad i = 0, 1 \quad (4.9)$$

Проекции  $v_{0k}$  и  $v_{1k}$  векторов скоростей  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  точки  $M$  на оси систем координат  $M_0X_0Y_0Z_0$  и  $M_1X_1Y_1Z_1$  соответственно, совпадающие с их проекциями на оси инерциальной системы координат, находятся по кватернионным формулам

$$\mathbf{V}_i = v_{i1}\mathbf{i} + v_{i2}\mathbf{j} + v_{i3}\mathbf{k} = \lambda \circ \mathbf{V}'_i \circ \bar{\lambda}, \quad i = 0, 1 \quad (4.10)$$

$$\mathbf{V}'_i = v'_{i1}\mathbf{i} + v'_{i2}\mathbf{j} + v'_{i3}\mathbf{k} = \dot{r}_i\mathbf{i} + r_i\omega_{i3}\mathbf{j} - r_i\omega_{i2}\mathbf{k}, \quad i = 0, 1 \quad (4.11)$$

Проекции  $p_1 = p_x, p_2 = p_y, p_3 = p_z$  вектора  $\mathbf{p}$  на оси системы координат  $M_0X_0Y_0Z_0$ , совпадающие с его проекциями на оси системы координат  $M_1X_1Y_1Z_1$ , связаны с его проекциями  $p'_k$  и  $p''_k$  на оси систем координат  $M'_0X'_0Y'_0Z'_0$  и  $M'_1X'_1Y'_1Z'_1$  кватернионными соотношениями перепроектирования

$$\mathbf{P} = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k} = \lambda_0 \circ \mathbf{P}' \circ \bar{\lambda}_0 = \lambda_1 \circ \mathbf{P}'' \circ \bar{\lambda}_1$$

$$\mathbf{P}' = p'_1\mathbf{i} + p'_2\mathbf{j} + p'_3\mathbf{k} = \bar{\lambda}_0 \circ \mathbf{P} \circ \lambda_0, \quad \mathbf{P}'' = p''_1\mathbf{i} + p''_2\mathbf{j} + p''_3\mathbf{k} = \bar{\lambda}_1 \circ \mathbf{P} \circ \lambda_1$$

Проекции  $x'_1, y'_1, z'_1; x''_0, y''_0, z''_0$  и  $x'_{01}, y'_{01}, z'_{01}; x''_{01}, y''_{01}, z''_{01}$  радиус-векторов  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}_{01}$ , присутствующие в уравнениях (4.1), (4.2) и (4.4), (4.5), определяются через новые переменные кватернионными соотношениями

$$\mathbf{R}'_1 = x'_1\mathbf{i} + y'_1\mathbf{j} + z'_1\mathbf{k} = \bar{\lambda}_0 \circ \mathbf{R}_1 \circ \lambda_0 = r_1\bar{\mu} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\mu}, \quad \bar{\mu} = \bar{\lambda}_0 \circ \lambda_1$$

$$\mathbf{R}''_0 = x''_0\mathbf{i} + y''_0\mathbf{j} + z''_0\mathbf{k} = \bar{\lambda}_1 \circ \mathbf{R}_0 \circ \lambda_1 = r_0\bar{\mu} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\mu}, \quad \bar{\mu} = \bar{\lambda}_0 \circ \lambda_1$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}'_{01} &= x'_{01}\mathbf{i} + y'_{01}\mathbf{j} + z'_{01}\mathbf{k} = \bar{\lambda}_0 \circ \mathbf{R}_{01} \circ \lambda_0, \quad \mathbf{R}_{01} = x_{01}\mathbf{i} + y_{01}\mathbf{j} + z_{01}\mathbf{k} \\ \mathbf{R}''_{01} &= x''_{01}\mathbf{i} + y''_{01}\mathbf{j} + z''_{01}\mathbf{k} = \bar{\lambda}_1 \circ \mathbf{R}_{01} \circ \lambda_1\end{aligned}$$

**5. Дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, записанные в неголономных (азимутально свободных) сопровождающих координатных трехгранниках с использованием параметров Эйлера (Родрига—Гамильтона) и кватернионов поворотов.** Введем в рассмотрение векторы  $\mathbf{c}_0$  и  $\mathbf{c}_1$  моментов скоростей  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  точки  $M$  в системах координат  $M_0X_0Y_0Z_0$  и  $M_1X_1Y_1Z_1$  относительно точек  $M_0$  и  $M_1$  соответственно:

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i, \quad i = 0, 1$$

Проекции  $c_{ik}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) вектора  $\mathbf{c}_i$  на оси вращающейся системы координат  $M'_iX'_iY'_iZ'_i$  определяются соотношениями

$$c_{i1} = 0, \quad c_{i2} = r_i^2 \omega_{i2}, \quad c_{i3} = r_i^2 \omega_{i3}, \quad i = 0, 1 \quad (5.1)$$

Доопределим движение системы координат  $M'_iX'_iY'_iZ'_i$ , полагая произвольно задаваемую проекцию  $\omega_{i1}$  вектора ее абсолютной угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}_i$  на направление радиус-вектора  $\mathbf{r}_i$  (ось  $M'_iX'_i$ ) равной нулю:

$$\omega_{i1} = 2(-\lambda_{i1}\dot{\lambda}_{i0} + \lambda_{i0}\dot{\lambda}_{i1} + \lambda_{i3}\dot{\lambda}_{i2} - \lambda_{i2}\dot{\lambda}_{i3}) = 0, \quad i = 0, 1 \quad (5.2)$$

Система координат  $M'_iX'_iY'_iZ'_i$  в этом случае, как это следует из (5.1), (5.2), вращается с абсолютной угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}_i$ , коллинеарной вектору момента скорости  $\mathbf{c}_i$ :

$$\boldsymbol{\omega}_i = r_i^{-2} \mathbf{c}_i, \quad i = 0, 1 \quad (5.3)$$

Такая система координат называется неголономным (азимутально свободным) сопровождающим координатным трехгранником.

Дифференциальные уравнения ограниченной задачи трех тел (4.1)–(4.6) с учетом (5.2) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\ddot{r}_0 - r_0(\omega_{02}^2 + \omega_{03}^2) + fm_0 r_0^{-2} &= -fm_1 r_0 r_{01}^{-3} + fm_1(r_{01}^{-3} - r_1^{-3})x'_1 + p'_1 = \\ &= -fm_1 r_0 r_1^{-3} + fm_1(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})x'_{01} + p'_1 \\ 2\omega_{03}\dot{r}_0 + r_0\dot{\omega}_{03} &= fm_1(r_{01}^{-3} - r_1^{-3})y'_1 + p'_2 = fm_1(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})y'_{01} + p'_2 \\ 2\omega_{02}\dot{r}_0 + r_0\dot{\omega}_{02} &= -fm_1(r_{01}^{-3} - r_1^{-3})z'_1 - p'_3 = -fm_1(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})z'_{01} - p'_3 \\ 2d\lambda_0/dt &= \lambda_0 \circ \boldsymbol{\Omega}_0 \\ \lambda_0 &= \lambda_{00} + \lambda_{01}\mathbf{i} + \lambda_{02}\mathbf{j} + \lambda_{03}\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\Omega}_0 = \omega_{02}\mathbf{j} + \omega_{03}\mathbf{k} \\ \ddot{r}_1 - r_1(\omega_{12}^2 + \omega_{13}^2) + fm_1 r_1^{-2} &= -fm_0 r_1 r_{01}^{-3} + fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})x''_0 + p''_1 = \\ &= -fm_0 r_1 r_0^{-3} + fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})x''_{01} + p''_1 \\ 2\omega_{13}\dot{r}_1 + r_1\dot{\omega}_{13} &= fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})y''_0 + p''_2 = fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})y''_{01} + p''_2 \\ 2\omega_{12}\dot{r}_1 + r_1\dot{\omega}_{12} &= -fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})z''_0 - p''_3 = -fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})z''_{01} - p''_3 \\ 2d\lambda_1/dt &= \lambda_1 \circ \boldsymbol{\Omega}_1 \\ \lambda_1 &= \lambda_{10} + \lambda_{11}\mathbf{i} + \lambda_{12}\mathbf{j} + \lambda_{13}\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\Omega}_1 = \omega_{12}\mathbf{j} + \omega_{13}\mathbf{k}\end{aligned}$$

Эти уравнения с учетом (5.1) принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{r}_0 - r_0^{-3}(c_{02}^2 + c_{03}^2) + fm_0 r_0^{-2} &= -fm_1 r_0 r_{01}^{-3} + fm_1 (r_{01}^{-3} - r_1^{-3}) x_1' + p_1' = \\ &= -fm_1 r_0 r_1^{-3} + fm_1 (r_1^{-3} - r_{01}^{-3}) x_{01}' + p_1' \\ c_{01} &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\dot{c}_{02} = -fm_1 (r_{01}^{-3} - r_1^{-3}) r_0 z_1' - r_0 p_1' = -fm_1 (r_1^{-3} - r_{01}^{-3}) r_0 z_{01}' - r_0 p_1' \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{c}_{03} &= fm_1 (r_{01}^{-3} - r_1^{-3}) r_0 y_1' + r_0 p_2' = fm_1 (r_1^{-3} - r_{01}^{-3}) r_0 y_{01}' + r_0 p_2' \\ 2d\lambda_0/dt &= r_0^{-2} \lambda_0 \circ \mathbf{C}_0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\lambda_0 = \lambda_{00} + \lambda_{01} \mathbf{i} + \lambda_{02} \mathbf{j} + \lambda_{03} \mathbf{k}, \quad \mathbf{C}_0 = c_{02} \mathbf{j} + c_{03} \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 - r_1^{-3} r_1^{-2} &= -fm_0 r_1 (c_{12}^2 + c_{13}^2) + fm_1 r_{01}^{-3} + fm_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) x_0'' + p_1'' = \\ &= -fm_0 r_1 r_0^{-3} + fm_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) x_{01}'' + p_1'' \\ c_{11} &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\dot{c}_{12} = -fm_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) r_1 z_0'' - r_1 p_3'' = -fm_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) r_1 z_{01}'' - r_1 p_3'' \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{c}_{13} &= fm_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) r_1 y_0'' + r_1 p_2'' = fm_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) r_1 y_{01}'' + r_1 p_2'' \\ 2d\lambda_1/dt &= r_1^{-2} \lambda_1 \circ \mathbf{C}_1 \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\lambda_1 = \lambda_{10} + \lambda_{11} \mathbf{i} + \lambda_{12} \mathbf{j} + \lambda_{13} \mathbf{k}, \quad \mathbf{C}_1 = c_{12} \mathbf{j} + c_{13} \mathbf{k}$$

Уравнения (5.5) и (5.8) запишем в кватернионном виде

$$\dot{\mathbf{C}}_0 = fm_1 (r_{01}^{-3} - r_1^{-3}) r_0 (-z_1' \mathbf{j} + y_1' \mathbf{k}) + r_0 (-p_3' \mathbf{j} + p_2' \mathbf{k}) \quad (5.10)$$

$$\dot{\mathbf{C}}_1 = fm_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) r_1 (-z_0'' \mathbf{j} + y_0'' \mathbf{k}) + r_1 (-p_3'' \mathbf{j} + p_2'' \mathbf{k}) \quad (5.11)$$

или в другом кватернионном виде

$$\dot{\mathbf{C}}_0 = fm_1 (r_1^{-3} - r_{01}^{-3}) r_0 (-z_{01}' \mathbf{j} + y_{01}' \mathbf{k}) + r_0 (-p_3' \mathbf{j} + p_2' \mathbf{k}) \quad (5.12)$$

$$\dot{\mathbf{C}}_1 = fm_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) r_1 (-z_{01}'' \mathbf{j} + y_{01}'' \mathbf{k}) + r_1 (-p_3'' \mathbf{j} + p_2'' \mathbf{k}) \quad (5.13)$$

В уравнениях возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (5.4)–(5.6) и (5.7)–(5.9), записанных в неголономных (азимутально свободных) координатных трехгранниках, в качестве переменных выступают расстояния  $r_0$  и  $r_1$  от точки  $M$  до точек  $M_0$  и  $M_1$ , производные от них  $\dot{r}_0$  и  $\dot{r}_1$  (проекции векторов скоростей  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  точки  $M$  в системах координат  $M_0 X_0 Y_0 Z_0$  и  $M_1 X_1 Y_1 Z_1$  соответственно на направления радиус-векторов  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}_1$ ), проекции  $c_{02}$ ,  $c_{03}$  и  $c_{12}$ ,  $c_{13}$  векторов  $\mathbf{c}_0$  и  $\mathbf{c}_1$  моментов скоростей  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  точки  $M$  в системах координат  $M_0 X_0 Y_0 Z_0$  и  $M_1 X_1 Y_1 Z_1$  относительно точек  $M_0$  и  $M_1$  на оси вращающихся систем координат  $M_0' X_0' Y_0' Z_0'$  и  $M_1' X_1' Y_1' Z_1'$  соответственно и параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера)  $\lambda_{0j}$  и  $\lambda_{1j}$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) (компоненты кватернионов  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$ ), характеризующие ориентацию систем координат  $M_0' X_0' Y_0' Z_0'$  и  $M_1' X_1' Y_1' Z_1'$  в инерциальной системе координат  $O\xi\eta\zeta$ .

Декартовы координаты  $x_0, y_0, z_0$  и  $x_1, y_1, z_1$  точки  $M$  в системах координат  $M_0X_0Y_0Z_0$  и  $M_1X_1Y_1Z_1$  находятся через указанные переменные по формулам (4.7), а проекции  $v'_{0k}$  и  $v'_{1k}$  векторов скоростей  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  точки  $M$  в системах координат  $M_0X_0Y_0Z_0$  и  $M_1X_1Y_1Z_1$  на оси систем координат  $M'_0X'_0Y'_0Z'_0$  и  $M'_1X'_1Y'_1Z'_1$  соответственно находятся по формулам

$$v'_{i1} = \dot{r}_i, \quad v'_{i2} = r_i^{-1}c_{i3}, \quad v'_{i3} = -r_i^{-1}c_{i2}, \quad i = 0, 1$$

Проекции  $v_{0k}$  и  $v_{1k}$  векторов скоростей  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  точки  $M$  на оси систем координат  $M_0X_0Y_0Z_0$  и  $M_1X_1Y_1Z_1$  соответственно, совпадающие с их проекциями на оси инерциальной системы координат, находятся по кватернионным формулам (4.10), (4.11).

Из уравнений (5.4)–(5.6) при  $m_1 = 0$  и уравнений (5.7)–(5.9) при  $m_0 = 0$  следуют дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, записанные в неголономном (азимутально свободном) координатном трехграннике, полученные автором статьи в [14–16]. Другие варианты вывода и примеры использования этих уравнений задачи двух тел приводятся в работах автора статьи [4, 5, 17–19]. Из этих уравнений задачи двух тел, как показано автором статьи, наиболее просто выводятся регулярные кватернионные уравнения пространственной задачи двух тел в четырехмерных переменных Кустанхаймо–Штифеля.

**6. Дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, записанные в орбитальных координатных трехгранниках с использованием параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватернионов поворотов.** Полагая, по-прежнему, оси  $M'_0X'_0$  и  $M'_1X'_1$  вращающихся систем координат  $M'_0X'_0Y'_0Z'_0$  и  $M'_1X'_1Y'_1Z'_1$  направленными по радиус-векторам  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}_1$  соответственно, направим их оси  $M'_0Z'_0$  и  $M'_1Z'_1$  вдоль векторов  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{c}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1$  моментов скоростей  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  точки  $M$  в системах координат  $M_0X_0Y_0Z_0$  и  $M_1X_1Y_1Z_1$  относительно точек  $M_0$  и  $M_1$  соответственно.

В этом случае проекции  $c_{ik}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) вектора  $\mathbf{c}_i$  на оси вращающейся системы координат  $M'_iX'_iY'_iZ'_i$  определяются соотношениями

$$c_{i1} = c_{i2} = 0, \quad c_{i3} = |\mathbf{c}_i| = c_i, \quad i = 0, 1 \quad (6.1)$$

Проектируя векторное равенство  $\mathbf{c}_i = \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$  на оси орбитальной системы координат  $M'_iX'_iY'_iZ'_i$  ( $i = 0, 1$ ) будем иметь:

$$c_{i1} = 0, \quad c_{i2} = -r_i v'_{i3} = 0, \quad c_{i3} = c_i = r_i v'_{i2}, \quad i = 0, 1 \quad (6.2)$$

где, напомним,  $v'_{ik}$  – проекции вектора скорости  $\mathbf{v}_i$  точки  $M$  в системе координат  $M_iX_iY_iZ_i$  на оси системы координат  $M'_iX'_iY'_iZ'_i$ .

Таким образом, в рассматриваемом случае проекции  $v'_{ik}$  вектора скорости  $\mathbf{v}_i$  точки  $M$  на оси орбитальной системы координат  $M'_iX'_iY'_iZ'_i$  определяются соотношениями

$$v'_{i1} = \dot{r}_i, \quad v'_{i2} = c_i/r_i, \quad v'_{i3} = 0, \quad i = 0, 1 \quad (6.3)$$

Из (4.9) и (6.3) находим:

$$\omega_{i2} = 0, \quad \omega_{i3} = c_i/r_i^2, \quad i = 0, 1 \quad (6.4)$$

Подставляя равенства (6.4) в уравнения (4.1), (4.2) и (4.4), (4.5), получим

$$\begin{aligned} \ddot{r}_0 - c_0^2 r_0^{-3} + f m_0 r_0^{-2} &= -f m_1 r_0 r_{01}^{-3} + f m_1 (r_{01}^{-3} - r_1^{-3}) x'_1 + p'_1 = \\ &= -f m_1 r_0 r_1^{-3} + f m_1 (r_1^{-3} - r_{01}^{-3}) x'_{01} + p'_1 \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\dot{c}_0 = fm_1 r_0 (r_{01}^{-3} - r_1^{-3}) y_1' + r_0 p_2' = fm_1 r_0 (r_1^{-3} - r_{01}^{-3}) y_{01}' + r_0 p_2' \quad (6.6)$$

$$r_0 \omega_{01} \omega_{03} = fm_1 (r_{01}^{-3} - r_1^{-3}) z_1' + p_3' = fm_1 (r_1^{-3} - r_{01}^{-3}) z_{01}' + p_3' \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 - c_1^2 r_1^{-3} + fm_1 r_1^{-2} &= -fm_0 r_1 r_{01}^{-3} + fm_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) x_0'' + p_1'' = \\ &= -fm_0 r_1 r_0^{-3} + fm_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) x_{01}'' + p_1'' \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\dot{c}_1 = fm_0 r_1 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) y_0'' + r_1 p_2'' = fm_0 r_1 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) y_{01}'' + r_1 p_2'' \quad (6.9)$$

$$r_1 \omega_{11} \omega_{13} = fm_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) z_0'' + p_3'' = fm_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) z_{01}'' + p_3'' \quad (6.10)$$

Из уравнений (6.7) и (6.10) с учетом второго соотношения (6.4) находим

$$\omega_{01} = r_0 c_0^{-1} [fm_1 (r_{01}^{-3} - r_1^{-3}) z_1' + p_3'] = r_0 c_0^{-1} [fm_1 (r_1^{-3} - r_{01}^{-3}) z_{01}' + p_3'] \quad (6.11)$$

$$\omega_{11} = r_1 c_1^{-1} [fm_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) z_0'' + p_3''] = r_1 c_1^{-1} [fm_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) z_{01}'' + p_3''] \quad (6.12)$$

Таким образом, проекции  $\omega_{ik}$  вектора абсолютной угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}_i$  орбитальной системы координат  $M_i' X_i' Y_i' Z_i'$  на ее же координатные оси имеют вид соотношений (6.11), (6.12) и (6.4), в которых  $c_i = |\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i|$ ,  $i = 0, 1$ .

Кватернионное кинематическое уравнение, описывающее вращательное движение орбитальной системы координат  $M_i' X_i' Y_i' Z_i'$  в инерциальной системе координат  $O\xi\eta\zeta$ , в соответствии с уравнениями (4.3) и (4.6) имеет вид

$$2d\boldsymbol{\lambda}_i/dt = \boldsymbol{\lambda}_i \circ \boldsymbol{\Omega}_i, \quad i = 0, 1 \quad (6.13)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i = \lambda_{i0} + \lambda_{i1}\mathbf{i} + \lambda_{i2}\mathbf{j} + \lambda_{i3}\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\Omega}_i = \omega_{i1}\mathbf{i} + \omega_{i3}\mathbf{k} = \omega_{i1}\mathbf{i} + (c_i/r_i^2)\mathbf{k}$$

где проекция угловой скорости  $\omega_{i1}$  для  $i = 0$  описывается соотношением (6.11), а для  $i = 1$  – соотношением (6.12).

В полученных уравнениях возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (6.5), (6.6), (6.13) (при  $i = 0$ ), (6.11) и (6.8), (6.9), (6.13) (при  $i = 1$ ), (6.12), записанных в орбитальных системах координат  $M_0' X_0' Y_0' Z_0'$  и  $M_1' X_1' Y_1' Z_1'$ , в качестве переменных выступают расстояния  $r_0$  и  $r_1$  от точки  $M$  до точек  $M_0$  и  $M_1$ , модули  $c_0$  и  $c_1$  векторов  $\mathbf{c}_0$  и  $\mathbf{c}_1$  моментов скоростей  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  точки  $M$  в системах координат  $M_0 X_0 Y_0 Z_0$  и  $M_1 X_1 Y_1 Z_1$  относительно точек  $M_0$  и  $M_1$  и параметры Родрига–Гамильтона  $\lambda_{0j}$  и  $\lambda_{1j}$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) (компоненты кватернионов  $\boldsymbol{\lambda}_0$  и  $\boldsymbol{\lambda}_1$ ), характеризующие ориентации орбитальных систем координат в инерциальной системе координат  $O\xi\eta\zeta$ .

Декартовы координаты  $x_0, y_0, z_0$  и  $x_1, y_1, z_1$  точки  $M$  в системах координат  $M_0 X_0 Y_0 Z_0$  и  $M_1 X_1 Y_1 Z_1$  находятся через указанные переменные по формулам (4.7), а проекции  $v_{0k}'$  и  $v_{1k}'$  векторов скоростей  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  точки  $M$  в системах координат  $M_0 X_0 Y_0 Z_0$  и  $M_1 X_1 Y_1 Z_1$  на оси систем координат  $M_0' X_0' Y_0' Z_0'$  и  $M_1' X_1' Y_1' Z_1'$  соответственно находятся по формулам (6.3).

Проекции  $v_{0k}$  и  $v_{1k}$  векторов скоростей  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  точки  $M$  на оси систем координат  $M_0 X_0 Y_0 Z_0$  и  $M_1 X_1 Y_1 Z_1$  соответственно, совпадающие с их проекциями на оси инерциальной системы координат, находятся по кватернионным формулам

$$\mathbf{V}_i = v_{i1}\mathbf{i} + v_{i2}\mathbf{j} + v_{i3}\mathbf{k} = \boldsymbol{\lambda} \circ \bar{\mathbf{V}}_i', \quad \mathbf{V}_i' = v_{i1}'\mathbf{i} + v_{i2}'\mathbf{j} = \dot{r}_i\mathbf{i} + (c_i/r_i)\mathbf{j}, \quad i = 0, 1 \quad (6.14)$$

Отметим появление в кватернионном кинематическом уравнении (6.13) движения сопровождающего (орбитального) трехгранника  $M_i' X_i' Y_i' Z_i'$  (в выражении для проек-

ции  $\omega_{i1}$  вектора абсолютной угловой скорости орбитальной системы координат) слагаемого, содержащего массу  $m_1$  или  $m_0$  и проекцию  $p'_3$  или  $p''_3$  вектора возмущающего ускорения  $\mathbf{p}$  на ось  $M'_0Z'_0$  или  $M'_1Z'_1$  вращающейся системы координат  $M'_0X'_0Y'_0Z'_0$  или  $M'_1X'_1Y'_1Z'_1$  соответственно (на направление, ортогональное плоскости мгновенной орбиты точки  $M$  в системе координат  $M_0X_0Y_0Z_0$  или  $M_1X_1Y_1Z_1$ ).

Компоненты  $\lambda_{ij}$  кватерниона  $\lambda_i$  ориентации орбитальной системы координат  $M'_iX'_iY'_iZ'_i$  связаны с угловыми элементами орбиты точки  $M$  в системе координат  $M_iX_iY_iZ_i$  соотношениями

$$\begin{aligned}\lambda_{i0} &= \cos(I_i/2) \cos((\Omega_{iu} + \Sigma_i)/2), & \lambda_{i1} &= \sin(I_i/2) \cos((\Omega_{iu} - \Sigma_i)/2) \\ \lambda_{i2} &= \sin(I_i/2) \sin((\Omega_{iu} - \Sigma_i)/2), & \lambda_{i3} &= \cos(I_i/2) \sin((\Omega_{iu} + \Sigma_i)/2), \quad i = 0, 1\end{aligned}$$

в которых  $\Omega_{iu}$  – долгота восходящего узла,  $I_i$  – наклон (наклонение) орбиты,  $\Sigma_i$  – аргумент широты, равный сумме углового расстояния перицентра от узла и истинной аномалии.

Таким образом, кватернион ориентации  $\lambda_i$  орбитальной системы координат  $M'_iX'_iY'_iZ'_i$  характеризует собой одновременно ориентацию плоскости мгновенной орбиты точки  $M$  в системе координат  $M_iX_iY_iZ_i$  и положение точки на этой орбите.

Из уравнений (6.5), (6.6), (6.13) (при  $i = 0$ ), (6.11) при  $m_1 = 0$  и уравнений (6.8), (6.9), (6.13) (при  $i = 1$ ), (6.12) при  $m_0 = 0$  следуют дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, записанные в орбитальной системе координат, полученные автором статьи в [16] (1992). Различные варианты вывода и использования этих уравнений приводятся в других работах автора статьи [18, 4, 5]. Кватернионное уравнение ориентации орбитальной системы координат в задаче двух тел было также получено и использовалось для описания орбитального движения космического аппарата Брагазиным, Бранцем и Шмыглевским (1986, 1992) [20, 11]. Уравнения возмущенного кеплеровского движения, записанные в рамках задачи двух тел в орбитальной системе координат и состоящие из уравнений для расстояния  $r$ , модуля момента орбитальной скорости  $c$  и уравнений для угловых переменных, описывающих движение орбитальной системы, были получены Andoyer (1923) [21].

**7. Дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, записанные в орбитальных и идеальных системах координат с использованием параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватернионов поворотов.** Введем новую кватернионную переменную  $\Lambda_i$ , связанную с кватернионом  $\lambda_i$  ориентации орбитальной системы координат  $M'_iX'_iY'_iZ'_i$  соотношением (формулой, вытекающей из формулы сложения двух конечных поворотов)

$$\Lambda_i = \lambda_i \circ [\cos(\varphi_i/2) - \sin(\varphi_i/2) \mathbf{k}], \quad i = 0, 1 \quad (7.1)$$

где  $\varphi_i$  – угловая переменная, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\dot{\varphi}_i = c_i/r_i^2, \quad i = 0, 1 \quad (7.2)$$

Кватернион  $\Lambda_i$  характеризует собой ориентацию идеальной системы координат  $M_iX_i^{id}Y_i^{id}Z_i^{id}$  [21] в системе координат  $M_iX_iY_iZ_i$ , оси которой параллельны одноименным осям инерциальной системы координат  $O\xi\eta\zeta$ . Ось  $Z_i^{id}$  этой системы координат параллельна вектору  $\mathbf{c}_i$  момента скорости  $\mathbf{v}_i$  точки  $M$  в системе координат  $M_iX_iY_iZ_i$  относительно точки  $M_i$ , а координатные оси  $X_i^{id}$  и  $Y_i^{id}$  лежат в плоскости координатных

осей  $X'_i$  и  $Y'_i$  и получаются из них поворотом вокруг оси  $Z'_i$  на угол  $\varphi_i$  по ходу часовой стрелки.

Вектор  $\Omega_i$  абсолютной угловой скорости идеальной системы координат  $M_i X_i^{id} Y_i^{id} Z_i^{id}$  параллелен радиус-вектору  $r_i$  точки  $M_i$  и определяется формулой

$$\Omega_i = \omega_{i1} x'_i = (\omega_{i1}/r_i) r_i, \quad u = 0, 1 \quad (7.3)$$

где  $x'_i$  — орт координатной оси  $M'_i X'_i$ ,  $\omega_{i1}$  — проекция вектора абсолютной угловой скорости орбитальной системы координат  $M'_i X'_i Y'_i Z'_i$  на ось  $M'_i X'_i$ , определяемая соотношением (6.11) при  $i = 0$  и соотношением (6.12) при  $i = 1$ .

Проекции  $\Omega_{ik}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) вектора  $\Omega_i$  на оси идеальной системы координат  $M_i X_i^{id} Y_i^{id} Z_i^{id}$  в соответствии с формулами (6.11) и (6.12) имеют вид

$$\begin{aligned} \Omega_{01} &= \omega_{01} \cos \varphi_0 = r_0 c_0^{-1} [f m_1 (r_{01}^{-3} - r_1^{-3}) z'_1 + p'_3] \cos \varphi_0 = \\ &= r_0 c_0^{-1} [f m_1 (r_1^{-3} - r_{01}^{-3}) z'_{01} + p'_3] \cos \varphi_0 = \\ \Omega_{02} &= \omega_{01} \sin \varphi_0 = r_0 c_0^{-1} [f m_1 (r_{01}^{-3} - r_1^{-3}) z'_1 + p'_3] \sin \varphi_0 = \\ &= r_0 c_0^{-1} [f m_1 (r_1^{-3} - r_{01}^{-3}) z'_{01} + p'_3] \sin \varphi_0 \\ \Omega_{03} &= 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= \omega_{11} \cos \varphi_1 = r_1 c_1^{-1} [f m_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) z''_0 + p''_3] \cos \varphi_1 = \\ &= r_1 c_1^{-1} [f m_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) z''_{01} + p''_3] \cos \varphi_1 \\ \Omega_{11} &= \omega_{11} \sin \varphi_1 = r_1 c_1^{-1} [f m_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) z''_0 + p''_3] \sin \varphi_1 = \\ &= r_1 c_1^{-1} [f m_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) z''_{01} + p''_3] \sin \varphi_1 \\ \Omega_{13} &= 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

Отметим, что введенная система координат  $M_i X_i^{id} Y_i^{id} Z_i^{id}$ , проекция вектора угловой скорости которой  $\Omega_{i3} = 0$ , была названа Derpit [21] идеальной системой координат.

Переходя в уравнениях (6.5), (6.6), (6.13) (при  $i = 0$ ), (6.11) и (6.8), (6.9), (6.13) (при  $i = 1$ ), (6.12) к новым переменным  $\Lambda_i$  по формулам (7.1) и учитывая уравнение (7.2) и соотношения (7.4), (7.5), получим уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{r}_0 - c_0^2 r_0^{-3} + f m_0 r_0^{-2} &= -f m_1 r_0 r_{01}^{-3} + f m_1 (r_{01}^{-3} - r_1^{-3}) x'_1 + p'_1 = \\ &= -f m_1 r_0 r_1^{-3} + f m_1 (r_1^{-3} - r_{01}^{-3}) x'_{01} + p'_1 \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\dot{c}_0 = f m_1 r_0 (r_{01}^{-3} - r_1^{-3}) y'_1 + r_0 p'_2 = f m_1 r_0 (r_1^{-3} - r_{01}^{-3}) y'_{01} + r_0 p'_2 \quad (7.7)$$

$$\dot{\varphi}_0 = c_0 / r_0^2 \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 - c_1^2 r_1^{-3} + f m_1 r_1^{-2} &= -f m_0 r_1 r_{01}^{-3} + f m_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) x''_0 + p''_1 = \\ &= -f m_0 r_1 r_0^{-3} + f m_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) x''_{01} + p''_1 \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\dot{c}_1 = f m_0 r_1 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) y''_0 + r_1 p''_2 = f m_0 r_1 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) y''_{01} + r_1 p''_2 \quad (7.10)$$

$$\phi_1 = c_1/r_1^2 \quad (7.11)$$

$$2d\Lambda_i/dt = \Lambda_i \circ \Omega_i^{id}, \quad \Lambda_i = \Lambda_{i0} + \Lambda_{i1}\mathbf{i} + \Lambda_{i2}\mathbf{j} + \Lambda_{i3}\mathbf{k}, \quad i = 0, 1 \quad (7.12)$$

$$\Omega_i^{id} = \Omega_{i1}\mathbf{i} + \Omega_{i2}\mathbf{j} = \omega_{i1}[\cos\phi_i\mathbf{i} + \sin\phi_i\mathbf{j}] \quad (7.13)$$

$$\omega_{01} = r_0 c_0^{-1} [fm_1(r_{01}^{-3} - r_1^{-3})z_1' + p_3'] = r_0 c_0^{-1} [fm_1(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})z_{01}' + p_3'] \quad (7.14)$$

$$\omega_{11} = r_1 c_1^{-1} [fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})z_0'' + p_3''] = r_1 c_1^{-1} [fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})z_{01}'' + p_3''] \quad (7.15)$$

Уравнения (7.6)–(7.8), (7.12) и (7.13) (при  $i = 0$ ), (7.14) и уравнения (7.9)–(7.11), (7.12) и (7.13) (при  $i = 1$ ), (7.15) являются дифференциальными уравнениями возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, записанными в двух вращающихся системах координат: в орбитальной системе координат  $M'_i X'_i Y'_i Z'_i$  (уравнения (7.6)–(7.8) и (7.9)–(7.11)) и в идеальной системе координат  $M_i X_i^{id} Y_i^{id} Z_i^{id}$  (уравнения (7.12), (7.13) (при  $i = 0$ ), (7.14) и уравнения (7.12), (7.13) (при  $i = 1$ ), (7.15)). В этих уравнениях переменными являются расстояния  $r_0$  и  $r_1$  от точки  $M$  до точек  $M_0$  и  $M_1$ , модули  $c_0$  и  $c_1$  векторов  $\mathbf{c}_0$  и  $\mathbf{c}_1$  моментов скоростей  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  точки  $M$  в системах координат  $M_0 X_0 Y_0 Z_0$  и  $M_1 X_1 Y_1 Z_1$  относительно точек  $M_0$  и  $M_1$ , угловые переменные  $\phi_0$  и  $\phi_1$ , и параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера)  $\Lambda_{0j}$  и  $\Lambda_{1j}$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) (компоненты кватернионов  $\Lambda_0$  и  $\Lambda_1$ ), характеризующие ориентации идеальных систем координат  $M_0 X_0^{id} Y_0^{id} Z_0^{id}$  и  $M_1 X_1^{id} Y_1^{id} Z_1^{id}$  в инерциальной системе координат  $O\xi\eta\zeta$  соответственно. Величины  $x_1'$ ,  $y_1'$ ,  $z_1'$ ,  $x_{01}'$ ,  $y_{01}'$ ,  $z_{01}'$  и  $p_1'$ ,  $p_2'$ ,  $p_3'$  в этих уравнениях являются проекциями радиус-векторов  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_{01}$  и вектора возмущающего ускорения  $\mathbf{p}$  на оси орбитальной системы координат  $M'_0 X'_0 Y'_0 Z'_0$ , а величины  $x_0''$ ,  $y_0''$ ,  $z_0''$ ;  $x_{01}''$ ,  $y_{01}''$ ,  $z_{01}''$  и  $p_1''$ ,  $p_2''$ ,  $p_3''$  – проекциями радиус-векторов  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{r}_{01}$  и вектора ускорения  $\mathbf{p}$  на оси орбитальной системы координат  $M'_1 X'_1 Y'_1 Z'_1$ .

Декартовы координаты  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  и  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  точки  $M$  в системах координат  $M_0 X_0 Y_0 Z_0$  и  $M_1 X_1 Y_1 Z_1$  находятся через указанные переменные по формулам (4.7), в которых параметры Эйлера  $\lambda_{ij}$ , являющиеся в рассматриваемом случае компонентами кватерниона  $\lambda_i$  ориентации орбитальной системы координат, предварительно должны быть найдены через переменные  $\Lambda_{ij}$  (компоненты кватерниона  $\Lambda_i$ ) в соответствии с кватернионной формулой сложения двух конечных поворотов

$$\lambda_i = \Lambda_i \circ [\cos(\phi_i/2) + \sin(\phi_i/2)\mathbf{k}], \quad i = 0, 1 \quad (7.16)$$

Проекции  $v'_{0k}$  и  $v'_{1k}$  векторов скоростей  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  точки  $M$  в системах координат  $M_0 X_0 Y_0 Z_0$  и  $M_1 X_1 Y_1 Z_1$  на оси систем координат  $M'_0 X'_0 Y'_0 Z'_0$  и  $M'_1 X'_1 Y'_1 Z'_1$  соответственно находятся по формулам (6.3), а проекции  $v_{0k}$  и  $v_{1k}$  векторов скоростей  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  точки  $M$  на оси систем координат  $M_0 X_0 Y_0 Z_0$  и  $M_1 X_1 Y_1 Z_1$  соответственно, совпадающие с их проекциями на оси инерциальной системы координат, находятся по кватернионным формулам (6.14), (7.16).

Из уравнений (7.6)–(7.8), (7.12) и (7.13) (при  $i = 0$ ), (7.14) при  $m_1 = 0$  и уравнений (7.9)–(7.11), (7.12) и (7.13) (при  $i = 1$ ), (7.15) при  $m_0 = 0$  следуют дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, записанные в орбитальной и идеальной системах координат, полученные автором статьи в [16, 22], а также в [5, 23]. В случае невозмущенной пространственной задачи двух тел, когда вектор возмущающего ускорения  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ , из этих уравнений следуют первые интегралы  $c_i = \text{const}$ ,  $\Lambda_i = \text{const}$ . Поэтому в возмущенной пространственной задаче двух тел переменные  $c_i = c$  и

$\Lambda_i = \Lambda$  являются медленно изменяющимися переменными (оскулирующими элементами).

Отметим, что уравнения возмущенного кеплеровского движения, записанные в идеальной системе координат и состоящие из уравнений для полярных координат и уравнений для угловых переменных, описывающих ориентацию идеальной системы координат, были получены Andoyer (1923), а также Musen (1959) [21].

**8. Дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, записанные в идеальных системах координат с использованием идеальных прямоугольных координат Ганзена, параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватернионов.** Введем идеальные прямоугольные координаты Ганзена  $X_i, Y_i$  и  $Z_i = 0$  ( $i = 0, 1$ ), являющиеся проекциями радиус-вектора  $\mathbf{r}_i$  точки  $M$  в системе координат  $M_i X_i Y_i Z_i$  на оси идеальной системы координат  $M_i X_i^{id} Y_i^{id} Z_i^{id}$ , связанные с переменными  $r_i = |\mathbf{r}_i|$  (расстояниями) и  $\varphi_i$  (полярными координатами) соотношениями

$$X_i = r_i \cos \varphi_i, \quad Y_i = r_i \sin \varphi_i, \quad Z_i = 0 \quad (i = 0, 1) \quad (8.1)$$

Дифференцируя соотношения (8.1) дважды по времени и используя уравнения (7.6)–(7.8) и (7.9)–(7.11), получим вместо уравнений (7.6)–(7.8), (7.12) и (7.13) (при  $i = 0$ ), (7.14) и уравнений (7.9)–(7.11), (7.12) и (7.13) (при  $i = 1$ ), (7.15) следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{X}_0 + \frac{fm_0}{r_0^3} X_0 &= -\frac{fm_1}{r_1^3} X_0 + fm_1 \left( \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) X_{01}' + P_x' \\ \ddot{Y}_0 + \frac{fm_0}{r_0^3} Y_0 &= -\frac{fm_1}{r_1^3} Y_0 + fm_1 \left( \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) Y_{01}' + P_y' \\ Z_0 &= 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{X}_1 + \frac{fm_1}{r_1^3} X_1 &= -\frac{fm_0}{r_0^3} X_1 + fm_0 \left( \frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) X_{01}'' + P_x'' \\ \ddot{Y}_1 + \frac{fm_1}{r_1^3} Y_1 &= -\frac{fm_0}{r_0^3} Y_1 + fm_0 \left( \frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) Y_{01}'' + P_y'' \\ Z_1 &= 0 \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$2d\Lambda_i/dt = \Lambda_i \circ \Omega_i^{id}, \quad \Lambda_i = \Lambda_{i0} + \Lambda_{i1}\mathbf{i} + \Lambda_{i2}\mathbf{j} + \Lambda_{i3}\mathbf{k}, \quad i = 0, 1 \quad (8.4)$$

$$\Omega_i^{id} = \Omega_{i1}\mathbf{i} + \Omega_{i2}\mathbf{j} = (\omega_{i1}/r_i)(X_i\mathbf{i} + Y_i\mathbf{j}) \quad (8.5)$$

$$\omega_{01}/r_0 = c_0^{-1}[fm_1(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})z_{01}' + p_3'] \quad (8.6)$$

$$\omega_{11}/r_1 = c_1^{-1}[fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})z_{01}'' + p_3''] \quad (8.7)$$

$$r_i^2 = X_i^2 + Y_i^2, \quad c_i = |\mathbf{c}_i| = X_i\dot{Y}_i - Y_i\dot{X}_i, \quad i = 0, 1 \quad (8.8)$$

Величины  $X_{01}' = x_{01}'\cos\varphi_0 - y_{01}'\sin\varphi_0$ ,  $Y_{01}' = -x_{01}'\sin\varphi_0 + y_{01}'\cos\varphi_0$  и  $P_x' = p_1'\cos\varphi_0 - p_2'\sin\varphi_0$ ,  $P_y' = -p_1'\sin\varphi_0 + p_2'\cos\varphi_0$  в этих уравнениях являются проекциями радиус-вектора  $\mathbf{r}_{01} = \overline{M_0M_1}$  и вектора возмущающего ускорения  $\mathbf{p}$  на оси  $M_0X_0^{id}$  и  $M_0Y_0^{id}$  идеальной системы координат  $M_0X_0^{id}Y_0^{id}Z_0^{id}$ , а величины  $X_{01}'' = x_{01}''\cos\varphi_1 - y_{01}''\sin\varphi_1$ ,  $Y_{01}'' = -x_{01}''\sin\varphi_1 + y_{01}''\cos\varphi_1$  и  $P_x'' = p_1''\cos\varphi_1 - p_2''\sin\varphi_1$ ,  $P_y'' = -p_1''\sin\varphi_1 + p_2''\cos\varphi_1$  – проекциями радиус-вектора  $\mathbf{r}_{01}$  и вектора ускорения  $\mathbf{p}$  на оси  $M_1X_1^{id}$  и  $M_1Y_1^{id}$  идеальной системы координат

$M_1 X_1^{id} Y_1^{id} Z_1^{id}$ . Отметим, что  $Z_0' = z_0'$  и  $Z_0'' = z_0''$ , а также, что  $P_z' = p_3'$  и  $P_z'' = p_3''$ , т.е. проекции радиус-вектора  $\mathbf{r}_{01}$  и вектора ускорения  $\mathbf{p}$  на оси  $M_0 Z_0^{id}$  и  $M_1 Z_1^{id}$  идеальных систем координат  $M_0 X_0^{id} Y_0^{id} Z_0^{id}$  и  $M_1 X_1^{id} Y_1^{id} Z_1^{id}$  совпадают с их проекциями на оси  $M_0 Z_0'$  и  $M_1 Z_1'$  орбитальных систем координат  $M_0 X_0' Y_0' Z_0'$  и  $M_1 X_1' Y_1' Z_1'$ .

Уравнения (8.2), (8.4)–(8.6), (8.8) (при  $i = 0$ ) и уравнения (8.3)–(8.5), (8.7), (8.8) (при  $i = 1$ ) являются дифференциальными уравнениями возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, записанными в идеальных системах координат  $M_0 X_0^{id} Y_0^{id} Z_0^{id}$  и  $M_1 X_1^{id} Y_1^{id} Z_1^{id}$  соответственно. Уравнения (8.2), (8.4)–(8.6), (8.8) (при  $i = 0$ ) описывают движение точки  $M$  в системе координат  $M_0 X_0 Y_0 Z_0$ , а уравнения (8.3)–(8.5), (8.7), (8.8) (при  $i = 1$ ) – в системе координат  $M_1 X_1 Y_1 Z_1$ . Начала этих систем координат находятся в точках  $M_0$  и  $M_1$ , а их координатные оси параллельны одноименным осям инерциальной системы координат  $O\xi\eta\zeta$ . В этих уравнениях переменными являются идеальные прямоугольные координаты Ганзена  $X_i, Y_i, Z_i = 0$  ( $i = 0, 1$ ), их первые производные по времени и параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона)  $\Lambda_{0j}$  и  $\Lambda_{1j}$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) (компоненты кватернионов  $\mathbf{\Lambda}_0$  и  $\mathbf{\Lambda}_1$ ), характеризующие ориентации идеальных систем координат  $M_0 X_0^{id} Y_0^{id} Z_0^{id}$  и  $M_1 X_1^{id} Y_1^{id} Z_1^{id}$  в инерциальной системе координат  $O\xi\eta\zeta$  соответственно.

Отметим, что уравнения (8.2) и (8.3) можно также записать в другом виде:

$$\begin{aligned} \ddot{X}_0 + \frac{fm_0}{r_0^3} X_0 &= -\frac{fm_1}{r_1^3} X_1' - \frac{fm_1}{r_{01}^3} X_{01}' + P_x' \\ \ddot{Y}_0 + \frac{fm_0}{r_0^3} Y_0 &= -\frac{fm_1}{r_1^3} Y_1' - \frac{fm_1}{r_{01}^3} Y_{01}' + P_y' \\ Z_0 &= 0 \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} \ddot{X}_1 + \frac{fm_1}{r_1^3} X_1 &= -\frac{fm_0}{r_0^3} X_0'' + \frac{fm_0}{r_{01}^3} X_{01}'' + P_x'' \\ \ddot{Y}_1 + \frac{fm_1}{r_1^3} Y_1 &= -\frac{fm_0}{r_0^3} Y_0'' + \frac{fm_0}{r_{01}^3} Y_{01}'' + P_y'' \\ Z_1 &= 0 \end{aligned} \quad (8.10)$$

Величины  $X_1'$  и  $Y_1'$  в этих уравнениях являются проекциями радиус-вектора  $\mathbf{r}_1$  на оси  $M_0 X_0^{id}$  и  $M_0 Y_0^{id}$  идеальной системы координат  $M_0 X_0^{id} Y_0^{id} Z_0^{id}$ , а величины  $X_0''$  и  $Y_0''$  – проекциями радиус-вектора  $\mathbf{r}_0$  на оси  $M_1 X_1^{id}$  и  $M_1 Y_1^{id}$  идеальной системы координат  $M_1 X_1^{id} Y_1^{id} Z_1^{id}$ .

Отметим также, что уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (8.2), (8.4)–(8.6), (8.8) (при  $i = 0$ ) могут рассматриваться независимо от уравнений (8.3)–(8.5), (8.7), (8.8) (при  $i = 1$ ), если модуль  $r_1$  радиус-вектора  $\mathbf{r}_1$ , фигурирующий в этих уравнениях, представить, используя соотношение  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{01}$ , в следующем виде:

$$r_1^2 = r_0^2 + r_{01}^2 - 2(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_{01}) = X_0^2 + Y_0^2 + X_{01}^2 + Y_{01}^2 + Z_{01}^2 - 2(X_0 X_{01}' + Y_0 Y_{01}') \quad (8.11)$$

Аналогично, уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (8.3)–(8.5), (8.7), (8.8) (при  $i = 1$ ) могут рассматриваться независимо от уравнений

(8.2), (8.4)–(8.6), (8.8) (при  $i = 0$ ), если модуль  $r_0$  радиус-вектора  $\mathbf{r}_0$ , фигурирующий в этих уравнениях, представить, используя соотношение  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_{01}$ , в следующем виде:

$$r_0^2 = r_1^2 + r_{01}^2 + 2(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_{01}) = X_1^2 + Y_1^2 + X_{01}^2 + Y_{01}^2 + Z_{01}^2 + 2(X_1 X_{01}' + Y_1 Y_{01}') \quad (8.12)$$

Отметим, наконец, что уравнения (8.2), (8.3) или (8.9), (8.10) возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел в идеальных прямоугольных координатах Ганзена  $X_i, Y_i$  и  $Z_i = 0$  ( $i = 0, 1$ ) имеют вид дифференциальных уравнений возмущенной плоской ограниченной задачи трех тел.

Декартовы координаты  $x_i, y_i, z_i$  ( $i = 0, 1$ ) точки  $M$  в системе координат  $M_i X_i Y_i Z_i$ , оси которой параллельны одноименным осям инерциальной системы координат  $O\xi\eta\zeta$ , и проекции  $v_{ik}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) вектора скорости  $\mathbf{v}_i$  точки  $M$  в системе координат  $M_i X_i Y_i Z_i$  на ее же координатные оси находятся через идеальные координаты и их первые производные по времени по формулам

$$\begin{aligned} x_i &= (\Lambda_{i0}^2 + \Lambda_{i1}^2 - \Lambda_{i2}^2 - \Lambda_{i3}^2) X_i + 2(\Lambda_{i1}\Lambda_{i2} - \Lambda_{i0}\Lambda_{i3}) Y_i \\ y_i &= 2(\Lambda_{i1}\Lambda_{i2} + \Lambda_{i0}\Lambda_{i3}) X_i + (\Lambda_{i0}^2 - \Lambda_{i1}^2 + \Lambda_{i2}^2 - \Lambda_{i3}^2) Y_i \end{aligned} \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned} z_i &= 2(\Lambda_{i1}\Lambda_{i3} - \Lambda_{i0}\Lambda_{i2}) X_i + 2(\Lambda_{i2}\Lambda_{i3} + \Lambda_{i0}\Lambda_{i1}) Y_i \\ v_{i1} = \dot{x}_i &= (\Lambda_{i0}^2 + \Lambda_{i1}^2 - \Lambda_{i2}^2 - \Lambda_{i3}^2) \dot{X}_i + 2(\Lambda_{i1}\Lambda_{i2} - \Lambda_{i0}\Lambda_{i3}) \dot{Y}_i \\ v_{i2} = \dot{y}_i &= 2(\Lambda_{i1}\Lambda_{i2} + \Lambda_{i0}\Lambda_{i3}) \dot{X}_i + (\Lambda_{i0}^2 - \Lambda_{i1}^2 + \Lambda_{i2}^2 - \Lambda_{i3}^2) \dot{Y}_i \\ v_{i3} = \dot{z}_i &= 2(\Lambda_{i1}\Lambda_{i3} - \Lambda_{i0}\Lambda_{i2}) \dot{X}_i + 2(\Lambda_{i2}\Lambda_{i3} + \Lambda_{i0}\Lambda_{i1}) \dot{Y}_i \end{aligned} \quad (8.14)$$

Проекции  $P'_x, P'_y, P'_z = p'_3$  вектора возмущающего ускорения  $\mathbf{p}$  на оси идеальной системы координат  $M_0 X_0^{\text{id}} Y_0^{\text{id}} Z_0^{\text{id}}$  связаны с его проекциями  $p_1 = p_x, p_2 = p_y, p_3 = p_z$  на оси системы координат  $M_0 X_0 Y_0 Z_0$  соотношениями

$$\begin{aligned} P'_x &= (\Lambda_{00}^2 + \Lambda_{01}^2 - \Lambda_{02}^2 - \Lambda_{03}^2) p_x + 2(\Lambda_{01}\Lambda_{02} + \Lambda_{00}\Lambda_{03}) p_y + 2(\Lambda_{01}\Lambda_{03} - \Lambda_{00}\Lambda_{02}) p_z \\ P'_y &= 2(\Lambda_{01}\Lambda_{02} - \Lambda_{00}\Lambda_{03}) p_x + (\Lambda_{00}^2 - \Lambda_{01}^2 + \Lambda_{02}^2 - \Lambda_{03}^2) p_y + 2(\Lambda_{02}\Lambda_{03} + \Lambda_{00}\Lambda_{01}) p_z \\ P'_z &= 2(\Lambda_{01}\Lambda_{03} + \Lambda_{00}\Lambda_{02}) p_x + 2(\Lambda_{02}\Lambda_{03} - \Lambda_{00}\Lambda_{01}) p_y + (\Lambda_{00}^2 - \Lambda_{01}^2 - \Lambda_{02}^2 + \Lambda_{03}^2) p_z \end{aligned} \quad (8.15)$$

Проекции  $P''_x, P''_y, P''_z = p''_3$  вектора возмущающего ускорения  $\mathbf{p}$  на оси идеальной системы координат  $M_1 X_1^{\text{id}} Y_1^{\text{id}} Z_1^{\text{id}}$  связаны с его проекциями  $p_1 = p_x, p_2 = p_y, p_3 = p_z$  на оси системы координат  $M_1 X_1 Y_1 Z_1$  аналогичными соотношениями, в правых частях которых вместо первого нижнего индекса “0”, стоящего в правых частях соотношений (8.15), будет стоять индекс “1”.

Соотношения (8.13)–(8.15) и соотношения для проекций  $P''_x, P''_y, P''_z = p''_3$  можно записать в следующем кватернионном виде:

$$\mathbf{R}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k} = \Lambda_i \circ (X_i \mathbf{i} + Y_i \mathbf{j}) \circ \bar{\Lambda}_i, \quad i = 0, 1 \quad (8.16)$$

$$\mathbf{V}_i = v_{i1} \mathbf{i} + v_{i2} \mathbf{j} + v_{i3} \mathbf{k} = \dot{\mathbf{R}}_i = \dot{x}_i \mathbf{i} + \dot{y}_i \mathbf{j} + \dot{z}_i \mathbf{k} = \Lambda_i \circ (\dot{X}_i \mathbf{i} + \dot{Y}_i \mathbf{j}) \circ \bar{\Lambda}_i \quad (i = 0, 1) \quad (8.17)$$

$$\mathbf{P}' = P'_x \mathbf{i} + P'_y \mathbf{j} + P'_z \mathbf{k} = \bar{\Lambda}_0 \circ (p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k}) \circ \Lambda_0$$

$$\mathbf{P}'' = P''_x \mathbf{i} + P''_y \mathbf{j} + P''_z \mathbf{k} = \bar{\Lambda}_1 \circ (p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k}) \circ \Lambda_1$$

Обратим внимание на то, что в соответствии со свойствами идеальных координат в формулах (8.14) и (8.17) для проекций  $v_{ik}$  вектора скорости точки  $M$  в системе координат  $M_i X_i Y_i Z_i$  отсутствуют слагаемые с производными  $\dot{\Lambda}_{ij}$  от параметров Эйлера  $\Lambda_{ij}$ , которые, казалось, должны были бы появиться при дифференцировании соотношений (8.13) и (8.16) (для получения формул (8.14) и (8.17)). Покажем, что в действительности эти слагаемые обращаются в ноль.

Дифференцируя соотношение (8.16) по времени и учитывая уравнение (8.4), получим после преобразований

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}}_i &= \mathbf{V}_i = \Lambda_i \circ (\dot{X}_i \mathbf{i} + \dot{Y}_i \mathbf{j}) \circ \bar{\Lambda}_i + \dot{\Lambda}_i \circ (X_i \mathbf{i} + Y_i \mathbf{j}) \circ \bar{\Lambda}_i + \Lambda_i \circ (X_i \mathbf{i} + Y_i \mathbf{j}) \circ \dot{\bar{\Lambda}}_i = \\ &= \Lambda_i \circ (\dot{X}_i \mathbf{i} + \dot{Y}_i \mathbf{j}) \circ \bar{\Lambda}_i + \frac{1}{2} \Lambda_i \circ \left[ \Omega_i^{id} \circ (X_i \mathbf{i} + Y_i \mathbf{j}) - (X_i \mathbf{i} + Y_i \mathbf{j}) \circ \Omega_i^{id} \right] \circ \bar{\Lambda}_i\end{aligned}$$

Но в силу формулы (8.5) кватернион  $\Omega_i^{id} = (\omega_{i1}/r_i)(X_i \mathbf{i} + Y_i \mathbf{j})$ , поэтому в последнем соотношении выражение в квадратной скобке обращается в ноль, и в итоге получается формула  $\dot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{V}_i = \Lambda_i \circ (\dot{X}_i \mathbf{i} + \dot{Y}_i \mathbf{j}) \circ \bar{\Lambda}_i$ , совпадающая с формулой (8.17).

Дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел в комплексных переменных. Уравнения (8.2), (8.3) и система четырех скалярных уравнений, эквивалентная кватернионному уравнению (8.4), могут быть записаны в комплексной форме. Введем комплексные переменные

$$X_i^c = X_i + iY_i \quad (8.18)$$

$$\alpha_i = \Lambda_{i0} + i\Lambda_{i3}, \quad \beta_i = -\Lambda_{i2} + i\Lambda_{i1}, \quad \gamma_i = \Lambda_{i2} + i\Lambda_{i1}, \quad \delta_i = \Lambda_{i0} - i\Lambda_{i3} \quad (8.19)$$

Здесь нижний индекс  $i = 0, 1$ ; основная буква  $i$  – мнимая (комплексная) единица:  $i^2 = -1$ .

В комплексных переменных (8.19) (параметрах Кейли–Клейна) кватернионное кинематическое уравнение (8.4) в переменных Эйлера с учетом (8.5) эквивалентно системе скалярных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}2\dot{\alpha}_i &= i(\Omega_{i1} - i\Omega_{i2})\beta_i, & 2\dot{\beta}_i &= i(\Omega_{i1} + i\Omega_{i2})\alpha_i \\ 2\dot{\gamma}_i &= i(\Omega_{i1} - i\Omega_{i2})\delta_i, & 2\dot{\delta}_i &= i(\Omega_{i1} + i\Omega_{i2})\gamma_i \\ \Omega_{i1} - i\Omega_{i2} &= (\omega_{i1}/r_i)(X_i - iY_i), & \Omega_{i1} + i\Omega_{i2} &= (\omega_{i1}/r_i)(X_i + iY_i)\end{aligned} \quad (8.20)$$

В комплексных переменных (8.18) и (8.19) дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (8.2)–(8.8) в идеальных прямоугольных координатах Ганзена с учетом уравнений (8.20) принимают вид

$$\ddot{X}_0^c + \frac{fm_0}{r_0^3} X_0^c = -\frac{fm_1}{r_1^3} X_0^c + fm_1 \left( \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) X_{01}^c + P^c \quad (8.21)$$

$$\ddot{X}_1^c + \frac{fm_1}{r_1^3} X_1^c = -\frac{fm_0}{r_0^3} X_1^c + fm_0 \left( \frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) X_{01}^c + P^c \quad (8.22)$$

$$\begin{aligned}2\dot{\alpha}_i &= i(\omega_{i1}/r_i) \bar{X}_i^c \beta_i, & 2\dot{\beta}_i &= i(\omega_{i1}/r_i) X_i^c \alpha_i \\ 2\dot{\gamma}_i &= i(\omega_{i1}/r_i) \bar{X}_i^c \delta_i, & 2\dot{\delta}_i &= i(\omega_{i1}/r_i) X_i^c \gamma_i\end{aligned} \quad (8.23)$$

$$X_i^c = X_i + iY_i, \quad \bar{X}_i^c = X_i - iY_i, \quad r_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 = X_i^c \bar{X}_i^c \quad (8.24)$$

$$X_{01}^c = X_{01}^c + iY_{01}^c, \quad P^c = P_x^c + iP_y^c; \quad X_{01}^c = X_{01}^c + iY_{01}^c, \quad P^c = P_x^c + iP_y^c \quad (8.25)$$

Здесь, по-прежнему, нижний индекс  $i = 0, 1$ ; основная буква  $i$  – мнимая единица.

Вместо уравнений (8.21) и (8.22) могут быть использованы другие комплексные уравнения, вытекающие из уравнений (8.9) и (8.10)

$$\dot{X}_0^c + \frac{fm_0}{r_0^3} X_0^c = -\frac{fm_1}{r_1^3} X_1^{c'} + \frac{fm_1}{r_{01}^3} X_{01}^{c'} + P^{c'}, \quad X_1^{c'} = X_1' + iY_1' \quad (8.26)$$

$$\dot{X}_1^c + \frac{fm_1}{r_1^3} X_1^c = -\frac{fm_0}{r_0^3} X_0^{c''} + \frac{fm_0}{r_{01}^3} X_{01}^{c''} + P^{c''}, \quad X_0^{c''} = X_0'' + iY_0'' \quad (8.27)$$

Уравнения (8.21)–(8.25) или (8.26), (8.27), (8.23) могут оказаться удобными в численных и аналитических исследованиях возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. Так, известно [24], что в численных расчетах перспективно использование системы остаточных классов – непозиционной системы кодирования цифровой информации, позволяющей по остаткам осуществлять переход из пространства комплексных чисел в область целых действительных чисел, распараллеливать вычислительные операции на арифметическом уровне, повышать надежность вычислений, эффективно использовать микропроцессорную аппаратуру в вычислительных устройствах.

*Интегралы Якоби уравнений невозмущенной пространственной ограниченной круговой задачи трех тел в идеальных координатах Ганзена и параметрах Эйлера.* Запишем первые интегралы (3.17) и (3.18) уравнения невозмущенной пространственной ограниченной круговой задачи трех тел (интегралы Якоби), когда возмущающее ускорение  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ , в идеальных координатах Ганзена и параметрах Эйлера. Учитывая равенства

$$v_i^2 = \mathbf{v}_i^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 = \dot{X}_i^2 + \dot{Y}_i^2$$

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_{01} = x_0 x_{01} + y_0 y_{01} = X_0 X_{01}' + Y_0 Y_{01}', \quad \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{10} = x_1 x_{10} + y_1 y_{10} = X_1 X_{10}'' + Y_1 Y_{10}''$$

$$y_i \dot{x}_i - x_i \dot{y}_i = c_{i33}(X_i \dot{Y}_i - Y_i \dot{X}_i)$$

$$c_{i33} = \Lambda_{i0}^2 - \Lambda_{i1}^2 - \Lambda_{i2}^2 + \Lambda_{i3}^2 = 2(\Lambda_{i0}^2 + \Lambda_{i3}^2) - 1 = 1 - 2(\Lambda_{i1}^2 + \Lambda_{i2}^2)$$

получим эти интегралы в следующем виде:

$$H_0 = \frac{1}{2}(\dot{X}_0^2 + \dot{Y}_0^2) - \frac{fm_0}{r_0} - \frac{fm_1}{r_1} + \frac{fm_1}{r_{01}^3}(X_0 X_{01}' + Y_0 Y_{01}') + nc_{033}(X_0 \dot{Y}_0 - Y_0 \dot{X}_0) = H_0(t_0) = \text{const}$$

$$H_1 = \frac{1}{2}(\dot{X}_1^2 + \dot{Y}_1^2) - \frac{fm_0}{r_0} - \frac{fm_1}{r_1} + \frac{fm_0}{r_{01}^3}(X_1 X_{10}'' + Y_1 Y_{10}'') + nc_{133}(X_1 \dot{Y}_1 - Y_1 \dot{X}_1) = H_1(t_0) = \text{const}$$

$$r_i^2 = X_i^2 + Y_i^2, \quad r_{01}^2 = x_{01}^2 + y_{01}^2 + z_{01}^2 = X_{01}^2 + Y_{01}^2 + Z_{01}^2 = X_{10}''^2 + Y_{10}''^2 + Z_{10}''^2$$

*Дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в идеальных координатах Ганзена и параметрах Эйлера.* Эти уравнения получаются из выше полученных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел и имеют следующий вид

$$\ddot{X} + \frac{fm}{r^3} X = P_x^{id}, \quad \ddot{Y} + \frac{fm}{r^3} Y = P_y^{id}; \quad 2d\Lambda/dt = \Lambda \circ \Omega^{id}$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{i} + \Lambda_2 \mathbf{j} + \Lambda_3 \mathbf{k}, \quad \Omega^{id} = \Omega_1 \mathbf{i} + \Omega_2 \mathbf{j} = (c^{-1} P_z^{id})(X \mathbf{i} + Y \mathbf{j})$$

$$r^2 = X^2 + Y^2, \quad c = |c| = X\dot{Y} - Y\dot{X}$$

Здесь  $X$ ,  $Y$  и  $Z=0$  – идеальные координаты Ганзена изучаемого тела,  $\Lambda$  – кватернион ориентации идеальной системы координат, в которой записаны уравнения движения изучаемого тела,  $\Omega^{id}$  – кватернион абсолютной угловой скорости этой системы координат,  $m$  – сумма масс тел,  $P_x^{id}$ ,  $P_y^{id}$ ,  $P_z^{id}$  – проекции возмущающего ускорения на оси идеальной системы координат.

Отметим, что эти уравнения задачи двух тел были получены автором статьи в работе [25], скалярные уравнения возмущенного кеплеровского движения в ганзеновских координатах и параметрах Эйлера, записанные в идеальной системе координат, ранее были получены в других формах и другими способами Deprit (1976) [21] и Брумбергом (1980) [26].

**9. Обсуждение полученных уравнений и их приложений.** Отметим основные особенности полученных уравнений и их возможные приложения.

1) В статье получены различные новые регулярные кватернионные уравнения небесной механики и механики космического полета (астродинамики), построенные в рамках возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (например, Земля, Луна (или Солнце), космический аппарат (или астероид)). Уравнения записаны или в неголономной, или в орбитальной, или в идеальной системах координат. В этих уравнениях возмущенного орбитального движения одна группа (подсистема) уравнений описывает изменение размеров и формы мгновенной орбиты изучаемого тела (например, космического аппарата или астероида), имеющего пренебрежимо малую массу в сравнении с двумя другими гравитирующими телами, а другая группа (подсистема) уравнений, имеющая вид кватернионных кинематических уравнений в параметрах Эйлера (Родрига–Гамильтона), описывает изменение ориентации мгновенной орбиты или плоскости орбиты изучаемого движущегося тела в инерциальной системе координат, или изменение ориентации вращающейся системы координат, в которой записаны уравнения орбитального движения тела. Предложенные уравнения не имеют особенностей (деления на ноль), порождаемых использованием в моделях орбитального движения углов Эйлера, и имеют аналитические и вычислительные преимущества перед классическими уравнениями небесной механики и механики космического полета, состоящими из уравнений орбитального движения, описывающих изменение размеров и формы мгновенной орбиты изучаемого тела, и из уравнений, имеющих вид кинематических уравнений в углах Эйлера и описывающих изменение ориентации мгновенной орбиты или плоскости орбиты изучаемого движущегося тела или используемой вращающейся системы координат. Преимущество предлагаемых уравнений обуславливается хорошо известными преимуществами входящих в их состав кватернионных кинематических уравнений в параметрах Эйлера перед кинематическими уравнениями в углах Эйлера.

Из полученных уравнений следуют, как частные, широко используемые в настоящее время уравнения орбитального движения, построенные в рамках возмущенной пространственной задачи двух тел. Обзор этих известных уравнений и их приложений в задачах управления орбитальным движением космического аппарата дан в первой обзорной части нашей работы [3].

Полученные в статье уравнения орбитального движения могут быть эффективно использованы в силу их свойств для изучения орбитального движения небесных и космических тел и космических аппаратов, для прогноза их движения, а также для решения задач инерциальной навигации в космосе, задач управления орбитальным движением космических аппаратов, в частности, для решения в рамках возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (Земля, Луна, космический аппарат) таких актуальных задач механики космического полета, как полет на Луну, а также за-

дач оптимальной переориентации орбиты космического аппарата, плоскости орбиты, коррекции угловых элементов орбиты КА (в частности, КА спутниковой навигационной группировки “Глонасс”) с учетом влияния Луны.

2) В наших работах [5, 23, 27, 28] с использованием принципа максимума Понтрягина и различных вариантов регулярных кватернионных уравнений орбитального движения, записанных во вращающихся системах координат с использованием параметров Родрига–Гамильтона (Эйлера) и кватернионных переменных для описания ориентаций этих систем координат и орбиты КА, решены в рамках возмущенной пространственной задачи двух тел в различных постановках задачи оптимального управления о мягкой или жесткой встрече в ньютоновском гравитационном поле управляемого космического аппарата с неуправляемым аппаратом, движущимся по кеплеровской орбите.

В этих работах отмечено, что кватернионные регулярные уравнения орбитального движения центра масс КА, в состав которых входят уравнения в параметрах Эйлера, в отличие от классических уравнений орбитального движения в угловых оскулирующих элементах, содержащих особые точки (деление на ноль), этих особых точек не имеют. Эти кватернионные уравнения позволили кардинально повысить эффективность аналитического исследования и численного решения задач об оптимальной мягкой или жесткой встрече в ньютоновском гравитационном поле управляемого космического аппарата с неуправляемым аппаратом, улучшить сходимость итерационных процессов численного решения полученных краевых задач оптимизации. Нами с использованием параметров Эйлера установлены новые свойства оптимального управления орбитальным движением космических аппаратов и новые кватернионные первые интегралы полученных пространственных краевых задач оптимального управления, содержащие параметры Эйлера и сопряженные к ним переменные. Использование найденных кватернионных первых интегралов позволило понизить размерности кватернионных дифференциальных уравнений краевых задач оптимального управления на 5 единиц с одновременным их упрощением. Было показано, что известные векторные первые интегралы этих задачах, справедливые для оптимального управления, являются частными случаями найденных нами кватернионных первых интегралов, справедливых для любого управления, и что эти векторные первые интегралы не позволяют эффективно понизить размерности получаемых векторных дифференциальных уравнений краевых задач оптимизации, записанных с использованием декартовых координат, из-за равенства нулю определителя трехмерного кососимметрического матричного коэффициента в матричном уравнении, соответствующем известным векторным первым интегралам.

Эти достоинства решения задач оптимального управления орбитальным движением, обусловленные наличием в уравнениях орбитального движения кватернионных кинематических уравнений в параметрах Эйлера (Родрига–Гамильтона), могут быть использованы для решения задач оптимальных полетов на Луну в рамках возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел с использованием предложенных в статье уравнений.

3) В наших работах [29–37] решены (в рамках возмущенной пространственной задачи двух тел) задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата, плоскости орбиты, коррекции угловых элементов орбиты посредством реактивного ускорения или реактивной тяги (для КА с переменной массой), ортогональных плоскости орбиты КА, с использованием принципа максимума Понтрягина и кватернионных дифференциальных уравнений ориентации орбитальной системы координат или орбиты КА в параметрах Эйлера в непрерывной (с ограниченным по модулю управлением) или в импульсной постановке. При таком управлении форма и размеры орбиты КА остаются в процессе управляемого движения неизменными, а сама орбита поворачивается в инерциальной системе координат как неизменяемая (недеформируемая)

фигура, что важно, например, при управлении спутниковой навигационной группировкой.

Решены задачи быстродействия, минимизации импульса реактивного ускорения или реактивной тяги, характеристической скорости КА, а также задачи минимизации комбинированных функционалов качества: времени и суммарного импульса величины ускорения или тяги, затраченных на процесс управления, времени и характеристической скорости КА.

Решение задач оптимальной переориентации орбиты и плоскости орбиты космического аппарата, коррекции угловых элементов орбиты КА посредством реактивного ускорения или реактивной тяги, ортогональных плоскости оскулирующей орбиты, с помощью уравнений в классических угловых элементах орбиты [38–43] в строгой нелинейной постановке достаточно сложно в силу нелинейности этих уравнений, наличия в них особых точек, в которых угол наклона орбиты  $i = 0, \pi$ , а также в силу громоздкости уравнений для сопряженных переменных. Поэтому для решения этих задач вместо угловых элементов орбиты целесообразно использовать параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона).

Нами для решения указанных задач в рамках возмущенной пространственной задачи двух тел использовано кватернионное дифференциальное уравнение, описывающее ориентацию орбитальной системы координат в параметрах Эйлера, или кватернионное дифференциальное уравнение мгновенной ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера и скалярное дифференциальное уравнение для истинной аномалии, характеризующей положение центра масс КА на орбите. Использование кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбитальной системы координат более удобно при аналитическом исследовании задачи оптимальной переориентации орбиты КА в непрерывной постановке (с использованием малой тяги реактивного двигателя), однако использование кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА имеет преимущество при численном решении задач оптимальной переориентации орбиты КА и ее плоскости и коррекции угловых элементов орбиты, так как кватернион ориентации орбиты КА является оскулирующим (медленно изменяющимся) элементом орбиты. Кватернион ориентации орбитальной системы координат таким свойством не обладает, так как является быстро меняющейся переменной.

Отметим, что проблема вырожденности классических орбитальных элементов орбиты движущегося тела (например, КА) частично решается в механике космического полета за счет использования так называемых “невыврожденных” орбитальных элементов (иногда для них используют термин “equinoctial elements”) и соответствующих уравнений ориентации орбиты Battin [44]. Эти уравнения, также как и предложенные нами кватернионные уравнения ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера, не имеют особой точки (деления на ноль при равенстве нулю угла наклона орбиты), однако в этих уравнениях сохраняется особое значение угла наклона орбиты, равное 180 град. К тому же уравнения Battin и сопряженные к ним уравнения задач оптимального управления орбитальным движением КА, решаемых с использованием принципа максимума, значительно сложнее предложенных нами кватернионных регулярных фазовых и сопряженных уравнений в задачах оптимального управления орбитальным движением КА (например, в задачах оптимальной переориентации орбиты КА), как с аналитической, так и вычислительной точек зрения.

Кроме этого, кватернионное уравнение ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера обладает свойством самосопряженности: оно с точностью до обозначения кватернионной переменной совпадает с кватернионным сопряженным ему уравнением, что позволяет понизить размерность краевых задач оптимизации (с одновременным их упрощением) на четыре единицы с использованием новой кватернионной переменной, являющейся мультипликативной композицией кватернионных фазовой и сопря-

женной переменных (в виде их кватернионного произведения). Таким свойством классические дифференциальные уравнения ориентации орбиты в угловых элементах орбиты и уравнения Battin не обладают, причем соответствующие им сопряженные уравнения гораздо сложнее фазовых. Отметим, что эти интегралы для оптимального орбитального движения аналогичны кватернионным первым интегралам, существующим в задачах оптимального управления вращательным движением твердого тела, установленным впервые Бранцем и Шмыглевским [11].

Полученные в статье уравнения орбитального движения целесообразно использовать для решения задач оптимальной переориентации орбиты космического аппарата, плоскости орбиты, коррекции угловых элементов орбиты в более общей постановке: в рамках возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (Земля, Луна, космический аппарат), учитывающей влияние Луны.

4) В статье также получены новые регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, построенные с использованием двумерных идеальных прямоугольных координат Ганзена, параметров Эйлера и кватернионных переменных, а также с использованием комплексных композиций координат Ганзена и параметров Эйлера (параметров Кейли–Клейна), в которых используется обычная комплексность  $i$ , обладающая свойством  $i^2 = -1$ . Получены интегралы Якоби уравнений невозмущенной пространственной ограниченной круговой задачи трех тел в идеальных координатах Ганзена и параметрах Эйлера. Уравнения в комплексных переменных целесообразно использовать для численного решения задач небесной механики и механики космического полета с использованием системы остаточных классов – непозиционной системы кодирования цифровой информации [24], позволяющей, распараллеливать вычислительные операции на арифметическом уровне, повышать надежность вычислений, эффективно использовать микропроцессорную аппаратуру в вычислительных устройствах.

5) Другие особенности типа деления на ноль классических уравнений небесной механики и механики космического полета, порождаемые гравитационными силами, также эффективно устраняются с помощью использования параметров Эйлера и кватернионов Гамильтона. Так, нами показано [45, 46], что из дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, записанных в неголономной системе координат с использованием параметров Эйлера и кватернионов поворотов, (т.е. из уравнений, которые получаются из уравнений (5.4)–(5.6) при  $m_1 = 0$  или из уравнений (5.7)–(5.9) при  $m_0 = 0$ ), наиболее просто и наглядно получаются регулярные кватернионные уравнения пространственной задачи двух тел в четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля [47], широко используемые в настоящее время в астродинамике. Обзор работ по кватернионной регуляризации особенностей классических уравнений небесной механики и механики космического полета, порождаемых гравитационными и другими центральными силами, в рамках возмущенной пространственной задачи двух тел с помощью использования параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона), четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля и других модифицированных четырехмерных переменных, предложенных нами, двумерных переменных Леви-Чивита, а также с помощью использования в качестве дополнительных переменных энергетических переменных и регуляризирующего преобразования времени дан в нашей недавней работе [48].

