

Известия

ISSN 0572-3299

Российской академии наук

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА



2023

2

СОДЕРЖАНИЕ

Механика дефектов в бездислокационных монокристаллах кремния <i>Н. А. Вerezуб, А. И. Простомолотов</i>	3
Оптимальный разгон или торможение массивных маховиков на пределе прочности <i>И. А. Бригаднов, В. В. Максаров, Ю. Ольт</i>	30
О динамике некоторых систем с ударами и односторонними связями <i>Г. М. Розенблат, С. В. Борисов</i>	42
Динамика ветроэнергетической установки с двумя подвижными массами, использующей эффект галопирования <i>Ю. Д. Селюцкий</i>	55
Алгоритм решения задач дискретного контакта для упругого слоя <i>А. А. Бобылев</i>	70
Цифровое средство производства — пакет для прочностного инженерного анализа как инструмент трансфера фундаментальных научных результатов в промышленность на примере пакета Фидесис и теории многократного наложения больших деформаций <i>В. А. Левин</i>	90
Об одном классе полурегулярных прецессий гиростата с переменным гиросtatическим моментом <i>Г. В. Горр</i>	115
Задача граничного управления смещением на двух концах процессом колебания стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости <i>В. Р. Барсегян</i>	125
О вязкопластическом течении в материале цилиндрического слоя, насаженного на жесткий вал в условиях его переменного вращения <i>С. В. Фирсов</i>	136
Всплытие подводного газового трубопровода <i>М. А. Ильгамов</i>	147
К вопросу кручения анизотропных стержней, находящихся под действием внешнего давления <i>Б. Г. Миронов, Ю. Б. Миронов</i>	160
Расчет износа радиального подшипника скольжения при случайно изменяющихся температуре и нагрузке <i>И. А. Солдатенков</i>	166
Экспериментальное исследование свойств ауссетических и неауссетических метаматериалов из металла при проникании в них жестких ударников <i>С. Ю. Иванова, К. Ю. Осипенко, В. А. Кузнецов, Н. Г. Соловьев, Н. В. Баничук, Д. С. Лисовенко</i>	176

УДК 621.315.592

МЕХАНИКА ДЕФЕКТОВ В БЕЗДИСЛОКАЦИОННЫХ МОНОКРИСТАЛЛАХ КРЕМНИЯ

© 2023 г. Н. А. Вerezub^{a,*}, А. И. Простомолотов^{a,**}

^aИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: verezub@ipmnet.ru

**e-mail: aprosto@inbox.ru

Поступила в редакцию 03.08.2022 г.

После доработки 16.08.2022 г.

Принята к публикации 22.08.2022 г.

Задачи механики дефектов в бездислокационных монокристаллах кремния являются актуальными и технически значимыми в связи с интенсивным развитием микроэлектроники, которая предъявляет все более высокие требования по минимизации уровня микро- и нанодфектов в пластинах кремния, используемых для изготовления микроэлектронных чипов. Решение этих задач связано с изучением закономерностей термомеханических процессов как на стадии выращивания монокристаллов кремния, так и на последующих термообработках вырезаемых из них пластин. В статье дается обзор теоретических и экспериментальных работ, направленных на разработку способов управления этими процессами. Это включает развитие физических представлений о дефектообразовании в бездислокационном монокристаллическом кремнии и разработку математических моделей, соответствующих различным температурным диапазонам, реализуемым как при выращивании монокристалла, так и при термообработке, вырезаемых из него пластин. Так, вблизи температуры кристаллизации моделируются процессы быстрой рекомбинации и диффузионного переноса собственных точечных дефектов (вакансий и межузельных атомов кремния), а при более низких температурах моделируются процессы их агломерации в микродефекты (поры и кластеры межузельных атомов кремния). Иллюстрируется верификация таких моделей для двух экспериментальных процессов выращивания монокристаллов кремния диаметром 150 мм методом Чохральского, а также для процесса быстрой высокотемпературной термообработки вырезанных на их основе пластин кремния.

Ключевые слова: монокристалл, кремний, метод Чохральского, собственный точечный дефект, рекомбинация, микродефект, диффузия, моделирование, термообработка

DOI: 10.31857/S057232992260061X, EDN: DHFWUC

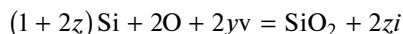
1. Развитие представлений о дефектообразовании в бездислокационных монокристаллах кремния. К началу 1980-х годов накопилось достаточно много экспериментальных данных о дефектах, названных D-дефектами, образующимися из избыточных вакансий при выращивании кристаллов методом зонной плавки (ЗП) с большими скоростями вытягивания [1]. Они нашли отражение в фундаментальной статье Воронкова [2], в которой предложена физическая концепция взаимодействия собственных точечных дефектов (СТД): вакансий и межузельных атомов кремния применительно к выращиванию монокристаллического бездислокационного кремния.

Согласно этой концепции, вблизи фронта кристаллизации (ФК) происходит “быстрая” рекомбинация вакансий (i) и собственных межузельных атомов (v), в результате которой монокристалл растет с преобладанием вакансий или межузельных атомов кремния (или по принятой терминологии: в вакансионном или межузельном режимах). Впервые было предложено количественно это оценивать по некоторой критической величине ξ_{crit} , которая определяется как отношение скорости вытягивания V_p к осевому градиенту температур G на ФК. Так, при $\xi = V_p/G < \xi_{\text{crit}}$ доминируют межузельные атомы, а при $\xi > \xi_{\text{crit}}$ — вакансии. Если осевой градиент температуры меняется значительно в радиальном сечении растущего монокристалла кремния, то величина ξ может становиться больше ξ_{crit} в центральной части слитка и там преобладают вакансии, а при ξ меньшей ξ_{crit} на периферии поперечного сечения слитка преобладают межузельные атомы. Однако математическая модель этой концепции была представлена только в одномерной (по оси слитка) формулировке.

Расчеты в [2] проведены на основе одномерной стационарной модели v-i-рекомбинации. Данные о тепловом поле в кристалле считаются известными и задаются как аналитически, так и из эксперимента или других расчетных работ [3]. Результаты таких расчетов в [4] позволили оценить тип и распределения остаточных СТД-концентраций в растущем кристалле в зависимости от величины ξ . Показано, что значительная остаточная концентрация вакансий возникает, если скорость роста превышает критическую скорость $(V_p)_{\text{crit}} = \xi_{\text{crit}} \cdot G$ и она увеличивается при возрастании $V_p/(V_p)_{\text{crit}}$. Также показано, что концентрация ростовых межузельных атомов при $V_p < (V_p)_{\text{crit}}$ является убывающей функцией от $V_p/(V_p)_{\text{crit}}$. Концентрации ростовых дефектов, т.е. вакансий при $V_p \gg (V_p)_{\text{crit}}$ и межузельных атомов при $V_p \ll (V_p)_{\text{crit}}$, оцениваются величиной $\sim 10^{14} \text{ см}^{-3}$.

В начале 1990-х годов эта концепция была экспериментально подтверждена после обнаружения частиц кристаллического происхождения, являющихся результатом образования дефектов в монокристаллах, выращенных по методу Чохральского (МЧ). Эксперименты выявили образование в монокристаллах OSF (Oxidation-induced Stacking Fault nuclei) — кольца. Доминирующими типами СТД снаружи и внутри OSF-кольца являются межузельные атомы и вакансии соответственно.

В последующие годы был систематизирован обширный экспериментальный материал по свойствам кислорода в МЧ- и ЗП-выращиваемых монокристаллах кремния, а также проанализировано поведение электрически активных кислородных комплексов в термообработанном кремнии и механизмы преципитации кислорода в нем [5]. Сложилось мнение, что образование кислородных преципитатов SiO_2 связано с эмиссией межузельных атомов кремния и абсорбцией вакансий по следующей реакции:



где z и y — фракции эмитированных межузельных атомов и абсорбированных вакансий на атом кислорода в преципитате SiO_2 . Основное влияние на образование преципитата оказывают кислородно-вакансионные комплексы $v_m\text{O}$. Микродефекты такого типа являются вакансионными и называются D-дефектами. Экспериментально эти дефекты проявляются различно в зависимости от измерительного метода и имеют различные названия: LSTD (Laser Scattering Tomography Defects), COP (Crystal Originated Particles), FPD (Flow Pattern Defects). Теоретический подход описан в [6], где рассматривается образование микродефектов вакансионного типа (пор и оксидных частиц). Зарождение кластеров межузельных атомов рассмотрено также в монографии [1]. Оно происходит в узком интервале температур вблизи температуры плавления T_m ($T = T_m - 300 \text{ K}$), его описание аналогично процессу образования вакансионных пор с заменой вакансионной диффузии на диффузию межузельных атомов. Предполагает-

ся, что первичные межузельные кластеры превращаются затем в А- и В-дефекты. Это подтверждается оценками концентрации кластеров, которая сравнима по порядку с концентрацией А-дефектов и существенно меньше концентрации В-дефектов.

Дальнейшее охлаждение приводит к сильному стоку вакансий в поры. Он будет практически полным, если вакансии не связаны кислородом в комплексы vO_2 ниже некоторой характеристической температуры T_b ($\sim 1020^\circ\text{C}$). Вакансии, оставшиеся после поглощения порами, участвуют в зарождении оксидных частиц при дальнейшем охлаждении (ниже 950°C). Величина остаточной концентрации вакансий определяет зарождение кислородных кластеров при более низких температурах ($650\text{--}700^\circ\text{C}$).

Сопутствующие работы позволили получить необходимые экспериментальные данные. Так, в [7] обсуждается величина равновесного коэффициента распределения (k_0) кислорода в расплаве кремния на основе ростовых процессов по МЧ и исследования распределений кислорода в кристаллах. При этом сделан неожиданный вывод о том, что этот коэффициент соответствует оттеснению кислорода от ФК и его величина изменяется в узком диапазоне, меньшем 1: $k_0 = 0.2\text{--}0.3$. В [8] дается обзор методов измерения термофизических свойств СТД в кремнии (самодиффузия кремния, в том числе в неравновесных условиях), а также приводятся температурные зависимости коэффициента диффузии. В [9] описана методика теста пластин кремния после химической обработки и полировки на выявление OSF-кольца для осуществления качественного контроля в производственных условиях, реализуемых на заводе ЭЛМА (г. Зеленоград).

Большой объем ростовых экспериментов проведен в [10]. Анализ ростовых микродефектов выполнен для монокристаллов кремния, выращенных в условиях вакансионного пересыщения. Анализируются высокочистые 3П-кристаллы кремния диаметром 2, 3 и 4 дюйма. Скорость роста была 3 мм/мин, $\xi = 0.210 \text{ мм}^2/\text{K} \cdot \text{мин}$ и $V_p/(V_p)_{\text{crit}} = 1.4$. Плотность ростовых микродефектов была малой: $10^1\text{--}10^2 \text{ см}^{-2}$, основными дефектами считаются скользящие 60° -дислокации, плотность которых достигает $10^6\text{--}10^6 \text{ см}^{-2}$, их размер 50–100 нм. Показано, что генерация скользящих дислокаций связана с образованием пор, которые являются следствием агломерации вакансий при очень больших скоростях роста.

Интересна связь напряженного состояния монокристалла кремния с наличием микродефектов. Так, в [11] обсуждаются причины большого разброса значений критического напряжения для монокристаллов кремния: $60\text{--}150 \text{ Гс/мм}^2$. Данные получены при статическом нагружении образцов при высоких температурах и экстраполяции значений к T_m . Такой разброс свидетельствует о том, что в кристаллах кремния присутствуют источники дислокаций различной природы и разных размеров. Такими источниками могут служить микроскопические дислокационные петли, возникающие в охлаждающемся кристалле в результате трансформации кластеров точечных дефектов. Дислокации могут зарождаться и на преципитатах примеси. В промышленных условиях нарушение бездислокационного роста чаще всего обусловлено попаданием в расплав инородных частиц. В этом случае величины термоупругих напряжений являются несущественными и оптимизация тепловых режимов должна проводиться с учетом условий образования и осаждения монооксида кремния.

Для 3П-выращивания математические модели v - i -рекомбинации и образования вакансионных кластеров типа vO_2 рассмотрены в целом ряде работ. В [12] приведены совместно математическая модель v - i -взаимодействия и термоупругие напряжения при выращивании кристаллов кремния диаметром 200 мм. В [13] выполнено численное моделирование и проанализировано радиальное распределение электропроводимости в монокристаллах кремния, выращенных 3П-методом. Численное моделирование проведено на основе “глобальной” тепловой 3П-модели, в которой учитываются

тепловая конвекция и вращение кристалла с определением формы расплавленной зоны и расчетом индукционного энерговыделения. Также в [14] численно изучено влияние высокочастотного нагрева на изменения электропроводимости, а в [15] проведено численное моделирование взаимодействия СТД при ЗП-выращивании монокристаллов кремния малого диаметра (0.8 дюйма) для различных коэффициентов диффузии и энергетических порогов процесса v - i -рекомбинации, позволившее дать сравнение с данными расчетов по модели В.В. Воронкова [2] и измерениями распределений микродефектов DLTS (Deep Layer Transition metal Spectroscopy) [16].

Для МЧ-выращивания в [3, 17, 18] образование вакансионных кластеров рассматривается на основе двумерной стационарной модели v - i -рекомбинации и двумерного теплового поля в кристалле, которое предварительно рассчитывается в рамках “глобальной” тепловой МЧ-модели. В [19, 20] тепловое поле полагается известным из эксперимента и рассматривается нестационарную двумерную модель v - i -рекомбинации совместно с моделью образования вакансионных кластеров. В [21] для расчета равновесных конфигураций и коэффициентов диффузии использовался межатомный потенциал Штиллингера–Вебера и показано хорошее согласие расчетного распределения межузельных атомов с экспериментальным.

В [17] представлена стационарная модель СТД-взаимодействия, которая включает все возможные процессы: движение при вытягивании кристалла, СТД-диффузию и термодиффузию, а также v - i -рекомбинацию. Показано хорошее соответствие критерию Воронкова при значении $\xi_{\text{crit}} = 0.134 \text{ мм}^2/\text{мин} \cdot \text{К}$. Обсуждается ситуация, когда осевой температурный градиент на ФК постепенно снижается при постоянной скорости выращивания монокристалла. В этом случае область, образованная дефектами А- и В-типа, ограничивается узкими полосами различного типа (с В-дефектами, без дефектов и с нарушениями кристаллической структуры). После отжига в окислительной атмосфере в области этих полос проявляется OSF-кольцо. Подтверждается гипотеза, что ростовыми дефектами в монокристаллах кремния вакансионного типа, выращенных по МЧ, являются поры и оксидные частицы. Они гетерогенно зарождаются в узком температурном диапазоне (1100–1000°C), в зависимости от начальной концентрации вакансий. Доминирующим типом ростовых дефектов обычно являются поры. Их плотность приблизительно равна $3 \times 10^6 \text{ см}^{-3}$, радиус — 55 нм. Снижение начальной концентрации вакансий приводит к смене доминирующего типа микродефектов с пор на оксидные частицы. Их плотность и радиус оцениваются в $3 \times 10^8 \text{ см}^{-3}$ и 5 нм. Поскольку снижение начальной концентрации вакансий происходит от центра кристалла к его боковой поверхности (или по направлению к границе между вакансиями и межузельными атомами), то вакансионная область состоит из внутренней части, образованной порами, и узкой внешней полосы из оксидных частиц.

Существует альтернативный подход к пониманию дефектообразования в кремнии [22], где представлена иная (чем модель Воронкова [2]) физическая модель образования микродефектов в бездислокационных монокристаллах кремния на основе экспериментального материала (для небольших диаметров кристаллов по данным Запорожского титаномagneйного комбината). Обсуждаются процессы дефектообразования при широком варьировании условий выращивания монокристаллов. Анализируется влияние условий изготовления приборных композиций и имитационных термических обработок на образование, трансформацию и электрическую активность микродефектов. Рассматривается механизм образования ростовых микродефектов с учетом полученных результатов. Отметим, что в [22] развивается подход на основе предположений о гетерогенной природе образования и трансформации ростовых микродефектов. В обоснование этого подхода авторы отмечают, что динамика СТД в физической модели В.В. Воронкова определяется процессом рекомбинации СТД и не учитывает влияние фоновых примесей (кислорода и углерода). Их экспериментальные данные

дали основания для предположения о высоком барьере для СТД-рекомбинации и преобладании диффузии примесей и их комплексов. Однако известно, что В.В. Воронков использовал данные для монокристаллов с малой концентрацией фоновых примесей, поэтому в его тестах достаточно точно выполнялось условие “быстрой” СТД-рекомбинации. Авторы [22] использовали монокристаллы с высоким содержанием примесей, которые препятствуют “быстрой” рекомбинации СТД, что отразилось в их оценках, показавших существенное повышение энергетического порога СТД-рекомбинации.

В целом можно отметить наиболее важные температурные диапазоны, определяющие математические модели дефектообразования. Температурная зона, прилегающая к ФК (от 1683 до ~1450 К), соответствует рекомбинации собственных точечных дефектов (вакансий и межузельных атомов кремния) и образованию первичных микродефектов, связанных с распадом пересыщенного твердого раствора СТД. Далее по мере понижения температуры в зоне 1450–1100 К происходит другой физический процесс с участием кислорода, поэтому важно регулировать тепловые условия как непосредственно вблизи ФК, так и на удалении от него, где образуются микродефекты (вакансионно-кислородные комплексы). Управление дефектообразованием в этих температурных зонах является важной задачей, актуальность которой стимулировала разработку двумерных математических моделей дефектообразования в сопряжении с сопряженной тепловой моделью выращивания монокристалла для учета особенностей конкретной МЧ-установки.