Использование полученных в нашей статье уравнений позволяет эффективно решить проблему устранения особенностей уравнений небесной механики и механики космического полета, порождаемых гравитационными силами, в рамках возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел и построить различные новые регулярные кватернионные уравнения небесной механики и механики космического полета с помощью перехода в полученных уравнениях от параметров Эйлера к четы-

рехмерным переменным Кустаахеймо–Штифеля и другим четырехмерным переменным, использования двумерных переменных Леви-Чивита, а также с помощью использования в качестве дополнительных переменных энергетических переменных и регуляризующего преобразования времени.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 864 с.
2. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика: Методы теории движения искусственных небесных тел. М.: Наука, 1983. 352 с.
3. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы и регулярные модели небесной механики и механики космического полета: использование параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) для описания орбитального (траекторного) движения. I: Обзор и анализ методов и моделей и их приложений // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 5. С. 3–31. <https://doi.org/10.31857/S0572329922040043>
4. *Челноков Ю.Н.* Анализ оптимального управления движением точки в гравитационном поле с использованием кватернионов // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 5. С. 18–44.
5. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.
6. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. I // Косм. иссл. 2013. Т. 51. № 5. С. 389–401.
7. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. III // Косм. иссл. 2015. Т. 53. № 5. С. 430–446. <https://doi.org/10.7868/S0023420615050040>
8. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. I // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 6. С. 24–54.
9. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. II // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 6. С. 41–63.
10. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
11. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
12. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
13. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008. 304 с.
14. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 1: Общая теория. Приложения к задаче регуляризации и к задаче о движении ИСЗ. М.: ВИНТИ, 1985. № 8628–В. 36 с.
15. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 2: Пространственная задача невозмущенного центрального движения. Задача с начальными условиями. М.: ВИНТИ, 1985. № 8629–В. 18 с.
16. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. Ч. 1 // Косм. иссл. 1992. Т. 30. Вып. 6. С. 759–770.
17. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 1 // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 1. С. 20–30.
18. *Челноков Ю.Н.* Построение оптимальных управлений и траекторий движения космического аппарата, использующее кватернионное описание пространственной ориентации орбиты // Косм. иссл. 1997. Т. 35. № 5. С. 534–542.
19. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в механике космического полета // Гироскоп. навиг. 1999. № 4 (27). С. 47–66.
20. *Брагазин А.Ф., Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Описание орбитального движения с использованием кватернионов и скоростных параметров // Анн. докладов шестого Всесоюзного съезда по теорет. и прикл. механике. Ташкент: Фан, 1986. С. 133.

21. *Deprit A.* Ideal frames for perturbed keplerian motions // *Celest. Mech.* 1976. V. 13. № 2. P. 253–263.
22. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. Ч. 2 // *Косм. иссл.* 1993. Т. 31. Вып. 3. С. 3–15.
23. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. I // *Косм. иссл.* 2001. Т. 39. № 5. С. 502–517.
24. *Онищенко С.М.* Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы. Киев: Наукова думка, 1983. 208 с.
25. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. II // *Косм. иссл.* 2014. Т. 52. № 4. С. 322–336.
26. *Брумберг В.А.* Аналитические алгоритмы небесной механики. М.: Наука, 1980. 208 с.
27. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. Ч. 2 // *Косм. иссл.* 2003. Т. 41. № 1. С. 92–107.
28. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. Ч. 3 // *Косм. иссл.* 2003. Т. 41. № 5. С. 460–477.
29. *Челноков Ю.Н.* Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // *ПММ.* Т. 76. Вып. 6. 2012. С. 895–912.
30. *Панкратов И.А., Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Инф.* 2012. Т. 12. № 3. С. 87–95.
31. *Панкратов И.А., Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Инф.* 2013. Т. 13. № 1–1. С. 84–92.
32. *Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Исследование задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Часть 1 // *Мехатрон. автомат. управл.* 2016. Т. 17. № 8. С. 567–575.  
<https://doi.org/10.17587/mau.17.567-575>
33. *Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Исследование задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Часть 2 // *Мехатрон. автомат. управл.* 2016. Т. 17. № 9. С. 633–643.  
<https://doi.org/10.17587/mau.17.633-643>
34. *Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Оптимальный поворот плоскости орбиты космического аппарата переменной массы в центральном гравитационном поле посредством ортогональной тяги // *Автомат. телемех.* 2019. № 8. С. 87–108.
35. *Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Импульсная оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. I // *Изв. РАН. МТТ.* 2018. № 5. С. 70–89.  
<https://doi.org/10.31857/S057232990002467-3>
36. *Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Импульсная оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. II // *Изв. РАН. МТТ.* 2019. № 1. С. 3–23.  
<https://doi.org/10.1134/S0572329919010021>
37. *Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Кватернионное решение задачи оптимального поворота плоскости орбиты космического аппарата переменной массы с помощью тяги, ортогональной плоскости орбиты // *Изв. РАН. МТТ.* 2019. № 4. С. 110–129.  
<https://doi.org/10.1134/S057232991904007X>
38. *Копнин Ю.М.* К задаче поворота плоскости орбиты спутника // *Косм. иссл.* 1965. Т. 3. Вып. 4. С. 22–30.
39. *Лебедев В.Н.* Расчет движения космического аппарата с малой тягой. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 108 с.

40. *Борщевский М.З., Иослович М.В.* К задаче о повороте плоскости орбиты спутника при помощи реактивной тяги // *Косм. иссл.* 1969. Т. 7. Вып. 6. С. 8–15.
41. *Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В.* Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975.
42. *Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.* Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990.
43. *Ишков С.А., Романенко В.А.* Формирование и коррекция высокоэллиптической орбиты спутника земли с двигателем малой тяги // *Косм. иссл.* 1997. Т. 35. № 3. С. 287–296.
44. *Battin R.H.* An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics. New York: AIAA Press, 1987. 799 p.
45. *Челноков Ю.Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1981. № 6. С. 12–21.
46. *Челноков Ю.Н.* О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1984. № 1. С. 151–158.
47. *Stiefel E.L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971. p. 350 = *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. С. 304
48. *Chelnokov Y.N.* Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // *Appl. Math. Mech. (Engl. Ed.).* 2022. V. 43. № 1. P. 21–80.  
<https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9>

УДК 539.3:534.1

**РЕШЕНИЕ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ ПОХГАММЕРА–КРИ И ИЗГИБНЫЕ  
СЕЙСМИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА  
В БЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ**

© 2023 г. М. Ш. Исраилов<sup>а,\*</sup>

<sup>а</sup> *Комплексный НИИ РАН, Грозный, Россия*

*\*e-mail: israiler@hotmail.com*

Поступила в редакцию 01.11.2021 г.

После доработки 09.11.2021 г.

Принята к публикации 29.11.2021 г.

Доказана возможность частичного расщепления динамических уравнений линейной теории упругости для объемного расширения и компонент вектора вращения частиц среды в цилиндрических координатах в общем случае нестационарной задачи. Этот результат является обобщением аналогичного факта, установленного А. Лявом при простой гармонической зависимости названных функций от времени и двух пространственных координат. Дано точное аналитическое решение задачи об изгибных колебаниях упругого пространства с круговой цилиндрической полостью (внешней задачи Похгаммера–Кри). Показано, что опубликованное К. Токи и Ш. Такада исследование по этому вопросу не дает решения названной задачи. На основе полученного решения внешней задачи Похгаммера–Кри изучены изгибные колебания подземного трубопровода, вызванные действием сейсмической волны. Полученные при этом результаты дают, по-видимому, первое теоретическое обоснование широко используемой в нормативных документах по сейсмостойкому строительству инженерной теории жесткого защемления трубопровода в грунте для случая изгибных колебаний.

*Ключевые слова:* задача Похгаммера–Кри, внешняя задача, подземный трубопровод, изгибные колебания

**DOI:** 10.31857/S0572329922060083, **EDN:** KFYKWF

**1. Введение.** Теме изгибных колебаний протяженных подземных сооружений, в частности, трубопроводов посвящено значительно меньшее число работ, чем изучению продольных сейсмических движений таких сооружений в направлении их протяженности. На то существуют, по крайней мере, два объяснения ([1], гл. 9). Первое из них состоит в том, что при землетрясениях деформации в осевом направлении трубы, как правило, заметно превышают ее деформации от изгиба. Второе объяснение связано с многократно подтвержденным на практике наблюдением о примерно одинаковых поперечных колебаниях трубопроводов и грунта, за исключением случаев очень сильных землетрясений. Даже когда трубопроводы соединяются со смотровыми колодцами, то как трубопроводы, так и колодцы колеблются одинаково с грунтом. Последнее положение служит экспериментальным обоснованием простейшей инженерной теории “жесткого защемления” трубы в грунте (согласно которой движения грунта и трубопровода совпадают) для случая изгибных колебаний трубопровода. Считается, что названная теория дает верхнюю границу для сейсмических нагрузок, и

потому, она до сих пор широко используется в качестве расчетной базы в принятых нормах по сейсмостойкому строительству (см., например, [2]).

Более сложное взаимодействие трубопровода с грунтом при изгибных колебаниях описывается моделью “балки на упругом основании”. Достаточно полный обзор работ этого направления содержится в монографии О’Рурке [3].

Т. Рашидов и соавторы предложили модель взаимодействия с грунтом, в которой силы взаимодействия при изгибных колебаниях (так же, как и при продольных) считаются пропорциональными относительно перемещению, равному разности между перемещением грунта в сейсмической волне (вдали от трубопровода) и перемещением самого трубопровода. Описание метода и ссылки на предшествующие работы содержатся в монографии [4]. Дифференциальные уравнения изгибных колебаний выписываются в предположении, что изгибные колебания трубы и “грунтового стержня”, замещающего трубопровод, одинаковы, если совпадают их погонные массы. Такое предположение будет верным, если изгибная жесткость трубы совпадает с “изгибной жесткостью” грунтового стержня, что может реализоваться в весьма редких случаях.

Изгибные колебания протяженных подземных трубопроводов, рассматриваемых как тонкостенные цилиндрические оболочки изучались методом конечных элементов в работах [5, 6] (здесь же можно найти ссылки и на другие работы авторов по этому предмету). Однако в них динамика взаимодействия между трубопроводом и грунтом полностью игнорируется и считается, что сейсмические волны без искажения падают на оболочку.

Попытка решения задачи об изгибных колебаниях трубопровода под воздействием сейсмических волн, рассматривая совместные движения трубы и окружающего его упругого грунта, была предпринята К. Токи и Ш. Такада в статье [7], опубликованной в малоизвестном издании (“Бюлетене Института предупреждения катастроф” Киотского университета). Однако допущенные авторами ошибки не дают возможности считать, что задача для грунта решена и цель авторов достигнута.

Настоящая статья посвящена решению этой задачи (названной нами внешней задачей Похгаммера – Кри) и исследованию на основе этого решения изгибных сейсмических колебаний подземного трубопровода. В соответствующих местах ниже указано в чем состоят принципиальные упущения работы [7].

**2. Преобразование динамических уравнений Ламе в отдельные уравнения для объемного расширения и компонент вектора вращения в цилиндрических координатах.** Уравнения движения упругой среды в перемещениях (уравнения Ламе), записанные в векторной форме [8]

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) - \mu \text{rot}(\text{rot} \mathbf{u}) \quad (2.1)$$

справедливы в такой же форме не только в декартовой, но и в любой ортогональной криволинейной системе координат, если операторы grad, div и rot выписаны в этой системе.

В цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$ , в которой компоненты вектора перемещений  $\mathbf{u}$  частиц среды обозначены через  $u_r, u_\theta, u_z$ , векторное уравнение (2.1) записывается в виде системы уравнений (А. Ляв [9], гл. XII):

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial \theta} + 2\mu \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} - 2\mu \frac{\partial \omega_r}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\omega_\theta) + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta}$$

где

$$\Delta \equiv \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.3)$$

обозначает объемное расширение, а компоненты вектора вращения  $2\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$  задаются соотношениями

$$2\omega_r = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad 2\omega_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad 2\omega_z = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad (2.4)$$

При этом компоненты (2.4) удовлетворяют тождественно равенству  $\operatorname{div}(2\boldsymbol{\omega}) = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{u}) \equiv 0$ , т.е. равенству

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r\omega_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

Таким образом, только две компоненты вектора  $\boldsymbol{\omega}$  являются независимыми и, следовательно, компоненты вектора перемещений могут быть выражены через объемное расширение и любые две из компонент вектора вращения.

Векторное уравнение (2.1) или связанная система уравнений (2.2) могут быть приведены в цилиндрических координатах к частично разделенной системе отдельных уравнений для  $\Delta$  и компонент  $\omega_z$ ,  $\omega_r$ . После того как эти функции найдены, компонента вращения  $\omega_\theta$  может быть найдена (при необходимости) из тождества (2.5). Действительно, применяя сначала к уравнению (2.1) операцию  $\operatorname{div}$  и пользуясь известным из векторного анализа тождеством  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{a}) \equiv 0$  (для любого вектора  $\mathbf{a}$ ), получаем, что

$$\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \Delta) \equiv \nabla^2(\Delta) \quad (2.6)$$

где входящий в правую часть оператор Лапласа в цилиндрических координатах определен выражением

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.7)$$

Применим теперь к уравнению (2.1) операцию  $\operatorname{rot}$ . Тогда, пользуясь тождеством  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \mathbf{a}) \equiv 0$ , имеем

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = -\mu \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}) \quad (2.8)$$

Выпишем уравнение (2.8) для компоненты  $\omega_z$  в цилиндрических координатах, пользуясь определением ротора,

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} &= -\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega_r}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Выражая сумму двух последних слагаемых в правой части этого уравнения через  $\omega_z$  при помощи тождества (2.5) получаем окончательно отдельное волновое уравнение для этой компоненты

$$\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} = \nabla^2 \omega_z \quad (2.9)$$

в котором оператор Лапласа  $\nabla^2$  определен формулой (2.7).

Запишем теперь проекцию уравнения (2.8) на ось  $r$ , т.е. уравнение для компоненты  $\omega_r$ :

$$\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial t^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial (r\omega_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right)$$

Если из правой части этого уравнения исключить с помощью тождества (2.5) члены, содержащие  $\omega_\theta$ , приходим к уравнению

$$\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial (r\omega_r)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial z^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) упрощается введением новой неизвестной функции  $\Omega_r = r\omega_r$  и приводится к виду в котором часть, зависящая от  $\omega_r$ , сводится к волновому оператору

$$\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \Omega_r}{\partial t^2} = \nabla^2 \Omega_r + 2 \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \quad (2.11)$$

Таким образом, связанная система динамических уравнений Ламе (2.2) сведена к отдельным волновым уравнениям (2.6), (2.9) для объемного расширения  $\Delta$  и третьей компоненты вектора вращения  $\omega_z$  и к уравнению (2.10) или (2.11) для компоненты вращения  $\omega_r$ , содержащему еще и функцию  $\omega_z$ . Уравнение (2.11) может быть проинтегрировано как неоднородное волновое уравнение после того, как функция  $\omega_z$  определена из отдельного уравнения (2.9). Нахождение трех функций  $\Delta$ ,  $\omega_z$  и  $\omega_r$  достаточно для вычисления компонент вектора перемещений частиц среды, поскольку функция  $\omega_\theta$  может быть определена из тождества (2.5) при известных  $\omega_z$  и  $\omega_r$ .

Полученный выше результат хотя и является простым обобщением изложения, данного в трактате А. Лява (для случая, когда все упомянутые функции являются элементарными гармоническими функциями  $t$  и  $z$  и зависимость их от  $\theta$  дается простыми функциями  $\cos \theta$  или  $\sin \theta$ ), однако он, по-видимому, не был известен до сих пор в общем случае произвольной зависимости названных функций от всех переменных и может представлять интерес при решении нестационарных динамических задач теории упругости в цилиндрических координатах.

**3. Постановка и точное решение внешней задачи Похгаммера–Кри.** По аналогии с постановкой задачи об изгибных колебаниях упругого кругового цилиндра сформулируем задачу об изгибных колебаниях неограниченной упругой среды, занимающей пространство область, внешнюю по отношению к круговому цилиндру.

Первоисточниками по первой задаче (которую будем называть внутренней задачей) являются работы Похгаммера [10] (1876 г.) и Кри [11] (1886 г.). Предельно ясное решение внутренней задачи дано А. Лявом в его трактате по математической теории упругости [9]. Поэтому, отсылая за подробностями к трактату [9], ограничимся кратким изложением постановки внешней задачи, обращая, прежде всего, внимание на существенные отличия в этих постановках.

Чтобы прийти к стационарным изгибным колебаниям области, внешней по отношению к круговому цилиндру, рассмотрим, как и в случае кругового цилиндра [9], класс решений динамических уравнений теории упругости, выписанных в п. 2, в которых все компоненты вектора перемещений являются гармоническими функциями времени  $t$  и координаты  $z$  (измеряемой вдоль оси цилиндра), принимая, кроме того, что  $u_r$  и  $u_z$  пропорциональны  $\cos \theta$ , а  $u_\theta$  пропорционально  $\sin \theta$ , т.е.

$$u_r = U \cos \theta e^{i(\gamma z - pt)}, \quad u_\theta = V \sin \theta e^{i(\gamma z - pt)}, \quad u_z = W \cos \theta e^{i(\gamma z - pt)} \quad (3.1)$$

где  $U, V, W$  являются функциями  $r$ . Тогда, согласно формулам (2.3), (2.4), имеем

$$\Delta = \tilde{\Delta} \cos \theta e^{i(\gamma z - pt)} = \cos \theta e^{i(\gamma z - pt)} \left( \frac{dU}{dr} + \frac{U}{r} + \frac{V}{r} + i\gamma W \right) \quad (3.2)$$

$$2\omega_r = -\tilde{\omega}_r \sin \theta e^{i(\gamma z - pt)} = -\sin \theta e^{i(\gamma z - pt)} \left( i\gamma U - \frac{dW}{dr} \right)$$

$$2\omega_\theta = \tilde{\omega}_\theta \cos \theta e^{i(\gamma z - pt)} = \cos \theta e^{i(\gamma z - pt)} \left( \frac{W}{r} + i\gamma V \right)$$

$$2\omega_z = \tilde{\omega}_z \sin \theta e^{i(\gamma z - pt)} = \sin \theta e^{i(\gamma z - pt)} \left( \frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} + \frac{U}{r} \right)$$

и уравнения (2.6), (2.9), (2.10) (эквивалентные уравнениям Ламе в цилиндрических координатах) принимают вид:

$$\frac{d^2 \tilde{\Delta}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{\Delta}}{dr} - \left( \frac{1}{r^2} - h^2 \right) \tilde{\Delta} = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{d^2 \tilde{\omega}_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{\omega}_z}{dr} - \left( \frac{1}{r^2} - \kappa^2 \right) \tilde{\omega}_z = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{d^2 \Omega_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Omega_r}{dr} - \left( \frac{1}{r^2} - \kappa^2 \right) \Omega_r + \frac{2}{r} i\gamma \tilde{\omega}_z = 0, \quad \Omega_r \equiv r\tilde{\omega}_r \quad (3.5)$$

где

$$h^2 = \frac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu} - \gamma^2 = \left( \frac{p}{c_1} \right)^2 - \gamma^2, \quad \kappa^2 = \frac{\rho p^2}{\mu} - \gamma^2 = \left( \frac{p}{c_2} \right)^2 - \gamma^2 \quad (3.6)$$

В соотношениях (3.6)  $c_1$  и  $c_2$  есть скорости распространения продольных и поперечных волн в упругой среде. Предполагается, что правые части этих соотношений положительны, т.е. что фазовая скорость  $c = p/\gamma$  распространения возмущений (3.1) вдоль оси  $z$  больше скоростей  $c_1$  и  $c_2$  (это условие не оговорено А. Лявом [9], однако подразумевается выполненным). Такая ситуация реализуется, например, при падении наклонной волны на подземный трубопровод [12]. Если это не так, то возможен только случай, когда  $h^2 < 0$ , т.е.  $c_2 < c < c_1$ . Тогда решение уравнения (3.3) должно быть взято не в виде функции Ханкеля, как ниже, а в виде функции Бесселя от чисто мнимого аргумента (т.е. в виде модифицированной функции).

Уравнения (3.3), (3.4) являются уравнениями Бесселя, а (3.5) сводится к уравнению Бесселя после подстановки в него решения (3.4) для  $\tilde{\omega}_z$  и нахождения частного решения полученного таким образом неоднородного уравнения.

А. Лявом показано, что ограниченные на оси цилиндра  $r = 0$  решения уравнений (3.3)–(3.5) в виде бесселевых функций первого рода приводят к изгибным колебаниям кругового цилиндра.

При решении задачи о стационарных колебаниях в области, внешней по отношению к круговому цилиндру, требуется, для обеспечения единственности, искать решения уравнений (3.3)–(3.5), удовлетворяющие условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности (см., например, [8, 13])

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{d\tilde{\Delta}}{dr} - ih\tilde{\Delta} \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{d\tilde{\omega}_\beta}{dr} - i\kappa\tilde{\omega}_\beta \right) = 0 \quad (\beta = z, r) \quad (3.7)$$

Физически условия (3.7) означают, что для выделения единственных решений недостаточно требования убывания их при  $r \rightarrow \infty$  (все функции Бесселя, кроме модифицированных первого рода, исчезают на бесконечности), а необходимо, чтобы они образовывали волны, уходящие на бесконечность. Решения же уравнений (3.3)–(3.5) в виде функций Бесселя первого и второго рода (используемые во внутренней задаче) образуют стоячие волны и не удовлетворяют условиям (3.7), а из решений этих уравнений в виде функций Ханкеля, образующих бегущие волны, только функции первого рода  $H_1^{(1)}(hr)$  и  $H_1^{(1)}(\kappa r)$  образуют волны уходящие на бесконечность, при умножении на принятую выше для всех функций  $\Delta$ ,  $\omega_\beta$  экспоненциальную зависимость по времени в виде  $e^{-ipt}$  (формулы (3.2)). Последнее утверждение легко устанавливается с помощью известных асимптотических представлений функций Ханкеля для больших значений аргумента [14] (функции Ханкеля второго рода образуют волны, приходящие из бесконечности).

*Замечание 1.* Отметим, что если, как и в книге А. Лява, взять временную зависимость для функций в (3.2) в виде  $e^{+ipt}$ , то условия излучения (3.7) должны быть записаны со знаком плюс перед вторыми слагаемыми и решения уравнений (3.3)–(3.5), удовлетворяющие таким условиям, будут функции Ханкеля второго рода  $H_1^{(2)}(hr)$  и  $H_1^{(2)}(\kappa r)$ .

Учитывая сказанное, имеем решения уравнений (3.3) и (3.4), удовлетворяющие условиям излучения (3.7), в следующем виде:

$$\tilde{\Delta} = -\left(\frac{p}{c_1}\right)^2 AH_1^{(1)}(hr) \quad (3.8)$$

$$2\tilde{\omega}_z = \kappa^2 CH_1^{(1)}(\kappa r) \quad (3.9)$$

В этих решениях для удобства в дальнейших вычислениях произвольные константы  $A$  и  $C$  взяты с множителями  $(p/c_1)^2$  и  $\kappa^2$ .

Подставляя выражение (3.9) для  $\tilde{\omega}_z$  в уравнение (3.5) и интегрируя полученное таким образом неоднородное уравнение Бесселя, приходим к решению

$$2\tilde{\omega}_r = i\gamma C \frac{dH_1^{(1)}(\kappa r)}{dr} + iB \left(\frac{p}{c_2}\right)^2 \frac{H_1^{(1)}(\kappa r)}{r} \quad (3.10)$$

удовлетворяющему условию излучения (3.7).

Найденные значения для  $\tilde{\Delta}$ ,  $\tilde{\omega}_z$ ,  $\tilde{\omega}_r$  (формулы (3.8)–(3.10)) приводят к следующим соотношениям для перемещений

$$U = A \frac{dH_1^{(1)}(hr)}{dr} + B\gamma \frac{dH_1^{(1)}(\kappa r)}{dr} + C \frac{H_1^{(1)}(\kappa r)}{r} \quad (3.11)$$

$$V = -A \frac{H_1^{(1)}(hr)}{r} - B\gamma \frac{H_1^{(1)}(\kappa r)}{r} - C \frac{dH_1^{(1)}(\kappa r)}{dr}$$

$$W = i\gamma AH_1^{(1)}(hr) - iB\kappa^2 H_1^{(1)}(\kappa r)$$

Подставляя эти выражения в формулы (3.1), мы получим решения уравнений (2.2).

Решение внутренней задачи Похгаммера–Кри, аналогичное (3.11), вместо функций Ханкеля содержит функции Бесселя первого рода (и первого порядка) [9] и потому, в силу равенства  $J_1(0) = 0$ , на оси  $r = 0$  перемещение  $W$  (или  $u_z$ ) равно нулю. Поэтому точки цилиндра, лежащие на оси  $r = 0$  движутся в плоскости, перпендикулярной оси (совершают изгибные колебания). Причем это положение имеет место при произ-

вольных константах  $A$  и  $B$ , входящих в выражение для  $W$ . Но точки вне оси не остаются в процессе движения в перпендикулярной к оси цилиндра плоскости, т.е.  $W \neq 0$  при  $r \neq 0$ . Или, иначе, имеет место дилатация (нарушение закона плоских сечений). Однако, поскольку аргументы Бесселевых функций определены равенствами

$$hr = 2\pi \frac{r}{\Lambda} \sqrt{\left(\frac{c}{c_1}\right)^2 - 1}, \quad \kappa r = 2\pi \frac{r}{\Lambda} \sqrt{\left(\frac{c}{c_2}\right)^2 - 1}, \quad (3.12)$$

в которых  $\Lambda = 2\pi/\gamma$  есть длина волн (3.1), а  $c = p/\gamma$  фазовая скорость распространения их вдоль оси  $z$ , то  $W \approx 0$ , если  $a/\Lambda \ll 1$ . Следовательно, во внутренней задаче Похгаммера–Кри колебания цилиндра будут тем ближе к чисто изгибным, чем меньше радиус цилиндра в сравнении с длиной волны.

В решении рассматриваемой внешней задачи Похгаммера–Кри можно добиться равенства  $W = 0$  на поверхности цилиндра (полости)  $r = a$ , что, согласно решению (3.11), выполнено, если константы  $A$  и  $B$  связаны соотношением

$$B = A \frac{\gamma}{\kappa^2} \frac{H_1^{(1)}(ha)}{H_1^{(1)}(\kappa a)} \quad (3.13)$$

Однако (так же, как и в описанной выше ситуации во внутренней задаче Похгаммера–Кри) невозможно добиться, чтобы  $W = 0$  при всех  $r > a$ . Но, в силу непрерывности функций Ханкеля при любом конечном значении аргумента, будет выполнено приближенное равенство  $W \approx 0$ , если  $(r - a)/\Lambda \ll 1$ .

Следовательно, при выполнении соотношения (3.13), точки среды, находящиеся в окрестности цилиндрической поверхности малой по размеру в сравнении с длиной волны, будут при движениях, подчиняющихся законам (3.11), мало отклоняться от плоскости, перпендикулярной оси цилиндрической полости (т.е. будут совершать приближенно изгибные колебания).

Потребуем теперь, чтобы эти изгибные колебания происходили (приближенно) в одном каком-нибудь направлении, скажем, в направлении прямой, от которой отсчитывается угол  $\theta$ . Это направление примем за ось  $x$  декартовой системы координат  $(x, y, z)$ , вводимой здесь наряду с цилиндрической. Указанное требование выполнено, если точки поверхности цилиндра  $r = a$  движутся в направлении  $x$ , т.е. когда

$$V_y|_{r=a} = \cos \theta \sin \theta (U + V)|_{r=a} = 0 \quad (3.14)$$

Подставляя в условие (3.14) перемещения  $U$  и  $V$  из (3.11), получаем, что оно будет выполнено, если

$$C = A \frac{P(ha)}{Q(\kappa a)} + B\gamma = A \left[ \frac{P(ha)}{Q(\kappa a)} + \frac{\gamma^2}{\kappa^2} \frac{H_1^{(1)}(ha)}{H_1^{(1)}(\kappa a)} \right] \quad (3.15)$$

где обозначено

$$P(ha) = \frac{dH_1^{(1)}(ha)}{da} - \frac{H_1^{(1)}(ha)}{a}, \quad Q(\kappa a) = \frac{dH_1^{(1)}(\kappa a)}{d\kappa a} - \frac{H_1^{(1)}(\kappa a)}{a} \quad (3.16)$$

$$\frac{dH_1^{(1)}(qa)}{da} \equiv \frac{dH_1^{(1)}(qr)}{dr} \Big|_{r=a}, \quad q = (h, \kappa)$$

Таким образом, формулы (3.11), в которых константы  $B$  и  $C$  выражены соотношениями (3.13), (3.15) через единственную константу  $A$ , дают решение внешней задачи Похгаммера–Кри об изгибных колебаниях внешности кругового цилиндра. Неизвестная константа  $A$  определяется из дополнительного краевого условия на цилиндриче-

ской поверхности  $r = a$ . Так, в задаче о совместных изгибных колебаниях бесконечной упругой среды и трубопровода, таким условием служит условие непрерывности (равенства) перемещений трубы и точек среды, примыкающих к поверхности трубы, в направлении изгиба (т.е. в направлении оси  $x$ ).

Во внутренней задаче Похгаммера–Кри соотношение (3.14) так же, как и условие  $W = 0$ , выполнено при произвольных константах, входящих в выражения для перемещений, подобных (3.11). Однако, равенство (3.14) даже для точек, лежащих на оси  $r = 0$ , так же, как и во внешней задаче выполнено уже только приближенно, когда радиус цилиндра мал в сравнении с длиной волны (это обстоятельство не отмечено А. Лявом [9]).

Указанное выше различие, состоящее в том, что во внутренней задаче Похгаммера–Кри все три константы в выражениях для перемещений остаются неопределенными при изгибных колебаниях, связано с тем что в ней существуют собственные колебания только при определенных (собственных) частотах, выводимых из условий отсутствия напряжений на боковой поверхности цилиндра. В то время как во внешней задаче (с неограниченной областью) все частоты являются собственными.

*Замечание 2.* К. Токи и Ш. Такада утверждают в работе [7], что они нашли решение рассмотренной в настоящем пункте задачи, в котором во всех точках области (внешности кругового цилиндра) перемещения в направлении оси цилиндра равны нулю ( $W = 0$ ). Как показано выше такого решения не существует. Можно добиться только, чтобы названные перемещения были равны нулю на цилиндрической поверхности (при выполнении соотношения (3.13) между константами) и малости  $W$  в окрестности этой поверхности, размер (диаметр) которой мал в сравнении с длиной сейсмической волны (ситуация здесь вполне аналогична той, что возникает во внутренней задаче Похгаммера–Кри, как отмечено выше). Токи и Такада сразу выписывают свое решение в виде первых двух соотношений из (3.11), полагая в них  $B = 0$ . Такое предположение заметно упрощает последующие выкладки (нахождение оставшихся двух констант), однако полученные авторами результаты не дают решения внешней задачи Похгаммера–Кри, поскольку, как видно из третьего уравнения (3.11) перемещения  $W$  в их решении остаются произвольными.

**4. Вычисление поперечной силы при заданном поперечном перемещении границы полосты во внешней задаче Похгаммера–Кри.** Прежде всего установим, что при выполнении всех условий п. 3 и при одной, пока произвольной, константе  $A$  в решении внешней задачи Похгаммера–Кри, перемещения всех точек сечения  $z = \text{const}$  цилиндрической поверхности  $r = a$  в направлении оси  $x$ , т.е. в направлении изгиба, одинаковы (не зависят от угла  $\theta$ ). Действительно, поскольку, в силу принятых соотношений (3.1), перемещения вдоль осей  $r$  и  $\theta$  равны  $U_r = U \cos \theta$ ,  $V_\theta = V \sin \theta$ , то

$$U_x = U_r \cos \theta - V_\theta \sin \theta = U \cos^2 \theta - V \sin^2 \theta$$

Используя теперь в полученном выражении для  $U_x$  условие (3.14), получаем

$$U_x|_{r=a} = U|_{r=a} = -V|_{r=a} \quad (4.1)$$

Выражения (4.1) представляют собой одно условие, а не два, поскольку, в силу найденных выше зависимостей между  $A$ ,  $B$  и  $C$  ((3.13), (3.15)),  $U$  и  $-V$  совпадают при  $r = a$ .

Если в цилиндрическую полость помещены цилиндрический стержень или труба, то полученный результат (4.1) позволяет обеспечить условие прилипания, т.е. условие непрерывности перемещений среды и стержня на его поверхности. Отсюда и находится последняя неопределенная константа  $A$  в полученном в п. 3 решении. Действительно, пусть перемещение стержня/трубы в произвольном сечении в направлении оси  $x$  (в направлении изгиба) есть  $\mathcal{U}_1$  (или  $u_1 = \mathcal{U}_1 e^{i(\nu z - pt)}$ ). Следовательно, согласно (4.1) и (3.11),

$$u_1 = \left\{ A \frac{dH_1^{(1)}(hr)}{dr} + B\gamma \frac{dH_1^{(1)}(\chi r)}{dr} + C \frac{H_1^{(1)}(\chi r)}{r} \right\}_{r=a} \quad (4.2)$$

Записывая равенства (3.13) и (3.15) в виде  $B = m_1 A$ ,  $C = m_2 A$ , где обозначено

$$m_1 = \frac{\gamma H_1^{(1)}(ha)}{\chi^2 H_1^{(1)}(\chi a)}, \quad m_2 = \frac{P(ha)}{Q(\chi a)} + \frac{\gamma^2 H_1^{(1)}(ha)}{\chi^2 H_1^{(1)}(\chi a)} \quad (4.3)$$

получаем из (4.2) значение константы  $A$  через заданное перемещение  $u_1$  в направлении изгиба:

$$A = \frac{u_1}{\frac{dH_1^{(1)}(ha)}{da} + \gamma m_1 \frac{dH_1^{(1)}(\chi a)}{da} + m_2 \frac{H_1^{(1)}(\chi a)}{a}} \quad (4.4)$$

Вычислением константы  $A$  по формуле (4.4) завершается окончательное решение внешней задачи Похгаммера–Кри, сформулированной в п. 3. Радиальные и тангенциальные перемещения точек среды в этом решении принимают, в соответствии с представлениями (3.1), вид

$$u_r = A \left[ \frac{dH_1^{(1)}(hr)}{dr} + \gamma m_1 \frac{dH_1^{(1)}(\chi r)}{dr} + m_2 \frac{H_1^{(1)}(\chi r)}{r} \right] \cos \theta e^{i(\gamma z - pt)} \quad (4.5)$$

$$u_\theta = -A \left[ \frac{H_1^{(1)}(hr)}{r} - \gamma m_1 \frac{H_1^{(1)}(\chi r)}{r} - m_2 \frac{dH_1^{(1)}(\chi r)}{dr} \right] \sin \theta e^{i(\gamma z - pt)}$$

В формулах (4.5) величины  $m_1$ ,  $m_2$  и  $A$  определены выражениями (4.3) и (4.4).

Легко установить, что сила, действующая стержень или трубопровод при перемещении его в направлении оси  $x$ , дается равенством (напомним, что угол  $\theta$  отсчитывается против часовой стрелки от этой оси)

$$\mathcal{F} = - \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) \Big|_{r=a} a d\theta \quad (4.6)$$

Здесь  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{r\theta}$  представляют собой физические компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат; они выражаются через физические компоненты тензора малых деформаций так же, как компоненты тензора напряжений выражаются через компоненты тензора деформаций в декартовой системе координат (однако, при записи закона Гука в компонентах тензоров напряжений и деформаций в цилиндрической системе координат, как и в любой криволинейной ортогональной системе, необходимо в шаровой части единичный тензор Кронекера заменить на метрический тензор системы координат, на что, иногда, ошибочно не обращается внимания [15]).

При вычлении физических компонент напряжений по закону Гука используем полученное выше выражение для объемного расширения (3.8). Кроме того, при вычислении физических компонент деформаций по известным формулам [16]

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}$$

в них, а значит, и в соответствующие физические компоненты напряжений войдут вторые производные функций Ханкеля. Исключим вторые производные функций Ханкеля в этих выражениях, пользуясь тем, что функции Ханкеля удовлетворяют соответствующим уравнениям Бесселя. Далее, первые производные функций Ханкеля

первого порядка исключим пользуясь известной формулой ([17], ч. III, формула (3.1.1)):

$$\frac{\partial H_1^{(1)}(\xi)}{\partial \xi} = H_0^{(1)}(\xi) - \frac{H_1^{(1)}(\xi)}{\xi} \quad (4.7)$$

Упрощенные таким образом выражения для физических компонент напряжений приводятся после простых, но несколько длинных выкладок, к следующему виду

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = A \cos \theta & \left\{ \left[ -\lambda \left( \frac{p}{c_1} \right)^2 - 2\mu h^2 + \frac{4\mu}{r^2} \right] H_1^{(1)}(hr) - \frac{2\mu}{r} h H_0^{(1)}(hr) + \right. \\ & \left. + 2\mu \left[ \gamma m_1 \left( \frac{2}{r^2} - \kappa^2 \right) - \frac{2m_2}{r^2} \right] H_1^{(1)}(\kappa r) + \frac{2\mu}{r} (-\gamma m_1 + m_2) \kappa H_0^{(1)}(\kappa r) \right\} \equiv g_1(r) \cos \theta \\ \sigma_{r\theta} = -A \mu \sin \theta & \left\{ -\frac{4}{r^2} H_1^{(1)}(hr) + \frac{2}{r} h H_0^{(1)}(hr) + \left( \frac{-4\gamma m_1 + 4m_2}{r^2} - m_2 \kappa^2 \right) H_1^{(1)}(\kappa r) + \right. \\ & \left. + \frac{2}{r} (\gamma m_1 - m_2) \kappa H_0^{(1)}(\kappa r) \right\} \equiv g_2(r) \sin \theta \end{aligned} \quad (4.8)$$

Подставляя найденные напряжения (4.8) в формулу (4.6), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -ag_1(a) \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + ag_2(a) \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \\ &= Aa\pi \left\{ \left[ \lambda \left( \frac{p}{c_1} \right)^2 + 2\mu h^2 \right] H_1^{(1)}(ha) + \mu (2\gamma m_1 + m_2) \kappa^2 H_1^{(1)}(\kappa a) \right\} \end{aligned}$$

Следовательно, принимая во внимание значение константы  $A$  из (4.4), имеем для погонной силы (силы, действующей на поверхности элемента трубы единичной длины) окончательный результат

$$\mathcal{F} = \pi \rho c_2^2 f \mathcal{U}_1 \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned} f &= \left\{ \left[ \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^2 - 2 \right] \left( \frac{ap}{c_1} \right)^2 + 2\bar{h}^2 \right] H_1^{(1)}(\bar{h}) + (2\gamma m_1 + m_2) \bar{\kappa}^2 H_1^{(1)}(\bar{\kappa}) \right\} \times \frac{1}{\mathcal{L}} \\ \mathcal{L} &= \bar{h} H_0^{(1)}(\bar{h}) - H_1^{(1)}(\bar{h}) + \gamma m_1 \bar{\kappa} H_0^{(1)}(\bar{\kappa}) + (-\gamma m_1 + m_2) H_1^{(1)}(\bar{\kappa}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

В формулах (4.10) введены безразмерные параметры  $\bar{h} \equiv ha$ ,  $\bar{\kappa} \equiv \kappa a$ , а безразмерная величина  $\mathcal{L}$  есть умноженный на  $a$  знаменатель правой части соотношения (4.4) для коэффициента  $A$ , после исключения из него производных функций Ханкеля по формуле (4.7).

**5. Изгибные колебания трубопровода в неограниченной упругой среде при воздействии сейсмических волн.** Пусть цилиндрическую полость в рассмотренной в предыдущих пунктах задаче занимает трубопровод круглого сечения (с внешним радиусом  $a$  и внутренним радиусом  $b$ ). И пусть поперечные колебания трубопровода совершаются из-за воздействия на него сейсмической волны

$$u_0 = \mathcal{U}_0 e^{i(\gamma z - pt)} \quad (5.1)$$

в которой перемещения частиц направлены в направлении оси  $x$ .

Обозначим возникающие при падении волны (5.1) поперечные перемещения трубопровода в направлении оси  $x$  через  $\hat{u} = \hat{u}e^{i(\gamma z - pt)}$ . Получаемая при этом задача для грунта (среды) отличается от рассмотренной выше тем, что ее решение на бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ) должно стремиться к волне (5.1). Поскольку не существует функций Бесселя, принимающих конечные значения на бесконечности (они либо стремятся к нулю, либо не ограничены), представим  $\hat{u}$  в виде

$$\hat{u} = u_0 + u = (u_0 + u)e^{i(\gamma z - pt)} \quad (5.2)$$

Тогда  $u$  должно исчезать на бесконечности и задача ее нахождения совпадает с внешней задачей Похгаммера–Кри, рассмотренной в пп. 3,4. Только при записи условия прилипания на поверхности трубы (при нахождении константы  $A$ ) и в выражении (4.9) для силы, действующей на трубопровод, необходимо в п. 4 положить  $u_1 = u = -u_0 + \hat{u}$ .

Следовательно, сила, действующая на трубопровод в задаче для  $u$ , согласно (4.9), равна

$$\hat{\mathcal{F}} = \pi \rho c_2^2 f (-u_0 + \hat{u}), \quad \hat{\mathcal{F}} e^{i(\gamma z - pt)} = \pi \rho c_2^2 f (-u_0 + \hat{u}) \quad (5.3)$$

где множитель  $f$  определен теми же формулами (4.10).

Эта же сила (5.2) действует на трубопровод и в полной задаче (для  $\hat{u}$ ), поскольку если бы трубопровод двигался по закону падающей волны (5.1), то никаких сил на него со стороны грунта не действовало бы. Ситуация здесь аналогична той, что возникает в хорошо изученной задаче о продольных колебаниях трубопровода под воздействием сейсмических волн. В обоих случаях сила, действующая на трубопровод со стороны упругого грунта, пропорциональна относительному перемещению трубы (или, вернее, “глобальному” относительному перемещению, под которым понимается разность между перемещениями частиц грунта в сейсмической волне вдали от трубопровода и перемещениями самого трубопровода).

Уравнение поперечных (изгибных) колебаний трубопровода составляется как обычно (см., например, [18]), рассматривая динамическое равновесие дифференциального (малого) элемента трубы между произвольными сечениями  $z$  и  $z + dz$ . Это уравнение, выражающее равновесие суммы перерезывающих сил, действующих в сечениях  $z$  и  $z + dz$ , силы инерции и распределенной поперечной силы (5.3), записывается следующим образом:

$$EI \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial z^4} + S \rho' \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = \pi \rho c_2^2 f (-u_0 + \hat{u}) \quad (5.4)$$

Здесь  $\rho'$  и  $E$  соответственно плотность и модуль Юнга материала трубопровода,  $S = \pi(a^2 - b^2)$  площадь его поперечного сечения, а  $I$  – момент инерции сечения трубы относительно нейтрального (не деформированного) диаметра, расположенного в данном случае вдоль оси  $y$ , так что  $I = I_y$  ( $I$  равен моменту инерции сечения относительно оси  $y$ ).

Подставляя в уравнение (5.4) выражения для перемещений (5.1), (5.2), получаем для безразмерной амплитуды изгибных колебаний трубопровода (амплитуды, отнесенной к амплитуде падающей сейсмической волны) соотношение

$$\frac{\hat{u}}{u_0} = \frac{\frac{\rho c_2^2 f}{\rho'(a^2 - b^2)p^2}}{-\frac{EI\gamma^4}{\rho'\pi(a^2 - b^2)p^2} + 1 + \frac{\rho c_2^2 f}{\rho'(a^2 - b^2)p^2}} \quad (5.5)$$

в котором значение  $f$  определено выражениями (4.10).

Тот же результат можно получить составляя уравнение относительного движения трубопровода (движения относительно среды, возмущенной падающей волной), путем введения функции  $v = \hat{u} - u_0$ . Такой путь принят в упомянутой выше работе К. Токи и Ш. Такады [7]. Однако полученное ими уравнение содержит неточность так же, как и уравнение для относительных продольных колебаний, приведенное там же [19]. Эта неточность связана с тем, что переносное движение, представляемое падающей волной (5.1), не является движением грунта как абсолютно твердого тела и потому в уравнении относительного движения трубопровода необходимо учесть не только силу инерции переносного движения, но и член, содержащий четвертую производную  $u_0$  по  $z$ .

**6. Анализ решения и выводы.** Изучим поведение полученного решения (5.5) в наиболее естественном для сейсмической задачи случае, когда длина сейсмической волны значительно (на порядок или несколько порядков) превосходит радиус трубопровода. Для этого используем известные (см., например, [20]) представления функций Ханкеля

$$H_0^{(1)}(w) \sim -i \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{w}, \quad H_1^{(1)}(w) \sim -i \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{w} \right)$$

для малых значений аргумента (в нашем случае эти аргументы, определяемые равенствами (3.12), являются действительными и положительными). Тогда верны следующие асимптотические представления для параметров и функций, входящих в решение (5.5), при  $a/\Lambda \ll 1$ :

$$\gamma m_1 \sim 1 / \left( \sqrt{\left( \frac{c}{c_1} \right)^2 - 1} \sqrt{\left( \frac{c}{c_2} \right)^2 - 1} \right) \quad (6.1)$$

$$m_2 \sim \sqrt{\left( \frac{c}{c_2} \right)^2 - 1} / \sqrt{\left( \frac{c}{c_1} \right)^2 - 1} + \left( \sqrt{\left( \frac{c}{c_1} \right)^2 - 1} \sqrt{\left( \frac{c}{c_2} \right)^2 - 1} \right)^{-1}$$

$$f \sim 4 \left( \frac{c}{c_2} \right)^2 \left[ 2 \ln \left( \frac{\Lambda}{\pi a} \right) - \ln \left( \sqrt{\left( \frac{c}{c_1} \right)^2 - 1} \sqrt{\left( \frac{c}{c_2} \right)^2 - 1} \right) \right]^{-1}$$

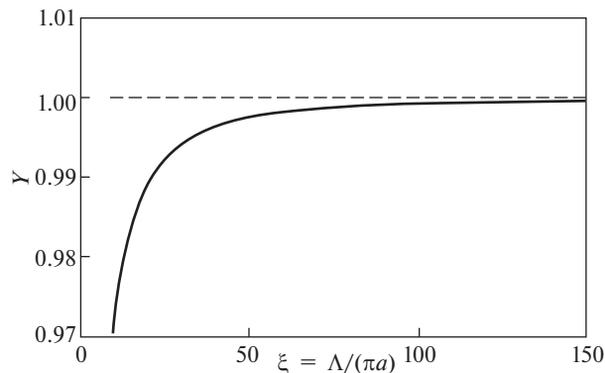
Обозначая через  $c_0 = \sqrt{E/\rho'}$  стержневую скорость распространения волн в трубе и имея ввиду, что момент инерции его кольцевого поперечного сечения относительно диаметра  $I = \pi(a^4 - b^4)/4$ , получаем при помощи соотношений (6.1) окончательное выражение для безразмерной (относительной) амплитуды изгибных колебаний трубопровода

$$Y \equiv \frac{\hat{u}}{u_0} = \frac{G(\xi)}{-(c_0/c)^2 [1 + (b/a)^2] \xi^{-2} + 1 + G(\xi)} \quad (6.2)$$

где

$$G(\xi) \equiv \left( \frac{\rho}{\rho'} \right) \frac{\xi^2}{[1 - (b/a)^2] \left( 2 \ln \xi - \ln \sqrt{\left( \frac{c}{c_1} \right)^2 - 1} \sqrt{\left( \frac{c}{c_2} \right)^2 - 1} \right)}, \quad \xi \equiv \frac{\Lambda}{\pi a} \quad (6.3)$$

Отметим, что теми же соотношениями (6.2), (6.3) определяются амплитуды (а значит, максимальные значения) изгибающего момента  $M = -EI \partial^2 \hat{u} / \partial z^2$  и перерезываю-



**Рис. 1.** Графики относительных амплитуд изгибных колебаний трубопровода в зависимости от относительной длины падающей волны: сплошная линия соответствует решению (6.2), а штриховая — результату теории жесткого защемления.

щей силы  $Q = \partial M / \partial z$ , отнесенные к соответствующим значениям, которые они имели бы, если бы движение трубопровода происходило по закону падающей волны (5.1).

На рис. 1 приведен график относительной амплитуды  $Y$  в функции от аргумента  $\xi$  (отношения длины сейсмической волны к примерно полутора диаметрам трубы) для железного трубопровода, когда окружающий его грунт является сухой глиной. При построении графика приняты следующие численные значения параметров:  $b/a = 0.9$ ,  $\rho \approx 1.64 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho' \approx 7.87 \text{ г/см}^3$ ,  $c_1 = 2.0 \times 10^3 \text{ м/с}$ ,  $c_2 = 0.4 \times 10^3 \text{ м/с}$ ,  $c = 2.4 \times 10^3 \text{ м/с}$ ,  $c_0 = 5.17 \times 10^3 \text{ м/с}$  (числовые значения для глины взяты из справочника [21]).

Интервал изменения аргумента  $\xi$  принят от 10 и выше, что охватывает практически весь имеющий интерес интервал изменения этого аргумента в сейсмической задаче. Дело в том, что при длинах волн сравнимых и, тем более, меньших диаметра трубопровода его движение не может описываться уравнением изгибных колебаний стержня.

Главный вывод, следующий из рассмотренного примера, а также и из общей формулы (5.5), состоит в том, что амплитуды поперечных перемещений трубопровода (а также амплитуды моментов и перерезывающих сил) не превышают амплитуд, вычисленных на основе простейшей инженерной теории, в которой поперечные перемещения считаются совпадающими с перемещениями в сейсмической волне (на рис. 1 решение этой теории изображено линией). Тем самым, полученный результат дает, по видимому, первое теоретическое обоснование и оценку точности инженерной теории “жесткого защемления” подземного трубопровода в грунте для случая его изгибных колебаний.

Отметим, что полученный К. Токи и Ш. Такада результат в [7] не может считаться достоверным из-за неверного решения внешней задачи Похгаммера–Кри и пропущенного члена в уравнении относительного движения трубопровода. Авторы также не обратили внимания на то, что в их решении амплитуда колебаний трубопровода всегда больше амплитуды падающей сейсмической волны, что физически никак не обосновано.

В знаменателе формулы (5.5) первый член пропорционален квадрату отношения радиуса трубы к длине сейсмической волны  $((a/\Lambda)^2)$ , а третий член — обратной величине  $(\Lambda/a)^2$ . Поэтому влияние жесткости трубопровода на изгиб будет сказываться в

случае сравнительно коротких сейсмических волн, в случае же длинных волн трубопровод будет следовать колебаниям грунта в сейсмической волне.

**Благодарности.** Результаты работы доложены на семинаре “Прочность и разрушение материалов и конструкций” в Институте проблем механики РАН. Автор выражает благодарность руководителю семинара профессору Е.И. Шифрину и участникам семинара за обсуждение результатов и полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-08-00024.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Окамото Ш.* Сейсмостойкость инженерных сооружений. М.: Стройиздат, 1980. 272 с.
2. Нормы проектирования атомных станций: НП 031–01. Приложение 6. Основные положения расчета линейно-протяженных конструкций. Москва, 2001. С. 23–25.
3. *O'Rourke M.J., Liu X.* Response of buried pipelines subject to earthquake effects. Buffalo: Univ. of Buffalo, 1999. 250 p.
4. *Рашидов Т.* Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. Ташкент: Изд-во “ФАН”, 1973. 180 с.
5. *Kouretzis G.P., Bouckovalas G.D., Gantes C.J.* 3-D shell analysis of cylindrical underground structures under seismic shear (S) wave action // Soil Dyn. Earthquake Eng. 2006. V. 26. P. 909–921. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2006.02.002>
6. *Kouretzis G.P., Bouckovalas G.D., Karamitros D.K.* Seismic verification of long cylindrical underground structures considering Rayleigh wave effects // Tunneling Underground Space Technol. 2011. V. 26. P. 789–794. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2011.05.001>
7. *Toki T., Takada S.* Earthquake response of underground tubular structure // Bull. Disaster Prevention Res. Inst. Kyoto Univ. 1974. V. 24. Pt. 2. № 221. P. 107–125.
8. *Исраилов М.Ш.* Динамическая теория упругости и дифракция волн. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1992, 206 с.
9. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 674 с.
10. *Pochhammer L.* Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder // J. Reine Angew. Math. 1876. V. 81. P. 324–336.
11. *Chree C.* Longitudinal vibrations of a circular bar // Quart. J. Pure Appl. Math. 1886. V. XXI. P. 287–298.
12. *Исраилов М.Ш.* Действие наклонной сейсмической волны на подземный трубопровод // Известия РАН. МТТ. 2022. № 5. С. 58–69.
13. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / Под ред. *В.Д. Купрадзе*. М.: Наука, 1976. 664 с.
14. *Bell W.W.* Special functions for scientists and engineers. London: Van Nostrand, 1968. 248 p.
15. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
16. *Eringen A.C.* Mechanics of continua. N. Y.: Wiley, 1967. 592 p.
17. *Magnus W., Oberhettinger F., Soni R.P.* Formulas and theorems of the special functions of mathematical physics. 3-d ed. N. Y.: Springer, 1966. 508 p.
18. *Miklowitz J.* The theory of elastic waves and waveguides. Amsterdam: North-Holland Publ., 1978. 618 p.
19. *Исраилов М.Ш.* Связанные сейсмические колебания трубопровода в бесконечной упругой среде // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 1. С. 57–66.
20. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.: ГИТТЛ, 1963. 380 с.
21. *Берч Ф., Шерер Дж., Снайсер Г.* Справочник для геологов по физическим константам. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 304 с.

УДК 517.54:532.031

## ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАГЛУБЛЕННОГО НАЧАЛЬНОГО ИМПУЛЬСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ГИДРОГЕОФИЗИЧЕСКИЙ МАССИВ

© 2023 г. К. Н. Анахаев<sup>a,b,\*</sup>, В. В. Беликов<sup>b,\*\*</sup>

<sup>a</sup>Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра  
Российской академии наук (ИПМА КБНЦ РАН), Нальчик, Россия

<sup>b</sup>Институт водных проблем Российской академии наук (ИВП РАН), Москва, Россия

\*e-mail: anaha13@mail.ru

\*\*e-mail: belvv@bk.ru

Поступила в редакцию 27.10.2021 г.

После доработки 10.12.2021 г.

Принята к публикации 20.12.2021 г.

В работе рассматривается потенциальная задача заглубленного импульсного воздействия в начальный момент времени на гидрогеофизический массив, что может иметь место при подземных (подводных) взрывах, извержениях вулканов, сейсмах и т.д. Воздействие очага импульса моделировалось источником округленной формы с единичным напором, а область стока – линией нулевого потенциала. Получено строгое гидромеханическое решение задачи с установлением аналитической взаимосвязи между физической областью течения и комплексным потенциалом на основе теории функции комплексного переменного – использования метода последовательных конформных отображений с определением всех необходимых характеристик потока. Приведены примеры расчета для частных случаев с построением криволинейных ортогональных гидродинамических сеток, очертаний семейств линий равных напоров и линий токов, профилей источников импульса, а также эпюры скоростей, напоров и расходов потенциального потока.

*Ключевые слова:* потенциальный поток, импульсное воздействие, конформные отображения, комплексный потенциал, комплексная область, эллиптические функции, линии токов, линии равных напоров

DOI: 10.31857/S0572329922060022, EDN: KFXN1J

**Введение.** Импульсные воздействия на гидрогеофизические массивы могут иметь естественное (падения астероидов, извержения вулканов, сейсмические воздействия и т.д.) и искусственное (надземные, подземные и подводные взрывы) происхождения. Во многих случаях они сопровождаются крупномасштабными динамическими изменениями окружающей природной среды с возникновением цунами, наводнений, оползней и обвалов береговых склонов [1–5] и, нередко, оказывают значительные негативно-разрушающие воздействия на населенные пункты, селитебные территории, объекты экономики, представляя значительную угрозу для безопасности жизнедеятельности людей. При научных исследованиях указанных воздействий с оценкой их мощности и прогнозом возможных последствий наиболее широкое применение получила гидродинамическая модель тяжелой идеальной жидкости [3, 5, 6]. В частности, в работах [6, 7] рассматриваются случаи падения (ударов) высокоскоростных (до 15–50 км/с) астероидов на земную и водную поверхности с проникновениями, соответственно, в грунтовую толщу и до дна водной акватории.

Особенности развития во времени подводного импульса (взрыва) рассматривается в работе [3, с. 279–281], где указано также на наличие гидродинамического парадокса – при увеличении глубины расположения источника импульса (в определенном интервале) не происходит снижение силы импульсного воздействия, то есть пробивная сила ударной волны остается постоянной. Задача о распределении импульсных давлений по ряду плавающих тел в покоящейся жидкости при ударном воздействии на одного из них в момент времени, непосредственно следующий за ударом, изложена в [6, с. 259].

Импульсные (взрывные) методы воздействия на гидрогеофизические массивы могут быть использованы также при создании искусственных островов и оградительных дамб (преимущественно в относительно мелкой воде) путем комбинированных разновременных взрывов, при которых первые (вспомогательные заряды) удаляют слой воды, а вторые (наклонные заряды с двух сторон) набрасывают (сгребают) грунт дна водоема в тело насыпи [8, с. 8].

В работе [9, с. 77] рассматривается задача о распределении давления в безграничной несжимаемой жидкости от воздействия подводного импульсного источника (взрыва мины) в начальный (весьма малый) промежуток времени в гидромеханической постановке как плоская задача осесимметричного потенциального потока без учета наличия водной поверхности.

**1. Постановка задачи.** В работе начальное импульсное воздействие заглубленного источника округленного профиля на гидрогеофизический массив (водный, грунтовый) рассматривается в плоской постановке как задача гидромеханического моделирования потенциального потока [1, 2, 6, 10], принимая контур источника импульса за полный (единичный) потенциал, а горизонтальную поверхность массива (линию стока) – за линию нулевого потенциала (рис. 1).

**2. Метод и построение решения.** Задача решается на основе теории функции комплексного переменного с использованием метода последовательных конформных отображений, отличительной особенностью от [1, 3, 6] которой является аналитическое определение в элементарных функциях характеристик потенциального потока в первоначальный момент времени импульсного воздействия.

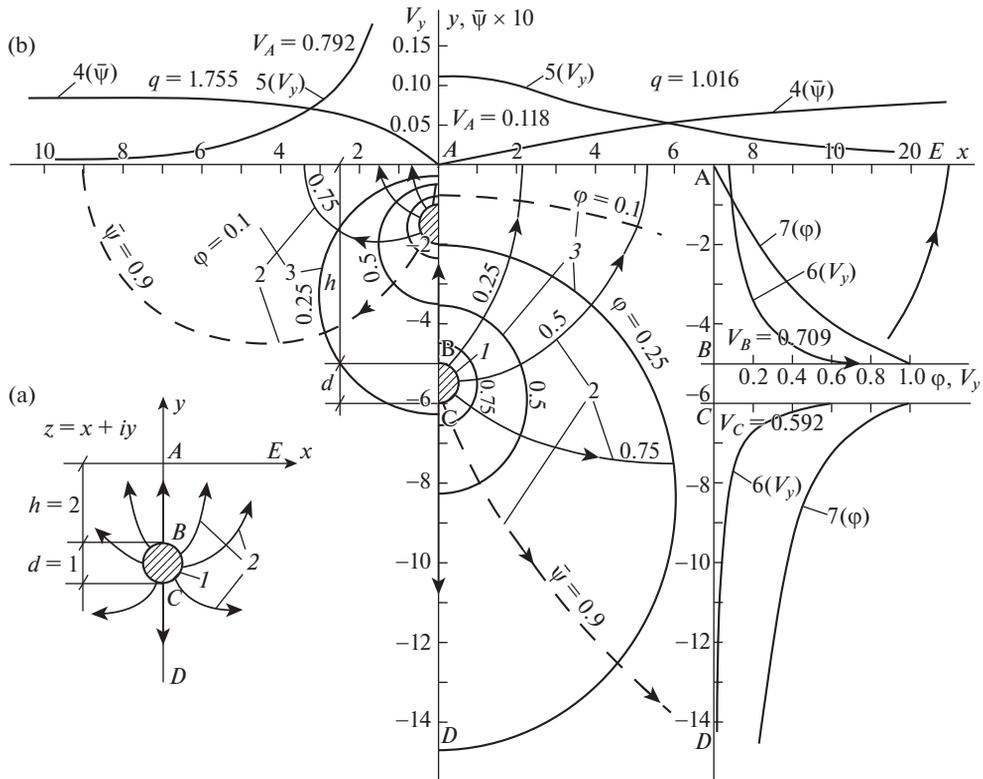
В силу симметрии физической области течения  $z = x + iy$  (рис. 1, а) в качестве расчетной схемы принята правая ее половина  $ABCDE$  (рис. 2, а), представленная в IV квадранте источником импульса округленного профиля (размером  $d$  по вертикальной оси), заглубленным в гидрогеофизический массив на величину  $h$ . Решение задачи отыскивается на основе аналитической однозначной взаимосвязи между указанной областью физической течения  $z = x + iy$  (рис. 1, 2, а) и областью комплексного потенциала  $W = \varphi + i\psi$ , геометрический образ которого для принятой расчетной схемы представлен прямоугольником  $ABCD(E)$  с точкой  $A$  в центре координат  $\varphi A \psi$  (рис. 2, и), где  $\varphi$  и  $\psi$  – напорная (потенциальная) функция и функция тока. В указанном прямоугольнике линии равного напора  $BC$  и  $AE$  соответствуют значениям потенциала, равным напорам – единичному  $\varphi = H = 1$  (в усл. ед.) и нулевому  $\varphi = 0$ , а линии тока  $BA$  и  $CD$  – значениям функции тока нулевого ( $\psi = 0$ ) и полного (для правой половины области течения  $\psi = q$ ) расходов.

При этом имеем следующие граничные условия (рис. 1, 2):

– по линиям осевой симметрии (непроницаемые границы)  $BA$  и  $CD$  функция тока  $\psi$  равна, соответственно, нулевому  $\psi = 0$  и полному расходу  $\psi = q$ ;

– вдоль очертания импульсного источника  $BC$  и линии поверхности стока  $AE$  функции тока  $\psi$  растут от нулевого значения  $\psi = 0$  до полного расхода  $\psi = q$ ;

– напорная (потенциальная) функция  $\varphi$  на линии контура источника импульса  $BC$  равна полному (единичному) напору  $H$  ( $\varphi = H = 1$ ), а на выходном участке стока  $AE$  – нулевому значению  $\varphi = 0$ .



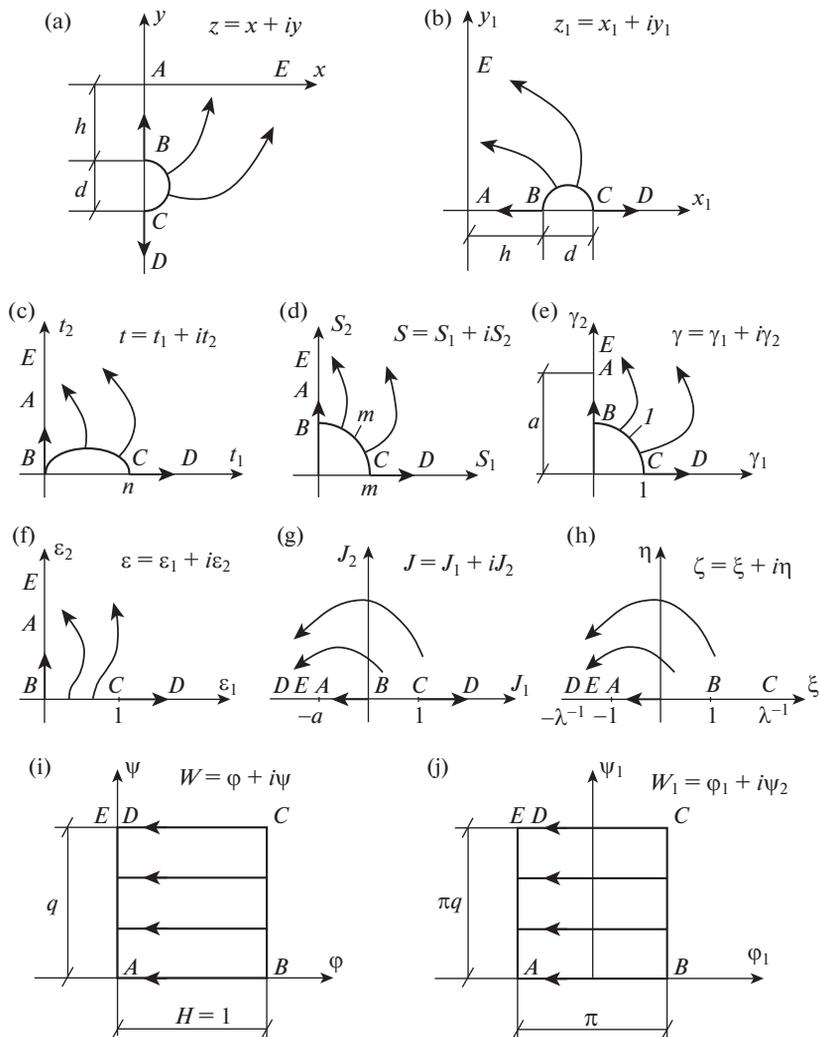
**Рис. 1.** Расчетные характеристики поля потенциального потока при заглубленном начальном импульсном воздействии: а) общий симметричный характер потенциального потока; б) криволинейные ортогональные гидродинамические сетки потока при  $h/d = 5$  (правая половина) и  $h/d = 1$  (левая половина); 1 – очертания профилей импульсного источника  $BC$ ; 2 – очертания семейства кривых функции тока (относительных расходов  $\bar{\Psi}$ ) – через 0.25; 3 – очертания семейства кривых линий равных напоров (потенциальной функции  $\varphi$ ) – через 0.25; 4 – эпюры расходов (функции тока  $\bar{\Psi}$ ) вдоль границ стока; 5 – эпюры выходных скоростей потока  $V_y = V_{out}$  вдоль границ стока; 6 и 7 – соответственно, эпюры действующих вертикальных скоростей  $V_y$  и напоров  $\varphi$  вдоль осевой линии области течения.

Аналитическая взаимосвязь между комплексными областями физического течения  $z = x + iy$  (рис. 2, а) и комплексного потенциала  $W = \varphi + i\psi$  (рис. 2, и) устанавливается путем их последовательного конформного отображения на единую связующую полуплоскость  $\zeta = \xi + i\eta$  (рис. 2, h) [10–12]. При этом для конформного отображения области  $z = x + iy$  на полуплоскость  $\zeta = \xi + i\eta$  используются промежуточные комплексные области  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $t = t_1 + it_2$ ,  $S = S_1 + iS_2$ ,  $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ ,  $J = J_1 + iJ_2$  (рис. 2, б, с, d, е, f, g) с помощью функции [10–14]:

$$z = -iz_1, \quad t = \sqrt{z_1^2 - h^2}, \quad S = \sqrt{t^2 - m^2}, \quad \gamma = \frac{S}{m}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{\gamma} \right), \quad J = \varepsilon^2 \quad (2.1)$$

в которых

$$m = \sqrt{d(h + 0.5d)} \quad (2.2)$$



**Рис. 2.** Схема последовательных конформных отображений, устанавливающая аналитическую взаимосвязь областей физического течения  $z = x + iy$  и комплексного потенциала  $W = \varphi + i\psi$  (прямоугольника).

С другой стороны, необходимо также конформно отобразить на полуплоскость  $\zeta = \xi + i\eta$  область комплексного потенциала  $W = \varphi + i\psi$ , имеющего вид прямоугольника шириной  $H = 1$  и длиной равной  $q$  (рис. 2, i), для точного отображения которого на полуплоскость требуется использование эллиптического синуса Якоби [10–15]. Однако, возникающие при этом математические сложности (в том числе при последующих преобразованиях эллиптических функций Якоби [15, 16]), затрудняют получение итоговых аналитических выражений в элементарных функциях для непосредственного определения гидромеханических характеристик потока в начальный момент импульсного воздействия, что имеет важное значение как для теоретического анализа, так и решения прикладных задач.

Для преодоления изложенных математических трудностей ниже приводится новая методика конформного отображения области комплексного потенциала  $W = \varphi + i\psi$ , представленного в виде прямоугольника, на полуплоскость  $\zeta = \xi + i\eta$  [10, 17, 18]. При этом используется промежуточная комплексная область  $W_1 = \varphi_1 + i\psi_1$  – прямоугольник шириной  $\pi$  с осевым расположением мнимой оси  $O\varphi_1$  (рис. 2, j), определяемая зависимостью (при  $H = 1$ )

$$W_1 = \pi(W - 0.5) \quad (2.3)$$

который (при “удлиненном” прямоугольнике  $q/H \geq 1$ ) отображается на полуплоскость  $\zeta = \xi + i\eta$  элементарными алгебраическими соотношениями (с погрешностью  $\ll 1\%$ ) [17, 18]:

$$\zeta = \frac{2}{\lambda R} \cdot \frac{\sin W_1}{1 + \frac{\sin^2 W_1}{R^2}}, \quad R = \operatorname{ch}(\pi q), \quad \lambda = \frac{2R}{1 + R^2} \quad (2.4)$$

При этом комплексные области  $J = J_1 + iJ_2$  (рис. 2, g) и  $\zeta = \xi + i\eta$  (рис. 2, h) связываются между собой по соответствию трех точек:  $A$  ( $J_A = -a$ ,  $\zeta_A = -1$ ),  $B$  ( $J_B = 0$ ,  $\zeta_B = 1$ ) и  $D$  ( $J_D = -\infty$ ,  $\zeta_D = -1/\lambda$ ) зависимостями:

$$J = J_1 + iJ_2 = \frac{a(\zeta - 1)(1 - \lambda)}{2(\lambda\zeta + 1)}, \quad \zeta = \xi + i\eta = -\frac{2J + a(1 - \lambda)}{2J\lambda - a(1 - \lambda)} \quad (2.5)$$

где  $a$  – модуль точки  $A$  в комплексной области  $J = J_1 + iJ_2$  (рис. 2, g), определяемый из последовательных отображений областей  $z \rightarrow z_1 \rightarrow t \rightarrow S \rightarrow \gamma \rightarrow \varepsilon \rightarrow J$  по формуле

$$a = \frac{h^4}{4m^2(m^2 + h^2)} \quad (2.6)$$

При этом, для определения в формулах (2.4) значений параметров  $\lambda$ ,  $R$  и расхода  $q$ , из зависимости (2.5) для образа точки  $C$  в области  $\zeta = \xi + i\eta$  (рис. 2, h)

$$\zeta_C = -\frac{2J_C + a(1 - \lambda)}{2J_C\lambda - a(1 - \lambda)}$$

выразим (при  $J_C = 1$ ;  $\zeta_C = 1/\lambda$ ) значение  $\lambda$  в виде

$$\lambda = \frac{1}{a}[a + 2(1 - \sqrt{a + 1})] \quad (2.7)$$

подставляя которое в формулы (2.4), получим

$$R = \frac{1}{\lambda}(1 + \sqrt{|1 - \lambda^2|}), \quad q = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arch}(R) \quad (2.8)$$

Таким образом, устанавливаем аналитическую взаимосвязь  $z = f(W)$  между областями физического течения  $z = x + iy$  (рис. 2, a) и комплексного потенциала  $W = \varphi + i\psi$  (рис. 2, i) с учетом значений промежуточных функций  $z_1, t, S, \gamma, \varepsilon, J, \xi, W_1$ , определяемых по зависимостям (2.1)–(2.8). Разделяя в последних действительную и мнимую части и преобразовывая получим окончательные выражения в элементарных функциях для определения координат  $x$  и  $y$  области физического течения  $z = x + iy$  при известных величинах  $d$  и  $h$  в зависимости от заданных значений напорной функции  $\varphi$  и функции тока  $\psi$  в виде:

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{A_{10}^2 + B_{10}^2} - A_{10}}{2}}, \quad y = -\sqrt{\frac{\sqrt{A_{10}^2 + B_{10}^2} + A_{10}}{2}} \quad (2.9)$$

в которых

$$\begin{aligned}
 A_{10} &= t_1^2 - t_2 + h^2, & B_{10} &= 2t_1t_2, & t_1 &= \sqrt{\frac{\sqrt{A_9^2 + B_9^2} + A_9}{2}}, & t_2 &= \sqrt{\frac{\sqrt{A_9^2 + B_9^2} - A_9}{2}} \\
 A_9 &= S_1^2 - S_2^2 + m^2, & B_9 &= 2S_1S_2, & S_1 &= \gamma_1m, & S_2 &= \gamma_2m \\
 \gamma_1 &= \varepsilon_1 + A_8, & \gamma_2 &= \varepsilon_2 + B_8, & A_8 &= \sqrt{\frac{\sqrt{A_7^2 + B_7^2} + A_7}{2}}, & B_8 &= \sqrt{\frac{\sqrt{A_7^2 + B_7^2} - A_7}{2}} \\
 A_7 &= \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - 1, & B_7 &= 2\varepsilon_1\varepsilon_2, & \varepsilon_1 &= \sqrt{\frac{\sqrt{J_1^2 + J_2^2} + J_1}{2}}, & \varepsilon_2 &= \sqrt{\frac{\sqrt{J_1^2 + J_2^2} - J_1}{2}} \quad (2.10) \\
 J_1 &= \frac{A_5A_6 + B_5B_6}{A_6^2 + B_6^2}, & J_2 &= \frac{A_6B_5 - A_5B_6}{A_6^2 + B_6^2}, & A_6 &= 2(\lambda\xi + 1), & B_6 &= 2\lambda\eta \\
 A_5 &= a(1 - \lambda)(\xi - 1), & B_5 &= a(1 - \lambda)\eta, & \xi &= \frac{2}{\lambda R} \cdot A_4, & \eta &= \frac{2}{\lambda R} \cdot B_4 \\
 A_4 &= \frac{A_1A_3 + B_1B_3}{A_3^2 + B_3^2}, & B_4 &= \frac{A_3B_1 - A_1B_3}{A_3^2 + B_3^2}, & A_3 &= 1 + \frac{A_2}{R^2}, & B_3 &= \frac{B_2}{R^2} \\
 A_2 &= A_1^2 - B_1^2, & B_2 &= 2A_1B_1, & A_1 &= \sin \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \psi_1, & B_1 &= \cos \varphi_1 \cdot \operatorname{sh} \psi_1 \\
 & & & & \varphi_1 &= \pi(\varphi - 0.5), & \psi_1 &= \pi\psi
 \end{aligned}$$

**3. Анализ результатов и примеры.** Полученное строгое решение рассматриваемой задачи, представленное в виде аналитической взаимосвязи  $z = f(W)$ , позволяет определять на основе элементарных расчетных зависимостей (2.7)–(2.10) для заданных значений параметра импульсного очага  $d$  и глубины его расположения  $h$  значения всех необходимых гидромеханических характеристик потенциального потока (поля) в области физического течения в начальный момент времени.

При этом значения скоростей потока  $V_x$  и  $V_y$  – горизонтальной и вертикальной составляющих полной скорости  $V$ , определяются по зависимостям [10, 15]:

$$V_x = \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{\Delta\Psi}{\Delta y}, \quad V_y = \pm \frac{\Delta\Phi}{\Delta y} = \pm \frac{\Delta\Psi}{\Delta x}, \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad (3.1)$$

в которых  $\Delta\Phi$ ,  $\Delta\Psi$  и  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  расчетные величины приращений напоров и функции тока при соответствующих приращениях координат для рассматриваемых (весьма малых) участков области течения.

Очертание же профиля самого источника импульса определяется полуобратным методом – последовательным конформным отображением четверти дуги  $BC$  единичной окружности в области  $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$  (рис. 2, е) на область физического течения  $z = x + iy$  (рис. 2, а) через промежуточные комплексные области  $S = S_1 + iS_2$ ,  $t = t_1 + it_2$ ,  $z_1 = x_1 + iy_1$  (рис. 2, д, с, б). При этом профиль источника импульса  $BC$  получает вид, описываемый параметрическими зависимостями:

$$\begin{aligned}
 x_{BC} &= \sqrt{\frac{\sqrt{(2m^2\gamma_1^2 + h^2)^2 + 4m^4\gamma_1^2(1 - \gamma_1^2)} - (2m^2\gamma_1^2 + h^2)}{2}} \\
 y_{BC} &= -\sqrt{\frac{\sqrt{(2m^2\gamma_1^2 + h^2)^2 + 4m^4\gamma_1^2(1 - \gamma_1^2)} + (2m^2\gamma_1^2 + h^2)}{2}} \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

для задаваемых значений  $0 \leq \gamma_1 \leq 1$  – от 0 (точки  $B$ ) до 1 (точки  $C$ ), где величина  $m$  находится по формуле (2.2).