2. Верификация моделей дефектообразования на основе данных технологических экспериментов по МЧ-выращиванию монокристаллов кремния. Ввиду большой практической значимости малодефектного бездислокационного монокристаллического кремния упомянутые выше модели дефектообразования тестировались в ряде ведущих промышленных фирм и университетов применительно к самому распространенному промышленному выращиванию монокристаллов кремния – МЧ-процессу. Для расчета дефектообразования в конкретных ростовых процессах применяется двухмерное математическое моделирование на основе “глобальной” тепловой МЧ-модели.

Авторами из *Massachusetts Institute of Technology* [3, 18] сопряженное тепловое моделирование выполнено по программе *INTCM* применительно к МЧ-выращиванию кристалла диаметром 150 мм из тигля диаметром 440 мм при вращении кристалла и тигля со скоростями 15 и 9 об/мин, соответственно. Результаты такого теплового моделирования использованы в модели “быстрой” v - i -рекомбинации [17, 23], где изучается СТД-взаимодействие как в процессе МЧ-выращивания монокристаллов кремния, так и при отжиге вырезаемых из них пластин. При этом отмечается, что в большинстве работ используются недостаточно точные коэффициенты диффузии, равновесной концентрации и кинетических параметров, а также анализируются различные методики их определения. Например, в [17] величина ξ_{crit} для OSF-кольца была равна $0.134 \text{ мм}^2/\text{мин} \cdot \text{К}$, хотя в [24] авторы предлагают более высокое ее значение $0.22 \text{ мм}^2/\text{мин} \cdot \text{К}$. Можно отметить, что такое отличие может быть вызвано различием методик и программ для сопряженного теплового моделирования: в первом случае использовалась программа *FEMAG*, а во втором – *ABAQUS*.

В целом отметим, что критерий В.В. Воронкова ξ_{crit} , определяемый как отношение скорости вытягивания монокристалла кремния к осевому температурному градиенту $V_p/G [\text{мм}^2/\text{мин} \cdot \text{К}]$, не является автомодельной безразмерной величиной, поэтому его значения могут варьироваться для разных процессов МЧ- и ЗП-выращивания монокристаллов кремния. На значение ξ_{crit} влияет как диаметр выращиваемого монокристалла, так и величина радиальной неоднородности осевого температурного градиента G на ФК. Однако значительные отличия ξ_{crit} в [24] могут объясняться неточностью расчета температурных градиентов в МЧ-процессе, т.к. по результатам многих других

МЧ-процессов выращивания для фиксированного диаметра монокристалла и близких тепловых условий выращивания (на схожих тепловых МЧ-установках) значения ξ_{crit} являются близкими к 0.13. Это свидетельствует о достоверности этой величины и объясняет ее широкое использование в технологической практике. Для единообразия мы поправили в тексте значения ξ_{crit} до двух значащих цифр.

Авторами из *Samsung Electronics Co.* [25] экспериментально исследовано влияние ростовых микродефектов на качество пластин кремния, DRAM-память и другие приборные элементы, изготавливаемые на их основе. Обсуждаются механизмы возникновения различных типов микродефектов в монокристаллах кремния при МЧ-выращивании, а также применимость критерия В.В. Воронкова для обоснования способов получения совершенных кристаллов.

Авторами из *Mitsubishi Materials Silicon Co.* [26] обсуждается роль СТД в образовании центров преципитации кислорода в бездислокационном кремнии. В рамках модели В.В. Воронкова объясняется преципитация кислорода — формирование центров преципитации в растущем кристалле. Выполнено математическое моделирование распределений микродефектов на основе данных теплового моделирования МЧ, проведенного по программе *FEMAG*. Дано сравнение распределений осевого градиента температуры G на ФК без и с учетом конвекции в расплаве, рассчитанной по двум моделям турбулентности. Обсуждается сравнение формы OSF-кольца с данными расчетов СТД-концентраций.

Авторами из *Shin-Etsu Handotai Co.* [27–29] экспериментально изучено влияние диаметра кристалла и скорости его вытягивания из расплава на образование ростовых микродефектов в МЧ-кремнии. Проведены измерения температур в кристалле вблизи ФК с помощью термопар и обсуждается механизм образования ростовых микродефектов. Исследовано 6 слитков кремния разного диаметра (200, 150, 125, 100, 75, 50 мм) и длиной 30 см, выращенных из загрузки 70 кг в одинаковых условиях. Все кристаллы были ориентации $\langle 100 \rangle$, p -типа с удельным сопротивлением 10–20 Ом · см. Для анализа микродефектов использован метод определения времени жизни электрических носителей. В работе критикуется величина критерия В.В. Воронкова ξ_{crit} и его использование в других работах, где проведены расчеты по программе *FEMAG*.

Авторами из *Kotmatsu Electronic Metals Co.* [19, 20] рассмотрена количественная модель образования ростовых дефектов в монокристаллах МЧ-кремния. В [19] численно исследована зависимость распределений СТД от ростовых условий и дано ее сравнение с экспериментальными данными. В [20] определяются равновесные концентрации (C_{ve} , C_{ie}) и коэффициенты диффузии (D_{v} , D_{i}) межузельных атомов и вакансий в кристаллах кремния на основе анализа поведения ростовых микродефектов. При значениях ξ_{crit} возникают условия для образования совершенной структуры кристалла, что проверено по расчетным распределениям микродефектов в кристаллах. Утверждается, что определяющими для величины ξ_{crit} являются значения температурного градиента на кромке ФК.

Авторы из *Osaka University* [30] теоретически обосновывают значения равновесных СТД-концентраций в различных условиях МЧ-выращивания кристаллов кремния. Рассматриваются равновесные концентрации на поверхности кристалла, в его объеме и во время образования вторичных дефектов, т.е. дислокационных петель и пор. Утверждается, что формула для расчета равновесной СТД-концентрации не может быть одной и той же во время всего ростового процесса. В целом, сделанные оценки согласуются с выводами В.В. Воронкова в [4].

Авторами из *Nippon Steel Co.* [31] экспериментально изучалось влияние легирования азотом на образование ростовых микродефектов. Это относится к образованию пор и оксидных преципитатов, содержащих азот. Характеристики этих дефектов зависят от концентрации азота. Обычно концентрация пор уменьшается при увеличении кон-

центрации азота и лишь небольшое количество пор наблюдается в кристалле, легированном азотом до концентрации выше 10^{15} см^{-3} . В таких кристаллах оксидные преципитаты, содержащие азот и кислород, стабильно растут при большой температуре $\sim 1100^\circ\text{C}$. Из ростовых экспериментов следует, что азот подавляет рост пор, в результате чего остается большее число свободных вакансий, которые становятся центрами роста оксидных преципитатов.

Авторами из *Sumitomo Metal Industries Ltd.* [24] обсуждаются измерения микродефектов в монокристалле кремния диаметром 150 мм, легированного бором ($15.5\text{--}100 \text{ Ом} \cdot \text{см}$), выращенного в направлении $\langle 100 \rangle$. Концентрация кислорода составляет $1.5 \times 10^{17} \text{ см}^{-3}$, скорость вытягивания $V_p = 1.2\text{--}0.7 \text{ мм/мин}$, длина $L = 50 \text{ см}$.

Авторами из *Tokyo Institute of Technology* [32] рассматривается модель для расчета распределений и размеров пор. При использовании расчетной концентрации точечных дефектов эта модель позволяет вычислять образование пор и их рост при $T < 1150^\circ\text{C}$. По этой модели можно также рассчитывать толщину окисной пленки, которая образуется на внутренней стенке поры. Считается, что эта модель может быть адаптирована к высокой концентрации примесей (В, Р, As, Sb). В [33] рассматривается модель оксидной преципитации при отжиге пластин кремния. Морфология преципитата определяется из условия минимума свободной энергии. Моделирование начинается при 1000°C с входной концентрацией остаточных точечных дефектов после СОР-образования. Плотность и скорость роста преципитатов согласуется с экспериментом. В [34] исследовано влияние осевых температурных градиентов на образование ростовых дефектов при выращивании кристалла при $G_a > G_e$ (G_a — градиент на оси, G_e — на боковой поверхности кристалла), что необычно для МЧ-выращивания. Установлено, что при изменении скорости вытягивания V_p форма OSF-кольца преобразуется в W-образный профиль, который не обнаруживался ранее. W-образная форма OSF-кольца приводит к инверсии распределения ростовых микродефектов внутри и вне кольца: пластины включали дислокационные кластеры внутри кольца, а поры были вне этого кольца.

Авторами из *Zhejiang University (Hangzhou, China)* [35] дано сравнение поведения OSF-дефектов в легированных и нелегированных азотом монокристаллах кремния. Образцы подвергались одной и двум стадиям термоотжига. Размер и плотность OSF-дефектов изучались с помощью оптического и электронного микроскопов. Обнаружено, что при быстрой низкотемпературной термообработке ($\sim 750^\circ\text{C}$) OSF-дефекты лучше проявляются в кристаллах кремния, легированных азотом (АМЧ). Однако с увеличением времени термообработки плотность OSF-дефектов не изменяется в АМЧ-кремнии, но значительно увеличивается в МЧ-кремнии, при этом размер OSF-дефектов становится больше.

3. Математическая модель быстрой СТД-рекомбинации и переноса. Данную статью следует рассматривать в комплексе с предшествующей статьей [36], посвященной разработке сопряженной термомеханической модели МЧ-выращивания монокристаллов кремния. Отметим, что упомянутые в п. 2 программы *IHTCM* и *FEMAG* также предназначены для решения задач сопряженного теплопереноса (с учетом сложной геометрии установки, расчетом кондуктивного теплообмена и теплового излучения, гидродинамики расплава, процесса кристаллизации) при выращивании монокристаллов МЧ-кремния. В этих программах применяется конечно-элементная аппроксимация, гидродинамика расплава в МЧ-модели рассчитывается с использованием турбулентных моделей. В целом методические основы этих программ соответствуют функциональным возможностям компьютерной программы, применяемой авторами статьи [36].

Такое комплексное исследование проводилось авторами статьи в течение ряда лет в кооперации с ведущими отечественными и зарубежными технологическими организациями (*ГИРЕДМЕТ, ЭЛМА, MEMC Inc.*).

Физическая суть модели дефектообразования В.В. Воронкова состоит в том, что аннигиляция вакансий и межузельных атомов вблизи ФК в значительной степени определяет их последующую миграцию и распределение в кристалле. Скорость аннигиляции равна разности между скоростями прямой реакции рекомбинации и обратной реакции термической генерации пар STD. Скорость прямой (бинарной) реакции рекомбинации пропорциональна произведению концентраций взаимодействующих STD. Скорость обратной реакции связана со скоростью прямой реакции законом действующих масс. Таким образом, скорость аннигиляции записывается в виде:

$$\omega = K_{iv}(C_v C_i - C_{ve} C_{ie})$$

где K_{iv} — коэффициент скорости реакции (коэффициент рекомбинации).

В выращиваемом МЧ-кристалле кремния перенос вакансий и межузельных атомов осуществляется в основном конвективной диффузией, процессом термодиффузии мы пренебрегаем. Концентрации $C_v(r, z, t)$ — вакансий и $C_i(r, z, t)$ — межузельных атомов удовлетворяют диффузионно-рекомбинационным уравнениям [37]:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \text{div}(D_i \nabla C_i) - V_P \frac{\partial C_i}{\partial z} - K_{iv}(C_v C_i - C_{ve} C_{ie}) \quad (3.1)$$

Коэффициенты диффузии (D_v , D_i) и равновесные концентрации вакансий и межузельных атомов (C_{ve} , C_{ie}) удобно задавать с использованием их значений в точке плавления (T_m) следующим образом:

$$D_v(T) = D_{vm} \exp\left(-\frac{E_{vD}}{kT} + \frac{E_{vD}}{kT_m}\right), \quad D_i(T) = D_{im} \exp\left(-\frac{E_{iD}}{kT} + \frac{E_{iD}}{kT_m}\right)$$

$$C_{ve}(T) = C_{vm} \exp\left(-\frac{E_v}{kT} + \frac{E_v}{kT_m}\right), \quad C_{ie}(T) = C_{im} \exp\left(-\frac{E_i}{kT} + \frac{E_i}{kT_m}\right)$$

Индекс m соответствует значению данной величины при температуре плавления (кристаллизации) T_m . Коэффициент рекомбинации записывается в виде:

$$K_{iv} = A_{iv}(D_v + D_i) \exp\left(-\frac{E_{rec}}{kT}\right)$$

где $A_{iv} = 4\pi r_{cap}$ (r_{cap} — радиус, E_{rec} — энергия рекомбинации). Здесь величины E_{vD} , E_{iD} — энергии активации для диффузии, а E_v , E_i — энергии образования дефектов. В формулах использованы константы: температура плавления кремния $T_m = 1683$ К и постоянная Больцмана $k = 8.625 \times 10^{-5}$ эВ/К. В данном случае требуется задать 9 параметров.

Хотя полный набор констант в точности неизвестен, они связаны между собой определенными соотношениями.

Во-первых, известные данные по коэффициенту самодиффузии кремния и по диффузии в нем ряда примесей (Au, Zn и др.) позволяют оценить величину произведений $D_i C_{ie}$, т.е. сумму энергий $E_{iD} + E_i = 4.8$ эВ и $D_{im} \times C_{im} \approx 2.6 \times 10^{11} \text{ с}^{-1} \text{ см}^{-1}$.

Во-вторых, значение ξ_{crit} для перехода от межузельного к вакансионному режиму роста (в рамках одномерной диффузионной задачи для малых значений E_{iD} и E_{vD}) приближенно оценивается следующей формулой (см. [4]):

Таблица 1. Параметры СТД-модели

Коэффициент диффузии вакансий	D_{vm}	см ² /с	4.0×10^{-5}
Коэффициент диффузии межузельных атомов кремния	D_{im}	см ² /с	5.25×10^{-4}
Диффузионный порог вакансий	E_{vD}	эВ	0.35
Диффузионный порог межузельных атомов кремния	E_{iD}	эВ	0.20
Равновесная концентрация вакансий	C_{vm}	см ⁻³	7.2×10^{14}
Равновесная концентрация межузельных атомов кремния	C_{im}	см ⁻³	5.2×10^{14}
Равновесный порог образования вакансий	E_v	эВ	4.5
Равновесный порог образования межузельных атомов кремния	E_i	эВ	4.6

$$\xi_{crit} = \frac{(E_v + E_i)(D_{im}C_{im} - D_{vm}C_{vm})}{2kT_m^2(C_{vm} - C_{im})}$$

откуда при заданных значениях E_v , E_i , D_{vm} и D_{im} вычисляется величина C_{vm}/C_{im} .

В-третьих, константа D_{im} может рассматриваться как подгоночный параметр, который логично выбирать в интервале значений $(2.0\text{--}5.5) \times 10^{-4}$ см²/с и нужно изменять значения C_{vm} и C_{im} в соответствии с величиной ξ_{crit} . Значению $\xi_{crit} = 0.13$ мм²/К · мин соответствуют параметры из табл. 1.

Можно отметить, что по результатам процессов выращивания монокристаллов кремния диаметром 100 и 150 мм критерий В.В. Воронкова ξ_{crit} остается близким к значению 0.13 мм²/мин · К. Небольшая 9%-я его вариация в разных процессах может быть вызвана различиями в расчетных программах и реальных тепловых условиях выращивания монокристаллов кремния. Этот критерий широко используется в технологической практике, хотя не является автоматической и безразмерной величиной.

Значение параметра E_{rec} неизвестно. При его выборе требуется выполнение условия “быстрой” рекомбинации, в результате которой “выживающий” СТД должен быть абсолютно преобладающим. Это условие выполняется, если E_{rec} не превышает 1.5 эВ. Нами использована величина $E_{rec} = 1.5$ эВ. Радиус рекомбинации r_{cap} принят равным 3.0×10^{-8} см.

На рис. 1 показана расчетная схема v-i-взаимодействия в кристалле кремния. Здесь справа от оси симметрии Γ_1 : ФК – Γ_2 и $z = H_0$ – его вогнутость, боковая поверхность кристалла Γ_3 , верхняя граница Γ_4 при $z = H$ области v-i-взаимодействия. Слева от оси показана расчетная сетка треугольных конечных элементов. В проведенных расчетах: $H = 11.5$ см. Задаются граничные условия:

$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0 \quad (\text{на участках } \Gamma_1, \Gamma_4)$$

$$C = C_e \quad (\text{на участках } \Gamma_2, \Gamma_3)$$

Здесь C соответствует текущим значениям C_v или C_i , а C_e – отвечающим им значениям равновесной концентрации.

Для теста по данным одномерной рекомбинационной модели температурное поле в кристалле задавалось зависящим только от z :

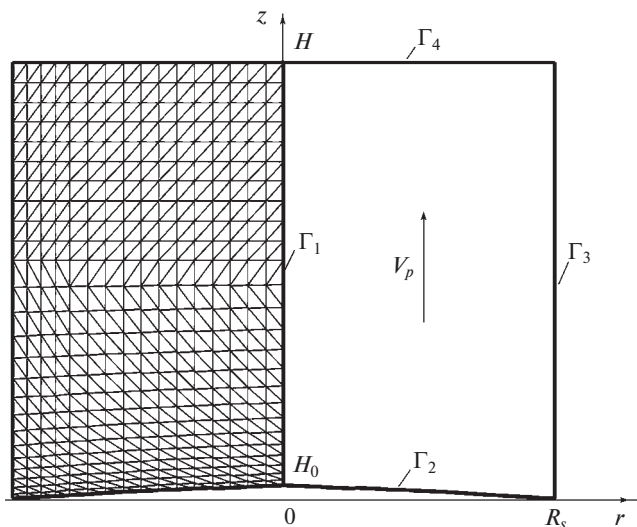


Рис. 1. Расчетная схема v-i-взаимодействия в кристалле кремния. Здесь справа от оси симметрии Γ_1 : ФК Γ_2 ($z = H_0$ – его вогнутость), боковая поверхность кристалла Γ_3 , верхняя граница Γ_4 области v-i-взаимодействия. Слева от оси показана сетка треугольных конечных элементов.