На рис. 1, а, б приведены общая схема задачи в виде симметричного потенциально-го потока, а также результаты расчетов основных гидромеханических параметров для двух частных случаев при начальном импульсном воздействии (в усл. ед.):

– при  $h = 5$ ;  $d = 1$  (на правой половине рисунка)

$$q = 1.016, \quad V_A = 0.118, \quad V_B = 0.709, \quad V_C = 0.592$$

– при  $h = 1$ ;  $d = 1$  (на левой половине рисунка)

$$q = 1.755, \quad V_A = 0.792, \quad V_B = 1.667, \quad V_C = 0.833$$

При этом, для указанных случаев на рисунке также представлены:

– криволинейные ортогональные гидродинамические сетки потенциального потока;  
– очертания профилей импульсного источника  $BC$  в физической области течения (кривые 1);

– очертания семейств кривых функции тока (относительных расходов  $\bar{\psi} = \psi/q$ ) – через 0.25 (кривые 2);

– очертания семейств кривых линий равных напоров (потенциальной функции  $\phi$ ) – через 0.25 (кривые 3);

– эпюры функции тока  $\bar{\psi}$  вдоль границ стока (кривые 4);

– эпюры выходных скоростей потока  $V_y = V_{out}$  вдоль границ стока (кривые 5);

– эпюры действующих вертикальных скоростей  $V_y$  и напоров  $\phi$  вдоль осевой линии области течения при  $h/d = 5$  (соответственно, кривые 6 и 7).

Ортогональность расчетных криволинейных ячеек гидродинамических сеток (рис. 1, б) непосредственно подтверждает потенциальность распределения гидромеханических характеристик потока импульсного источника.

**Заключение.** В работе дано новое гидромеханическое решение задачи заглубленного начального импульсного воздействия на гидрогеофизический массив (водный, грунтовый) с непосредственным аналитическим определением в элементарных функциях гидромеханических характеристик потенциального потока. При этом, воздействие очага импульса для начального момента времени моделировалось источником потенциального потока округленного профиля с единичным напором, а область стока – линией нулевого потенциала. Полученное строгое решение рассматриваемой задачи с установлением аналитической взаимосвязи между физической областью течения и комплексным потенциалом основано на теории функции комплексного переменного – использовании метода последовательных конформных отображений с определением полей гидромеханических характеристик потока в начальный момент времени. Приведены примеры расчета для двух частных случаев с построением: криволинейных ортогональных гидродинамических сеток, очертаний семейств линий равных напоров и линий токов, профилей источников импульса, а также эпюр скоростей потока, напоров и относительных расходов потенциального потока.

Часть работы, связанная с гидродинамикой водоемов, выполнена в рамках темы № FMWZ-2022-0001 государственного задания ИВП РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильинский Н.Б., Лабуткин А.Г., Салимов Р.Б. Некоторые задачи о взрыве заглубленных зарядов // Труды семинара по краевым задачам. Вып. 12. Казань: КГУ, 1975. С. 63–75.
2. Меркулов В.И. Популярная гидродинамика. Киев: Техніка, 1976. 145 с.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. 407 с.

4. *Пелиновский Е.Н.* Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996. 276 с.
5. *Иванов Б.А.* Распределение в пространстве энергии сейсмических волн при метеоритном ударе и взрыве // *Динамические процессы в геосферах*. Сб. науч. трудов ИДГ РАН. Вып. 10. М.: Графитекс, 2018. С. 46–53.  
<https://doi.org/10.26006/IDG.2018.10.20170>
6. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука. 1973. 736 с.
7. *Шувалов В.В.* Выброс воды в атмосферу при падении астероидов в океан // *Динамические процессы в геосферах*. Сб. науч. трудов ИДГ РАН. Вып. 10. М.: Графитекс, 2018. С. 126–131.  
<https://doi.org/10.26006/IDG.2018.10.20187>
8. *Покровский Г.И.* Возведение плотин направленным взрывом. М.: Недра, 1974. 113 с.
9. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Часть 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
10. *Анахаев К.Н.* Гидромеханический расчет потенциального потока при ударе плиты о воду // *Доклады Академии наук*. 2012. Т. 445. № 4. С. 407–411.
11. *Лаврик В.И., Фильчакова В.П., Яшин А.А.* Конформные отображения физико-топологических моделей. Киев: Наукова думка, 1990. 374 с.
12. *Anakhaev K.N., Ivanov P.M., Temukuev Kh.M., Chechenov M.M.* The hydromechanical problem of pulse punching of a plate // *Doklady Physics*. 2018. V. 63. № 7. P. 288–292.  
<https://doi.org/10.1134/S1028335818070017>
13. *Betz A.* Konforme Abbildung. Berlin: Springer – Verlag, 1960. 407 s.
14. *Лаврик В.И., Савенков В.Н.* Справочник по конформным отображениям. Киев: Наукова думка, 1970. 252 с.
15. *Павловский Н.Н.* Собрание сочинений. Т. 2. Движение грунтовых вод. М.– Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 771 с.
16. *Милн-Томсон Л.* Эллиптические функции Якоби и тета-функции // *Справочник по специальным функциям*. Под редакцией *М. Абрамовица и И. Стиган* М.: Наука. 1979. С. 380–400.
17. *Анахаев К.Н.* О расчете потенциальных потоков // *Доклады Академии наук*. 2005. Т. 401. № 3. С. 337–341.
18. *Анахаев К.Н.* Об определении эллиптических функций Якоби // *Вестник РУДН. Серия: математика, информатика, физика*. 2009. № 2. С. 90–95.

УДК 539.374

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ МОНОКРИСТАЛЛОВ С ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ РЕШЕТКОЙ ПРИ ЗАДАННОМ ТЕНЗОРЕ ДЕФОРМАЦИЙ И ГИДРОСТАТИЧЕСКОМ ДАВЛЕНИИ

© 2023 г. А. Г. Кесарев<sup>a</sup>, А. М. Власова<sup>a,b,\*</sup>

<sup>a</sup>Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН, Екатеринбург, Россия

<sup>b</sup>Уральский федеральный университет им. Первого президента России Б.Н. Ельцина,  
Екатеринбург, Россия

\*e-mail: alisa@imp.uran.ru

Поступила в редакцию 18.01.2022 г.

После доработки 16.02.2022 г.

Принята к публикации 17.02.2022 г.

В рамках предложенного авторами обобщенного на гексагональные кристаллы критерия текучести Мизеса, решена задача определения тензора напряжений в зависимости от тензора скоростей деформаций и приложенного внешнего давления. Детально рассматриваются случаи плоской и одноосной деформации при произвольной ориентации кристаллической решетки. Для случаев плоской и одноосной деформации построены диаграммы линий уровня напряжений для начала пластического течения. Приводятся диаграммы для компонент девиатора тензора напряжений

*Ключевые слова:* магний, деформация, гексагональные кристаллы, прочность, пластичность, критерий текучести, критерий Мизеса, тензор напряжений, тензор скорости деформации, девиатор

DOI: 10.31857/S0572329922060095, EDN: KFUNJA

**1. Введение.** Как хорошо известно, описание деформационного поведения металлов с гексагональной плотноупакованной кристаллической решеткой (ГПУ) представляет серьезные трудности из-за большого количества действующих деформационных мод [1, 2].

Для описания механических свойств материалов, в настоящее время используются различные физические теории пластичности, в том числе новые к ним подходы [3]. Зачастую физические модели приводят к сложным компьютерным расчетам (кроме простейшей модели Закса) на основе трудоемких экспериментов. Кроме того, они приводят к негладкой поверхности текучести, что создает значительные математические трудности. Модели, опирающиеся на закон Шмида, не всегда выполняются для ГПУ кристаллов, ввиду того, что для них двойникование – действующий и подавляющий механизм пластической деформации при комнатной температуре [2]. Проблемы, возникающие при использовании модели идеально-жесткопластических сред также известны, и в последнее время подобные определяющие соотношения редко используются исследователями. Основным их недостатком является наличие несжимаемости, из-за чего определение напряженного состояния только по изменению деформированного состояния оказывается невозможным.

Данная статья является продолжением работ [4, 5]. В работе [5] представлена феноменологическая модель для описания механических свойств ГПУ металлов, а именно

нахождение простого критерия текучести монокристалла производной ориентировки. Предлагаемый критерий текучести является обобщением известного критерия Мизеса. Для различных схем деформирования монокристаллического магния при комнатной температуре определены коэффициенты этой модели, согласно экспериментальным данным для пределов текучести монокристаллов различных ориентировок. Для перехода к модели поликристаллического тела требуется подходящая процедура усреднения, чему и посвящена данная работа. Известно, что простейшими способами усреднения, оценивающими значения для верхней и нижней границ эффективных свойств композитов – являются усреднения по Рейсу и Фойгту [6]. Применительно к нашему случаю, первый способ означает предположение, что все зерна испытывают одинаковые напряжения, а второй – одни и те же деформации. При пластической деформации усреднение по Рейсу невозможно, так как в рамках жесткопластической модели без упрочнения одни и те же напряжения при одной ориентировке зерна не вызовут никаких деформаций, при других – окажутся абсолютно недостижимыми. Усреднение по Фойгту применительно к жесткопластической модели использовали Тейлор, а также Бишоп и Хилл [7]. Его использование требует решения задачи о нахождении тензора напряжений по известному тензору скоростей деформации и приложенному гидростатическому давлению, что и является целью настоящей работы.

**2. Постановка задачи и ее решение.** Пусть в лабораторной системе координат задан тензор скоростей деформации  $E_{ij}$ . (Следуя нашей предыдущей работе [5], большими буквами обозначаем величины в лабораторной системе координат, маленькими – в кристаллографической системе координат. В последнем случае оси 1 и 2 лежат в базисной плоскости гексагональной ячейки, а ось 3 – ей перпендикулярна). Критерий текучести, предложенный нами в работах [4, 5], имеет вид полинома

$$f(p_{ij}) = a + kI_2 + I_1 + \alpha(I_2)^2 + \beta I_3 \quad (2.1)$$

где инварианты тензора напряжений относительно группы симметрии ГПУ–решетки

$$I_1 = (p_{13})^2 + (p_{23})^2, \quad I_2 = p_{33} - (p_{11} + p_{22})/2, \quad I_3 = (p_{11} - p_{22})^2 + 4(p_{12})^2 \quad (2.2)$$

Выбор полиномального вида функции текучести позволяет избежать нарушения аналитичности функции в некоторых точках.

Согласно ассоциированному закону, связь между компонентами тензоров напряжений  $P_{ij}$  и скоростей деформаций  $E_{ij}$  имеет вид [8]

$$E_{ij} = \dot{\Lambda}(t) \frac{\partial f}{\partial P^{ij}} \quad (2.3)$$

Так как критерий (2.1)–(2.2) обладает цилиндрической симметрией, то для задания ориентировки зерна достаточно знать единичный вектор нормали к базисной плоскости  $\mathbf{n}$ . Так как мы используем прямоугольную систему координат, то верхние и нижние индексы не различаем, так что наличие двух повторяющихся латинских индексов означает суммирование по ним.

Выразим инварианты (2.2) через компоненты тензора напряжений и вектора нормали  $\mathbf{n}$  к базисной плоскости. Инвариант  $I_1$  равен разности квадратов модуля вектора напряжений, действующего на базисную плоскость и нормальной компоненты этого напряжения

$$I_1 = P_{ij}n_j P_{ik}n_k - (P_{ij}n_j n_j)^2 \quad (2.4)$$

Второй инвариант имеет вид

$$I_2 = \frac{3p_{33} - (p_{11} + p_{22} + p_{33})}{2} = \frac{1}{2}(3P_{ij}n_j n_i - P_{ii}) \quad (2.5)$$

Инвариант  $I_3$  равен максимальной разности растягивающих напряжений, действующих в базисной плоскости (0001). Эти напряжения могут быть найдены, как экстремумы функции  $P_{ij}\tau_i\tau_j$ , где  $\boldsymbol{\tau}$  – единичный вектор, перпендикулярный  $\mathbf{n}$ , что можно записать в виде ограничений  $\tau_i n_i = 0$ ,  $\tau_i \tau_i - 1 = 0$ . Задача поиска таких экстремумов, как известно, методом множителей Лагранжа сводится к задаче о поиске экстремума (без ограничений), для функции

$$P_{ij}\tau_i\tau_j + \eta(\tau_i\tau_i - 1) + \mu(\tau_i n_i) \quad (2.6)$$

которые достигаются на векторах  $\boldsymbol{\tau}$ , удовлетворяющих уравнениям

$$2P_{ij}\tau_j + 2\eta\tau_i + \mu n_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.7)$$

Для решения системы уравнений (2.7) введем оператор проектирования  $\Pi$  на базисную плоскость по формуле

$$\Pi_{ij}x_j = \delta_{ij}x_j - n_i n_j x_j \quad (2.8)$$

Подействовав оператором  $\Pi$  на уравнение (2.7), получим

$$2\Pi_{ik}P_{kj}\tau_j + 2\eta\Pi_{ik}\tau_k + \mu\Pi_{ik}n_k = 2\Pi_{ik}P_{kj}\tau_j + 2\eta\Pi_{ik}\tau_k = 0 \quad (2.9)$$

Так как по определению  $\Pi(\mathbf{n}) = 0$ ,  $\Pi(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau}$ , это позволяет записать уравнение (2.9) в виде задачи на собственные значения и векторы для оператора проектирования  $\mathbf{A} = \Pi\mathbf{P}$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\tau} = \lambda\boldsymbol{\tau} \quad (2.10)$$

где  $\lambda = -\eta$ . Заметим, что оператор  $\mathbf{A}$  – симметрический, как произведение симметрических операторов. Так как  $\Pi(\mathbf{n}) = 0$ , то оператор  $\mathbf{A}$  вырожден и среди его собственных значений имеется нулевое. Следовательно, характеристический полином оператора  $\mathbf{A}$  имеет вид [9]

$$-(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\lambda = -\lambda^3 + I_A\lambda^2 - II_A\lambda + III_A \quad (2.11)$$

где

$$I_A = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}A \quad (2.12)$$

$$II_A = \frac{1}{2}[(\text{tr}A)^2 - \text{tr}A^2] = a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji} = \lambda_1\lambda_2, \quad III_A = \det A \quad (2.13)$$

где  $A = (a_{ij})$  – матрица оператора  $\mathbf{A}$ ,  $\text{tr}A = a_{ii}$  – шпур матрицы. Тогда, используя определение третьего инварианта, выражения (2.12)–(2.13) и определение оператора  $\mathbf{A}$  получим

$$\begin{aligned} I_3 &= (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = I_A^2 - 4II_A = 2\text{tr}A^2 - (\text{tr}A)^2 = \\ &= 2(P_{il} - n_i n_k P_{kl})(P_{li} - n_l n_s P_{si}) - (P_{ii} - n_i n_s P_{si})^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Теперь, используя выражения для инвариантов (2.4), (2.5) и (2.14), запишем критерий текучести  $f(P_{ij})$  (2.1) через компоненты тензора напряжений в лабораторной системе координат при произвольной ориентировке кристалла

$$\begin{aligned} f(P_{ij}) &= a + k \frac{3P_{ij}n_i n_j - P_{ii}}{2} + P_{ij}P_{ik}n_j n_k - (P_{ij}n_i n_j)^2 + \frac{\alpha}{4}(3P_{ij}n_i n_j - P_{ii})^2 + \\ &+ \beta[2(P_{il} - n_i n_k P_{kl})(P_{li} - n_l n_s P_{si}) - (P_{ii} - n_i n_s P_{si})^2] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Это выражение позволяет, с использованием ассоциированного закона (2.3) установить связь между компонентами тензоров напряжений и скоростей деформации в ла-

бораторной системе координат. Дифференцирование необходимо проводить с учетом симметрии тензора  $P_{ij}$ . Следуя [9], находим

$$d(P_{rs}n_rn_s) = \frac{d}{d\xi}(P_{rs} + \xi\delta P_{rs})n_rn_s = n_rn_s\delta P_{rs} \quad (2.16)$$

где

$$\delta P_{rs} = \delta P_{ij} [\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr}] / 2 \quad (2.17)$$

Подставляя выражение (2.17) в (2.16), получаем

$$\frac{\partial P_{rs}n_rn_s}{\partial P_{ij}} = n_in_j \quad (2.18)$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial P_{lr}P_{rl}}{\partial P_{ij}} = P_{ji} + P_{ij}, \quad \frac{\partial (P_{rs}P_{rk}n_sn_k)}{\partial P_{ij}} = (n_sn_jP_{is} + n_in_sP_{js}) \quad (2.19)$$

и

$$\frac{\partial (P_{rs}n_rn_s)^2}{\partial P_{ij}} = 2(P_{rs}n_rn_s)n_in_j \quad (2.20)$$

Кроме того, заметим, что

$$2(P_{rl} - n_rn_kP_{kl})(P_{lr} - n_ln_sP_{sr}) = 2[P_{rl}P_{lr} - n_rn_kP_{kl}P_{lr} - n_ln_sP_{rl}P_{sr} + (n_rn_lP_{kl})^2] \quad (2.21)$$

Используя ассоциированный закон (2.3), дифференцируя функцию текучести (2.15), с использованием выражений (2.18)–(2.20) получаем связь тензора напряжений и тензора деформаций

$$E_{ij} = \dot{\Lambda} \left\{ k \frac{3n_in_j - \delta_{ij}}{2} + P_{ik}n_kn_j + P_{jk}n_kn_i - 2(P_{kl}n_kn_l)n_in_j + \frac{\alpha}{2}(3P_{kl}n_kn_l - P_{kk}) \times \right. \\ \left. \times (3n_in_j - \delta_{ij}) + \beta[4(P_{ij} - P_{kj}n_kn_k - P_{ki}n_jn_k + P_{kl}n_kn_ln_in_j) - 2(P_{ll} - n_ln_kP_{lk})(\delta_{ij} - n_in_j)] \right\} \quad (2.22)$$

$i, j = 1, 2, 3$

Заметим, что шпур тензора напряжений равен взятому с обратным знаком утроенному гидростатическому давлению  $P_{kk} = -3p$ . Эту величину нельзя найти, зная только тензор скоростей деформации — она задается внешними условиями. Гидростатическое давление не зависит от выбора системы координат. Для нахождения тензора напряжений при известном тензоре деформации и гидростатическом давлении, разрешив систему уравнений (2.16) относительно компонент тензора напряжений  $P_{ij}$ . Учтя, что  $n_in_j = 1$  и  $\delta_{ij}n_j = n_i$ , умножим обе части уравнения (2.22) на компоненты вектор нормали к базисной плоскости  $n_j$  и проведем свертку по индексу  $j$

$$E_{ij}n_j = \dot{\Lambda} \{ kn_i + P_{is}n_s - (P_{rs}n_rn_s)n_i + \alpha(3P_{rs}n_rn_s - P_{ss})n_i \} \quad (2.23)$$

Теперь уравнение (2.23) еще раз умножим на  $n_i$  и свернем по индексу  $i$

$$E_{ij}n_jn_i = \dot{\Lambda} \{ k + \alpha(3P_{kl}n_kn_l - P_{kk}) \} \quad (2.24)$$

Из выражения (2.24) найдем

$$P_{rs}n_rn_s = \frac{E_{rs}n_rn_s - \dot{\Lambda}k}{3\alpha\dot{\Lambda}} - p \quad (2.25)$$

а из выражений (2.23), (2.25) —

$$P_{ik}n_k = -\left[p + \frac{k}{3\alpha}\right]n_i + \frac{1}{\dot{\Lambda}}\left[E_{ij}n_j + \left(\frac{1}{3\alpha} - 1\right)E_{rs}n_r n_s n_i\right] \quad (2.26)$$

Заменив в (2.26)  $i$  на  $j$  и  $j$  на  $i$ , сложим с (2.26)

$$P_{ik}n_k n_j + P_{jk}n_k n_i = \frac{E_{ir}n_r n_i + E_{rj}n_r n_j}{\dot{\Lambda}} - 2\left[p + \frac{k}{3\alpha}\right]n_i n_j + \frac{2}{\dot{\Lambda}}\left(\frac{1}{3\alpha} - 1\right)E_{rs}n_r n_s n_i n_j \quad (2.27)$$

Подставив выражения (2.25), (2.26) в уравнение (2.22) и разрешив его относительно  $P_{ij}$ , получим выражение

$$P_{ij} = \frac{E_{ij}}{4\beta\dot{\Lambda}} + \frac{E_{ir}n_r n_j + E_{rj}n_r n_i}{\dot{\Lambda}}\left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) + An_i n_j + B\delta_{ij} \quad (2.28)$$

где

$$A = -\frac{k}{2\alpha} + \frac{E_{rs}n_r n_s}{\dot{\Lambda}}\left(\frac{1}{8\beta} + \frac{1}{2\alpha} - 2\right), \quad B = -p + \frac{k}{6\alpha} + \left(\frac{1}{8\beta} - \frac{1}{6\alpha}\right)\frac{E_{rs}n_r n_s}{\dot{\Lambda}} \quad (2.29)$$

Для нахождения  $\dot{\Lambda}$  сначала выразим инварианты  $I_1 - I_3$  через компоненты тензора скоростей деформации  $E_{ij}$ . Первые два инварианта находятся по формулам (2.4), (2.5)

$$I_1 = P_{ij}n_j P_{ik}n_k - (P_{ij}n_i n_j)^2 = \left(p + \frac{k}{3\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\dot{\Lambda}^2}\left\{E_{ri}n_r E_{si}n_s + \left(\frac{1}{9\alpha^2} - 1\right)(E_{rs}n_r n_s)^2\right\} - \frac{2}{3\alpha\dot{\Lambda}}\left[p + \frac{k}{3\alpha}\right]E_{rs}n_r n_s - \left(\frac{E_{rs}n_r n_s}{3\alpha\dot{\Lambda}} - \frac{k}{3\alpha} - p\right)^2 = \frac{1}{\dot{\Lambda}^2}[E_{ri}n_r E_{si}n_s + (E_{rs}n_r n_s)^2] \quad (2.30)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(3P_{ij}n_j n_i - P_{ii}) = \frac{E_{rs}n_r n_s}{2\alpha\dot{\Lambda}} - \frac{k}{2\alpha} \quad (2.31)$$

Для нахождения инварианта  $I_3$  заметим, что

$$P_{il} - n_i n_k P_{kl} = \frac{E_{il}}{4\beta\dot{\Lambda}} + \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right)\frac{E_{ir}n_r n_l - E_{kr}n_r n_l n_i n_k}{\dot{\Lambda}} - \frac{E_{kl}n_l n_k}{4\beta\dot{\Lambda}} + B(\delta_{il} - n_i n_l) \quad (2.32)$$

Используя соотношения

$$(E_{ir}n_r n_l - E_{kr}n_k n_r n_l n_i)(E_{ls}n_s n_i - E_{sr}n_s n_l n_i n_l) = (E_{ir}n_r n_l - E_{kr}n_k n_r n_l n_i)(\delta_{il} - n_i n_l) = 0 \quad (2.33)$$

$$(\delta_{il} - n_i n_l)(\delta_{il} - n_i n_l) = \delta_{il}\delta_{il} - n_i n_l \delta_{il} - \delta_{il}n_i n_l + n_i n_l n_i n_l = 2 \quad (2.34)$$

находим

$$\begin{aligned} & (P_{il} - n_i n_k P_{kl})(P_{ii} - n_i n_s P_{si}) = \\ & = \frac{E_{il}E_{li}}{16\beta^2\dot{\Lambda}^2} + \frac{E_{il}}{4\beta\dot{\Lambda}}\left(1 - \frac{1}{4\beta}\right)\frac{E_{li}n_l n_i - E_{si}n_s n_i n_l n_l}{\dot{\Lambda}} - \frac{E_{il}E_{is}n_s n_l}{16\beta^2\dot{\Lambda}^2} + \frac{E_{il}B}{4\beta\dot{\Lambda}}(\delta_{il} - n_i n_l) + \\ & + \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right)\frac{E_{ir}n_r n_l - E_{kr}n_k n_r n_l n_i n_k}{\dot{\Lambda}}\frac{E_{li}}{4\beta\dot{\Lambda}} + \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right)^2\frac{E_{ir}n_r n_l - E_{kr}n_k n_r n_l n_i n_k}{\dot{\Lambda}} \times \\ & \times \frac{E_{lr}n_r n_i - E_{sr}n_s n_i n_l}{\dot{\Lambda}} - \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right)\frac{E_{lr}n_r n_l - E_{kr}n_k n_r n_l n_i n_k}{\dot{\Lambda}}\frac{E_{is}n_s n_l}{4\beta\dot{\Lambda}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) \frac{E_{ir}n_r n_i - E_{kr}n_r n_i n_k}{\dot{\Lambda}} B(\delta_{il} - n_i n_l) - \frac{E_{kl}n_i n_k}{4\beta\dot{\Lambda}} \frac{E_{li}}{4\beta\dot{\Lambda}} - \frac{E_{kl}n_i n_k}{4\beta\dot{\Lambda}} \times \\
& \times \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) \frac{E_{lr}n_r n_i - E_{sr}n_r n_s n_i n_l}{\dot{\Lambda}} + \frac{E_{kl}n_i n_k}{4\beta\dot{\Lambda}} \frac{E_{is}n_s n_l}{4\beta\dot{\Lambda}} - \frac{E_{kl}n_i n_k}{4\beta\dot{\Lambda}} B(\delta_{il} - n_i n_l) + \\
& + B(\delta_{il} - n_i n_l) \frac{E_{li}}{4\beta\dot{\Lambda}} + B(\delta_{il} - n_i n_l) \frac{E_{il}}{4\beta\dot{\Lambda}} \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) \frac{E_{lr}n_r n_i - E_{sr}n_r n_s n_i n_l}{\dot{\Lambda}} - \\
& - B(\delta_{il} - n_i n_l) \frac{E_{is}n_s n_l}{4\beta\dot{\Lambda}} + B^2(\delta_{il} - n_i n_l)(\delta_{il} - n_i n_l) \Big] = \\
& = \frac{E_{il}E_{li}}{16\beta^2\dot{\Lambda}^2} - \frac{E_{il}E_{is}n_s n_l}{8\beta^2\dot{\Lambda}^2} - \frac{BE_{il}n_i n_l}{2\beta\dot{\Lambda}} + \frac{(E_{lr}n_r n_i)^2}{16\beta^2\dot{\Lambda}^2} + 2B^2
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Используя (2.25), получаем

$$3P_{rs}n_r n_s - 3P_{rr} = \frac{E_{rs}n_r n_s}{\alpha\dot{\Lambda}} - \frac{k}{\alpha} - 2P_{rr} \tag{2.36}$$

а используя (2.29) –

$$2B + \left(\frac{E_{rs}n_r n_s}{3\alpha\dot{\Lambda}} - \frac{k}{3\alpha} + 2p\right) = \frac{E_{rs}n_r n_s}{4\beta\dot{\Lambda}} \tag{2.37}$$

$$-\frac{BE_{il}n_i n_l}{\beta\dot{\Lambda}} + 4B^2 - \left(\frac{E_{rs}n_r n_s}{3\alpha\dot{\Lambda}} - \frac{k}{3\alpha} + 2p\right)^2 = \frac{E_{rs}n_r n_s}{\dot{\Lambda}\beta} \left(\frac{k}{12\alpha} - \frac{E_{kl}n_k n_l}{12\alpha\dot{\Lambda}} - \frac{p}{2} - \frac{B}{2}\right) \tag{2.38}$$

$$-\frac{BE_{il}n_i n_l}{\beta\dot{\Lambda}} + \frac{(E_{lr}n_r n_i)^2}{8\beta^2\dot{\Lambda}^2} + 4B^2 - \left(\frac{E_{rs}n_r n_s}{3\alpha\dot{\Lambda}} - \frac{k}{3\alpha} + 2p\right)^2 = \frac{(E_{lr}n_r n_i)^2}{16\beta^2\dot{\Lambda}^2} \tag{2.39}$$

Подставляя (2.35)–(2.39) в выражение для 3-го инварианта (2.14), находим его выражение через компоненты тензора скоростей деформации.

$$I_3 = \frac{E_{il}E_{li}}{8\beta^2\dot{\Lambda}^2} - \frac{E_{il}E_{is}n_s n_l}{4\beta^2\dot{\Lambda}^2} + \frac{(E_{lr}n_r n_i)^2}{16\beta^2\dot{\Lambda}^2} \tag{2.40}$$

Подставляя выражения для инвариантов (2.28), (2.29), (2.41) в критерий текучести (2.1), группируя члены при одинаковых степенях  $\dot{\Lambda}$  и умножая на  $\dot{\Lambda}^2$ , находим уравнение для нахождения  $\dot{\Lambda}$ , которое имеет единственное положительное решение

$$\dot{\Lambda} = \sqrt{\left[\frac{E_{il}E_{li}}{8\beta} + \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) E_{ir}E_{is}n_r n_s + \left(-1 + \frac{1}{4\alpha} + \frac{1}{16\beta}\right) (E_{lr}n_r n_i)^2\right] / \left(\frac{k^2}{4\alpha} - a\right)} \tag{2.41}$$

Уравнения (2.28), (2.29) и (2.41) решают поставленную задачу исследования – определить тензор напряжений при известном тензоре пластической деформации. Далее за оси координат примем главные оси тензора скоростей деформации. В этой системе координат, с учетом условия несжимаемости, тензор скоростей будет иметь вид

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x & 0 & 0 \\ 0 & E_y & 0 \\ 0 & 0 & -E_x - E_y \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

Тогда выражения (2.29) принимают вид

$$A = -\frac{k}{2\alpha} + \frac{[E_x(n_x^2 - n_z^2) + E_y(n_y^2 - n_z^2)]}{\dot{\Lambda}} \left(\frac{1}{8\beta} + \frac{1}{2\alpha} - 2\right) \tag{2.43}$$

$$B = -p + \frac{k}{6\alpha} + \left(\frac{1}{8\beta} - \frac{1}{6\alpha}\right) \frac{[E_x(n_x^2 - n_z^2) + E_y(n_y^2 - n_z^2)]}{\dot{\Lambda}} \quad (2.44)$$

а выражение (2.41) – вид

$$\dot{\Lambda} = \left\{ \frac{(E_x + E_y)^2 - E_x E_y}{4\beta} + \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) [E_x^2 n_x^2 + E_y^2 n_y^2 + (E_x + E_y)^2 n_z^2] + \left(-1 + \frac{1}{4\alpha} + \frac{1}{16\beta}\right) [E_x(n_x^2 - n_z^2) + E_y(n_y^2 - n_z^2)]^2 \right\}^{1/2} / \sqrt{\left(\frac{k^2}{4\alpha} - a\right)} \quad (2.45)$$

Используя (2.28), находим компоненты тензора напряжений

$$P_{xx} = \frac{E_x}{4\beta\dot{\Lambda}} + \frac{2E_x n_x^2}{\dot{\Lambda}} \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) + A n_x^2 + B \quad (2.46)$$

$$P_{yy} = \frac{E_y}{4\beta\dot{\Lambda}} + \frac{2E_y n_y^2}{\dot{\Lambda}} \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) + A n_y^2 + B \quad (2.47)$$

$$P_{zz} = -\frac{(E_x + E_y)}{4\beta\dot{\Lambda}} - \frac{2(E_x + E_y) n_z^2}{\dot{\Lambda}} \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) + A n_z^2 + B \quad (2.48)$$

$$P_{xy} = \left[ \frac{E_x + E_y}{\dot{\Lambda}} \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) + A \right] n_x n_y \quad (2.49)$$

$$P_{xz} = \left[ A - \frac{E_x}{\dot{\Lambda}} \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) \right] n_x n_z, \quad P_{yz} = \left[ A - \frac{E_y}{\dot{\Lambda}} \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) \right] n_y n_z \quad (2.50)$$

**3. Случай плоской деформации.** Рассмотрим теперь в главных осях случай плоской деформации

$$E_x = -E_z = E, \quad E_y = 0 \quad (3.1)$$

Этот случай представляет большой практический интерес, поскольку в некоторых экспериментальных работах [1, 2], по изучению механических свойств монокристаллов магния, исследуется именно плоская деформация. Уравнение (2.45) с учетом (3.1) принимает вид

$$\dot{\Lambda} = E \sqrt{\left[ 1 - n_y^2 + \frac{n_y^2}{4\beta} + (n_x^2 - n_z^2)^2 \left(-1 + \frac{1}{4\alpha} + \frac{1}{16\beta}\right) \right]} / \left(\frac{k^2}{4\alpha} - a\right) \quad (3.2)$$

а уравнения для компонент тензора напряжений (2.46)–(2.50) вид –

$$\begin{aligned} P_{xx} &= \frac{E}{4\beta\dot{\Lambda}} + \frac{2E n_x^2}{\dot{\Lambda}} \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) + A n_x^2 + B, & P_{yy} &= A n_y^2 + B \\ P_{zz} &= -\frac{E}{4\beta\dot{\Lambda}} - \frac{2E n_z^2}{\dot{\Lambda}} \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) + A n_z^2 + B, & P_{xy} &= \left[ \frac{E}{\dot{\Lambda}} \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) + A \right] n_x n_y \\ P_{xz} &= A n_x n_z, & P_{yz} &= \left[ -\frac{E}{\dot{\Lambda}} \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) + A \right] n_y n_z, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$A = -\frac{k}{2\alpha} + \frac{E(n_x^2 - n_z^2)}{\dot{\Lambda}} \left(\frac{1}{8\beta} + \frac{1}{2\alpha} - 2\right), \quad B = -p + \frac{k}{6\alpha} + \frac{E(n_x^2 - n_z^2)}{\dot{\Lambda}} \left(\frac{1}{8\beta} - \frac{1}{6\alpha}\right) \quad (3.4)$$

Ориентировка кристалла задается углами Эйлера способом, используемым в кристаллографии [11]. Кристалл, кристаллографические оси которого первоначально

совпадают с осями лабораторной системы координат  $X, Y, Z$ , (ось  $Z$  совпадает с кристаллографической осью  $c$ ) последовательно поворачивается на угол  $\varphi_1$  вокруг оси  $Z$ , затем на угол  $\Phi$  вокруг оси  $X$  (которое принимает ось  $X$  после первого поворота), затем вокруг оси  $Z'$  (новое положение оси  $Z$  после двух предыдущих поворотов) на угол  $\varphi_2$ . Поскольку критерий (1) обладает цилиндрической симметрией вращения вокруг кристаллографической оси  $c$ , то последнее вращение на угол  $\varphi_2$  и сам этот угол можно не рассматривать, и задавать ориентировку кристалла парой углов  $(\varphi_1, \Phi)$ . Единичный, нормальный к базисной плоскости) вектор  $\mathbf{n}$  имеет вид

$$\mathbf{n} = -\sin \varphi_1 \sin \Phi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi_1 \sin \Phi \mathbf{e}_2 + \cos \Phi \mathbf{e}_3, \quad \varphi_1 \in [0, 2\pi], \quad \Phi \in [0, \pi] \quad (3.5)$$

Особый интерес представляет случай, когда недиагональные компоненты равны нулю и таким образом, главные компоненты тензоров напряжений и деформаций совпадают. Согласно формулам (3.3), (3.5) таким случаям соответствуют значения углов  $\Phi = 0^\circ, 180^\circ$ . Кроме того, из уравнения (3.3) легко увидеть, что недиагональные члены обращаются в ноль, когда

$$n_y = 0 \quad \text{и} \quad A = 0 \quad (3.6)$$

Тогда из уравнения (3.4), (3.8) следует

$$\cos \varphi_1 = 0, \quad \sin \varphi_1 = \pm 1, \quad (3.7)$$

и

$$n_x^2 - n_z^2 = \sin^2 \Phi - \cos^2 \Phi = -\cos 2\Phi \quad (3.8)$$

Тогда из уравнений (3.3), (3.4) находим уравнение для определения  $\Phi$

$$A = -\frac{k}{2\alpha} - \frac{E \cos 2\Phi}{\Lambda} \left( \frac{1}{8\beta} + \frac{1}{2\alpha} - 2 \right) \quad (3.9)$$

где

$$\Lambda = E \sqrt{\left[ 1 + \cos^2 2\Phi \left( -1 + \frac{1}{4\alpha} + \frac{1}{16\beta} \right) \right] / \left( \frac{k^2}{4\alpha} - a \right)} \quad (3.10)$$

соответственно, а из второго условия (3.6) следует

$$\frac{k}{2\alpha} = - \frac{\left( \frac{1}{8\beta} + \frac{1}{2\alpha} - 2 \right) \sqrt{\left( \frac{k^2}{4\alpha} - a \right)} \cos 2\Phi}{\sqrt{\left[ 1 + \cos^2 2\Phi \left( -1 + \frac{1}{4\alpha} + \frac{1}{16\beta} \right) \right]}} \quad (3.11)$$

причем  $\cos 2\Phi < 0$ . Разрешая уравнение (3.11) относительно  $\cos 2\Phi$ , находим

$$\cos 2\Phi = - \left[ \sqrt{\left( \frac{1}{8\beta} + \frac{1}{2\alpha} - 2 \right)^2 \left( \alpha - \frac{4\alpha^2}{k^2} a \right) - \left( -1 + \frac{1}{4\alpha} + \frac{1}{16\beta} \right)} \right]^{-1} \quad (3.12)$$

Для дальнейшего анализа рассмотрим линии уровня для каждой из компонент, используя значения коэффициентов модели, полученных в нашей предыдущей работе [5]  $a = -0.28 \text{ МПа}^2$ ,  $\alpha = 7.07 \times 10^{-4}$ ,  $\beta = 5.36 \times 10^{-4}$ ,  $k = 6.37 \times 10^{-2} \text{ МПа}$ . Поскольку для определения диагональных компонент тензора деформаций необходимо знание приложенного гидростатического давления, ограничимся построением графиков для компонент девиаторов напряжений, которые совпадают с соответствующими компонентами тензора напряжений в случае недиагональных компонент. Диагональные

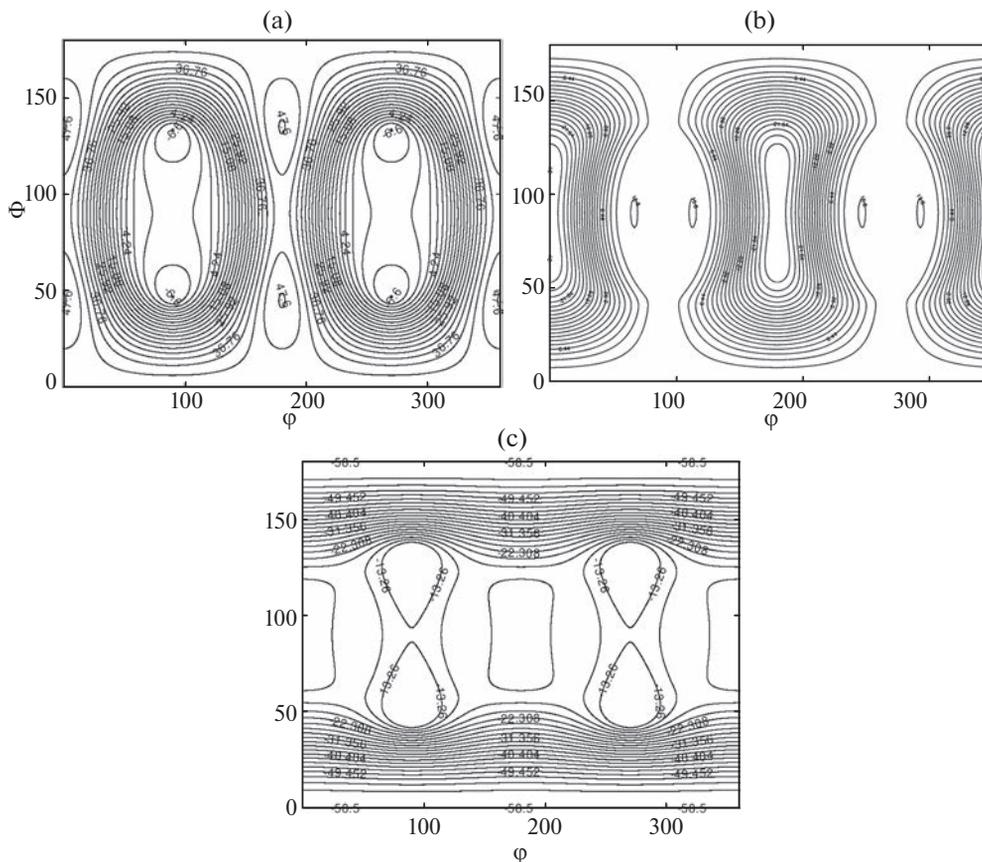


Рис. 1. Линии уровней диагональных компонент (а)  $S_{xx}$ , (б)  $S_{yy}$ , (с)  $S_{zz}$ .  $\Phi, \phi$  измеряются в градусах.

компоненты отличаются от компонент девиаторов на величину гидростатического давления.

$$S_{ij} = P_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} P_{kk} = P_{ij} + \delta_{ij} p \tag{3.13}$$

Линии уровней диагональных компонент  $S_{xx}, S_{yy}, S_{zz}$  представлены на рис 1, а–с соответственно, и линии уровней недиагональных компонент  $S_{xy}, S_{xz}, S_{yz}$  на рис 2, а–с соответственно.

Зависимости компонент от углов  $\phi_1$  и  $\Phi$  являются достаточно сложными, имеют большое количество локальных максимумов и минимумов и нулевые изолинии достаточно сложного вида, особенно  $S_{yz}$  и  $S_{xz}$ , за исключением компоненты  $S_{zz}$ , которая всегда отрицательна. Компонента  $S_{xx}$  достигает максимальных значений при углах  $\Phi = 45^\circ$  и  $\Phi = 135^\circ$ , а также  $\phi_1 = 0^\circ$  и  $\phi_1 = 180^\circ$ . Эти ориентировки для свободного зерна являются наиболее легкими для пластической деформации, но здесь направление легкого скольжения заблокировано приложенной ограничивающей силой, обеспечивающей плоскую геометрию деформации. Наибольшее по абсолютной величине значение компоненты  $S_{zz}$  возникает при  $\Phi = 0^\circ, 180^\circ$  и соответствуют сжатию в направлении нор-

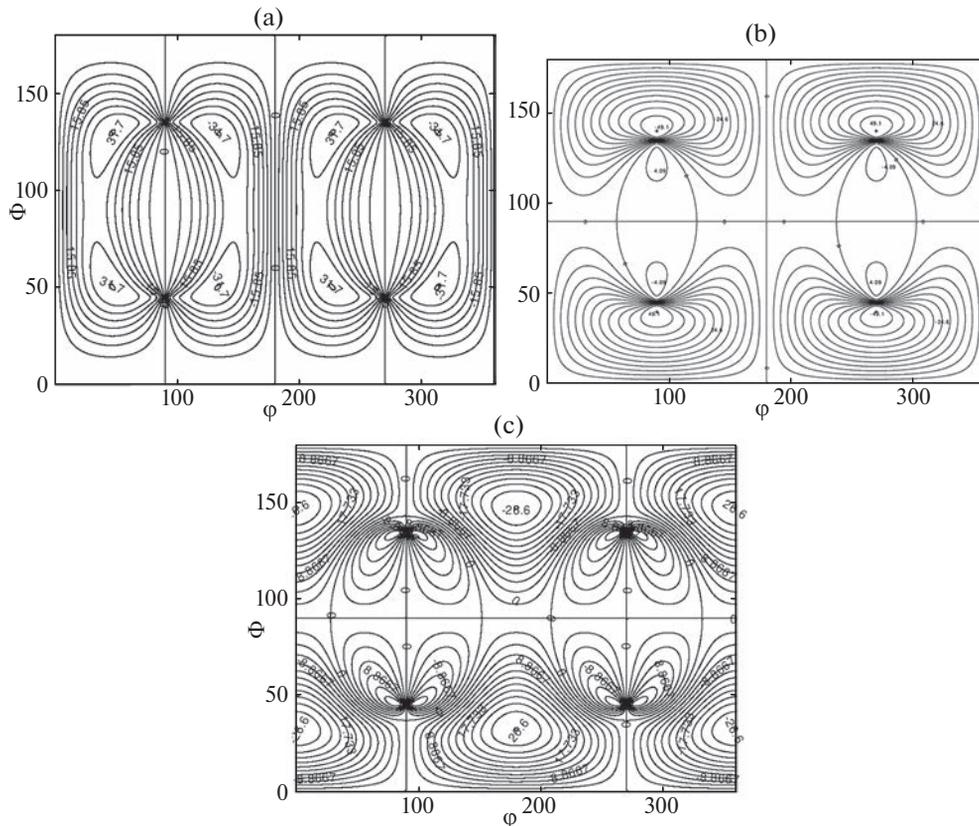


Рис. 2. Линии уровней недиагональных компонент (a)  $S_{xy}$ , (b)  $S_{xz}$ , (c)  $S_{yz}$ .  $\Phi, \varphi$  измеряются в градусах.

мали к базисной плоскости. Из внешнего вида кривых изолиний недиагональных компонент (рис. 2) и согласно формулам (3.3) и (3.5), видно, что недиагональные компоненты обращаются в нуль при углах  $\Phi = 0^\circ, 180^\circ$ , а также при четырех ориентировках, соответствующих всем возможным комбинациям углов  $\varphi_1 = 90^\circ, \varphi_1 = 270^\circ; \Phi \approx 46^\circ, \Phi \approx 134^\circ$ .

**4. Случай одноосной деформации.** Рассмотрим теперь случай одноосной деформации, определяемый условием

$$E_x = E_y = E, \quad E_z = -E_x - E_y \quad (4.1)$$

Фактически имеем два случая. Случай  $E > 0$  (сжатие вдоль оси  $z$  и растяжение вдоль осей  $x, y$ ) и  $E < 0$  (сжатие вдоль осей  $x$  и  $y$ , растяжение вдоль оси  $z$ ). Аналогичные два случая можно рассмотреть и для плоской деформации, при этом второй случай получается из первого заменой координатных осей.

Для одноосной деформации, формулы (2.46)–(2.50) для компонент тензора напряжений, соответствующих пределу текучести, с учетом (3.5) принимают вид

$$P_{xx} = S_0 - 2P_{xyM} \sin^2 \varphi_1 - p, \quad P_{yy} = S_0 - 2P_{xyM} \cos^2 \varphi_1 - p, \quad P_{zz} = S_{zz} - p \quad (4.2)$$

$$P_{xy} = P_{xyM} \sin 2\varphi_1, \quad P_{yz} = P_{yzM} \cos \varphi_1, \quad P_{xz} = -P_{yzM} \sin \varphi_1 \quad (4.3)$$

где  $p$  – это гидростатическое давление,

$$S_0 = \frac{E}{4\beta\dot{\Lambda}} + B_0 \quad (4.4)$$

$S_0$  – это составляющая девиатора диагональных компонент тензора напряжений, не зависящая от угла  $\Phi_1$ ;

$$S_{xyM} = -\frac{\sin^2 \Phi}{2} \left[ \frac{2E}{\dot{\Lambda}} \left( 1 - \frac{1}{4\beta} \right) + A \right] \quad (4.5)$$

$S_{xyM}$  – значение  $P_{xy}$ , соответствующее углу  $\Phi_1 = 45^\circ$ , при котором эта абсолютная величина этой компоненты достигает максимального по  $\Phi_1$  значения;

$$S_{yzM} = \frac{\sin 2\Phi}{2} \left[ A - \frac{E}{\dot{\Lambda}} \left( 1 - \frac{1}{4\beta} \right) \right] \quad (4.6)$$

$S_{yzM}$  – значение компоненты  $P_{yzM}$ , соответствующее углу  $\Phi_1 = 0^\circ$ ,

$$S_{zz} = -\frac{E}{2\beta\dot{\Lambda}} - \frac{4E \cos^2(\Phi)}{\dot{\Lambda}} \left( 1 - \frac{1}{4\beta} \right) + A \cos^2(\Phi) + B_0 \quad (4.7)$$

$S_{zz}$  – девиатор компоненты  $P_{zz}$  тензора напряжений;

$$A = -\frac{k}{2\alpha} + E \frac{1 - 3 \cos^2 \Phi}{\dot{\Lambda}} \left( \frac{1}{8\beta} + \frac{1}{2\alpha} - 2 \right) \quad (4.8)$$

$$B_0 = \frac{k}{6\alpha} + E \left( \frac{1}{8\beta} - \frac{1}{6\alpha} \right) \frac{1 - 3 \cos^2 \Phi}{\dot{\Lambda}} \quad (4.9)$$

$$\dot{\Lambda} = \sqrt{\left[ \frac{3E^2}{4\beta} + \left( 1 - \frac{1}{4\beta} \right) E^2 (1 + 3n_z^2) + \left( -1 + \frac{1}{4\alpha} + \frac{1}{16\beta} \right) E^2 (1 - 3n_z^2)^2 \right] / \left( \frac{k^2}{4\alpha} - a \right)} \quad (4.10)$$

где  $n_z$  находится из формулы (3.5). Данный случай затруднительно реализовать практически при произвольной ориентировке монокристалла, но он, по-видимому, играет важную роль при одноосевой деформации поликристаллического образца со случайной ориентировкой кристаллитов. Из формул (4.4)–(4.10) видно, что коэффициенты  $S_0$ ,  $S_{xyM}$ ,  $S_{yzM}$ , как и компонента девиатора тензора напряжений  $S_{zz}$ , зависят только от угла  $\Phi$  между направлением приложения внешней силы и нормалью к плоскости базиса (0001). Эти зависимости для сжатия (рис. 3,а) и растяжения (рис. 3,б).

**5. Осреднение.** Осреднение в физических теориях пластичности применяется в приближении Фойгта. В механической теории пластичности этот метод впервые применен Тейлором и развит Бишопом и Хиллом [7]. Данный подход предполагает, что все зерна деформируются одинаково, т.е. макроскопический тензор скоростей деформации  $E_{ij}$  задан и совпадает с микроскопическим. Тогда с использованием критерия текучести (в подходе Тейлора – это закон Шмида с явным учетом работающих систем скольжения) вычисляется тензор напряжений для каждого зерна и проводится осреднение. В данной работе в качестве критерия текучести используется феноменологический критерий [4]. При этом кроме тензора скоростей деформации должно быть известно гидростатическое давление, которое задается независимо и связано с внешними условиями. Исходя только из компонент тензора  $E_{ij}$  можно определить только девиатор тензора напряжений.

Зная тензор напряжений для каждой ориентировки  $P_{ij}(\Phi_1, \Phi)$ , умножим его на функцию распределения ориентировок [7], где  $\rho(\Phi_1, \Phi)$  – плотность распределения

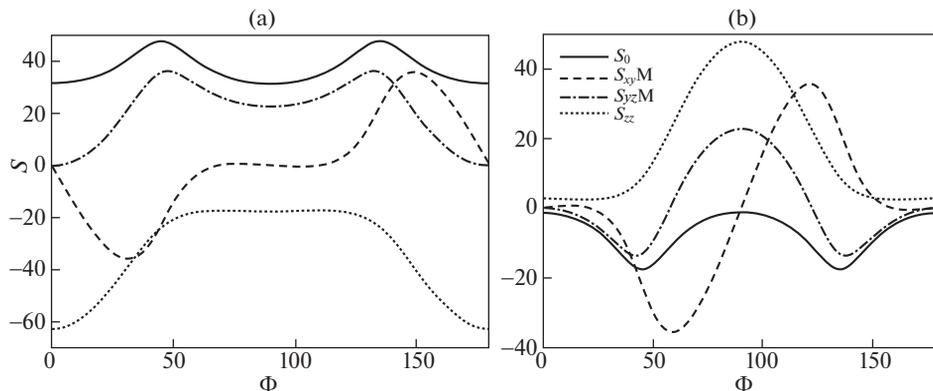


Рис. 3. (а) Зависимость  $S_0$ ,  $S_{xyM}$ ,  $S_{yzM}$ ,  $S_{zz}$  угла  $\Phi$  в случае сжатия, (б) Зависимость  $S_0$ ,  $S_{xyM}$ ,  $S_{yzM}$ ,  $S_{zz}$  угла  $\Phi$  в случае растяжения.  $\Phi$  измеряется в градусах, S – в МПа.

зерен по различным ориентировкам, затем проинтегрируем по всем возможным ориентировкам и окончательно получим

$$\langle P_{ij} \rangle = \int_{S_1} \rho(\mathbf{n}) P_{ij}(\mathbf{n}) d\mathbf{n} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\Phi, \varphi_1) P_{ij}(\Phi) \sin \Phi d\varphi_1 d\Phi \quad (5.1)$$

Здесь  $S_1$  – единичная сфера с центром в начале координат. Одним из очевидных преимуществ такого подхода является возможность рассмотрения различной геометрии деформации. Ограничимся здесь, как и ранее, случаем свободного растяжения и сжатия при равномерном распределении зерен по ориентировкам, т.е.  $\rho(\mathbf{n}) = \text{const}$  и текстура отсутствует. Образец – прямоугольный параллелепипед, ориентированный вдоль оси  $Oz$ , квадратного поперечного сечения. С торцов приложены силы растяжения или сжатия вдоль оси  $Oz$ , причем касательные составляющие предполагаем равными нулю. На боковых сторонах образца напряжения отсутствуют.

$$P_{xx} = P_{yy} = 0 \quad (5.2)$$

Из симметрии задачи следует, что деформация должна быть одноосной и в лабораторной системе координат имеет вид (4.1). Гидростатическое давление  $p$  находится из условий на свободных поверхностях (5.2). Из определения девиатора тензора напряжений (4.3), и гидростатического давления имеем

$$p = -\frac{1}{3} P_{ii} \quad (5.3)$$

Из условия (5.2) следует, что

$$P_{zz} = 1.5 S_{zz} \quad (5.4)$$

Выражение для девиатора тензора напряжения получается из (4.2)–(4.10), если принять  $p = 0$ . При отсутствии текстуры  $\rho(\Phi, \varphi_1) = 1/4\pi$  и соответствующие критические напряжения растяжения  $P_{tr}$  и сжатия  $P_{cr}$  с учетом (3.20) принимают вид

$$P_{tr} = \frac{3}{4} \int_0^{\pi} S_{zz}(\Phi) \sin \Phi d\Phi = 37 \text{ МПа} \quad (5.5)$$

$$P_{cr} = -\frac{3}{4} \int_0^{\pi} S_{zz}(\Phi) \sin \Phi d\Phi = 37 \text{ МПа} \quad (5.6)$$

Заметим, что случай (5.5) соответствует  $E < 0$ , а случай (5.6)  $-E > 0$ . Видно, что критические напряжения для сжатия и растяжения равны между собой. Полученные расчетные значения критических напряжений для сжатия и растяжения примерно в 1.5 раза превышают экспериментальные значения для литого поликристаллического магния  $\sigma_{0.2}$  [12].

**6. Заключение.** В рамках обобщенного на гексагональные кристаллы критерия текучести Мизеса, решена задача определения напряжения при заданном тензоре скоростей пластической деформации и известном значении приложенного внешнего давления.

Применен метод осреднения по Фойгту значений предела текучести по различным ориентировкам гексагональных монокристаллитов, с целью получения оценочных значений пределов текучести для поликристаллических образцов при одноосной деформации, в рамках предложенной модели. Данный подход дает правильный порядок условного предела текучести и, таким образом, значительно точнее описывает свойства поликристаллического гексагонального материала, в частности магния, чем классический подход Закса. Тем не менее, вычисленный предел текучести остается сильно завышенным.

Подробно исследован случай плоской деформации, найдены условия, когда главные оси тензора напряжений и деформаций совпадают.

Построены диаграммы линий уровня напряжений для начала пластического течения, рассчитаны компоненты девиатора тензора напряжений.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме “Давление” Г.р. № 122021000032-5.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kelley E.W., Hosford W.F.* Plane-strain compression of magnesium and magnesium alloy crystals // Trans. Metall. Soc. AIME. 1968. V. 242. P. 5–13.
2. *Wonsiewicz B.C., Backofen W.A.* Plasticity of magnesium crystals // Trans. Metall. Soc. AIME. 1967. V. 239. P. 1422–1431.
3. *Трусов П.В.* Классические и многоуровневые конститутивные модели для описания поведения металлов и сплавов: проблемы и перспективы (в порядке обсуждения) // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 1. С. 69–82.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329921010128>
4. *Vlasov A.M., Kesarev A.G.* Deformation model of magnesium single crystals // Russ. Phys. J. 2018. V. 61. P. 1258–1269.  
<https://doi.org/10.1007/s11182-018-1527-y>
5. *Власова А.М., Кесарев А.Г.* Обобщение критерия Мизеса на монокристаллы с гексагональной решеткой // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 6. С. 86–98.  
<https://doi.org/>
6. *Победра Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: МГУ, 1984. 336 с.
7. *Трусов П.В., Волегов П.С., Кондратьев Н.С.* Физические теории пластичности. Пермь: ПНИПУ, 2013. 244 с.
8. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1994. 560 с.
9. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1994. 528 с.
10. *Победра Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: МГУ, 1986. 264 с.
11. *Уманский Я.С., Скаков Ю.А., Иванов А.Н., Расторгуев Л.Н.* Кристаллография, рентгенография и электронная микроскопия. М.: Металлургия, 1982. 631 с.
12. *Лахтин Ю.М., Леонтьева В.П.* Материаловедение, М.: Машиностроение, 1990. 528 с.

УДК 531.3:681.5.01

## КОРРЕКЦИЯ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ПРИ СПУСКЕ В АТМОСФЕРЕ

© 2023 г. О. Е. Королев<sup>a,b,\*</sup>

<sup>a</sup> *Московский физико-технический институт (государственный университет),  
Долгопрудный, Россия*

<sup>b</sup> *ПАО “Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С.П. Королева”,  
Королев, МО, Россия*

*\*e-mail: oleg.korolev@rscf.ru*

Поступила в редакцию 08.11.2021 г.

После доработки 09.02.2022 г.

Принята к публикации 09.03.2022 г.

В статье излагается проблема определения углового положения при спуске на аппарате с малым аэродинамическим качеством. Представлено решение с помощью метода наименьших квадратов, который сводится к определению кватерниона ориентации с помощью системы линейных алгебраических уравнений. Предлагаемый метод основан на алгебраических свойствах кватернионов. Для получения измерений ускорения и угловой скорости используются вибрационно-струнный акселерометр и волоконно-оптический гироскоп. Данные о скорости и координатах аппарата доступны по показаниям аппаратуры спутниковой навигации.

*Ключевые слова:* спутниковая навигация, кватернионы, бесплатформенная инерциальная навигационная система (БИНС), метод наименьших квадратов

**DOI:** 10.31857/S0572329922060113, **EDN:** KGTPRW

**1. Введение.** В настоящее время основным космическим транспортным средством, осуществляющим спуск с орбиты искусственного спутника Земли, является аппарат с малым аэродинамическим качеством [1–3]. У таких аппаратов боковая управляющая аэродинамическая сила составляет  $\sim 0.3$  от силы продольного сопротивления воздуха. Характерными особенностями спуска на аппарате данного класса являются большие перегрузки, низкая точность и высокая надежность. Обеспечение высокой точности спуска является одной из основных задач системы управления и успешность ее выполнения напрямую зависит от успешности решения навигационной задачи, частью которой является определение углового положения спускаемого аппарата. Обычно задача определения ориентации космического аппарата (КА) решается с помощью приборов первичной информации: звездные датчики [4], приборы ориентации по Земле, приборы ориентации по Солнцу. По ним ориентация определяется непосредственно. Тем не менее, во время высокودинамичного процесса спуска использование оптико-электронных приборов невозможно в силу их уязвимости к помехам, создаваемым набегающим потоком. Таким образом, задача определения ориентации сводится к ее вычислению по показаниям аппаратуры спутниковой навигации (АСН) [5] и инерциальных измерительных приборов (ИИП): акселерометров [6] и волоконно-оптических гироскопов (ВОГ) [7].

Один из основных вопросов при решении навигационных задач – какой математический аппарат использовать для параметризации углового движения [8]? Как прави-

ло, это матрицы или кватернионы. Оба подхода имеют свои преимущества и недостатки. В процессе навигации кватернионы или матрицы используются в двух основных операциях: перепроектирование, то есть перевод вектора из одной системы координат в другую, и интегрирование кинематического уравнения, которое показывает как матрица или кватернион перехода изменяется со временем. Матрицу перехода можно параметризовать самолетными углами: крен, тангаж, рыскание. При этом кинематические уравнения для углов нелинейны и могут вырождаться. Непосредственное интегрирование кинематического уравнения для матрицы перехода не содержит эту проблему, однако возникает вопрос об отслеживании ортонормированности матрицы. Кватернионное кинематическое уравнение является линейным и не вырождается, но при этом необходимо следить за нормой. В вопросах выставки и коррекции БИНС предпочтительно использовать те параметры, на которые не накладываются условия нормировки, а также уравнение перепроектирования которых линейно. Несмотря на то, что перепроектирование с помощью кватернионов этим условиям не удовлетворяет, возникающих осложнений можно избежать. В данной работе показано как это можно сделать с помощью алгебраических свойств кватернионов. Как альтернатива, существует описание задачи об определении ориентации аппарата на спуске с использованием матрицы перехода [9]. Однако, оставлен без внимания вопрос: как избежать осложнений, возникающих из-за условий нормировки, налагаемых на компоненты матрицы?

Общая навигационная задача ставится следующим образом: определить все составляющие вектора состояния (ВС) – координаты, скорость, кватернион ориентации – в данный момент времени. Традиционно эта задача решается численным решением системы дифференциальных уравнений, а также использованием специальных систем уравнений – фильтров [10]. Они возникли на стыке теории управления и теории вероятностей и впервые описаны в статьях Р. Калмана в 1960 годах. Термин “фильтр” обозначает систему дифференциальных или разностных уравнений для ВС, в которую входит информация от внешних измерителей о какой-либо части ВС. В данном случае ВС содержит вектор координат, вектор скорости и кватернион ориентации. Внешней информацией служит скорость АСН. Использование фильтров в случае системы нелинейных дифференциальных уравнений затруднено, поскольку изначально они предназначались для линейных систем. Для нелинейных систем возникает необходимость применения дополнительных итерационных методов, позволяющих искать минимум квадратичного критерия, например метод градиентного спуска. Более того, фильтрация подразумевает точное знание параметров шума измерителей и наблюдаемой системы, что трудно осуществить на практике. Поэтому в данной работе рассматривается наиболее классический метод наименьших квадратов (МНК), применение которого не требует знания свойств погрешности приборов. При этом воздействие систематических составляющих должно быть минимальным, либо учитываться отдельно. Одна из причин, по которой был выбран именно МНК, заключается в следующем принципе решения практических вопросов управления/навигации: необходимо свести задачу к наиболее изученной математической форме, имеющей единственное решение. Такой математической формой является система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Практика показывает, что если МНК применим, то он сводится именно к СЛАУ, что продемонстрировано в данной работе.

**2. Постановка задачи.** Система дифференциальных уравнений (СДУ) БИНС выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{g}(\mathbf{r}) + K \circ R \circ \mathbf{a} \circ \tilde{R} \circ \tilde{K} \\ \dot{R} &= \frac{1}{2} R \circ \boldsymbol{\omega}\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = R \circ \mathbf{a} \circ \tilde{R}$$

Здесь  $\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}$  – негравитационное ускорение и угловая скорость, измеренные акселерометром и ВОГ. Основная часть ВС  $\mathbf{r}, \mathbf{v}, R$  – координаты скорость в замороженной гринвичской системе координат (ЗГСК) и кватернион перехода из ЗГСК в связанную с аппаратом систему координат (ССК). Вспомогательная часть ВС  $\mathbf{y}$  – интеграл негравитационного ускорения в ЗГСК. Используемые обозначения: кватернионное умножение  $\circ$ , сопряженный кватернион  $\tilde{R}$ , скалярное и векторное произведение  $(\cdot), [\cdot]$ . Понятие “негравитационное ускорение” используется вместо традиционного “кажущееся ускорение” для того, чтобы подчеркнуть суть измерений акселерометра.

Для того, чтобы обосновать наличие кватерниона  $K$ , фигурирующего в СДУ БИНС, необходимо воспользоваться следующим свойством. Решение уравнения:

$$\dot{R} = \frac{1}{2} R \circ \boldsymbol{\omega}(t)$$

с начальным условием  $R_0$ , отличается от решения того же уравнения с начальным условием  $K \circ R_0$  умножением на кватернион  $K$  слева. Можно убедиться непосредственной подстановкой

$$\begin{aligned} \frac{dR(t)}{dt} &\equiv \frac{1}{2} R(t) \circ \boldsymbol{\omega}(t) \\ \frac{dR(0)}{dt} &\equiv \frac{1}{2} R_0 \circ \boldsymbol{\omega}(0) \\ \frac{d(K \circ R(t))}{dt} &= K \circ \frac{dR(t)}{dt} = \frac{1}{2} K \circ R(t) \circ \boldsymbol{\omega}(t) \\ \frac{d(K \circ R(0))}{dt} &= \frac{1}{2} K \circ R_0 \circ \boldsymbol{\omega}(0) \end{aligned}$$

В связи с этим корректирующий кватернион  $K$  считается постоянным и в вектор состояния не входит в данной постановке. Полная информация об ориентации аппарата содержится в произведении  $K \circ R$  после того, как найден  $K$ . Более того, точность начальной ориентации  $R_0$  не влияет на конечный результат, если удастся найти кватернион  $K$ . Вектор гравитации  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  моделируется с учетом второй зональной гармоники разложения гравитационного потенциала по сферическим функциям. В качестве инерциальной системы координат, в которой интегрируется СДУ БИНС, используется ЗГСК.

Решение системы дифференциальных уравнений БИНС численным методом, например Рунге-Кутты четвертого порядка, позволяет осуществить основную навигационную задачу – определение ВС в данный момент времени. Задание начальных условий интегрирования, то есть  $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, R_0$  в начальный момент времени – это задача выставки БИНС. Поскольку численное интегрирование, а также показания приборов не являются идеально точными, со временем ВС становится известен с некоторой погрешностью  $\Delta \mathbf{r}, \Delta \mathbf{v}, \Delta R$ . Задача коррекции заключается в устранении этой погрешности. Показания АСН с высокой точностью определяют непосредственно координаты и скорость, что по сути является коррекцией и выставкой  $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ . Кватернион ориентации  $R$  по показаниям АСН определяется с низкой точностью и только при определенном наведении антенн на навигационные спутники, а это невозможно гарантировать во время спуска. Например, в [9] указано, что точность ориентации после накопления измерений в течение 5 минут составляет 2 градуса, согласно моделированию и летным испытаниям аппаратуры АСН-К. Поэтому в СДУ БИНС вводится корректирующий кватернион  $K$ , который необходимо определить косвенно.

**3. Решение навигационной задачи с помощью МНК.** Вариационные методы в классической механике насчитывают многолетнюю историю. Их характерной чертой является математическое выражение практической задачи в виде функционала – функции расхождения измеряемых и модельных переменных. В рассматриваемой задаче независимой переменной в функционале должен быть кватернион ориентации. Тогда первый шаг на пути решения – составление функционала, который подлежит минимизации. Для этого уравнение для скорости СДУ БИНС интегрируется между получением данных АСН:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\mathbf{v}} dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{g}(\mathbf{r}) dt + K \circ \int_{t_i}^{t_{i+1}} R \circ \mathbf{a} \circ \tilde{R} dt \circ \tilde{K}$$

Для интегрирования гравитационного ускорения по времени используется линейная интерполяция для концов интервала  $[t_i, t_{i+1}]$ , поскольку только в эти моменты с высокой точностью известны  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_i)$ ,  $\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}(t_{i+1})$ :

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{g}(\mathbf{r}_i) + \frac{\mathbf{g}(\mathbf{r}_{i+1}) - \mathbf{g}(\mathbf{r}_i)}{t_{i+1} - t_i} (t - t_i)$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{g}(\mathbf{r}(t)) dt = 0.5(t_{i+1} - t_i)(\mathbf{g}(\mathbf{r}_{i+1}) + \mathbf{g}(\mathbf{r}_i))$$

Данный подход к вычислению интеграла гравитационного ускорения ограничивает применимость в том смысле, что точность ухудшается по мере увеличения интервала  $[t_i, t_{i+1}]$ . Интеграл скорости:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\mathbf{v}} dt = \mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i$$

Интеграл негравитационного ускорения можно рассчитать по соответствующей переменной ВС:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} R \circ \mathbf{a} \circ \tilde{R} dt = \mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i$$

Таким образом, если совершить замену:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i - 0.5(t_{i+1} - t_i)(\mathbf{g}(\mathbf{r}_{i+1}) + \mathbf{g}(\mathbf{r}_i))$$

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i$$

можно прийти к формуле, в которой неизвестен только кватернион  $K$ :

$$\mathbf{u}_i = K \circ \mathbf{p}_i \circ \tilde{K}$$

В [8, 11] указан способ определения кватерниона перехода по двум неколлинеарным векторам, заданным в своих базисах. Основная проблема данного подхода заключается в том, что на протяжении небольшого промежутка времени векторы  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{p}_i$  не меняют направления. Это наталкивает на использование не двух векторов, а всех накопившихся в полете. Тогда формально составленный функционал для  $N$  измерений выглядит следующим образом:

$$F(K, \lambda) = \sum_{i=1}^N |\mathbf{u}_i - K \circ \mathbf{p}_i \circ \tilde{K}|^2 + \lambda(K \circ \tilde{K} - 1)$$

Здесь новая независимая переменная  $\lambda$  – множитель Лагранжа. Он необходим, поскольку среди четырех компонент кватерниона  $K = k_0 + \mathbf{k}$  независимых только три в силу условия нормировки:

$$K \circ \tilde{K} = k_0^2 + (\mathbf{k}, \mathbf{k}) = 1$$

То есть возникает задача поиска условного экстремума. Ее решение в режиме реального времени не представляется возможным, поскольку она сводится к нелинейной системе из 5 алгебраических уравнений. Для того чтобы избавиться от уравнения связи и от нелинейности выражение

$$\mathbf{u}_i = K \circ \mathbf{p}_i \circ \tilde{K}$$

умножается справа на  $K$ , а также делится на  $k_0$ . В результате:

$$\mathbf{u}_i \circ (1 + \mathbf{e}) = (1 + \mathbf{e}) \circ \mathbf{p}_i, \mathbf{e} = \frac{\mathbf{k}}{k_0}$$

Поскольку требуется, чтобы все

$$Q_i = \mathbf{u}_i \circ (1 + \mathbf{e}) - (1 + \mathbf{e}) \circ \mathbf{p}_i = 0$$

необходимо минимизировать сумму соотношений:

$$F = \sum_{i=1}^N Q_i \circ \tilde{Q}_i$$

$$F(\mathbf{e}) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{u}_i \circ (1 + \mathbf{e}) - (1 + \mathbf{e}) \circ \mathbf{p}_i) \circ (\mathbf{p}_i \circ (1 - \mathbf{e}) - (1 - \mathbf{e}) \circ \mathbf{u}_i)$$

Второй шаг на пути решения: поиск стационарной точки функционала  $F$ . Поскольку  $F$  является скалярной функцией векторного аргумента, для дальнейшего понадобятся некоторые мнемонические формулы

$$\left( \frac{dF}{d\mathbf{e}} \right)_i = \frac{\partial F}{\partial e_i}$$

$$\frac{d(\mathbf{a}, \mathbf{e})^2}{d\mathbf{e}} = 2\mathbf{a}\mathbf{a}^T \mathbf{e}$$

$$\frac{d|\mathbf{a} + [\mathbf{b}, \mathbf{e}]|^2}{d\mathbf{e}} = \frac{d(\mathbf{a} + [\mathbf{b}, \mathbf{e}], \mathbf{a} + [\mathbf{b}, \mathbf{e}])}{d\mathbf{e}} = 2[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + 2[[\mathbf{b}, \mathbf{e}], \mathbf{b}]$$

Здесь  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  – некоторые постоянные векторы. Итак, произведение сопряженных кватернионов:

$$Q_i \circ \tilde{Q}_i = (\mathbf{p}_i - \mathbf{u}_i, \mathbf{e})^2 + |\mathbf{u}_i - \mathbf{p}_i + [\mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i, \mathbf{e}]|^2$$

И производные отдельных компонент:

$$\frac{d(\mathbf{p}_i - \mathbf{u}_i, \mathbf{e})^2}{d\mathbf{e}} = 2(\mathbf{p}_i - \mathbf{u}_i)(\mathbf{p}_i - \mathbf{u}_i)^T \mathbf{e}$$

$$\frac{d|\mathbf{u}_i - \mathbf{p}_i + [\mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i, \mathbf{e}]|^2}{d\mathbf{e}} = 2[\mathbf{u}_i - \mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i] + 2[[\mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i, \mathbf{e}], \mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i]$$

После упрощений:

$$\frac{d(Q_i \circ \tilde{Q}_i)}{d\mathbf{e}} = (-4\mathbf{p}_i \mathbf{u}_i^T - 4\mathbf{u}_i \mathbf{p}_i^T + 2E(\mathbf{p}_i + \mathbf{u}_i, \mathbf{p}_i + \mathbf{u}_i))\mathbf{e} + 4[\mathbf{u}_i, \mathbf{p}_i]$$

Здесь  $E$  – единичная матрица. Итоговое условие стационарности точки  $\mathbf{e}$  у функции  $F(\mathbf{e})$  сводится к СЛАУ:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\mathbf{e}} &= \sum_{i=1}^N ((-4\mathbf{p}_i \mathbf{u}_i^T - 4\mathbf{u}_i \mathbf{p}_i^T + 2E(\mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i))\mathbf{e} + 4[\mathbf{u}_i, \mathbf{p}_i]) = 0 \\ &\left( \sum_{i=1}^N (-2\mathbf{p}_i \mathbf{u}_i^T - 2\mathbf{u}_i \mathbf{p}_i^T + E(\mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i)) \right) \mathbf{e} = 2 \sum_{i=1}^N [\mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i] \end{aligned}$$

Определив из этой системы вектор  $\mathbf{e}$ , можно вычислить кватернион  $K$  по формуле:

$$k_0 = (1 + (\mathbf{e}, \mathbf{e}))^{-0.5}, \quad \mathbf{k} = k_0 \mathbf{e}$$

В случае, если СЛАУ не имеет решения, то есть ее определитель равен 0, можно принять  $k_0 = 1$  и  $\mathbf{k} = 0$ , то есть коррекция отсутствует. Для того, чтобы стационарная точка была минимумом необходимо, чтобы вторая производная:

$$\frac{d}{d\mathbf{e}} \left( \frac{dF}{d\mathbf{e}} \right) = \sum_{i=1}^N (-2\mathbf{p}_i \mathbf{u}_i^T - 2\mathbf{u}_i \mathbf{p}_i^T + E(\mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i))$$

была положительно определенной матрицей. Для доказательства можно проверить свойство соответствующей квадратичной формы:

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}^T (-2\mathbf{p}_i \mathbf{u}_i^T - 2\mathbf{u}_i \mathbf{p}_i^T + E(\mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i)) \mathbf{e} = \\ &= \mathbf{e}^T ((\mathbf{p}_i - \mathbf{u}_i)(\mathbf{p}_i - \mathbf{u}_i)^T - (\mathbf{p}_i + \mathbf{u}_i)(\mathbf{p}_i + \mathbf{u}_i)^T + E(\mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i)) \mathbf{e} = \\ &= (\mathbf{e}, \mathbf{p}_i - \mathbf{u}_i)^2 - (\mathbf{e}, \mathbf{p}_i + \mathbf{u}_i)^2 + (\mathbf{e}, \mathbf{e})(\mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i) \geq 0 \end{aligned}$$

для любых  $\mathbf{u}_i, \mathbf{p}_i$ . Аналогично для всей суммы. В связи с этим, единственная стационарная точка  $F$  – это минимум.