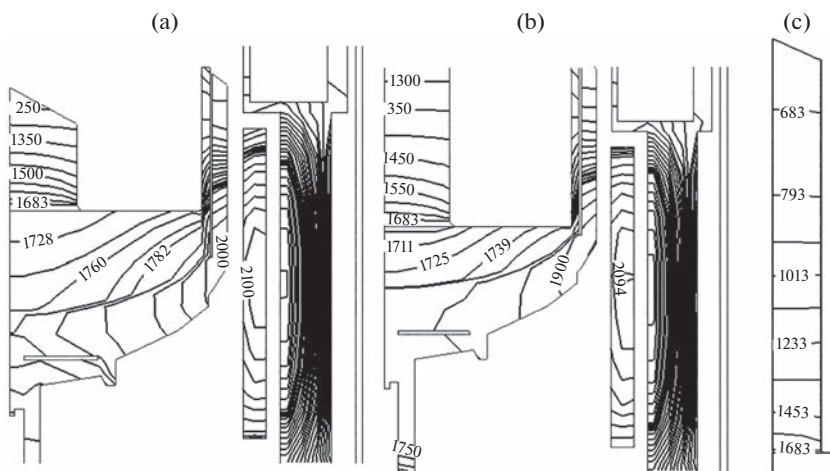


Рис. 2. Процесс ТУ-6-18: распределение изотерм [K] в кристалле и других компонентах ростового узла на различных стадиях роста в зависимости от объема цилиндрической части выращенного кристалла: а – 10, б – 50, с – 80%.

$$\frac{1}{T(z)} = \frac{1}{T_m} + \frac{G_S z}{T_m^2}$$

В этом случае результаты расчетов по двумерной модели должны соответствовать результатам решения задачи в одномерной постановке. Сравнение величины ξ при

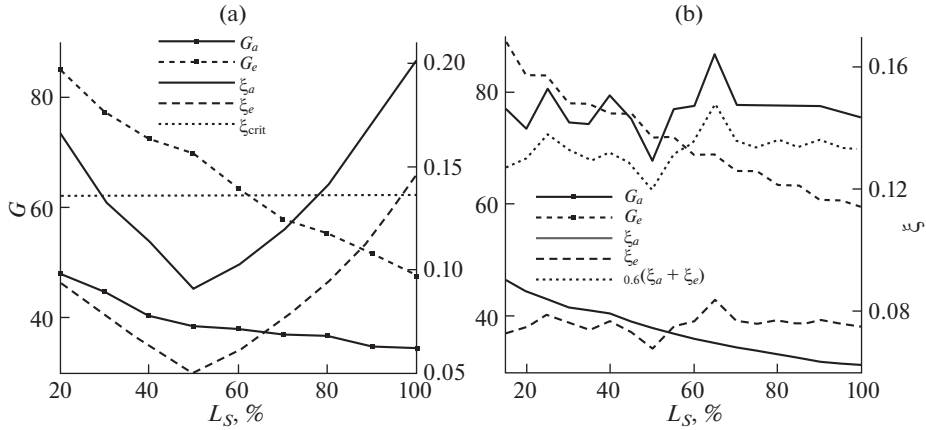


Рис. 3. Зависимость параметров тепловой истории выращивания слитка (G_a , G_e [K/см] и ξ_a , ξ_e [мм²/K · мин]) от % объема цилиндрической части: а – кристалл процесса ТУ-6-18, штрихпунктирная линия соответствует v-i-переходу при $\xi_{crit} = 0.136$ мм²/K · мин; б – кристалл процесса ТУ-6-20, штрихпунктирная линия соответствует “взвешенной” зависимости параметров ξ_a и ξ_e с коэффициентом 0.6.

изменении осевого температурного градиента G_S в диапазоне 30–300 K/см и вариациях скорости вытягивания V_p вблизи порога v-i-перехода показывает, что переход имеет место при постоянном значении $\xi_{crit} = 0.13$ мм²/K · мин, что отвечает критерию выбора коэффициентов в данной модели. В случае двумерной модели при $K_{iv} \sim 2 \times 10^{-19}$ см³/с достаточно точно выполняется условие “быстрой” рекомбинации: $C_{ve}C_{ie} = C_vC_i$. Определенная по двумерной модели величина остаточной концентрации “выживающих” дефектов (для вакансионного режима, реализуемого при $G_S = 120$ K/см, $V_p = 1.61$ и 1.58 мм/мин) составила $C_{vres} = 3.9 \times 10^{12}$ см⁻³. По оценке [4] эта величина несколько ниже: $C_{vres} = 2.8 \times 10^{12}$ см⁻³. Небольшое расхождение вызвано различной аппроксимацией уравнений. Можно считать, что для одномерного температурного поля решения, полученные по данной двумерной модели, достаточно хорошо соответствуют результатам одномерной модели и аналитическим оценкам В.В. Воронкова.

Диффузионно-рекомбинационные уравнения (3.1–3.2) можно свести к одному уравнению. Для этого предполагается, что скорость рекомбинации очень высокая и произведение двух концентраций C_vC_i близко к произведению их равновесных величин. Тогда величины C_v и C_i не являются независимыми и могут быть выражены одна через другую следующим соотношением:

$$C_vC_i = C_{ve}C_{ie} = C_{vm}C_{im} \exp\left(-\frac{E}{kT} + \frac{E}{kT_m}\right)$$

здесь $E = E_i + E_v$.

Диффузионная задача сводится к одной независимой переменной, причем удобно выбрать разность C_{iv} . Тогда концентрации выражаются в виде:

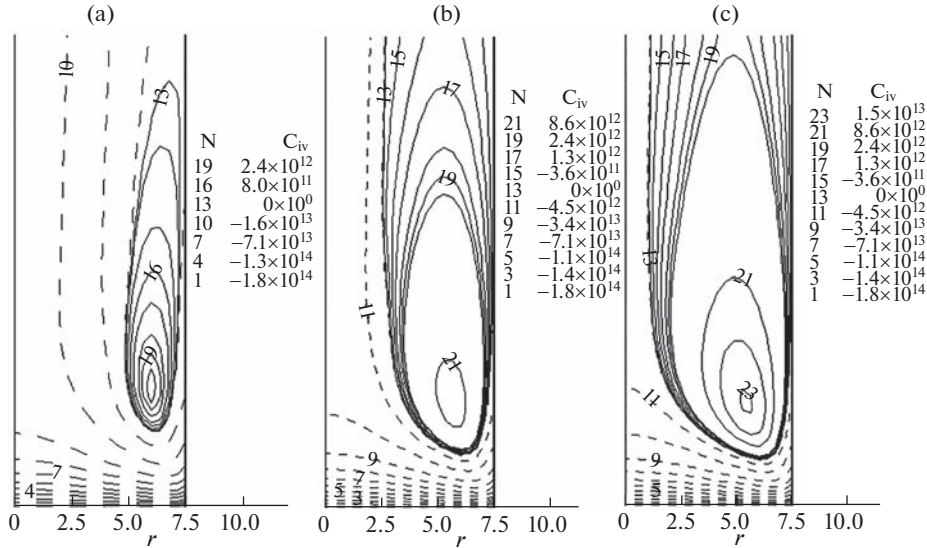


Рис. 4. Картины распределения разности концентраций C_{iv} [см^{-3}] в вакансионном (а), смешанном (б) и межузельном (с) режимах, возникающие в результате v - i -рекомбинации для различных стадий роста и скоростей выращивания кристалла из тигля диаметром 18 дюймов в процессе ТУ-6-18: а – 40%, $V_p = 0.46$ мм/мин; б – 42%, 0.44 мм/мин; с – 80%, 0.52 мм/мин.

$$C_i = \frac{C_{iv}}{2} + \left[\left(\frac{C_{iv}}{2} \right)^2 + C_{ve} C_{ie} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad C_v = -\frac{C_{iv}}{2} + \left[\left(\frac{C_{iv}}{2} \right)^2 + C_{ve} C_{ie} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Величина C_{iv} определяется как разность концентраций межузельных атомов кремния C_i и вакансий C_v . Если значения $C_{iv} > 0$, то в области монокристалла, где это выполняется, существует межузельный режим выращивания монокристалла кремния, а при $C_{iv} < 0$ в области преобладают вакансии, что означает вакансионную область в монокристалле. Обсуждение знака и значений величины C_{iv} приводится далее при анализе результатов (рис. 4, 5, 7).

Уравнение для $C_{iv}(r, z, t)$ получается подстановкой в исходные уравнения:

$$\frac{\partial C_{iv}}{\partial t} = \text{div}(D_i \nabla C_i - D_v \nabla C_v) - V_p \frac{\partial C_{iv}}{\partial z}$$

Задаются значения энергетических порогов для равновесных концентраций и коэффициентов диффузии: $E_v = 4.5$ эВ, $E_i = 4.6$ эВ, $E_{vD} = 0.35$ эВ, $E_{iD} = 0.20$ эВ. С учетом экспериментального значения: $D \times C_{im} = 3 \times 10^{11} \text{ см}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ выбираются следующие значения коэффициентов диффузии при температуре кристаллизации: $D_{im} = 6.23 \times 10^{-4} \text{ см}^2/\text{с}$, $D_{vm} = 4.0 \times 10^{-5} \text{ см}^2/\text{с}$. По формуле: $C_{im} = D/D_{im} \times C_{im}$ вычисляется величина $C_{im} = 6.05 \times 10^{14} \text{ см}^{-3}$, а далее с учетом критического значения критерия Воронкова: вычисляется величина $C_{vm} = 8.48 \times 10^{14} \text{ см}^{-3}$. Далее проверка выполнения соотношения: $D_{vm} \cdot C_{vm} \ll \ll D_{im} \cdot C_{im}$ показывает его выполнение.

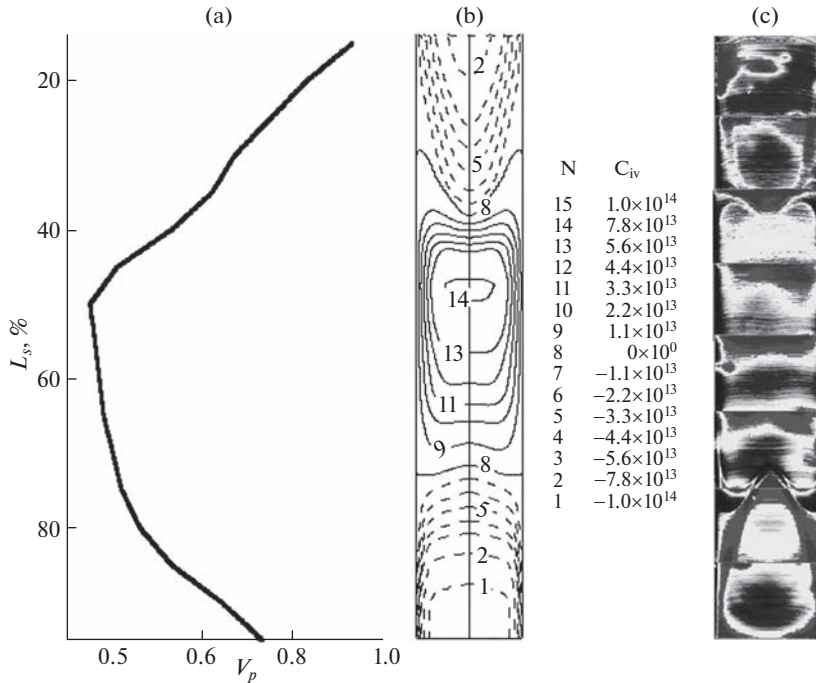


Рис. 5. Кристалл процесса ТУ-6-18: а – профиль скорости вытягивания V_p [мм/мин]; б – расчетные изолинии C_{iv} [см⁻³] после v-i-рекомбинации; в – экспериментальная картина микродефектов (карта времени жизни, визуализирующая распределение микродефектов в слитке после декорирования медью и цикла оксидной преципитации). Масштаб длины слитка L_s [%] соответствуют данным (б, в).

4. Математическая модель образования микродефектов. По предложению В.В. Воронкова авторы статьи реализовали в виде компьютерной программы следующую математическую модель образования вакансионных микродефектов. Предполагается, что вакансии в решетке кремния являются дефектом с четырьмя свободными связями, каждая пара из которых может акцептировать один кислородный атом. Эта реакция приводит к восстановлению Si–Si-связи, которая была занята кислородным атомом. При высокой температуре занятость каждой пары связей мала, в результате чего большинство вакансий свободно. При низких температурах занятость близка к 1, так что большинство вакансий существуют в виде vO_2 -комплексов, являющихся связанными вакансиями. При промежуточных температурах имеет место смешанная популяция свободных вакансий: двойных vO_2 - и одинарных vO -кислородных комплексов. Для упрощения вкладом одинарных комплексов пренебрегается. Это справедливо при условии, что энергия связи второго кислородного атома выше, чем первого.

Для определения свободной и связанной фракций вакансий удобно вначале рассмотреть равновесную концентрацию C_{be} комплекса vO_2 , которая пропорциональна квадрату концентрации кислорода C_O :

$$C_{be} = \frac{C_O^2}{\rho} \exp\left(-\frac{E_b}{kT}\right)$$

где E_b – энергия образования vO_2 , ρ – плотность кремния.

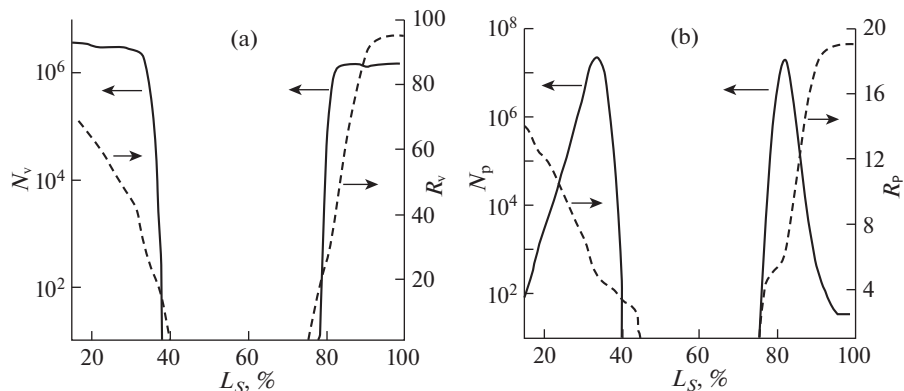


Рис. 6. Осевые распределения микродефектов (на оси $r = 0$) для процесса ТУ-6-18-2: а – концентрация N_v [см^{-3}] и радиус R_v [нм] пор, б – концентрация N_p [см^{-3}] и радиус R_p [нм] кислородных комплексов.

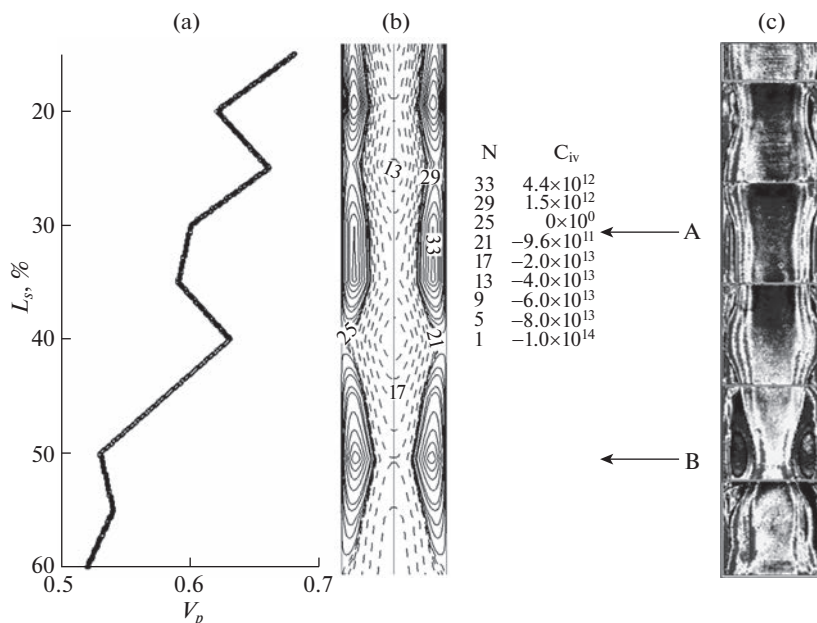


Рис. 7. Кристалл процесса ТУ-6-20: а – профиль скорости вытягивания V_p [мм/мин], б – расчетные изолинии C_{iv} [см^{-3}] после v - i -рекомбинации, в – экспериментальная картина микродефектов (карта времени жизни: А, В – контрольные сечения распределений микродефектов).

Если скорость образования $v\text{O}_2$ определяется вакансионной диффузией, то равновесие достигается очень быстро. Тогда $C_b/C_v = C_{be}/C_{ve}$ и температура T_b , при которой вакансии связываются, определяется из выражения: $C_b = C_v$ (или $C_{be} = C_{ve}$).

С учетом того, что: $C_{ve} = C_{vm} \cdot \exp(-E/kT + E/kT_m)$, получаем:

$$\frac{C_b}{C_v} = \exp\left(-\frac{\Delta E}{kT} + \frac{\Delta E}{kT_b}\right)$$

где $\Delta E = (E - E_b)$ – энергия связи вакансии и двух атомов кислорода.

Температура T_b связана с ΔE уравнением:

$$\frac{\Delta E}{kT_b} = \frac{E}{kT_m} + \log\left(\frac{\rho C_{vm}}{C_o}\right)^2$$

здесь $E = 4.5$ эВ – энергия связи вакансии, $\Delta E = 3.9$ эВ. Концентрация свободных вакансий C_v определяется через общее количество вакансий C_t :

$$\frac{C_v}{C_t} = \frac{1}{\left(1 + \frac{C_b}{C_v}\right)}$$

В приближении стационарной скорости можно использовать классическую теорию зародышеобразования, согласно которой скорость образования пор есть:

$$I_v = \frac{\sigma_v D_v C_v \exp\left(-\frac{F_v}{kT}\right)}{\sqrt{\frac{3F_v kT}{16\pi}}}$$

где:

$\sigma_v = 930$ эрг/см² – поверхностная энергия кремния,

$F_v = \frac{16\sqrt{3}\sigma_v^3}{\rho^2 f_v^2}$ – энергия барьера нуклеации,

$f_v = kT \log\left(\frac{C_v}{C_{ve}}\right)$ – движущая сила образования пор, причем множитель соответ-

ствует октаэдрической форме пор (для сферической формы он равен $16\pi/3$),

σ_v относится к (111)-направлению роста.

Соответственно для частиц имеем:

$$I_p = \frac{\sigma_p D_o C_o \exp\left(-\frac{F_p}{kT}\right)}{\sqrt{\frac{3F_p kT}{16\pi}}}$$

$$F_p = \frac{16\sqrt{3}\sigma_p^3}{\rho_p^2 f_p^2}, \quad f_p = f' + \gamma f_v$$

$$f' = kT \log\left(\frac{C_o}{C_{oe}}\right), \quad C_{oe} = C_{om} \exp\left(-\frac{E_o}{kT} + \frac{E_o}{kT_m}\right)$$

Здесь: $\sigma_p = 790$ эрг/см², $\rho_p/\rho = 2$, $\gamma = 0.5$, $E_o = 1.5$ эВ, а C_o задается из эксперимента или данных расчета конвективной диффузии в расплаве. Например, концентрация кислорода в объеме слитка задается постоянной: $C_o = 8.0 \times 10^{17}$ см⁻³.

В любой момент времени концентрация пор и частиц может быть получена интегрированием:

$$N_v = \int_0^1 I_v(t') dt'$$

$$N_p = \int_0^1 I_p(t') dt'$$

Тогда для оценки радиуса поры применяется следующее уравнение:

$$R_v \frac{dR_v}{dt} = 0.5 \frac{dR_v^2}{dt} = \frac{D_v C_v}{\rho}$$

Наконец, радиус поры, которая образовалась в момент времени t' и затем росла до момента t , равен:

$$R_v(t', t) = \sqrt{\frac{2}{\rho} \int_0^1 D_v(t'') C_v(t'') dt''}$$

Аналогично оценивается радиус оксидной частицы:

$$R_p(t', t) = \sqrt{\frac{2}{\rho_p} \int_0^1 D_o(t'') C_o(t'') dt''}$$

Модель образования кластеров межузельных атомов кремния аналогична образованию вакансионных пор при замене вакансионной диффузии к зародышу на диффузию межузельных атомов.

Для последующих оценок плотности кислородных преципитатов SiO_x важной является доля оставшихся свободных вакансий, а также величина убыли концентрации кислорода. В результате образования вакансионных микродефектов уменьшается доля свободных вакансий, которые поглощаются порами и взаимодействуют с атомами кислорода, образуя комплексы $v\text{O}_2$.

5. Тепловые истории выращивания монокристаллов кремния диаметром 150 мм: процессы ТУ-6-18 и ТУ-6-20. Название “тепловая история” используется для обозначения набора тепловых параметров, включающих значения осевого температурного градиента на ФК в центре (на оси) — G_a и на кромке выращиваемого монокристалла — G_e для дискретных моментов времени выращивания монокристалла. Этот набор параметров и соответствующие значения скорости вытягивания монокристалла являются исходными данными для моделей дефектообразования, которые позволяют адекватно учесть тепловые условия выращивания монокристалла кремния на конкретной тепловой МЧ-установке.

В тепловом узле (ТУ) для тигля диаметром 18 дюймов был проведен процесс ТУ-6-18 для выращивания кристаллов кремния диаметром ~6 дюймов (150 мм) в тепловом узле МЧ-установки *EKZ 2700*TM. Теплоперенос рассчитывался для 10 последовательных стадий роста L_S (от начала до конца цилиндрической части кристалла — 0–100% объема), причем на каждой стадии предполагалась его стационарность. Анализировалось продольное распределение осевого температурного градиента и его радиальная неоднородность на ФК. Помимо изменения геометрии в период роста учитывалось изменение V_p . Форма мениска и поверхности расплава задавались. Положение и форма ФК рассчитывались при заданном положении его кромки на боковой поверхности

кристалла и автоматическом изменении мощности нагревателя. Уровень расплава по мере вытягивания кристалла соответственно уменьшался. На рис. 2 показано распределение изотерм в кристалле и других компонентах теплового узла на различных стадиях процесса роста в зависимости от % объема цилиндрической части выращенного слитка L_S : а – 10, б – 50, в – 80%. Можно отметить, что G уменьшался от 35 К/см при 20% объема до 25 К/см при 100%, V_p уменьшалась от 0.9 до 0.35 мм/мин.

При переходе от 18- к 20-дюймовому тиглю для процесса ТУ-6-20 сделана существенная модификация расчетного макета: увеличение диаметра тигля до 20 дюймов, увеличение загрузочной массы расплава до 80 кг с последующим учетом изменения уровня расплава в тигле на промежуточных стадиях выращивания кристалла, а также модификация боковых экранов и нагревателя. Длина кристалла была увеличена со 120 до 160 см. Моделировались 11 ростовых стадий, соответствующих 0, 10, 20, ..., 100% выращенного объема цилиндрической части монокристалла. Температурные поля в кристалле на промежуточных стадиях (5, 15, 25, ..., 95) определялись интерполяцией. Максимальная длина цилиндрической части кристалла составляла 154 см при $L_S = 100\%$.

Анализ распределений изотерм в тигельной части показывает, что при увеличении длины кристалла осевые градиенты несколько уменьшаются. На верхнем торце температура уменьшается от 980 (20%) до 640 (60%) и до 500 К (100%). В верхней части кристалла при его длине большей 95 см (на стадиях роста больших 60%) величина осевого градиента существенно уменьшается на последующих стадиях.

Процесс образования вакансионных микродефектов и межузельных кластеров рассматривается в диапазоне температур 1450–1250 К. Характерный диапазон температур для образования вакансионных комплексов 1293–1343 К.

По данным расчета теплового поля рассчитывались градиенты температуры в кристалле и по известной величине V_p оценивалась характерная скорость охлаждения слитка.

Для процессов выращивания слитков ТУ-6-18 и ТУ-6-20 профили осевых температурных градиентов $G_a(T)$ и $G_e(T)$ проанализированы в зависимости от температуры для 40%-й стадии выращивания, а также представлены профили скорости вытягивания V_p (в % от L_S). Из сравнения профилей $G_a(T)$ и $G_e(T)$ следует, что при высоких температурах ($T > 1450$ К) скорость охлаждения поверхности кристалла выше, чем в его центра. При $T = 1450$ –1170 К наблюдается обратная ситуация, а при $T < 1170$ К обе эти величины одинаковые.

При $T = 1400$ –1300 К градиент на оси выше, чем на поверхности кристалла. Например, G_e примерно равен 22 К/см, G_a изменяется от 33 до 27 К/см. Поэтому при $V_p = 0.61$ мм/мин скорость охлаждения поверхности слитка равна 1.34 К/мин, а в его центре изменяется в диапазоне 2.01–1.64 К/мин. Изменения скорости вытягивания для слитков ТУ-6-18 и ТУ-6-20 различаются: в 1-м случае имеет место монотонное уменьшение V_p до стадии 50% и затем ее монотонное увеличение до конца процесса, а во 2-м V_p изменяется немонотонно через 5% длины слитка.

Для процессов ТУ-6-18 и ТУ-6-20 на рис. 3 показаны зависимости параметров тепловой истории выращивания слитка (G_a , G_e , ξ_a , ξ_e) от % объема цилиндрической части L_S : а – кристалл ТУ-6-18, штрихпунктирная линия соответствует v-i-переходу при $\xi_{crit} = 0.136$ мм²/К · мин; б – кристалл ТУ-6-20, штрихпунктирная линия соответствует “взвешенной” зависимости параметров ξ_a и ξ_e с коэффициентом 0.6. Максимальная длина кристалла ТУ-6-18 при 100%-й стадии – 155 см, кристалла ТУ-6-20 при 60%-й стадии – 96 см (соответственно, при 100%-й стадии – 160 см).

Значение $\xi_{\text{crit}} = 0.136 \text{ мм}^2/\text{мин} \cdot \text{К}$ рассчитано с использованием усредненной по радиусу величине осевого температурного градиента на ФК. Это значение согласуется с упомянутым выше универсальным значением $\xi_{\text{crit}} = 0.13 \text{ мм}^2/\text{мин} \cdot \text{К}$.

Можно сказать, что зависимости изменения осевых температурных градиентов на ФК G_a и G_e для обоих кристаллов примерно одинаковые, хотя при более внимательном рассмотрении можно заметить разницу в их значениях, вносимую различием в режимах скоростей вытягивания. Эти зависимости характеризуются большими значениями градиентов на начальных стадиях роста (при 20%: $G_a = 48$ и $G_e = 85 \text{ К/см}$) и их монотонным уменьшением к концу процесса до $G_a = 35$ и $G_e = 48 \text{ К/см}$.

Для предварительной оценки распределений концентраций остаточных СТД после рекомбинации наибольшее значение имеют зависимости величин V_p/G_a и V_p/G_e от стадии роста. Величина критерия ξ_{crit} выбирается на основе сравнения с экспериментальными картами времени жизни для конкретных кристаллов. Представление тепловой истории выращиваемого кристалла в аналитической форме позволяет запомнить и хранить температурные поля для всего процесса выращивания, что необходимо на этапах реализации нестационарной модели СТД-переноса и рекомбинации. Сущность этой методики состоит в представлении температурных распределений вдоль оси и кромки кристалла в виде полиномов 6–8-й степеней. Они рассчитываются по температурным полям в кристалле для каждой расчетной ростовой стадии.

Расчет концентрации микродефектов в кристаллах выполняется за три этапа. На первом рассчитываются тепловые поля в установке, необходимые для определения распределения температуры в монокристаллах кремния. На втором этапе рассчитываются остаточные концентрации СТД после v-i-рекомбинации. Третий этап заключается в расчете концентрации и размеров микродефектов вакансионного типа (пор, оксидных частиц) и кластеров, образующихся в результате агломерации межузельных атомов кремния. При двумерной аппроксимации v-i-граница во всем объеме слитка получается непосредственно из решения задачи. Однако расположение этой границы вдоль слитка, получаемое расчетным путем, зависит от входных параметров математической модели и нуждается в экспериментальной апробации. С этой целью использованы карты времени жизни для слитков.

6. Результаты расчета СТД-распределений в процессе ТУ-6-18. Вначале для процесса выращивания монокристаллов кремния диаметром 150 мм из тигля диаметром 18 дюймов рассмотрим результаты расчета процесса v-i-рекомбинации [38]. На рис. 4 показаны картины распределения разности концентраций C_{iv} в вакансионном (а), смешанном (б) и межузельном (с) ростовых режимах, возникающие в результате v-i-рекомбинации для различных стадий роста и скоростей выращивания кристалла из тигля в процессе ТУ-6-18: а – 40%; $V_p = 0.46 \text{ мм/мин}$; б – 42%, $V_p = 0.44 \text{ мм/мин}$; с – 80%, $V_p = 0.52 \text{ мм/мин}$.

Результатом расчета на каждом временном шаге считается радиальное распределение концентрации C_{iv} на достаточном удалении от ФК. В данном случае это удаление составляет 20 см. Полагается, что суммарная картина изолиний переменной C_{iv} , построенная для всех временных шагов, соответствует ее двумерному распределению после v-i-рекомбинации. Анализ результатов показывает, что в начале выращивания кристалл находится в вакансионном режиме. Затем в связи с уменьшением V_p на участке 40–43% объема возникает и начинает расширяться межузельная область, которая существует до 70% объема и затем за счет увеличения V_p опять сменяется вакансионной.

На рис. 5 представлены результаты расчетов для сравнения с данными выращенного экспериментального кристалла ТУ-6-18: профиль скорости вытягивания (а), рас-

четные изолинии C_{iv} после v - i -рекомбинации (b) и экспериментальная картина микродефектов (c), визуализированная по времени жизни электрических носителей заряда.

Сравнение показывает, что конфигурация переходов от вакансионной к межузельной моде по данным карты времени жизни соответствует аналогичным переходам на расчетной картине изолиний. Эти переходы вызваны значительным уменьшением V_p от начала процесса до 50%-й стадии и, соответственно, уменьшением параметра ξ_a до значений, меньших ξ_{crit} , соответствующих переходу от вакансионного к межузельному ростовому режиму.

Вблизи оси вакансионная область исчезает и кристалл переходит в межузельный режим примерно при 44%-й стадии, который существует на некотором участке кристалла (на оси до 73%-й стадии), затем сменяется опять вакансионным режимом ввиду возрастания V_p к концу процесса. Относительно ростовой стадии, соответствующей минимальному значению V_p , картина изолиний является несимметричной ввиду разной скорости изменения V_p на участках уменьшения и увеличения: V_p уменьшается примерно в 2 раза быстрее, чем возрастает. Характерные значения разности концентраций C_{iv} в начале и конце роста в вакансионной моде: -7.8×10^{13} и $-1.0 \times 10^{14} \text{ см}^{-3}$. В центральной межузельной области максимальное значение равно $7.8 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Области с малой концентрацией (до 1.1×10^{13}) наблюдаются в межузельной моде между изолиниями 8 и 9 на достаточно малых участках кристалла.

7. Результаты расчета распределения микродефектов в кристалле для процесса ТУ-6-18. Сравнение расчетных и экспериментальных данных показывает пространственное соответствие в расположении дефектов вакансионного и межузельного типа. Это подтверждает достаточность анализа поведения v - i -границы по двумерным СТД-распределениям, полученным в результате расчета v - i -рекомбинации.

Теория утверждает, что монокристалл кремния растет в вакансионном или межузельном режимах в зависимости от величины параметра В.В. Воронкова ξ по отношению к критическому значению. При $\xi_{crit} = 0.13 \text{ мм}^2/\text{К} \cdot \text{мин}$ вакансионный режим соответствует $\xi > \xi_{crit}$. Концентрация вакансий C_v увеличивается при увеличении ξ и уменьшается в радиальном направлении до нуля на v - i -границе. Концентрация и тип микродефектов, образующихся за счет агрегации вакансий при последующем охлаждении, сильно зависит от C_v . При больших значениях C_v преобладают микродефекты в виде пор, а при меньших C_v — в виде оксидных частиц, образующихся после агрегации вакансий и атомов кислорода. В результате вакансионная зона разделяется на главную внутреннюю часть, содержащую поры (которые идентифицируются как D-дефекты), и краевую полосу, содержащую частицы. Эта полоса (Р-лента) локализована вдоль v - i -границы.

Для процесса ТУ-6-18 следует отметить, что при уменьшении скорости вытягивания концентрация вакансий снижается со значения $C_v = 9.7 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$ в начальной части слитка до 0 при переходе к i -моде (на стадии роста 40%). В интервале 40–77% возрастает концентрация межузельных атомов до значения $C_i = 8.0 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$ (на стадии 50%) и затем с увеличением V_p ее значение снижается до 0 при переходе к v -моде. На стадии 77% значение C_v возрастает до $1.1 \times 10^{14} \text{ см}^{-3}$.

Для процесса ТУ-6-18 [39] на рис. 6 приведены осевые распределения микродефектов на оси: концентрация N_v и радиус R_v пор (a), концентрация N_p и радиус R_p кислородных комплексов (b). В начальной и конечной части слитка концентрация и радиус пор максимальные ($N_v = 5 \times 10^6 \text{ см}^{-3}$, $R_v = 95 \text{ нм}$), вблизи v - i -перехода значения N_v , R_v резко уменьшаются. Для типичных значений C_v поры являются доминирующим ти-

пом микродефектов при значениях $N_v = 3 \times 10^6 \text{ см}^{-3}$, $R_v = 55 \text{ нм}$. Соответственно, в начале и конце слитка концентрация оксидных частиц мала ($N_p = 100\text{--}50 \text{ см}^{-3}$) при радиусе, равном 15–19 нм. Однако вблизи v-i-границы их концентрация резко возрастает до значения $4 \times 10^7 \text{ см}^{-3}$, а радиус уменьшается до 4–5 нм. Типичные значения N_p и R_p равны $3 \times 10^8 \text{ см}^{-3}$ и 5 нм соответственно.