В доказательство того, что приведенный алгоритм согласуется с уже существующей теорией, можно проверить соответствие с формулой определения кватерниона ориентации по двум векторам [8, 11]:

$$\mathbf{e} = \frac{[\mathbf{u}_1 - \mathbf{p}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{p}_2]}{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{p}_1, \mathbf{u}_2 + \mathbf{p}_2)}$$

для случая  $N = 2$ . Рассмотрение производных отдельных членов суммы до раскрытия:

$$\frac{d(Q_i \circ \tilde{Q}_i)}{d\mathbf{e}} = 2(\mathbf{p}_i - \mathbf{u}_i)(\mathbf{p}_i - \mathbf{u}_i)^T \mathbf{e} + 2[\mathbf{u}_i - \mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i] + 2[[\mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i, \mathbf{e}], \mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i]$$

с подстановкой  $\mathbf{e}$ , убеждает в том, что формулы взаимно однозначны. Для  $i = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} &(\mathbf{p}_i - \mathbf{u}_i)^T \frac{[\mathbf{u}_1 - \mathbf{p}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{p}_2]}{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{p}_1, \mathbf{u}_2 + \mathbf{p}_2)} = 0 \\ &[\mathbf{u}_i - \mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i] + [[\mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i, \mathbf{e}], \mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i] = [\mathbf{u}_i - \mathbf{p}_i + [\mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i, \mathbf{e}], \mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i] = \\ &\left[ \mathbf{u}_i - \mathbf{p}_i + \left[ \mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i, \frac{[\mathbf{u}_1 - \mathbf{p}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{p}_2]}{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{p}_1, \mathbf{u}_2 + \mathbf{p}_2)} \right], \mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i \right] = \\ &\left[ \mathbf{u}_i - \mathbf{p}_i + (\mathbf{u}_1 - \mathbf{p}_1) \frac{(\mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i, \mathbf{u}_2 - \mathbf{p}_2)}{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{p}_1, \mathbf{u}_2 + \mathbf{p}_2)} - (\mathbf{u}_2 - \mathbf{p}_2) \frac{(\mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i, \mathbf{u}_1 - \mathbf{p}_1)}{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{p}_1, \mathbf{u}_2 + \mathbf{p}_2)}, \mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i \right] = 0 \end{aligned}$$

в силу того, что:

$$(\mathbf{u}_i + \mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i - \mathbf{p}_i) = (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) - (\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_i) = 0$$

$$1 + \frac{(\mathbf{u}_1 + \mathbf{p}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{p}_2)}{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{p}_1, \mathbf{u}_2 + \mathbf{p}_2)} = 1 + \frac{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) - (\mathbf{u}_1, \mathbf{p}_2) + (\mathbf{p}_1, \mathbf{u}_2) - (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)}{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + (\mathbf{u}_1, \mathbf{p}_2) - (\mathbf{p}_1, \mathbf{u}_2) - (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)} = 0$$

Таким образом

$$\frac{dF}{de} = \sum_{i=1}^2 \frac{d(Q_i \circ \tilde{Q}_i)}{de} = 0$$

**4. Анализ результатов.** Приводимый алгоритм определения углового положения КА имеет ряд преимуществ и недостатков по сравнению с аналогичными методами. Основное преимущество – независимость от свойств шумов приборов и входных воздействий. В противоположность фильтру Калмана, в котором ковариационные матрицы используются для интегрирования дифференциального уравнения матрицы ошибок. Более того, размер матрицы ошибок в задаче с ВС  $\mathbf{r}, \mathbf{v}, R$ , состоящим из 10 компонент –  $10 \times 10$ , ее интегрирование в реальном времени может потребовать значительных вычислительных затрат. Еще одно преимущество данного метода – четкий критерий корректности выполнения, а именно определитель СЛАУ не равен 0. Также использование МНК в данном случае позволяет хранить сумму измерений, а не каждое измерение в отдельности, и модифицировать ее при поступлении новых данных.

Недостаток метода коротко можно обозначить так: МНК находит среднее значение  $K$ . Это означает, что если ошибка определения кватерниона ориентации  $\Delta R(t)$  меняется со временем, то МНК позволит устранить не текущую ошибку, а именно среднюю  $\overline{\Delta R(t)}$  за некоторый временной интервал сбора данных  $T$ . Например, при длительной работе алгоритма  $\Delta R(t)$  медленно меняется в связи с ошибками численного метода решения СДУ БИНС, а также из-за погрешности измерений  $\omega$ . Также может возникнуть сильное кратковременное изменение  $\Delta R(t)$  из-за выхода ВОГ за линейный диапазон измерений и в этом случае ошибка также не может быть полностью устранена. Поэтому МНК не является легко применимым автономным методом, для его длительного использования требуются дополнительные настройки типа обнуления данных или весовых коэффициентов для отдельных членов суммы. Еще одно свойство метода заключается в том, что для его стабильной работы требуется наличие значительного негравитационного ускорения, хотя это характерно для всех методов коррекции подобного рода.

На практике решаются совершенно аналогичные задачи определения ориентации по измерениям блока определения координат звезд (БОКЗ) на орбите. В противоположность полученному методу, демонстрирующему быстрое действие, методы представленные в [4] используют глубокий анализ данных звездных датчиков, гироскопических измерителей угловых скоростей и показаний АСН. При этом для оценки кватерниона ориентации в различных постановках используются МНК, метод множителей Лагранжа, дискретное преобразование Фурье. Зачастую минимизация полученного функционала требует использования итерационного метода Гаусса–Ньютона. Основным недостатком подробного анализа большого объема измерений являются значительные вычислительные затраты, хотя результатом является высокая точность ориентации. Еще одна практическая задача об ускоренном построении орбитальной ориентации по показаниям измерителей угловой скорости и априорном знании об ориентации ракеты-носителя при разделении представлена в [12]. При этом на борту совершается интегрирование назад кинематических и динамических уравнений углового движения, и общее затрачиваемое время на построение ориентации составляет примерно 600 с. Дополнительно результат работы алгоритма можно сравнивать с показаниями прибора ориентации по Земле. Использовать подобные операции во время быстропротекающего процесса спуска длительностью порядка 700 с не представляется воз-

можным, а использование датчиков ориентации по Земле и других оптико-электронных приборов невозможно в силу помех, создаваемых воздушным потоком.

**5. Заключение.** В работе представлено решение проблемы определения ориентации КА на спуске с помощью МНК. Задача характеризуется высокими требованиями к быстродействию. Хотя для навигационного обеспечения обычно используются традиционные алгоритмы динамической фильтрации, заявленный метод позволил прийти к математически законченной формуле для кватерниона ориентации. Несмотря на то, что исходная СДУ БИНС имеет 10 уравнений и является нелинейной, использование МНК сводит задачу определения ориентации к СЛАУ порядка 3. Это удовлетворительный результат, поскольку решение физической задачи с помощью хорошо изученных математических алгоритмов является важным для систем реального времени. Привести задачу к данной форме позволили исключительные алгебраические свойства кватернионов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евдокимов С.Н., Климанов С.И., Комарова Л.И., Микрин Е.А. Управление угловым движением спускаемого аппарата типа “Союз” при возвращении с орбиты спутника Земли // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 5. С. 134–143.
2. Легостаев В.П., Микрин Е.А., Орловский И.В., Борисенко Ю.Н., Платонов В.Н., Евдокимов С.Н. Создание и развитие систем управления движением космических кораблей “Союз” и “Прогресс”: опыт эксплуатации, планируемая модернизация // Труды МФТИ. 2009. Т. 1. № 3. С. 4–13.
3. Улыбышев У.П. Наведение космического корабля с малым аэродинамическим качеством в точку посадки // Изв. РАН. Косм. иссл. 2010. № 6. С. 549–556.
4. Аванесов Г.А., Красиков В.А., Никитин А.В., Сазонов В.В. Оценка точности определения параметров ориентации системы координат астроизмерительного прибора БОКЗ-М по экспериментальным данным // Изв. РАН. Косм. иссл. 2015. № 4. С. 292–305.  
<https://doi.org/10.31868/S0023420615030024>
5. Микрин Е.А., Михайлов М.В., Рожков С.Н., Семенов А.С. Результаты летного эксперимента на МКС по исследованию влияния переотражений на решение задач навигации, ориентации и сближения по измерениям аппаратуры спутниковой навигации // Гироскопия и навигация. 2012. № 1. С. 42–56.
6. Александров А.П., Прокудин Ю.П., Харьков И.А., Шустров А.Д. Применение вибрационно-струнных акселерометров в системах управления космических аппаратов // Полет. 2004. № 10. С. 18–25.
7. Голован А.А., Мишин В.Ю., Молчанов А.В., Чиркин М.В. Метод анализа влияния погрешностей гироскопического канала бесплатформенной инерциальной навигационной системы на погрешности инерциального счисления // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 4. С. 130–141.  
<https://doi.org/10.31857/S0002338821040041>
8. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
9. Микрин Е.А., Михайлов М.В. Ориентация, выведение, сближение и спуск космических аппаратов по измерениям от глобальных спутниковых навигационных систем. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. 357 с.
10. Шангареев А.Т., Тимаков С.Н., Платонов В.Н. Применение фильтра Калмана к задачам управления причаливанием космических аппаратов // Косм. техн. технол. 2016. № 4 (15). С. 57–66.
11. Бранец В.Н. Лекции по теории бесплатформенных инерциальных навигационных систем управления: учеб. пособие. М.: МФТИ, 2009. 304 с.
12. Борисенко Н.Ю., Сумароков А.В. Об ускоренном построении орбитальной ориентации грузовых и транспортных кораблей серий “Союз МС” и “Прогресс МС” // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 5. С. 131–141.  
<https://doi.org/10.7868/S0002338817050110>

УДК 629.7

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ ТВЕРДОГО ТЕЛА (КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА) ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗВОРОТА

© 2023 г. М. В. Левский<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup> Научно-исследовательский институт космических систем им. А.А. Максимова –  
филиал Государственного космического научно-производственного центра им. М.В. Хруничева,  
Королев, Россия

\*e-mail: levskii1966@mail.ru

Поступила в редакцию 31.10.2021 г.

После доработки 08.02.2022 г.

Принята к публикации 09.03.2022 г.

Представлено кватернионное решение динамической задачи оптимального разворота твердого тела (например, космического аппарата) из известного начального в заданное конечное угловое положение. Оптимизация программы управления проводится с использованием комбинированного показателя, сочетающего квадратичный критерий качества и время разворота, минимизируемый функционал объединяет в заданной пропорции энергетические затраты и длительность маневра. На основе принципа максимума и кватернионных моделей и методов исследования управляемого движения твердого тела (космического аппарата) получено решение поставленной задачи. Построение оптимального вращения основано на дифференциальном уравнении, связывающем кинетический момент и кватернион ориентации твердого тела. В аналитической форме записаны условия оптимальности и изучены свойства оптимального движения. Представлены аналитические уравнения и расчетные формулы для нахождения оптимального управления. Закон управления сформулирован в виде явной зависимости управляющих переменных от фазовых координат. Даны ключевые соотношения, определяющие оптимальные значения параметров алгоритма управления кинетическим моментом. В случае динамически симметричного тела дается полное решение задачи разворота в замкнутой форме: получены аналитические зависимости как явные функции времени для управляющих переменных и соотношения для расчета параметров закона управления. Приводятся численный пример и результаты математического моделирования вращения космического аппарата как твердого тела при оптимальном управлении, демонстрирующие практическую реализуемость предложенного метода управления.

*Ключевые слова:* кватернион, кинетический момент, управляющая функция, оптимальность, комбинированный критерий качества, принцип максимума, закон управления, краевая задача

DOI: 10.31857/S0572329922060137, EDN: KGUTWN

**Введение.** Решается задача перевода твердого тела (в частности, космического аппарата (КА)) из исходного углового положения в положение заданной ориентации. Главное отличие рассматриваемой задачи и предлагаемого решения состоит в оптимизации на основе нового критерия качества. Построение оптимальной программы разворота основывается на кватернионных моделях и принципе максимума.

Управляемые вращения твердого тела и соответствующие оптимизационные задачи исследовались неоднократно [1–28]. Большое количество работ соответствуют вращению вокруг неподвижной оси [1–8]; при этом принципы оптимизации и алгоритмы управления различны (в том числе на базе нечеткой логики [2], обратных задач динамики [3] или с помощью прогнозирующих моделей [4]). Проблема разработки высокоэффективных алгоритмов управления ориентацией КА остается актуальной и сегодня. Большой практический интерес представляют аналитические решения задачи оптимального разворота в замкнутой форме, поскольку они дают готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории движения КА, которые могут непосредственно применяться на борту КА. Для плоских вращений КА вокруг одной из главных центральных осей инерции и пространственного вращения сферически-симметричного тела оптимальные управления угловым движением изучены достаточно подробно [1, 5, 6, 9]. Также известны решения для осесимметричных КА [10–13], задачи оптимального по времени разворота [1, 7, 11–18], и кинематические задачи разворота в различных постановках [18–22]. В работе [19] минимизировался модуль кинетического момента во время разворота, что крайне важно при использовании инерционных исполнительных органов, которые в настоящее время широко применяют для управления КА [23–25]. В [20, 21] рассматриваются задачи построения с помощью принципа максимума оптимальных законов изменения вектора кинетического момента твердого тела для разворота за фиксированное время [20] (с минимизацией интегрального квадратичного функционала качества с подынтегральным выражением, являющимся взвешенной суммой квадратов проекций вектора кинетического момента) или разворота динамически симметричного тела, используя комбинированные функционалы качества, один из которых объединяет в заданной пропорции время и интеграл от квадрата модуля вектора кинетического момента, а другой — расход времени и импульса модуля вектора кинетического момента на разворот твердого тела [21]. Причем в обеих работах управлением считается вектор кинетического момента твердого тела [20, 21].

Для КА с произвольным соотношением моментов инерции и произвольными начальным и конечным угловыми положениями аналитического решения задачи пространственной переориентации не найдено; рассматривались только специфические случаи решения задачи разворота (например, [1, 6]). Ниже приводится кватернионное решение задачи управления угловым движением КА, когда фазовыми переменными являются кватернион ориентации связанной системы координат относительно инерциального базиса и кинетический момент КА (как твердого тела), а оптимизация выполнена на основе комбинированного показателя качества, который объединяет в заданной пропорции энергетические затраты на переориентацию КА и время разворота; фактор времени позволяет ограничить длительность маневра, а наличие интеграла от квадратичной свертки по силовым моментам ограничивает максимальный управляющий момент в процессе разворота. Вопросы экономичности при управлении движением КА остаются до сих пор актуальными, из-за чего решаемая ниже задача управления является практически важной. В отличие от упомянутых исследований [20, 21], в статье решается динамическая задача оптимального разворота, когда управлением является силовой момент, действующий на корпус КА. Представленное решение отличается от ранее известных.

**1. Уравнения углового движения и постановка задачи управления.** Движение КА (как твердого тела) относительно центра масс описывается известным уравнением [1, 5]:

$$\dot{\mathbf{L}} + (\mathbf{I}^{-1}\mathbf{L}) \times \mathbf{L} = \mathbf{M} \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{L}$  — кинетический момент твердого тела (КА),  $\mathbf{I}$  — тензор инерции твердого тела,  $\mathbf{M}$  — главный момент сил  $\mathbf{M}$  (символ  $\times$  означает векторное произведение векторов). Управление движением КА относительно центра масс производится за счет измене-

ния силового момента  $\mathbf{M}$ . Особенностью управления во время космического полета является малость возмущающих моментов, вызванных сопротивлением среды и взаимодействием КА с внешними полями.

Пространственное движение КА вокруг центра масс будем описывать с помощью кватернионов (параметров Родрига–Гамильтона). Ориентацию связанного базиса относительно опорного базиса зададим кватернионом  $\Lambda$  (для удобства кватернион  $\Lambda$  считается нормированным  $\|\Lambda\| = 1$ ) [1]. Опорный базис полагаем инерциальным. Кинематическое уравнение, связывающее кинетический момент  $\mathbf{L}$  и кватернион ориентации  $\Lambda$  твердого тела, имеет вид [1]:

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ (\Gamma^{-1}\mathbf{L}) \quad (1.2)$$

где символ “ $\circ$ ” – знак умножения кватернионов [1, с. 11–20] (под кватернионным умножением на вектор понимается умножение на кватернион с нулевой скалярной частью).

Задачи, когда разворот выполняется из состояния покоя в состояние покоя, встречаются достаточно часто и имеют практическое значение. Выпишем краевые условия задачи оптимального управления для динамической системы (1.1), (1.2):

$$\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}, \quad \mathbf{L}(0) = 0 \quad (1.3)$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_f, \quad \mathbf{L}(T) = 0 \quad (1.4)$$

где  $T$  – время окончания поворотного маневра. Кватернионы  $\Lambda_{\text{in}}$  и  $\Lambda_f$ , отражающие ориентацию связанных с КА осей в начальный и конечный моменты времени, имеют произвольные наперед заданные значения, удовлетворяющие условию  $\|\Lambda_{\text{in}}\| = \|\Lambda_f\| = 1$  (предполагается, что  $\Lambda_f \neq \Lambda_{\text{in}}$ ).

Полагаем, что управление угловым положением КА осуществляется относительно главных центральных осей инерции КА (т.е. оси связанного базиса параллельны главным центральным осям инерции КА). Эффективность управления оценивается интегральной величиной

$$G = \int_0^T (M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3) dt + k_0 T \quad (1.5)$$

где  $k_0 > 0$  – постоянный положительный коэффициент ( $k_0 \neq 0$ );  $M_i$  – проекции главного момента сил  $\mathbf{M}$  на главные центральные оси эллипсоида инерции КА;  $J_i$  – главные центральные моменты инерции КА. Сформулируем задачу оптимального управления следующим образом: требуется перевести твердое тело (КА) из состояния (1.3) в состояние (1.4) в соответствии с уравнениями (1.1), (1.2) с минимальным значением показателя (1.5). Время  $T$  не фиксировано. Решение  $\mathbf{M}(t)$  ищем в классе кусочно-непрерывных функций времени.

Принятый критерий качества позволяет найти программу вращения (переориентации) с минимальными затратами управляющих ресурсов и времени. Сформулированная задача управления отличается от решаемых ранее задач видом функционала (1.5), при котором управляющие переменные не могут быть неограниченно большими (даже в отсутствие ограничений на управление). Фактор времени, присутствующий в критерии оптимальности (1.5), ограничивает длительность  $T$  оптимального разворота некоторым конечным значением  $T_{\text{opt}}$  (коэффициент  $k_0 \neq 0$ ). И еще одна особенность – поскольку время  $T$  не фиксировано, то требуемый поворотный маневр реализуется при любых условиях разворота  $\Lambda_{\text{in}}$ ,  $\Lambda_f$  и заданных значениях  $J_1, J_2, J_3, k_0$ . Задача оптимального изменения кинетического момента во время разворота КА, когда качество программы управления определяется характеристикой (1.5), достаточно актуальна (подынтегральное выражение в (1.5) отражает энергию управляющих ускорений, а коэффициент  $k_0$  определяет максимальный управляющий момент в ходе разворота).

**2. Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина.** Рассматриваемая задача оптимального управления (1.1)–(1.5) есть задача динамического оптимального разворота твердого тела [1], в которой  $\mathbf{L}$  и  $\Lambda$  – фазовые переменные, а управляющими функциями являются моменты  $M_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ). Поставленную задачу решаем на основе необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина [29].

*2.1. Функция Гамильтона и сопряженная система уравнений.* Введем сопряженные переменные  $\varphi_i$ , соответствующие проекциям кинетического момента на оси связанного базиса  $L_i$ . Критерий оптимальности (1.5) не содержит позиционных координат (элементов кватерниона ориентации  $\Lambda$ ), поэтому вместо сопряженных переменных  $\psi_j$ , которые соответствуют компонентам  $\lambda_j$  кватерниона  $\Lambda$  ( $j = \overline{0, 3}$ ), используем следующие переменные  $r_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$  [26]:

$$\begin{aligned} r_1 &= (\lambda_0\psi_1 + \lambda_3\psi_2 - \lambda_1\psi_0 - \lambda_2\psi_3)/2, & r_2 &= (\lambda_0\psi_2 + \lambda_1\psi_3 - \lambda_2\psi_0 - \lambda_3\psi_1)/2 \\ r_3 &= (\lambda_0\psi_3 + \lambda_2\psi_1 - \lambda_3\psi_0 - \lambda_1\psi_2)/2 \end{aligned}$$

Впервые такую замену переменных предложили В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский и М.Б. Черток, Ю.В. Казначеев [1, 11]; позднее аналогичный прием использовали многие авторы [9, 10, 13, 18–24], в том числе при решении задач оптимального разворота твердого тела в постановках (1.1)–(1.4), но с другими функционалами оптимизации – чистые быстродействие и минимум энергозатрат (в частности, когда они содержат модуль вектора управляющего момента) [11, 27]. Оптимальные функции  $r_i$ , как компоненты вектора  $\mathbf{r}$ , и вектор  $\mathbf{r}$  удовлетворяют уравнениям [26]:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times (I^{-1}\mathbf{L})$$

$$\dot{r}_1 = L_3r_2/J_3 - L_2r_3/J_2, \quad \dot{r}_2 = L_1r_3/J_1 - L_3r_1/J_3, \quad \dot{r}_3 = L_2r_1/J_2 - L_1r_2/J_1 \quad (2.1)$$

Запишем функцию Гамильтона для задачи оптимального управления (1.1)–(1.5) [26]:

$$\begin{aligned} H &= -(M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3) - k_0 + \varphi_1(M_1 + (1/J_3 - 1/J_2)L_2L_3) + \\ &+ \varphi_2(M_2 + (1/J_1 - 1/J_3)L_1L_3) + \varphi_3(M_3 + (1/J_2 - 1/J_1)L_1L_2) + L_1r_1/J_1 + L_2r_2/J_2 + L_3r_3/J_3 \end{aligned}$$

Согласно принципу максимума уравнения для сопряженных функций  $\varphi_i$  имеют вид [29]:

$$\dot{\varphi}_i = -\frac{\partial H}{\partial L_i} \quad (i = \overline{1, 3})$$

В результате получим следующую сопряженную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= L_3\varphi_2(1/J_3 - 1/J_1) + L_2\varphi_3(1/J_1 - 1/J_2) - r_1/J_1 \\ \dot{\varphi}_2 &= L_1\varphi_3(1/J_1 - 1/J_2) + L_3\varphi_1(1/J_2 - 1/J_3) - r_2/J_2 \\ \dot{\varphi}_3 &= L_2\varphi_1(1/J_2 - 1/J_3) + L_1\varphi_2(1/J_3 - 1/J_1) - r_3/J_3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вектор  $\mathbf{r}$  является постоянным относительно инерциального базиса и  $|\mathbf{r}| = \text{const} \neq 0$ . Решение  $\mathbf{r}(t)$  системы (2.1) зависит от начальной  $\Lambda_{\text{in}}$  и конечной  $\Lambda_f$  ориентаций КА. Оптимальная функция  $\mathbf{r}(t)$  определяется кватернионом  $\Lambda(t)$  [1, 26]:

$$\mathbf{r} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda, \quad \text{где} \quad \mathbf{c}_E = \text{const} = \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{r}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}}$$

(составляющие вектора  $\mathbf{c}_E$  – проекции вектора  $\mathbf{r}$  на оси инерциального базиса);  $\tilde{\Lambda}$  – кватернион, сопряженный кватерниону  $\Lambda$  [1, с. 11–20]. Считается, что  $\mathbf{r}(0) \neq 0$  (в противном случае  $r_1 = r_2 = r_3 \equiv 0$  и дальнейшее решение задачи теряет смысл). Направление вектора  $\mathbf{c}_E$  зависит от начального и конечного положений КА. Для того, чтобы КА имел требуемую ориентацию на правом конце  $\Lambda(T) = \Lambda_f$ , необходимо определить век-

тор  $\mathbf{c}_E$  (или значение вектора  $\mathbf{r}$  в начальный момент времени) исходя из получающихся при этом решений системы (1.2).

2.2. *Условия максимума гамильтониана и структура оптимального управления.* Гамильтониан  $H$  – квадратичная функция вектора управления  $\mathbf{M}$ , и ее максимум определяется необходимыми условиями экстремума  $\partial H/\partial M_i = 0$ , которым удовлетворяют значения

$$M_i = J_i \varphi_i / 2 \quad (2.3)$$

Замкнутая система уравнений (1.1), (1.2), (2.1)–(2.3) определяет оптимальное решение. Задача построения оптимальной программы управления сводится к решению системы уравнений углового движения КА (1.1), (1.2), сопряженных уравнений (2.2) и уравнений (2.1) при условии, что управляющие функции  $M_i$  вычисляются в соответствии с (2.3) (системой уравнений (2.1)–(2.3) формализуются необходимые условия оптимальности для исходной задачи оптимального управления (1.1)–(1.5)).

Обозначим  $r_0 = |\mathbf{r}(t)|$ ,  $L_m = |\mathbf{L}|$ . С учетом условия  $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}(T) = 0$  система уравнений (1.1), (2.1)–(2.3) имеет единственное решение, которое удовлетворяет соотношениям:

$$\varphi_i = (\rho - t)r_i/J_i \quad (2.4)$$

$$L_i = L_m(t)r_i/r_0 \quad (2.5)$$

где  $\rho = \text{const} > 0$  – скалярная величина (факт соответствия (2.5) уравнениям (2.1) легко проверить, подставив равенства (2.5) в уравнения движения (1.1) с учетом (2.3) и (2.4)).

Значение  $\mathbf{r}(0)$  таково, чтобы в результате интегрирования уравнений (1.1), (1.2), (2.1)–(2.3) с начальными условиями  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$  для траектории вращения  $\Lambda(t)$  выполнялось равенство  $\Lambda(T) = \Lambda_f$ . Если рассматривать нормированный вектор  $\mathbf{p} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ , то краевая задача принципа максимума заключается в определении значения вектора  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$  и положительной величины  $r_0$ , при которых решение системы дифференциальных уравнений (1.1), (1.2), (2.1), (2.2), (2.4) с одновременным выполнением (2.3) удовлетворяло условиям разворота (1.3), (1.4) (с учетом соотношений  $r_i = r_0 p_i$ ). В оптимальном решении сопряженные переменные  $\varphi_i$  подчиняются уравнениям (2.4), и оптимальный управляющий момент  $\mathbf{M}$  имеет значение

$$M_i = (\rho - t)r_i/2 \quad (2.6)$$

Как видно из (2.1), (2.6), при оптимальном управлении силовой момент  $\mathbf{M}$  действует вдоль прямой, неподвижной в инерциальной системе координат. Поэтому при нулевом начальном и конечном кинетическом моментах решение системы (1.1), (2.1)–(2.3) описывает движение, при котором кинетический момент КА  $\mathbf{L}$  имеет постоянное направление в инерциальной системе координат, причем это решение единственное (так как  $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}(T) = 0$ ).

Истинность решения (2.4), (2.5) для системы дифференциальных уравнений (1.1), (2.1)–(2.3) подтверждается последовательной подстановкой зависимостей (2.4) в уравнения (2.2) с учетом соотношений (2.1), (2.5) для всех  $i = 1, 2, 3$  (равенства (2.5) непосредственно следуют из системы (1.1), (2.1), (2.6)). Если обозначить  $\boldsymbol{\varphi}$  – вектор, компонентами которого являются сопряженные функции  $\varphi_i$ , то система (2.2) принимает вид

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\varphi} \times (I^{-1}\mathbf{L}) + I^{-1}(\mathbf{L} \times \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{r}) \quad (2.7)$$

Подставим значения  $\boldsymbol{\varphi}$  и  $\mathbf{L}$ , рассчитанные в соответствии с найденным решением (2.4), (2.5), в уравнение (2.7). Вычисление левой части (2.7) с учетом (2.1), (2.4) дает следующее:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varphi}} &= (\rho - t)I^{-1}\dot{\mathbf{r}} - I^{-1}\dot{\mathbf{r}} = (\rho - t)I^{-1}(\mathbf{r} \times (I^{-1}\mathbf{L})) - I^{-1}\dot{\mathbf{r}} = \\ &= I^{-1}(L_m(r - t)\mathbf{r} \times (I^{-1}\mathbf{r})/r_0 - \dot{\mathbf{r}}) \end{aligned}$$

Подстановка (2.4), (2.5) в правую часть уравнения (2.7) дает следующий результат:

$$\begin{aligned} (I^{-1}(\rho - t)\mathbf{r}) \times (I^{-1}\mathbf{L}) + I^{-1}(\mathbf{L} \times (I^{-1}(\rho - t)\mathbf{r}) - \mathbf{r}) &= (I^{-1}(\rho - t)\mathbf{r}) \times (I^{-1}L_m\mathbf{r})/r_0 + \\ + I^{-1}(L_m\mathbf{r} \times (I^{-1}(\rho - t)\mathbf{r})/r_0 - \mathbf{r}) &= I^{-1}(L_m(\rho - t)\mathbf{r} \times (I^{-1}\mathbf{r})/r_0 - \mathbf{r}) \end{aligned}$$

В итоге убедились, что соотношения (2.4), (2.5) превращают уравнение (2.7) в тождество. Следовательно, зависимости (2.4), (2.5) есть решение системы уравнений (1.1), (2.1)–(2.3).

2.3. *Свойства оптимального управления.* Поскольку вращение с минимальным значением (1.5) одновременно удовлетворяет уравнениям (2.1) и (2.5), то оптимальное изменение кинетического момента описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{L}_m\mathbf{L}/L_m + \mathbf{L} \times (I^{-1}\mathbf{L})$$

Для исследования свойств оптимального решения  $\mathbf{M}(t)$  введем скалярную функцию  $m(t)$ , равную скалярному произведению векторов  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{p}$ . Тогда  $\mathbf{M} = m(t)\mathbf{p}$ . В начальный момент времени  $t = 0$  модуль  $|\mathbf{M}(0)| = m_0 = r_0\rho/2$ . Значение константы  $\rho = T/2 = 2m_0/r_0$ . Следовательно,  $m(t) = m_0 - r_0t/2 = m_0(1 - 2t/T)$ . Перепишем закономерность (2.6) в следующем виде

$$M_i = m_0(1 - 2t/T)p_i \quad (2.8)$$

Управление (2.8) динамической системой (1.1), (1.2), когда модуль момента  $\mathbf{M}$  изменяется как кусочно-линейная функция времени, удовлетворяет необходимым условиям оптимальности для критерия (1.5) (направление момента  $\mathbf{M}$  параллельно прямой, неподвижной относительно инерциального базиса). Так как разворот выполняется из состояния покоя в состояние покоя, то такое управление кинетическим моментом всегда можно осуществить (замкнутая система (1.1), (2.1)–(2.3) имеет решение при любых значениях  $\Lambda_{in}$  и  $\Lambda_f$ ).

Изучим свойства функции  $L_m(t)$ . Подстановка (2.5) в (1.1) с учетом (2.1) дает  $\mathbf{M} = \dot{L}_m\mathbf{r}/r_0$ . После сравнения с соотношениями (2.8) заключаем, что  $\dot{L}_m = m(t) = m_0 - r_0t/2$ . Из (2.3) получим  $\boldsymbol{\varphi} = 2I^{-1}\mathbf{M} = 2\dot{L}_mI^{-1}\mathbf{p}$ , что совпадает с (2.4), если  $(\rho - t)r_0 = 2\dot{L}_m$  и  $\ddot{L}_m = -r_0/2$ . На концах траектории вращения (в точках  $t = 0$  и  $t = T$ ) имеем  $L_m(0) = L_m(T) = 0$  (поскольку по условиям разворота  $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}(T) = 0$ ). В точке  $t = T/2$  кинетический момент максимален и  $\mathbf{M}(T/2) = 0$ . Скалярная функция  $L_m(t)$  в оптимальном решении имеет вид:  $L_m(t) = m_0t(1 - t/T)$ , а время разворота и максимальный модуль силового момента связаны соотношением  $m_0 = r_0T/4$ . Оптимальный закон изменения кинетического момента выглядит следующим образом:

$$L_i = m_0t(1 - t/T)p_i \quad (2.9)$$

Оптимальные функции  $L_i(t)$ ,  $\varphi_i(t)$ ,  $r_i(t)$  соответствуют требованиям (2.4), (2.5), в которых переменные  $r_i(t)$  являются решением системы (2.1). Оптимальные управления определяются выражениями (2.8). Оптимальным (в смысле минимума функционала (1.5)) является вращение, при котором направление кинетического момента КА остается неизменным относительно инерциальной системы координат (векторы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{L}$  параллельны на всем интервале управления). Управление (2.6) оптимально, потому что оно – единственное решение системы уравнений (1.1), (2.1)–(2.3), которая отражает необходимые условия оптимальности.

Еще одним основным свойством оптимального разворота КА является постоянство соотношения кинетической энергии вращения  $E$  к квадрату модуля кинетического момента КА во все время движения (на всем отрезке времени  $[0, T]$ ). Докажем сделанное утвержде-

ние. Найдем  $E = L_m^2(r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3)/(2r_0^2)$  и  $E/|\mathbf{L}^2| = (r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3)/(2r_0^2) = \text{const}$  (напомним,  $r_0 = |\mathbf{r}(t)| = \text{const}$ ). Нетрудно показать, что у оптимального вращения, которое подчиняется уравнениям (2.1), (2.5), наблюдается закономерность  $r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3 = \text{const}$ . Для проверки этого утверждения достаточно продифференцировать по времени левую часть указанного равенства с учетом зависимостей (2.1), (2.5) и убедиться, что полученная производная равна нулю после подстановки  $\dot{r}_i$  по формулам (2.1) и затем  $L_i$  по выражениям (2.5).

Обозначим  $L_{\max}$  – максимальное значение функции  $L_m(t)$ . При оптимальном изменении кинетического момента  $\mathbf{L}(t)$  вращение имеет свойство симметрии и характеризуется следующими закономерностями:

$$\begin{aligned} \Lambda \circ \mathbf{M}(T-t) \circ \tilde{\Lambda} &= -\Lambda \circ \mathbf{M}(t) \circ \tilde{\Lambda}, & \Lambda \circ \mathbf{L}(T-t) \circ \tilde{\Lambda} &= \Lambda \circ \mathbf{L}(t) \circ \tilde{\Lambda} \\ \max_{t < T/2} m(t) &= -\min_{t > T/2} m(t) = m(0) \\ L_{\max} &= |\mathbf{L}(T/2)|, & \int_0^{T/2} |\mathbf{L}(t)| dt &= \int_{T/2}^T |\mathbf{L}(t)| dt \end{aligned}$$

Максимальный управляющий момент  $m_0 = |\mathbf{M}(0)| = |\mathbf{M}(T)|$ . Свойство оптимального решения  $m(T) = -m(0)$  следует из структуры функции  $L_m(t)$ , а именно

$$L_m(0) = 0, \quad L_m(T) = 0, \quad L_m(t) = \int_0^t (m_0 - r_0 t/2) dt = m_0 t(1 - t/T)$$

**2.4. Подтверждение единственности оптимального решения.** Пусть  $\mathbf{q}$  – орт, параллельный моменту  $\mathbf{M}$ , причем в начальный момент времени  $t = 0$  направления векторов  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{q}$  совпадают. Тогда  $\boldsymbol{\varphi} = fI^{-1}\mathbf{q}$ , где  $f$  – скалярная функция, у которой  $f(0) > 0$ . В окрестности точки  $t = 0$  имеем  $\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}$  и  $\mathbf{L} = \chi\mathbf{q}$ , где  $\chi$  – скалярная величина. Подставим  $\boldsymbol{\varphi} = fI^{-1}\mathbf{q}$  в уравнения  $\dot{\mathbf{M}} = I\boldsymbol{\varphi}/2$  и (1.1) с учетом условия  $\mathbf{L} = \chi\mathbf{q}$  и соотношений (2.1). Получим следующее уравнение

$$\mathbf{q}\dot{\chi} + \dot{\mathbf{q}}\chi + (\chi I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}\chi = m(t)\mathbf{q} \quad (2.10)$$

Сумма  $\dot{\mathbf{q}}\chi + (\chi I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}\chi$  ортогональна орту  $\mathbf{q}$  или равна нулю (всегда  $\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$ , так как  $|\mathbf{q}| = 1$ ); символ  $\cdot$  означает скалярное произведение векторов. Уравнение (2.10) будет выполнено в единственном случае, если  $\dot{\chi} = m(t)$  и  $\dot{\mathbf{q}} = -(\chi I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}$ . Теперь подставим равенства  $\boldsymbol{\varphi} = f(t)I^{-1}\mathbf{q}$  и  $\mathbf{L} = \chi\mathbf{q}$  в правую и левую части уравнения (2.7). Рассмотрим левую часть (2.7)

$$fI^{-1}\dot{\mathbf{q}} + fI^{-1}\dot{\mathbf{q}} = fI^{-1}\dot{\mathbf{q}} - fI^{-1}((\chi I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q})$$

(уравнения (1.1), (2.2) должны выполняться одновременно, поэтому свойство  $\dot{\mathbf{q}} = -(\chi I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}$  взято из (2.10)). Теперь найдем правую часть уравнения (2.7)

$$(fI^{-1}\mathbf{q}) \times (I^{-1}\chi\mathbf{q}) + I^{-1}(\chi\mathbf{q} \times (fI^{-1}\mathbf{q}) - \mathbf{r}) = -f^{-1}((\chi I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}) - I^{-1}\mathbf{r}$$

Приравняв левую и правую части уравнения (2.7) получаем  $\dot{f}\mathbf{q} = -\mathbf{r}$ , из чего заключаем:  $\dot{f} = -r_0$  и  $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p} = \mathbf{r}/r_0$  (так как  $f(0) > 0$ , а  $f(T) < 0$ , и потому  $\dot{f} < 0$ ). Учитывая, что  $\boldsymbol{\omega} = I^{-1}\mathbf{L}$  есть угловая скорость, приходим к следующему выводу: если существует момент времени  $t$ , когда угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  и вектор сопряженных переменных  $\boldsymbol{\varphi}$  параллельны, то они параллельны на всем интервале управления  $0 < t < T$ . По условиям задачи управления  $\mathbf{L}(0) = 0$  и  $\mathbf{L}(T) = 0$ , из-за чего векторы  $\boldsymbol{\varphi}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  параллельны как мини-

мум два раза – в самом начале разворота и в самом конце разворота ( $\omega = ht\phi$  при  $t \rightarrow 0$ , и  $\omega = -h(T-t)\phi$  при  $t \rightarrow T$ ). Поэтому заключаем, что при оптимальном управлении на всем отрезке времени  $t \in [0, T]$  имеет место свойство  $\mathbf{L} \parallel \mathbf{r}$ . Следовательно, оптимальное вращение обязательно удовлетворяет соотношениям (2.4), (2.5).

Доказано, что зависимости (2.4), (2.5) – единственное решение системы уравнений (1.1), (2.1)–(2.3) при условии  $\mathbf{L}(0) = 0, \mathbf{L}(T) = 0$ . В момент времени  $t = T/2$  силовой момент  $\mathbf{M}$  обнуляется  $\mathbf{M}(T/2) = 0$ , а кинетический момент КА принимает максимальное значение.

**3. Нахождение основных констант оптимального управления.** Поскольку гамильтониан  $H$  не зависит от времени в явном виде и время окончания маневра  $T$  не фиксировано, то на оптимальной траектории  $H = \text{const} = 0$  [30]. Поэтому

$$H = -k_0 + (L_m/r_0 + (\rho - t)^2/4)(r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3) = 0$$

На основании необходимого условия оптимальности  $H = 0$  найдем время разворота, максимальную величину управляющего момента и максимальный кинетический момент. Из структуры гамильтониана условие  $H(T) = 0$  принимает вид

$$H = M_1\phi_1 + M_2\phi_2 + M_3\phi_3 - (M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3) - k_0 = 0$$

(так как в конечный момент времени  $t = T$  кинетический момент  $\mathbf{L}(T) = 0$ ). Учитывая (2.4), (2.6), получим уравнение:  $C^2 r_0^2 (\rho - T)^2/4 - k_0 = 0$ , из которого  $C^2 r_0^2 T^2 = 16k_0$  и  $m_0 = \sqrt{k_0}/C$ , где  $C = \sqrt{p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3}$ ,  $p_{i0} = p_i(0)$  (так как время разворота  $T = 4m_0/r_0$ , и  $\rho = 2m_0/r_0$ ).

Если  $L_m = 0$ , то гамильтониан равен  $H = m_0^2 C^2 - k_0 = 0$ .

Если  $t = T/2$ , то  $m(t) = |\mathbf{M}| = 0$  и  $H(T/2) = r_0 L_{\max} C^2 - k_0 = 0$ , откуда  $L_{\max} = k_0/(r_0 C^2)$ .

Значение  $r_0$  для оптимального решения равно  $r_0 = 4\sqrt{k_0}/(CT)$  и связано с максимальным управляющим моментом  $m_0$  и временем разворота  $T$  зависимостью  $r_0 = 4m_0/T$ . Максимальный модуль кинетического момента определяется параметром  $m_0$ . Длительность оптимального разворота  $T$  зависит от максимального управляющего момента  $m_0$  и значения интеграла

$$F = \int_0^T |\mathbf{L}(t)| dt \tag{3.1}$$

и составляет  $T = \sqrt{6F/m_0}$ , или  $T = \sqrt{6S/\sqrt{k_0}}$ , где  $S$  – функционал пути [22]:

$$S = \int_0^T \sqrt{J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2} dt, \quad S = FC$$

Соответственно,  $r_0 = 4m_0\sqrt{m_0}/(6F)$ ,  $L_{\max} = \sqrt{3F\sqrt{k_0}}/(8C)$ , так как  $L_{\max} = m_0 T/4 = \sqrt{3m_0 F}/8$  (напомним, что  $m_0 = \sqrt{k_0}/C$ ). Максимальная энергия вращения  $E_{\max} = 3FC\sqrt{k_0}/16 = 3S\sqrt{k_0}/16$ .

Значения  $F$  и  $S$  не зависят от характера изменения модуля  $|\mathbf{L}(t)|$  и определяются исключительно кватернионом разворота  $\Lambda_t = \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda_t$  и моментами инерции КА  $J_1, J_2, J_3$  [22]. Нетрудно доказать, что найденные значения времени  $T$ , а также остальных характеристик разворота действительно оптимальны по критерию (1.5). Вычислим значение  $G$  для закона (2.8).

$$G = k_0 T + m_0^2 C^2 T/3 = k_0 T + 12F^2 C^2 / T^3, \text{ потому что } F = m_0 T^2/6, \text{ а значит } m_0 = 6F/T^2$$

Минимум  $G$  достигается в точке  $T = \sqrt{6FC/\sqrt{k_0}}$ , при котором  $m_0 = \sqrt{k_0}/C$ .

$$L_{max} = \sqrt{3F\sqrt{k_0}/(8C)}$$

Как видим, время оптимального разворота  $T$  зависит только от коэффициента  $k_0$  минимизируемого функционала. Величина (1.5) при оптимальном управлении равна  $G = 4k_0T/3$ .

Если рассматривать приведенные управления  $u_i = M_i/\sqrt{J_i}$  [11], то  $|\mathbf{u}|^2$  характеризует энергетику управляющих воздействий, интеграл

$$Q = \int_0^T (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) dt$$

соответствует энергетическим затратам на разворот, где  $T$  – время, затраченное на перевод КА из положения (1.3) в положение (1.4);  $\mathbf{u}$  – приведенный вектор управления, компонентами которого являются  $u_i$ . Значение показателя качества (1.5) таково  $G = Q + k_0T$ .

В переменных  $u_i$  гамильтониан в начальный и конечный моменты времени равен  $H = |\mathbf{u}|^2 - k_0 = 0$ , так как при оптимальном управлении  $\varphi_i = 2u_i/\sqrt{J_i}$  и  $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}(T) = 0$ . Отсюда следует важный вывод: модуль приведенного управления в начальный и конечный моменты времени одинаковый и не зависит от начального и конечного положений КА и его моментов инерции, а определяется только коэффициентом  $k_0$  минимизируемого функционала;  $|\mathbf{u}(0)| = |\mathbf{u}(T)| = \sqrt{k_0}$ . Максимальная величина силового момента для оптимального вращения не зависит от значения “функционала пути”  $S$  и от интеграла (3.1).

Решение задачи оптимального управления (в смысле минимума (1.5)) описывается уравнениями (2.1), (2.4), а управляющие функции  $M_i$  и компоненты кинетического момента  $L_i$  изменяются по законам (2.8), (2.9). Решение (2.8), (2.9) оптимально, так как оно является единственным, что соответствует необходимым условиям оптимальности. Параметр  $m_0$  в законах (2.8), (2.9) определяет максимальную величину управляющего момента и максимальный модуль кинетического момента. Константы  $r_0$ ,  $m_0$  полностью определяют траекторию вращения во время оптимального управления кинетическим моментом.

Оптимальный управляющий момент  $\mathbf{M}$  связан с кватернионом  $\Lambda$  следующим образом:

$$\mathbf{M} = m_0(1 - 2t/T)\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{in}\mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda \quad (3.2)$$

Любое отличное от (3.2) управление заведомо хуже (в смысле минимума показателя качества (1.5)), потому что не является решением системы уравнений (1.1), (2.1)–(2.3) и не отвечает необходимым условиям оптимальности, сформулированным системой (2.1)–(2.3).

Задача построения оптимального управления  $\mathbf{M}(t)$  состоит главным образом в нахождении такого значения  $m_0$  и вектора  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$ , чтобы в результате вращения твердого тела в соответствии с уравнениями (1.2), (2.1), (2.9) выполнялись равенства  $\Lambda(T) = \Lambda_f$  и  $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$ . Для получения функциональной зависимости управлений от фазовых координат необходимо решить уравнения (2.1), которые для закона (2.5) с учетом формул  $r_i = r_0 p_i$  принимают следующий вид

$$\dot{p}_1 = \frac{J_2 - J_3}{J_2 J_3} L_m p_2 p_3, \quad \dot{p}_2 = \frac{J_3 - J_1}{J_1 J_3} L_m p_1 p_3, \quad \dot{p}_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_1 J_2} L_m p_1 p_2 \quad (3.3)$$

Общее решение приведенной системы уравнений найти практически невозможно. Трудность заключается в нахождении граничных значений  $\mathbf{p}(0)$  и  $\mathbf{p}(T)$ , связанных выражением

$$\Lambda_f \circ \mathbf{p}(T) \circ \tilde{\Lambda}_f = \Lambda_{in} \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{in}$$

или  $\mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_t \circ \mathbf{p}(0) \circ \Lambda_t$ , где  $\Lambda_t = \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda_f$  – кватернион разворота.

Для синтеза оптимального управления кинетическим моментом требуется знание времени оптимального разворота  $T$  и значений постоянных параметров  $m_0, r_0$ , определяющих темп приближения к заданному конечному положению  $\Lambda(T) = \Lambda_f, \mathbf{L}(T) = 0$ . Конкретные положительные величины  $r_0$  и  $m_0$ , а также длительность разворота определяются коэффициентом  $k_0$  функционала качества и вектором  $\mathbf{p}_0$ . Убедимся, что найденные ранее постоянные параметры  $m_0, T$  для закона управления (3.2) действительно оптимальны. Приняв во внимание соотношение  $m_0 T^2 = 6F$ , запишем значение функционала (1.5) в следующем виде:

$$G = (m_0^2 C / 3 + k_0) \sqrt{6F / m_0} \quad (3.4)$$

или

$$G = 12S^2 / T^3 + k_0 T \quad (3.5)$$

Функция (3.4) минимальна, если  $m_0 = \sqrt{k_0} / C$ . Минимум функции (3.5) соответствует времени разворота  $T = \sqrt{6S / \sqrt{k_0}}$ . При этом величина (1.5) для оптимального управления (3.2) равна  $G = 4k_0 T / 3$ , т.е.  $G = 4\sqrt{2k_0 S \sqrt{k_0}} / 3$ .

**4. Некоторые частные случаи оптимального управления.** Функции  $\varphi_i(t), r_i(t), L_i(t)$  будут оптимальными тогда и только тогда, когда они удовлетворяют уравнениям (2.1), (2.4), (2.5). Ключевой проблемой в решении задачи оптимального управления кинетическим моментом является нахождение значения вектора  $\mathbf{p}_0$  и времени разворота  $T$ . Постоянная  $m_0 = |\mathbf{M}(0)|$  оптимального закона изменения кинетического момента определяется значением коэффициента  $k_0$  минимизируемого показателя качества ( $\mathbf{p}_0$  зависит исключительно от кватерниона разворота  $\Lambda_t$  и моментов инерции  $J_1, J_2, J_3$  и не зависит от времени  $T$ ). Если  $\mathbf{p}_0$  известно, то

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = 2I^{-1} \mathbf{p}_0 \sqrt{k_0} / C$$

Управляющие переменные рассчитываются в соответствии с законом (2.8), для исполнения которого надо в каждый текущий момент времени  $t$  знать все три переменные  $p_1, p_2, p_3$ . Система (1.2), (2.1), (2.5) имеет аналитическое решение только для динамически симметричного и сферического тел. Для сферически-симметричного тела ( $J_1 = J_2 = J_3$ ) решение следующее:

$$p_i(t) = \text{const} = p_{i0} = v_i / \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}, \quad M_i(t) = m_0(1 - 2t/T)p_{i0}$$

$$L_i(t) = m_0 t(1 - t/T)p_{i0}, \quad i = \overline{1,3}$$

где  $v_1, v_2, v_3$  – компоненты векторной части кватерниона разворота  $\Lambda_t$ .

В случае динамически симметричного тела (например, если  $J_2 = J_3$ ) задача оптимального управления кинетическим моментом решается до конца (при дальнейших рассуждениях продольной осью считается ось  $OX$ ). В этом частном, но достаточно распространенном случае оптимальным решением является одновременное вращение твердого тела (например, КА) вокруг некоторого направления  $\boldsymbol{\eta}$ , неподвижного относительно инерциального базиса, и вокруг продольной оси  $OX$ , которая образует с осью

$\eta$  постоянный угол  $\vartheta$ . Угловые скорости относительно осей  $\eta$  и  $OX$  изменяются пропорционально с постоянным коэффициентом пропорциональности, и поэтому можем записать [11, 16]

$$\Lambda_f = \Lambda_{in} \circ e^{p_0\beta/2} \circ e^{e_1\alpha/2}$$

где  $\alpha, \beta$  – углы поворота КА вокруг продольной оси  $OX$  и вокруг вектора  $\mathbf{p}$  соответственно;  $\mathbf{e}_1$  – орт продольной оси  $OX$ ; вектор в показателе степени кватернионной экспоненты понимается как кватернион с нулевой скалярной частью (считается  $|\alpha| \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$ ). Как и ранее [11], решение  $\mathbf{p}(t)$  системы (2.5), (3.3) представим в следующем виде [11, 16]:

$$p_1 = p_{10} = \cos\vartheta, \quad p_2 = p_{20} \cos \kappa + p_{30} \sin \kappa, \quad p_3 = -p_{20} \sin \kappa + p_{30} \cos \kappa$$

$$\text{и} \quad \kappa = \frac{J - J_1}{J_1 J} \int_0^t L_1(t) dt \quad (4.1)$$

где  $J = J_2 = J_3$ ; продольная составляющая  $L_1(t)$  определяется из соотношений (2.9) с учетом  $p_1 = \text{const} = p_{10}$ . В отличие от решения [11], в котором  $L_1(t)$  – кусочно-линейная функция времени, в оптимальном по критерию (1.5) решении  $L_1(t)$  – квадратичная функция времени. Значения углов  $\alpha, \beta$  и  $p_{i0}$  от  $\Lambda_{in}$  и  $\Lambda_f$  находятся из следующей системы уравнений [11, 16]

$$\alpha = \frac{J - J_1}{J_1} p_{10} \beta, \quad \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = v_0, \quad \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = v_1 \quad (4.2)$$

$$p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = v_2, \quad -p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = v_3$$

где  $v_0, v_1, v_2, v_3$  – компоненты кватерниона разворота  $\Lambda_i$ ;  $-\pi \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$ .

Функции  $L_i$  (проекции оптимального кинетического момента  $\mathbf{L}$  на оси связанной системы координат) рассчитываются по уравнениям (4.1) и (2.9). Искомое решение  $M_i(t), L_i(t)$  представим в аналитическом виде:

$$M_1 = m_0(1 - 2t/T)p_{10}; \quad M_2 = m_0(1 - 2t/T)\sqrt{1 - p_{10}^2} \sin(\kappa + \gamma)$$

$$M_3 = m_0(1 - 2t/T)\sqrt{1 - p_{10}^2} \cos(\kappa + \gamma)$$

$$L_1 = m_0 t(1 - t/T)p_{10}; \quad L_2 = m_0 t(1 - t/T)\sqrt{1 - p_{10}^2} \sin(\kappa + \gamma)$$

$$L_3 = m_0 t(1 - t/T)\sqrt{1 - p_{10}^2} \cos(\kappa + \gamma)$$

где  $\vartheta = \arccos p_{10}$ ;  $\kappa = m_0 p_{10} t^2 (0.5 - t/3T)(J - J_1)/(J_1 J)$ ;  $\gamma = \arcsin(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2})$ , если  $p_{30} \geq 0$ , или  $\gamma = \pi - \arcsin(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2})$ , если  $p_{30} < 0$  ( $|p_{10}| \neq 1$ ); вариант  $|p_{10}| = 1$  соответствует плоскому вращению вокруг продольной оси  $OX$ , поэтому мы его не рассматриваем.

Заметим, что в работе [27] также выписаны все предварительные выражения общего решения задачи оптимального разворота твердого тела (но для другого функционала качества) и до конца доведено решение для случая динамической симметрии тела. Авторы работы [11], решая задачу разворота при условии динамической симметричности твердого тела (из-за чего оптимальное управление обеспечивает вращение КА с постоянным углом отклонения кинетического момента от продольной оси), показали, что решение системы (4.2) существует при любых значениях кватерниона  $\Lambda_i$  и моментах инерции динамически симметричного тела.

Для динамически симметричного тела параметры закона управления  $r_0, m_0, T$  находятся намного проще (также упрощается определение интеграла  $F$  и показателя  $G$ ).

У динамически симметричных тел с продольной осью  $OX | \mathbf{L} | = J_2 \dot{\beta}$  и  $F = J_2 \beta$ , где  $J_2$  – момент инерции относительно поперечной оси ( $J_2 = J_3$ );  $\dot{\beta}$  – скорость вращения вокруг кинетического момента  $\mathbf{L}$ ;  $\beta$  – угол поворота КА вокруг вектора  $\mathbf{L}$  (из физического смысла  $\beta \geq 0$ ). Чтобы показатель (1.5) был минимальным, необходимо чтобы угол  $\beta$  был как можно меньше, для чего потребуем  $\beta \leq \pi$  (отсюда понятно, почему система (4.2) включает условие  $0 \leq \beta \leq \pi$ ). Значения  $r_0, T, L_{\max}, G$  зависят только от угла поворота вокруг кинетического момента  $\mathbf{L}$  и, соответственно, таковы:

$$T = \sqrt{6J_2\beta C / \sqrt{k_0}}, \quad L_{\max} = \sqrt{3J_2\beta\sqrt{k_0} / (8C)}, \quad G = 4\sqrt{2k_0J_2\beta C\sqrt{k_0} / 3}, \quad r_0 = 4m_0\sqrt{m_0 / (6J_2\beta)}$$

где  $m_0 = \sqrt{k_0} / C$ .

Для несимметричного КА ( $J_1 \neq J_2 \neq J_3$ ) решение системы уравнений (1.2), (2.1), (2.5) в аналитическом виде не существует и определяется численными методами (например, методом последовательных приближений или как описано в [16]). Расчет значения  $\mathbf{p}_0$  осуществляется в процессе решения краевой задачи  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0, \mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_t \circ \mathbf{p}_0 \circ \Lambda_t$  для системы (3.3). Как известно [22], решение  $\mathbf{p}_0$  не зависит от характера изменения функции  $L_m$ , которая присутствует в уравнениях (3.3), в силу чего искомый вектор  $\mathbf{p}_0$  рассчитываем в предположении, что  $L_m = \text{const} \neq 0$ , что значительно упрощает решение краевой задачи; так как в этом случае кинетический момент изменяется согласно уравнению

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \times (\mathbf{I}^{-1}\mathbf{L}) \tag{4.3}$$

Если кинетический момент изменяется в соответствии с уравнениями (2.1), (2.5), то вне зависимости от характера поведения параметра  $L_m$  значение (3.1) следующее [22]:

$$\int_0^T |\mathbf{L}(t)| dt = K_{\text{av}} t_{\text{pr}}$$

где  $K_{\text{av}}$  – известный отличный от нуля модуль кинетического момента ( $K_{\text{av}} > 0$ );  $t_{\text{pr}}$  – прогнозируемое время достижения условия  $\Lambda = \Lambda_f$  для решения  $\Lambda(t)$  системы уравнений (1.2), (2.1), (2.5) с учетом  $L_m = K_{\text{av}}$  и  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$  (очевидно, что если  $L_m(t) = \text{const} = K_{\text{av}}$ , то интеграл (3.1) составляет  $F = K_{\text{av}} t_{\text{pr}}$ ). Каждому конкретному  $K_{\text{av}}$  соответствует свое значение  $t_{\text{pr}}$  (время  $t_{\text{pr}}$  обратно пропорционально величине  $K_{\text{av}}$ ). Приняв какое-то  $K_{\text{av}} \neq 0$  и интегрируя уравнения (1.2), (4.3) с начальными условиями  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}, \mathbf{L}(0) = K_{\text{av}} \mathbf{p}_0$ , получим прогнозируемое время  $t_{\text{pr}}$ , а затем  $F$ .

В отличие от известного решения [11], применимого исключительно для тел с осевой симметрией, в представленном оптимальном управлении отсутствуют отрезки времени с постоянным модулем управляющего момента. Кроме того, в предложенном оптимальном решении все управляющие переменные  $M_i(t)$  – непрерывные гладкие функции времени.

**5. Результаты математического моделирования.** Для примера рассмотрим разворот международной космической станции (МКС) из положения, при котором связанные оси совпадают по направлению с одноименными осями инерциального базиса, в положение, соответствующее кватерниону  $\Lambda_f = \{0.258819, 0.683013, 0.591506, 0.341506\}$ . Приведем численное решение задачи оптимального управления кинетическим моментом в процессе разворота с минимальной величиной (1.5). Разворот выполняется из положения покоя в положение покоя. Определим оптимальную программу управления  $\mathbf{M}(t)$ , которая переводит МКС из состояния (1.3) в состояние (1.4). Инерционные характеристики МКС полагаем равными [31]:  $J_1 = 4853000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, J_2 = 23601000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$

$J_3 = 26278000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . Считаем, что коэффициент  $k_0 = 0.1 \text{ Вт/с}$ . Элементы кватерниона разворота  $\Lambda_t$  имеют следующие значения:  $v_0 = 0.258819$ ;  $v_1 = 0.683013$ ;  $v_2 = 0.591506$ ;  $v_3 = 0.341506$ . Вектор  $\mathbf{p}_0$  находим в результате решения краевой задачи принципа максимума. Из соотношения моментов инерции  $J_1, J_2, J_3$  следует, что ось  $OX$  – продольная ось КА. При решении краевой задачи принципа максимума в уравнениях (2.5) полагаем  $L_m = \text{const}$  (и, соответственно,  $|\mathbf{L}| = \text{const}$ ), так как искомое значение  $\mathbf{p}_0$  не зависит от характера изменения функции  $L_m(t)$  [22]. Расчет вектора  $\mathbf{p}_0$  происходит методом последовательных приближений, где в качестве первого приближения берется решение той же краевой задачи для динамически симметричного тела с моментами инерции  $J_1$  и  $J$ , где  $J$  – момент инерции относительно поперечной оси, равный среднему значению между  $J_2$  и  $J_3$  (принцип осреднения нередко используется исследователями [32]). Было принято значение

$$J = \frac{J_2 J_3}{J_2 + J_3 - J_1} (\sqrt{(1 - J_1/J_2)(1 - J_1/J_3)} + 1)$$

При сделанном допущении о динамической симметричности решение  $\mathbf{p}_0$  находится из уравнений (4.2). В результате получили следующее значение:  $\mathbf{p}_0^{(0)} = \{0.283154; 0.113225; 0.952368\}$ . Рассчитанные в соответствии с системой (4.2) значения  $\mathbf{p}_0$  и  $\beta$  являются начальным приближением к истинному решению. Они уточняются до тех пор, пока не будут удовлетворять требованиям  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$ ,  $\Lambda(t_{\text{pr}}) = \Lambda_f$  для решения системы уравнений (1.2), (4.3) с начальным кинетическим моментом  $\mathbf{L}_{\text{st}}$ , определяемым вектором  $\mathbf{p}_0$  и углом  $\beta$  по формулам:

$$L_{1\text{st}} = \frac{J\beta}{T} p_{10}, \quad L_{2\text{st}} = \frac{J\beta}{T} p_{20}, \quad L_{3\text{st}} = \frac{J\beta}{T} p_{30} \quad (5.1)$$

(при решении краевой задачи принципа максимума и уточнении вектора  $\mathbf{p}_0$  время  $T$  принимается произвольным, например,  $T = 300 \text{ с}$ ). Прогноз траектории вращения выполняется интегрированием системы дифференциальных уравнений (1.2), (4.3), описывающих вращение КА, при начальных условиях  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$ ,  $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}_{\text{st}}$  и с учетом того, что  $\mathbf{M} = 0$ . Погрешность рассчитанных  $\mathbf{p}_0$  и  $\beta$  относительно истинных значений, соответствующих оптимальному решению, оценивается величиной  $\varepsilon = \text{sqa}(\tilde{\Lambda}_{\text{pr}} \circ \Lambda_f)$ , где  $\Lambda_{\text{pr}}$  – максимально близкое к  $\Lambda_f$  угловое положение, полученное в ходе моделирования вращения (согласно уравнениям (1.2), (4.3)). Значение  $\mathbf{p}_0$  уточняется до тех пор, пока  $\varepsilon < \varepsilon_{\text{th}}$  ( $\varepsilon_{\text{th}}$  – некоторая близкая к единице пороговая величина, отражающая ошибку текущего решения). Искомые значения  $\mathbf{p}_0$  и  $\beta$ , удовлетворяющие граничным условиям  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$ ,  $\Lambda(t_{\text{pr}}) = \Lambda_f$ , считаются найденными в момент выполнения условия  $\varepsilon \geq \varepsilon_{\text{th}}$  (когда прогнозируемая ошибка соответствует заданной точности), краевая задача решена. Уточнение вектора  $\mathbf{p}_0$  производилось с помощью рекуррентного правила:

$$\Lambda_t^{(k+1)} = \Lambda_t^{(k)} \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{\text{pr}}$$

где  $\Lambda_t^{(k)}$  – кватернион разворота, используемый в системе (4.2) для  $k$ -го приближения. На каждом  $k$ -м шаге итераций пересчитывается кватернион разворота  $\Lambda_t^{(k)}$  (правые части системы (4.2)), и на основе системы (4.2) рассчитываются новые  $\mathbf{p}_0$  и  $\beta$ , соответствующий им начальный кинетический момент  $\mathbf{L}_{\text{st}}$  (по выражениям (5.1)) и прогноз  $\Lambda_{\text{pr}}$ . Если  $\varepsilon < \varepsilon_{\text{th}}$ , то рассчитывается кватернион разворота  $\Lambda_t^{(k+1)}$  для следующего  $(k+1)$ -го приближения и процесс уточнения вектора  $\mathbf{p}_0$  повторяется. Начальным приближением

ем для правых частей системы (4.2) являются элементы кватерниона  $\Lambda_t^{(0)} = \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda_f$ . Процесс поиска  $\mathbf{p}_0$  прекращается, когда  $\varepsilon \geq \varepsilon_{th}$ .

Описанная схема итераций аналогична итерационному методу решения уравнения вида  $x = g(x)$  для скалярной функции  $g(x)$  скалярного (одномерного) аргумента  $x$ . При уточнении  $\mathbf{p}_0$  аргументом является гиперкомплексное число (кватернион)  $\Lambda_t$ , а функцией – кватернион  $\Lambda_t \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}$ , где  $\Lambda_f$  – постоянный кватернион, не зависящий от аргумента  $\Lambda_t$ , а  $\Lambda_{pr}$  зависит от аргумента  $\Lambda_t$  через систему уравнений (4.2), (5.1) посредством модели движения (1.2), (4.3). После изменения  $\Lambda_t$  меняются вектор  $\mathbf{p}_0$  (в соответствии с (4.2)) и начальный кинетический момент  $\mathbf{L}_{st}$ , и поэтому обновится значение  $\Lambda_{pr}$ , что приведет к изменению функции  $\Lambda_t \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}$ . Как только  $\text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{pr} \circ \Lambda_f) \geq \varepsilon_{th}$ , итерационный процесс прекращается, и решение  $\mathbf{p}_0$  получено. Отмечаем, что  $|\text{vect}(\tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}^{(k)})| < |\text{vect}\Lambda_t^{(k)}|$  для любого  $k$ , поэтому процесс приближения  $\mathbf{p}_0$  к оптимальному значению сходится. Аналогичный метод нахождения оптимального вектора  $\mathbf{p}_0$  в решении краевой задачи принципа максимума применялся в задаче максимального быстродействия [16], как один из возможных (хотя и не единственный) итерационных алгоритмов расчета вектора  $\mathbf{p}_0$  для оптимального управления.

После решения краевой задачи разворота из положения  $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$  в положение  $\Lambda(T) = \Lambda_f$  определили основные параметры:  $\mathbf{p}_0 = \{0.310532; 0.105396; 0.944702\}$ ,  $F = 38957 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ . Соответственно, “функционал пути” составил  $S = 9078.5 \text{ м} \cdot \text{кг}^{1/2}$ . Максимальный модуль управляющего момента  $m_0 = 1357 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Время оптимального разворота  $T = 415 \text{ с}$ , а  $\rho = 207.5 \text{ с}$ . Максимальный модуль кинетического момента составил  $L_{\max} = 140.8 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ , а максимальная энергия вращения за время разворота оказалась равной  $E_{\max} = 538 \text{ Дж}$ . Значение константы  $r_0$  будет  $r_0 = 4m_0/T = 13.08 \text{ Н} \cdot \text{м/с}$ . Оптимальный вектор  $\boldsymbol{\varphi}(0) = \{173.66 \times 10^{-6}; 12.12 \times 10^{-6}; 97.57 \times 10^{-6}\}$ .

Данные математического моделирования оптимального вращения приведены рис. 1–5. На рис. 1 даны графики изменения проекций кинетического момента на оси связанного базиса  $L_1(t)$ ,  $L_2(t)$ ,  $L_3(t)$  по времени (переменные  $L_i$  приведены в  $\text{кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ , время  $t$  дано в секундах). Проекция  $L_1$ , соответствующая продольной оси КА, не меняет знак, и характер ее изменения повторяет поведение модуля кинетического момента (в отличие от  $L_2$  и  $L_3$ ). На рис. 2 представлены графики изменения компонент кватерниона  $\Lambda(t)$ , отражающего текущую ориентацию КА во время разворота:  $\lambda_0(t)$ ,  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$ ,  $\lambda_3(t)$ . На рис. 3 дано изменение составляющих  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ ,  $p_3(t)$  орта  $\mathbf{p}$  во времени. Отмечаем, что во время оптимального разворота проекция  $p_1$  меняется незначительно. На рис. 4 изображены графики изменения управляющих функций  $M_1(t)$ ,  $M_2(t)$ ,  $M_3(t)$  (переменные  $M_i$  приведены в  $\text{Н} \cdot \text{м}$ , время  $t$  дано в секундах). Значение (1.5), характеризующее экономичность программы  $\mathbf{M}(t)$  управления кинетическим моментом, равно  $G = 4k_0T/3 = 55.3 \text{ Дж/с}$ . Рис. 5 демонстрирует поведение модуля кинетического момента КА во время разворота (величина  $|\mathbf{L}|$  дана в  $\text{кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ , время  $t$  приведено в секундах). При оптимальном управлении переменные  $p_i$  и  $\lambda_j$  являются гладкими функциями времени; переменные  $L_i$  – гладкие функции времени (за исключением моментов времени  $t = 0$  и  $t = T$ ).

Необходимо заметить, что чем больше коэффициент  $k_0$ , тем меньше время разворота  $T$  и больше энергия  $E_{\max}$ , максимальный момент  $|\mathbf{M}(0)|$  и максимальный модуль кинетического момента  $L_{\max}$ . Значение коэффициента  $k_0$  в минимизируемом функционале (1.5) выбрано из условия  $E_{\max} < 540 \text{ Дж}$  (при этом желательно, чтобы время разворота  $T < 450 \text{ с}$ ).

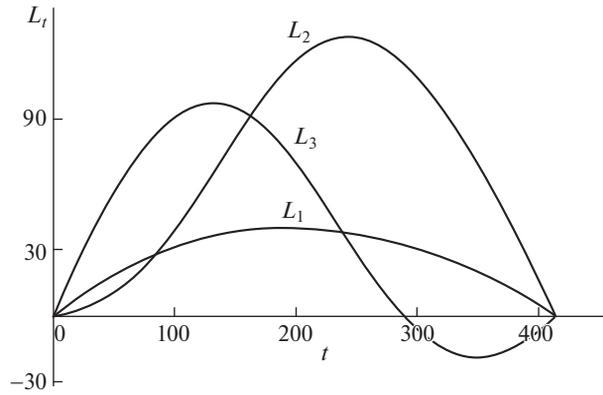


Рис. 1. Изменение составляющих кинетического момента во время разворота.

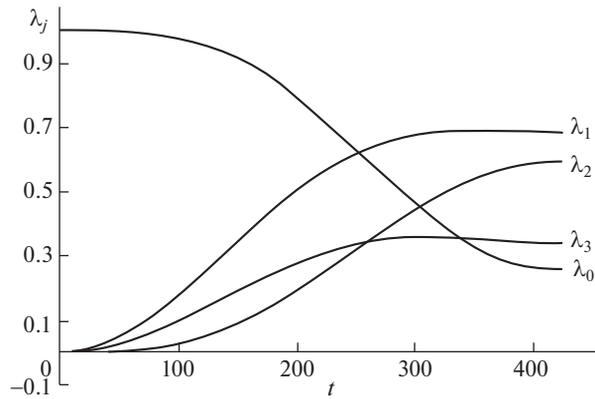


Рис. 2. Изменение компонент кватерниона ориентации  $\Lambda(t)$  во время разворота.

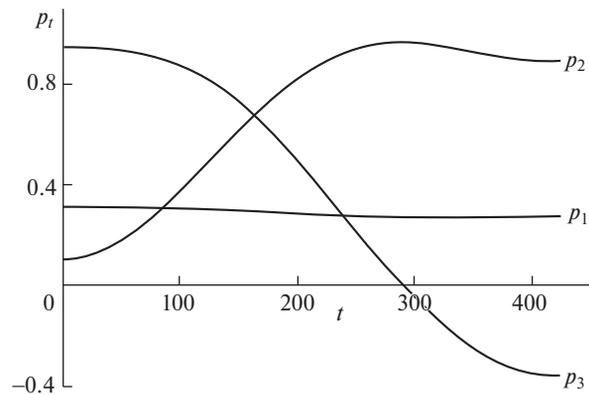


Рис. 3. Вид функций  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ ,  $p_3(t)$  во время оптимального разворота.

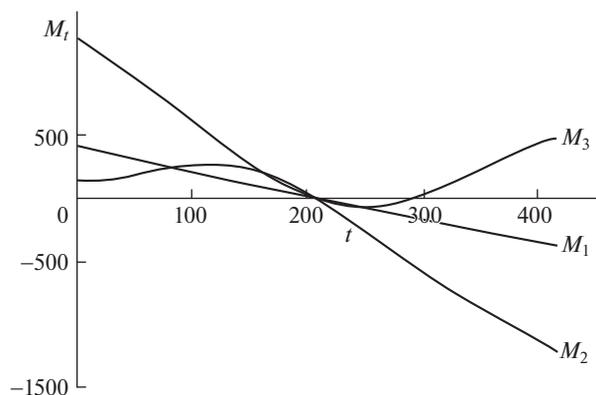


Рис. 4. Характер изменения управляющих функций во время разворота.

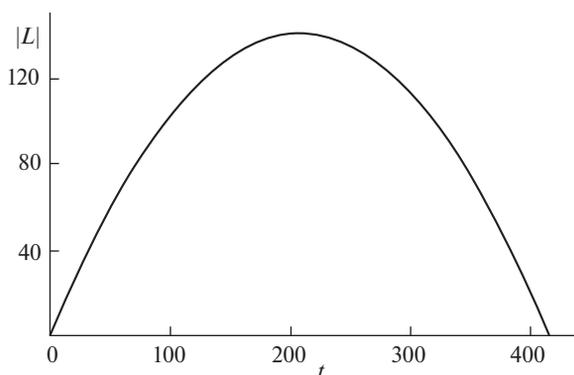


Рис. 5. Поведение модуля кинетического момента при оптимальном управлении.

**Заключение.** Исследуется кватернионное решение динамической задачи оптимального управления пространственным разворотом твердого тела (в частности, КА) из произвольного начального в заданное конечное угловое положение. Рассматривается случай, когда в начальный и конечный моменты времени кинетический момент равен нулю. Принятый нами критерий качества объединяет в заданной пропорции энергетические затраты и время, затраченные на переориентацию КА. Вопросы экономичности управления движением КА актуальны и сегодня, а потому предложенная задача управления практически важная. В аналитической форме описаны отличительные свойства оптимального движения. Для нахождения оптимального управления и закономерностей вращения во время перевода КА в заданную ориентацию применялись кватернионные модели движения твердого тела и принцип максимума Л.С. Понтрягина. Выписаны функция Гамильтона, сопряженная система уравнений для исходной оптимизационной задачи и выражения для оптимального управления, отражающие связь управляющих и фазовых переменных. Структура полученной системы дифференциальных уравнений такова, что закономерности оптимального изменения кинетического момента  $\mathbf{L}(t)$  и оптимального движения  $\Lambda(t)$  обнаруживаются в явном виде. Доказано, что в течение всего разворота отношение кинетической энергии вращения

к квадрату модуля кинетического момента КА есть величина постоянная. Сформулированы необходимые условия оптимальности и определена структура оптимального управления; приведены аналитические зависимости для программной траектории движения КА. Поскольку на управляющий момент и на время разворота не наложено никаких ограничений, то маневр переориентации можно выполнить для любых начального и конечного положений. Расчетные формулы для вычисления ключевых характеристик маневра переориентации представлены в явном виде.

Была изложена процедура реализации оптимального программного управления и описана конструктивная схема решения краевой задачи принципа максимума при произвольных моментах инерции КА и условиях разворота. Поведение параметров движения КА в процессе разворота иллюстрируют результаты математического моделирования.

Основное отличие рассмотренной задачи управления состоит в использовании нового критерия оптимальности. Введение в минимизируемый функционал времени, затраченного на разворот (со своим коэффициентом пропорциональности), определяет максимальную величину управляющего момента  $|\mathbf{M}(0)|$ , максимальный кинетический момент  $L_{\max}$  и, соответственно, длительность маневра  $T$ . В течение всего разворота управляющий момент действует вдоль прямой, неподвижной относительно инерциального базиса, абсолютная скорость изменения управляющего момента (как векторная величина) имеет постоянное значение относительно инерциальной системы координат. В отличие от [11], где оптимальным является релейное управление, когда возможен участок вращения по инерции, минимизация принятого показателя качества (1.5) приводит к непрерывному управлению. В оптимальном по критерию (1.5) решении отсутствуют интервалы вращения с постоянным модулем силового момента.

Для динамически симметричного КА получено законченное решение задачи оптимального управления в замкнутой форме. Даны зависимости в виде явных функций времени для оптимальной траектории вращения и соотношения для нахождения ключевых параметров закона управления, поэтому предложенное решение имеет практическое значение. В аналитическом виде записана система уравнений (4.2), позволяющая решить краевую задачу принципа максимума и полностью определить константы алгоритма управления (для расчета оптимальных значений указанных параметров используется разработанное ранее устройство [33]).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. Алексеев К.Б., Малявин А.А., Шадян А.В. Экстенсивное управление ориентацией космического аппарата на основе нечеткой логики // Полет. 2009. № 1. С. 47–53.
3. Велищанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Синтез алгоритмов переориентации космического аппарата на основе концепции обратной задачи динамики // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 5. С. 156–163.
4. Ваньков А.И. Адаптивное робастное управление угловым движением КА с использованием прогнозирующих моделей // Космич. исслед. 1994. Т. 32. Вып. 4–5. С. 13–21.
5. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 600 с.
6. Levskii M.V. About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation // Probl. Nonlin. Anal. Eng. Sys. 2015. V. 21. № 2. P. 61–75.
7. Решмин С.А. Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в гравитационно-устойчивое положение // Доклады Академии наук. 2018. Том 480. № 6. С. 671–675.  
<https://doi.org/10.1134/S1028335818060101>
8. Junkins J. L., Turner J. D. Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. Elsevier. USA, 1986. 515 p.

9. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Особые режимы управления в задаче оптимального разворота сферически-симметричного космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 6. С. 47–54.  
<https://doi.org/10.1134/S1064230709060057>
10. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата с ограниченным и импульсным управлением при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 2. С. 152–165.  
<https://doi.org/10.1134/S1064230707020189>
11. *Бранец В.Н., Черток М.Б., Казначеев Ю.В.* Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исслед. 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 352–360.
12. *Shen H., Tsiotras P.* Time-optimal Control of Axi-symmetric Rigid Spacecraft with two Controls // AIAA J. Guid. Contr. Dyn. 1999. V. 22. № 5. P. 682–694.  
<https://doi.org/10.2514/2.4436>
13. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 2. С. 131–147.  
<https://doi.org/10.7868/S0002338818020117>
14. *Scrivener S., Thompson R.* Survey of Time-optimal Attitude Maneuvers // J. Guid. Contr. Dyn. 1994. V. 17. № 2. P. 225–233.
15. *Zhou H., Wang D., Wu B., EK Poh.* Time-optimal reorientation for rigid satellite with reaction wheels // Int. J. Contr. 2012. V. 85. № 10. P. 1–12.  
<https://doi.org/10.1080/00207179.2012.688873>
16. *Левский М.В.* Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 6. С. 144–157.  
<https://doi.org/10.1134/S1064230708060117>
17. *Реимин С.А.* Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в желаемое угловое положение // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 5. С. 30–41.  
<https://doi.org/10.1134/S106423071805012X>
18. *Левский М.В.* Кинематически оптимальное управление переориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 1. С. 119–136.  
<https://doi.org/10.1134/S1064230714050116>
19. *Левский М.В.* Об одном случае оптимального управления пространственной ориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 4. С. 115–130.  
<https://doi.org/10.1134/S1064230712020086>
20. *Бирюков В.Г., Челноков Ю.Н.* Построение оптимальных законов изменения вектора кинетического момента твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 5. С. 3–21.  
<https://doi.org/10.3103/S002565441405001X>
21. *Зеленукина О.В., Челноков Ю.Н.* Построение оптимальных законов изменения вектора кинетического момента динамически симметричного твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 4. С. 31–49.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654411040030>
22. *Левский М.В.* Синтез оптимального управления терминальной ориентацией космического аппарата с использованием метода кватернионов // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 7–24.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654409020022>
23. *Левский М.В.* Особенности управления ориентацией космического аппарата, оборудованного инерционными исполнительными органами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16. № 3. С. 188–195.  
<https://doi.org/10.17587/mau.16.188-195>
24. *Levskii M.V.* Special Aspects in Attitude Control of a Spacecraft, Equipped with Inertial Actuators // J. Comp. Sci. Appl. Informat. Technol. 2017. V. 2. № 4. P. 1–9.  
<https://doi.org/10.15226/2474-9257/2/4/00121>
25. *Quang M. Lam.* Robust and adaptive reconfigurable control for satellite attitude control subject to under-actuated control condition of reaction wheel assembly // Math. Eng. Sci. Aerosp. 2018. V. 9. № 1. P. 47–63.

26. *Левский М.В.* Использование универсальных переменных в задачах оптимального управления ориентацией космических аппаратов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 1. С. 53–59.
27. *Стрелкова Н.А.* Об оптимальной переориентации твердого тела // Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы. Пермь: ПГУ, 1990. С. 115–133.
28. *Зубов Н.Е., Ли М.В., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Терминальное построение орбитальной ориентации космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 4. С. 154–173. <https://doi.org/10.1134/S1064230717040190>
29. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
30. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974. 488 с.
31. *Банит Ю.Р., Беляев М.Ю., Добринская Т.А., Ефимов Н.И., Сазонов В.В., Стажков В.М.* Определение тензора инерции международной космической станции по телеметрической информации. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. № 57. М.: ИПМ, 2002.
32. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
33. *Левский М.В.* Устройство формирования параметров регулярной прецессии твердого тела. Патент на изобретение РФ № 2146638 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 2000. № 8. С. 148.

УДК 531.259.2; 532.321

## К СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ТРУБОПРОВОДА, ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, УГЛЕРОДНОЙ НАНОТРУБКИ

© 2023 г. А. Г. Хакимов<sup>а,\*</sup>

<sup>а</sup> *Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия*

*\*e-mail: hakimov@anrb.ru*

Поступила в редакцию 17.02.2022 г.

После доработки 21.04.2022 г.

Принята к публикации 26.04.2022 г.

На основе предположения о начальной деформированной форме поперечного сечения трубопровода, цилиндрической оболочки, углеродной нанотрубки (УНТ) без начальных напряжений определяются критические давления внутри и вне этих элементов конструкций. Изучено статическое взаимодействие неустойчивостей под действием вышеуказанных факторов.

*Ключевые слова:* трубопровод, цилиндрическая оболочка, УНТ, жидкость, газ, плотность, давление

**DOI:** 10.31857/S0572329922060101, **EDN:** KHNHNS

**1. Введение.** Актуальность работы заключается в том, что до сих пор не учитывается влияние среднего давления на устойчивость кругового поперечного сечения трубопровода, цилиндрической оболочки, УНТ. Эти элементы конструкций широко применяются в нефте–газо–продуктопроводах, в ракетных и авиационных двигателях, в воздушной и гидравлической системах самолетов и т.д. В гидроупругих системах одновременно происходит взаимодействие упругих и гидродинамических неустойчивостей. Внешние воздействия могут быть как независимыми друг от друга, так и связанными [1]. Этой теме посвящена обширная литература. К ней примыкает также серия работ по колебаниям тонкостенных тел, не контактирующих с внешней средой. Работа [2] посвящена аналитическому и численному исследованиям свободных колебаний цилиндрических оболочек с акустической средой. Сравнительный анализ результатов расчетов, полученных для моделей сжимаемой и несжимаемой среды, показывает, что при решении задачи определения параметров свободных колебаний оболочки сжимаемостью среды можно пренебречь. В то же время для решения практических задач, требующих учета полного спектра собственных частот системы оболочка–среда, должна использоваться модель сжимаемой среды, в рамках которой получены результаты о влиянии жесткости оболочки на спектр частот объема среды. Некоторые результаты решений для цилиндрических оболочек, в том числе взаимодействующих со средой, представлены в статьях [3–5].

В [6] представлен метод, позволяющий определять частоты колебаний цилиндрических оболочек бесконечной длины в акустической среде. Полученные результаты показывают, что существует низкая частота, когда излучение не происходит, и высокая частота, когда внешний источник обеспечивает передачу энергии, которая излучает-

ся. Резонанс возникает только в диапазоне низких частот. Метод требует только модификации для учета эффекта статического давления в окружающей среде.

Среди многочисленных видов применения микро- и нанопленок, нанопроволок, нанотрубок может быть указано также использование их в качестве детекторов и сенсоров в химии, биологии и т.д. [7–9].

Моделируя микротрубки тонкими упругими цилиндрическими оболочками [10], получены собственные частоты и собственные моды ограниченных упругих колебаний в системе оболочка–жидкость. Метод молекулярной механики (ММ) применяется для определения частот и форм собственных колебаний, а также для определения критических параметров выпучивания и послекритических форм деформирования закрученных по торцам однослойных УНТ [11].

Обзор инженерных микро- и наноматериалов для биомедицинского применения приводится в [12], который дает представление об уникальных свойствах технологии микроигл и ее способности к эффективному трансдермальному транспорту терапевтических соединений.

Однако во всех этих работах влияние среднего давления сред и разности площадей выпуклой и вогнутой поверхностей не учитывается. Это взаимодействие принимается во внимание в статьях [13, 14] в случае легких газов, когда присоединенная масса сред мала. В [15] определяется спектр частот двухпорного резонатора с учетом взаимодействия среднего избыточного давления на поверхности резонатора и кривизны, а также действия осевой нагрузки.

В данной работе определяются критические давления внутри и вне трубопровода, цилиндрической оболочки, УНТ с учетом действия среднего избыточного давления на их поверхностях.

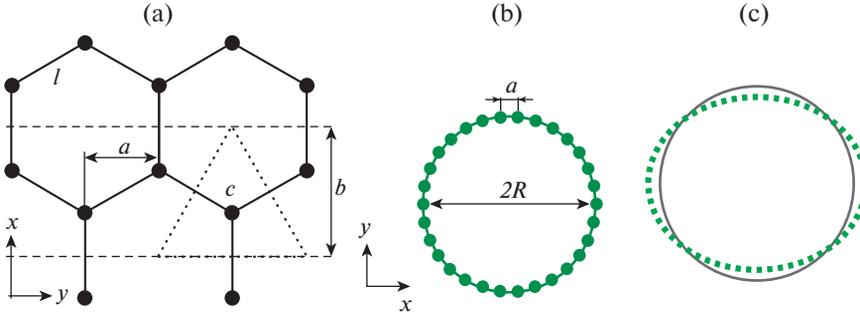
Например, ввиду одинакового давления по всей поверхности УНТ объектом исследования может быть принято кольцо с эффективными значениями радиуса  $R$ , толщины  $h$ , ширины  $b$ , плотности по площади  $\rho h$ , модуля упругости  $E$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ . Кольцо образуется зигзагообразным рядом атомов углерода [16, 17]. Если ось  $x$  направлена вдоль трубки, ось  $y = R\theta$  по окружности ( $\theta$  – центральный угол), то расстояние по  $y$  равно  $a = l\cos 30^\circ = 0.123$  нм. На рис. 1, а в виде равностороннего треугольника показана площадь  $S$ , приходящаяся на один атом. При  $4S = 3\sqrt{3}l^2$  эффективная ширина кольца равна  $b = Sa^{-1} = 0.213$  нм. Так как масса атома углерода равна  $m = 1.99 \times 10^{-26}$  кг, то эффективная плотность по площади

$$\rho h = mS^{-1} = 0.76 \times 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-2} \quad (1.1)$$

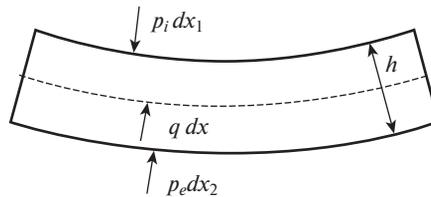
Во многих работах (в том числе в обзорных статьях [18–20]) приводятся значения модуля упругости  $E = (1–5) \times 10^6$  МПа, толщины однослойного графена  $h = 0.07–0.34$  нм. Эти данные получены экспериментально, а также с привлечением теоретического моделирования. Разброс значений  $E$  и  $h$  объясняется разными образцами для испытаний, аппаратурой, методами определения и т.д. Эффективный радиус  $R$  определяется через число атомов  $N$ , образующих кольцо рис. 1, б.

$$2\pi R = aN \quad (1.2)$$

**2. Постановка задачи.** На внутреннюю и внешнюю поверхности элемента конструкции действуют давления  $p_i$  и  $p_e$  жидкостей с плотностями  $\rho_i$  и  $\rho_e$  (рис. 2). Здесь  $p_i, p_e$  – избыточные давления. При определении нагрузки  $q$  исходим из предположения, что  $\rho_i, \rho_e$  и  $p_i, p_e$  остаются постоянными при изменении формы поперечного сечения. Предполагается идеальность и несжимаемость жидкостей. Давления внутри и вне трубопровода  $p_i, p_e$  изменяются независимо друг от друга. Интенсивность их возрастания от нуля будем считать такой, чтобы инерционные силы в системе были малы.



**Рис. 1.** (а) Кольцо шириной  $b$ , образованное двумя поперечными сечениями углеродной нанотрубки. Площадь, приходящаяся на один атом  $C$ , показана пунктирными линиями (равносторонний треугольник). (б) Поперечное сечение УНТ хиральности зигзаг  $(K, 0)$  на плоскости  $(x, y)$ . Показан случай  $K = 15$ , при этом поперечное сечение характеризуется  $N = 2K = 30$  атомами углерода. (с) Первая гармоника изгибных колебаний УНТ, соответствующая номеру  $n = 2$  в выражении (3.1). Показано на примере УНТ  $(27, 0)$ , для которой  $N = 54$  и радиус  $R = 9.47 \text{ \AA}$ .



**Рис. 2.** Элемент  $dx$  срединной поверхности изогнутой оболочки.

При  $p_i = 0, p_e = 0$  поперечное сечение конструкции имеет малое отклонение от круговой формы в виде (рис. 1, с)

$$w_0 = W_{0n} \cos n\theta, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.1)$$

где  $W_{0n}$  – амплитуда малого начального отклонения; радиальные перемещения считаем положительными, если они происходят в направлении к центру поперечного сечения конструкции. При этом остаточные напряжения в нем отсутствуют, например, в результате отжига [1].

Уравнение радиальной статики тонкого кольца относительно функции прогиба в предположении о нулевой деформации срединной поверхности имеет вид [21]

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{TR^2}{D} \left( \frac{\partial^4 (w_0 + w)}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial \theta^2} \right) = \frac{R^4}{D} \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} \quad (2.2)$$

где  $q$  – давление, приведенное к срединной поверхности,  $T$  – кольцевое растягивающее усилие при  $p_i > p_e$ , которое находится по формуле

$$T = p_i \int_0^{\pi/2} \left( R - \frac{h}{2} \right) \cos \theta d\theta - p_e \int_0^{\pi/2} \left( R + \frac{h}{2} \right) \cos \theta d\theta = (p_i - p_e) R - (p_i + p_e) \frac{h}{2} \quad (2.3)$$

Линейное уравнение (2.2) получено преобразованием дифференциальных уравнений равновесия элемента кольца в проекциях на касательную и нормаль с учетом изменения кривизны линии поперечного сечения [21].

Распределенная сила  $q$  определяется по формуле [13, 14]

$$q = p_e - p_i + \frac{(p_i + p_e)h}{2R} \quad (2.4)$$

Уравнение статики элемента конструкции (2.2) с учетом (2.3), (2.4) для  $p_i, p_e, R$  не зависящих от  $\theta$ , записывается

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \left[ (p_i - p_e)R - (p_i + p_e) \frac{h}{2} \right] \frac{R^2}{D} \left( \frac{\partial^4 (w_0 + w)}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (2.5)$$

**3. Изгиб оболочки.** Примем частное решение уравнения (2.5) в виде

$$w = W_n \cos n\theta, \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.1)$$

где  $W_n$  – амплитуда малого отклонения. Подставляя (2.1), (3.1) в уравнение (2.5), получаем отношение амплитуды текущего прогиба к амплитуде начального прогиба

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{3(\alpha_1 - \alpha)}{n^2 - 1 - 3(\alpha_1 - \alpha)}, \quad \alpha = \frac{(p_i - p_e)R^3}{3D}, \quad \alpha_1 = \frac{(p_i + p_e)R^2 h}{2 \cdot 3D} \quad (3.2)$$

Здесь параметр  $\alpha$  учитывает перепад давления  $p_i - p_e$ , а параметр  $\alpha_1$  учитывает действие среднего давления  $(p_i + p_e)/2$ . Из (3.2) видно, что прогиб тем больше, чем меньше величина давления внутри оболочки  $p_i$  и больше давление вне оболочки  $p_e$ . При  $\alpha_1 - \alpha = (n^2 - 1)/3$  прогиб в рассматриваемом линейном приближении растет неограниченно. Причем это выражение представляет собой критическую комбинацию внешних воздействий  $p_i, p_e$ , для системы с заданными параметрами материалов и размерами  $E, h, R$ . С возрастанием внешних воздействий рост прогиба (3.2) происходит наиболее быстро при  $n = 2$ . Указанная критическая комбинация внешних воздействий по (3.2) является минимальной при  $n = 2$ . Таким образом, получено условие устойчивости кругового поперечного сечения трубопровода, цилиндрической оболочки, УНТ с учетом действия среднего давления.

**4. Анализ результатов и примеры.** При  $\alpha = 0, \alpha_1 = 1$  происходит потеря устойчивости круговой формы поперечного сечения конструкции в виде эллипса ( $n = 2$ ), причем, критическое давление потери устойчивости равно

$$p_{ecr} = p_{icr} = \frac{3D}{R^2 h} = \frac{Eh^2}{4R^2(1 - \nu^2)}$$

откуда следует, что оболочка может потерять устойчивость даже при нулевом перепаде давления вследствие действия среднего давления. Например, при  $E = 2 \times 10^5$  МПа,  $\nu = 0.3, R = 0.1$  м,  $h = 0.002$  м и при нулевом перепаде давления критическое давление потери устойчивости  $p_{ecr}$  равно 21.9 МПа.

Для одностенной УНТ с хиральностью кресло (10, 10), радиусом  $R = 0.678$  м [22] для модуля упругости  $E = 0.972 \cdot 10^6$  МПа, коэффициента Пуассона  $\nu = 0.278$  [18] и толщине  $h$ , принятой равной 0.052 м, при нулевом перепаде давления критическое давление потери устойчивости  $p_{ecr}$  равно 1.55 ГПа [22], что соответствует давлению перехода круговой формы поперечного сечения к эллиптической или потере устойчивости кругового поперечного сечения одностенной УНТ.

При  $n = 2$  из условия устойчивости кругового поперечного сечения трубопровода, цилиндрической оболочки, УНТ с учетом действия среднего давления следует выражение для критического внешнего давления  $p_{ecr}$

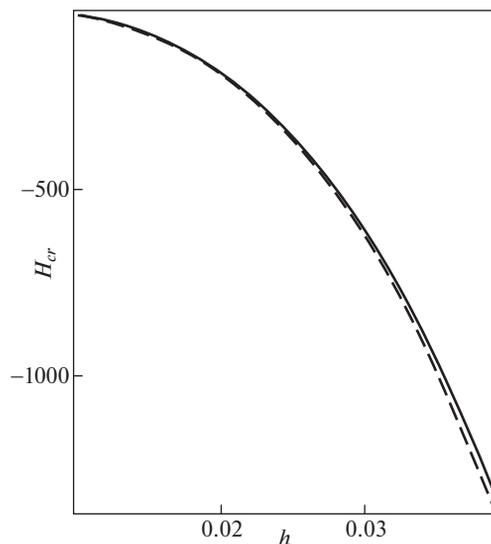


Рис. 3. Зависимости критической глубины погружения  $H_{cr}$  (м) от толщины трубопровода  $h$  (м).

$$p_{ecr} = p_i \frac{2R - h}{2R + h} + \frac{6D}{R^2 (2R + h)}$$

Если оболочка или трубопровод находятся в море, то критическая глубина погружения  $H_{cr}$  определяется

$$H_{cr} = -\frac{p_{ecr}}{\rho g}$$

где  $\rho$ ,  $g$  — плотность воды и ускорение свободного падения.

Конструкция трубопроводов, состоящих из слоистых (концентрических) труб, обеспечивает хорошие балластные, теплоизоляционные и антикоррозионные свойства [23–25], частично защищает от механических повреждений, пластических деформаций, трещинообразования.

На рис. 3 приводятся зависимости критической глубины погружения  $H_{cr}$  (м) от суммарной толщины стенки  $h$  (м) трубопровода, состоящего из слоистых (концентрических) труб, обеспечивающих хорошие балластные, теплоизоляционные и антикоррозионные свойства [23–25] для внутреннего давления  $p_i = 0.1$  МПа, приведенного модуля упругости слоистого трубопровода  $E = 1.5 \times 10^5$  МПа, коэффициента Пуассона  $\nu = 0.3$ , радиуса  $R = 0.57$  м, плотности воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, ускорения свободного падения  $g = 9.8$  м/с без учета и с учетом действия среднего давления (штриховая, сплошная линии соответственно). Видно, что учет среднего давления приводит к уменьшению критической глубины погружения.

На рис. 4 приводятся зависимости критической глубины погружения  $H_{cr}$  (м) от суммарной толщины стенки  $h$  (м) трубопровода, состоящего из слоистых (концентрических) труб, для коэффициента Пуассона  $\nu = 0.3$ , плотности воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, ускорения свободного падения  $g = 9.8$  м/с и разных значений приведенного модуля упругости слоистого трубопровода  $E = 2.0, 1.5, 1.0 \times 10^5$  МПа (сплошная, штриховая, пунктирная линии соответственно): (а) радиус  $R$  равен 0.7 м, внутреннее давление  $p_i =$

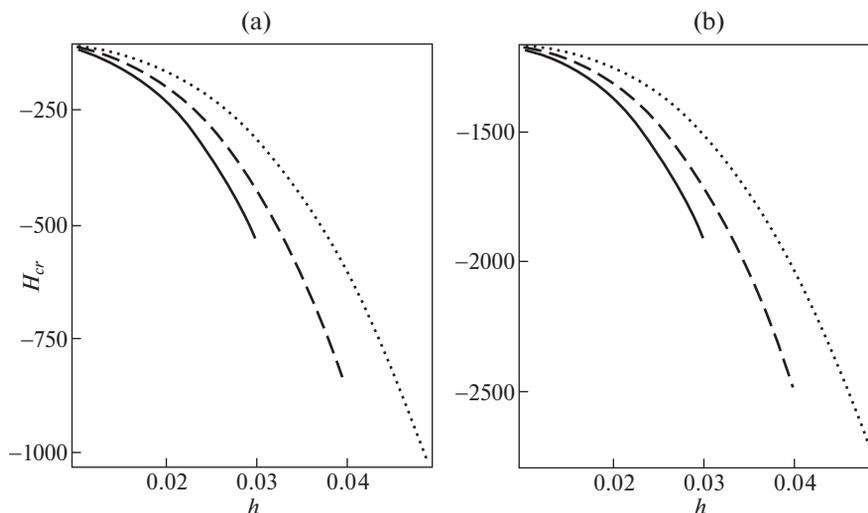


Рис. 4. Зависимости критической глубины погружения  $H_{cr}$  (м) от толщины трубопровода  $h$  (м).

= 1 МПа; (b) радиус  $R$  равен 0.57 м, внутреннее давление  $p_i = 11.5$  МПа. Предполагается, что плавучесть трубопровода отрицательная. Видно, что с увеличением толщины стенки трубопровода и уменьшением его радиуса критическая глубина погружения увеличивается.

**5. Заключение.** Оболочка может потерять устойчивость даже при нулевом перепаде давления вследствие действия среднего давления.

Получено условие устойчивости кругового поперечного сечения трубопровода, цилиндрической оболочки, УНТ с учетом действия среднего давления.

Эти результаты могут быть использованы при моделировании деформирования оболочек, контактирующих с жидкостью и газом, в том числе микро- и наноразмеров. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00578.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильгамов М.А. Взаимодействие неустойчивостей Эйлера, Гельмгольца, Рейля // ЖТФ. 2018. Т. 63. № 2. С. 163–167.  
<https://doi.org/10.21883/JTF.2018.02.45401.2144>
2. Дяченко И.А., Миронов А.А. Аналитические и численные исследования свободных колебаний цилиндрических оболочек с акустической средой // Проблемы прочности и пластичности. 2021. Т. 83. № 1. С. 35–48.  
<https://doi.org/10.32326/1814-9146-2021-83-1-35-48>
3. Leizerovich G.S., Taranukha N.A. Nonobvious features of dynamics of circular cylindrical shells // Mech. Solids. 2008. V. 43. № 2. P. 246–253.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654408020106>
4. Rawat A., Matsagar V., Nagpal A. Finite element analysis of thin circular cylindrical shells // Proc. Indian Nat. Sci. Acad. 2016. V. 82. № 2. P. 349–355.  
<https://doi.org/10.16943/ptinsa/2016/48426>
5. Farshidianfar A., Oliazadeh P. Free vibration analysis of circular cylindrical shells: comparison of different shell theories // Int. J. Mech. Appl. 2012. V. 2. № 5. P. 74–80.  
<https://doi.org/10.5923/j.mechanics.20120205.04>
6. Bleich H.H., Baron M.L. Free and Forced vibration of an infinitely long cylindrical shell in an infinite acoustic medium // J. Appl. Mech. Trans. ASME. 1954. V. 21. № 2. P. 167–177.

7. *O'Connell A.D., Hofheinz M., Ansmann Mю et al.* Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator // *Nature*. 2010. V. 464. P. 697–703.  
<https://doi.org/10.1038/nature08967>
8. *Burg T.P., Godin M., Knudsen S.M. et al.* Weighing of biomolecules, single cells and single nanoparticles in fluid // *Nature*. 2007. V. 446. P. 1066–1069.  
<https://doi.org/10.1038/nature05741>
9. *Husale S., Persson H.H.J., Sahin O.* DNA nanomechanics allows direct digital detection of complementary DNA and microRNA targets // *Nature*. 2009. V. 462. P. 1075–1078.  
<https://doi.org/10.1038/nature08626>
10. *Sirenko Y.M., Stroschio M.A., Kim K.W.* Elastic vibrations of microtubules in a fluid // *Phys. Rev.* V. 53. № 1. 1996. P. 1003–1010.
11. *Аннин Б.Д., Алехин В.В., Бабичев А.В., Коробейников С.Н.* Применение метода молекулярной механики к задачам устойчивости и собственных колебаний однослойных углеродных нанотрубок // *Изв. РАН. МТТ*. 2012. № 5. С. 65–83.
12. *Chen Y., Alba M., Tieu T., Tong Z., Minhas R.S., Rudd D., Voelcker N.H., Cifuentes-Rius A., and Elnathan R.* Engineering Micro-Nanomaterials for Biomedical Translation // *Adv. NanoBiomed Res.* 2021. № 1. P. 2100002.  
<https://doi.org/10.1002/anbr.202100002>
13. *Ильгамов М.А.* Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки // *ДАН*. 2017. Т. 476. № 4. С. 402–405.
14. *Ильгамов М.А.* Влияние поверхностных эффектов на изгиб и колебания нанопленок // *ФТТ*. 2019. Т. 61. № 10. С. 1825–1830.  
<https://doi.org/10.21883/ФТТ.2019.10.48255.381>
15. *Игатов М.А., Khakimov A.G.* Influence of pressure on the frequency spectrum of micro and nanoresonators on hinged supports // *J. Appl. Comput. Mech.* 2021. V. 7. № 2. P. 977–983.  
<https://doi.org/10.22055/JACM.2021.36470.2848>
16. *Дмитриев С.В., Сунагатова И.Р., Ильгамов М.А., Павлов И.С.* Собственные частоты радиальных колебаний углеродных нанотрубок // *ЖТФ*. 2021. Т. 91. Вып. 11. С. 1732–1737.  
<https://doi.org/10.21883/JTF.2021.11.51536.127-21>
17. *Dmitriev S.V., Semenov A.S., Savin A. ., Igatov M.A., Bachurin D.V.* Rotobreather in a carbon nanotube bundle // *Journal of Micromechanics and Molecular Physics* 2021, 2050010.  
<https://doi.org/10.1142/S2424913020500101>
18. *Елецкий А.В.* Механические свойства углеродных нанотрубок и материалов на их основе // *Усп. физ.наук*. 2007. Т. 177. № 3. С. 233–274.
19. *Harik V.M.* Ranges of applicability for the continuum beam model in the mechanics of carbon nanotubes and nanorods // *Solid State Commun.* 2001. V. 120. P. 331–335.  
[https://doi.org/10.1016/S0038-1098\(01\)00383-0](https://doi.org/10.1016/S0038-1098(01)00383-0)
20. *Qian D., Wagner G.J., Lin W.K., Ju M.F., Ruoff R.S.* Mechanics of carbon nanotubes // *Appl. Mech. Rev.* 2002. V. 55. № 6. P. 495–532.  
<https://doi.org/10.1115/1.1490129>
21. *Timoshenko S.P., Young D.H., Weaver W.* *Vibration Problems in Engineering*. New York: John Wiley & Sons, 1974.
22. *Wu J., Zang J., Larade B., Guo H., Gong X.G., Liu F.* Computational design of carbon nanotube electromechanical pressure sensors // *Phys. Rev. B*. 2004. V. 69. P. 153406.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.69.153406>
23. *Bi K., Hao H.* Using pipe-in-pipe systems for subsea pipeline vibration control // *Eng. Struct.* 2016. V. 109. P. 75–84.  
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.11.018>
24. *Davaripour F., Quinton B.W.T., Pike K.* Effect of damage progression on the plastic capacity of a subsea pipeline // *Ocean Eng.* 2021. V. 234.  
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.109118>
25. *Cheng A., Chen N.-Z.* Corrosion fatigue crack growth modelling for subsea pipeline steels // *Ocean Eng.* 2017. V. 142. P. 10–19.  
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2017.06.057>

УДК 539.376

## О ДЛИТЕЛЬНОМ РАЗРУШЕНИИ СОСТАВНОГО РАСТЯГИВАЕМОГО СТЕРЖНЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

© 2023 г. Л. В. Фомин<sup>а,\*</sup>, Ю. Г. Басалов<sup>а,\*\*</sup>

<sup>а</sup> НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*e-mail: fleonid1975@mail.ru,

\*\*e-mail: basalov@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.02.2022 г.

После доработки 12.03.2022 г.

Принята к публикации 14.03.2022 г.

Рассматривается напряженно-деформированное состояние и определяется время до разрушения составного растягиваемого стержня при ползучести. Стержень состоит из трех частей, расположенных симметрично по толщине. Принято дополнительное условие: все части составного стержня жестко, без проскальзывания соединены между собой. Ползучесть каждой части стержня описывается степенной моделью с различными параметрами. Для определения времени до разрушения используется кинетическое уравнение, которое описывает накопление повреждений в процессе ползучести. Для каждой части стержня принят одинаковый вид кинетического уравнения, но накопление повреждений происходит под действием напряжений, различных для каждой из частей. Анализируются распределения напряжений и процессы накопления повреждений во времени в различных частях составного стержня. Определяются значения материальных констант в степенных законах ползучести и длительного разрушения, приводящие к увеличению времени до разрушения составного стержня.

*Ключевые слова:* составной стержень, ползучесть, кинетическая теория Ю.Н. Работнова, поврежденность, длительное разрушение, время до разрушения

DOI: 10.31857/S0572329922100087, EDN: KLPUYU

**Введение.** Современные материалы и элементы конструкций должны обеспечивать надежность и работоспособность изделий, выполненных из них, в течение всего срока службы. В связи с этим наукоемкие исследования высокотемпературной прочности материалов и конструкций достаточно актуальны. Наиболее часто для дополнительной защиты элементов конструкций от деструктивного воздействия внешней, часто рабочей, активной среды применяются типовые элементы составного типа. Внешний слой такой составной конструкции, как правило, контактирует с агрессивным веществом и защищает основные элементы конструкции от его разрушительного воздействия.

Данная статья посвящена исследованию напряженно-деформированного состояния и моделированию процессов разрушения такой типовой конструкции, как стержень, находящийся в условии ползучести [1–3] при растяжении. Изучение и моделирование таких процессов является предварительным опорным исследованием перспективной задачи о защитном эффекте внешних частей составного стержня при его контакте с рабочей активной средой в условиях длительного действия нагрузки и повышенных температур. В таких условиях (как в нейтральной среде, так и при воздей-

ствии активных сред) для металлических материалов и сплавов, как известно, проявляются свойства их ползучести, которые могут приводить к разрушению ответственных элементов конструкций.

Проблема изучения ползучести и длительного разрушения конструкций составного типа весьма актуальна. Приведем некоторый обзор известных научных работ и статей по указанной теме.

В работе [4] рассматривается кручение составных валов переменного сечения в условиях установившейся ползучести. При этом слои составных валов спаяны между собой. Решение рассматриваемой задачи ищется с помощью единой функции напряжений.

В работах [5–10] используется наследственная теория ползучести для описания поведения составных конструкций под нагрузкой. Так, в работе [5] рассматривается подход моделирования вязкоупругих свойств материала, который позволяет спрогнозировать перераспределение усилий во времени в слоях составных конструкций. Авторами статьи [5] определены новые ядра для описания ползучести стареющих материалов. Полученные в статье результаты являются теоретическим обоснованием решений нелинейных задач деформирования составных пластин и оболочек с учетом ползучести, что позволяет получить прогнозные оценки поведения конструкций в реальных условиях эксплуатации.

В статье [6] рассмотрена неустановившаяся ползучесть однородных и металлокомпозитных стержней (балок) нерегулярной слоистой структуры. Балки состоят из тонких стенок и прикрепленных к ним сверху и снизу полок (несущих слоев). Стенки и несущие слои изготовлены из однородных изотропных материалов. Механическое поведение этих материалов описывается нелинейной наследственной теорией ползучести Ю.Н. Работнова. На базе гипотез теории Тимошенко с привлечением идеи метода шагов по времени сформулирована задача неупругого изгибного деформирования таких стержней с учетом ослабленного сопротивления их стенок поперечному сдвигу. В исследовании показано, что в балках с усиленными несущими слоями ползучесть в основном развивается за счет деформаций поперечных сдвигов, которые активно накапливаются в стенках таких конструкций.

В работе [7] построено точное решение квазистатической задачи об определении напряженно-деформированного состояния толстостенной трубы, состоящей из любого количества (соединенных без натяга, ненапряженных) слоев нелинейно-вязкоупругих изотропных материалов, каждый из которых подчиняется определяющему соотношению Ю.Н. Работнова с разными парами произвольных материальных функций и постулату несжимаемости при нагружении давлениями на внутренней и внешней поверхностях трубы, медленно меняющимися во времени. Автором получено решение задачи о ползучести и длительной прочности многослойной трубы. Выведено уравнение для времени разрушения трубы при ползучести с использованием трех вариантов деформационного критерия разрушения: в качестве меры поврежденности выбраны максимальная деформация растяжения в каждом слое трубы, или интенсивность деформаций, или максимальная деформация сдвига.

В работе [8] методами строительной механики проведено моделирование напряженного состояния многослойных конструкций. Авторами проведены расчеты трехслойной цилиндрической оболочки (сталь, бетон, сталь).

В статье [9] на примере решения контактных задач ползучести предлагается обобщение модели основания Винклера на случай ползучести материала деформируемого покрытия. Использована наследственная теория ползучести. Рассматриваются вязкоупругое однородно стареющее однослойное, многослойное и композиционное покрытия, а также однослойные покрытия с нелинейной ползучестью.

В работе [10] исследована ползучесть гомогенных и гибридных композитных балок нерегулярной слоисто-волокнистой структуры. Балки состоят из тонких стенок и по-

лок (несущих слоев). Стены могут быть усилены продольно или поперечно в плоскости, а несущие слои армированы в продольном направлении. Механическое поведение фазовых материалов описывается нелинейной наследственной теорией ползучести Работнова с учетом разной их устойчивости к растяжению и сжатию. На основе гипотез теории Тимошенко с использованием метода временных шагов сформулирована задача о неупругом изгибе таких балок с учетом ослабленного сопротивления их стенок поперечному сдвигу.

Интересный подход к оценке релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочненных лопатках газотурбинных двигателей при ползучести разработан авторами работ [11, 12]. В основе метода лежит гипотеза, позволяющая произвести декомпозицию лопатки на “тело” лопатки и тонкий упрочненный поверхностный слой, что дает возможность разбить рассматриваемую задачу на ряд краевых задач, которые решаются последовательно.

Аналогичный подход применен авторами [13] при разработке метода решения краевой задачи релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочненном сплошном цилиндре в условиях ползучести. В данной работе учитывается жесткая фиксация первоначально заданных осевой деформации и угле закручивания цилиндра. Разработанная авторами феноменологическая методика применяется при исследовании напряженно-деформированного состояния цилиндрического образца из сплава ЖС6КП после пневмодробеструйной обработки.

Известно, что поликристаллическое тело представляет собой совокупность сросшихся друг с другом хаотически ориентированных маленьких кристаллов – кристаллитов. Размеры кристаллитов (зерен), их форма и ориентация кристаллографических осей имеют случайный характер. На микроуровне и мезоуровне поликристаллическое тело можно считать составным, элементы которого состоят из множества ориентированных в разных направлениях кристаллитов. В работе [14] рассматривается вопрос оценки кинетики напряженно-деформированного состояния и процесса накопления повреждений поликристаллических конструкционных материалов при воздействии нестационарного длительного термостатического нагружения. При таком нагружении основным деградационным механизмом является ползучесть материала. Авторами [14] приведена математическая модель, построенная на базе концепций механики поврежденной среды и позволяющая описывать процессы при нестационарной ползучести в условиях сложного нагружения. Путем сопоставления результатов численного исследования с экспериментальными данными приводится доказательство применимости математической модели для одноосных и многоосных знакопеременных условий нагружения.

Ползучесть бетонов, армированных стальными стержнями [15, 16] и полимерными волокнами [17], и составных конструкций из них рассматриваются в условии длительного сжатия. В работе [16] произведен учет начальных напряжений и деформаций при оценке несущей способности сталежелезобетонных конструкций на эксплуатационные нагрузки.

Учет преднапряжений армирующих элементов и их влияние на ползучесть и длительные характеристики составных конструкций поперечно-клееных брусев произведен в работах зарубежных авторов [18, 19]. В этих исследованиях учитываются реологические свойства древесины при продольном и поперечном сжатии [20].

Проведенный обзор показал, что в исследованиях ученых в основном изучается и моделируется напряженно-деформированное состояние (НДС) составных конструкций и их элементов. Изучению времени до разрушения таких составных конструкций в условии длительного действия нагрузок уделяется недостаточное внимание.

Настоящая статья посвящена как определению НДС, так и прогнозированию времени до разрушения составного металлического растягиваемого стержня, находящегося в условии ползучести. Исследование основывается на кинетической теории пол-

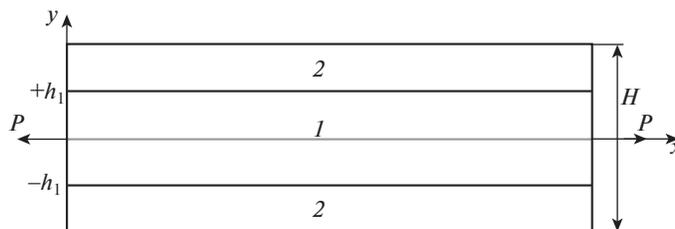


Рис. 1. Схема расположения частей в составном стержне.

зучести и длительной прочности Ю.Н. Работнова [1]. В качестве структурного параметра, описывающего накопление повреждений в процессе ползучести, в данной статье использован параметр поврежденности, который имеет смысл накопления пор и микронесплошностей в материале.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается составной металлический стержень, находящийся в состоянии установившейся ползучести под действием постоянной растягивающей силы  $P$ , приложенной к его торцам. Стержень имеет прямоугольное поперечное сечение, длина стержня  $L$ , ширина стержня  $H$  и толщина  $b$  удовлетворяют двойному неравенству  $L \gg H \gg b$ . Расположение частей симметрично относительно срединной плоскости, проходящей через геометрическую середину ширины  $H$ . Центральная часть стержня выполнена из материала, обладающего одними свойствами ползучести, две крайние одинаковые части выполнены из другого материала, который обладает другими свойствами ползучести. Дополнительно примем следующее условие: все части составного стержня жестко, без проскальзывания соединены между собой. Расположение частей в стержне представлено на рис. 1.

На рис. 1 обозначение  $h_1$  соответствует ординате границы первой (центральной) и вторых (крайних) частей в системе координат  $xOy$ . При этом ширина первой части равна  $2h_1$ .

При принятом условии жесткого соединения частей в составном стержне (без их взаимного проскальзывания) напряженные состояния вблизи мест соединения слоев становятся отличными от одномерных и неоднородными. Неоднородность напряженного состояния вблизи мест соединений частей может возникнуть, в том числе, и по причине естественных несовершенств технологических способов соединения частей между собой. Распространенными способами соединения являются диффузионная сварка, спайка, склейка, различные способы газодинамического напыления.

Общие тенденции развития методов исследования и определения напряженно-деформированного состояния типовых элементов конструкций (стержни, пластины, тонкостенные оболочки) приводят к сведению решения трехмерных задач к решению более простых задач — двумерных и одномерных. Иными словами, часто при соответствующих условиях размерность решаемой задачи понижается. Так, например, малый размер элемента конструкции в поперечном направлении может позволить исследователям избавиться от поперечной координаты в математических постановках задач и их решении. Кроме этого, используются методы упрощения, связанные с использованием гипотез и известных принципов. Реализация методов с использованием известных и принятых в механике гипотез, как правило, не содержит процедур регулярного уточнения решения.

Возвращаясь к постановке рассматриваемой задачи, учитывая малость поперечных размеров составного стержня по сравнению с его длиной, примем одномерный характер напряженного состояния. В процессе решения будем использовать гипотезу плос-

ких сечений и обобщение принципа Сен-Венана для рассматриваемой задачи, что позволяет считать напряженное состояние однородным вдали от мест соединения частей составного стержня.

**2. Определяющие и кинетические соотношения.** Пусть соотношения (2.1) описывают скорость деформации ползучести, соответственно, первой (центральной) части и двух крайних частей

$$\dot{\rho}_1 = B_1 \left( \frac{\sigma_1}{1 - \omega_1} \right)^n, \quad \dot{\rho}_2 = B_2 \left( \frac{\sigma_2}{1 - \omega_2} \right)^n \quad (2.1)$$

где  $\sigma_1$  – напряжение в первой (центральной) части стержня,  $\sigma_2$  – напряжение в двух крайних частях стержня,  $\omega_1$  – параметр поврежденности для центральной части стержня,  $\omega_2$  – параметр поврежденности одинаковый для двух крайних частей стержня,  $B_1, B_2, n$  – материальные константы, точка над символами  $\rho_1$  и  $\rho_2$  означает производную по времени  $t$ .

В соотношениях (2.1) на основе кинетической теории ползучести и длительной прочности Ю.Н. Работнова введен структурный параметр – параметр поврежденности  $\omega$ , который описывает накопление повреждений в процессе ползучести. Для каждой части составного стержня примем одинаковый вид кинетического уравнения для  $\omega$ , но поскольку в каждой части составного стержня действует свое механическое напряжение  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , то скорости накопления повреждений в них в процессе ползучести будут различными

$$\frac{d\omega_1}{dt} = A \left( \frac{\sigma_1}{1 - \omega_1} \right)^m, \quad \omega_1 = \omega_1(t), \quad \omega_1(0) = 0, \quad \omega_1^* \equiv \omega_1(t = t_1^*) = 1 \quad (2.2)$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = A \left( \frac{\sigma_2}{1 - \omega_2} \right)^m, \quad \omega_2 = \omega_2(t), \quad \omega_2(0) = 0, \quad \omega_2^* \equiv \omega_2(t = t_2^*) = 1 \quad (2.3)$$

где  $t_1^*$  – время до разрушения центральной части стержня,  $t_2^*$  – время до разрушения крайних частей стержня,  $A, m$  – материальные константы.

Критерием разрушения каждой части стержня является условие достижения параметром поврежденности для соответствующей части значения, равного единице  $\omega_1^* \equiv \omega_1(t = t_1^*) = 1$  и  $\omega_2^* \equiv \omega_2(t = t_2^*) = 1$ . Временем до разрушения всего составного стержня  $t^*$  будем считать время минимальное из полученных времен до разрушения отдельных частей стержня:  $t^* = \min\{t_1^*, t_2^*\}$ .

Система, состоящая из уравнений (2.1), (2.2), (2.3), моделирует рассматриваемую полусвязанную задачу. Скорость накопления повреждений в процессе ползучести зависит от уровня напряжений. В свою очередь скорость деформации ползучести каждой части составного стержня зависит как от уровня механического напряжения в ней, так и от накопленной поврежденности, характеризуемой параметром  $\omega$ .

В силу осевой симметрии задачи, одинаковых законов установившейся ползучести двух крайних частей и симметрии процессов накопления поврежденности относительно геометрической оси стержня, внешние нагрузки распределяются между двумя крайними частями поровну, и напряжения  $\sigma_2$  в них будут одинаковыми. Поскольку все части составного стержня жестко связаны между собой, то для дальнейшего решения примем гипотезу плоских сечений, т.е. деформация ползучести для сечений, ортогональных оси симметрии, для всех точек каждого сечения одинаковая, и она не зависит от поперечной координаты  $y$ .

Введем безразмерные переменные:

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}, \quad \bar{\sigma}_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_0}, \quad \bar{t} = B_1 \sigma_0^n t, \quad \bar{\bar{t}} = B_2 \sigma_0^n t \quad (2.4)$$

где  $\sigma_0$  – некоторое характерное напряжение размерности МПа, например, половина предела кратковременной прочности  $\sigma_b$  ( $\sigma_0 = 0.5\sigma_b$ ) при соответствующей температуре.

С учетом безразмерных напряжений в (2.4) определяющие соотношения (2.1) будут иметь следующий вид:

$$\frac{dp_1}{d\bar{t}} = \frac{\bar{\sigma}_1^n}{(1 - \omega_1)^n}, \quad \frac{dp_2}{d\bar{\bar{t}}} = \frac{\bar{\sigma}_2^n}{(1 - \omega_2)^n} \quad (2.5)$$

Выразим безразмерное время  $\bar{\bar{t}}$ :

$$\bar{\bar{t}} = k\bar{t}, \quad k = \frac{B_2}{B_1}$$

Тогда определяющие соотношения (2.5) для центральной и двух крайних частей составного стержня будут иметь следующий вид:

$$\frac{dp_1}{d\bar{t}} = \frac{\bar{\sigma}_1^n}{(1 - \omega_1)^n}, \quad \frac{dp_2}{d\bar{\bar{t}}} = \frac{k\bar{\sigma}_2^n}{(1 - \omega_2)^n} \quad (2.6)$$

Как отмечалось ранее, процессы накопления повреждений и разрушения определяются кинетическими уравнениями (2.2) и (2.3). Запишем кинетические уравнения накопления поврежденности с использованием единого для задачи безразмерного времени  $\bar{t}$  и безразмерных напряжений:

$$\frac{d\omega_1}{d\bar{t}} = C_1 \frac{\bar{\sigma}_1^m}{(1 - \omega_1)^m}, \quad \frac{d\omega_2}{d\bar{t}} = C_1 \frac{\bar{\sigma}_2^m}{(1 - \omega_2)^m} \quad (2.7)$$

где  $C_1 = \frac{A}{B_1} \sigma_0^{m-n}$  – безразмерная материальная константа.

Начальные условия для уравнений (2.7):  $\omega_1(0) = 0$ ,  $\omega_2(0) = 0$ .

В результате система уравнений для центральной части имеет вид:

$$\frac{dp_1}{d\bar{t}} = \frac{\bar{\sigma}_1^n}{(1 - \omega_1)^n}, \quad \frac{d\omega_1}{d\bar{t}} = C_1 \frac{\bar{\sigma}_1^m}{(1 - \omega_1)^m}$$

Система уравнений для двух крайних частей:

$$\frac{dp_2}{d\bar{\bar{t}}} = \frac{k\bar{\sigma}_2^n}{(1 - \omega_2)^n}, \quad \frac{d\omega_2}{d\bar{\bar{t}}} = C_1 \frac{\bar{\sigma}_2^m}{(1 - \omega_2)^m}$$

Каждая из двух систем является не замкнутой. В каждой из них неизвестными величинами являются механическое напряжение, поврежденность и скорость деформации ползучести в рассматриваемой части стержня.

Принятое условие жесткого соединения частей стержня без проскальзывания и гипотеза плоских сечений дает возможность принять естественное условие равенства деформаций ползучести  $p_1 = p_2$  с учетом заданного начального условия  $p(t=0) = 0$ .

$$\frac{dp_1}{d\bar{t}} = \frac{\bar{\sigma}_1^n}{(1 - \omega_1)^n}, \quad dp_1 = \frac{\bar{\sigma}_1^n}{(1 - \omega_1)^n} d\bar{t}$$

$$\int_0^{p_1} dp_1 = \int_0^{\bar{t}} \frac{\bar{\sigma}_1^n}{(1 - \omega_1)^n} d\bar{t}, \quad p_1 = \int_0^{\bar{t}} \frac{\bar{\sigma}_1^n}{(1 - \omega_1)^n} d\bar{t}$$

Аналогично:

$$\frac{dp_2}{d\bar{t}} = \frac{k\bar{\sigma}_2^n}{(1 - \omega_2)^n}, \quad p_2 = k \int_0^{\bar{t}} \frac{\bar{\sigma}_2^n}{(1 - \omega_2)^n} d\bar{t}$$

Из условия равенства деформаций ползучести  $p_1 = p_2$  следует:

$$\int_0^{\bar{t}} \frac{\bar{\sigma}_1^n}{(1 - \omega_1)^n} d\bar{t} = k \int_0^{\bar{t}} \frac{\bar{\sigma}_2^n}{(1 - \omega_2)^n} d\bar{t}$$

Запишем уравнение равновесия

$$P = 2 \left[ \int_0^{h_1} b\sigma_1 dy + \int_{h_1}^{H/2} b\sigma_2 dy \right] = 2b \left[ h_1\sigma_1 + \left( \frac{H}{2} - h_1 \right) \sigma_2 \right] \quad (2.8)$$

Введем величину  $\Sigma \equiv \frac{P}{bH}$ , тогда

$$\Sigma = [\alpha\sigma_1 + (1 - \alpha)\sigma_2], \quad \alpha = \frac{2h_1}{H}$$

С учетом выражений для безразмерных напряжений  $\bar{\sigma}_1$  и  $\bar{\sigma}_2$  уравнение равновесия (2.8) будет иметь вид:

$$\Sigma_0 = [\alpha\bar{\sigma}_1 + (1 - \alpha)\bar{\sigma}_2] \quad (2.9)$$

где  $\Sigma_0 = \frac{\Sigma}{\sigma_0} = \frac{P}{bH\sigma_0}$ .

Выразим из (2.9)  $\bar{\sigma}_2$ :

$$\bar{\sigma}_2 = \frac{[\Sigma_0 - \alpha\bar{\sigma}_1]}{(1 - \alpha)} \quad (2.10)$$

Таким образом, замкнутая система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\frac{d\omega_1}{d\bar{t}} = C_1 \frac{\bar{\sigma}_1^m}{(1 - \omega_1)^m}$$

$$\frac{d\omega_2}{d\bar{t}} = C_1 \frac{([\Sigma_0 - \alpha\bar{\sigma}_1])^m}{((1 - \alpha)(1 - \omega_2))^m} \quad (2.11)$$

$$\int_0^{\bar{t}} \frac{\bar{\sigma}_1^n}{(1 - \omega_1)^n} d\bar{t} = k \int_0^{\bar{t}} \left( \frac{[\Sigma_0 - \alpha\bar{\sigma}_1]}{(1 - \alpha)(1 - \omega_2)} \right)^n d\bar{t}$$

где использованы константы  $C_1 = \frac{A}{B_1} \sigma_0^{m-n}$ ,  $k = \frac{B_2}{B_1}$ ,  $\alpha = \frac{2h_1}{H}$ ,  $\Sigma_0 = \frac{P}{bH\sigma_0}$ .

Начальные условия для кинетических соотношений в системе (2.11) имеют следующий вид:  $\omega_1(0) = 0$ ,  $\omega_2(0) = 0$ .

В указанной системе из трех уравнений тремя неизвестными являются: поврежденность  $\omega_1 = \omega_1(\bar{t})$  – в центральной части стержня, поврежденность  $\omega_2 = \omega_2(\bar{t})$  – в двух крайних частях составного стержня, напряжение  $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_1(\bar{t})$ . Напряжение  $\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_2(\bar{t})$  определяется в соответствии с соотношением (2.10). Указанные характеристики напряженного состояния и поврежденности являются зависимыми от времени.

Необходимо отметить, что материальные параметры  $A, B_1, B_2, m, n$ , входящие в соотношения (2.1), (2.2), (2.3) и в систему уравнений (2.11), в общем случае можно определить на основе обработки экспериментальных данных по ползучести и длительной прочности стандартных образцов из материалов, из которых изготовлены рассматриваемые части составного стержня.

Критерием разрушения каждой части стержня является условие достижения параметром поврежденности для соответствующей части стержня значения, равного единице  $\omega_1^* \equiv \omega_1(\bar{t} = \bar{t}_1^*) = 1$  и  $\omega_2^* \equiv \omega_2(\bar{t} = \bar{t}_2^*) = 1$ . Безразмерным временем до разрушения всего составного стержня  $\bar{t}^*$  будем считать время минимальное из полученных безразмерных времен до разрушения отдельных частей стержня:  $\bar{t}^* = \min\{\bar{t}_1^*, \bar{t}_2^*\}$ .

**3. Пример численного расчета. Анализ полученных результатов.** В качестве примера численного расчета и дальнейшего анализа примем модельные значения констант в соотношениях системы (2.11):  $C_1 = 2, k = 0.5, \alpha = 0.5, \Sigma_0 = 0.5$ . Значения  $m = n$  примем равными друг другу, проанализируем кинетику накопления повреждений и распределения напряжений во времени при различных значениях  $m = n$ .

В первом варианте расчета примем  $m = n = 3$ . Тогда численным способом получим следующие распределения искомых характеристик. В этом случае зависимости  $\omega_1 = \omega_1(\bar{t}), \omega_2 = \omega_2(\bar{t}), \bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_1(\bar{t}), \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_2(\bar{t})$  от времени  $\bar{t}$  представлены в виде соответствующих кривых 1 на рис. 2, 3, 4, 5. Необходимо отметить, что в данном случае параметр поврежденности  $\omega_2$  достигает значения, равного единице, быстрее, чем параметр  $\omega_1$ . В связи с этим, согласно, принятому критерию разрушение части 1 и, соответственно, всего составного стержня наступает в момент времени  $\bar{t}_1^* = 0.926$ . В данный момент времени численный счет  $\omega_1 = \omega_1(\bar{t})$  прекращается (при достижении  $\omega_1(\bar{t}_1^*) = 0.5$ ), поскольку не имеет дальнейшего смысла.

Аналогичный расчет (при  $C_1 = 2, k = 0.5, \alpha = 0.5, \Sigma_0 = 0.5$ ) был произведен для значений констант  $m = n = 4, 5, 6, 7$ . На указанных рис. 2, 3, 4, 5 соответствующие кривые имеют номера 3, 4, 5, 6.

Здесь необходимо отметить следующие особенности. С течением времени с ростом напряжения  $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_1(\bar{t})$  в центральной части составного стержня напряжение  $\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_2(\bar{t})$  в двух крайних частях уменьшается. При этом сумма  $\bar{\sigma}_1$  и  $\bar{\sigma}_2$  в любой момент времени одинакова и равна единице.

Показанные здесь результаты были получены при отношении констант в соотношениях ползучести (2.1)  $k = B_2/B_1 = 0.5$ .

*Примечания.* На рис. 2, 3, 4, 5 введены следующие обозначения:

1 – расчетные кривые при  $m = n = 3$ ; 2 – расчетные кривые при  $m = n = 3.170$ ; 3 – расчетные кривые при  $m = n = 4$ ; 4 – расчетные кривые при  $m = n = 5$ ; 5 – расчетные кривые при  $m = n = 6$ ; 6 – расчетные кривые при  $m = n = 7$ .

Представляет интерес проанализировать процессы накопления повреждений и распределения напряжений во времени при значениях  $k = 1$  и  $k = 2$ .

Если составной стержень сделан из одинаковых материалов с равными друг другу материальными параметрами, в том числе  $B_1 = B_2$  в соотношениях (2.1), то  $k = B_2/B_1 = 1$ . В этом случае рассматриваемый составной стержень под действием растягивающей нагрузки при ползучести деформируется как единое целое. При этом вся площадь по-

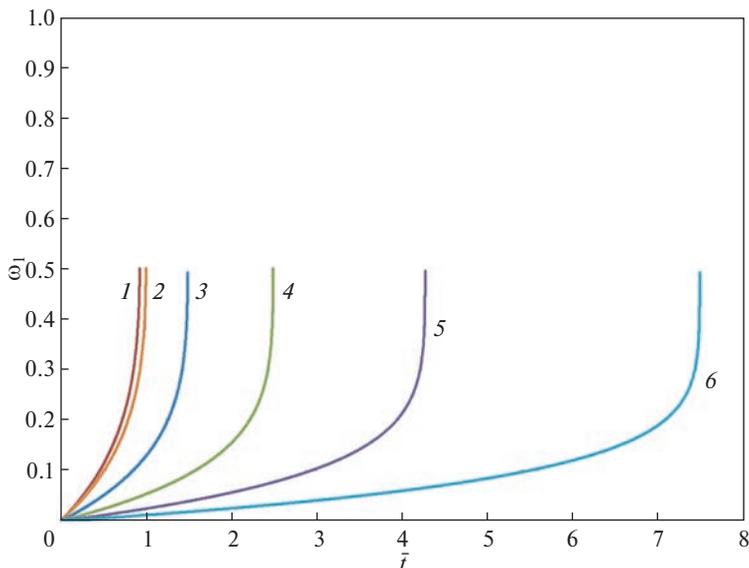


Рис. 2. Зависимости поврежденности  $\omega_1$  в центральной части составного стержня от безразмерного времени  $\bar{t}$  при различных параметрах  $m = n$ .

перечного сечения стержня воспринимает внешнюю нагрузку “без чувствительности” к составному характеру этой конструкции. Здесь, как и ранее, дополнительно принято условие жесткого, без проскальзывания соединения между собой всех частей составного стержня.

Для определения времени до разрушения такой конструкции при  $k = 1$  достаточно проинтегрировать первое уравнение системы (2.11) при значении  $\bar{\sigma}_1 = \Sigma_0$ . В рассматриваемом случае  $\bar{\sigma}_1 = \Sigma_0 = 0.5$

$$\frac{d\omega_1}{d\bar{t}} = C_1 \frac{\bar{\sigma}_1^m}{(1 - \omega_1)^m}, \quad \int_0^{\omega_1} (1 - \omega_1)^m d\omega_1 = \int_0^{\bar{t}} C_1 \bar{\sigma}_1^m d\bar{t}$$

В результате зависимость  $\omega_1(\bar{t})$  имеет следующий вид:

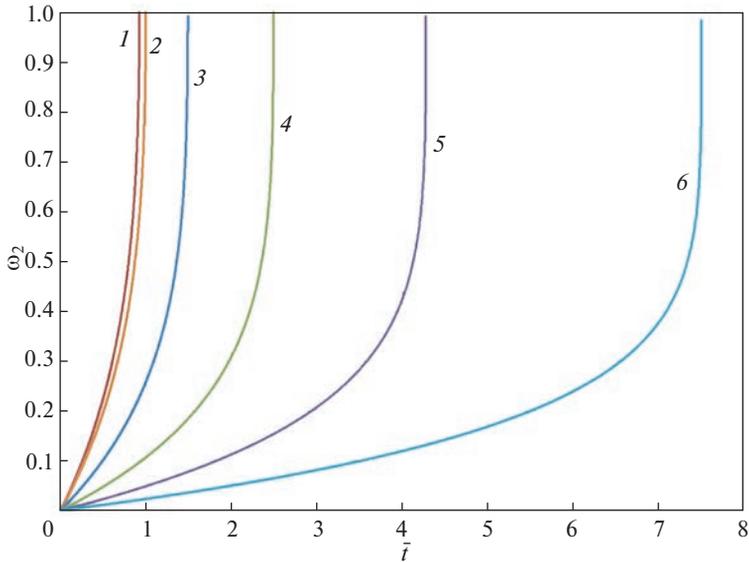
$$\omega_1 = 1 - \left[ (m + 1) \left[ \frac{1}{m + 1} - C_1 \bar{\sigma}_1^m \bar{t} \right] \right]^{\frac{1}{m+1}}$$

С учетом условия  $\omega_1(\bar{t}^*) = 1$  определяем  $\bar{t}^*$  (при  $m = 3, C_1 = 2$ ):

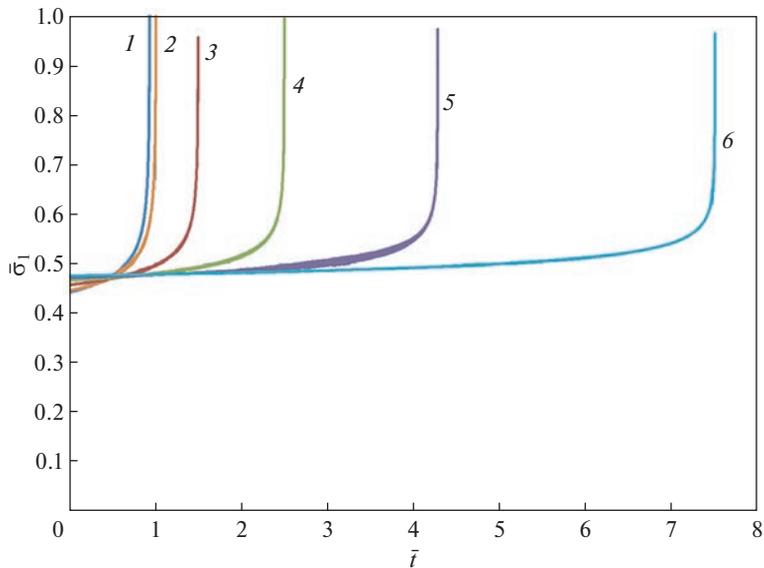
$$\bar{t}^* = 1.$$

Таким образом, при принятых параметрах  $C_1 = 2, k = 1, \alpha = 0.5, \Sigma_0 = 0.5, n = m = 3$  время до разрушения составного стержня, который с учетом  $k = B_2/B_1 = 1$  ведет себя под нагрузкой как монолитная конструкция, равно единице  $\bar{t}^* = 1$ .

На основе проведенного анализа можно определять материалы частей составного стержня, в которых требуемые материальные параметры моделей ползучести и длительного разрушения приводят к увеличению времени до разрушения составного стержня по сравнению с монолитным. Такого рода исследования могут способство-



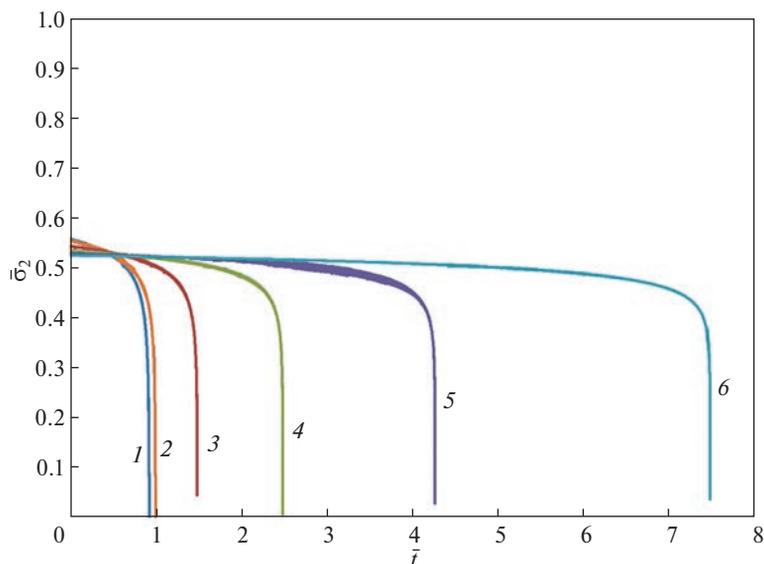
**Рис. 3.** Зависимости поврежденности  $\omega_2$  в крайних частях составного стержня от безразмерного времени  $\bar{t}$  при различных параметрах  $m = n$ .



**Рис. 4.** Зависимости напряжения  $\sigma_1$  в центральной части составного стержня от безразмерного времени  $\bar{t}$  при различных параметрах  $m = n$ .

вать определению необходимых материалов составных конструкций, применение которых приведет к увеличению их длительной работоспособности.

Так, для расчетных данных, используемых при построении соответствующих кривых зависимостей  $\omega_1 = \omega_1(\bar{t})$ ,  $\omega_2 = \omega_2(\bar{t})$ ,  $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_1(\bar{t})$ ,  $\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_2(\bar{t})$  от времени  $\bar{t}$  на ри-



**Рис. 5.** Зависимости напряжения  $\sigma_2$  в крайних частях составного стержня от безразмерного времени  $\bar{t}$  при различных параметрах  $m = n$ .

сунках 2, 3, 4, 5, было определено значение  $m = n = 3.170$ , которое соответствует времени до разрушения  $\bar{t}^* = 1$ . Соответствующие кривые обозначены номером 2 на рис. 2, 3, 4 и 5.

Значения параметров  $m = n > 3.170$  приведет к увеличению времени до разрушения составных стержней по сравнению с монолитными.

Расчет и анализ процессов накопления повреждений и распределения напряжений во времени при значении  $k = B_2/B_1 = 2$  показал интересный результат. Кривые накопления поврежденности и распределения напряжений при  $k = 2$  меняются местами по сравнению с соответствующими кривыми при  $k = 0.5$ . Кривая зависимости  $\omega_1 = \omega_1(\bar{t})$  от времени при  $k = 0.5$  становится кривой  $\omega_2 = \omega_2(\bar{t})$  при  $k = 2$ , в свою очередь кривая  $\omega_2 = \omega_2(\bar{t})$  при  $k = 0.5$  становится зависимостью  $\omega_1 = \omega_1(\bar{t})$  при  $k = 2$ . Аналогичная ситуация наблюдается и для распределения напряжений  $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_1(\bar{t})$  и  $\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_2(\bar{t})$ . В результате при  $k = 2$  поврежденность  $\omega_1 = \omega_1(\bar{t})$  достигает предельного значения  $\omega_1 = 1$  быстрее, чем  $\omega_2 = \omega_2(\bar{t})$ . В случае при  $k = 0.5$  наблюдается противоположная ситуация.

**Заключение.** Проведено исследование напряженно-деформированного состояния и процессов разрушения стержня (типовой элемент конструкции), находящегося в условии ползучести при растяжении. Изучение и моделирование таких процессов является предварительным опорным исследованием перспективной задачи о защитном эффекте внешних частей составного стержня при его контакте с рабочей активной средой в условиях длительного действия нагрузок и повышенных температур.

На основе кинетической теории ползучести и длительной прочности Ю.Н. Работнова получены зависимости накопления поврежденности от времени в центральной и двух крайних частях составного стержня.

Под действием растягивающей нагрузки при принятом условии жесткого, без проскальзывания соединения частей составного стержня в местах соединения частей

происходит нарушение непрерывности (разрыв) механических напряжений при переходе от одной части составного стержня к другой.

В зависимости от констант в определяющих соотношениях ползучести и кинетических уравнениях накопления поврежденности напряжения в частях стержня с течением времени меняются. При этом сумма безразмерных напряжений в центральной и двух крайних частях в любой момент времени одинакова и равна единице.

В момент времени, предшествующий разрушению, наблюдается резкое изменение напряжений в частях стержня. Данный эффект объясняется резким нарастанием поврежденности в частях стержня и, как следствие, резким уменьшением площади эффективного сечения за счет увеличения микропор и микротрещин в процессе ползучести.

В результате проведенного исследования проанализировано влияние констант в моделях ползучести и длительного разрушения на время до разрушения составного стержня. Разработаны основы подхода для определения параметров указанных моделей, приводящих к увеличению времени до разрушения составного стержня по сравнению с монолитным. Такого рода исследования могут способствовать определению необходимых материалов составных конструкций, применение которых приведет к увеличению их длительной работоспособности.

Данная научная работа имеет как фундаментальный характер исследования определяющих и кинетических соотношений в механике деформируемого твердого тела, так и прикладное значение. Проведенное исследование может быть применено в энергетическом машиностроении, авиационно-космической отрасли, судостроении и нефтехимическом машиностроении.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 20-08-00387.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. *Локощенко А.М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
3. *Lokoshchenko A., Fomin L.* Kinetic theory of creep and long-term strength of metals // *Kinetic Theory / Ed. by G.Z. Kyzas, A.C. Mitropoulos.* IntechOpen, 2017. <https://doi.org/10.5772/intechopen.70768>
4. *Манукян М.Н.* Кручение составных валов переменного сечения в условиях установившейся ползучести // *Изв. ак. наук Армянской ССР. Физ.-мат. науки.* 1961. V. XIV. № 1. С. 115–121.
5. *Якубовский Ю.Е., Колосов В.И., Донкова И.А., Круглов С.О.* Моделирование вязкоупругих свойств стареющего материала // *Вестн. Тюменск. гос. ун-та. Физ.-мат. моделир. Нефть, газ, энергетика.* 2018. Т. 4. № 4. С. 181–190. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2018-4-4-181-190>
6. *Янковский А.П.* Неустановившаяся ползучесть слоистых стержней нерегулярной структуры из нелинейно-наследственных материалов // *Механика машин, механизмов материалов.* 2016. № 3 (36). С. 86–97.
7. *Хохлов А.В.* Ползучесть и длительная прочность толстостенной трубы из нескольких слоев нелинейно-вязкоупругих материалов, нагруженной внутренним и внешним давлением // *Мех. композ. матер.* 2021. Т. 57. № 6. С. 1037–1064. <https://doi.org/10.22364/mkm.57.6.02>
8. *Якубовская С.В., Красовская Н.И., Сильницкая Н.Ю., Иванова Е.Ю., Красовская О.В.* Моделирование напряженного состояния многослойных конструкций при деформировании во времени // *Науч.-тех. вестн. Поволжья.* 2021. № 5. С. 115–118.
9. *Кравчук А.С., Кравчук А.И.* Моделирование ползучести по наследственной теории в простейшей модели деформируемого покрытия постоянной толщины // *Argiori. Ser.: естеств. тех. науки.* 2014. № 2. С. 1–17.
10. *Yankovskii A. P.* Study on the unsteady creep of composite beams with an irregular laminar fibrous structure made from nonlinear hereditary materials // *Mech. Compos Mater.* 2017. V. 53. № 4.

- Р. 457–470.  
<https://doi.org/10.1007/s11029-017-9675-7>
11. Саушкин М.Н., Радченко В.П. Приближенный метод оценки релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочненной лопатке в поле массовых сил в условиях ползучести // Пробл. машиностр. надежн. машин. 2013. № 3. С. 58–67.
  12. Радченко В.П., Деревянка Е.Е. Влияние температурно-силового нагружения на релаксацию остаточных напряжений в поверхностно упрочненных элементах стержневой конструкции в условиях ползучести // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23. № 3. С. 497–524.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1688>
  13. Деревянка Е.Е., Радченко В.П., Цветков В.В. Релаксация остаточных напряжений в поверхностно упрочненном цилиндре в условиях ползучести при жестких ограничениях на линейные и угловые деформации // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 3. С. 118–127.  
<https://doi.org/10.31857/S057232992103003X>
  14. Волков И.А., Игумнов Л.А., Шишулин Д.Н., Боев Е.В. Моделирование процессов нестационарной ползучести в условиях многоосного нагружения с учетом накопления повреждений в конструкционном материале // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 2. С. 25–34.  
<http://dx.doi.org/10.31857/S057232992103003X>
  15. Зараковская К.И., Захаров В.Ф. Напряженно-деформированное состояние составных железобетонных стержней с высокопрочной арматурой, подверженных длительному сжатию // Вестн. МГСУ. 2019. Т. 14. Вып. 9. С. 1121–1131.  
<https://doi.org/10.22227/1997-0935.2019.9.1121-1131>
  16. Замалиев Ф.С. Учет начальных напряжений и деформаций при оценке несущей способности сталежелезобетонных конструкций на эксплуатационные нагрузки // Изв. КГАСУ. 2017. № 1 (39). С. 91–101.
  17. Jonathon Tanks, Kimiyoshi Naito and Hisai Ueda. Characterization of the static, creep, and fatigue tensile behavior of basalt fiber/polypropylene composite rods for passive concrete reinforcement // Polymers. 2021. V. 13(18), 3136.  
<https://doi.org/10.3390/polym13183136>
  18. Wanninger F., Frangi A., Fragiaco M. Long-term behavior of posttensioned timber connections // J. Struct. Eng. 2014. V. 141. № 6.  
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0001121](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0001121)
  19. He M.J., Zheng X.Z., Lam F., Li Z. Potential loss in prestressing tendon forces under long-term service conditions: cross-laminated timber shear wall applications // J. Struct. Eng. 2022. V. 148. № 3.  
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0003272](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0003272)
  20. Zheng X.Z., Li Z., He M.J., Lam F. Experimental investigation on the rheological behavior of timber in longitudinal and transverse compression // Construct. Building Mater. 2021. V. 304. P. 124633.  
<https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.124633>

УДК 539.3+519.65

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТИ БЫСТРОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕНИЯХ В БРУСЕ

© 2023 г. А. Д. Чернышов<sup>a,\*</sup>, В. В. Горьянов<sup>b,\*\*</sup>, М. И. Попов<sup>a,\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, Россия

<sup>b</sup>Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия

\*e-mail: chernyshovad@mail.ru

\*\*e-mail: gorvit77@mail.ru

\*\*\*e-mail: mihailev\_semilov@mail.ru

Поступила в редакцию 27.03.2022 г.

После доработки 24.04.2022 г.

Принята к публикации 25.04.2022 г.

С помощью быстрой тригонометрической интерполяции решена задача о напряжениях в брусе прямоугольного сечения. Проведено сравнение полученного приближенного аналитического решения с точным, в ходе которого исследована относительная погрешность компонент перемещений, компонент тензора напряжений, невязка уравнений равновесия Ламе и невязка граничных условий. Установлено, что при использовании в быстрых разложениях граничной функции второго порядка и небольшом количестве членов в рядах Фурье (от двух до шести) максимальная относительная погрешность  $\delta_{\max}$  компонент перемещений и компонент тензора напряжений составляет менее одного процента. С увеличением порядка граничной функции и/или количества членов  $N$  в рядах Фурье  $\delta_{\max}$  быстро уменьшается. Увеличение порядка граничной функции является более эффективным способом уменьшения погрешности вычислений  $\delta_{\max}$ , чем увеличение количества членов в рядах Фурье. При исследовании интенсивности напряжений  $\sigma$  в брусе с различными габаритными размерами прямоугольного сечения, но одинаковой площадью всех сечений выяснилось, что наименьшее значение  $\sigma_{\max}$  среди всех сечений наблюдается в брусе с квадратным сечением.

*Ключевые слова:* перемещения, компоненты тензора напряжений, уравнения Ламе, быстрые разложения, быстрая тригонометрическая интерполяция, высокая точность

DOI: 10.31857/S0572329922100142, EDN: KIQKNY

**1. Введение.** Среди аналитических методов, применяемых для решения задач теории упругости, можно выделить такие как метод угловых суперпозиций [1, 2], метод расширения границ [3], метод возмущений [4–6], лучевой метод [7–9], разложения в ряды [10–14] и по функциям Фадля–Папковича [15, 16], двухшаговый метод последовательного возмущения параметров [17], метод быстрых разложений [18–20]. Последний, из перечисленных методов, имеет следующие положительные качества, которыми в совокупности не обладает ни один из известных методов:

1. Доказана сходимость и получена оценка погрешности метода [21].

2. Показана быстрая сходимость используемых рядов Фурье, что позволяет ограничиваться в расчетах небольшим количеством членов ряда и, как следствие, проводить расчет на ЭВМ с высокой точностью при большой экономии времени [22].

3. Метод быстрых разложений применим для решения как линейных [18–20], так и нелинейных задач [23–25], а также задач для криволинейных областей [24, 25], с подвижными границами [25] и фазовыми превращениями [25].

Классическую тригонометрическую интерполяцию чаще всего используют для улучшения качества обработки изображений [26] и восстановления периодических дискретных сигналов конечной длительности [27]. Для решения инженерных задач интегро-дифференциального типа применение классической тригонометрической интерполяции на конечном отрезке проблематично из-за невозможности ее дифференцирования в общем случае и большой ошибки между интерполяционными точками. Устранение подобных недостатков можно осуществить при использовании быстрой тригонометрической интерполяции. Быстрая тригонометрическая интерполяция использовалась при исследовании напряжений в клине [20], расчете траектории космических кораблей [23], решении нелинейного уравнения теплопроводности для криволинейной области с условиями Дирихле [24] и решении двухфазной задачи Стефана с внутренним источником [25]. В данной работе будет исследована погрешность быстрой тригонометрической интерполяции в зависимости от порядка граничной функции и количества членов в рядах Фурье на примере решения задачи о напряжениях в бруссе.