8. Результаты расчета СТД-распределений в кристалле процесса ТУ-6-20. В отличие от процесса ТУ-6-18, в данном случае колебания V_p были не такими значительными. Колебательное понижение V_p во время процесса происходило таким образом, что значения критерия ξ колебались около их средней величины, равной $0.13 \text{ мм}^2/\text{К} \cdot \text{мин}$, которую можно принять за ξ_{crit} . Экспериментальные кристаллы были продольно разрезаны и распределения дефектов визуализированы посредством декорирования медью и карт времени жизни после цикла оксидной преципитации.

Для процесса ТУ-6-20 расчетные (b) и экспериментальные (c) результаты показаны на рис. 7: а – профиль скорости вытягивания, b – расчетные изолинии C_{iv} после v-i-рекомбинации, с – экспериментальная картина микродефектов (карта времени жизни: А, В – контрольные сечения распределений микродефектов).

В этом случае также можно сказать, что конфигурация переходов от v- к i-режиму по данным карты времени жизни (с) соответствует аналогичным переходам на расчетной картине изолиний (b). Более того, эти переходы отчетливо соответствуют расположению по длине кристалла колебательных минимумов и максимумов V_p . Радиальные и осевые размеры областей переходов от v- к i-моду также достаточно точно воспроизводятся на расчетной картине изолиний. Кроме этого, можно отметить особенность в распределении СТД, обусловленную ростом кристалла при колебаниях параметра ξ вблизи ξ_{crit} . Она связана с тем, что вблизи боковой поверхности кристалла возникают области с малой СТД-концентрацией. Например, на вакансионных участках кристалла между изолиниями 21–25 концентрация не превышает $9.6 \times 10^{11} \text{ см}^{-3}$, а в межузельных областях ее величины равны 1.5×10^{12} и $4.4 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$ для изолиний 29 и 33 соответственно.

Дополнительно расчетный макет был рассмотрен для ростовых стадий более 60% объема слитка (при длинах слитка более 100 см). Соответствующие ему тепловые параметры приведены на рис. 3, b в виде распределений осевых температурных градиентов G_a и G_e и соответствующих им критериев ξ_a и ξ_e в центре и на кромке ФК в зависимости от % объема выращиваемого слитка L_s . Значения V_p берутся по данным процесса выращивания, значения G_a и G_e рассчитываются для каждой стадии роста (всего их 19). Отношение градиентов на крае и в центре достаточно большое ($G_e/G_a = 1.78$). В начале выращивания значения G_a , G_e существенно больше по сравнению с концом процесса и градиенты монотонно уменьшаются по мере роста объема слитка. Изменение V_p не монотонное, это определяет немонотонность критериев ξ_a и ξ_e . Можно заметить, что критерий Воронкова предсказывает при $\xi_a > \xi_{\text{crit}} = 0.13 \text{ мм}^2/\text{К} \cdot \text{мин}$ вакансионный, а при $\xi_e < 0.085 \text{ мм}^2/\text{К} \cdot \text{мин}$ – межузельный режим выращивания слитка. Поэтому в выборе ξ_{crit} есть некоторый произвол и при сравнении с экспериментальными данными значение ξ_{crit} обычно корректируется в сторону увеличения. Например, чтобы удовлетворить экспериментальным данным можно выбрать некоторое “взвешенное” значение ξ_{crit} с коэффициентом 0.6: $\xi_{\text{crit}} = 0.6 \cdot (\xi_a + \xi_e)$ и его распределение будет достаточно хорошо описывать поведение v-i границы по длине слитка.

9. Результаты расчета распределений микродефектов в кристалле для процесса ТУ-6-20. Согласно расчетным и экспериментальным данным на рис. 7, b, c видно, что слиток

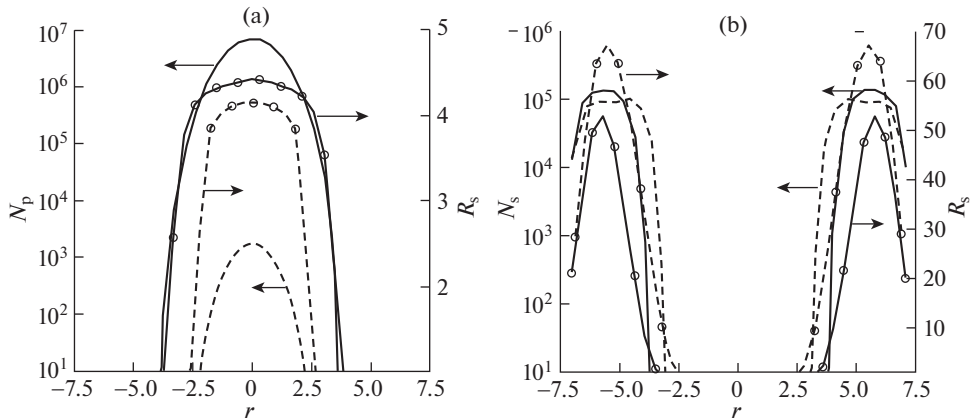


Рис. 8. Радиальные распределения микродефектов для 30- и 50%-х ростовых стадий кристалла в процессе ТУ-6-20 при постоянном объемном распределении концентрации кислорода ($C_O = 8.0 \times 10^{17} \text{ см}^{-3}$): а – концентрация N_p [см^{-3}] и радиус R_p [нм] кислородных комплексов, б – концентрация N_s [см^{-3}] и радиус R_s [нм] межузельных кластеров (30% – сплошная и 50% – пунктир, без меток – концентрация, с метками – радиус)).

имеет центральную вакансионную и периферийную межузельную области. Положение v-i-границы вдоль слитка (отвечающее сужению и расширению вакансионного центра) соответствует немонотонному профилю скорости вытягивания. Сравнение этих карт также показывает пространственное соответствие в расположении дефектов v- и i-типа.

На рис. 8 показаны радиальные распределения микродефектов для 30 и 50% стадий и $C_O = 8.0 \times 10^{17} \text{ см}^{-3}$: а – концентрация N_p и радиус R_p кислородных комплексов, б – концентрация N_s и радиус R_s межузельных кластеров (30% – сплошная и 50% – пунктир, без меток – концентрация, с метками – радиус). Максимальная концентрация пор для 30%-й стадии достигает величины $N_v = 8 \times 10^6 \text{ см}^{-3}$, а их радиус – $R_v = 23 \text{ нм}$ в центральной области слитка радиусом 3 см. Максимальная концентрация оксидных частиц для 30%-й стадии достигает $N_p = 10^7 \text{ см}^{-3}$, радиус – $R_p = 4.2 \text{ нм}$ в пределах центрального кольца радиусом 4 см (б). На стадии 50% максимальная концентрация оксидных частиц существенно меньше ($N_p = 10^3 \text{ см}^{-3}$) при радиусе $R_p = 4 \text{ нм}$ в пределах более узкого центрального кольца радиусом 2.2 см. Межузельные кластеры расположены вблизи боковой поверхности слитка и значения их максимальной концентрации при стадиях 30 и 50% меняются незначительно ($N_s = 8 \times 10^4 \text{ см}^{-3}$ и немного меньше для стадии 50%), а радиусы R_s составляют 54 и 67 нм соответственно.

Согласно модели вакансионной агломерации, концентрация кислорода является основным параметром, влияющим на агломерацию оксидных комплексов vO_2 . Исследованию переноса кислорода в расплаве и определению его значений на ФК посвящено много работ. Считается важным снижение концентрации кислорода в кристалле до уровня $(8-2) \times 10^{17} \text{ см}^{-3}$.

10. Процесс быстрой температурной обработки пластин кремния. Актуальными являются вопросы математического моделирования термонапряженного состояния и дефектообразования в пластинах кремния, вырезаемых из выращенных монокристал-

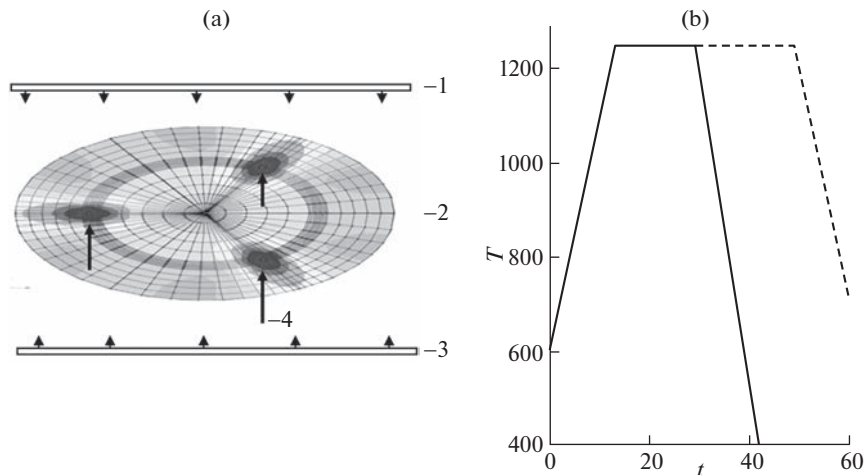


Рис. 9. Процесс БТО: а – схема процесса: галогенные лампы нагрева 1, 3 пластины кремния 2, лежащей на 3-игольчатых опорах 4, которые являются причиной напряжений в их окрестности (см. изолинии на пластине); б – временные режимы с различной выдержкой t [с] при максимальной температуре $T_{\max}$ [°C] (сплошная линия – $t = 15$ с, пунктирная – 35 с).

лических слитков [40, 41]. Для процесса быстрой температурной обработки (БТО) применяется специальное термическое оборудование и подбираются оптимальные условия проведения процесса термообработки. Важную роль играют способы крепления пластин кремния большого диаметра (150, 200 мм и более). В [42] сравниваются экономические параметры при производстве пластин кремния диаметром от 100 до 400 мм. Дан обзор различных методов термообработки пластин кремния и обсуждаются особенности напряженного состояния в пластинах большого диаметра (200 и 300 мм). В [43] предложена математическая модель для описания термонапряженного состояния Si-пластин большого диаметра (200 и 300 мм) в резистивной печи для термического отжига. В печи устанавливается вертикальная кассета пластин таким образом, что каждая из пластин поддерживается на 4-игольчатых опорах. Кроме термонапряжений в радиально-неоднородном тепловом поле, сильное влияние оказывают напряжения, вызванные гравитационной силой, распределение которых в пластине зависит от позиционирования опор.

В [44] пластины кремния, выращенные в направлении (001), были подвергнуты предварительной термообработке (при 650°C – 16 часов несколько раз и при 1000°C – от 1 до 16 часов), затем отжиг был произведен при 585°C на 3-х опорах несколько раз от 1 до 35 мин. Обнаружено образование дислокационных петель вблизи опор в разных плоскостях скольжения. Измерением сдвиговых напряжений установлена их минимальная (критическая) величина, необходимая для образования одной отдельной дислокационной петли. Показаны картины дефектов для трех пластин, каждая из которых была выдержана при 1000°C разное время (1, 4 и 16 часов). Приведены зависимости критического сдвигового напряжения от времени термообработки для дефектов разного размера (<50, 100 и 250–500 нм). Рассмотрена полуаналитическая модель для интерпретации экспериментальных результатов.

Однако для пластин большого диаметра (200 и 300 мм) возникают существенные трудности в обеспечении малых перепадов температуры по их площади при термообработке. Считается, что процесс термической обработки пластин лучше осуществлять

в установках не с резистивным нагревом, а с галогенными лампами накаливания (БТО-процесс). С помощью таких ламп нагрев осуществляется быстро, при этом пластины располагаются горизонтально на трех- или четырехигольчатых опорах. Схема БТО-процесса с креплением пластины кремния на 3-игольчатых опорах представлена на рис. 9,а, где показаны галогенные лампы нагрева 1 и 3, пластина 2, лежащая на 3-игольчатых опорах 4, которые являются причиной напряжений в их окрестности (см. изолинии на пластине). Временные режимы БТО-процесса с различной выдержкой при максимальной температуре показаны на рис. 9,б, где сплошная линия соответствует меньшей (15 с), а пунктирная — большей (35 с) выдержке.

Применение БТО-процесса позволяет эффективно воздействовать на распределение плотности кислородных преципитатов по толщине пластины путем управления распределениями вакансий и межузельных атомов. В частности, управление диффузией вакансий позволяет создавать MDZ-зону (“Magic Denuded Zone”), обедненную кислородными преципитатами глубиной до 100 мк. Механизм такого воздействия объясняется корреляцией между плотностью кислородных преципитатов и концентрацией вакансий C_v , так как кислородный преципитат имеет больший размер по сравнению с атомом кремния и его образование сопровождается абсорбцией вакансий на кислородных зародышах. При $C_v > C_{ve}$ свободная энергия такого процесса увеличивается, а при $C_v < C_{ve}$ уменьшается или подавляется в соответствии с зависимостью: $\gamma k T \ln(C_v/C_{ve})$, где C_{ve} — растворимость вакансий при температуре T , $\gamma = 0.5$ — количество вакансий, абсорбированных на кислородном атоме, связывающем зародыш.

В данной работе для БТО-процесса рассмотрены нестационарные процессы диффузии и рекомбинации СТД в пластинах кремния при быстром их нагреве от 600 до 1250°C (в течение 13 с), кратковременной выдержке при 1250°C (в течение 15 или 35 с), а затем быстром охлаждении до 600°C (за 13 с). Расчет осуществляется по рассмотренной выше двумерной модели вакансионно-межузельной кинетики в пластине кремния диаметром 150 мм и толщиной 0.67 мм, при этом задаются начальные концентрации дефектов в соответствии с данными предварительного расчета остаточных концентраций C_v и C_i в выращенном слитке. Исходные параметры: радиус пластины $R = 7.5$ см, толщина $H = 0.67$ мм. Распределение концентраций остаточных межузельных атомов и вакансий полагается равномерным по толщине пластины. На границах расчетной области задаются равновесные условия для концентраций: $C_v = C_{ve}$, $C_i = C_{ie}$. Параметры приведены в таблице 1. Начальные концентрации вакансий и межузельных атомов взяты по расчетным данным для сечения А слитка ТУ-6-20, в котором реализуется смешанный v-i-режим с OSF-кольцом. Максимальные концентрации вакансий и межузельных атомов в этом сечении пластины были следующими: $C_{vres} = 6.8 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$, $C_{ires} = 1.2 \times 10^{11} \text{ см}^{-3}$. Концентрации вторичных фракций в этих областях были существенно меньше, чем основных.

Результаты расчетов для БТО-процесса представлены на рис. 10 для временных режимов с различной выдержкой (35 с — сплошные линии и 15 с — пунктиры при максимальной температуре $T_{max} = 1250^\circ\text{C}$): (а) профили C_v и C_i от толщины пластины; (б) расчетные вакансионные профили от толщины пластины и экспериментальные данные [45] (черные треугольники — с выдержкой 35 с при $T_{max} = 1250^\circ\text{C}$). В результате БТО-процесса происходит выравнивание концентраций C_v и C_i в объеме и понижение их максимальных значений: $C_{vmax} = 2.72 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$, $C_{imax} = 1.46 \times 10^8 \text{ см}^{-3}$ (рис. 10,а), причем увеличение времени выдержки при температуре 1250°C приводит к некоторому снижению концентраций СТД (рис. 10,б).

Экспериментальная концентрация вакансий C_v была получена в результате измерения плотности кислородных преципитатов N_O и установлению ее корреляции с C_v в

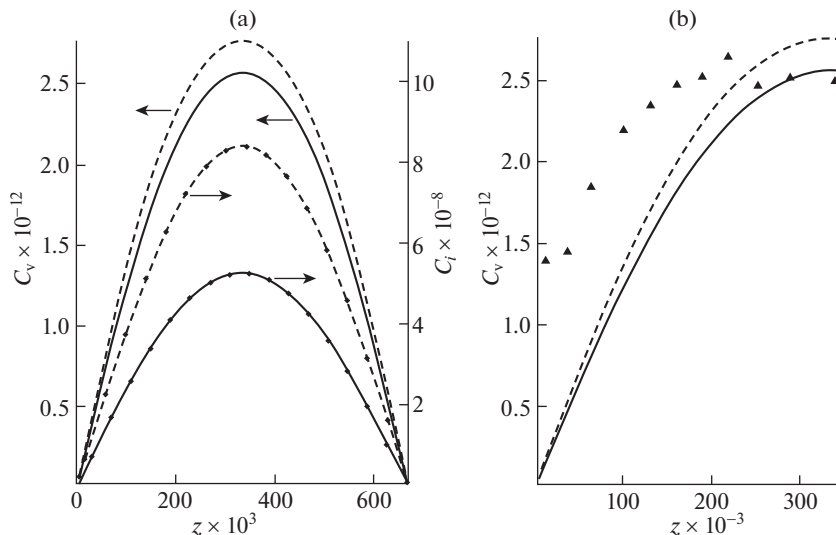


Рис. 10. Высокотемпературная обработка пластин кремния: а – профили C_v , C_i [см^{-3}] по толщине пластины z [мм] (сплошные линии – 35 с, пунктиры – 15 с); б – сравнение с экспериментальными данными: расчетные вакансионные профили C_v [см^{-3}] по толщине пластины (пунктир – 15 с, сплошная линия – 35 с при $T_{\max} = 1250^\circ\text{C}$) и экспериментальные данные (черные треугольники – $t = 35$ с при $T_{\max} = 1250^\circ\text{C}$).

виде: $N_0 = 1.28 \times 10^{-36} \cdot C_v^{3.71}$, который после инверсии был получен в более удобном для анализа виде: $C_v = 8.09 \times 10^9 \cdot N_0^{0.241}$. Таким образом, после подстановки измеренных значений N_0 был рассчитан экспериментальный вакансионный профиль C_v по толщине пластины. Сравнение расчетных и экспериментальных данных на рис. 10, б показывает, что имеется некоторое завышение экспериментальных значений $C_v(z)$. Это объясняется тем, что при измерениях N_0 возникают погрешности в определении C_v из-за атомов платины, введение которых обусловлено условиями эксперимента, но которые индуцируют побочный выталкивающий эффект, в зоне их наибольшей концентрации вблизи поверхностей пластины.

Заключение. Успешное решение рассмотренной проблемы дефектообразования в бездислокационном монокристаллическом кремнии было обусловлено сочетанием правильного выбора физической модели “быстрой” СТД-рекомбинации, предложенной В.В. Воронковым для одномерного случая с возможностями ее применения в двумерном случае, который был сопряжен с термомеханической моделью. В отличие от физических моделей СТД-взаимодействия других авторов, данный подход стал определяющим в мире и был подтвержден целым рядом технологических экспериментов.

Представленные в статье данные получены в результате многолетнего сотрудничества авторов статьи с основоположником этого научного направления – д.ф.-м.н. В.В. Воронковым. Представленное комплексное термомеханическое исследование проводилось в кооперации с ведущими отечественными и зарубежными технологическими организациями (*ГИРЕДМЕТ*, *ЭЛМА*, *МЕМС Inc.*). Разработка и применение сопряженных тепловых моделей МЧ-выращивания монокристаллов кремния и БТО-процесса для вырезаемых из них пластин позволило рассчитать основные тепловые характеристики в монокристаллах и пластинах бездислокационного кремния и затем

их применить в моделях дефектообразования, адекватность которых продемонстрирована сравнениями с данными технологических экспериментов.

Благодарность. Авторы благодарят Лауреата международной премии им. Франка в области роста кристаллов, д.ф.-м.н. В.В. Воронкова за многолетнее научное сотрудничество и полезные обсуждения представленных в статье результатов. Представленная работа поддержана темой государственного задания ИПМех РАН (№ АААА-А20-120011690136-2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мильвидский М.Г., Освенский В.Б. Структурные дефекты в монокристаллах полупроводников. М.: Металлургия, 1984. 256 с.
2. Voronkov V.V. The mechanism of swirl defects formation in silicon // J. Crystal Growth. 1982. V. 59. P. 625–643.
[https://doi.org/10.1016/0022-0248\(82\)90386-4](https://doi.org/10.1016/0022-0248(82)90386-4)
3. Mori T., Wang Z., Brown R. Transient simulation of grown-in defect dynamics in Czochralski crystal growth of silicon // Electrochem. Soc. Proc. 2000. V. 17. P. 118–127.
4. Voronkov V.V., Falster R. Grown-in microdefects, residual vacancies and oxygen precipitation bands in Czochralski silicon // J. Crystal Growth. 1999. V. 204. № 4. P. 462–474.
[https://doi.org/10.1016/S0022-0248\(99\)00202-X](https://doi.org/10.1016/S0022-0248(99)00202-X)
5. Бабич В.М., Блецкан Н.И., Венгер Е.Ф. Кислород в монокристаллах кремния. Киев: ИНТЕРПРЕС ЛТД, 1997. 223 с.
6. Voronkov V.V. Formation of voids and oxide particles in silicon crystals // Mater. Sci. Eng. 2000. V. B73. P. 69–76.
[https://doi.org/10.1016/S0921-5107\(99\)00436-5](https://doi.org/10.1016/S0921-5107(99)00436-5)
7. Lin W. Oxygen segregation and microscopic inhomogeneity in Cz silicon // Proc. 2nd Int. Symp. on Advanced Science and Technology of Silicon Materials. Kona-Hawaii, USA, 1996. P. 288–293.
8. Bracht H. Native point defects in silicon // Electrochem. Soc. Proc. 1997. V. 22. P. 357–371.
9. Litvinov Yu. M., Makarov A.S., Petrov S.V. et al. Oxidation test application for chemical-mechanical polished (CMP) silicon wafers quality control // Proc. of 4th Int. Conf. ICSC. Obninsk: IphPE, 2001. P. 605–612.
10. Федина Л.И., Дрофа А.Т., Ободников В.И. и др. Анализ ростовых микродефектов в кристаллах FZ-Si, выращенных в условиях вакансионного пересыщения // Совещ. по росту кристаллов, пленок и дефектам структуры кремния (Кремний-2002). Новосибирск: ИФП СО РАН, 2002. С. 16.
11. Эйдензон А.М. Условия возникновения дислокаций в первоначально бездислокационных монокристаллах кремния, выращенных из расплава // Изв. АН СССР. Сер. Физическая. 1980. Т. 44. № 2. С. 312–319.
12. Wijaranakula W. A real-time simulation of point defect reactions near the solid and melt interface of a 200 mm diameter Czochralski silicon crystal // J. Electrochem. Soc. 1993. V. 140. № 11. P. 3306–3315.
<https://doi.org/10.1149/1.2221028>
13. Togawa S., Nishi Y., Kobayashi M. Estimation of radial resistivity profile of FZ-Si crystals by numerical simulation // Electrochem. Soc. Proc. 1998. V. 98 (13). P. 67–79.
14. Ratnieks G., Muiznieks A., Buligins L. et al. Influence of the three dimensionality of the HF electromagnetic field on resistivity variations in Si single crystals during FZ growth // J. Crystal Growth. 2000. V. 216. P. 204–219.
[https://doi.org/10.1016/S0022-0248\(00\)00354-7](https://doi.org/10.1016/S0022-0248(00)00354-7)
15. Larsen T.L., Jensen L., Ludge A. et al. Numerical simulation of point defect transport in floating-zone silicon single crystal growth // J. Crystal Growth. 2001. V. 230. P. 300–304.
[https://doi.org/10.1016/S0022-0248\(01\)01320-3](https://doi.org/10.1016/S0022-0248(01)01320-3)
16. Ciszek T.F., Wang T.H. Silicon defect and impurity studies using float-zone crystal growth as tool // J. Crystal Growth. 2002. V. 237–239. P. 1685–1691.
[https://doi.org/10.1016/S0022-0248\(01\)02325-9](https://doi.org/10.1016/S0022-0248(01)02325-9)

17. *Sinno T., Brown R.A., Ammon W.A. et al.* Point defect dynamics and the oxidation-induced stacking – fault ring in Czochralski-grown silicon crystals // *J. Electrochem. Soc.* 1998. V. 145. № 1. P. 302–318. <https://doi.org/10.1149/1.1838251>
18. *Wang Z., Brown R.A.* Simulation of almost defect-free silicon crystal growth // *J. Crystal Growth.* 2001. V. 231. P. 442–447. [https://doi.org/10.1016/S0022-0248\(01\)01433-6](https://doi.org/10.1016/S0022-0248(01)01433-6)
19. *Nakamura K., Saishoji T., Tomioka J.* Diffusion model of point defects in silicon crystals during melt-growth // *Electrochem. Soc. Proc.* 1998. V. 13. P. 41–53.
20. *Nakamura K., Saishoji T., Tomioka J.* Grown-in defects in silicon crystals // *J. Crystal Growth.* 2002. V. 237–239. P. 1678–1684. [https://doi.org/10.1016/S0022-0248\(01\)02323-5](https://doi.org/10.1016/S0022-0248(01)02323-5)
21. *Sinno T., Jiang Z.K., Brown R.A.* Atomistic simulation of point defects in silicon at high temperature // *Appl. Phys. Lett.* 1996. V. 68. № 21. P. 3026–3030.
22. *Talanin V.I., Talanin I.E., Levinson D.I.* Physics of the formation of microdefects in dislocation-free monocrystals of float-zone silicon // *Semicond. Sci. Technol.* 2002. V. 17. P. 104–113.
23. *Sinno T.* Thermophysical properties of intrinsic point defect crystalline silicon // *Electrochem. Soc. Proc.* 2002. V. 2. № 1. P. 212–226.
24. *Hourai M., Kely G.P., Tanaka T. et al.* Control of grown-in defects in Czochralski silicon crystals // *Electrochem. Soc. Proc.* 1997. V. 22. P. 372–385.
25. *Furuya H., Harada K., Park J.G.* CZ single-crystal silicon without grown-in defects // *Solid State Technology.* 2000. V. 11. P. 525–528.
26. *Kitamura K., Furukawa J., Nakada Y. et al.* Radial distribution of temperature gradients in growing CZ-Si crystals and its application to the prediction of microdefect distribution // *J. Crystal Growth.* 2002. V. 242. P. 293–301.
27. *Abe T.* Thermal gradients measured by thermocouples near growth interfaces in CZ-silicon crystals // *Electrochem. Soc. Proc.* 1999. V. 99 (1). P. 414–424.
28. *Abe T.* The formation mechanism of grown-in defects in CZ silicon crystals based on thermal gradients measured by thermocouples near growth interfaces // *Silicon-99, Japan.* 1999. P. 55–69.
29. *Nakabayashi Y., Osman H.I., Toyonaga K. et al.* Fractional contribution in Si self-diffusion: dopant concentration and temperature dependence on Si self-diffusion mechanism // *Electrochem. Soc. Proc.* 2002. V. 2. № 1. P. 241–247.
30. *Inoue N., Tanahashi K., Kikuchi M.* Point defect behavior in a growing silicon crystal // *Proc. 3rd Symp. on Atomic-Scale Surface and Interface Dynamics.* Japan: Fukuoka, 1999. P. 215–219.
31. *Nakai K., Inoue Y., Yokota H. et al.* Formation of grown-in defects in nitrogen doped Cz-Si crystals // *Proc. 3rd Int. Symp. on Advanced Science and Technology of Silicon Materials.* 2000. P. 88–95.
32. *Akatsuka M., Okui M., Umeno S., Sucoka K.* Calculation of size distribution of void defect in Czochralski silicon // *Electrochem. Soc. Proc.* 2002. V. 2. № 1. P. 517–527.
33. *Sucoka K., Akatsuka M., Okui M., Kata H.* Computer simulation for morphology, size and dependence of oxide precipitates in Czochralski silicon // *Electrochem. Soc. Proc.* 2002. V. 2. № 1. P. 540–553.
34. *Okui M., Nishimoto M.* Effect of the axial temperature gradient on the formation of grown-in defect regions in Czochralski silicon crystals; reversion of the defect regions between the inside and outside of the Ring-OSF // *J. Crystal Growth.* 2002. V. 237–239. P. 1651–1656.
35. *Yang D., Chu J., Ma X. et al.* Oxidation-induced stacking faults in nitrogen doped Czochralski silicon // *Electrochem. Soc. Proc.* 2002. V. 2. № 1. P. 273–279.
36. *Верезуб Н.А., Простомолотов А.И.* Механика процессов выращивания и термообработки монокристаллического кремния // *Изв. РАН. МТТ.* 2020. № 5. С. 51–63. <https://doi.org/10.31857/S0572329920040157>
37. *Верезуб Н.А., Воронков В.В., Мильвидский М.Г., Простомолотов А.И.* Взаимодействие собственных точечных дефектов при выращивании монокристаллов кремния методом Чохральского // *Поверхность. Рентгеновские, синхронные и нейтронные исследования.* 2001. № 10. С. 15–20.
38. *Verezub N.A., Prostomolotov A.I., Mezheny M.V., Mil'vidskii M.G., Reznik V.Ya.* Theoretical and experimental study of the formation of grown-in and as-grown microdefects in dislocation-free silicon single crystals grown by Czochralski method // *Crystallography reports.* 2005. V. 50. Suppl. 1. P. S159–S167.

-
39. *Prostomolotov A.I., Verezub N.A.* Integrated approach for modeling of heat transfer and microdefect formation during CZ silicon single crystal growth // *Solid State Phenomena*. 2007. V. 131–133. P. 283–288.
 40. *Prostomolotov A., Verezub N., Mezhenniy M., Resnik V.* Thermal optimization of CZ bulk growth and wafer annealing for crystalline dislocation-free silicon // *J. Crystal Growth*. 2011. V. 318. P. 187–192.
<https://doi.org/10.1016/j.jcrysro.2010.11.080>
 41. *Vasiliev Yu.B., Verezub N.A., Mezhenniy M.V., Prosolovitch V.S., Prostomolotov A.I., Reznik V.Ya.* Peculiarities of a defect generation during a heat treatment of large diameter dislocation-free silicon wafers with specified distribution of oxygen-containing gettering centres // *Russian Microelectronics*. 2013. V. 42. № 8. P. 467–476.
 42. *Huff H.R., Goodall R.K.* Silicon wafer thermal processing: 300 mm // *Proc. 2nd Int. Symp. on Advanced Science and Technology of Silicon Materials*. USA: Kona-Hawaii, 1996. P. 322–343.
 43. *Fischer A., Richter H., Kumer W., Kucher P.* Slip-free processing of 300 mm silicon batch wafers // *J. Appl. Phys.* 2000. V. 87. № 3. P. 1543–1549.
<https://doi.org/10.1063/1.372047>
 44. *Giannattasio A., Senkader S., Falster R.J., Wilshaw P.W.* The generation of slip in CZ-silicon // *Int. Conf. on Extended Defects in Semiconductors. Abstracts*. Italy: Bologna, 2002. P. 23.
 45. *Falster R.* Intrinsic point defects and reactions in silicon. *Advances in defect engineering* // *First Int. School on Crystal Growth Technology (ISCGT-1): Book of lecture notes*. Switzerland: Beat-enberg, 1998. P. 258–274.

УДК 531.15, 517.977.55

ОПТИМАЛЬНЫЙ РАЗГОН ИЛИ ТОРМОЖЕНИЕ МАССИВНЫХ МАХОВИКОВ НА ПРЕДЕЛЕ ПРОЧНОСТИ

© 2023 г. И. А. Бригаднов^{а,*}, В. В. Максаров^{а,**}, Ю. Олы^{б,***}

^аСанкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург, Россия

^бЭстонский университет естественных наук, Тарту, Эстония

*e-mail: brigadnov@mail.ru

**e-mail: maks78.54@mail.ru

***e-mail: jyri.olt@emu.ee

Поступила в редакцию 19.01.2022 г.

После доработки 26.04.2022 г.

Принята к публикации 29.06.2022 г.

В статье ставится и решается задача оптимального по быстродействию управления квазистатическим разгоном или торможением массивного маховика с учетом прочностных свойств материала. Исследуется зависимость оптимальных режимов от параметров, выявляются качественные особенности оптимальных режимов. Для дисковых и длинных цилиндрических маховиков строятся универсальные оптимальные режимы разгона или торможения, которые можно использовать при проектировании или эксплуатации инерционных накопителей энергии.

Ключевые слова: массивный маховик, инерционный накопитель энергии, предел упругости, оптимальное по быстродействию управление, классический и смешанный режимы управления

DOI: 10.31857/S0572329922100051, **EDN:** DFJQDR

Введение. В статье рассматриваются вопросы построения оптимальных по быстродействию режимов разгона или торможения массивных маховиков на пределе упругости. Как известно, маховик относится к числу перспективных типов накопителей механической энергии [1, 2]. Маховичные (супермаховичные) системы хранения энергии могут применяться для рекуперации энергии торможения на рельсовом транспорте с большой цикличностью движения, например, метropоездах или электричках. Экономия энергии в этих случаях достигает 50%. Кроме того, эти системы могут с успехом применяться на подъемных кранах или лифтах, при этом выигрыш в энергозатратах может достигать 90% и выше. Например, в Нидерландах введена в эксплуатацию инновационная гибридная система накопления энергии, состоящая из литий-ионных аккумуляторов производства швейцарской компании Leclanché и механических накопителей (маховиков) от голландского разработчика S4 Energy. Отмечается, что эффективность устройства достигает 92% (см. <https://energy.hse.ru/ac-senergy>).

К инерционным накопителям предъявляется ряд требований. Например, в настоящее время решена задача выбора оптимальной по энергоемкости конструкции дискового маховика-накопителя. Расчет профиля маховика основан на удовлетворении условию равнопрочности и заданной энергоемкости при вращении с постоянной угловой скоростью [1]. Часто применяемый приближенный учет процессов разгона или

торможения приводит к существенному завышению запаса прочности. В технике встречаются случаи кратковременного использования маховиков-накопителей. Основным требованием для них является минимальное время разгона или торможения при максимальном использовании прочностных свойств материала. Обычно решается близкая задача оптимизации работы электродвигателя с маховиком на валу [2]. Однако маховик рассматривается как твердое недеформируемое тело и, в результате, строятся режимы, далекие от оптимальных по быстродействию.

1. Постановка задачи. Рассмотрим маховик $\Omega \subset R^3$ кольцевого сечения с внутренним радиусом a и внешним радиусом b . Маховик изготовлен из однородного изотропного материала с параметрами: E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность, σ_e — предел упругости (начало текучести). По внутренней поверхности маховик закреплен на жестком валу, который передает ему крутящий момент $M(t)$.

Возникающее угловое ускорение $\varepsilon(t)$ по закону Ньютона–Эйлера линейно связано с крутящим моментом $M(t)$:

$$\varepsilon(t) = \frac{M(t)}{I}$$

где I — осевой момент инерции маховика. В результате вращения маховика как твердого тела появляется удельная объемная сила $\mathbf{f}$ с компонентами в полярной системе координат (r, φ) :

$$f_r(r) = \omega^2 r, \quad f_\varphi(r) = \varepsilon r$$

где f_r и f_φ — радиальная и касательная (тангенциальная) составляющие силы $\mathbf{f}$ соответственно; ω — угловая скорость, связанная с угловым ускорением естественным соотношением $\dot{\omega} = \varepsilon$. Здесь и далее точка сверху обозначает производную по времени. Под действием силы $\mathbf{f}$ в диске возникают инерционные напряжения.