**2. Постановка задачи.** В условиях плоской деформации проекции вектора перемещений материальных точек бруса зависят только от координат  $x, y$ :

$$U = U(x, y), \quad V = V(x, y), \quad W = 0 \quad (2.1)$$

Компоненты тензора напряжения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial V}{\partial y}, & \sigma_{yy} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V}{\partial y} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x} \\ \sigma_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), & \sigma_{zz} &= \lambda \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right), & \sigma_{xz} &= \sigma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Запишем уравнения равновесия Ламе для перемещений с учетом массовых сил  $X(x, y), Y(x, y)$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + X(x, y) = 0 \quad (2.3)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + Y(x, y) = 0 \quad (2.4)$$

К уравнениям (2.3), (2.4) необходимо добавить граничные условия. Будем считать, что упругий брус имеет прямоугольное сечение  $\Omega = (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$ . На сторонах бруса зададим условия Дирихле в общем виде

$$U|_{x=0} = f_1(y), \quad U|_{x=a} = f_3(y), \quad V|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad V|_{x=a} = \varphi_3(y) \quad (2.5)$$

$$U|_{y=0} = f_2(x), \quad U|_{y=b} = f_4(x), \quad V|_{y=0} = \varphi_2(x), \quad V|_{y=b} = \varphi_4(x) \quad (2.6)$$

Функции, входящие в граничные условия (2.5) и (2.6), следует подбирать с учетом условий их согласования

$$\begin{aligned} f_1(0) &= f_2(0), & f_3(0) &= f_2(a), & f_3(b) &= f_4(a), & f_4(0) &= f_1(b) \\ \varphi_1(0) &= \varphi_2(0), & \varphi_3(0) &= \varphi_2(a), & \varphi_3(b) &= \varphi_4(a), & \varphi_4(0) &= \varphi_1(b) \end{aligned} \quad (2.7)$$

выполнение которых позволит найти непрерывное решение задачи (2.3)–(2.6).

В качестве примера функции из (2.5), (2.6) зададим следующим образом

$$\begin{aligned} f_1(y) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad f_3(y) = K \sin 1.2\pi ay, \quad f_4(x) = K \sin 1.2\pi bx \\ \varphi_1(y) = 0, \quad \varphi_2(x) = 0, \quad \varphi_3(x) = -K \sin a \sin y, \quad \varphi_4(x) = -K \sin x \sin b \end{aligned} \quad (2.8)$$

Массовые силы в (2.3), (2.4) запишем выражениями

$$\begin{aligned} X(x, y) &= (1.2\pi y)^2 (\lambda + 2\mu) K \sin 1.2\pi xy + \\ &+ (\lambda + \mu) K \cos x \cos y + (1.2\pi x)^2 \mu K \sin 1.2\pi xy \\ Y(x, y) &= -(\lambda + 2\mu) K \sin x \sin y - \mu K \sin x \sin y + \\ &+ (\lambda + \mu) \left( (1.2\pi)^2 xy K \sin 1.2\pi xy - 1.2\pi K \cos 1.2\pi xy \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Зависимости (8) и (9) подобраны так, что задача (3)–(6) имеет точное решение

$$U(x, y) = K \sin 1.2\pi xy, \quad V(x, y) = -K \sin x \sin y \quad (2.10)$$

где  $K$  – константа, регулирующая величину перемещений.

Точное решение (2.10) позволит провести исследование погрешности решения краевой задачи (2.3)–(2.6) путем сравнения с приближенным аналитическим решением, полученным методом быстрых разложений. При сравнении будут вычислены: относительная погрешность компонент перемещений (2.1), компонент тензора напряжений (2.2), невязка уравнений равновесия Ламе (2.3), (2.4) и невязка граничных условий (2.5), (2.6).

**3. Метод и построение решения.** Для решения используем приближенный метод быстрых разложений [21], в соответствии с которым представим  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  в виде суммы граничных функции  $M_{2p}^U(x, y)$ ,  $M_{2p}^V(x, y)$  и ряда Фурье по синусам

$$\begin{aligned} U = M_{2p}^U(x, y) + \sum_{m=1}^{N_1} u_m(x) \sin m\pi \frac{y}{b}, \quad V = M_{2p}^V(x, y) + \sum_{m=1}^{N_1} v_m(x) \sin m\pi \frac{y}{b} \\ x \in [0; a], \quad y \in [0; b] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $N_1$  – число учитываемых членов в рядах Фурье. Граничные функции  $M_{2p}^U(x, y)$  и  $M_{2p}^V(x, y)$  порядка  $2p$  определяются равенствами

$$M_{2p}^U(x, y) = \sum_{i=1}^{2p+2} A_i(x) P_i(y), \quad M_{2p}^V(x, y) = \sum_{i=1}^{2p+2} B_i(x) P_i(y) \quad (3.2)$$

где  $A_i(x)$  и  $B_i(x)$ ,  $i = 1 - 2p + 2$  – коэффициенты граничных функций,  $P_i(y)$ ,  $i = 1 - 2p + 2$  – быстрые полиномы [21].

Для исследования влияния порядка граничной функции на точность решения краевой задачи (2.3)–(2.6) в быстрых разложениях (3.1) будем использовать граничные функции второго, четвертого и шестого порядков, которые получаются из (3.2) при  $p = 1$ ,  $p = 2$  и  $p = 3$  соответственно, т.е.

$$\begin{aligned} M_2^U(x, y) &= \sum_{i=1}^4 A_i(x) P_i(y), \quad M_2^V(x, y) = \sum_{i=1}^4 B_i(x) P_i(y) \\ M_4^U(x, y) &= M_2^U(x, y) + \sum_{i=5}^6 A_i(x) P_i(y), \quad M_4^V(x, y) = M_2^V(x, y) + \sum_{i=5}^6 B_i(x) P_i(y) \\ M_6^U(x, y) &= M_4^U(x, y) + \sum_{i=7}^8 A_i(x) P_i(y), \quad M_6^V(x, y) = M_4^V(x, y) + \sum_{i=7}^8 B_i(x) P_i(y) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Быстрые полиномы  $P_i(y)$  и коэффициенты  $A_i(x)$ ,  $B_i(x)$  определяются равенствами

$$\begin{aligned}
P_1(y) &= \left(1 - \frac{y}{b}\right), & P_2(y) &= \frac{y}{b}, & P_3(y) &= \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{3}\right), & P_4(x) &= \left(\frac{y^3}{6b} - \frac{by}{6}\right) \\
P_5(y) &= \left(\frac{y^4}{24} - \frac{y^5}{120b} - \frac{by^3}{18} + \frac{b^3y}{45}\right), & P_6(y) &= \left(\frac{y^5}{120b} - \frac{by^3}{36} + \frac{7b^3y}{360}\right) \\
P_7(y) &= \left(\frac{y^6}{720} - \frac{y^7}{5040b} - \frac{by^5}{360} + \frac{b^3y^3}{270} - \frac{2b^5y}{945}\right) \\
P_8(y) &= \left(\frac{y^7}{5040b} - \frac{by^5}{720} + \frac{7b^3y^3}{2160} - \frac{31b^5y}{15120}\right) \\
A_1(x) &= U|_{y=0}, & A_2(x) &= U|_{y=a}, & A_3(x) &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|_{y=0}, & A_4(x) &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|_{y=a} \\
A_5(x) &= \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} \Big|_{y=0}, & A_6(x) &= \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} \Big|_{y=a}, & A_7(x) &= \frac{\partial^6 U}{\partial y^6} \Big|_{y=0}, & A_8(x) &= \frac{\partial^6 U}{\partial y^6} \Big|_{y=a} \\
B_1(x) &= V|_{y=0}, & B_2(x) &= V|_{y=a}, & B_3(x) &= \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|_{y=0}, & B_4(x) &= \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|_{y=a} \\
B_5(x) &= \frac{\partial^4 V}{\partial y^4} \Big|_{y=0}, & B_6(x) &= \frac{\partial^4 V}{\partial y^4} \Big|_{y=a}, & B_7(x) &= \frac{\partial^6 V}{\partial y^6} \Big|_{y=0}, & B_8(x) &= \frac{\partial^6 V}{\partial y^6} \Big|_{y=a}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Для возможности выполнения выражений (3.4) необходимо потребовать, чтобы  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  удовлетворяли условию гладкости  $(U, V) \in C^{(6)}(\Omega)$ .

Неизвестными в (3.1) являются функции, зависящие только от одной переменной  $x$

$$A_i(x) - A_{2p+2}(x), \quad B_1(x) - B_{2p+2}(x), \quad p = 1 \dots 3, \quad u_m(x), \quad v_m(x), \quad m = 1 \dots N_1 \tag{3.5}$$

Функции из (3.5) представим быстрыми разложениями по переменной  $x$ . Причем в повторных разложениях будут использованы граничные функции тех же порядков, что и в быстрых разложениях (3.1) по переменной  $y$ :

$$\begin{aligned}
A_i(x) &= M_{2p}^{A(i)}(x) + \sum_{n=1}^{N_2} a_{n+2p+2}^{(i)} \sin n\pi \frac{x}{a}, & B_i(x) &= M_{2p}^{B(i)}(x) + \sum_{n=1}^{N_2} b_{n+2p+2}^{(i)} \sin n\pi \frac{x}{a} \\
u_m(x) &= M_{2p}^{u(m)}(x) + \sum_{n=1}^{N_2} u_{n+2p+2}^{(m)} \sin n\pi \frac{x}{a}, & v_m(x) &= M_{2p}^{v(m)}(x) + \sum_{n=1}^{N_2} v_{n+2p+2}^{(m)} \sin n\pi \frac{x}{a} \\
i &= 1 \dots 2p + 2, & p &= 1 \dots 3, & m &= 1 \dots N_1
\end{aligned} \tag{3.6}$$

В (3.6) обозначено через  $N_2$  – число учитываемых членов в рядах Фурье. Граничные функции  $M_{2p}^{A(i)}(x)$ ,  $M_{2p}^{B(i)}(x)$ ,  $M_{2p}^{u(m)}(x)$ ,  $M_{2p}^{v(m)}(x)$  определяем равенствами

$$\begin{aligned}
M_{2p}^{A(i)}(x) &= \sum_{k=1}^{2p+2} a_k^{(i)} P_k(x), & M_{2p}^{B(i)}(x) &= \sum_{k=1}^{2p+2} b_k^{(i)} P_k(x) \\
M_{2p}^{u(m)}(x) &= \sum_{k=1}^{2p+2} u_k^{(m)} P_k(x), & M_{2p}^{v(m)}(x) &= \sum_{k=1}^{2p+2} v_k^{(m)} P_k(x)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где  $a_k^{(i)}$ ,  $b_k^{(i)}$ ,  $u_k^{(m)}$  и  $v_k^{(m)}$ ,  $i = 1 \dots 2p + 2$ ,  $p = 1 \dots 3$ ,  $m = 1 \dots N_1$  – коэффициенты граничных функций вторичных разложений;  $P_k(x)$ ,  $k = 1 - 2p + 2$  – быстрые полиномы [21].

При  $p = 3$  выражения для коэффициентов граничных функций  $a_k^{(i)}$ ,  $b_k^{(i)}$ ,  $u_k^{(m)}$ ,  $v_k^{(m)}$  и быстрых полиномов  $P_k(x)$  имеют вид

$$\begin{aligned}
 P_1(x) &= \left(1 - \frac{x}{a}\right), & P_2(x) &= \frac{x}{a}, & P_3(x) &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right), & P_4(x) &= \left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right) \\
 P_5(x) &= \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120a} - \frac{ax^3}{18} + \frac{a^3x}{45}\right), & P_6(x) &= \left(\frac{x^5}{120a} - \frac{ax^3}{36} + \frac{7a^3x}{360}\right) \\
 P_7(x) &= \left(\frac{x^6}{720} - \frac{x^7}{5040a} - \frac{ax^5}{360} + \frac{a^3x^3}{270} - \frac{2a^5x}{945}\right) \\
 P_8(x) &= \left(\frac{x^7}{5040a} - \frac{ax^5}{720} + \frac{7a^3x^3}{2160} - \frac{31a^5x}{15120}\right)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 a_1^{(i)} &= A_i|_{x=0}, & a_2^{(i)} &= A_i|_{x=a}, & a_3^{(i)} &= A_i''|_{x=0}, & a_4^{(i)} &= A_i''|_{x=a}, & a_5^{(i)} &= A_i^{(4)}|_{x=0} \\
 a_6^{(i)} &= A_i^{(4)}|_{x=a}, & a_7^{(i)} &= A_i^{(6)}|_{x=0}, & a_8^{(i)} &= A_i^{(6)}|_{x=a}, & i &= 1..8
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
 b_1^{(i)} &= B_i|_{x=0}, & b_2^{(i)} &= B_i|_{x=a}, & b_3^{(i)} &= B_i''|_{x=0}, & b_4^{(i)} &= B_i''|_{x=a}, & b_5^{(i)} &= B_i^{(4)}|_{x=0} \\
 b_6^{(i)} &= B_i^{(4)}|_{x=a}, & b_7^{(i)} &= B_i^{(6)}|_{x=0}, & b_8^{(i)} &= B_i^{(6)}|_{x=a}, & i &= 1..8
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
 u_1^{(m)} &= u_m|_{x=0}, & u_2^{(m)} &= u_m|_{x=a}, & u_3^{(m)} &= u_m''|_{x=0}, & u_4^{(m)} &= u_m''|_{x=a}, & u_5^{(m)} &= u_m^{(4)}|_{x=0} \\
 u_6^{(m)} &= u_m^{(4)}|_{x=a}, & u_7^{(m)} &= u_m^{(6)}|_{x=0}, & u_8^{(m)} &= u_m^{(6)}|_{x=a}, & m &= 1..N_1
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
 v_1^{(m)} &= v_m|_{x=0}, & v_2^{(m)} &= v_m|_{x=a}, & v_3^{(m)} &= v_m''|_{x=0}, & v_4^{(m)} &= v_m''|_{x=a}, & v_5^{(m)} &= v_m^{(4)}|_{x=0} \\
 v_6^{(m)} &= v_m^{(4)}|_{x=a}, & v_7^{(m)} &= v_m^{(6)}|_{x=0}, & v_8^{(m)} &= v_m^{(6)}|_{x=a}, & m &= 1..N_1
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Если  $p = 2$ , то для описания граничных функций (3.7) из (3.8) следует взять первые шесть полиномов, а в (3.9)–(3.12) учесть первые шесть коэффициентов. При  $p = 1$  граничные функции (3.7) будут содержать первые четыре полинома из (3.8) и первые четыре коэффициента из (3.9)–(3.12).

Таким образом, краевая задача (2.3)–(2.6) сведена к определению  $2(2p + 2 + N_1)(2p + 2 + N_2)$  неизвестных коэффициентов

$$\begin{aligned}
 a_k^{(i)}, b_k^{(i)}, u_k^{(m)}, v_k^{(m)}, & \quad i = 1..2p + 2, \quad k = 1..2p + 2, \quad p = 1..3, \quad m = 1..N_1 \\
 a_{n+2p+2}^{(i)}, b_{n+2p+2}^{(i)}, u_{n+2p+2}^{(m)}, v_{n+2p+2}^{(m)}, & \quad n = 1..N_2
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Значения восьми коэффициентов

$$a_1^{(1)}, b_1^{(1)}, a_2^{(1)}, b_2^{(1)}, a_1^{(2)}, b_1^{(2)}, a_2^{(2)}, b_2^{(2)} \tag{3.14}$$

входящих в (3.13), находятся при помощи значений компонент перемещений  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  в угловых точках прямоугольной области (см. формулы (3.4), (3.9), (3.10)). С учетом условия согласований (2.7), коэффициенты (3.14) определяются равенствами

$$a_1^{(1)} = b_1^{(1)} = a_2^{(1)} = b_2^{(1)} = a_1^{(2)} = b_1^{(2)} = 0, \quad a_2^{(2)} = K \sin 1.2\pi ab, \quad b_2^{(2)} = -K \sin a \sin b$$

Для нахождения остальных  $2(2p + 2 + N_1)(2p + 2 + N_2) - 8$  коэффициентов из (3.13) используем быструю тригонометрическую интерполяцию, апробированную в работах [20, 22–25]. Для этого подставим  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  из (3.1) в дифферен-

циальные уравнения (2.3), (2.4) и граничные условия (2.5), (2.6). Полученные таким образом выражения в статье не приводим из-за их громоздкости.

Из граничных условий (2.5), (2.6) линейные алгебраические уравнения получим следующим образом. Промежуток  $[0, b]$  равномерно разобьем точками  $y = y_s = sb/(N_1 + 2p + 1)$ ,  $s = 0, 1, \dots, N_1 + 2p + 1$  на  $N_1 + 2p + 1$  отрезков и запишем уравнения, полученные из граничных условий (2.5) при подстановке  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  из (3.1), в каждой внутренней расчетной точке  $y = y_s$ ,  $s = 1, \dots, N_1 + 2p$ . Будем иметь  $4(N_1 + 2p)$  линейных алгебраических уравнений. Аналогично, промежуток  $[0, a]$  равномерно разобьем точками  $x = x_s = sa/(N_2 + 2p + 1)$ ,  $s = 0, 1, \dots, N_2 + 2p + 1$  на  $N_2 + 2p + 1$  отрезков и запишем уравнения, полученные из граничных условий (2.6) при подстановке  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  из (3.1), в каждой внутренней расчетной точке  $x = x_s$ ,  $s = 1, \dots, N_2 + 2p$ . Тем самым, будем иметь еще  $4(N_2 + 2p)$  линейных алгебраических уравнений.

Из дифференциальных уравнений (2.3), (2.4) линейные алгебраические уравнения запишем следующим образом. На область прямоугольника  $x \in [0; a]$ ,  $y \in [0; b]$  равномерно нанесем сетку в  $N_2 + 2p + 2$  точках  $x = x_s = sa/(N_2 + 2p + 1)$ ,  $s = 0, 1, \dots, N_2 + 2p + 1$  и в  $N_1 + 2p + 2$  точках  $y = y_s = sb/(N_1 + 2p + 1)$ ,  $s = 0, 1, \dots, N_1 + 2p + 1$ . Для составления системы линейных алгебраических уравнений используются только внутренние точки, образующие сетку из  $(N_1 + 2p)(N_2 + 2p)$  внутренних точек  $(x_s, y_s)$ . Затем, уравнения (2.3), (2.4) при подстановке в них  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  из (3.1) запишем в каждой расчетной точке  $(x_s, y_s)$ . В итоге, получаем  $2(N_1 + 2p)(N_2 + 2p)$  линейных алгебраических уравнений. В результате приходим к замкнутой системе  $2(N_1 + 2p)(N_2 + 2p) + 4(N_1 + 2p) + 4(N_2 + 2p)$  линейных алгебраических уравнений относительно оставшихся  $(2(2p + 2 + N_1)(2p + 2 + N_2) - 8)$  неизвестных из (3.13). Данная система уравнений решена в среде Maple. После чего, найденные неизвестные (3.13) подставлены в быстрые разложения (3.1). Тем самым, построено приближенное аналитическое решение краевой задачи (2.3)–(2.6).

**4. Полученные результаты и их анализ.** В вычислительных экспериментах будем использовать граничные функции (3.3) второго, четвертого и шестого порядков. Количество членов в рядах Фурье первого (3.1) и второго (3.6) быстрых разложений примем одинаковыми, т.е.  $N_1 = N_2 = N$ , и выполним расчеты при  $N = 2 \dots 6$ . В качестве материала бруса выберем тяжелый бетон В30 с характеристиками [28]  $E = 32.5 \times 10^9$  Па,  $\nu = 0.2$ . Тогда коэффициенты Ламе будут равны  $\lambda = 9.03 \times 10^9$  Па,  $\mu = 1.35 \times 10^{10}$  Па. Величину параметра  $K$  и размеры сечения примем равными  $K = 10^{-6}$ ,  $a = 1$  м,  $b = 1$  м.

Приближенное аналитическое решение (3.1) сравнивается с точным (2.10). Относительная погрешность перемещений (2.1), тензора напряжений (2.2), невязка уравнений равновесия Ламе (2.3), (2.4) и граничных условий (2.5), (2.6) вычислялась по формуле

$$\delta = |\Delta|/f_{\max} \cdot 100\%$$

где  $\Delta$  – абсолютная погрешность,  $f_{\max}$  – максимальное значение исследуемого объекта.

Покажем на рис. 1–4 относительную погрешность расчетов, выполненных при использовании граничной функции четвертого порядка  $M_4$  ( $p = 2$ ) для  $N = 4$ . Из рисунков видно, что максимальная относительная погрешность  $\delta_{\max}$  у компонент тензора напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xy}$  и невязки дифференциального уравнения (2.3) достигается в точке (1; 1), а у компонент перемещений  $U$  и  $V$ , компоненты тензора напряжений  $\sigma_{yy}$  и невязки дифференциального уравнения (2.4) – в ее окрестности. Поэтому в табл. 1–3 приведены значения  $\delta_{\max}$  всех исследуемых объектов в этих точках для гра-

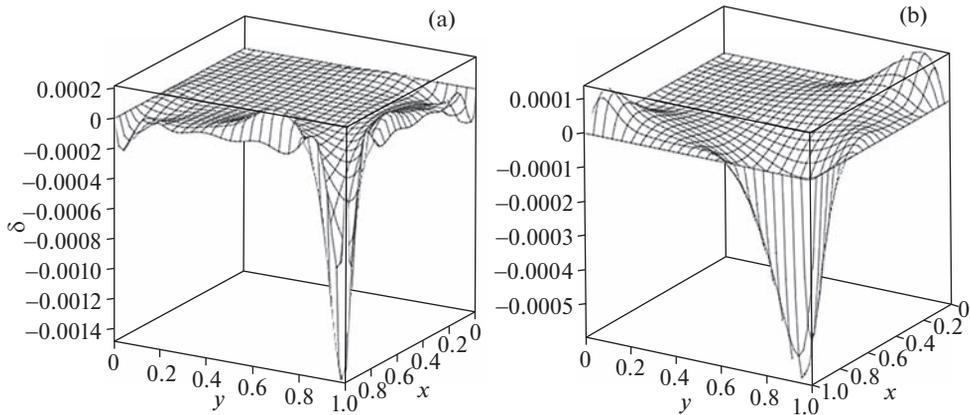


Рис. 1. Относительная погрешность  $\delta$  компонент перемещений: (a)  $U$ , (b)  $V$ .

ничных функций второго  $M_2$  ( $p = 1$ ), четвертого  $M_4$  ( $p = 2$ ) и шестого  $M_6$  ( $p = 3$ ) порядков при  $N = 2 \dots 6$ .

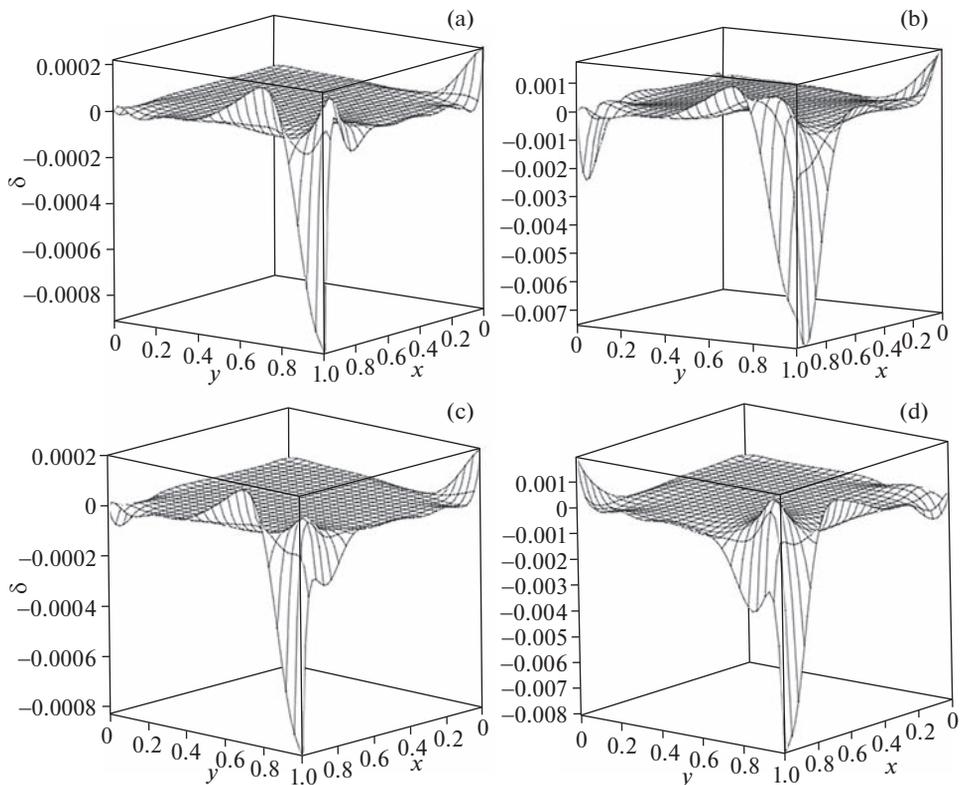


Рис. 2. Относительная погрешность  $\delta$  компонент тензора напряжений: (a)  $\sigma_{xx}$ , (b)  $\sigma_{yy}$ , (c)  $\sigma_{zz}$ , (d)  $\sigma_{xy}$ .

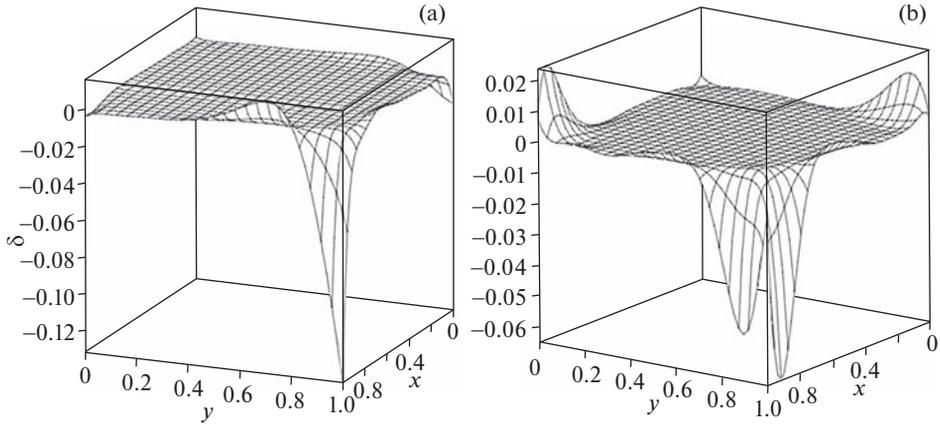


Рис. 3. Невязка  $\delta$  уравнений равновесия Ламе: (а) (3), (б) (4).

Из табл. 1–3 можно увидеть, что точнее всего определяются компоненты перемещений  $U$  и  $V$  (искомая функция). По сравнению с компонентами перемещений точность нахождения компонент тензора напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xy}$  (первые производные искомой функции) падает на порядок, а точность вычисления невязки уравнений равновесия Ламе (2.3), (2.4) (вторые производные искомой функции) падает на два порядка. Подобная тенденция наблюдается при выборе любого порядка граничной функции и для любого  $N$ , а также согласуется с многочисленными вычислительными экспериментами авторов, например [15].

Табл. 1 показывает, что даже при использовании граничной функции второго порядка  $M_2$  и небольшом количестве членов в рядах Фурье  $N = 3$  достигается точность вычислений компонент перемещений и компонент тензора напряжений ( $\delta_{\max} < 1\%$ ) выше, чем точность входных данных из справочников. С увеличением порядка граничной функции и/или количества членов в рядах Фурье (см. табл. 2 и 3) эта точность быстро возрастает. Так, если в быстрых разложениях (3.1) и (3.6) использовать граничную функцию второго порядка  $M_2$ , то увеличение  $N$  количества членов в рядах Фурье на четыре (с двух до шести) ведет к увеличению точности вычислений компонент перемещений, компонент тензора напряжений и невязки дифференциальных уравнений (2.3), (2.4) примерно на один порядок (см. табл. 1). Такое же увеличение точности вычислений можно достичь, используя граничную функцию четвертого порядка  $M_4$  (см. табл. 2) и увеличивая  $N$  в рядах Фурье на три (с двух до пяти). Если же применить граничную функцию шестого порядка  $M_6$  (см. табл. 3), то повышение точности вычислений на порядок можно достичь увеличением  $N$  в рядах Фурье на два (с двух до четырех).

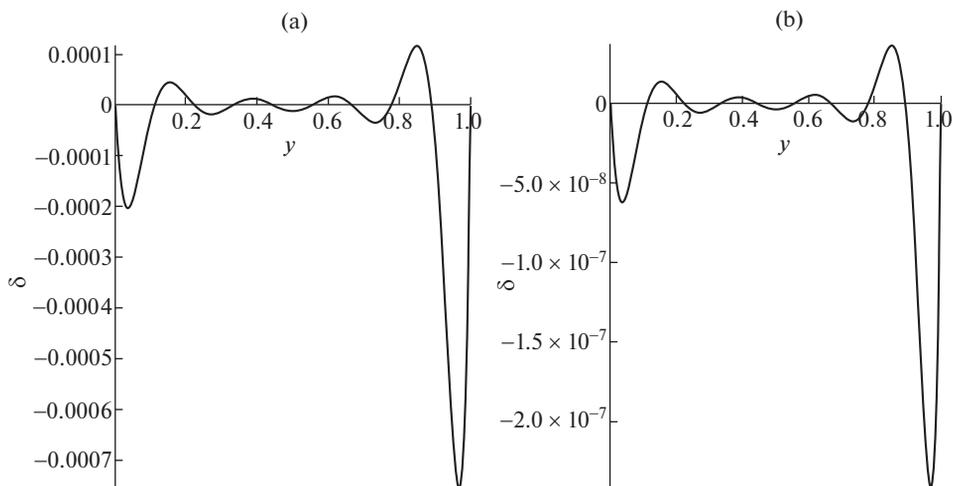
Из табл. 1–3 видно, что граничные условия  $U|_{x=0}$ ,  $U|_{y=0}$ ,  $V|_{x=0}$ ,  $V|_{y=0}$  выполняются точно при выборе любого порядка граничной функции и при любом количестве учитываемых членов в рядах Фурье. Точность выполнения граничных условий  $U|_{x=a}$ ,  $U|_{y=b}$ ,  $V|_{x=a}$ ,  $V|_{y=b}$ , а также дифференциальных уравнений (2.3), (2.4), и точность вычисления компонент перемещений и компонент тензора напряжений зависят от выбора порядка граничной функции и количества членов в рядах Фурье. Если увеличить порядок граничной функции (со второго до четвертого или с четвертого до шестого), а  $N$  во всех расчетах взять одинаковым, то относительная погрешность  $\delta_{\max}$  у компо-

Таблица 1. Относительная погрешность  $\delta_{\max}$ , % при использовании  $M_2$ 

Исследуемый объект		N				
		2	3	4	5	6
Компоненты перемещений	$U$	0.32	0.13	$7.28 \times 10^{-2}$	$4.21 \times 10^{-2}$	$2.70 \times 10^{-2}$
	$V$	0.12	$5.80 \times 10^{-2}$	$3.00 \times 10^{-2}$	$1.67 \times 10^{-2}$	$9.80 \times 10^{-3}$
Компоненты тензора напряжений	$\sigma_{xx}$	1.59	0.73	0.41	0.25	0.17
	$\sigma_{yy}$	1.16	0.53	0.30	0.18	0.12
	$\sigma_{zz}$	1.42	0.65	0.36	0.22	0.15
	$\sigma_{xy}$	1.46	0.67	0.37	0.23	0.15
Невязка ДУ	(3)	11.12	6.36	4.25	3.08	2.35
	(4)	12.66	4.87	2.19	1.15	0.86
Невязка ГУ	$U _{x=a}, U _{y=b}$	0.27	0.11	$4.70 \times 10^{-2}$	$2.52 \times 10^{-2}$	$1.47 \times 10^{-2}$
	$V _{x=a}, V _{y=b}$	$1.11 \times 10^{-3}$	$4.51 \times 10^{-4}$	$2.18 \times 10^{-4}$	$1.18 \times 10^{-4}$	$7.10 \times 10^{-5}$
	$U _{x=0}, U _{y=0}$	0	0	0	0	0
	$V _{x=0}, V _{y=0}$	0	0	0	0	0

нент перемещений и компонент тензора напряжений уменьшится на два порядка. Также на два порядка уменьшится невязка граничных условий  $U|_{x=a}, U|_{y=b}$ . Для граничных условий  $V|_{x=a}, V|_{y=b}$  невязка уменьшается на три порядка.

Анализируя поведение максимальной невязки дифференциальных уравнений (2.3), (2.4) можно сделать следующий вывод: увеличение порядка граничной функции второго до четвертого ведет к уменьшению невязки на один порядок, а при увеличе-

Рис. 4. Невязка граничных условий: (a)  $U|_{x=a}, U|_{y=b}$ , (b)  $V|_{x=a}, V|_{y=b}$ .

**Таблица 2.** Относительная погрешность  $\delta_{\max}$ , % при использовании  $M_4$ 

Исследуемый объект		N				
		2	3	4	5	6
Компоненты перемещений	$U$	$1.50 \times 10^{-2}$	$3.50 \times 10^{-3}$	$1.49 \times 10^{-3}$	$7.25 \times 10^{-4}$	$3.80 \times 10^{-4}$
	$V$	$4.80 \times 10^{-3}$	$1.52 \times 10^{-3}$	$5.90 \times 10^{-4}$	$2.70 \times 10^{-4}$	$1.35 \times 10^{-4}$
Компоненты тензора напряжений	$\sigma_{xx}$	$6.15 \times 10^{-2}$	$2.10 \times 10^{-2}$	$9.10 \times 10^{-3}$	$4.79 \times 10^{-3}$	$2.82 \times 10^{-3}$
	$\sigma_{yy}$	$5.32 \times 10^{-2}$	$1.81 \times 10^{-2}$	$7.50 \times 10^{-3}$	$3.61 \times 10^{-3}$	$2.06 \times 10^{-3}$
	$\sigma_{zz}$	$5.46 \times 10^{-2}$	$1.87 \times 10^{-2}$	$8.10 \times 10^{-3}$	$4.31 \times 10^{-3}$	$2.59 \times 10^{-3}$
	$\sigma_{xy}$	$5.61 \times 10^{-2}$	$1.92 \times 10^{-2}$	$8.29 \times 10^{-3}$	$4.33 \times 10^{-3}$	$2.60 \times 10^{-3}$
Невязка ДУ	(3)	0.64	0.26	0.13	$7.53 \times 10^{-2}$	$4.67 \times 10^{-2}$
	(4)	0.38	0.13	$6.52 \times 10^{-2}$	$3.51 \times 10^{-2}$	$2.10 \times 10^{-2}$
Невязка ГУ	$U _{x=a}, U _{y=b}$	$6.81 \times 10^{-3}$	$2.00 \times 10^{-3}$	$7.50 \times 10^{-4}$	$3.32 \times 10^{-4}$	$1.65 \times 10^{-4}$
	$V _{x=a}, V _{y=b}$	$1.92 \times 10^{-6}$	$6.10 \times 10^{-7}$	$2.40 \times 10^{-7}$	$1.10 \times 10^{-7}$	$5.50 \times 10^{-8}$
	$U _{x=0}, U _{y=0},$	0	0	0	0	0
	$V _{x=0}, V _{y=0}$					

нии порядка граничной функции с четвертого до шестого на возрастание точности еще влияет число  $N$ . Так, при  $N = 2$  уменьшение невязки будет составлять один порядок, при  $N = 6$  уже два порядка.

**Таблица 3.** Относительная погрешность  $\delta_{\max}$ , % при использовании  $M_6$ 

Исследуемый объект		N				
		2	3	4	5	6
Компоненты перемещений	$U$	$2.22 \times 10^{-4}$	$6.00 \times 10^{-5}$	$2.09 \times 10^{-5}$	$8.52 \times 10^{-6}$	$3.90 \times 10^{-6}$
	$V$	$1.05 \times 10^{-4}$	$2.59 \times 10^{-5}$	$8.45 \times 10^{-6}$	$3.27 \times 10^{-6}$	$1.37 \times 10^{-6}$
Компоненты тензора напряжений	$\sigma_{xx}$	$1.44 \times 10^{-3}$	$4.14 \times 10^{-4}$	$1.60 \times 10^{-4}$	$7.50 \times 10^{-5}$	$3.77 \times 10^{-5}$
	$\sigma_{yy}$	$1.55 \times 10^{-3}$	$4.18 \times 10^{-4}$	$1.42 \times 10^{-4}$	$5.65 \times 10^{-5}$	$2.78 \times 10^{-5}$
	$\sigma_{zz}$	$1.28 \times 10^{-3}$	$3.67 \times 10^{-4}$	$1.46 \times 10^{-4}$	$6.70 \times 10^{-5}$	$3.50 \times 10^{-5}$
	$\sigma_{xy}$	$1.31 \times 10^{-3}$	$3.37 \times 10^{-4}$	$1.45 \times 10^{-4}$	$6.68 \times 10^{-5}$	$3.50 \times 10^{-5}$
Невязка ДУ	(3)	$2.00 \times 10^{-2}$	$6.34 \times 10^{-3}$	$2.57 \times 10^{-3}$	$1.21 \times 10^{-3}$	$6.32 \times 10^{-4}$
	(4)	$1.29 \times 10^{-2}$	$3.82 \times 10^{-3}$	$1.50 \times 10^{-3}$	$6.49 \times 10^{-4}$	$3.37 \times 10^{-4}$
Невязка ГУ	$U _{x=a}, U _{y=b}$	$1.14 \times 10^{-4}$	$2.58 \times 10^{-5}$	$8.80 \times 10^{-6}$	$3.40 \times 10^{-6}$	$1.44 \times 10^{-6}$
	$V _{x=a}, V _{y=b}$	$2.24 \times 10^{-9}$	$5.59 \times 10^{-10}$	$1.95 \times 10^{-10}$	$7.60 \times 10^{-11}$	$3.35 \times 10^{-11}$
	$U _{x=0}, U _{y=0},$	0	0	0	0	0
	$V _{x=0}, V _{y=0}$					

**Таблица 4.** Количество линейных алгебраических уравнений

Граничная функция	$N$				
	2	3	4	5	6
$M_2 (p = 1)$	64	90	120	154	192
$M_4 (p = 2)$	120	154	192	234	280
$M_6 (p = 3)$	192	234	280	330	384

**Таблица 5.** Время расчета

Граничная функция	$N$				
	2	3	4	5	6
$M_2 (p = 1)$	6.98 с	10.42 с	14.42 с	19.37 с	25.40 с
$M_4 (p = 2)$	12.20 с	16.85 с	24.28 с	37.75 с	49.73 с
$M_6 (p = 3)$	23.68 с	34.07 с	47.65 с	67.57 с	96.62 с

С помощью табл. 4 и 5 можно ответить на вопрос, что более эффективно для уменьшения погрешности вычислений — увеличение порядка граничной функции или увеличение количества членов в ряде Фурье. В табл. 4 представлено количество линейных алгебраических уравнений в системах, которые необходимо решить для расчета данных, указанных в табл. 1–3. В табл. 5 записано время расчета программы в секундах на персональном компьютере с процессором Intel Core i3-4160 и ОЗУ 8 ГБ. Из табл. 4 видно, что одинаковая трудоемкость вычислений получается при выборе следующих комбинаций параметров  $p$  и  $N$ :

- 1)  $p = 1$  и  $N = 4$  или  $p = 2$  и  $N = 2$ —120 линейных алгебраических уравнений;
- 2)  $p = 1$  и  $N = 5$  или  $p = 2$  и  $N = 3$ —154 линейных алгебраических уравнения;
- 3)  $p = 1$  и  $N = 6$  или  $p = 2$  и  $N = 4$  или  $p = 3$  и  $N = 2$ —192 линейных алгебраических уравнения;
- 4)  $p = 2$  и  $N = 5$  или  $p = 3$  и  $N = 3$ —234 линейных алгебраических уравнения;
- 5)  $p = 2$  и  $N = 6$  или  $p = 3$  и  $N = 4$ —280 линейных алгебраических уравнений.

Учитывая данные табл. 1–3 можно сделать вывод, что в каждом из пяти указанных вариантов комбинаций параметров  $p$  и  $N$  точность расчетов выше (значение  $\delta_{\max}$  в среднем падает на порядок) в случаях, соответствующих более высокому значению параметра  $p$ , т.е. более высокому порядку граничной функции. Принимая во внимание данные табл. 5, отметим, что повышение порядка граничной функции приводит и к сокращению времени расчета. Для пяти комбинаций параметров  $p$  и  $N$ , соответствующих одинаковой трудоемкости расчетов, уменьшение времени расчета при большем значении параметра  $p$  составляет от 2.5% (третья комбинация) до 15% (первая комбинация).

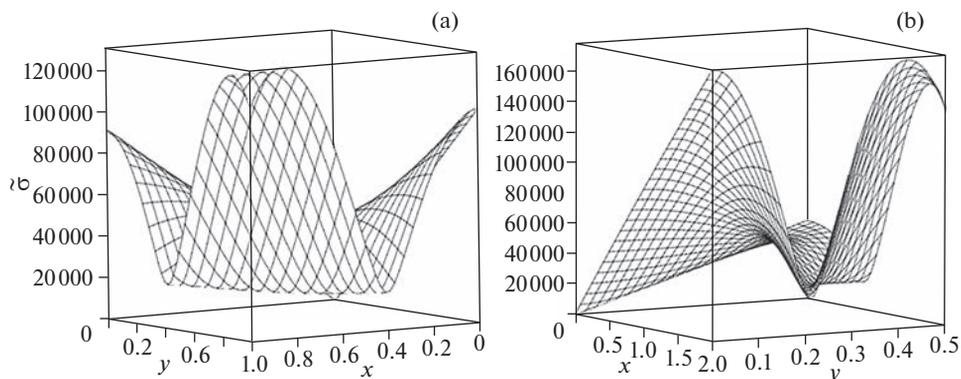
При изучении свойств поля напряжений в бруске наибольший интерес представляет исследование влияния геометрических размеров его сечения на величину интенсивности напряжений  $\tilde{\sigma}$  [29]

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{((\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\sigma_{xy})^2)/2}$$

и расположение точки с наибольшим ее значением  $\tilde{\sigma}$ .

Таблица 6. Значения  $\tilde{\sigma}_{\max}$  и ее координаты

Размеры сечения	$a = b = 1$	$a = 2, b = 1/2$	$a = 3, b = 1/3$	$a = 4, b = 1/4$	$a = 5, b = 1/5$
Значение $\tilde{\sigma}_{\max}$	$1.31 \times 10^5$ Па	$1.79 \times 10^5$ Па	$2.65 \times 10^5$ Па	$3.54 \times 10^5$ Па	$4.43 \times 10^5$ Па
Координаты точки	(0.86; 1)	(2; 0)	(3; 0)	(4; 0)	(5; 0)

Рис. 5. Интенсивность напряжений  $\tilde{\sigma}$ : (a)  $a = b = 1$ , (b)  $a = 2, b = 1/2$ .

Размеры сечения в расчетах подобраны таким образом, чтобы площадь сечения бруса оставалась постоянной. Вычислительные эксперименты показали, что качественный вид профилей интенсивности напряжений  $\tilde{\sigma}$  квадратного и прямоугольного сечений бруса будут различны. Виды подобных профилей для случаев  $a = b = 1$  и  $a = 2, b = 1/2$  изображены на рис. 5, из которого видно, что точка с максимальной интенсивностью напряжений  $\tilde{\sigma}_{\max}$  для квадратного сечения расположена на стороне  $y = 1$ , а для прямоугольного — находится в угловой точке (2; 0). Значения  $\tilde{\sigma}_{\max}$  для различных значений  $a$  и  $b$ , и координаты точки, в которой достигается  $\tilde{\sigma}_{\max}$  записаны в табл. 6. Анализируя данные этой таблицы, можно сделать вывод, что для прямоугольного сечения наибольшая интенсивность напряжений  $\tilde{\sigma}_{\max}$  всегда расположена в крайней точке длинной жестко заземленной стороны при  $x = a$ . Также из табл. 6 видно, что напряжения в брус тем выше, чем больше превосходство длины одной стороны над длиной другой стороны прямоугольного сечения. Наименьшая интенсивность напряжений среди всех сечений наблюдается в брус с квадратным сечением.

**5. Заключение.** В статье показана эффективность быстрой тригонометрической интерполяции при решении задач теории упругости на примере задачи о напряжениях в брус прямоугольного сечения. При использовании в быстрых разложениях граничной функции второго порядка и небольшом количестве членов в рядах Фурье (от двух до шести) максимальная относительная погрешность  $\delta_{\max}$  компонент перемещений и компонент тензора напряжений составляет менее 1%, что является приемлемой погрешностью для большинства технических расчетов. С увеличением порядка граничной функции и/или количества членов  $N$  в рядах Фурье погрешность  $\delta_{\max}$  быстро уменьшается. Увеличение порядка граничной функции является более эффективным способом уменьшения погрешности  $\delta_{\max}$  по сравнению с увеличением количества членов в рядах Фурье.

При исследовании интенсивности напряжений  $\bar{\sigma}$  в брус с различными габаритными размерами прямоугольного сечения, но одинаковой площадью всех сечений выяснилось, что наименьшее значение  $\bar{\sigma}_{\max}$  среди всех сечений наблюдается в брус с квадратным сечением. В этом случае точка с  $\bar{\sigma}_{\max}$  расположена на стороне  $y = b$  не далеко от угловой точки  $(a; b)$ . Для прямоугольного сечения точка с максимальной интенсивностью напряжений  $\bar{\sigma}_{\max}$  будет расположена на длинной стороне в точке  $(a; 0)$ . При этом, чем больше превосходство длины одной стороны прямоугольного сечения над длиной его другой стороны, тем выше  $\bar{\sigma}_{\max}$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савичев И.С., Чернышов А.Д. Применение метода угловых суперпозиций для решения контактной задачи о сжатии упругого цилиндра // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 3. С. 151–162.
2. Чернышов А.Д. Метод угловых суперпозиций для краевых задач. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. 350 с.
3. Чернышов А.Д. Решение задачи о кручении упругого стержня – угольного сечения методом расширения границ // ПМТФ. 2009. Т. 50. № 6 (298). С. 193–200.
4. Гоцев Д.В., Ковалев А.В., Спорыхин А.Н. Локальная неустойчивость пластин с запрессованными кольцевыми включениями при упругопластическом поведении материалов // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 3 (247). С. 146–151.
5. Минаева Н.В. О применении метода возмущений в механике деформируемых тел // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 1. С. 37–39.
6. Шашкин А.И., Минаева Н.В., Гриценко А.В. Квазистатическое деформирование упругого стержня при продольном изгибе // Изв. высш. уч. зав. Машиностр. 2008. № 12. С. 21–25.
7. Вerveйко Н.Д., Егоров М.В. Математическое моделирование динамического деформирования упруговязкопластических оболочек конечной длины лучевым методом // Вестн. Самарск. гос. тех. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. № 2. С. 325–343. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1610>
8. Севастьянов Г.М., Штука В.И., Буренин А.А. Лучевой метод в приближенном решении задачи об ударном нагружении несжимаемого цилиндрического слоя // Вестн. Чувашск. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер.: Мех. пред. сост. 2015. № 4 (26). С. 50–62.
9. Буренин А.А., Рагозина В.Е. К построению приближенных решений краевых задач ударного деформирования // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 2. С. 106–113.
10. Вестяк А.В., Земсков А.В. Модель нестационарных упруго-диффузионных колебаний шарнирно опертой балки Тимошенко // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 5. С. 107–119. <https://doi.org/10.31857/S0572329920030174>
11. Гандилян Д.В., Устинов К.Б. Влияние поверхностных эффектов в задачах теории упругости для областей, ограниченных неконцентрическими окружностями // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 5. С. 95–106. <https://doi.org/10.31857/S0572329920050062>
12. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Пространственное нестационарное движение упругой сферической оболочки // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 2. С. 118–128.
13. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Мурашкин Е.В. Об остаточных напряжениях в окрестности цилиндрического дефекта сплошности вязкоупругопластического материала // ПМТФ. 2006. Т. 47. № 2 (276). С. 110–119.
14. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of elasticity. 3rd ed. McGraw-Hill Inc., 1970. 567 p. = Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
15. Меньшова И.В. Разложения по функциям Фадля–Папковича. Основные формулы // Вестн. Чувашск. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер.: Мех. пред. сост. 2012. № 4 (14). С. 133–139.
16. Себряков Г.Г., Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Шуляковская Т.Д. Разложения Лагранжа по функциям Фадля–Папковича в краевой задаче теории упругости для полуполосы // Доклады академии наук. 2015. Т. 460. № 5. С. 540. <https://doi.org/10.7868/S0869565215050126>

17. *Петров В.В.* Двухшаговый метод последовательного возмущения параметров и его применение к решению нелинейных задач механики твердого деформируемого тела // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред. Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 2001. С. 6–12.
18. *Горяйнов В.В., Попов М.И., Чернышов А.Д.* Решение задачи о напряжениях в остром клиновидном режущем инструменте методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 5. С. 113–130.  
<https://doi.org/10.1134/S0572329919050088>
19. *Чернышов А.Д., Горяйнов В.В., Кузнецов С.Ф., Никифорова О.Ю.* Применение быстрых разложений для построения точных решений задачи о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки // Вестн. Томск. гос. ун-та. Мат. мех. 2021. № 70. С. 127–142.  
<https://doi.org/10.17223/19988621/70/11>
20. *Chernyshov A.D., Goryainov V.V., Danshin A.A.* Analysis of the stress field in a wedge using the fast expansions with pointwise determined coefficients // IOP Conf. Ser.: J. Phys: Conf. Ser. 2018. V. 973. P. 012002.  
<https://doi.org/10.1088/174265>.
21. *Чернышов А.Д.* Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений // Ж. выч. мат. физ. Т. 54. № 1. 2014. С. 13–24.  
<https://doi.org/10.7868/S0044466914010062>
22. *Чернышов А.Д., Горяйнов В.В., Лешонков О.В., Соболева Е.А., Никифорова О.Ю.* Сравнение скорости сходимости быстрых разложений с разложениями в классический ряд Фурье // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Сист. анализ инф. технол. 2019. № 1. С. 27–34.  
<https://doi.org/10.17308/sait.2019.1/1273>
23. *Чернышов А.Д., Горяйнов В.В., Чернышов О.А.* Применение метода быстрых разложений для расчета траекторий космических кораблей // Изв. вузов. Авиац. техн. 2015. № 2. С. 41–47.
24. *Чернышов А.Д.* Решение нелинейного уравнения теплопроводности для криволинейной области с условиями Дирихле методом быстрых разложений // Инж.-физ. ж. 2018. Т. 91. № 2. С. 456–468.
25. *Чернышов А.Д.* Решение двухфазной задачи Стефана с внутренним источником и задач теплопроводности методом быстрых разложений // Инж.-физ. ж. 2021. Т. 94. № 1. С. 101–120.
26. *Briand T.* Trigonometric polynomial interpolation of images // Image Processing on Line. 2019. V. 9. P. 291–316.  
<https://doi.org/10.5201/ipol.2019.273>
27. *Поршнев С.В., Кусайкин Д.В.* Восстановление периодических дискретных сигналов конечной длительности с помощью тригонометрической интерполяции // Изв. высш. учебн. завед. Приборостр. 2017. Т. 60. № 6. С. 504–512.  
<https://doi.org/10.17586/0021-3454-2017-60-6-504-512>
28. URL: <https://docs.cntd.ru/document/554403082?marker=A840NF> (дата обращения: 18.03.2022).
29. *Писаренко Г.С., Можаровский Н.С.* Уравнения и краевые задачи пластичности и ползучести. Киев: Наук. думка, 1981. 496 с.

УДК 539.4:622.023.23

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ КРИТИЧЕСКИХ РАССТОЯНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ РАЗРУШЕНИЯ КВАЗИХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ С ВЫРЕЗАМИ

© 2023 г. С. В. Сукнев<sup>а,\*</sup>

<sup>а</sup> *Институт горного дела Севера им. Н.В. Черского СО РАН, Якутск, Россия*

*\*e-mail: suknyov@igds.ysn.ru*

Поступила в редакцию 25.02.2022 г.

После доработки 04.04.2022 г.

Принята к публикации 05.04.2022 г.

Рассмотрено применение различных методов теории критических расстояний для оценки разрушения отрывом квазихрупкой пластины с вырезом в виде кругового отверстия, подверженной одноосному растяжению, одноосному сжатию, а также совместному действию растягивающих и сжимающих напряжений. Расчеты критических напряжений выполнены на основе предложенного ранее подхода, в соответствии с которым структурный параметр нелокального критерия разрушения представляется в виде суммы двух слагаемых. Первое из них характеризует собственно структуру материала и является константой, а второе отражает образование неупругих деформаций и зависит от пластических свойств материала, геометрии образца и краевых условий. Проведено сопоставление результатов расчетов с известными экспериментальными данными.

*Ключевые слова:* хрупкое разрушение, квазихрупкое разрушение, нелокальные критерии разрушения, теория критических расстояний, масштабный эффект, вырез, концентрация напряжений

**DOI:** 10.31857/S0572329922100191, **EDN:** KLQBAS

**1. Введение.** Подходы механики сплошной среды и механики разрушения имеют различные области практического применения в расчетах конструкций на прочность. Первый подход используется при проектировании конструкции, когда ставится задача оптимизации ее формы с целью максимально возможного снижения концентрации напряжений, а второй подход используется на стадии эксплуатации конструкции, когда ставится задача оценки ее остаточного ресурса с учетом влияния имеющихся в конструкции дефектов, наибольшую опасность из которых представляют дефекты типа трещин. Проблема состоит в том, что большая часть конструктивных, технологических и эксплуатационных дефектов и концентраторов напряжений, имеющих высокое, но конечное значение коэффициента концентрации напряжений, оказывается вне области применения этих подходов [1]. Поэтому актуальной является задача разработки новых подходов к расчетам конструкций на прочность, позволяющих охватить весь спектр концентраторов напряжений и с единых позиций подходить к расчету конструкции с тупым вырезом и с трещиной.

Этим требованиям отвечают нелокальные критерии разрушения, которые основаны на представлении о формировании в материале возле наиболее напряженной точки зоны предразрушения, в которой происходит локальное перераспределение упругих напряжений. За пределами этой малой по сравнению с размерами деформируемого тела области материал деформируется упруго вплоть до разрушения. Основы

нелокальных критериев разрушения были заложены в работах [2–5]. Перераспределение напряжений в зоне предразрушения учитывается в неявном виде путем применения условия разрушения не в точке максимума, а на некотором расстоянии от нее, либо путем использования процедуры осреднения напряжений.

В дальнейшем эти подходы были развиты в работах [6–14] и других, причем развитие критериев идет по разным направлениям. Одно направление связано с уточнением функции эквивалентного напряжения (например, использование вместо максимального тангенциального напряжения максимального касательного напряжения [10], интенсивности напряжений [13], максимальной тангенциальной деформации [8] или плотности энергии деформации [7, 14]). Другое направление связано с изменением процедуры применения критерия (например, выполнение осреднения напряжений не по линии, а в некоторой области вблизи выреза [9]).

Другой подход к расчетам на прочность состоит в применении методов механики разрушения. Для трещины в твердом теле составляется энергетический баланс при ее виртуальном приращении на бесконечно малую величину и записывается условие роста трещины, которое и является критерием разрушения. Процедура применения критериев механики разрушения обычно сводится к расчету соответствующего коэффициента интенсивности напряжений и приравнивания его к критическому значению, которое также полагается константой материала. Для того чтобы критерий линейной упругой механики разрушения (LEFM) применить к описанию разрушения у тупого выреза поступают следующим образом. Предполагают, что в вершине выреза в зоне концентрации напряжений изначально существует воображаемая (фиктивная) трещина, длина которой является константой материала, характеризующей его структуру. Для трещины, находящейся в неоднородном поле напряжений, рассчитывается коэффициент интенсивности напряжений и применяется критерий LEFM. Одними из первых этот подход применили Waddoups, Eisenmann и Kaminski [15] для оценки прочности композитных пластин с круговым отверстием, подверженных растяжению.

Еще один критерий трещин (finite fracture mechanics), получившей в последнее время широкое распространение [18–22]. В этом критерии постулируется, что рост трещины, включая момент ее возникновения у выреза, происходит скачкообразно. Разрушение происходит, если энергия, высвобождаемая при скачкообразном изменении длины трещины, достигнет критического значения. Конечный размер приращения длины трещины рассматривается в качестве константы материала.

В настоящее время нелокальные критерии получили развитие в рамках теории критических расстояний (theory of critical distances). Хотя критерии основаны на различных подходах, Тейлор (Taylor) [23] обратил внимание, что предсказания, сделанные на этих методах расчетов, дают очень близкие результаты, и предложил рассматривать их как частные выражения некой общей теории, которую он назвал теорией критических расстояний (TCD). В рамках теории рассматриваются четыре критерия (метода расчетов).

1. Точечный метод (point method). В этом методе предполагается, что разрушение происходит тогда, когда упругое напряжение достигнет предела прочности материала  $\sigma_0$  на некотором расстоянии  $d_0$  от вершины выреза. Следуя [6], этот метод будем также называть критерием напряжений в точке (point stress criterion).

2. Линейный метод (line method). В этом методе предполагается, что разрушение происходит тогда, когда усредненное на некотором расстоянии  $d_0$  упругое напряжение достигнет предела прочности материала  $\sigma_0$ . Осреднение выполняется вдоль линии, исходящей от вершины выреза. Следуя [6], этот метод будем также называть критерием средних напряжений (average stress criterion).

3. Метод воображаемой трещины (imaginary crack method). В этом методе предполагается, что в вершине выреза имеется воображаемая трещина длиной  $d_0$ , а разрушение

происходит тогда, когда коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины достигнет критического значения  $K_c$ . Этот метод будем также называть критерием фиктивной трещины (fictitious crack criterion).

4. Последний, четвертый метод реализует концепцию механики конечных трещин. Этот метод будем также называть критерием конечной трещины (finite crack criterion).

Общим свойством этих критериев является введение дополнительного параметра – внутреннего размера материала (intrinsic material length)  $d_0$ , характеризующего его структуру, что позволяет описать масштабный эффект в условиях концентрации напряжений и тем самым расширить область применения по сравнению с традиционными критериями, не учитывающими масштабный эффект. В последнее время появилось большое количество работ (например, [24–28]), посвященных развитию TCD и ее применению для оценки прочности материалов и элементов конструкций с вырезами.

В квазихрупких материалах, таких как геоматериалы (бетон, гипс, горные породы), композиты, керамика, чугун, графит, формирование зоны предразрушения обычно связывают с локальным повреждением материала в результате микрорастрескивания или появления микропор. Зона поврежденности или, как ее часто называют, зона процесса разрушения (fracture process zone) не только предшествует образованию макротрещины, но и сопровождает ее в процессе распространения, окружая вершину трещины.

Вместе с тем, перераспределение напряжений в пределах размера  $d_0$  вызвано, прежде всего, дискретностью структуры, а не поврежденностью материала и связанными с ней неупругими деформациями. Поэтому область применения нелокальных критериев ограничена хрупким, либо квазихрупким разрушением с малой зоной предразрушения  $d$ , когда ее размер не сильно отличается от  $d_0$ , т.е. при выполнении условия  $d \approx d_0 = \text{const}$ . При этом неупругие (пластические) свойства материала проявляются слабо. В то же время, если материал обладает достаточно сильно выраженными пластическими свойствами, образование неупругих деформаций приводит к увеличению зоны предразрушения и нарушению условия  $d = \text{const}$ . В работе рассматривается возможность применения методов теории критических расстояний в случае квазихрупкого разрушения с развитой зоной предразрушения  $d > d_0$ , когда перераспределение напряжений в зоне предразрушения определяется не только дискретностью структуры материала, но и его пластическими свойствами.

**2. Размер зоны предразрушения.** Ранее предпринимались попытки модернизировать нелокальные критерии за счет корректировки параметра  $d_0$  с целью более точного описания результатов конкретного эксперимента. Так, в работе [29] для описания экспериментальных данных о разрушении пластин из композитного материала с круговым отверстием радиуса  $R$  параметр  $d_0$  представляется в виде  $d_0 = \frac{(R/R_0)^m}{C}$ , а затем

путем подгонки определяются феноменологические константы  $m$  и  $C$  ( $R_0$  – вспомогательный параметр, введенный, чтобы обезразмерить  $R$ ). Подобным образом поступают в работе [30] для описания аналогичных экспериментальных данных, полученных на образцах с отверстиями эллиптической формы.

Другой подход предложен в работе [31]. На основе анализа диаграмм хрупкого, квазихрупкого и вязкого разрушения размер зоны предразрушения  $d$  представляется в следующем виде:

$$d = d_0 + \beta L_e \tag{2.1}$$

где  $L_e$  – размер зоны концентрации напряжений,  $\beta$  – безразмерный параметр, характеризующий пластичность материала. Для хрупких материалов  $\beta = 0$ , для пластичных материалов  $\beta \gg 1$ . При  $\beta \sim 1$  материал характеризуется умеренными пластическими

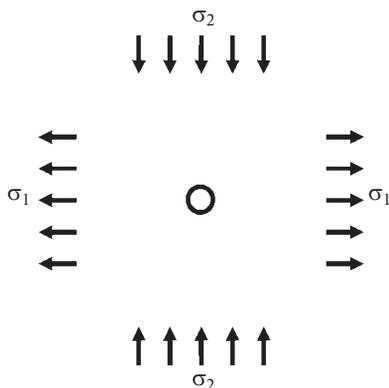


Рис. 1. Круговое отверстие при двухосном нагружении.

свойствами. Первое слагаемое в выражении (2.1) характеризует собственно структуру материала, а второе отражает вклад неупругих деформаций. Таким образом, пластические свойства материала начинают проявляться при  $d > d_0$  и проявляются тем сильнее, чем больше  $d$  по отношению к  $d_0$ . Если  $d = d_0$  будем говорить о хрупком разрушении, если  $d > d_0$  — о квазихрупком разрушении, которое в пределе  $d \gg d_0$  переходит в вязкое разрушение. При вязком разрушении критическое напряжение не зависит от размера концентратора напряжений, поэтому размер зоны предразрушения пропорционален размеру концентратора и, соответственно, размеру  $L_e$  (при неизменных граничных условиях). При хрупком разрушении, напротив, размер зоны предразрушения не зависит от размера концентратора напряжений и определяется структурой материала.

Таким образом, условие малости зоны предразрушения, ограничивающее область применения нелокальных критериев в рамках теории критических расстояний, принимает вид  $\beta L_e \ll d_0$ . В этом случае можно принять  $d \approx d_0 = \text{const}$ . Для развитой зоны предразрушения второе слагаемое в выражении (2.1) не является малым по отношению к  $d_0$ , оно может быть сопоставимым или даже превышать характерный размер структуры материала, при этом  $d \neq \text{const}$ . Этот случай является предметом настоящего рассмотрения. При этом будем считать, что зона предразрушения остается малой по отношению к размерам деформируемого тела, и за пределами этой области материал деформируется упруго.

Рассмотрим возможность применения нелокальных критериев разрушения в задаче об образовании трещин отрыва в пластине с круговым отверстием, подверженной пропорциональному нагружению равномерно распределенными на бесконечности растягивающими  $\sigma_1 \equiv k_1 p$  и сжимающими  $\sigma_2 \equiv k_2 p$  напряжениями (рис. 1), с учетом изложенных выше представлений о формировании зоны предразрушения.

**3. Критерии квазихрупкого разрушения.** Применение первых трех методов теории критических расстояний для оценки разрушения квазихрупкого материала с круговым отверстием, подверженного двухосному нагружению, рассмотрено в работах [32, 33]. Приведем формулы для критического напряжения  $p_c$  в момент образования трещин отрыва на контуре отверстия с учетом принятых обозначений.

Критерий средних напряжений (ASC) или линейный метод в теории критических расстояний:

$$p_c = 2\chi C_0 [k_1(1 + \gamma^{-1})(2 + \gamma^{-2}) + k_2(1 + \gamma)\gamma^{-3}]^{-1} \quad (3.1)$$

Критерий напряжений в точке (PSC) или точечный метод в теории критических расстояний:

$$p_c = 2\chi C_0 [k_1(2 + \gamma^{-2} + 3\gamma^{-4}) + k_2(-\gamma^{-2} + 3\gamma^{-4})]^{-1} \quad (3.2)$$

Критерий фиктивной трещины (FCC) или метод воображаемой трещины в теории критических расстояний:

$$p_c = 2\chi C_0 [k_1(2 + \gamma^{-1.5} + 0.375\gamma^{-3.5}(5 + 2\gamma + \gamma^2)) + k_2(-\gamma^{-1.5} + 0.375\gamma^{-3.5}(5 + 2\gamma + \gamma^2))] \quad (3.3)$$

Здесь  $\chi = \sigma_0/C_0$ ;  $\sigma_0$  – предел прочности при растяжении;  $C_0$  – предел прочности при сжатии;  $\gamma = 1 + d/a$ ;  $a$  – радиус отверстия. Размер  $d$  определяется выражением (2.1), в котором размер зоны концентрации напряжений  $L_e = a(3k_1 + k_2)/(7k_1 + 5k_2)$ . В случае квазихрупкого разрушения, выражение для  $\gamma$  принимает вид:

$$\gamma = 1 + \frac{d_0}{a} + \beta \frac{3k_1 + k_2}{7k_1 + 5k_2}$$

Применяя критерий фиктивной трещины к материалам, содержащим вырезы, необходимо помнить о проблеме сшивки критерия с традиционным критерием хрупкого разрушения сплошной среды при больших размерах выреза [34]. В этом случае критерий FCC дает заниженное на 12% значение разрушающей нагрузки. Проблема может быть преодолена путем приближенного расчета коэффициента интенсивности напряжений в вершине фиктивной трещины способом, изложенным в [34]. Если этого не сделать, то ошибка в определении асимптотического значения разрушающей нагрузки может привести к ошибке в определении параметра  $\beta$  и неправильной оценке характера разрушения материала.

В соответствии с формулами (3.1)–(3.3) критическое напряжение с ростом диаметра отверстия уменьшается, асимптотически приближаясь к некоторому напряжению  $T_0$  в случае хрупкого разрушения и к напряжению  $T_s$  ( $C_0 > T_s > T_0$ ) в случае квазихрупкого или вязкого разрушения. Отношение напряжений  $T_s$  и  $T_0$  связано с величиной параметра пластичности  $\beta$  в выражении (2.1). Приведем формулы для асимптотического значения критического напряжения:

$$T_s = T_0 \frac{2(3k_1 + k_2)}{k_1(1 + \gamma_s^{-1})(2 + \gamma_s^{-2}) + k_2(1 + \gamma_s)\gamma_s^{-3}} \quad \text{для ASC} \quad (3.4)$$

$$T_s = T_0 \frac{2(3k_1 + k_2)}{k_1(2 + \gamma_s^{-2} + 3\gamma_s^{-4}) + k_2(-\gamma_s^{-2} + 3\gamma_s^{-4})} \quad \text{для PSC} \quad (3.5)$$

$$T_s = T_0 \frac{2(3k_1 + k_2)}{k_1(2 + \gamma_s^{-1.5} + 0.375\gamma_s^{-3.5}(5 + 2\gamma_s + \gamma_s^2)) + k_2(-\gamma_s^{-1.5} + 0.375\gamma_s^{-3.5}(5 + 2\gamma_s + \gamma_s^2))} \quad \text{для FCC} \quad (3.6)$$

Здесь  $\gamma_s = 1 + \beta \frac{3k_1 + k_2}{7k_1 + 5k_2}$ ,  $T_0 = \frac{\chi C_0}{3k_1 + k_2}$  – асимптотическое значение критического напряжения для хрупкого материала. Для квазихрупких материалов, характеризующихся умеренными пластическими свойствами,  $T_s \approx T_0(1 + \beta/2)$  для ASC,  $T_s \approx T_0(1 + \beta)$  для PSC и  $T_s \approx T_0(1 + 3\beta/4)$  для FCC.

Необходимо сделать еще одно важное замечание относительно критерия FCC. Чтобы принять справедливость допущения  $d = \text{const}$  в хрупком материале, содержащем

вырез произвольного размера (в том числе, при его отсутствии), мы должны допустить изначальное существование в теле микродефектов, играющих роль фиктивных трещин. На первый взгляд, модель твердого тела с распределенными в нем микротрещинами (трещинами Гриффитса) выглядит вполне реалистичной и согласующейся с общепринятыми представлениями о реальном твердом теле, обладающем изначальной, присущей ему дефектностью (роль микротрещин могут, к примеру, выполнять границы зерен). Но в действительности такая модель может быть использована только для оценки прочности твердого тела, содержащего большой ансамбль гладких дефектов, например, пор. Чтобы применить модель для оценки прочности однородного тела, содержащего одиночный дефект произвольного размера, трещины Гриффитса должны заполнять объем всего тела, что физически абсурдно. Поэтому в рамках модели твердого тела с распределенными микротрещинами могут рассматриваться только достаточно большие отверстия, вырезы или полости, размер которых намного превышает размер микротрещин, а также расстояние между ними.

Применение четвертого метода теории критических расстояний для оценки разрушения квазихрупкого материала с круговым отверстием, подверженного двухосному нагружению, рассмотрено в работах [33, 35]. Метод основан на концепции механики конечных трещин (FFM), согласно которой рост трещины, включая момент ее возникновения у выреза, происходит скачкообразно. Конечное приращение длины трещины рассматривается в качестве константы материала:  $\delta l = d = \text{const}$ . Условие разрушения имеет вид [23]:

$$\int_l^{l+d} K^2 dl = K_c^2 d \quad (3.7)$$

Важным преимуществом инкрементального условия разрушения (3.7) перед обычным дифференциальным условием  $K = K_c$  является то, что оно может быть применено не только в качестве условия роста уже существующей в теле трещины, но и для предсказания появления трещин у концентраторов напряжений в теле, не содержащем начальных трещин. Для этого в уравнении (3.7) достаточно принять  $l = 0$ . При этом не требуется делать никаких дополнительных допущений о существовании в теле неких фиктивных или воображаемых трещин, представление о которых лежит в основе критерия FCC и приводит к определенным физическим противоречиям. Формула для расчета критического напряжения имеет следующий вид:

$$p_c = \chi C_0 \frac{16(\gamma - 1)}{\sqrt{k_1^2 J_1 + 2k_1 k_2 J_{12} + k_2^2 J_2}} \quad (3.8)$$

где

$$J_1 = -1533 - 512\gamma + 256\gamma^2 + 1408\gamma^{0.5} + 640\gamma^{-0.5} - 384\gamma^{-1.5} + 384\gamma^{-2.5} - 242\gamma^{-1} - 11\gamma^{-2} - 156\gamma^{-3} + 93\gamma^{-4} - 18\gamma^{-5} + 75\gamma^{-6}$$

$$J_2 = 19 - 50\gamma^{-1} + 85\gamma^{-2} + 36\gamma^{-3} - 147\gamma^{-4} - 18\gamma^{-5} + 75\gamma^{-6}$$

$$J_{12} = 1035 - 320\gamma^{0.5} - 704\gamma^{-0.5} - 192\gamma^{-1.5} + 192\gamma^{-2.5} + 110\gamma^{-1} - 91\gamma^{-2} - 60\gamma^{-3} - 27\gamma^{-4} - 18\gamma^{-5} + 75\gamma^{-6}$$

Асимптотическое (при  $a \rightarrow \infty$ ) значение критического напряжения:

$$T_s = T_0 \frac{16(\gamma_s - 1)(3k_1 + k_2)}{\sqrt{k_1^2 J_1(\gamma_s) + 2k_1 k_2 J_{12}(\gamma_s) + k_2^2 J_2(\gamma_s)}} \quad (3.9)$$

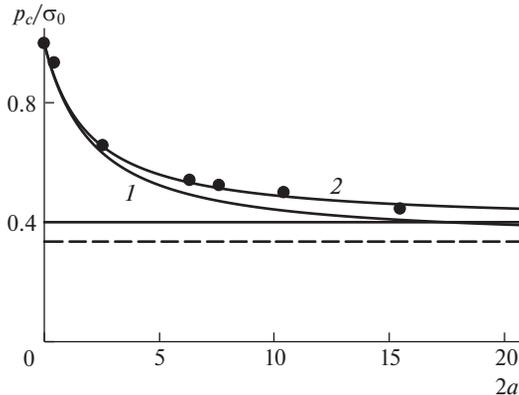


Рис. 2. Зависимость критического напряжения от диаметра отверстия для эпоксидного углепластика при растяжении. Расчет – по критерию ASC.

Для квазихрупких материалов, характеризующихся умеренными пластическими свойствами,  $T_s \approx T_0 (1 + \beta/2)$ .

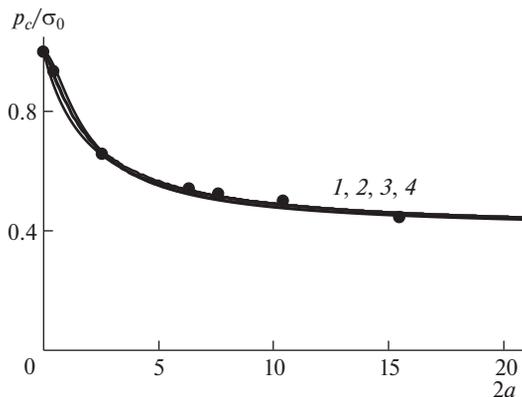
**4. Сопоставление с экспериментальными данными и обсуждение результатов расчетов.**

**4.1. Одноосное растяжение.** В работе [30] приведены результаты испытаний на растяжение пластин из эпоксидного углепластика с квазиизотропной укладкой слоев с круговыми отверстиями. На рис. 2 представлены экспериментальные данные (точки) о величине разрушающей нагрузки в зависимости от диаметра отверстия  $2a$  [мм] и результаты расчета критического напряжения согласно критерию ASC по формуле (3.1) при  $\beta = 0$  (кривая 1) и  $\beta = 0.4$  (кривая 2). Размер  $d_0$  составил 1.6 мм. Штриховая и сплошная прямые, рассчитанные по формуле (3.4), показывают асимптотические значения кривых 1 и 2, соответственно.

Параметры  $d_0$  и  $\beta$  подбирали исходя из наилучшего соответствия результатов расчета (кривая 2) и экспериментальных данных. Кривая 1 проведена для того, чтобы сравнить модифицированный и общепринятый критерии ASC и показать роль параметра  $\beta$  для предсказания разрушающей нагрузки. Модифицированный критерий ASC хорошо описывает экспериментальные данные во всем исследованном диапазоне диаметров отверстий (кривая 2). Неучет пластичности материала приводит к тому, что предсказания разрушающей нагрузки дают хорошие результаты только для малых диаметров отверстия, когда область неупругих деформаций также мала (кривая 1).

Расчеты критического напряжения по критериям ASC, PSC, FCC и FFM, выполненные по формулам (3.1), (3.2), (3.3) и (3.8) дают близкие результаты (рис. 3). Параметры материала, использованные в расчетах, приведены в табл. 1. При этом асимптотические значения критического напряжения, вычисленные по формулам (3.4), (3.5), (3.6) и (3.9), для всех критериев совпадают (табл. 1).

**4.2. Неравнораспределенное сжатие.** В работе [32] приведены экспериментальные данные о разрушении гипсовых плит с отверстием, подверженных неравномерно распределенному сжатию. Образцы изготавливали из гипсового материала с высоким (более 80%) содержанием полуводного гипса в исходном составе (гипс 1). Нагрузка прикладывалась к образцу через жесткие вставки, помещенные между образцом и нагружающими плитами. При этом, как было показано в работе [36], в центральной части образца (вне зоны влияния отверстия) реализуется достаточно однородное двухосное напряженное состояние: растяжение по горизонтальной оси и сжатие по верти-



**Рис. 3.** Зависимость критического напряжения от диаметра отверстия для эпоксидного углепластика при растяжении. Кривые 1, 2, 3, 4 – расчет по критериям ASC, PSC, FCC и FFM.

кальной оси образца (рис. 1). Напряжения  $\sigma_1 \equiv k_1 p$  и  $\sigma_2 \equiv k_2 p$  рассчитывались методом конечных элементов в центре образцов без отверстия, нагруженных через вставки заданного размера. В первой серии экспериментов использовались вставки фиксированного размера, для них были определены  $k_1 = 0.143$  и  $k_2 = 0.764$ .

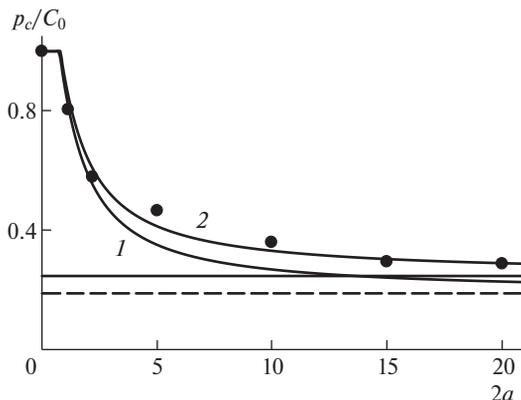
На рис. 4 представлены экспериментальные данные (точки) о критической нагрузке в момент образования трещин отрыва у отверстия в зависимости от его диаметра  $2a$  [мм] и результаты расчета критического напряжения согласно критерия ASC по формуле (3.1) при  $\beta = 0$  (кривая 1) и  $\beta = 0.6$  (кривая 2). Размер  $d_0$  составил 1.0 мм. Штриховая и сплошная прямые, рассчитанные по формуле (3.4), показывают асимптотические значения кривых 1 и 2 соответственно. Модифицированный критерий ASC хорошо описывает экспериментальные данные во всем исследованном диапазоне диаметров отверстий (кривая 2). Так же, как в случае разрушения пластин из эпоксидного углепластика при растяжении, неучет пластичности гипсового материала приводит к тому, что предсказания критической нагрузки дают хорошие результаты только для малых диаметров отверстия (кривая 1).