Рассматривается квазистатический режим разгона, т.е. возможные колебательные эффекты не учитываются, поэтому тензор истинных напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}$ удовлетворяет уравнению статического равновесия в каждой точке Ω :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

где ∇ — дифференциальный вектор-оператор Гамильтона, точка обозначает скалярное произведение в R^3 .

Деформации маховика предполагаются малыми, поэтому рассматривается линеаризованный тензор деформаций Коши

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$$

где $\mathbf{u}$ — вектор перемещения маховика относительно ведущего жесткого вала, верхний индекс T обозначает операцию транспонирования тензора второго ранга.

При разгоне на пределе упругости в каждой точке маховика должно выполняться, например, условие Мизеса [3–6]:

$$\boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\sigma}^D \leq 2\sigma_e^2$$

где две последовательные точки обозначают двойное скалярное произведение (скалярную свертку) тензоров второго ранга, верхний индекс D обозначает девиаторную (касательную) часть тензора истинных напряжений Коши.

В этом случае материал подчиняется закону Гука в форме двух линейных соотношений: гидростатическое давление пропорционально относительному изменению объема, а касательные напряжения пропорциональны сдвиговым деформациям

$$\text{tr}(\sigma) = \frac{E}{1 - 2\nu} \text{tr}(\mathbf{E}), \quad \sigma^D = \frac{E}{1 + \nu} \mathbf{E}^D$$

где $\text{tr}(\bullet)$ след (первый инвариант) тензора второго ранга, в частности, $\text{tr}(\sigma)$ пропорционален гидростатическому давлению, а $\text{tr}(\mathbf{E})$ – относительное изменение объема.

Нас интересуют инерционные напряжения внутри маховика, возникающие под действием удельной объемной силы $\mathbf{f}$ вследствие вращения маховика как твердого тела на жестком ведущем валу. Поэтому малые деформации Коши $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ порождаются малым перемещением $\mathbf{u}$ маховика относительно вращающегося жесткого вала. Поскольку внутренняя поверхность маховика закреплена на жестком валу, а боковая поверхность является свободной, ставятся следующие краевые условия:

$$\mathbf{u}(a) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma(b) = \mathbf{0}$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к внешней поверхности маховика. Фактически это означает, что рассматривается краевая задача теории упругости во вращающейся системе координат, привязанной к жесткому ведущему валу.

В начальный момент $t = 0$ маховик находится в натуральном состоянии: $\sigma(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{E}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ для всех $\mathbf{x} \in \Omega$.

Исходная задача формулируется следующим образом. Требуется разогнать массивный маховик из состояния покоя ($\omega = 0, \varepsilon = 0$) до номинальной угловой скорости ($\omega = \omega_T, \varepsilon = 0$) за минимальное время так, чтобы процесс оставался квазистатическим и в любой момент выполнялось условие Мизеса. При торможении ставится обратная задача, а именно, требуется перевести маховик из состояния номинального вращения ($\omega = \omega_T, \varepsilon = 0$) в состояние покоя ($\omega = 0, \varepsilon = 0$) за минимальное время без колебаний и в упругом состоянии.

После решения краевой задачи теории упругости и подстановки полученных напряжений в условие Мизеса находится ограничение на величины ω и ε в виде неравенства $g(\omega, \varepsilon) \leq 0$, которое в силу выпуклости критерия Мизеса определяет выпуклое множество на фазовой плоскости (ω, ε) .

В силу гладкости критерия Мизеса функция $g(\omega, \varepsilon)$ также является гладкой и ее можно разрешить в первом квадранте фазовой плоскости $\{\omega \geq 0; \varepsilon \geq 0\}$ относительно ε

$$g(\omega, \varepsilon) \equiv \varepsilon - q(\omega) \leq 0$$

где функция $q(\omega)$ является вогнутой, гладкой и монотонно убывающей (рис. 1). В этом случае однозначно определяется предельно допустимая (максимальная) угловая скорость вращения маховика как корень уравнения $q(\omega_T^{\max}) = 0$.

Для реализации квазистатического разгона необходимо потребовать непрерывность, более того, кусочную гладкость функции $M(t)$, кусочную непрерывность и ограниченность ее производной $\dot{M}(t)$ на интервале $(0, T)$, а также $M(0) = 0$.

Введем в рассмотрение управление $e(t) = \dot{\varepsilon}(t) = \dot{M}(t)/I$. Тогда исходная задача может быть поставлена в стандартной форме как задача оптимального быстродействия линейной системы с линейным ограничением на управление и нелинейным ограничением на фазовые координаты 1-го рода [7, 8]. А именно, среди гладких функций $\omega(t)$, кусочно-гладких функций $\varepsilon(t)$ и кусочно-непрерывных управлений $e(t)$, удовлетворяющих при $t \in (0, T)$:

- уравнениям движения

$$\dot{\omega} = \varepsilon, \quad \dot{\varepsilon} = e \tag{1.1}$$

- ограничению на управление

$$|e| \leq V \tag{1.2}$$

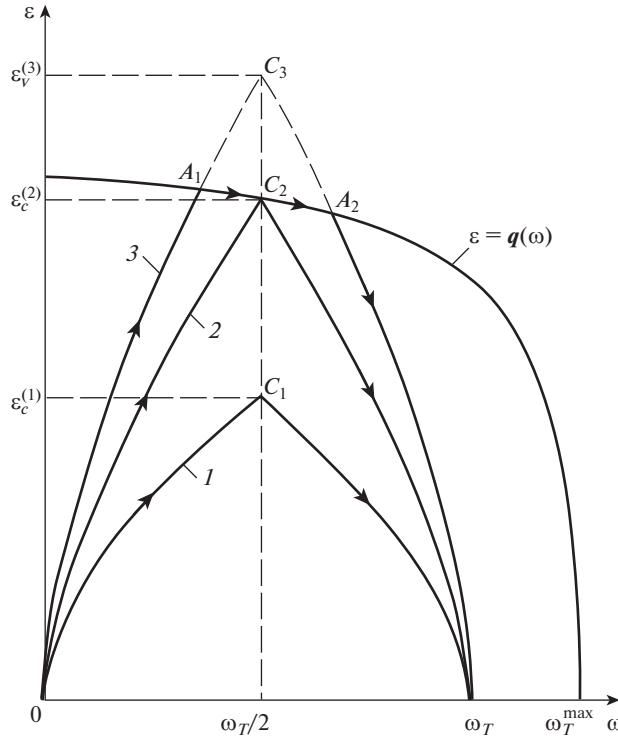


Рис. 1. Оптимальные режимы разгона: 1 – классический ($V < V^*$), 2 – предельный классический ($V = V^*$), 3 – смешанный ($V > V^*$).

- ограничению на фазовые координаты:

$$(\omega, \varepsilon) \in \bar{G} \quad (1.3)$$

где $G = \{(\omega, \varepsilon) : \omega > 0, \varepsilon > 0, g(\omega, \varepsilon) < 0\}$ – выпуклая ограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂G (рис. 1),

- граничным условиям

$$\omega(0) = 0, \quad \varepsilon(0) = 0, \quad \omega(T) = \omega_T, \quad \varepsilon(T) = 0 \quad (1.4)$$

При этом время разгона принимает минимальное значение

$$T \rightarrow \min \quad (1.5)$$

Уровень V ограничения на управление находится либо экспериментально, либо из эксплуатационных соображений. Если маховик раскручивается электродвигателем, то величина V однозначно связана с максимальным током в обмотках электродвигателя.

2. Построение и анализ оптимальных режимов разгона. По условию в начальном состоянии маховик не деформирован и не имеет остаточных напряжений, поэтому точка $(0, 0)$ лежит внутри области G . В конечном состоянии (в режиме номинального вращения) маховик также должен находиться в упругом состоянии, то есть точка $(\omega_T, 0) \in \bar{G}$ (рис.1). Задача (1.1)–(1.5) является линейной задачей оптимального быстрогодействия с линейным ограничением на управление и нелинейным ограничением на фазовые координаты 1-го порядка [7–12]. Возможны два вида режима разгона: пер-

вый, когда вся фазовая траектория $\varepsilon(\omega)$ лежит в G , и второй, когда фазовая траектория выходит на границу ∂G допустимой области.

1. Пусть вся фазовая траектория $\varepsilon(\omega)$ лежит в G (рис. 1, варианты 1 и 2). В этом случае верны теоремы об управляемости, существовании, единственности и n -интервалах [7–12]. В этом случае управление $e(t)$ кусочно-постоянное с моментом переключения $t_* = T/2$.

Реализуется классический режим разгона [9–12] с кусочно-линейной зависимостью для $\varepsilon(t)$:

$$\begin{aligned} e(t) &= V, \quad \varepsilon(t) = Vt, \quad \omega(t) = Vt^2/2 \quad \text{для} \quad t \in [0, T/2] \\ e(t) &= -V, \quad \varepsilon(t) = V(T-t), \quad \omega(t) = \omega_T - V(T-t)^2/2 \quad \text{для} \quad t \in \left[\frac{T}{2}; T\right] \end{aligned}$$

На фазовой плоскости (ω, ε) классический режим состоит из двух экстремалей: на участке чистого разгона $[0, \omega_T/2)$ зависимость $\varepsilon(\omega) = \sqrt{2V\omega}$ и на участке притормаживания $[\omega_T/2, \omega_T]$ зависимость $\varepsilon(\omega) = \sqrt{2V(\omega_T - \omega)}$.

Из условия $\omega(T/2) = \omega_T/2$ находим оптимальное время разгона

$$T = 2\sqrt{\omega_T/V}$$

Начальный и конечный участки фазовой траектории пересекаются в точке C с координатами

$$\omega_C = \omega_T/2, \quad \varepsilon_C = \sqrt{V\omega_T} \quad (2.1)$$

Очевидно, что $\varepsilon_C - q(\omega_C) \leq 0$ (рис. 1, варианты 1 и 2)).

2. Рассмотрим случай смешанного режима разгона (рис. 1, вариант 3). В этом случае фазовая траектория состоит из дуг, лежащих в G , и из части границы ∂G . Для построения оптимального режима разгона воспользуемся принципом Беллмана [13]: каждый участок оптимальной траектории является оптимальным по тому же критерию. Части траектории, лежащие в G , по-прежнему являются экстремальями, то есть $e(t) = \pm V$ в G . Будем предполагать, что траектория состоит из 3-х участков (рис. 1). На промежутках $[0, t_1]$ и $[t_2, T]$ траектория проходит внутри G , а на интервале (t_1, t_2) траектория проходит по границе ∂G . В момент t_1 происходит выход на границу ∂G в точке $A_1(\omega_1, \varepsilon_1)$, в момент t_2 происходит сход с границы ∂G в точке $A_2(\omega_2, \varepsilon_2)$. Если формально найти координаты точки C_3 по формуле (2.1) то, очевидно, что $\varepsilon_C^{(3)} > q(\omega_T/2)$, т.е. $C_3 \notin \bar{G}$ (рис. 1, вариант 3).

Из условия непрерывности фазовой траектории в моменты t_1 и t_2 находим уравнения для определения координат точек A_1 и A_2 :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{q^2(\omega_1)}{2V}, \quad \varepsilon_1 = q(\omega_1) = \sqrt{2V\omega_1} \\ \omega_2 &= \omega_T - \frac{q^2(\omega_2)}{2V}, \quad \varepsilon_2 = q(\omega_2) = \sqrt{2V(\omega_T - \omega_2)} \end{aligned}$$

Момент t_1 выхода на границу ∂G и момент t_2 схода с ∂G определяются как

$$t_1 = \frac{q(\omega_1)}{V}, \quad t_2 = t_1 + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{q(\omega)}$$

Реализуется смешанный режим разгона:

$$e(t) = V, \quad \varepsilon(t) = Vt, \quad \omega(t) = Vt^2/2 \text{ для } t \in [0, t_1] \quad (2.2)$$

$$e(t) = q'(\omega(t))q(\omega(t)), \quad \varepsilon(t) = q(\omega(t)), \quad \int_{\omega_1}^{\omega(t)} \frac{d\omega}{q(\omega)} = t - t_1 \text{ для } t \in (t_1, t_2)$$

$$e(t) = -V, \quad \varepsilon(t) = V(T - t), \quad \omega(t) = \omega_T - V(T - t)^2/2 \text{ для } t \in [t_2, T]$$

Между точками A_1 и A_2 на промежутке $[t_1, t_2]$ реализуется режим движения по границе ∂G (рис. 1). Время разгона по смешанному режиму (2.2) находится по формуле

$$T = \frac{q(\omega_1) + q(\omega_2)}{V} + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{q(\omega)} \quad (2.3)$$

Покажем, что движение по границе ∂G оптимально по быстродействию для рассматриваемой задачи. Для этого введем в рассмотрение множество допустимых фазовых траекторий на отрезке $[\omega_1, \omega_2]$

$$\Gamma(\omega_1, \omega_2) = \{\varphi(\omega) \in C^1(\omega_1, \omega_2): \varphi(\omega_1) = \varepsilon_1, \varphi(\omega_2) = \varepsilon_2, 0 < \varphi(\omega) \leq q(\omega), \varphi'(\omega) | \varphi(\omega) \leq V\}$$

Будем считать, что сама граница ∂G является допустимой, т.е. $q(\omega) \in \Gamma(\omega_1, \omega_2)$. Возьмем $\forall \varphi(\omega) \in \Gamma(\omega_1, \omega_2)$. При движении по траектории $\varepsilon = \varphi(\omega) \leq q(\omega)$ удовлетворяются уравнения движения (1.1), в частности:

$$\frac{d\omega}{dt} = \varphi(\omega)$$

Интегрируя это уравнение, находим время движения от точки A_1 до точки A_2 по траектории $\varepsilon = \varphi(\omega)$

$$\Delta t(\varphi) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{\varphi(\omega)}$$

По условию $q(\omega) \in \Gamma(\omega_1, \omega_2)$, откуда следует, что

$$0 < \frac{1}{q(\omega)} \leq \frac{1}{\varphi(\omega)}, \quad \forall \omega \in [\omega_1; \omega_2]$$

Тогда интегрируя это неравенство, находим, что

$$0 < \Delta t(q) \leq \Delta t(\varphi), \quad \forall \varphi \in \Gamma(\omega_1, \omega_2)$$

Таким образом, движение по допустимой границе ∂G оптимально по быстродействию. Единственность вытекает из однозначности функции $q(\omega)$. Из выражения (2.3) находится выражение для времени разгона по произвольному допустимому режиму $\varepsilon(\omega) \in \Gamma(0, \omega_T)$

$$T = \int_0^{\omega_T} \frac{d\omega}{\varepsilon(\omega)}$$

Для смешанного режима разгона (2.2) выполняются условия задачи (1.1)–(1.5), все три участка траектории оптимальны по быстродействию, поэтому согласно принципу Беллмана [13] построенный смешанный режим разгона массивного маховика является оптимальным по быстродействию. Легко убедиться, что для этого режима выполняются все необходимые условия оптимальности, а также принцип максимума Понтрягина [9–12].

Отдельно рассмотрим вопрос перехода классического режима разгона в смешанный. Для $\varepsilon(t)$ введем в рассмотрение критический классический кусочно-линейный

режим разгона с параметрами $\{V_*, T_*\}$. Он реализуется в случае совпадения точек A_1 , A_2 и C_2 (рис. 1, вариант 2), то есть когда $\varepsilon_C = q(\omega_C)$. Параметр V_* для $\omega_1 = \omega_2 = \omega_T/2$ находится как

$$V_* = \frac{q^2(\omega_T/2)}{\omega_T} \quad (2.4)$$

При $V \leq V_*$ реализуется классический непрерывный кусочно-линейный для $\varepsilon(t)$ режим разгона, при $V > V_*$ — смешанный режим (рис. 1). Время, отвечающее критическому режиму, находится после подстановки выражения (2.4) в соответствующее соотношение для классического режима

$$T_* = 2\sqrt{\omega_T/V_*} = \frac{2\omega_T}{q(\omega_T/2)}$$

При увеличении V время разгона $T(V)$ уменьшается и при $V \rightarrow +\infty$ из соотношения (2.3) находится его предельное значение:

$$T_\infty = \int_0^{\omega_T} \frac{d\omega}{q(\omega)}$$

При этом необходимо потребовать, чтобы граница ∂G была допустимой на всем отрезке $[0, \omega_T]$, т.е. $q(\omega) \in \Gamma(0, \omega_T)$.