Результаты расчетов критического напряжения по критериям ASC, PSC, FCC и FFM показаны для сравнения на рис. 5. Параметры материала, использованные в расчетах, приведены в табл. 2.

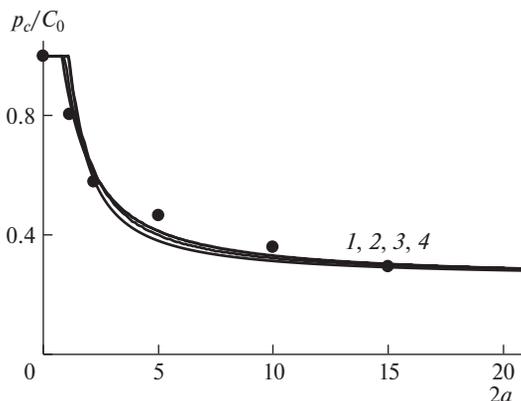
Для малых отверстий критическое напряжение ограничено пределом прочности материала на сжатие, откуда следует, что существует критическое значение диаметра отверстия  $2a = 2a_c$ , ниже которого трещины отрыва на контуре отверстия не образуются. Другими словами, при  $2a \leq 2a_c$  материал не чувствует присутствия концентратора

**Таблица 1.** Параметры материала (эпоксидный углепластик)

Критерий	$d_0$ , мм	$\beta$	$T_s/T_0$
ASC	1.6	0.4	1.2
PSC	0.55	0.2	1.2
FCC	0.82	0.267	1.2
FFM	1.6	0.4	1.2



**Рис. 4.** Зависимость критического напряжения от диаметра отверстия для гипса 1 при неравнораспределенном сжатии. Расчет – по критерию ASC.



**Рис. 5.** Зависимость критического напряжения от диаметра отверстия для гипса 1 при неравнораспределенном сжатии. Кривые 1, 2, 3, 4 – расчет по критериям ASC, PSC, FCC и FFM.

ра напряжений. Это согласуется с современными представлениями о реальном твердом теле, обладающем изначальной, присущей ему дефектностью. Согласно им малые искусственные дефекты, размеры которых сопоставимы с размерами структурных составляющих материала, не оказывают влияния на его прочность до тех пор, пока их размеры не достигнут определенного (критического) значения.

**Таблица 2.** Параметры материала (гипс 1)

Критерий	$d_0$ , мм	$\beta$	$T_s/T_0$
ASC	1.0	0.6	1.3
PSC	0.3	0.3	1.3
FCC	0.5	0.4	1.3
FFM	1.0	0.6	1.3

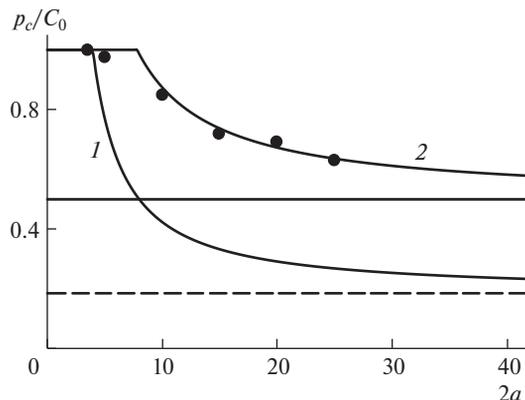


Рис. 6. Зависимость критического напряжения от диаметра отверстия для гипса 2 при одноосном сжатии. Расчет – по критерию ASC.

4.3. *Одноосное сжатие.* В работе [37] приведены экспериментальные данные о разрушении гипсовых плит с отверстием, подверженных одноосному сжатию. Формирование трещин отрыва на контуре кругового отверстия диаметром 10 мм и более в образцах с низким (60–70%) содержанием полуводного гипса в исходном составе (гипс 2) происходило постепенно, что характерно для вязкого разрушения. Это связано с тем, что содержащиеся в исходном составе кристаллы двухводного гипса не участвуют в реакции гидратации при затворении гипсового вяжущего водой и фактически играют роль заполнителя, препятствуя формированию жесткого скелета материала.

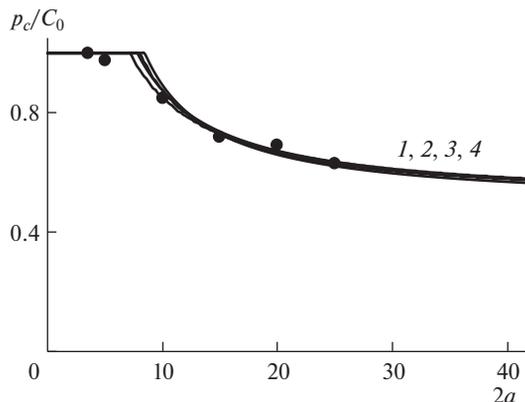
На рис. 6 представлены экспериментальные данные (точки) о критической нагрузке в момент образования трещин отрыва у отверстия в зависимости от его диаметра  $2a$  [мм] и результаты расчета критического напряжения согласно критерию ASC по формуле (3.1) при  $\beta = 0$  (кривая 1) и  $\beta = 2.5$  (кривая 2). Размер  $d_0$  составил 2.0 мм. Модифицированный критерий ASC хорошо описывает экспериментальные данные во всем исследованном диапазоне диаметров отверстий (кривая 2). Расчет по общепринятому критерию ASC, не учитывающему пластичность материала, не позволяет получить приемлемые оценки критической нагрузки (кривая 1).

Сравнительные результаты расчетов критического напряжения по критериям ASC, PSC, FCC и FFM показаны на рис. 7. Параметры материала, использованные в расчетах, приведены в табл. 3.

Строго говоря, случай вязкого разрушения выходит за рамки применимости теории критических расстояний. Тем не менее, рассмотренный выше пример показывает, что предложенный подход, расширяющий область применения TCD на квазихрупкие ма-

Таблица 3. Параметры материала (гипс 2)

Критерий	$d_0$ , мм	$\beta$	$T_s/T_0$
ASC	2.0	2.5	2.7
PSC	0.6	1.0	2.7
FCC	0.9	1.45	2.7
FFM	2.2	2.6	2.7



**Рис. 7.** Зависимость критического напряжения от диаметра отверстия для гипса 2 при одноосном сжатии. Кривые 1, 2, 3, 4 – расчет по критериям ASC, PSC, FCC и FFM.

териалы, может быть успешно применен для оценки критических напряжений и в этом случае.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что модифицированные нелокальные критерии хорошо предсказывают влияние размера выреза на разрушение хрупких материалов при различных условиях нагружения. Следует обратить внимание на то, что, хотя модифицированные критерии ASC и FFM несколько лучше описывают данные эксперимента, чем критерии PSC и FCC, отличие в расчетах по этим четырем критериям незначительно. Гораздо большее значение для расчетов имеет корректная оценка размера  $d$ , учитывающая образование неупругих деформаций. Другими словами, в рассмотренных задачах принципиальное значение имеет не вид используемого критерия разрушения, а корректное определение его параметров, прежде всего, размера зоны предразрушения.

**5. Заключение.** Область применения известных, основанных на теории критических расстояний нелокальных критериев разрушения, отличительной особенностью которых является введение дополнительного параметра материала размерности длины, характеризующего его структуру, ограничена хрупким, либо квазихрупким разрушением с малой зоной предразрушения. Для расширения области применения критериев на квазихрупкое разрушение с развитой зоной предразрушения ранее было предложено отказаться от гипотезы о размере зоны предразрушения, как о константе материала, связанной только с его структурой. Структурный параметр, лежащий в основе нелокальных критериев, должен рассматриваться в качестве константы материала только в одном частном случае – при хрупком разрушении. Для квазихрупких материалов этот параметр представляется в виде суммы двух слагаемых. Первое из них характеризует собственно структуру материала и является константой, а второе отражает образование неупругих деформаций и зависит от пластических свойств материала, геометрии образца и краевых условий. Предложенный подход использован при разработке модифицированных критериев средних напряжений, напряжений в точке, фиктивной трещины и конечной трещины. Проведена верификация разработанных критериев в задачах о разрушении квазихрупких материалов с круговым отверстием, подверженных одноосному растяжению, одноосному сжатию, а также совместному действию растягивающих и сжимающих напряжений. Показано хорошее соответствие результатов расчета критической нагрузки и экспериментальных данных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сукнев С.В. Критерий локальной прочности // Пробл. прочности. 2004. № 4. С. 108–124.
2. Wieghardt K. Über das Spalten und Zerreißen elastischer Körper // Z. Math. Phys. 1907. V. 55. № 1–2. P. 60–103.
3. Neuber H. Kerbspannungslehre, Grundlagen für eine genaue Spannungsrechnung. Berlin: Springer-Verlag, 1937. 160 p.
4. Peterson R.E. Notch sensitivity // Metal fatigue. New York: McGraw Hill, 1959. P. 293–306.
5. Новожиллов В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // ПММ. 1969. Т. 33. № 2. С. 212–222.
6. Whitney J.M., Nuismer R.J. Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations // J. Compos. Mater. 1974. V. 8. № 4. P. 253–265.
7. Kipp M.E., Sih G.C. The strain energy density failure criterion applied to notched elastic solids // Int. J. Solids Struct. 1975. V. 11. № 2. P. 153–173.
8. Wu H.-C., Chang K.-J. Angled elliptic notch problem in compression and tension // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1978. V. 45. № 2. P. 258–262.
9. Carter B.J., Lajtai E.Z., Yuan Y. Tensile fracture from circular cavities loaded in compression // Int. J. Fract. 1992. V. 57. № 3. P. 221–236.
10. Radaj D., Zhang S. Process zone fracture criteria for crack tips // Eng. Fract. Mech. 1995. V. 50. № 1. P. 111–120.
11. Seweryn A., Mroz Z. A non-local stress failure condition for structural elements under multiaxial loading // Eng. Fract. Mech. 1995. V. 51. № 6. P. 955–973.
12. Mikhailov S.E. A functional approach to non-local strength condition and fracture criteria // Eng. Fract. Mech. 1995. V. 52. № 4. P. 731–754.
13. Toribio J. A fracture criterion for high-strength steel notched bars // Eng. Fract. Mech. 1997. V. 57. № 4. P. 391–404.
14. Yosibash Z., Bussiba A., Gilad I. Failure criteria for brittle elastic materials // Int. J. Fract. 2004. V. 125. № 3–4. P. 307–333.  
<https://doi.org/10.1023/B:FRAC.0000022244.31825.3b>
15. Waddoups M.E., Eisenmann J.R., Kaminski B.E. Macroscopic fracture mechanics of advanced composite materials // J. Compos. Mater. 1971. V. 5. № 4. P. 446–454.
16. Pugno N.M., Ruoff R.S. Quantized fracture mechanics // Philos. Mag. 2004. V. 84. № 27. P. 2829–2845.  
<https://doi.org/10.1080/14786430412331280382>
17. Taylor D., Cornetti P., Pugno N. The fracture mechanics of finite crack extension // Eng. Fract. Mech. 2005. V. 72. № 7. P. 1021–1038.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2004.07.001>
18. Hebel J., Dieringer R., Becker W. Modelling brittle crack formation at geometrical and material discontinuities using a finite fracture mechanics approach // Eng. Fract. Mech. 2010. V. 77. № 18. P. 3558–3572.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.07.005>
19. Carpinteri A., Cornetti P., Sapora A. Brittle failures at rounded V-notches: a finite fracture mechanics approach // Int. J. Fract. 2011. V. 172. № 1. P. 1–8.  
<https://doi.org/10.1007/s10704-011-9640-8>
20. Weißgraeber P., Leguillon D., Becker W. A review of Finite Fracture Mechanics: crack initiation at singular and non-singular stress raisers // Arch. Appl. Mech. 2016. V. 86. № 1–2. P. 375–401.  
<https://doi.org/10.1007/s00419-015-1091-7>
21. Strobl M., Dowgiatło P., Seelig T. Analysis of Hertzian indentation fracture in the framework of finite fracture mechanics // Int. J. Fract. 2017. V. 206. № 1. P. 67–79.  
<https://doi.org/10.1007/s10704-017-0201-7>
22. Sapora A., Torabi A.R., Etesam S., Cornetti P. Finite Fracture Mechanics crack initiation from a circular hole // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 2018. V. 41. № 7. P. 1627–1636.  
<https://doi.org/10.1111/ffe.12801>
23. Taylor D. The theory of critical distances: a new perspective in fracture mechanics. Oxford: Elsevier, 2007. 284 p.

24. *Li W., Susmel L., Askes H., Liao F., Zhou T.* Assessing the integrity of steel structural components with stress raisers using the Theory of Critical Distances // *Eng. Fail. Anal.* 2016. V. 70. P. 73–89. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2016.07.007>
25. *Fuentes J.D., Cicero S., Procopio I.* Some default values to estimate the critical distance and their effect on structural integrity assessments // *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2017. V. 90. P. 204–212. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2017.04.015>
26. *Taylor D.* The Theory of Critical Distances: A link to micromechanisms // *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2017. V. 90. P. 228–233. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2017.05.018>
27. *Vedernikova A., Kostina A., Plekhov O., Bragov A.* On the use of the critical distance concept to estimate tensile strength of notched components under dynamic loading and physical explanation theory // *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2019. V. 103. P. 102280. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2019.102280>
28. *Justo J., Castro J., Cicero S.* Notch effect and fracture load predictions of rock beams at different temperatures using the Theory of Critical Distances // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* 2020. V. 125. P. 104161. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2019.104161>
29. *Pipes R.B., Wetherhold R.C., Gillespie J.W. (Jr.)* Notched strength of composite materials // *J. Compos. Mater.* 1979. V. 13. P. 148–160.
30. *Tan S.C.* Laminated composites containing an elliptical opening. II. Experiment and model modification // *J. Compos. Mater.* 1987. V. 21. № 10. P. 949–968.
31. *Сукнев С.В.* Нелокальные и градиентные критерии разрушения квазихрупких материалов при сжатии // *Физ. мезомех.* 2018. Т. 21. № 4. С. 22–32. <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2018-14003>
32. *Сукнев С.В.* Разрушение квазихрупкого геоматериала с круговым отверстием при неравномерно распределенном сжатии // *ПМТФ.* 2019. Т. 60. № 6. С. 162–172. <https://doi.org/10.15372/PMTF20190617>
33. *Suknev S.V.* Extending the theory of critical distances to quasi-brittle fracture // *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2021. V. 114. P. 102996. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2021.102996>
34. *Сукнев С.В.* Применение нелокальных и градиентных критериев для оценки разрушения геоматериалов в зонах концентрации растягивающих напряжений // *Физ. мезомех.* 2011. Т. 14. № 2. С. 67–75.
35. *Сукнев С.В.* Применение подхода механики конечных трещин для оценки разрушения квазихрупкого материала с круговым отверстием // *Изв. РАН. МТТ.* 2021. № 3. С. 13–25. <https://doi.org/10.31857/S0572329921020161>
36. *Сукнев С.В.* Разрушение хрупкого геоматериала с круговым отверстием при двухосном нагружении // *ПМТФ.* 2015. Т. 56. № 6. С. 166–172. <https://doi.org/10.15372/PMTF20150618>
37. *Сукнев С.В.* Образование трещин отрыва в зонах концентрации растягивающих напряжений в гипсе // *ФТПРПИ.* 2008. № 1. С. 47–55.

УДК 536.2,537.31,539.3

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО  
СОСТОЯНИЯ ПОЛИМЕРНОГО КОМПОЗИТА  
В ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА**

© 2023 г. П. А. Люкшин<sup>a,\*</sup>, Б. А. Люкшин<sup>a,b,c,\*\*</sup>,  
С. В. Панин<sup>a,d,\*\*\*</sup>, С. А. Бочкарева<sup>a,b,\*\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск, Россия

<sup>b</sup>Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, г. Томск, Россия

<sup>c</sup>Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия

<sup>d</sup>Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск, Россия

\*e-mail: petrjuk@ispms.tsc.ru

\*\*e-mail: lba2008@yandex.ru

\*\*\*e-mail: svp@ispms.tsc.ru

\*\*\*\*e-mail: bochkarevas@ispms.ru

Поступила в редакцию 27.04.2022 г.

После доработки 03.06.2022 г.

Принята к публикации 20.06.2022 г.

В электропроводящих композитах, помещенных в электрическое поле, происходит выделение тепла и формируются неоднородные температурные поля. Это, в свою очередь, индуцирует деформации и напряжения в таких композитах. В работе решается последовательность несвязанных краевых задач: электропроводности в поле постоянного электрического тока, теплопроводности, термоупругости. Показано, что при протекании электрического тока в медно-графитовом и наполненном порошком меди полимерном композите возникают перемещения, деформации и напряжения даже в том случае, когда компоненты композита не обладают пьезоэффектом.

*Ключевые слова:* композит с полимерной матрицей, теплопроводность, электропроводность, термоупругость, теплофизические свойства, графит, метод конечных элементов, численное моделирование

DOI: 10.31857/S0572329922600232, EDN: KLQDXU

**1. Введение.** Полимерные композиционные материалы (ПКМ) получают все более широкое распространение при решении практических задач. Это обусловлено как расширением номенклатуры ПКМ, так и возможностью придания им уникальных функциональных свойств. Используются разнообразные по составу, размеру и свойствам наполнители, описания и рекомендации по применению которых достаточно широко представлены на страницах научной и справочной литературы [1, 2]. Полимерные матрицы в силу своего строения не обладают свойством электропроводности, и традиционно применяются в качестве электрических изоляторов. Однако контролируемое введение в их состав токопроводящих включений, в том числе наноапполнителей, способно превратить их в композиты, обладающие рядом ценных физических и функциональных свойств.

Одним из наиболее популярных наноапполнителей для придания полимерным матрицам свойства электропроводности являются углеродные нанотрубки (УНТ).

Так, в работе [3] анализирован ряд полимерных нанокомпозитов, формируемых различными технологическими методами. Вводились привитые к полимеру и чистые УНТ, а в качестве матрицы использовались латекс и полистирол. Оценивались как электрические, так и механические свойства нанокомпозитов. Показано, что одинаковые параметры микроструктуры не обязательно обеспечивают идентичные механические и электрофизические свойства композитов.

Функциональным наполнителем является, например, порошок алюминия, который в работе [4] добавляли в акрило-нитрильную бутадиеновую резину. Подобное наполнение сопровождалось снижением предела текучести и удлинения при разрыве. Показано существование известного перколяционного перехода (порога). Обсуждается известный механизм проводимости Пула–Френкеля (Poole–Frenkel conduction mechanism) – перенос электронов с помощью ловушек в электрическом изоляторе), преобладающий при комнатной температуре. Использование модели С. Цангариса (S. Tsangaris) позволило получить хорошее согласие между рассчитанными и экспериментально измеренными значениями диэлектрической постоянной.

Однако, помимо придания полимерам электропроводности как таковой, возникает вопрос, как возникающее электрическое поле влияет на формирование механических напряжений. Обычно проявление механических эффектов в поле электрического тока наблюдается в пьезоматериалах. Однако эта задача актуальна, в частности, и в приложении к твердотельным полимерным электролитам, а именно литий-ионным твердотельным аккумуляторам [5]. В цитируемой работе с помощью конечно-элементного анализа показано, что в силу связности развивающихся при разряде процессов формируются неоднородные профили концентрации ионов, обуславливающие появление напряжений и деформаций, которые могут приводить к механическому разрушению полимера и выходу батарей из строя.

В другой работе на эту тему [6] показано, что низкая электрическая эффективность трехмерных твердотельных литий-ионных батарей обусловлена не только их неоднородной 3D-структурой, но и низкой ионной проводимостью электролита, а также интенсивностью диффузии на катоде. Это приводило к крайне неоднородному распределению плотности тока и неэффективному использованию катода.

Помимо “батарейных” приложений вопросы взаимосвязи механических и электрических полей изучали в приложении к электропроводящим полимерным покрытиям [7]. При этом анализировали взаимосвязь микроструктуры и деформационного отклика. Исследованы процессы, индуцированные термомеханическим нагружением, с позиции их влияния на развитие вязко-хрупкого перехода, а также растрескивание покрытия в областях наиболее крупных дефектов макромолекул.

Интерес к электропроводящим полимерам вызван не только возможностью обеспечения “настраиваемых” электрических свойств, но и простотой синтеза и изготовления, а также устойчивостью ко многим факторам окружающей среды [8]. В цитируемом обзоре рассмотрены модели транспорта электрического тока, объясняющие механизм проводимости, а также достигаемые физические свойства, включая оптические и механические.

В развитии аспектов накопителей энергии (energy storage) в работе [9] рассмотрены аспекты создания проводящих полимеров, обладающих требуемыми упругими свойствами, а также способностью к генерации/запасанию энергии. На примере эластичного проводящего полимера поли(3,4-этилендиокситиофен) показана возможность его применения для создания деформируемых органических термоэлектрических модулей. Данную тему продолжает работа [10], в которой исследованы характеристики токопроводящих полимеров с позиции механических (деформация, скорость деформации, напряжения, силы, модуль упругости) и электрических (емкость) свойств. Указанные параметры анализируются с позиции (электрофизической) активации полимера, а также оптимизации условий его синтеза.

Таблица 1. Свойства материалов

Свойства	Поли(3,4-этилендиокситиофен)	Графит измельченный	Медный порошок
Модуль упругости $E$ , Па	$1.0 \times 10^9$	$5.8 \times 10^9$	$1.23 \times 10^{11}$
Коэффициент Пуассона $\nu$	0.35	0.25	0.3
Коэффициент линейного расширения $\alpha$ , $K^{-1}$	$11.0 \times 10^{-5}$	$6.0 \times 10^{-6}$	$16.5 \times 10^{-6}$
Удельная теплоемкость $C$ , Дж/(кг · К)	2300	750	380
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1333	1750	8900
Коэффициент теплопроводности $K$ , Вт/(м · К)	0.4	1.2	385
Удельная электрическая проводимость, $Om^{-1} \cdot m^{-1}$	800	$1.25 \times 10^6$	$5.9 \times 10^7$

В работе [11] проведен обзор моделей электропроводности проводящих полимеров и полимерных композитов как потенциальных материалов для изготовления полимерных электролитических мембран для топливных ячеек. Показано, что путем управления ориентацией наполнителя в токопроводящих полимерных композитах можно одновременно повысить их механические свойства и электропроводность.

Еще одним перспективным направлением использования токопроводящих полимеров являются актуаторы [12]. Для придания данного функционального свойства необходимо формировать проводящую взаимопроникающую полимерную сеть. С этой целью формировали сеть из полиэтилоксида и полибутадиена, в которую был диспергирован проводящий полимер поли(3,4-этилендиокситиофен). Исследования его свойств проведены с помощью динамического механического анализа (ДМА).

Таким образом, создание токопроводящих полимеров имеет некоторую практику и несомненную перспективу. Традиционно реакция на электрическое поле в виде появления напряжений и деформаций связывается с пьезоэлектрическими свойствами материала [13–16]. Электропроводность композита порождает ряд эффектов в виде выделения тепла и появления неоднородных температурных полей, что, в свою очередь, вызывает наличие деформаций и напряжений в структурно неоднородном материале, не связанных с пьезоэффектами. По этой причине исследование поведения армированных/наполненных пластиков в электрических полях представляет научный и практический интерес.

Для изучения этой проблемы в настоящей работе решается последовательность несвязанных краевых задач электропроводности, теплопроводности, термоупругости для структурно-неоднородного тела. В результате определяется напряженно-деформированное состояние в композитах, по которым протекает постоянный электрический ток. Задачи решались применительно к наполненному полимерному композиту “поли(3,4-этилендиокситиофен) – медный порошок” и композиту медь–графит. В расчете использовались свойства для измельченного графита.

Свойства материалов, используемые для расчета свойств композитов, приведены в табл. 1.

**2. Решение задачи электропроводности для композита.** Электрическое поле постоянного тока в ячейке композиционного материала (КМ) описывается следующими уравнениями [17, 18]:

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0, \quad \bar{\delta} = \sigma \cdot \bar{E}, \quad \operatorname{div} \bar{\delta} = 0 \quad (2.1)$$

где  $\bar{\delta}$  – плотность тока,  $\bar{\sigma}$  – удельная электрическая проводимость,  $\bar{E}$  – напряженность электрического поля.

Введем новую переменную  $\varphi$  – потенциал электрического поля. Напряженность электрического поля связана с потенциалом следующим соотношением:

$$\bar{E} = -\text{grad}\varphi$$

Подставляя ее в (2.1), получим уравнение Лапласа:

$$\text{div}(-\sigma \cdot \text{grad}\varphi) = 0 \tag{2.2}$$

Для определения потенциала электрического поля постоянного тока в рассматриваемой области ABCD (рис. 1, а) необходимо решить уравнение Лапласа (2.2) с граничными условиями, например, Неймана и Дирихле  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right|_{AD} &= 0, & \left. \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right|_{BC} &= 0 \\ \varphi|_{AB} &= -0.01, & \varphi|_{DC} &= 0.01 \end{aligned}$$

Электрический потенциал на границах АВ и DC принимался равным 0.01 В. Для электрического потенциала  $\varphi$  на границе двух сред (матрицы и включений) с различными проводимостями  $\sigma_1, \sigma_2$  выполняются условия равенства потенциалов и нормальных компонент плотности тока [17, 18]

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \sigma_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$$

Решение уравнения Лапласа (2.2) эквивалентно отысканию минимума функционала  $\chi$  [19]

$$\chi = \int_V \frac{1}{2} \left[ \sigma \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \sigma \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dV$$

Минимизация функционала позволяет получить систему алгебраических уравнений

$$\frac{\partial\chi}{\partial\varphi_i} = \sum_{e=1}^n [k^{(e)}] \{\varphi\} = 0$$

или

$$[K] \{\varphi\} = \{F\} \tag{2.3}$$

где  $[K] = \sum_{e=1}^n [k^{(e)}]$  – глобальная матрица электропроводности (аналог матрицы жесткости в задачах механики),

$[k^{(e)}]$  – матрица “жесткости” одного элемента,

$\{\varphi\}$  – вектор неизвестных значений потенциала,

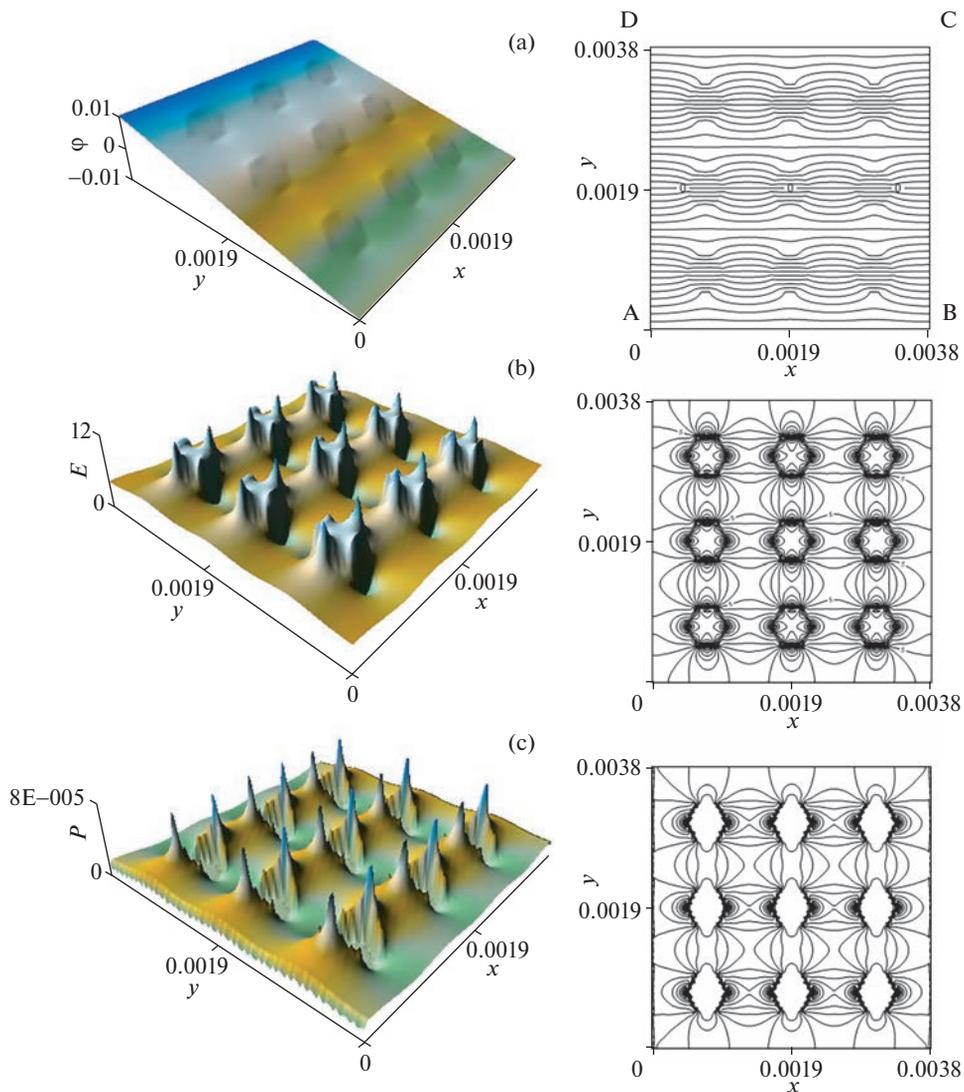
$\{F\}$  – вектор “нагрузки” в задаче электропроводности.

Система алгебраических уравнений (2.3) решается методом Гаусса [20].

Матрица “жесткости” конечного элемента в задачах электропроводности по форме совпадает с матрицей “жесткости” в задачах электростатики и теплопроводности

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \cdot [B^{(e)}] dV \tag{2.4}$$

Матрица  $[D^{(e)}]$ , входящая в (2.4), характеризует физические свойства элемента, в случае задачи электропроводности равна



**Рис. 1.** Поверхности и изолинии для композита “медь–графит” в плоскости  $xy$  (м): (а) – скалярный электрический потенциал ( $\varphi$ , в); (б) – напряженность электрического поля ( $E$ , в/м); (с) – мощность тепловых потерь электрического поля постоянного тока ( $P$ , Вт).

$$[D^{(e)}] = \begin{bmatrix} \sigma_e & 0 \\ 0 & \sigma_e \end{bmatrix}$$

Матрица  $[B^{(e)}]$  (содержащая производные от функции формы), входящая в (2.4), может быть записана как:

$$[B^{(e)}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}$$

где  $A$  – площадь одного конечного элемента,

$$b_i = y_j - y_k, \quad c_i = x_k - x_j.$$

Коэффициенты  $b_j, b_k, c_j, c_k$  получаются круговой перестановкой индексов.

Мощность тепловых потерь в проводнике объемом  $V$  вычисляется по интегральной формуле Джоуля–Ленца [18]

$$P = \int_V \sigma E^2 dV$$

где  $\sigma$  – удельная электрическая проводимость,  $E$  – напряженность электрического поля,  $V$  – объем.

На рис. 1, 2 приведены результаты решения задачи электропроводности для композитов “медь–графит” и “поли(3,4-этилендиокситиофен) – медный порошок”.

Следует отметить, что в случае композита “медь–графит” проводимость матрицы на порядок превышает проводимость включений, в случае композита “поли(3,4-этилендиокситиофен) – медный порошок” проводимость матрицы меньше проводимости включений на 4 порядка. Поэтому интегральная мощность тепловых потерь в ячейке композита “медь–графит” равна  $P_{ABCD} = 0.563$  Вт (рис. 1, с), а в композите “поли (3,4-этилендиокситиофен) – медный порошок”  $P_{ABCD} = 0.143 \times 10^{-4}$  Вт (рис. 2, с), т.е. различие составляет 4 порядка. На рис. 1, б и 2, б в разных композитах напряженность практически одинакова, но по изолиниям видно, что детальное распределение напряженности по ячейке отличается, в связи с разным соотношением проводимостей матрицы и включений. По этой же причине отличаются и изолинии электрического потенциала разных композитов (рис. 1, а и 2, а).

Далее предполагается, что вся мощность тепловых потерь, которая выделяется при прохождении электрического тока в композите, расходуется на повышение температуры. Для вычисления поля температуры в композите, обусловленной нагревом вследствие прохождения электрического тока, решается нестационарная задача теплопроводности.

**3. Решение краевой задачи теплопроводности для композита.** Уравнение теплопроводности для двумерного случая имеет вид [19, 20]:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \kappa \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$\lambda = c \cdot \rho$$

где  $\lambda$  – параметр материала,  $c$  – удельная теплоемкость материала,  $\rho$  – плотность,  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности.

На краях АВ и DC задавалась температура (условия Дирихле)

$$T|_{AB} = 24.0; \quad T|_{DC} = 24.0$$

На краях AD и BC задавались условия симметрии (условия Неймана)

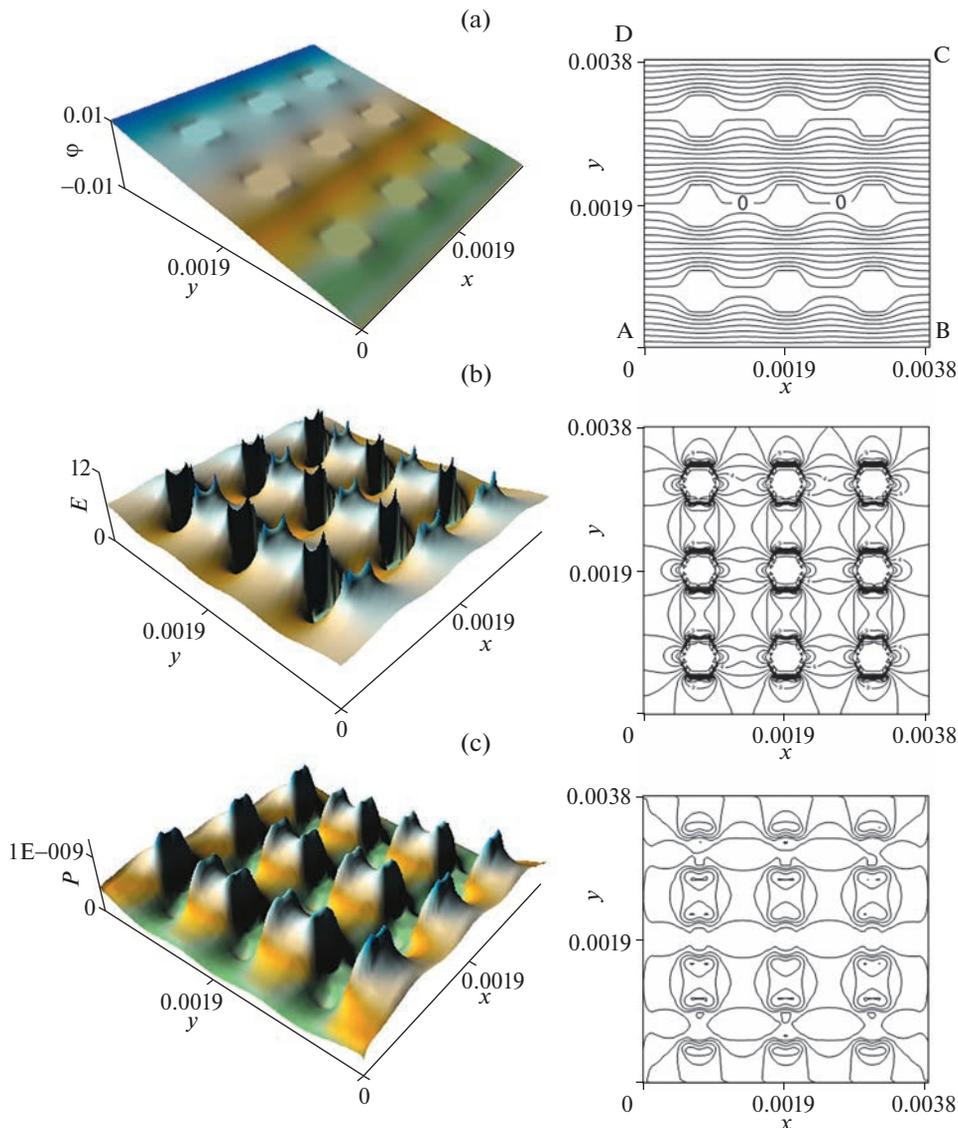
$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{AD} = 0; \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{BC} = 0$$

Начальная температура в расчетной области ABCD равна нулю,  $T|_{t=0} = 0$ .

На границе двух фаз с различными теплофизическими характеристиками выполняются условия идеального контакта: равенство температур и тепловых потоков [19]:

$$T_1 = T_2, \quad K_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = K_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}$$

Решение нестационарной двумерной задачи теплопроводности эквивалентно минимизации функционала

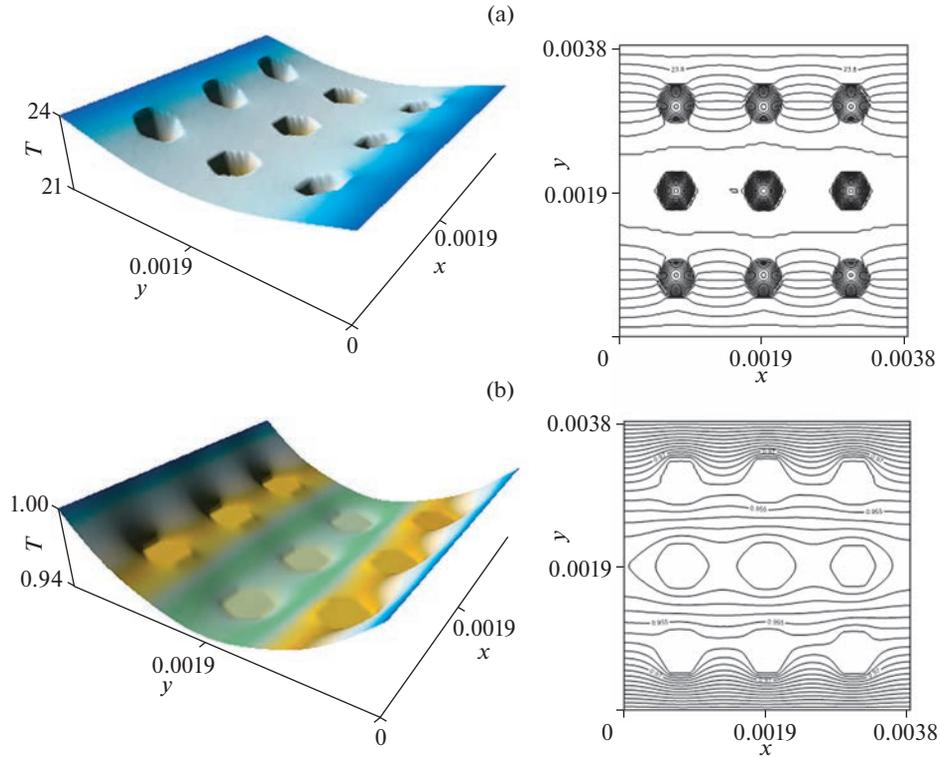


**Рис. 2.** Поверхности и изолинии для композита “поли(3,4-этилендиокситиофен)–медный порошок” в плоскости  $xu$  (м): (а) – скалярный электрический потенциал ( $\varphi$ , в); (б) – напряженность электрического поля ( $E$ , в/м); (с) – мощность тепловых потерь электрического поля постоянного тока ( $P$ , Вт).

$$\chi = \int_V \frac{1}{2} \left[ K \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + K \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + 2\lambda \frac{\partial T}{\partial t} T \right] dV$$

На рис. 3 приведены результаты решения нестационарной задачи теплопроводности в композитах “медь–графит” и “поли(3,4-этилендиокситиофен)–медный порошок”.

Ячейке композита “медь–графит” сообщено количество теплоты  $\Delta Q = 0.034$  Дж, соответствующее полученной выше мощности тепловых потерь при прохождении



**Рис. 3.** Поверхности и изолинии распределения температуры ( $T$ , °С) в композитах в плоскости  $xу$  (м): а) “медь–графит”; б) “поли(3,4-этилендиокситиофен)–медный порошок”.

электрического тока  $P = 0.562$  Вт за время  $\Delta t = 0.06$  с (рис. 3, а), а композиту “поли(3,4-этилендиокситиофен) – медный порошок” сообщено количество теплоты  $\Delta Q = 0.00136$  Дж за время  $\Delta t = 96$  с (рис. 3, б).

Температура в композите “медь–графит” при прохождении электрического тока повышается до 24°С за 0.06 секунды, а температура в композите “поли(3,4-этилендиокситиофен) – медный порошок” повышается на 1°С за 96 секунд.

В композите “медь–графит” коэффициент теплопроводности включений графита на два порядка меньше проводимости матрицы (медь), а в полимерном композите “поли(3,4-этилендиокситиофен)–медный порошок” теплопроводность включений выше на 3 порядка. Вследствие большей проводимости матрицы температура при прохождении электрического тока в композите “медь–графит” повышается на порядок больше, чем в композите с полимерной матрицей “поли(3,4-этилендиокситиофен)–медный порошок”.

**4. Решение задачи термоупругости для структурно-неоднородного тела.** Для расчета напряженно-деформированного состояния композита при изменении поля температуры используется метод конечных элементов [21, 22]. Для этого записывается функционал энергии упругого тела при наличии в нем начальных деформаций  $\epsilon_0$ . Из условия минимума функционала энергии  $\Pi$  [19]

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}} = 0$$

получается система линейных алгебраических уравнений

$$[K]\{U\} = \{F\}$$

где  $\{U\}$  – вектор перемещений,  $[K]$  – глобальная матрица жесткости механической системы,  $\{F\}$  – вектор нагрузок.

Глобальная матрица жесткости сетки конечных элементов равна сумме матриц жесткости отдельных элементов:

$$[K] = \sum_{e=1}^n [k^{(e)}]$$

а матрица жесткости отдельного элемента записывается в следующем виде [19]:

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \cdot [B^{(e)}] dV$$

Матрица упругих характеристик  $[D]$  для изотропного материала равна:

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{11} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

В предыдущем выражении величины  $d_{11}, d_{12}$  равны, соответственно:

$$d_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad d_{12} = \frac{E\nu}{1 - \nu^2}, \quad d_{33} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

где  $E$  – модуль упругости,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Глобальный вектор сил  $\{F\}$  равен сумме векторов сил отдельных элементов  $\{f^{(e)}\}$

$$\{F\} = \sum_e^n \{f^{(e)}\}$$

где вектор сил одного конечного элемента при наличии начальных деформаций  $\epsilon_0$  запишется следующим образом:

$$\{f^{(e)}\} = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \cdot \{\epsilon_0\} dV$$

Вектор температурной деформации в случае плоского напряженного состояния равен

$$\{\epsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix}$$

где  $\Delta T$  – изменение температуры,

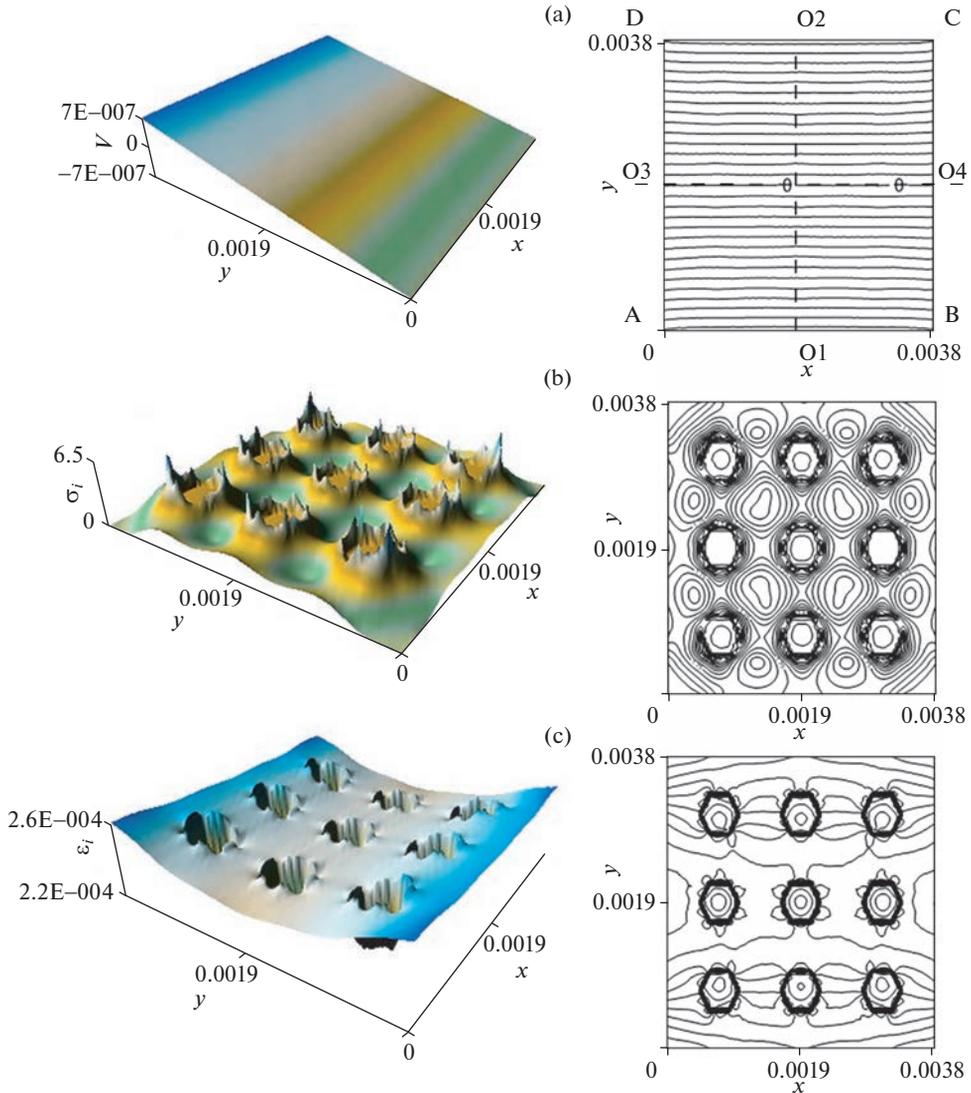
$\alpha$  – коэффициент линейного теплового расширения.

Закон Гука запишется в виде

$$\{\sigma\} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\})$$

На границах двух фаз выполняются условия идеального контакта, а именно равенство векторов перемещений и нормальных напряжений.

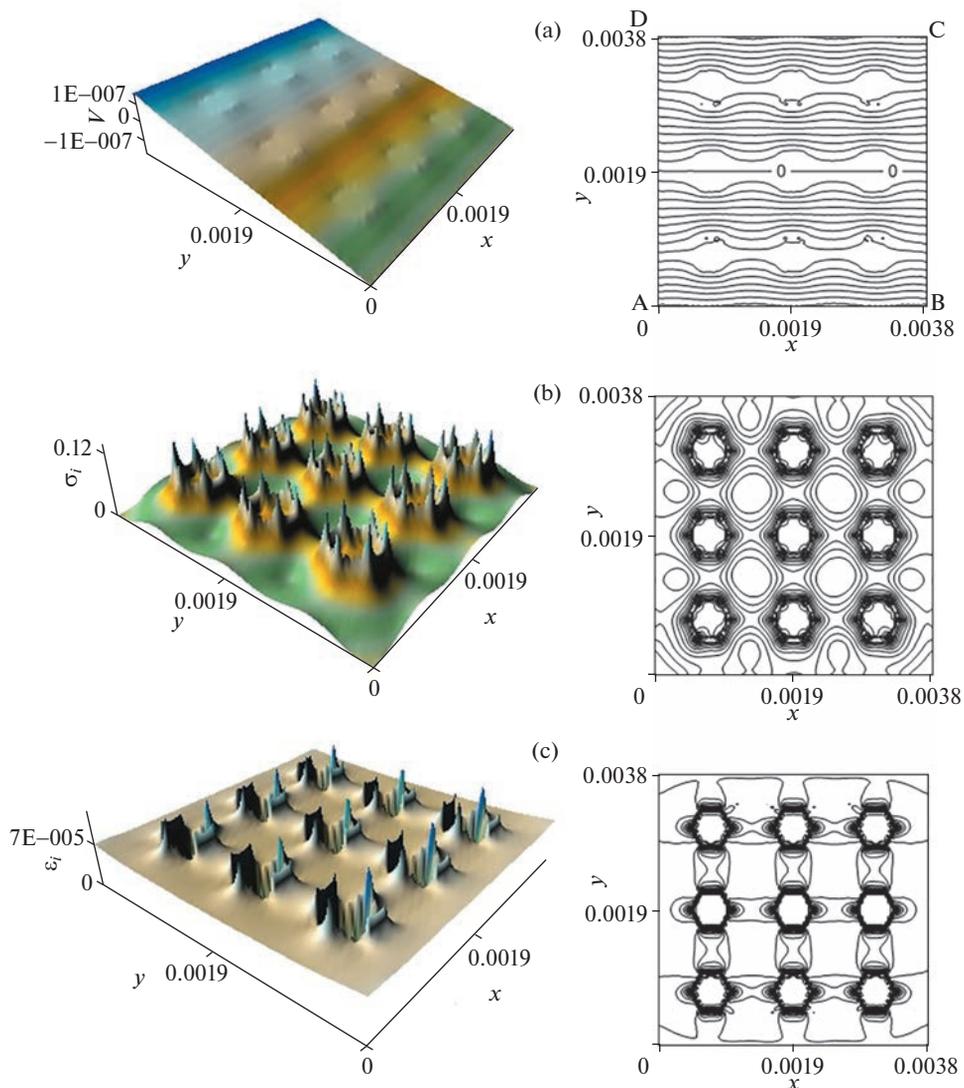
Граничные условия при решении задачи термоупругости следующие (см. рис. 4, а): на линии  $O_3O_4$  перемещение вдоль оси  $y$  равно нулю, на линии  $O_1O_2$  перемещение вдоль оси  $x$  равно нулю. Кромки расчетной области ABCD свободны от напряжений.



**Рис. 4.** Поверхности и изолинии в ячейке композита “медь–графит”: (а) – перемещения вдоль оси  $y$  ( $V$ , м); (б) – интенсивность напряжений ( $\sigma_i$ , МПа) в плоскости  $xu$  (м), (с) – интенсивность деформаций ( $\epsilon_i$ ).

На рис. 4, 5 приведены результаты решения задачи термоупругости для композита “медь–графит” и композита “поли(3,4-этилендиокситиофен)–медный порошок” при температурном поле приведенном на рис. 3.

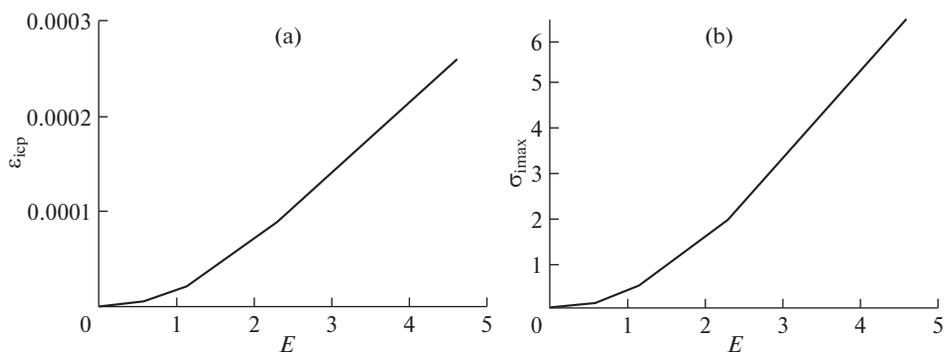
На рис. 4, а поле перемещений для композита “медь–графит” однородно, в отличие от поля перемещений для композита “поли(3,4-этилендиокситиофен)–медный порошок” (рис. 5, а), вследствие небольшого отличия в коэффициентах температурного расширения матрицы и включений. Из рис. 4, б и 5, б видно, что интенсивность напряжений в композите “медь–графит” превышает интенсивность напряжений в композите “поли(3,4-этилендиокситиофен)–медный порошок” примерно в 50 раз.



**Рис. 5.** Поверхности и изолинии в ячейке композита “поли(3,4-этилендиокситиофен)–медный порошок”: (a) – перемещения вдоль оси  $y$  ( $u$ , м); (b) – интенсивность напряжений ( $\sigma_y$ , МПа), (c) – интенсивность деформаций ( $\epsilon_y$ ).

Результаты параметрических исследований влияния напряженности электрического поля на интенсивность деформаций и интенсивность напряжений в композите “медь–графит” приведены на рис. 6.

При изменении напряженности поля в 10 раз, с 0.46 до 4.6 В/м, интенсивность деформаций в композите “медь–графит” изменяется от  $4.3 \times 10^{-6}$  до  $2.6 \times 10^{-4}$ , интенсивность напряжений изменяется от 0.1 до 6.5 МПа, т.е. примерно в 60 раз. В проводнике количество теплоты определяется законом Джоуля–Ленца, в соответствии с которым это количество пропорционально квадрату протекающего тока, а сила тока



**Рис. 6.** Зависимости средней интенсивности деформаций ( $\epsilon_{\text{ср}}$ ) (а) и максимальной интенсивности напряжений ( $\sigma_{\text{imax}}$ , МПа) (б) в композите “медь–графит” от напряженности электрического поля постоянного тока ( $E$ , В/м<sup>5</sup>).

определяется напряженностью электрического поля. При увеличении напряженности в 10 раз количество выделяемого тепла увеличивается в 100 раз, что объясняет нелинейность связи между параметрами напряженно-деформированного состояния и напряженностью электрического поля.

**5. Заключение.** Развитый подход, заключающийся в последовательном решении задач электропроводности, теплопроводности и термоупругости, позволяет определить поля электрического потенциала и напряженности, поле температуры, поля перемещений, деформаций и напряжений в композитах при протекании через них постоянного электрического тока. Учет в явном виде включений (их свойств, размеров, формы) позволяет оценить их влияние на параметры напряженно-деформированное состояние композита при прохождении через него электрического тока.

Анализ композитов двух видов с разными электрофизическими характеристиками фаз показывает, что значения напряжений и деформаций много выше в случае, когда обе фазы материала – матрица и включения – обладают проводимостью, т.е. не являются электроизоляторами. Это объясняется увеличением силы тока в этом случае и количеством выделенного тепла.

Показано, что если компоненты композита не обладают пьезоэффектом, то вследствие нагрева при протекании электрического тока в таком неоднородном материале с различными теплофизическими свойствами фаз возникают поля перемещений, деформаций и напряжений. В то же время, в пьезоматериалах, испытывающих воздействие электрического поля, возникают напряжения и деформации, не связанные с выделением тепла.

Показано, что параметры напряженно-деформированного состояния внутри композита растут быстрее, с увеличением напряженности электрического поля, т.е. для рассмотренных композитов эта связь является нелинейной.

Предложенная методика позволяет вычислить численные значения напряжений в композите при протекании через него электрического тока, и, при использовании соответствующего критерия прочности, оценить, насколько напряженное состояние композита близко к предельному (разрушению).

Моделирование композита при прохождении электрического тока позволяет вычислить параметры напряженно-деформированного состояния композита и оценить возможность потери прочности композита в результате электрического разогрева. Если в качественном плане можно определить характер влияния обсуждаемых факторов

на параметры НДС в композите, то предложенный и реализованный в работе подход позволяет сделать количественные оценки.

**Благодарности.** The work was performed according to the government research assignment for ISPMS SB RAS, project FWRW-2021-0010.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Skelhorn D.* Particulate fillers in elastomers. In: *Rothon RN* (ed) Particulate-filled polymer composites. 2nd ed. Shrewsbury, UK: Rapra Tec. Lim., 2003. 324 p.
2. *Hohenberger W.* Fillers and reinforcements/coupling agents // *Plastics Additives Handbook*. 5th ed. Ed. by *H. Zweifel, R. D. Maier, M. Schiller*. Munich: Carl Hanser Verlag, 2001. P. 919–966.
3. *Masenelli-Varlot K., Chazeau L., Gauthier C., Bogner A., Cavallé J.Y.* The relationship between the electrical and mechanical properties of polymer–nanotube nanocomposites and their microstructure // *Compos. Sci. Technol.* 2009. V. 69. P. 1533–1539.  
<https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2009.01.035>
4. *Hassan H.H., Nasr G.M. and El-Waily M.A.* Electrical and mechanical properties of aluminum-loaded NBR composites // *J. Elastomers Plastics*. 2013. V. 45. P. 121–141.  
<https://doi.org/10.1177/0095244312462160>
5. *Grazioli D., Zadin V., Brandell D., Simone A.* Electrochemical-mechanical modeling of solid polymer electrolytes: Stress development and non-uniform electric current density in trench geometry microbatteries // *Electrochimica Acta*. 2019. V. 296. P. 1142–1162.  
<https://doi.org/10.1016/j.electacta.2018.07.146>
6. *Talin A.A., Ruzmetov D., Kolmakov A., McKelvey K., Ware N., Gabaly F. El, Dunn B., White H.S.* Fabrication, testing, and simulation of all-solid-state three-dimensional Li-Ion batteries // *ACS Appl. Mater. Interfaces*. 2016. V. 8. P. 32385–32391.  
<https://doi.org/10.1021/acsami.6b12244>
7. *Wang X.-S., Tang H.-P., Li X.-D., Hua X.* Investigations on the mechanical properties of conducting polymer coating-substrate structures and their influencing factors. Review // *Int. J. Mol. Sci.* 2009. V. 10. P. 5257–5284.  
<https://doi.org/10.3390/ijms10125257>
8. *Namsheer K., Rout C.S.* Conducting polymers: a comprehensive review on recent advances in synthesis, properties and applications // *RSC Adv.* 2021. V. 11. P. 5659–5697.  
<https://doi.org/10.1039/d0ra07800j>
9. *Kim N., Lienemann S., Petsagkourakis I., Mengistie D.A., Kee S., Ederth T., Gueskine V., Leclère P., Lazzaroni R., Crispin X., Tybrandt K.* Elastic conducting polymer composites in thermoelectric modules // *Nat. Commun.* 2020. V. 11 (1). № 1424. P. 1–10.  
<https://doi.org/10.1038/s41467-020-15135-w>
10. *Melling D., Jager E.W.H.* Conducting polymers as EAPs: characterization methods and metrics // *Electromechanically Active Polymers. Polymers and Polymeric. Composites: A Reference Series*. Springer, 2016. P. 319–351.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-319-31530-0\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-319-31530-0_14)
11. *Mohd Radzuan N.A., Sulong A.B., Sahari J.* A review of high-temperature proton exchange membrane fuel cell (HT-PEMFC) system // *Int. J. Hydrogen Energy*. 2017. V. 42 (14). № 6. P. 9262–9273.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2016.03.045>
12. *Plesse C., Vidal F., Randriamahazaka H., Teyssié D., Chevrot C.* Synthesis and characterization of conducting interpenetrating polymer networks for new actuators // *Polymer*. 2005. V. 46. P. 7771–7778.  
<https://doi.org/10.1016/j.polymer.2005.03.103>
13. *Fu P., Liu H., Chu X.* An efficient multiscale computational formulation for geometric nonlinear analysis of heterogeneous piezoelectric composite // *Compos. Struct.* 2017. 167. P. 191–206.  
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.02.005>
14. *Yaghmaie R., Ghosh S.* Computational modeling of finite deformation piezoelectric material behavior coupling transient electrical and mechanical fields // *J. Computat. Phys.* 2018. V. 373. P. 148–170.  
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.06.070>

15. Koh S.J.A., Zhou T., Li J., Zhao X., Hong W., Zhu J., Suo Z. Mechanisms of large actuation strain in dielectric elastomers // *J. Polym. Sci. Part B. Polym. Phys.* 2011. V. 49. P. 504–515.
16. Mota A., Zimmerman J.A. A variational, finite-deformation constitutive model for piezoelectric materials // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2011. V. 85 (6). P. 752–767.
17. Атабеков Г.И., Купалян С.Д., Тимофеев А.Б. и др. Теоретические основы электротехники: Учебник для студентов вузов. В 3-х частях. М.: Энергия, 1979. Ч. 2, 3. 432 с.
18. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Л.: Энергия, 1975. Т. 2. 407 с.
19. Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Справочная книга. Л.: Энергия, 1974. 246 с.
20. Segerlind L. *Applied Finite Element Analysis*. N.Y.: John Wiley & Sons, 1976. = Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
21. Neto E.A.S., Peri'c D., Owen D.R.J. *Computational methods for plasticity theory and applications*. John Wiley & Sons Ltd., 2008. 816 p.
22. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, 7th Ed. Butterworth-Heinemann, 2013. 752 p.
23. Гришаева Н.Ю., Люкшин П.А., Люкшин Б.А., Панин С.В., Бочкарева С.А., Реутов Ю.А., Матольгина Н.Ю. Модификация теплофизических характеристик полимеров введением микронаполнителей // *Мех. композиц. матер. констр.* 2016. Т. 22. № 3. С. 342–361.
24. Bochkareva S.A., Grishaeva N.Yu., Lyukshin B.A., Lyukshin P.A., Matolygina N.Yu., Panin S.V., Reutov Yu.A. A unified approach to determining the effective physicommechanical characteristics of filled polymer composites based on variational principles // *Mech. Compos. Mater.* 2019. V. 54. № 6. P. 775–788.  
<https://doi.org/10.1007/s11029-019-9782-8>

УДК 531.36

## ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ РАВНОВЕСИЯ ТЯЖЕЛОЙ ТОЧКИ НА РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

© 2023 г. А. А. Буров<sup>а,\*</sup>, В. И. Никонов<sup>а,\*\*</sup>

<sup>а</sup>Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук,  
Москва, Россия

\*e-mail: [jtm@narod.ru](mailto:jtm@narod.ru)

\*\*e-mail: [nikon\\_v@list.ru](mailto:nikon_v@list.ru)

Поступила в редакцию 15.11.2021 г.

После доработки 07.03.2022 г.

Принята к публикации 27.03.2022 г.

Рассматривается задача о движении тяжелой точки по наклонной плоскости, совершающей равномерное вращение вокруг вертикали. Определяется область, заполненная неизолированными относительными равновесиями, изучается ее зависимость от параметров задачи – угловой скорости, угла наклона плоскости и угла трения. Обсуждается устойчивость изучаемых относительных равновесий.

*Ключевые слова:* относительные равновесия, сухое трение

DOI: 10.31857/S0572329922600499, EDN: KLYUNT

**Введение.** При движении точки по подвижным кривым и поверхностям зачастую решающую роль играет сила сухого трения. В частности, известно (см., например, [1–11]), что при таком трении относительные равновесия занимают целые области на поверхности, зависящие от поля внешних сил, геометрии поверхности тела, величины коэффициента трения, а также величины и направления вектора угловой скорости.

Классическая задача о соскальзывании материальной точки по наклонной шероховатой плоскости рассмотрена в [12–14]. Критический случай, когда угол наклона плоскости к горизонту равен углу трения, рассмотрен в [15], где выполнено точное интегрирование уравнений движения (см. также монографию [16]).

Кроме того, в [15, 16] также исследована задача о движении материальной точки на вращающейся шероховатой плоскости. С помощью теоретико-групповых методов найдены классы точных решений. Показано, что для движущейся без остановки точки предельными движениями являются движения по логарифмическим спиральям. Также показано, что такие движения являются предельными для всех движений, уходящих на бесконечность. В рамках этой же задачи в [17] построены асимптотические разложения решений уравнений движения вблизи момента остановки точки. Определены различные типы движений с остановками. Проведено численное моделирование движений, построены характерные траектории движений точки. Найдено интегральное многообразие, разделяющее в фазовом пространстве движения с остановкой и движения, при которых точка уходит на бесконечность. На этом многообразии построены фазовые траектории системы.

Если горизонтальная шероховатая плоскость равномерно вращается вокруг вертикали, то область, заполненная относительными равновесиями – круг с центром в точке пересечения плоскости и оси вращения. Возникает естественный вопрос, что будет

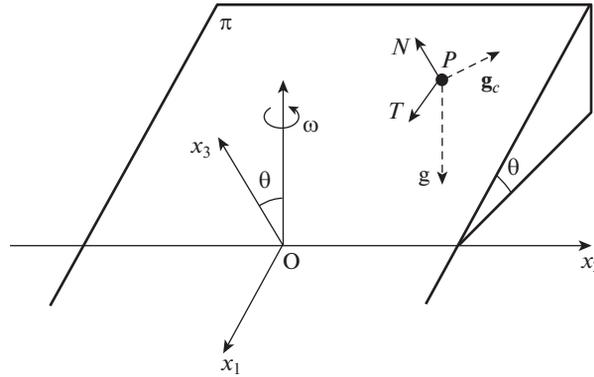


Рис. 1. Распределение сил и реакций связи, действующих на точку  $P$ .

с этим кругом относительных равновесий, если плоскость будет наклонена к горизонту на ненулевой угол. Вопросу существования относительных равновесий в такой задаче посвящена настоящая работа.

**1. Постановка задачи и основные соотношения.** Пусть шероховатая плоскость  $\pi$  с коэффициентом трения  $\mu = \operatorname{tg}\alpha$ , где  $\alpha$ —т.н. угол трения, наклонена к горизонту под углом  $\theta \in [0, \pi/2]$ . Пусть  $\mathbf{e}$  — единичный вектор восходящей вертикали,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к плоскости. Тогда  $\cos \theta = (\mathbf{n}, \mathbf{e})$ . Также будем полагать, что плоскость равномерно вращается вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}$ ,  $\omega > 0$ . Ставится задача определения областей, заполненных относительными равновесиями (ОЗОР) материальной точки  $P$ , соприкасающейся с данной плоскостью, и их описания в зависимости от параметров задачи. Во вращающейся вместе с плоскостью системе отсчета точка  $P$  будет находиться в равновесии под действием силы тяжести, центробежной силы, а также реакции связи, состоящей из нормальной компоненты, и силы трения. Полагая массу точки равной единице, условие равновесия запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{f} + \mathbf{N} + \mathbf{T} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{f} &= \mathbf{g}_c + \mathbf{g} \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения,  $\mathbf{g}_c$  — напряженность центробежной силы,  $\mathbf{N} = L\mathbf{n}$  и  $\mathbf{T}$  — отнесенные к массе точки нормальная реакция и сила трения. При этом на относительных равновесиях сила трения  $\mathbf{T}$  и нормальная реакция  $\mathbf{N}$  стеснены неравенством

$$|\mathbf{T}| \leq \mu |\mathbf{N}| \tag{1.2}$$

выражающим закон трения Кулона—Амонтона (рис. 1). Принимая во внимание соотношение (1.1), неравенство (1.2) после преобразований может быть записано как

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f}) \leq (1 + \mu^2)(\mathbf{f}, \mathbf{n})^2 \tag{1.3}$$

На равновесиях условие напряженности связи принимает вид

$$(\mathbf{f}, \mathbf{n}) < 0 \tag{1.4}$$

Пусть  $Ox_1x_2x_3$  — подвижная система отсчета, координатная плоскость  $Ox_1x_2$  которой совпадает с плоскостью  $\pi$ , а ось  $Ox_3$  направлена по нормали к этой плоскости. Тогда  $\mathbf{e} = (-\sin \theta, 0, \cos \theta)^T$ ,  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)^T$ , а плоскость  $\pi$  задается уравнением  $x_3 = 0$ . Вектор

угловой скорости в проекциях на те же оси имеет вид  $\boldsymbol{\omega} = \omega(-\sin \theta, 0, \cos \theta)^T$ . Кроме того, если  $(x_1, x_2, x_3)^T$  – координаты радиус-вектора  $\overline{OP}$  точки  $P$ , то имеем

$$\mathbf{g} = g(\sin \theta, 0, -\cos \theta)^T, \quad \mathbf{g}_c = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}) = \omega^2(\cos^2 \theta x_1, x_2, \sin \theta \cos \theta x_1)^T$$

$$\mathbf{f} = (g \sin \theta + \omega^2 \cos^2 \theta x_1, \omega^2 x_2, (\omega^2 \sin \theta x_1 - g) \cos \theta)^T$$

Тогда

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f}) = g^2 + \omega^4(x_1^2 \cos^2 \theta + x_2^2), \quad (\mathbf{f}, \mathbf{n}) = (\omega^2 x_1 \sin \theta - g) \cos \theta$$

и составляющая вектора  $\mathbf{f}$ , направленная вдоль плоскости, имеет вид

$$\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f} - (\mathbf{f}, \mathbf{n})\mathbf{n} = (g \sin \theta + \omega^2 \cos^2 \theta x_1, \omega^2 x_2, 0)^T \quad (1.5)$$

В безразмерных координатах

$$X_k = x_k \frac{\omega^2}{g}, \quad k = 1, 2, 3$$

вектор (1.5) запишется как

$$\mathbf{f}_\tau = g(\sin \theta + \cos^2 \theta X_1, X_2, 0)^T \quad (1.6)$$

а неравенство (1.3) примет вид

$$1 + X_1^2 \cos^2 \theta + X_2^2 \leq (1 + \mu^2)((X_1 \sin \theta - 1) \cos \theta)^2 \quad (1.7)$$

*Замечание.* Неравенство (1.7) задает физически осмысленные относительные равновесия в области, задаваемой также неравенством (1.4), гарантирующим напряженность связи. Это неравенство в данном случае принимает вид

$$X_1 < \frac{1}{\sin \theta} \quad (1.8)$$

Заметим что так как  $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ , и поэтому  $1 + \mu^2 = 1/\cos^2 \alpha$ , то неравенство (1.7), определяющее ОЗОР, можно переписать как

$$\Sigma : \cos^2 \theta (X_1^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \theta) + 2X_1 \sin \theta) + X_2^2 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos^2 \theta \leq 0 \quad (1.9)$$

ОЗОР здесь и далее обозначим  $\Sigma$ . Принадлежащая плоскости  $\pi$  внешняя нормаль к  $\partial \Sigma$  – границе области  $\Sigma$  – имеет вид

$$\mathbf{n}' = (\cos^2 \theta (X_1 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \theta) + \sin \theta), X_2 \cos^2 \alpha, 0)^T$$

Этот вектор понадобится в разделе, посвященном устойчивости относительных равновесий.

*Замечание.* В отсутствии силы трения условие равновесия точки (1.1) запишем в виде

$$\mathbf{f} + \mathbf{N} = (g \sin \theta + \omega^2 \cos^2 \theta x_1, \omega^2 x_2, (\omega^2 \sin \theta x_1 - g) \cos \theta + N)^T = \mathbf{0}$$

Это условие определяет равновесие

$$x_1 = -\frac{g \sin \theta}{\omega^2 \cos^2 \theta}, \quad x_2 = x_3 = 0$$

записываемое в безразмерном виде как

$$X_1 = -\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}, \quad X_2 = X_3 = 0 \quad (1.10)$$

При фиксированных значениях параметров это равновесие единственно, причем нормальная реакция определяется как  $N = g/\cos \theta$ .

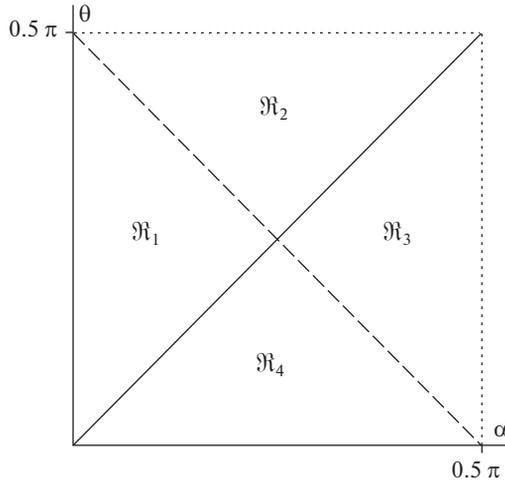


Рис. 2. Области  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$  и  $\mathcal{R}_4$  на плоскости параметров  $(\alpha, \theta)$ .

**2. Параметрический анализ основных соотношений.** Для интерпретации результатов на плоскости параметров  $(\alpha, \theta)$  изобразим квадрат со стороной  $\pi/2$  (рис. 2). Диагонали разделяют этот квадрат на четыре области, обозначенные  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$  и  $\mathcal{R}_4$ .

Пусть  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \theta > 0$ , т.е. параметры принадлежат областям  $\mathcal{R}_1$  и  $\mathcal{R}_4$ . Тогда неравенство (1.9) задает область

$$\Sigma_1 : \frac{(X_1 - X_{10})^2}{a_1^2} + \frac{X_2^2}{a_2^2} - 1 \leq 0 \tag{2.1}$$

$$a_1 = \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\cos \theta (\cos^2 \alpha - \sin^2 \theta)}, \quad a_2 = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \theta}}, \quad X_{10} = \frac{\sin \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \alpha}$$

Область (2.1) ограничена эллипсом  $\partial \Sigma_1$  с полуосями  $a_1$  и  $a_2$ , причем  $a_1 > a_2$ . Центр этого эллипса – точка  $C_e: \overline{OC_e} = (X_{10}, 0, 0)^T$ . Она всегда располагается выше по склону, чем точка  $O$ . В отсутствие трения, именно эта точка и есть относительное равновесие (1.10).

Наинизшая точка эллипса – точка  $A_+ : \overline{OA_+} = (X_{10} + a_1, 0, 0)^T$  – располагается по склону выше, чем точка  $O$  при  $\alpha < \theta < \pi/2$  (область  $\mathcal{R}_1$ ) и по склону ниже, чем точка  $O$  при  $0 < \theta < \alpha$  (область  $\mathcal{R}_4$ ). Для точек общей границы областей  $\mathcal{R}_1$  и  $\mathcal{R}_4$  имеем  $\theta = \alpha$ , и точка  $A_+$  совпадает с точкой  $O$ .

Фокусы эллипса – точки

$$F_{\pm} : \overline{OF_{\pm}} = \left( \theta \frac{-\cos \theta \pm \sin \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \theta}}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \theta}, 0, 0 \right)^T$$

Неравенство (1.8) выполнено для всех точек, расположенных внутри эллипса (2.1). Для этого достаточно убедиться в справедливости неравенства

$$X_{10} + a_1 < \frac{1}{\sin \theta}$$

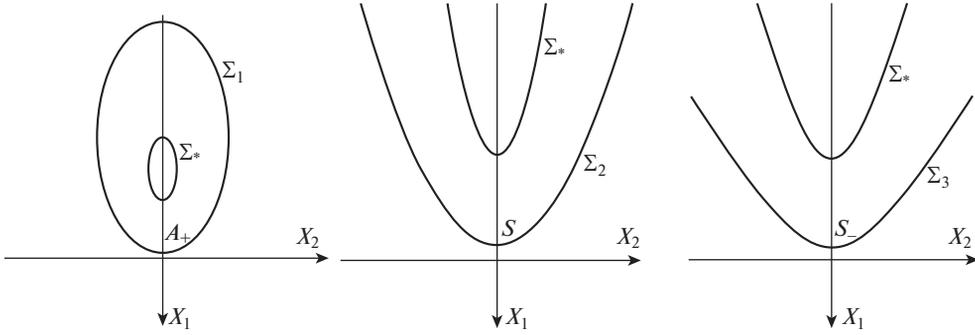


Рис. 3. Различные типы ОЗОР в зависимости от параметра  $\rho(\alpha, \theta)$  и границы их устойчивости.

для точки  $A_+$ . Для  $\theta > \alpha$  ОЗОР схематично представлена на рис. 3 слева.

Пусть теперь  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \theta = 0$ , т.е. параметры принадлежат штриховой диагонали квадрата. Тогда неравенство (1.9) задает область

$$\Sigma_2 : X_2^2 + 2 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \left( X_1 - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin^2 \alpha} \right) \leq 0 \quad (2.2)$$

ограниченную параболой  $\partial \Sigma_2$ . Ветви этой параболы направлены вверх по склону, а радиус-вектор  $\overline{OS}$  ее вершины  $S$  имеет координаты

$$\overline{OS} = \left( \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha \sin^2 \alpha}, 0, 0 \right)$$

Вершина  $S$  располагается выше точки  $O$  по склону при  $\alpha < \pi/4$ , в точке  $O$  при  $\alpha = \pi/4$  и ниже точки  $O$  при  $\alpha > \pi/4$ . Радиус-вектор  $\overline{OF}$  фокуса параболы  $F$  имеет координаты

$$\overline{OF} = \left( -\frac{1}{2} \frac{\cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha}, 0, 0 \right)^T$$

Фокус  $F$  всегда располагается выше по склону по отношению к точке  $O$ . Неравенство (1.8) выполнено для всех точек, ограниченных параболой (2.2). Для этого достаточно убедиться в справедливости неравенства (1.8) для вершины параболы  $S$ . Для  $\theta > \alpha$  ОЗОР схематично представлена на рис. 3 по центру.

Пусть, наконец,  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \theta < 0$ , т.е. параметры принадлежат областям  $\mathcal{R}_2$  и  $\mathcal{R}_3$ . Тогда неравенство (1.9) задает область

$$\Sigma_3 : \frac{(X_1 - X_{10})^2}{a_1^2} - \frac{X_2^2}{a_2^2} - 1 \geq 0 \quad (2.3)$$

$$a_1 = \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\cos \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \alpha)}, \quad a_2 = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \theta - \cos^2 \alpha}}, \quad X_{10} = \frac{\sin \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \alpha}$$

ограниченную гиперболой  $\partial \Sigma_3$ . Центр гиперболы – точка  $C_h$ :  $\overline{OC_h} = (X_{10}, 0, 0)^T$ . Эта точка всегда располагается ниже по склону, чем точка  $O$ . Вершины гиперболы – точки  $S_{\pm}$ :  $\overline{OS_{\pm}} = (X_{10} \pm a_1, 0, 0)^T$ . Вершина  $S_+$  располагается всегда ниже по склону, чем точка  $O$ . Вершина  $S_-$  располагается по склону выше, чем точка  $O$  при  $\alpha < \theta < \pi/2$  (об-

ласть  $\mathcal{R}_2$ ) и по склону ниже, чем точка  $O$  при  $0 < \theta < \alpha$  (область  $\mathcal{R}_3$ ). Для точек общей границы областей  $\mathcal{R}_2$  и  $\mathcal{R}_3$  имеем  $\theta = \alpha$ , и точка  $S_+$  совпадает с точкой  $O$ . Неравенство (1.8) выполнено только для тех точек гиперболы (2.3), которые ограничены ветвью с вершиной  $S_-$ . Для  $\theta > \alpha$  ОЗОР схематично представлена на рис. 3 справа.

*Замечание.* Нетрудно видеть, что основным бифуркационным параметром, отличающим ОЗОР, оказывается величина

$$p(\alpha, \theta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \theta = (\cos \alpha + \sin \theta)(\cos \alpha - \sin \theta)$$

Так как первый множитель всегда положителен, то знак параметра  $p(\alpha, \theta)$  определяется знаком выражения  $\cos \alpha - \sin \theta = \cos \alpha - \cos(\pi/2 - \theta)$ . Так как в первом квадранте косинус монотонно убывает, то  $p(\alpha, \theta) > 0$ , если  $\alpha + \theta < \pi/2$  (области  $\mathcal{R}_1$  и  $\mathcal{R}_4$  на рис. 2). И наоборот,  $p(\alpha, \theta) < 0$ , если  $\alpha + \theta > \pi/2$  (области  $\mathcal{R}_2$  и  $\mathcal{R}_3$  на рис. 2). Примечательно, что параметры  $g$  и  $\omega$  сказываются лишь на размерах ОЗОР, но не сказываются на их типе.

**3. Об устойчивости относительных равновесий.** Устойчивость по Ляпунову относительных равновесий, расположенных внутри найденных областей, следует из результатов Г.К. Пожарицкого [18]. Можно, как и в [19, 20], поставить вопрос об устойчивости ОЗОР в целом.

Будем считать ОЗОР устойчивой, если для каждой точки ее границы проекция суммы активных сил и центробежной силы на плоскость, касательную к поверхности в этой точке направлена внутрь ОЗОР. Это свойство можно трактовать следующим образом. Пусть в начальный момент точка  $P$  располагается в некоторой точке  $Q$  границы ОЗОР. “Отпустим” точку  $P$  без начальной скорости, “освободив” систему от трения, т.е. предположив, что коэффициент трения обратился в нуль. В случае устойчивости ОЗОР для всех точек  $Q$  ее границы точка  $P$  начнет движение внутрь этой области или вдоль ее границы. Если найдется хотя бы одна точка  $Q$  границы ОЗОР, для которой точка  $P$  начнет движение вовне ОЗОР, то речь идет о неустойчивости этой области.

Таким образом, для анализа устойчивости вычислим скалярное произведение

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_\tau, \mathbf{n}') &= g((\sin \theta + \cos^2 \theta X_1) \cos^2 \theta (X_1(\cos^2 \alpha - \sin^2 \theta) + \sin \theta) + X_2^2 \cos^2 \alpha) = gF \\ F &= \cos^4 \theta (\cos^2 \alpha - \sin^2 \theta) X_1^2 + \cos^2 \theta \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \cos^2 \alpha) X_1 + \\ &\quad + \cos^2 \alpha X_2^2 + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для того, чтобы ОЗОР  $\Sigma_k$  была устойчива, она должна располагаться внутри области

$$\Sigma: \quad F < 0 \quad (3.2)$$

ограниченной кривой второго порядка  $\partial\Sigma$ .

Пусть  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \theta > 0$ . В этом случая кривая  $\Sigma$  – эллипс

$$\begin{aligned} \frac{(X_1 - X_{11})^2}{b_1^2} + \frac{X_2^2}{b_2^2} - 1 &= 0 \\ b_1 &= \frac{\sin \theta \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \theta (\cos^2 \alpha - \sin^2 \theta)}, \quad b_2 = \frac{\sin \theta \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \theta}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$X_{11} = \frac{\sin \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta - \cos^2 \alpha)}{2 \cos^2 \theta (\cos^2 \alpha - \sin^2 \theta)}$$

с центром в точке  $C_\varepsilon: OC_\varepsilon = (X_{11}, 0, 0)^T$  и фокусами в точках

$$\mathcal{F}_{\pm} : \overline{O\mathcal{F}_{\pm}} = (f_{\pm}, 0, 0)^T$$

$$f_{\pm} = \operatorname{tg}\theta \frac{\cos\alpha(\sin^2\theta - \cos^2\theta - \cos^2\alpha) \pm \sin\theta \sin^2\alpha \sqrt{\cos^4\theta + \cos^2\theta \cos^2\alpha + \cos^2\alpha}}{2 \cos\theta \cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\theta)}$$

Пусть угол  $\varphi$  – параметр обхода границы (2.1), тогда параметрически эта граница записывается как

$$X_1 = X_{10} + a_1 \cos\varphi, \quad X_2 = a_2 \sin\varphi$$

Подставляя эти величины в соотношение (3.3), имеем

$$\begin{aligned} \frac{(X_{10} - X_{11} + a_1 \cos\varphi)^2}{b_1^2} + \frac{a_2^2 \sin^2\varphi}{b_2^2} - 1 &= 4 \operatorname{ctg}\alpha \mathcal{P}_e(\cos\varphi) \\ \mathcal{P}_e(z) &= -\operatorname{ctg}\alpha z^2 - \operatorname{ctg}\theta z + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sin^2\theta}, \quad z = \cos\varphi \end{aligned} \quad (3.4)$$

На плоскости  $(z, \mathcal{P}_e)$  соотношение (3.4) задает квадратичную параболу, ветви которой направлены вниз. Дискриминант многочлена  $\mathcal{P}_e(z)$  положителен:

$$\frac{\cos^2\theta + 4 \operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\theta} > 0$$

Тогда так как

$$\mathcal{P}_e(\pm 1) = 4 \frac{\cos\alpha \cos\theta \cos(\alpha \pm \theta)}{\sin^2\alpha \sin^2\theta} > 0, \quad 0 \leq \alpha + \theta < \frac{\pi}{2}$$

то многочлен  $\mathcal{P}_e(z)$  положителен на отрезке  $-1 \leq z \leq 1$ . Это означает, что эллипс (3.3) располагается внутри эллипса (2.1), и ОЗОР (2.1) неустойчива в описанном выше смысле.

Пусть теперь  $\cos^2\alpha - \sin^2\theta = 0$ . В этом случае кривая  $\Sigma$  – парабола, определяемая уравнением

$$X_2^2 + \frac{\sin^4\alpha}{\cos\alpha} \left( X_1 + \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \right) = 0 \quad (3.5)$$

с фокусом в точке

$$\mathcal{F} : \overline{O\mathcal{F}} = \left( -\frac{\sin^2\alpha}{4 \cos\alpha}, 0, 0 \right)^T$$

Для точек, принадлежащих параболе (2.2), выполнено

$$X_1 = -\frac{1}{2} \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \tilde{X}_2^2 + \frac{1}{2} \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{2 \cos\alpha \sin^2\alpha}, \quad X_2 = \tilde{X}_2, \quad X_3 = 0$$

Подставим эти значения в соотношение (3.5). После преобразований имеем

$$\frac{1}{2} [(1 + \cos^2\alpha) \tilde{X}_2^2 + \operatorname{tg}^2\alpha] > 0, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Это означает, что парабола (3.5) располагается внутри параболы (2.2), и ОЗОР (2.2) неустойчива в описанном выше смысле.

Пусть, наконец,  $\cos^2\alpha - \sin^2\theta < 0$ . В этом случае кривая  $\Sigma$  – гипербола

$$\frac{(X_1 - X_{11})^2}{b_1^2} - \frac{X_2^2}{b_2^2} - 1 = 0$$

$$b_1 = \frac{\sin \theta \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \alpha)}, \quad b_2 = \frac{\sin \theta \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha \sqrt{\sin^2 \theta - \cos^2 \alpha}} \quad (3.6)$$

$$X_{11} = \frac{\sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \cos^2 \alpha)}{2 \cos^2 \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \alpha)}$$

с центром в точке  $C_{\mathcal{H}}: OC_{\mathcal{H}} = (X_{11}, 0, 0)^T$  и фокусами в точках

$$\mathcal{F}_{\pm} : O\overline{\mathcal{F}}_{\pm} = (f_{\pm}, 0, 0)^T$$

$$f_{\pm} = \frac{\sin \theta (\cos \alpha (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \alpha) \pm \sin^2 \alpha \sqrt{\cos^4 \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha})}{2 \cos^2 \theta \cos \alpha (\sin^2 \theta - \cos^2 \alpha)}$$

Пусть угол  $\psi$  – параметр обхода ветви гиперболы (2.3), располагающейся выше по скату. Тогда параметрически эта граница записывается как

$$X_1 = X_{10} - a_1 \operatorname{ch} \psi, \quad X_2 = a_2 \operatorname{sh} \psi$$

где  $\operatorname{ch} \psi$  и  $\operatorname{sh} \psi$  – гиперболические косинус и синус соответственно. Подставляя эти величины в соотношение (3.6), имеем

$$\frac{(X_{10} - X_{11} - a_1 \operatorname{ch} \psi)^2}{b_1^2} - \frac{a_2^2 \operatorname{ch}^2 \psi}{b_2^2} - 1 = 4 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \theta \sin^2 \alpha} \mathcal{P}_h(z) \quad (3.7)$$

$$\mathcal{P}_h(z) = -\sin^2 \theta z^2 - \cos \theta \sin \theta \operatorname{tg} \alpha z + 1, \quad z = \psi$$

На плоскости  $(z, \mathcal{P}_h)$  соотношение (3.7) задает квадратичную параболу, ветви которой направлены вниз. Дискриминант многочлена  $\mathcal{P}_h(z)$  положителен

$$\sin^2 \theta (\cos^2 \theta \tan^2 \alpha + 4) > 0,$$

а его корни имеют вид

$$z_{\pm} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{\sqrt{\cos^2 \theta \operatorname{tg}^2 \alpha + 4}}{2 \sin \theta}$$

Тогда так как

$$\mathcal{P}_h(1) = \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} \cos(\theta + \alpha) < 0, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha + \theta \leq \pi$$

то многочлен  $\mathcal{P}_h(z)$  отрицателен при  $z \geq 1$ . Это означает, что ветвь гиперболы (2.3), располагающаяся выше по скату, лежит ниже по скату соответствующей ветви гиперболы (3.6), и ОЗОР (2.3) неустойчива в описанном выше смысле.

*Замечание.* Неустойчивость рассматриваемых ОЗОР может быть показана проще. Для этого достаточно предъявить хотя бы одну точку границы ОЗОР, в которой данное выше определение устойчивости не выполняется. Этими точками могут являться, например,  $A_+$ ,  $S$  и  $S_-$  для ОЗОР  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_3$  соответственно. Определяя значения величины  $(\mathbf{f}_t, \mathbf{n}')$  в этих точках, находим

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{f}_\tau, \mathbf{n}')|_{A_+} &= \frac{\cos \theta \cos \alpha \sin^2 \alpha \cos(\theta + \alpha)}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \theta} > 0, & 0 \leq \alpha + \theta < \frac{\pi}{2} \\
 (\mathbf{f}_\tau, \mathbf{n}')|_S &= \frac{\sin^2 \alpha}{2} > 0, & 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\
 (\mathbf{f}_\tau, \mathbf{n}')|_{S_-} &= \frac{\cos \theta \cos \alpha \sin^2 \alpha \cos(\theta + \alpha)}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \theta} > 0, & \frac{\pi}{2} < \alpha + \theta \leq \pi
 \end{aligned}$$

Неравенство (3.2) не выполняется, следовательно, обнаруженные ОЗОР неустойчивы в сформулированном выше смысле.

**Заключение.** Как оказалось (см., например, [21–25]) задача о неизолированных относительных равновесиях представляет интерес с точки зрения небесной механики. Так для малых небесных тел, сила притяжения на поверхности которых невелика, решение этой задачи позволяет обсудить возможности использования тех или иных частей поверхности тел для развертывания миссий. Так как зачастую поверхность малых небесных тел приближают многогранником, то изучаемую задачу можно рассматривать как частный случай общей задачи о равновесиях на поверхности гравитирующего многогранника. Для такой общей задачи естественно предположить, что сила притяжения, действующая в окрестности каждой небольшой грани постоянна, а ось вращения, вообще говоря, не параллельна линии действия этой силы. Такого рода задача представляет интерес для дальнейших исследований.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00297).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Burov A.A.* On bifurcations of relative equilibria of a heavy bead sliding with dry friction on a rotating circle // *Acta Mech.* 2010. V. 212. № 3–4. P. 349–354.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-009-0265-1>
2. *Burov A.A., Shalimova E.S.* On the motion of a heavy material point on a rotating sphere (dry friction case) // *Regular Chaotic Dyn.* 2015. V. 20. № 3. P. 225–233.  
<https://doi.org/10.1134/S1560354715030028>
3. *Буров А.А., Шалимова Е.С.* Бифуркация относительных равновесий тяжелой бусинки на вращающейся параболидаальной чаше с сухим трением // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* 2016. № 4. С. 30–42.
4. *Иванов А.П.* Об устойчивости равновесия в системах с трением // *ПММ.* 2007. Т. 71. № 3. С. 427–438.
5. *Иванов А.П.* Бифуркации в системах с трением: основные модели и методы // *Нелинейная динамика.* 2009. Т. 5. № 4. С. 479–498.  
<https://doi.org/10.20537/nd0904003>
6. *Иванов А.П.* Основы теории систем с трением. Ижевск: РХД. 2011. 302 с.
7. *Иванов А.П.* О равновесии систем с сухим трением // *ПММ.* 2015. Т. 79. № 3. С. 317–333.
8. *Leine R.I., van de Wouw N.* Stability properties of equilibrium sets of nonlinear mechanical systems with dry friction and impact // *Nonlin. Dyn.* 2008. V. 51. № 4. P. 551–583.  
<https://doi.org/10.1007/s11071-007-9244-z>
9. *Leine R.I., van de Wouw N.* Stability and Convergence of Mechanical Systems with Unilateral Constraints. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. 236 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-540-76975-0>
10. *Leine R.I., van Campen D.H.* Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // *Eur. J. Mech. – A/Solids.* 2006. V. 25. P. 595–616.  
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.04.004>
11. *Leine R.I.* Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems // *Phys. D: Nonlinear Phenom.* 2006. V. 223. № 1. P. 121–137.  
<https://doi.org/10.1016/j.physd.2006.08.021.10>

12. *Розе Н.В.* Теоретическая механика. Ч. 1. М.; Л.: ГТТИ, 1932. 371 с.
13. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
14. *Пэнлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
15. *Журавлев В.Ф., Ишинский А.Ю.* Метод подобия в задачах динамики точки // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1988. № 4. С. 6–12.
16. *Андронов В.В., Журавлев В.Ф.* Сухое трение в задачах механики. Серия Математика и механика. М.: Ижевск: Издательство “ИКИ”, 2010. 184 с.
17. *Грудев А.И., Ишинский А.Ю., Черноусько Ф.Л.* О движении точки по вращающейся шероховатой плоскости // ПММ. 1989. Т. 53. № 3. С. 372–381.
18. *Пожарицкий Г.К.* Об устойчивости равновесий для систем с сухим трением // ПММ. 1962. Т. 26. № 1. С. 5–14.
19. *Шалимова Е.С.* О движении тяжелой точки по сфере, вращающейся вокруг не проходящей через ее центр вертикальной оси, при наличии сухого трения // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. № 3. С. 369–383.  
<https://doi.org/10.20537/nd1603006>
20. *Буров А.А., Никонов В.И., Шалимова Е.С.* Движение массивной точки по поверхности однородного шара со сферической полостью // ПММ. 2021. Т. 85. № 4. С. 528–543.  
<https://doi.org/10.31857/S0032823521040032>
21. *Буров А.А., Косенко И.И., Шалимова Е.С.* Об относительных равновесиях массивной точки на равномерно вращающемся астероиде // ДАН. 2017. № 3. С. 269–272.  
<https://doi.org/10.7868/S0869565217210071>
22. *Guibout V., Scheeres D.J.* Stability of surface motion on a rotating ellipsoid // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2003. V. 87. P. 263–290.  
<https://doi.org/10.1023/B:CELE.0000005720.09027.ee>
23. *Bellerose J., Girard A., Scheeres D.J.* Dynamics and Control of Surface Exploration Robots on Asteroids // Optimization and Cooperative Control Strategies. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. V. 381. P. 135–150.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-540-88063-9\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-540-88063-9_8)
24. *Scheeres D.J.* Landslides and Mass shedding on spinning spheroidal asteroids // Icarus. 2015. V. 247. P. 1–17.  
<https://doi.org/10.1016/j.icarus.2014.09.017>
25. *Jiang Y., Zhang Y., Baoyin H.* Surface motion relative to the irregular celestial bodies // Planet. Space Sci. 2016. V. 127. P. 33–43.  
<https://doi.org/10.1016/j.pss.2016.04.007>

УДК 539.31, 539.32

## АУКСЕТИКИ СРЕДИ ДВУХСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТОВ ИЗ КРИСТАЛЛОВ С КУБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ. АНАЛИТИЧЕСКИЙ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

© 2023 г. А. И. Демин<sup>а</sup>, М. А. Волков<sup>а,\*</sup>, В. А. Городцов<sup>а</sup>, Д. С. Лисовенко<sup>а,\*\*</sup>

<sup>а</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: volkovmikh1@ipmnet.ru,

\*\*e-mail: lisoventk@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 02.10.2022 г.

После доработки 08.10.2022 г.

Принята к публикации 10.10.2022 г.

Представлены результаты расчетов эффективного модуля Юнга продольно растягиваемых двухслойных пластин из одинаково ориентированных кубических кристаллов на основе аналитического анализа и численного метода конечных элементов. Приведены аналитические зависимости эффективного модуля Юнга от модулей Юнга и коэффициентов Пуассона кристаллов в слоях. Определены комбинации пар кристаллов со значительным отклонением эффективных характеристик, найденных по правилу смесей. Установлены зависимости эффективных модулей Юнга от экстремальных значений модулей Юнга и коэффициентов Пуассона кристаллов в слоях, которые представлены графически, и в ряде случаев отражены в виде таблицы.

*Ключевые слова:* кубические кристаллы, ауксетика, двухслойные пластины, модуль Юнга, коэффициент Пуассона

DOI: 10.31857/S0572329922600761, EDN: KLZRAL

**1. Введение.** Экспериментальное обнаружение ряда материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетиков) во второй половине 20 столетия в работах [1–15] вызвал бурный рост исследований ауксетиков среди кристаллов, сплавов, полимеров, пен, текстиля, цеолитов, керамик, пористых материалов, мета- и наноматериалов, композитов (см. обзоры за последние 7 лет [16–52]). Большое количество ауксетиков найдено среди кристаллов различных кристаллических систем (точнее говоря частичных ауксетиков, имеющих отрицательный коэффициент Пуассона при определенных ориентациях кристаллов). При этом, наибольшее количество из них обнаружено среди кристаллов с кубической анизотропией (более трехсот). В связи с этим, анализу ауксетиков среди них и их композитов посвящена значительная литература [5, 8, 15, 53–104]. Многие простые вещества с кубической симметрией из периодической системы элементов, например, литий Li, калий K, натрий Na, медь Cu, железо Fe, никель Ni, кальций Ca, кобальт Co, цезий Cs, барий Ba, свинец Pb, серебро Ag, золото Au, рубидий Rb, стронций Sr, иттербий Yb, талий Tl, палладий Pd оказываются частичными ауксетиками.

Аналитически упругие свойства растягиваемых двухслойных пластин из одинаково ориентированных кубических кристаллов ранее анализировались в статье [105]. Здесь он будет продолжен наряду с численным анализом методом конечных элементов при учете изгиба слоев пластины. Иллюстрацией таких упругих характеристик некоторых кубических кристаллов, как модули Юнга и коэффициенты Пуассона, служит табл. 1.

**Таблица 1.** Модули Юнга и коэффициенты Пуассона для некоторых кубических кристаллов, растягиваемых вдоль направления [100]

Кристаллы	$E$ , ГПа	$\nu$
Sm <sub>0.75</sub> Y <sub>0.25</sub> S	55.6	-0.67
TmSe	114.7	-0.54
Sm <sub>0.65</sub> La <sub>0.35</sub> S	50.8	-0.35
SnTe	98	-0.09
AuNi(24.20at%Ni)	54.3	0.45
CuAl(14at%Al)	55.2	0.43
Diaflex	114.5	0.45
Co-beta	113.5	0.40
CuNi(82.2at%Ni)	113.5	0.39
CuAu(80at%Au)	50.8	0.45
CuAu(50at%Au)	54.9	0.44
AgAu(50at%Au)	50.8	0.43
NbZr(69.6at%Zr)	50.0	0.42
Ni <sub>50.4</sub> Al(quenched)	97.6	0.42
NiAl(PE16H)	97.8	0.40
CoFe(12at%Fe)	97.0	0.41
Fe	130.38	0.37
W	408.16	0.28
Cs	0.84	0.38

Среди указанных в ней кристаллов, растягиваемых в направлении [100], имеются ауксетики Sm<sub>0.75</sub>Y<sub>0.25</sub>S, TmS, Sm<sub>0.65</sub>La<sub>0.35</sub>S и неауксетики CuAl (14at%Al), AgAu (50at%Au), CoFe (12at%Fe).

Ниже приводится ряд результатов исследования эффективных модулей Юнга для двухслойных композитов из одинаково ориентированных кубических кристаллов в слоях как с помощью методов теории упругости анизотропного тела, так и метода конечных элементов. В качестве упругих характеристик слоев использованы экспериментальные значения упругих констант, приведенные в известном справочнике [106] и в статье [107].

**2. Продольное растяжение тонкой двухслойной пластины, составленной из кубических кристаллов.** *2.1. Аналитический анализ.* Пользуясь результатами анализа продольного растяжения тонких двухслойных композитных пластин из кубических кристаллов, полученными в статье [105], мы продолжим обсуждение упругих характеристик пластин из одинаково ориентированных кубических кристаллов. Количество двухслойных композитов из кубических кристаллов, упругие характеристики которых указаны в [106], составляет несколько сотен тысяч. Многие из них обладают эффективными характеристиками, превосходящими характеристики исходных пар кристаллов. Таким композитам в дальнейшем уделяется основное внимание.

Пусть продольное растяжение плоскости тонкой двухслойной пластины из одинаково ориентированных кубических кристаллов, составленной из нижнего слоя 1 толщиной  $h_1$  и верхнего слоя 2 толщиной  $h_2$  (рис. 1), происходит в направлении оси  $x$ .

Упругие свойства пары кубических кристаллов в слоях определяются наборами шести матричных коэффициентов податливости  $s_{11}^1, s_{12}^1, s_{44}^1$  и  $s_{11}^2, s_{12}^2, s_{44}^2$ . Верхний индекс

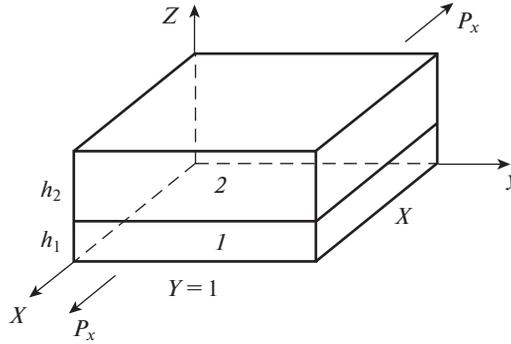


Рис. 1. Растяжение удельной продольной силой  $P_x$  пластины из двух слоев толщиной  $h = h_1 + h_2$ .

здесь и далее соответствует номеру слоя. Деформирование растягиваемых слоев тонкой пластины в условиях однородного плоского напряженного состояния  $\sigma_z^1 = \sigma_z^2 = 0$  описывается упрощенным законом Гука для нормальных напряжений и деформаций

$$\begin{aligned}\epsilon_x^k &= s_{11}^k \sigma_x^k + s_{12}^k \sigma_y^k, \\ \epsilon_y^k &= s_{11}^k \sigma_y^k + s_{12}^k \sigma_x^k, \quad (k = 1, 2) \\ \epsilon_z^k &= s_{12}^k \sigma_x^k + s_{12}^k \sigma_y^k\end{aligned}$$

Эти соотношения в предположении жесткого контакта слоев  $\epsilon_x^1 = \epsilon_x^2$ ,  $\epsilon_y^1 = \epsilon_y^2$  при учете условий равновесия дают следующий результат для эффективной деформации растягиваемой двухслойной пластины из кубических кристаллов (поперечную ширину тонкой пластины  $Y$  полагаем равной единице, рис. 1)

$$\epsilon_x^{\text{eff}} = \epsilon_x^{1\text{eff}} = \epsilon_x^{2\text{eff}} = \alpha P_x, \quad \epsilon_y^{\text{eff}} = \epsilon_y^{1\text{eff}} = \epsilon_y^{2\text{eff}} = \beta P_x, \quad \epsilon_z^{1\text{eff}} = \gamma_1 P_x, \quad \epsilon_z^{2\text{eff}} = \gamma_2 P_x$$

$$\alpha = \frac{s_{11}^2 h_2 A_1 + s_{11}^1 h_1 A_2}{B}, \quad \beta = \frac{s_{12}^2 h_2 A_1 + s_{12}^1 h_1 A_2}{B}$$

$$\gamma_1 = s_{12}^1 \frac{h_1 A_2 + h_2 (C_1 + C_2)}{B}, \quad \gamma_2 = s_{12}^2 \frac{h_2 A_1 + h_1 (C_1 - C_2)}{B}$$

$$A_k \equiv (s_{11}^k)^2 - (s_{12}^k)^2, \quad B \equiv (h_2 s_{11}^1 + h_1 s_{11}^2)^2 - (h_2 s_{12}^1 + h_1 s_{12}^2)^2$$

$$C_1 \equiv s_{11}^1 s_{12}^1 - s_{12}^1 s_{11}^2, \quad C_2 \equiv s_{11}^1 s_{12}^2 - s_{12}^1 s_{11}^2$$

Эффективный модуль Юнга продольного растяжения  $E^{\text{eff}}$  находится через отношение удельной растягивающей силы к продольной деформации двухслойной пластины

$$E^{\text{eff}} = \frac{1}{\alpha(h_1 + h_2)}$$

Упругие характеристики кубических кристаллов, как и других анизотропных материалов, изменяются с изменением их ориентации. В итоге возникают различия в угловых зависимостях модулей Юнга и коэффициентов Пуассона при растяжениях кристаллов [108], которые в некоторых ситуациях обнаруживают определенные взаимосвязи. Так в [109] при осреднении по всем поперечным направлениям коэффициента Пуассона продольно растягиваемых кубических кристаллов установлена простая линейная связь такого среднего коэффициента Пуассона с модулем Юнга. В рассматри-

ваемой здесь статье о продольном растяжении двухслойных композитов из кубических кристаллов также изучены некоторые связи эффективных модулей Юнга с экстремальными значениями модулей Юнга и коэффициентов Пуассона.

При растяжении однослойного кубического кристалла в направлении [100] модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  связаны с парой коэффициентов податливости  $s_{11}, s_{12}$ , так что в каждом из двух одинаково ориентированных слоев имеем

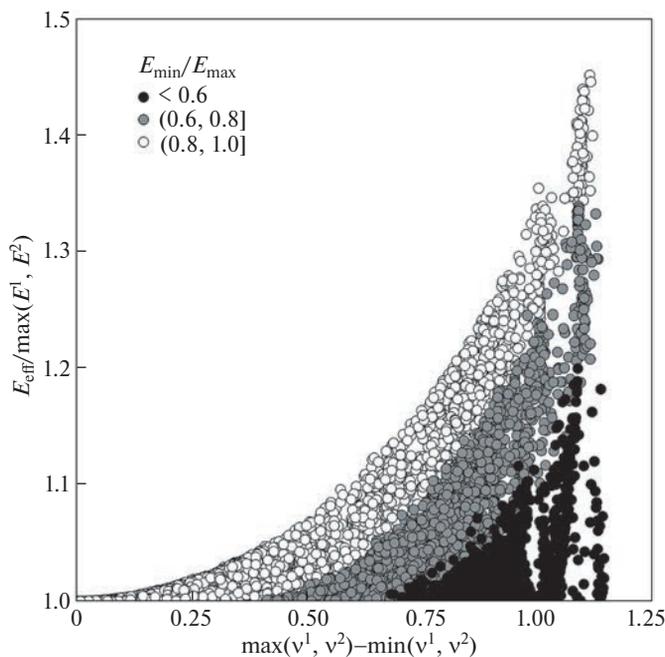
$$s_{11}^k = \frac{1}{E^k}, \quad s_{12}^k = -\frac{\nu^k}{E^k} \quad (k = 1, 2)$$

Подобными заменами коэффициентов податливости на модули Юнга и коэффициенты Пуассона в полученных выше формулах для эффективных коэффициентов будем иметь

$$E^{eff} = \frac{(1 + \lambda)^2 - (\nu^1 + \lambda\nu^2)^2}{[1 - (\nu^1)^2] + \lambda[1 - (\nu^2)^2]} \frac{E^2}{1 + \eta}, \quad \lambda \equiv \frac{h_1 E^1}{h_2 E^2} = \eta\mu, \quad \eta \equiv \frac{h_1}{h_2}, \quad \mu \equiv \frac{E^1}{E^2}$$

Численный анализ двухслойных пластин из различных одинаково ориентированных кубических кристаллов с помощью этих соотношений и экспериментальных данных из [106, 107] выявил некоторую зависимость эффективного модуля Юнга  $E^{eff}$  от экстремальных значений их модулей Юнга  $\max(E^1, E^2)$ ,  $\min(E^1, E^2)$  и коэффициентов Пуассона  $\max(\nu^1, \nu^2)$ ,  $\min(\nu^1, \nu^2)$  (рис. 2). Из рисунка видно, что эффективный модуль Юнга может превосходить максимальные значения модулей Юнга слоев двухслойных пластин более чем на 40%. Из рис. 2 также видно, что отношение эффективного модуля Юнга к максимальному модулю Юнга слоев больше для пары слоев из ауксетика и неауксетика и слоев с близкими значениями модулей Юнга. Такое отношение принимает значение большее 1.2 для почти девяти сотен двухслойных пластин с самарием Sa или тулием Tm, имеющих наименьшие значения коэффициентов Пуассона среди кубических кристаллов. Значения эффективного модуля Юнга некоторых пар материалов собраны в табл. 2. Значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона исходных материалов можно найти в табл. 1. Среди этих кристаллов ауксетиками являются  $\text{Sm}_{0.75}\text{Y}_{0.25}\text{S}$ ,  $\text{Sm}_{0.65}\text{La}_{0.35}\text{S}$ ,  $\text{SnTe}$ ,  $\text{TmSe}$ . Данные об упругих свойствах 3-х парных для них неауксетиков в двухслойных пластинах также приведены в этой таблице.

Дополнительно анализировалось поведение эффективного модуля Юнга в зависимости от разницы коэффициентов Пуассона слоев. В рамках данного анализа свойства одного из слоев фиксировались, а второго – варьировались в некотором диапазоне. Для первого слоя были выбраны кубические кристаллы различной жесткости и величины коэффициентов Пуассона:  $\text{Sm}_{0.75}\text{Y}_{0.25}\text{S}$  ( $\nu = -0.67$ ,  $E^1 = 55.6$  ГПа),  $\text{Ba}$  ( $\nu = -0.05$ ,  $E = 8$  ГПа),  $\text{Cr}$  ( $\nu = 0.16$ ,  $E = 327$  ГПа),  $\text{Au}$  ( $\nu = 0.46$ ,  $E = 42.7$  ГПа). Коэффициент Пуассона второго материала менялся от  $-1$  до  $0.5$ , а модуль Юнга принимал фиксированные значения  $0.25E^1$ ,  $0.5E^1$ ,  $E^1$ ,  $2E^1$ ,  $4E^1$ . Результаты анализа представлены на рис. 3. Полученные зависимости показывают, что отношение эффективного модуля Юнга пластины к модулю Юнга самого жесткого слоя максимально, если модули Юнга слоев равны и растет с увеличением модуля разности коэффициентов Пуассона слоев и может превышать значение 2.4 для ауксетиков с коэффициентом Пуассона близким к  $-1$ . При равном модуле Юнга слоев, у всех проанализированных пластин эффективный модуль Юнга превышает единицу для всех значений коэффициента Пуассона второго слоя. Минимальное значение эффективного модуля Юнга всегда достигалось при равных коэффициентах Пуассона слоев. Кроме того, при больших значениях коэффициента Пуассона второго слоя эффективный модуль Юнга растет существенно быстрее в случае второго слоя большей жесткости.



**Рис. 2.** Зависимость эффективного модуля Юнга от экстремальных значений модулей Юнга и разности экстремальных значений коэффициентов Пуассона исходных пар кубических кристаллов.

2.2. *Численный анализ.* В аналитическом подходе, рассмотренном выше, предполагается, что пластина в процессе растяжения остается плоской. Для проверки полученных аналитически результатов и оценки влияния на результат принятых допущений об отсутствии изгиба в пластине были проведены численные эксперименты продольного растяжения двухслойной пластины из кубических кристаллов методом конечных элементов.

Трехмерная модель квадратной пластины со сторонами  $a$  и общей толщиной  $h$  из двух слоев с толщинами  $h_1$  и  $h_2$  была разбита на объемные 8-узловые конечные элементы с поддержкой упругой анизотропии. Пластина считается тонкой, отношение толщины к ширине  $h/a$  составляет 0.01. Задача решалась в перемещениях со следующими граничными условиями: плоскости  $x = 0$  и  $y = 0$  являются плоскостями симметрии, на которых запрещались нормальные перемещения, на задней грани ( $x = a$ ) задавались нормальные перемещения, соответствующие продольной деформации 0.01. Контакт элементов на границе раздела считался абсолютно жестким.

По результатам расчета определялись эффективный модуль Юнга. Эффективный модуль Юнга пластины  $E^{\text{eff}}$  рассчитывался как отношение суммарной силы реакции на грани  $F_x^{x=0}$  к произведению площади поверхности соответствующей грани  $S^{x=0}$  на продольную деформацию  $\epsilon_x$ .

$$E^{\text{eff}} = \frac{F_x^{x=0}}{S^{x=0} \epsilon_x}$$

Используя данную модель, были проведены две серии расчетов. В первой серии расчетов, для соответствия условиям из раздела 2.1, задавался запрет на нормальные

**Таблица 2.** Значения эффективного модуля Юнга  $E^{\text{eff}}$  двухслойных пластин и отношение эффективного модуля Юнга к максимальному модулю Юнга  $\max(E^1, E^2)$  при равной толщине слоев

Материал 1	Материал 2	$E^{\text{eff}}$ , ГПа	$\frac{E^{\text{eff}}}{\max(E^1, E^2)}$
Sm <sub>0.75</sub> Y <sub>0.25</sub> S	CuAu(50at%Au)	80.6	1.45
Sm <sub>0.75</sub> Y <sub>0.25</sub> S	AuNi(24.20at%Ni)	80.4	1.45
Sm <sub>0.75</sub> Y <sub>0.25</sub> S	CuAl(14at%Al)	80	1.44
TmSe	Diaflex	151.8	1.32
TmSe	Co-beta	146.7	1.28
TmSe	CuNi(82.2at%Ni)	146.3	1.28
Sm <sub>0.65</sub> La <sub>0.35</sub> S	CuAu(80at%Au)	60.4	1.19
Sm <sub>0.65</sub> La <sub>0.35</sub> S	AgAu(50at%Au)	59.9	1.18
Sm <sub>0.65</sub> La <sub>0.35</sub> S	NbZr(69.6at%Zr)	59.1	1.16
SnTe	Ni <sub>50.4</sub> Al(quenched)	104.7	1.07
SnTe	NiAl(PE16H)	104.3	1.06
SnTe	CoFe(12at%Fe)	104.2	1.06
W	Fe	269.7	0.66
Cs	Fe	65.6	0.50

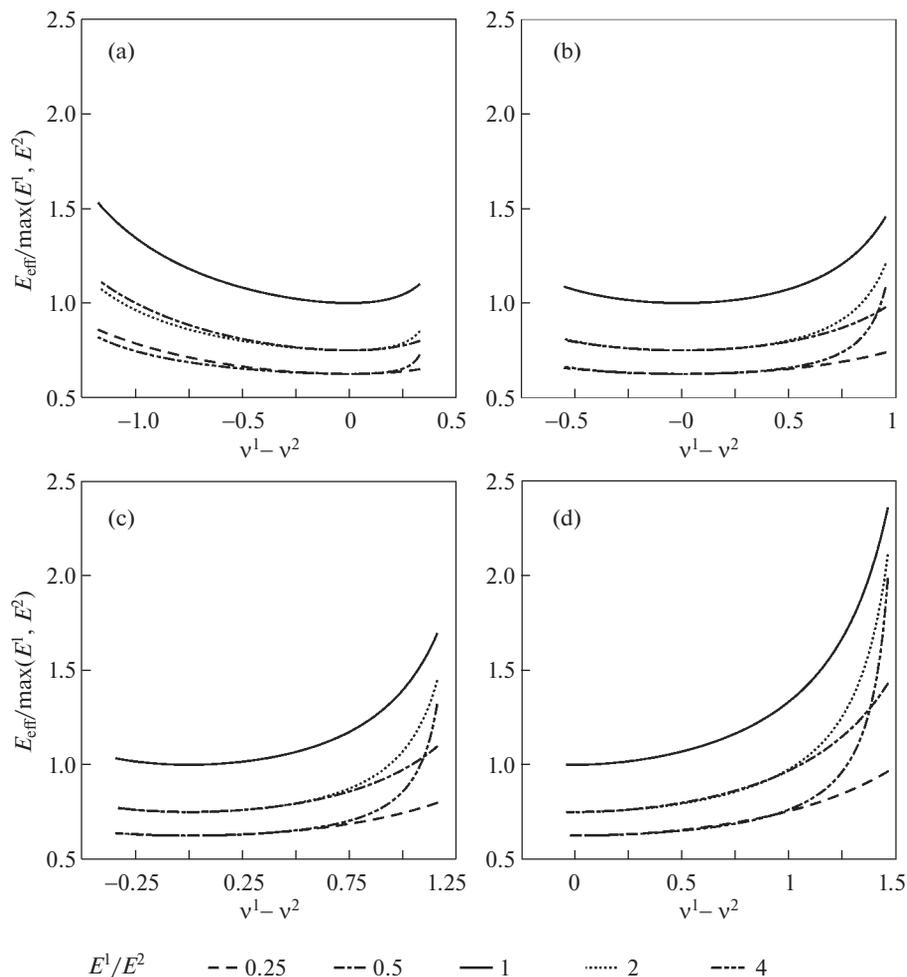
перемещения пластины. Во второй серии расчетов запрет на нормальные перемещения отсутствовал, что позволяет пластине изгибаться.

Изгиб пластины возникает вследствие различий в коэффициентах Пуассона слоев, что ярко выражено для пар неауксетик-ауксетик. При продольном растяжении в слое неауксетика возникают сжимающие поперечные деформации, а в слое ауксетика растягивающие, что приводит к возникновению изгибающего момента в поперечном сечении и к изгибу пластины (рис. 4).

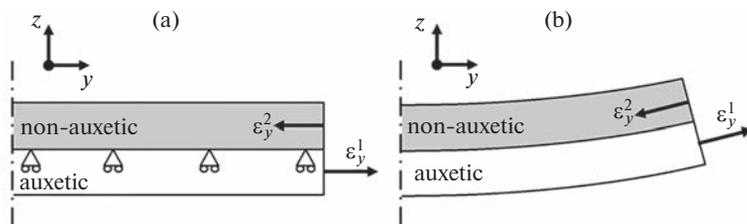
Результаты первой серии расчетов (без изгиба), практически не отличаются от аналитических. Для рассмотренных пластин отличие составило менее 1%. На рис. 5 представлены результаты аналитических и численных расчетов для нескольких кубических пластин. Сплошная линия соответствует аналитическому подходу, численные значения первой серии обозначены кругом, второй – крестом. Из зависимостей видно, что учет изгиба сильно влияет на значения эффективного модуля Юнга. Даже при значительном уменьшении эффективного модуля Юнга, для рассмотренных комбинаций его величина все еще превосходит модули Юнга слоев на существенную величину (от 3 до 12 процентов). В случае пластин из двух неауксетических кристаллов, поведение модуля Юнга обеих серий расчетов практически не отличаются, что видно на рис. 5.е, f.

На рис. 6 приводятся графики узловых перемещений в поперечном сечении пластины для нескольких комбинаций материалов, полученные во второй серии расчетов. На рисунке численные значения отмечены символами (круг, крест, квадрат и пр.), а их аппроксимация квадратичной функцией – линиями. Изгиб пластины  $\rho$  характеризуется кривизной, которая определяется второй производной аппроксимирующей поперечные узловые перемещения  $u_z$  функции:

$$\rho = \frac{d^2}{dy^2} f(u_z)$$



**Рис. 3.** Отношение эффективного модуля Юнга к модулю Юнга наиболее жесткого слоя в зависимости от разности коэффициентов Пуассона слоев для  $\text{Sm}_{0.75}\text{La}_{0.25}\text{S}$  ( $E = 55.6$  ГПа,  $\nu = -0.67$ ) (a),  $\text{Ba}$  ( $E = 8$  ГПа,  $\nu = -0.05$ ) (b),  $\text{Cr}$  ( $E = 327$  ГПа,  $\nu = 0.16$ ) (c) и  $\text{Au}$  ( $E = 42.7$  ГПа,  $\nu = 0.46$ ) (d).



**Рис. 4.** Граничные условия и деформации поперечного сечения при продольном растяжении по оси  $x$  в первой (a) и во второй (b) серии расчетов методом конечных элементов.

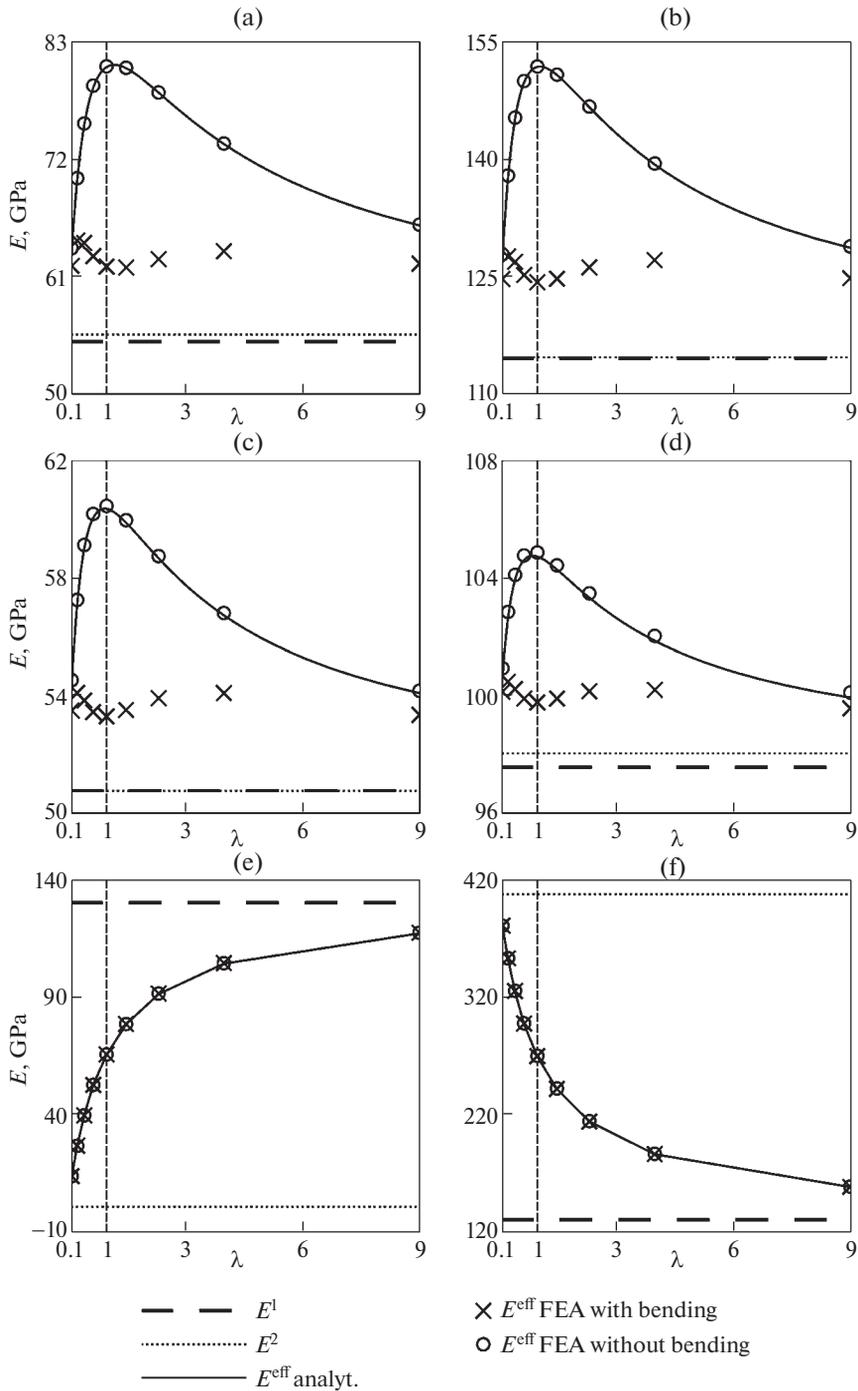


Рис. 5. Результаты расчетов значений эффективных модулей Юнга слоистых пластинок для Cu-Au(50at%Au)-Sm<sub>0.75</sub>Y<sub>0.25</sub>S (a), Diaflex-TmSe (b), CuAu(80at%Au)-Sm<sub>0.65</sub>La<sub>0.35</sub>S (c), Ni<sub>50.4</sub>Al(quenched)-SnTe (d), Fe-Cs (e) и Fe-Wf (f).

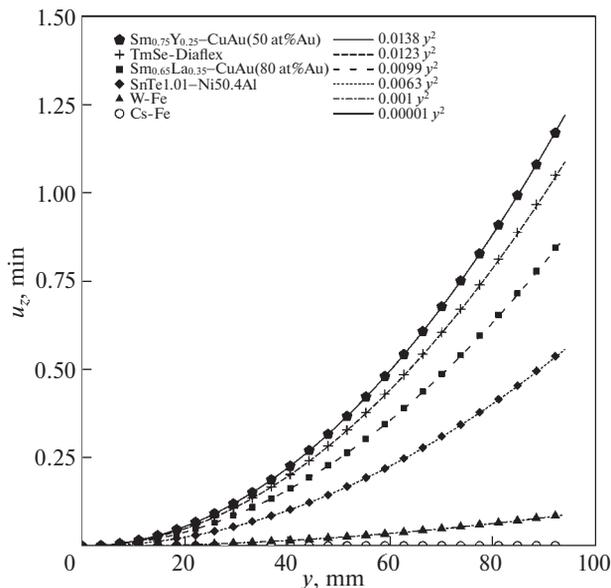


Рис. 6. Графики узловых перемещений поперечного сечения пластины на границе раздела слоев.

Наибольшая кривизна соответствует пластинам с ауксетическим слоем ( $\text{Sm}_{0.75}\text{Y}_{0.25}\text{S}$ ,  $\text{TmSe}$ ,  $\text{SnTe}$ ,  $\text{Sm}_{0.65}\text{La}_{0.35}\text{S}$ ), в то время как для пластин из пары неауксетиков кривизна существенно меньше.

**3. Заключение.** В работе проведен анализ эффективных упругих характеристик при растяжении слоистых пластин из кубических кристаллов с ауксетическим слоем с применением аналитического метода и метода конечных элементов. Численные расчеты выполнены для всех возможных комбинаций кубических кристаллов. Определены пластины, у которых эффективные упругие характеристики существенно отличаются от правила смесей. Для ряда пластин выполнены численные расчеты с применением метода конечных элементов. Проведено сравнение полученных результатов с аналитическими расчетами. Результаты моделирования подтверждают эффекты, выявленные при анализе аналитических расчетов. По результатам численных расчетов методом конечных элементов показано, что изгиб пластины существенно влияет на значение эффективного модуля Юнга пластины.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-29-01200).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубов В.Г., Фирсова М.М.* Об особенностях упругого поведения кварца в области  $\alpha$ - $\beta$ -перехода // Кристаллография. 1962. Т. 7. № 3. С. 469–471.
2. *Garber A.M.* Pyrolytic materials for thermal protection systems // Aerospace Eng. 1963. V. 22. P. 126–137.
3. *Поперека М.Я., Балагуров В.Г.* Ферромагнитные пленки с отрицательным коэффициентом Пуассона // ФТТ. 1969. Т. 11. № 12. С. 2507–3513.
4. *Gunton D.J., Saunders G.A.* Stability limits on the Poisson ratio: application to a martensitic transformation // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. 1975. V. 343. № 1632. P. 63–83.  
<https://doi.org/10.1098/rspa.1975.0052>

5. *Milstein F., Huang K.* Existence of a negative Poisson ratio in fcc crystals // *Phys. Rev. B.* 1979. V. 19. № 4. P. 2030–2033.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.19.2030>
6. *Lakes R.S.* Foam structures with a negative Poisson's ratio // *Science.* 1987. V. 235. № 4792. P. 1038–1040.  
<https://doi.org/10.1126/science.235.4792.1038>
7. *Fies F.A., Lakes R.S., Park J.B.* Negative Poisson's ratio polymeric and metallic foams // *J. Mater. Sci.* 1988. V. 23. № 12. P. 4406–4414.  
<https://doi.org/10.1007/BF00551939>
8. *Светлов И.Л., Епишин А.И., Кривко А.И.* и др. Анизотропия коэффициента Пуассона монокристаллов никелевого сплава // *ДАН СССР.* 1988. Т. 302. № 6. С. 1372–1375.
9. *Caddock B.D., Evans K.E.* Microporous materials with negative Poisson's ratios. 1. Microstructure and mechanical properties // *J. Phys. D.* 1989. V. 22. № 22. P.1877–1882.  
<https://doi.org/10.1088/0022-3727/22/12/012>
10. *Alderson K.L., Evans K.E.* The fabrication of microporous polyethylene having a negative Poisson's ratio // *Polymer* 1992. V. 33. № 20. P. 4435–4438.  
[https://doi.org/10.1016/0032-3861\(92\)90294-7](https://doi.org/10.1016/0032-3861(92)90294-7)
11. *Yeganeh-Haeri A., Weidner D.J., Parise J.B.* Elasticity of  $\alpha$ -cristobalite: a silicon dioxide with a negative Poisson's ratio // *Science.* 1992. V. 257. № 5070. P. 650–652.  
<https://doi.org/10.1126/science.257.5070.650>
12. *Choi J.B., Lakes R.S.* Non-linear polymer properties of polymer cellular materials with a negative Poisson's ratio // *J. Mater. Sci.* 1992. V. 27. № 17. P. 4678–4684.  
<https://doi.org/10.1007/BF01166005>
13. *Scharer U., Wachter P.* Negative elastic constants in intermediate valent  $\text{Sm}_x\text{La}_{1-x}\text{S}$  // *Solid State Commun.* 1995. V. 96. № 17. P. 497–501.  
[https://doi.org/10.1016/0038-1098\(95\)00418-1](https://doi.org/10.1016/0038-1098(95)00418-1)
14. *Prall D., Lakes R.S.* Properties of a chiral honeycomb with a Poisson's ratio of  $-1$  // *Int. J. Mech. Sci.* 1997. V. 39. № 3. P. 305–314.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(96\)00025-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(96)00025-2)
15. *Baughman R.H., Shacklette J.M., Zakhidov A.A., Stafström S.* Negative Poisson's ratios as a common feature of cubic metals // *Nature.* 1998. V. 392. № 6674. P. 362–363.  
<https://doi.org/10.1038/32842>
16. *Lim T.-C.* Auxetic Materials and Structures. Singapore: Springer, 2015. <http://dx.doi.org/>  
<https://doi.org/10.1007/978-981-287-275-3>
17. *Sanami M.* Auxetic materials for biomedical applications // Thesis for the degree of Doctor of Philosophy. 2015. P. 1–252.
18. *Bhular S.K.* Three decades of auxetic polymers. Review // *e-Polymers.* 2015. V. 15. № 4. P. 205–215.  
<https://doi.org/10.1515/epoly-2014-0193>
19. *Hou X., Silberschmidt V.V.* Metamaterials with negative Poisson's ratio. A review of mechanical properties and deformation mechanisms // In: *Silberschmidt V., Matveenko V.* (eds) *Mechanics of Advanced Materials.* Engineering Materials. Springer, Cham. 2015. P. 155–179.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-319-17118-0\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-319-17118-0_7)
20. *Hu H., Zulifgar A.* Auxetic textile materials – A review // *J. Textile Eng. Fashion Technolog.* 2016. V. 1. № 1. P. 00001.  
<https://doi.org/10.15406/jteft.2017.01.00002>
21. *Saxena K.K., Das R., Calius E.P.* Three Decades of Auxetics Research–Materials with Negative Poisson's Ratio: A Review // *Adv. Eng. Mater.* 2016. V. 18. № 11. P. 1847–1870.  
<https://doi.org/10.1002/adem.201600053>
22. *Jiang J.-W., Kim S.Y., Park H.S.* Auxetic Nanomaterials: Recent Progress and Future Development, *Appl. Phys. Rev.*, 2016. V. 3. № 4. P. 041101.  
<https://doi.org/10.1063/1.4964479>
23. *Novak N., Vesenjnak M., Ren Z.* Auxetic cellular materials-a review // *Strojniški vestnik - Journal of Mechanical Engineering.* 2016. V. 62. № 9. P. 485–493.  
<https://doi.org/10.5545/sv-jme.2016.3656>

24. *Kolken H.M.A., Zadpoor A.A.* Auxetic Mechanical Metamaterials // RSC Adv. 2017. V. 7. № 9. P. 5111–5129.  
<https://doi.org/10.1039/C6RA27333E>
25. *Lakes R.S.* Negative-Poisson's-ratio materials: auxetic solids // Ann. Rev. Mater. Res. 2017. V. 47. P. 63–81.  
<https://doi.org/10.1146/annurev-matsci-070616-124118>
26. *Ma P., Chang Y., Boakae A., Jiang G.* Review on the knitted structures with auxetic effect // J. Textile Inst. 2017. V. 108. № 6. P. 947–961.  
<https://doi.org/10.1080/00405000.2016.1204901>
27. *Lim T.-C.* Analogies across auxetic models based on deformation mechanism // Phys. Status Solidi (RRL). 2017. T. 11. № 6. P. 1600440.  
<https://doi.org/10.1002/pssr.201770330>
28. *Duncan O., Shepherd T., Moroney C. et al.* Review of Auxetic Materials for Sports Applications: Expanding Options in Comfort and Protection // Appl. Sci. 2018. V. 8. № 6. P. 941.  
<https://doi.org/10.3390/app8060941>
29. *Ren X., Das R., Tran P. et al.* Auxetic Metamaterials and Structures: A Review // Smart Mater. Struct. 2018. V. 27. № 2. P. 023001.  
<https://doi.org/10.1088/1361-665X/aaa61c>
30. *Gunel O., Ranjbar M.* Review of auxetic materials // 1-st International Conference on Advances in Mechanical and Mechatronics Engineering “ICAMMEN-2018”. 10 p.
31. *Yu X., Zhou J., Liang H., Jiang Z., Wu L.* Mechanical metamaterials associated with stiffness, rigidity and compressibility: A brief review // Progr. Mater. Sci. 2018. V. 94. P. 114–175.  
<https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2017.12.003>
32. *Hosseinkhani A., Yjunesian D., Ranjbar M.* A short review on vibro-acoustic behavior of auxetic two-dimensional structures // 1-st International Conference on Advances in Mechanical and Mechatronics Engineering “ICAMMEN-2018”. 2018. 9 p.
33. *Duffy T.S.* Single-crystal elastic properties of minerals and related materials with cubic symmetry // Amer. Mineralog. 2018. V. 103. № 6. P. 977–988.  
<https://doi.org/10.2138/am-2018-6285>
34. *Peng R., Ma Y., Wu Q., Huang B., Dai Y.* Two-dimensional materials with intrinsic auxeticity: Progress and perspectives // Nanoscale. 2019. V. 11. № 24. P. 1413–1428.  
<https://doi.org/10.1039/C9NR03546J>
35. *Wu W., Hu W., Qian G. et al.* Mechanical design and multifunctional applications of chiral mechanical metamaterials: A review // Mater. Des. 2019. V. 180. P. 107950.  
<https://doi.org/10.1016/j.matdes.2019.107950>
36. *Yoo S., Park Q.-H.* Metamaterials and chiral sensing: A review of fundamentals and applications // Nanophotonics. 2019. V. 8. № 2. P. 249–261.  
<https://doi.org/10.1515/nanoph-2018-0167>
37. *Sayed U., Samarath A.* Auxetic polymers in textiles. Review // Int. J. Adv. Sci. Eng. 2019. V. 5. № 3. P. 1056–1063.  
<https://doi.org/10.29294/IJASE.5.3.2019.1056-1063>
38. *Lim T.-C.* Mechanics of Metamaterials with Negative Parameters. Singapore: Springer. 2020.
39. *Kelkar P.U., Kim H.S., Cho K.-H. et al.* Cellular Auxetic Structures for Mechanical Metamaterials: A Review // Sensors. 2020. V. 20. № 11. P. 3132.  
<https://doi.org/10.3390/s20113132>
40. *Mardling P., Alderson A., Jordan-Mahy N., Le Maitre C.* The use of auxetic materials in tissue engineering // Biomater. Sci. 2020. V. 8. № 8. P. 2074–2983.  
<https://doi.org/10.1039/C9BM01928F>
41. *Zang J., Lu G., You Z.* Large deformation and energy absorption of additively manufactured auxetic materials and structures: A review // Compos. B. Engineering. 2020. V. 201. P. 108340.  
<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2020.108340>
42. *Wang P., Luan C., Liao G. et al.* Progress in auxetic mechanical metamaterials: structures, characteristics, manufacturing methods and applications // Adv. Eng. Mater. 2020. V. 22. № 10. P. 2000312.  
<https://doi.org/10.1002/adem.202000312>

43. *Dugad R., Radhakrishna G., Gandhi A.* Recent advancements in manufacturing technologies of microcellular polymers. A review // *J. Polymer Res.* 2020. V. 27. № 7. P. 1–23.
44. *Tang H., Jiang X., Ling L. et al.* Highly tailorable electromechanical properties of auxetic piezoelectric ceramics with ultra-low porosity // *J. Americ. Ceramic Soc.* 2020. V. 103. № 11. P. 6330–6347.  
<https://doi.org/10.1111/jace.17356>
45. *Joseph A., Manesh V., Harursampath D.* On the application of additive manufacturing methods for auxetic structures: A review // *Adv. Manuf.* 2021. V. 9. № 3. P. 342–368.  
<https://doi.org/10.1007/s40436-021-00357-y>
46. *Luo C., Han C.Z., Ren X. et al.* Design, manufacturing and applications of auxetic tubular structures. A review // *Thin-Walled Struct.* 2021. V. 163. P. 107682.  
<https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107682>
47. *Francisco M.B., Pereira J.L.J., Oliver G.A. et al.* A review on the energy absorption response and structural applications of auxetic structures // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2021. P. 1–20.  
<https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1966143>
48. *Raistrick T., Zhang Z., Mistry D. et al.* Understanding the physics of the auxetic response in a liquid crystal elastomer // *Phys. Rev. Res.* 2021. V. 3 № 2. P. 023191.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.3.023191>
49. *Chang Y., Hu H.* 3D fabrics with negative Poisson's ratio. A review // *Appl. Compos. Mater.* 2021. № 1. P. 1–14.  
<https://doi.org/10.1007/s10443-021-09931-w>
50. *Cardoso J.O., Borges J.P., Velinho A.* Structural metamaterials with negative mechanical-thermo-mechanical indices. A review // *Progr. Natur. Sci. Mater. Int.* 2021. V. 31. № 6. P. 801–808.  
<https://doi.org/10.1016/j.pnsc.2021.10.015>
51. *Kim M.K., Kim S., Yun J.W. et al.* Design and manufacturing of mechanical metamaterials. A review. *Compos. Res.* 2021. V. 34. № 4. P. 199–211.  
<https://doi.org/10.7234/composres.2021.34.4.199>
52. *Alomarah A.* Mechanical properties novel auxetic structures // Thesis for the degree of Doctor of Philosophy. 2021. P. 1–290.
53. *Hayes M.A., Shuvalov A.* On the extreme values of Young's modulus, the shear modulus, and Poisson's ratio for cubic materials // *J. Appl. Mech.* 1998. V. 65. № 3. P. 786–787.  
<https://doi.org/10.1115/1.2789130>
54. *Lubarda V.A., Meyers M.A.* On the negative Poisson ratio in monocrystalline zinc // *Scr. Mater.* 1999. V. 40. P. 975–977.  
[https://doi.org/10.1016/S1359-6462\(99\)00039-1](https://doi.org/10.1016/S1359-6462(99)00039-1)
55. *Paczkwicz T., Pruchnik M., Wolski S.* Slowness surfaces and energy focusing patterns of auxetic cubic media // *Comput. Meth. Sci. Technol.* 2004. V. 10. № 2. P. 183–195.  
<https://doi.org/10.12921/cmst.2004.10.02.183-195>
56. *Tokmakova S.P.* Stereographic projections of Poisson's ratio in auxetic crystals // *Phys. Status Solidi B.* 2005. V. 242. № 3. P. 721–729.  
<https://doi.org/10.1002/pssb.200460389>
57. *Norris A.N.* Poisson's ratio in cubic materials // *Proc. R. Soc. A.* 2006. V. 462. № 2075. P. 3385–3405.  
<https://doi.org/10.1098/rspa.2006.1726>
58. *Paczkwicz T., Wolski S.* Anisotropic properties of mechanical characteristics and auxeticity of cubic crystalline media // *Phys. Status Solidi B.* 2007. V. 344. № 3. P. 966–977.  
<https://doi.org/10.1002/pssb.200572715>
59. *Paczkwicz T., Wolski S.* Elastic properties of cubic crystals: Every's versus Blackman's diagram // *J. Phys. Conf. Ser.* 2008. V. 104. P. 012038.  
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/104/1/012038>
60. *Branka A.C., Wojciechowski K.W.* Auxeticity of cubic materials. The role of repulsive core interaction // *J. Non-Cryst. Solids.* 2008. V. 354. P. 4143–4145.  
<https://doi.org/10.1016/j.jnoncrysol.2008.06.088>
61. *Branka A.C., Heyes D.M., Wojciechowski K.W.* Auxeticity of cubic materials // *Phys. Status Solidi B.* 2009. V. 246. № 9. P. 2063–2071.  
<https://doi.org/10.1002/pssb.200982037>

62. *Hughes T.P., Marmier A., Evans K.E.* Auxetic frameworks inspired by cubic crystals // *Int. J. Solids Struct.* 2010. V. 47. № 11–12. P. 1469–1476.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.02.002>
63. *Branka A.C., Heyes D.M., Wojciechowski K.W.* Auxeticity of cubic materials under pressure // *Phys. Status Solidi B.* 2011. V. 248. № 1. P. 96–104.  
<https://doi.org/10.1002/pssb.201083981>
64. *Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С.* Кубические ауксетики // *Докл. АН* 2011. Т. 439. № 2. С. 184–187.
65. *Лисовенко Д.С., Городцов В.А.* Кубические кристаллы с отрицательными коэффициентами Пуассона (кубические ауксетики) // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского* 2011. № 4 (2). С. 488–489.
66. *Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С.* Модуль Юнга кубических ауксетиков // *Письма о материалах* 2011. Т. 1. В. 3. С. 127–132.  
<https://doi.org/10.22226/2410-3535-2011-3-127-132>
67. *Branka A.C., Heyes D.M., Mackowiak Sz., et al.* Cubic materials in different auxetic regions: Linking microscopic to macroscopic formulations // *Phys. Status Solidi B.* 2012. V. 247. № 7. P. 1373–1378.  
<https://doi.org/10.1002/pssb.201084222>
68. *Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С.* Модуль сдвига кубических кристаллов // *Письма о материалах* 2012. Т. 2. № 1. С. 21–24.  
<https://doi.org/10.22226/2410-3535-2012-1-21-24>
69. *Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С.* Связь среднего коэффициента Пуассона с модулем Юнга для кубических кристаллов. Ауксетики в среднем // *Докл. АН.* 2012. Т. 443. № 6. С. 677–681.
70. *Paes V.Z.C., Mosca D.H.* Magnetostrictive contribution to Poisson ratio of galfenol // *J. Appl. Phys.* 2013. V. 114. № 12. P. 123915.  
<https://doi.org/10.1063/1.4822169>
71. *Tretiakov K.V., Wojciechowski K.W.* Elastic properties of fcc crystals of polydisperse soft spheres // *Phys. Status Solidi B.* 2013. V. 250. № 10. P. 2020–2029.  
<https://doi.org/10.1002/pssb.201384236>
72. *Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S.* Classification of cubic auxetics // *Phys. Status Solidi B.* 2013. V. 250. № 10. P. 2038–2043.  
<https://doi.org/10.1002/pssb.201384233>
73. *Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С., Волков М.А.* Отрицательный коэффициент Пуассона для кубических кристаллов и нано/микротрубок // *Физ. Мезомех.* 2013. Т. 16. № 6. С. 13–31.
74. *Tretiakov K.V., Wojciechowski K.W.* Partially auxetic behavior in fcc crystals of hard-core repulsive Yukawa particles // *Phys. Status Solidi B.* 2014. V. 251. № 2. P. 383–387.  
<https://doi.org/10.1002/pssb.201384244>
75. *Krasavin V.V., Krasavin A.V.* Auxetic properties of cubic metal single crystals // *Phys. Status Solidi B.* 2014. V. 251. № 11. P. 2314–2320.  
<https://doi.org/10.1002/pssb.201451129>
76. *Ho D.T., Park S.D., Kwon S.Y., Park K., Kim S.Y.* Negative Poisson's ratios in metal nanoplates // *Nat. Commun.* 2014. V. 5. № 1. P. 3255.  
<https://doi.org/10.1038/ncomms4255>
77. *Ho D.T.* Mechanical response and elastic instability of cubic bulk and nanoscale materials // *Thesis for the degree of Doctor of Philosophy.* 2015. P. 1–232.
78. *Ho D.T., Kim H., Kwon S.Y., Kim S.Y.* Auxeticity of face-centered cubic metal (001) nanoplates // *Phys. Status Solidi B.* 2015. V. 252. № 11. P. 1492–1501.
79. *Ерофеев В.И., Павлов И.С.* Параметрическая идентификация кристаллов, имеющих кубическую решетку, с отрицательными коэффициентами Пуассона // *Прикл. Мех. Техн. Физ.* 2015. Т. 56. № 6. С. 94–101.  
<https://doi.org/10.15372/PMTF20150611>
80. *Raghunas G., Flatan A.B.* Study of magnetic domain evolution in an auxetic plane of Galfenol using Kerr microscopy // *J. Appl. Phys.* 2015. Т. 117. № 17. С. 17E704.  
<https://doi.org/10.1063/1.4913727>

81. Ho D.T., Park S.D., Kwon S.Y., Han T.S., Kim S.Y. Negative Poisson's ratio in cubic materials along principal directions // *Phys. Status Solidi B*. 2016. V. 253. № 7. P. 1288–1294. <https://doi.org/10.1002/pssb.201600017>
82. Ho D.T., Kwon S.Y., Kim S.Y. Metal [100] nanowires with negative Poisson's ratio // *Sci. Reports* 2016. V. 6. № 1. P. 27560. <https://doi.org/10.1038/srep27560>
83. Cabras L., Brun M. A class of auxetic three-dimensional lattices // *J. Mech. Phys. Solids*. 2016. V. 91. P. 56–72. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.02.010>
84. Lisovenko D.S., Vaimova J.A., Rysaeva L.Kh., Gorodtsov V.A., Rudskoy A.I., Dmitriev S.V. Equilibrium diamond-like carbon nanostructures with cubic anisotropy: elastic properties // *Phys. Status Solidi B*. 2016. V. 253. № 7. P. 1303–1309. <https://doi.org/10.1002/pssb.201600049>
85. Епишин А.И., Лисовенко Д.С. Экстремальные значения коэффициента Пуассона кубических кристаллов // *Ж. Техн. физ.* 2016. Т. 16. № 10. С. 1516–1524. <http://journals.ioffe.ru/articles/43675>
86. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С., Волков М.А. Двухслойные трубки из кубических кристаллов // *Докл. АН* 2016. Т. 471. № 4. С. 414–420. <https://doi.org/10.7868/S0869565216340077>
87. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Кручение цилиндрически-анизотропных нано/микротрубок из кубических материалов, полученных сворачиванием кристаллографических плоскостей (011) // *Письма о материалах*. 2016. Т. 6. № 4. С. 249–252. <https://doi.org/10.22226/2410-3535-2016-4-249-252>
88. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S., Volkov M.A. Two-layered tubes from cubic crystals: auxetic tubes // *Phys. Status Solidi B*. 2017. V. 254. № 12. P. 1600815. <https://doi.org/10.1002/pssb.201600815>
89. Pięłowski P.M., Narojczyk J.W., Wojciechowski K.W., Tretiakov K.V. Auxeticity enhancement due to size polydispersity in fcc crystals of hard-core repulsive Yukawa particles // *Soft Matter*. 2017. V. 13. № 43. P. 7916–7921. <https://doi.org/10.1039/C7SM01231D>
90. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С., Волков М.А. Тонкие однородные двуслойные пластины из кубических кристаллов с различной ориентацией слоев // *Физ. Мезомех.* 2018. Т. 21. № 2. С. 5–13. <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2018-12001>
91. Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S., Lim T.-C. Three-layered plate exhibiting auxeticity based on stretching and bending modes // *Compos. Struct.* 2018. V. 194. P. 643–651. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.03.092>
92. Narojczyk J.W., Wojciechowski K.W. Poisson's ratio of the fcc hard sphere crystals with periodically stacked (001)-nanolayers of hard spheres of another diameter // *Materials*. 2019. V. 12. № 5. P. 700. <https://doi.org/10.3390/ma12050700>
93. Ho D.T., Nguyen C.T., Kwon S.Y., Kim S.Y. Auxeticity in metals and periodic metallic porous structures induced by elastic instabilities // *Phys. Status Solidi B*. 2019. V. 256. № 1. P. 1800122. <https://doi.org/10.1002/pssb.201800122>
94. Bryukhanov I.A., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S. Chiral Fe nanotubes with both negative Poisson's ratio and Poynting's effect. Atomistic simulation // *J. Phys.: Condens. Matter*. 2019. V. 31. № 47. P. 475304. <https://doi.org/10.1088/1361-648X/ab3a04>
95. Брюханов И.А., Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Атомистическое моделирование механических свойств хиральных металлических нанотрубок // *Физ. Мезомех.* 2019. Т. 22. № 5. С. 48–57. <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2019-16005>
96. Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Ауксетики среди материалов с кубической анизотропией // *Изв. РАН. МТТ*. 2020. № 4. С. 7–24. <https://doi.org/10.31857/S0572329920040054>

97. *Tretiakov K.V., Wojciechowski K.W.* The influence of the soft Yukawa potential and hard core interactions on auxeticity of the face centered cubic crystal of hard-core repulsive Yukawa particles // *Phys. Status Solidi B.* 2020. V. 257. № 10. P. 2000194.  
<https://doi.org/10.1002/pssb.202000194>
98. *Брюханов И.А., Волков М.А., Городцов В.А., Лисовенко Д.С.* Об упругих свойствах хиральных металлических нанотрубок из кубических кристаллов // *Физ. Мезомех.* 2021. Т. 24. № 1. С. 37–49.  
<https://doi.org/10.24411/1683-805X-2021-11003>
99. *Volkov M.A., Gorodtsov V.A., Fadeev E.P., Lisovenko D.S.* Stretching of chiral tubes obtained by rolling-up plates of cubic crystals with various orientations // *J. Mech. Mater. Struct.* 2021. V. 16. № 2. P. 139–157.  
<https://doi.org/10.2140/jomms.2021.16.139>
100. *Gorodtsov V.A., Volkov M.A., Lisovenko D.S.* Out-of-plane tension of thin two-layered plates of cubic crystals // *Phys. Status Solidi B.* 2021. V. 258. № 12. P. 2100184.  
<https://doi.org/10.1002/pssb.202100184>
101. *Narojczyk J.W., Wojciechowski K.W., Smardzewski J., Imre A.R., Grima J.N., Bilski M.* Cancellation of auxetic properties in F.C.C. hard sphere crystals by hybrid layer-channel nanoinclusions filled by hard spheres of another diameter // *Materials.* 2021. V. 14. № 11. P. 3008.  
<https://doi.org/10.3390/ma14113008>
102. *Narojczyk J.W., Bilski M., Grima J.N., Kędziora P., Morozow D., Rucki M., Wojciechowski K.W.* Removing auxetic properties in fcc hard sphere crystals by orthogonal nanochannels with hard spheres of another diameter // *Materials.* 2022. V. 15. № 3. P. 1134.  
<https://doi.org/10.3390/ma15031134>
103. *Narojczyk J.W., Tretiakov K.V., Wojciechowski K.W.* Partially auxetic properties of fcc hard sphere crystals with nanochannels of different sizes, parallel to [001]-direction and filled by other hard spheres // *Phys. Status Solidi B.* 2022. V. 259. № 6. P. 2200006.  
<https://doi.org/10.1002/pssb.202200006>
104. *Епишин А.И., Лисовенко Д.С.* Влияние кристаллической структуры и типа межатомной связи на упругие свойства одноатомных и двухатомных кубических кристаллов // *Изв. РАН. МТТ.* 2022. № 6. С. 79–96.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329922060058>
105. *Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S.* Longitudinal elastic tension of two-layered plates from isotropic auxetics-nonauxetics and cubic crystals // *Eur. J. Mech. A Solids.* 2017. V. 63. P. 122–127.  
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.01.001>
106. *Every A.G., McCurdy A.K.* Second and higher order elastic constants. Nelson D.E. (editor) // *Landolt-Börnstein. New Ser. Group III.* Springer, 1992. V. 29a.  
<https://doi.org/10.1007/b44185>
107. *Schärer U., Jung A., Wachter P.* Brillouin spectroscopy with surface acoustic waves on intermediate valent, doped SmS // *Phys. B.* 1998. V. 244. P. 148–153.  
[https://doi.org/10.1016/S0921-4526\(97\)00478-X](https://doi.org/10.1016/S0921-4526(97)00478-X)
108. *Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики // М.: Наука 1975. 680 с.
109. *Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С.* Связь среднего коэффициента Пуассона с модулем Юнга для кубических кристаллов. Ауксетики в среднем // *Докл. АН* 2012. Т. 443. № 6. С. 677–681.