Время T_∞ отвечает разгону без ограничений на управление $e(t)$, поэтому верна оценка

$$0 < T_\infty < T(V), \quad \forall V < +\infty$$

Рассмотрим следующее выражение:

$$\frac{T_\infty}{T_*} = \frac{1}{2} R(\omega_T) = \frac{1}{2} \frac{q(\omega_T/2)}{\omega_T} \int_0^{\omega_T} \frac{d\omega}{q(\omega)}$$

Как будет показано далее, для маховиков цилиндрической формы функция $q(\omega)$ может быть представлена в виде:

$$q(\omega) = \sqrt{C_2^4 - C_1^4 \omega^4}$$

где константы C_1 и C_2 выражаются через физические параметры материала маховика и геометрические размеры его сечения. В этом случае функция R принимает вид:

$$R\left(\frac{C_1 \omega_T}{C_2}\right) \equiv R(y) = \frac{F(y)}{y} \sqrt{1 - \frac{y^4}{16}}, \quad F(y) = \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}, \quad y \in (0, 1]$$

где $F(y)$ — нормальный эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода в форме Якоби с чисто мнимым модулем [14, 15]. В силу свойств эллиптического интеграла, функция $R(y)$ является монотонно возрастающей на $(0, 1]$ и для нее справедливо предельное соотношение

$$\inf_{(0,1]} R(y) = \lim_{y \rightarrow +0} R(y) = 1$$

Таким образом, абсолютная оценка для оптимального времени разгона цилиндрического маховика на пределе упругости принимает вид:

$$0 < \frac{T_*}{2} < T_\infty < T(V), \quad \forall V < +\infty$$

Из этой оценки следует, что никаким управлением $e(t)$ невозможно уменьшить время разгона цилиндрического маховика более чем в два раза по сравнению с критическим временем предельного классического непрерывного кусочно-линейного режима. Особенность эта появляется исключительно из-за ограничения на фазовые координаты (1.3), связанного с ограничением на тензор напряжений в процессе разгона. Для задачи оптимального торможения справедливы все полученные результаты с той разницей, что процесс разворачивается в обратном направлении в четвертом квадранте фазовой плоскости.

Мы рассмотрели частный случай ограничения на тензор напряжений в форме критерия Мизеса, гарантирующего отсутствие пластических деформаций. На самом деле можно рассматривать другие ограничения, например, критерий Кулона–Мора или условие отсутствия хрупкого разрушения [3, 4].

3. Применение полученных результатов при проектировании инерционных накопителей энергии. Решение задачи оптимального по быстродействию разгона массивного маховика на пределе упругости включает два этапа:

1) решение краевой задачи теории упругости и получение из условия Мизеса ограничений на величины угловой скорости ω и углового ускорения ϵ ;

2) решение задачи оптимального управления.

Вторая задача решена в пункте 2, поэтому остановимся на получении ограничений на фазовые координаты.

С практической точки зрения интерес представляют режимы разгона дисковых и длинных цилиндрических маховиков. Это связано с тем, что дисковый маховик может запасать энергию порядка 10^8 Дж [1]. Повышение энергозапаса накопителя сверх 10^8 Дж связано с увеличением веса и переходом к маховикам цилиндрической формы [2].

Будем решать краевую задачу теории упругости для дисковых маховиков в рамках модели плоского напряженного состояния, а для длинных цилиндрических маховиков в рамках модели плоского деформированного состояния. Очевидно, что краевая задача является осесимметричной, поэтому в полярных координатах (r, φ) она записывается в следующем виде [4]:

- уравнения статического равновесия

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = -\rho\omega^2 r, \quad \frac{d\sigma_{r\varphi}}{dr} + \frac{2}{r}\sigma_{r\varphi} = -\rho\epsilon r$$

- деформационные соотношения Коши

$$E_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad E_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad E_{r\varphi} = \frac{r}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right)$$

- краевые условия

$$u_r(a) = 0, \quad u_\varphi(a) = 0; \quad \sigma_{rr}(b) = 0, \quad \sigma_{r\varphi}(b) = 0$$

Для плоского напряженного состояния закон Гука записывается в виде:

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-\nu}(E_{rr} + E_{\varphi\varphi}), \quad \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1+\nu}(E_{rr} - E_{\varphi\varphi}), \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{E}{1+\nu}E_{r\varphi}$$

Критерий Мизеса для плоского напряженного состояния имеет вид [4]:

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{r\varphi}^2 \leq \sigma_e^2$$

а для плоского деформированного состояния

$$(1-\nu+\nu^2)(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (1-2\nu)\sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{r\varphi}^2 \leq \sigma_e^2$$

Решение задачи в рамках модели плоского напряженного состояния имеет вид:

$$\sigma_{rr}(r) = \omega^2 \frac{r}{8} \left[(1 + \nu) D_1 + \frac{1 - \nu}{r^2} D_2 - (3 + \nu) r^2 \right], \quad \sigma_{r\varphi}(r) = \varepsilon \frac{r b^2}{4} \left[\frac{b^2}{r^2} - \frac{r^2}{b^2} \right] \quad (3.1)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r) = \omega^2 \frac{r}{8} \left[(1 + \nu) D_1 - \frac{1 - \nu}{r^2} D_2 - (1 + 3\nu) r^2 \right]$$

где постоянные

$$D_1 = \frac{(1 - \nu) a^4 + (3 + \nu) b^4}{(1 - \nu) a^2 + (1 + \nu) b^2}, \quad D_2 = \frac{(3 + \nu) b^2 - (1 + \nu) a^2}{(1 - \nu) a^2 + (1 + \nu) b^2} a^2 b^2$$

Решение задачи для плоского деформированного состояния получается простой заменой в формулах (3.1) коэффициента Пуассона ν на $\frac{\nu}{1 + \nu}$ [4].

В процессе разгона необходим постоянный жесткий контакт между маховиком и ведущим валом, поэтому целесообразно рассматривать условие Мизеса на внутренней поверхности маховика при $r = a$. В этом случае ограничение на ω и ε принимает вид:

$$\varepsilon^2 + c_1^2 \omega^4 - c_2^2 \leq 0 \quad (3.2)$$

где

$$c_1^2 = \left(\frac{a^2}{b^4 - a^4} \right) \left(\frac{1 - \nu + \nu^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(3 + \nu) b^4 - 2(1 + \nu) a^2 b^2 - (1 - \nu) a^4}{(1 - \nu) a^2 + (1 + \nu) b^2} \right]$$

для плоского напряженного состояния;

$$c_2^2 = \left(\frac{a^2}{b^4 - a^4} \right) \left(\frac{1 - 2\nu}{\sqrt{3}(1 - \nu)} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(3 + 4\nu) b^4 - 2(1 + 2\nu) a^2 b^2 - a^4}{a^2 + (1 + 2\nu) b^2} \right]$$

для плоского деформированного состояния;

$$c_2^2 = \frac{4\sqrt{3}\sigma_e a^2}{3(b^4 - a^4)}$$

Сделаем следующие замены:

$$x_1 = \frac{c_1 \omega}{c_2}, \quad x_2 = \frac{\varepsilon}{c_2}, \quad X_T = \frac{c_1 \omega_T}{c_2}, \quad w = \frac{e}{c_1 c_2^3}, \quad W = \frac{V}{c_1 c_2^3}, \quad \theta = c_1 c_2 t, \quad \Theta = c_1 c_2 T \quad (3.3)$$

Тогда задача оптимального быстрогодействия (1.1)–(1.5) может быть записана полностью в безразмерном виде. А именно, среди кусочно-гладких фазовых траекторий (x_1, x_2) и кусочно-непрерывных управлений w найти такие, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\frac{dx_1}{d\theta} = x_2, \quad \frac{dx_2}{d\theta} = w, \quad |w| \leq W, \quad x_1^4 + x_2^2 - 1 \leq 0$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(\Theta) = X_T, \quad x_2(\Theta) = 0$$

при этом приведенное безразмерное время разгона принимало наименьшее значение

$$\Theta \rightarrow \min$$

Здесь функция $q(\omega)$ имеет простой вид:

$$q(x_1) = \sqrt{1 - x_1^4}$$

Согласно (2.4) критическое значение ограничения на управление находится как:

$$W_* = \frac{16 - X_T^4}{16X_T} \quad (3.4)$$

Таким образом:

- 1) при $W \leq W_*$ реализуется классический непрерывный кусочно-линейный режим для фазовой переменной x_2 ;
- 2) при $W > W_*$ реализуется смешанный режим вида

$$w = W, \quad x_2 = W\theta, \quad x_1 = \frac{W\theta^2}{2} \quad \text{для} \quad \theta \in [0, \theta_1]$$

$$w = -2\operatorname{sn}^3(\theta - \theta_1 + \theta_*), \quad x_2 = \operatorname{cn}(\theta - \theta_1 + \theta_*) \operatorname{dn}(\theta - \theta_1 + \theta_*)$$

$$x_1 = \operatorname{sn}(\theta - \theta_1 + \theta_*) \quad \text{для} \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2)$$

$$w = -W, \quad x_2 = W(\Theta - \theta), \quad x_1 = X_T - \frac{W(\Theta - \theta)^2}{2} \quad \text{для} \quad \theta \in [\theta_2; \Theta]$$

где $\operatorname{sn}(x)$, $\operatorname{cn}(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(x)}$ и $\operatorname{dn}(x) = \sqrt{1 + \operatorname{sn}^2(x)}$ – эллиптические функции Якоби (синус-амплитуда, косинус-амплитуда и дельта-амплитуда, соответственно) [14, 15].

Оптимальное приведенное время разгона находится как:

$$\Theta = \frac{1}{W} [\sqrt{1 - (x_1^{(1)})^4} + \sqrt{1 - (x_1^{(2)})^4}] + \operatorname{arcsn}(x_1^{(2)}) - \operatorname{arcsn}(x_1^{(1)})$$

где $\operatorname{arcsn}(x) = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}}$ – нормальный эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода в форме Якоби с чисто мнимым модулем, функция обратная к $\operatorname{sn}(x)$ [14].

Координаты точек $x_1^{(1)}$ и $x_1^{(2)}$ выхода на ∂G и схода с ∂G , соответственно, ищутся как корни уравнений

$$(x_1^{(1)})^4 + 2Wx_1^{(1)} - 1 = 0, \quad (x_1^{(2)})^4 + 2W(X_T - x_1^{(2)}) - 1 = 0$$

Величины θ_1 , θ_2 и θ_* вычисляются по формулам

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{2x_1^{(1)}}{W}}, \quad \theta_2 = \Theta - \sqrt{\frac{2(X_T - x_1^{(2)})}{W}}, \quad \theta_* = \operatorname{arcsn}(x_1^{(1)})$$

4. Методика оценки затрат на уменьшение времени разгона цилиндрических маховиков. В результате замен (3.3) и сведения задачи оптимального управления к безразмерному виду построено универсальное решение, пригодное для произвольных маховиков цилиндрической формы. На рис. 2 показана универсальная зависимость T/T_* от V_*/V , в которую не входят ни параметры материала, ни размеры маховика. Величина X_T (или ω_T) является параметром кривой. Эта зависимость позволяет, не решая задачи, оценить эффективность затрат на увеличение максимального управления V при необходимости уменьшить время разгона T .

Например, пусть имеется некоторый базовый вариант устройства с параметрами $\{V_1, T_1\}$. Требуется уменьшить время разгона маховика до величины $T_2 < T_1$. Соответствующий параметр V_2 находится по следующей методике:

1. По формулам (3.2) вычисляются константы c_1 и c_2 , отвечающие данному маховику.
2. После пересчета по формулам (3.3) находятся величины $X_T, W_1, \Theta_1, \Theta_2$.

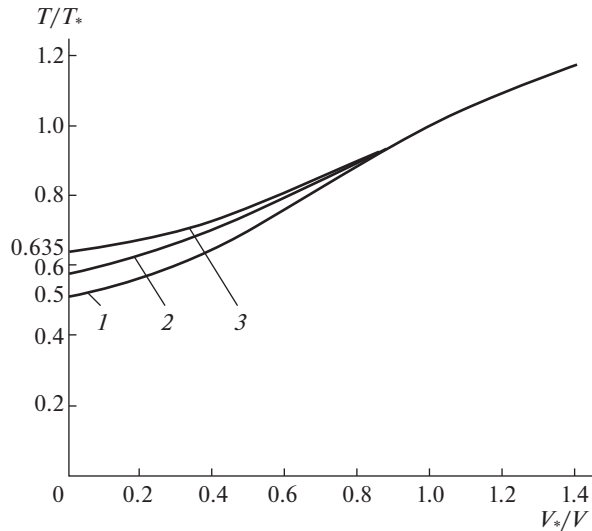


Рис. 2. Универсальные зависимости для цилиндрических маховиков: кривые 1, 2 и 3 отвечают значениям параметра $\omega_T^{(1)} \ll 1$, $\omega_T^{(1)} < \omega_T^{(2)} < \omega_T^{(3)} = \omega_T^{\max}$ соответственно.

3. По графику на рис. 2 и значению $\alpha_2 = \frac{T_2}{T_*} = \frac{\Theta_2}{\Theta_*}$ определяется параметр $\beta_2 = \frac{W_*}{W_2}$,

где W_* находится по формуле (3.4), а $\Theta_* = 2\sqrt{W_* X_T}$.

4. Вычисляется величина $V_2 = \frac{c_1 c_2 W_*}{\beta_2}$.

Зная реальные затраты на увеличение максимального управления от значения V_1 до V_2 , можно сопоставить этот уровень затрат с реальным выигрышем во времени разгона маховика. Однако необходимо иметь в виду, что ни каким управлением невозможно уменьшить время разгона цилиндрического маховика более чем в два раза по сравнению с критическим временем классического кусочно-линейного режима. Максимальный разброс кривых на рис. 2 достигается при $V \rightarrow +\infty$, т.е. при $V_*/V \rightarrow +0$. В зависимости от величины конечной угловой скорости ω_T (или X_T) нижняя грань отношения T/T_* изменяется от 0.5 до, примерно, 0.635.

Выводы. В статье рассмотрены вопросы построения и анализа оптимальных по быстродействию режимов разгона или торможения массивных маховиков на пределе прочности. Рассмотрены квазистатические режимы управления вращением маховика крутящим моментом. Решение задачи включает два этапа: а) определение напряженно-деформированного состояния маховика при квазистатическом вращении и нахождение ограничений на угловую скорость и угловое ускорение из условия пластичности Мизеса; б) решение задачи оптимального быстродействия линейной динамической системы с линейным ограничением на управление и нелинейным ограничением на фазовые координаты 1-го порядка.

1. Решена задача оптимального по быстродействию разгона или торможения массивных маховиков на пределе прочности в общем виде. Построены два типа опти-

мальных режимов изменения крутящего момента. Первый отвечает классическому кусочно-линейному режиму, второй — смешанному режиму, допускающему движение на пределе упругого деформирования материала. В общем случае смешанный режим состоит из трех частей: начального линейного, среднего нелинейного (при движении на пределе упругости) и конечного линейного участков. Доказано, что смешанный режим является оптимальным по быстродействию.

2. Предложен критерий, по которому определяется тип оптимального решения в зависимости от исходных данных задачи. Установлено, что с расширением диапазона изменения первой производной по времени от крутящего момента классический режим переходит в смешанный. Определены параметры критического режима разгона или торможения, при котором еще реализуется классическое кусочно-линейное управление.

3. Построена оценка снизу для оптимального времени разгона или торможения массивных цилиндрических маховиков. Установлено, что никаким управлением невозможно уменьшить время разгона или торможения массивного маховика более чем в два раза по сравнению с критическим кусочно-линейным режимом управления крутящим моментом.

4. Для дисковых и длинных цилиндрических маховиков построены универсальные оптимальные режимы разгона или торможения на пределе упругости. Полученные решения не зависят ни от геометрических размеров, ни от свойств материала маховика.

5. Предложена методика определения затрат на уменьшение времени разгона или торможения массивного цилиндрического маховика с учетом упругопластических свойств материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гулия Н.В. Накопители энергии. М.: Наука, 1980. 151 с.
2. Гулия Н.В. Супермаховики — из суперкарбона // Изобретатель-рационализатор. 2005. № 12 (672). С. 10–15.
3. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979. 208 с.
4. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М: Наука, 1988. 711 с.
5. Бригаднов И.А. Многокритериальная оценка несущей способности геоматериалов // Записки Горного института. 2016. Т. 218. С. 289–295.
6. Бригаднов И.А. Прямые методы решения вариационной задачи для многокритериальной оценки несущей способности геоматериалов // Записки Горного института. 2018. Т. 232. С. 368–374.
<https://doi.org/10.31897/PMI.2018.4.368>
7. Троицкий В.А. Вариационные задачи оптимизации процессов управления в системах с ограниченными координатами // ПММ. 1962 Т. 26. Вып. 3. С. 431–443.
8. Семенов А.С., Троицкий В.А. О задаче оптимизации с ограничениями на фазовые координаты // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 1. С. 127–131.
9. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
10. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
11. Матвеев А.С. Введение в математическую теорию оптимального управления. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2018. 195 с.
12. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. М.: URSS, 2019. 200 с.
13. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Иностран. лит., 1960. 400 с.
14. Беляков В.М., Кравцова Р.И., Раппопорт М.Г. Таблица эллиптических интегралов. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 656 с.
15. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977. 342 с.

УДК 531.01

О ДИНАМИКЕ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ С УДАРАМИ И ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ

© 2023 г. Г. М. Розенблат^{а,*}, С. В. Борисов^{а,**}

^аМосковский автомобильно-дорожный государственный технический университет,
Москва, Россия

*e-mail: gr51@mail.ru

**e-mail: sv-brisov@mail.ru

Поступила в редакцию 30.01.2022 г.

После доработки 15.05.2022 г.

Принята к публикации 19.05.2022 г.

В статье рассмотрены некоторые задачи механики о качении колеса с ударами и односторонними связями в условиях сухого трения. Такие задачи часто встречаются на практике при наезде или съезде колеса транспортного средства с препятствия. Контакт колеса с дорогой предполагается точечным, модель сухого трения — классическая модель Эйлера—Кулона. Дан полный анализ различных случаев ударного и послеударного движений колеса.

Ключевые слова: односторонние ограничения, отрыв, сила нормальной реакции, ударное воздействие

DOI: 10.31857/S0572329922100075, EDN: DFALEA

Введение. Задачи качения колеса, как основного элемента конструкции транспортного средства, в условиях сухого трения представляются весьма важными и полезными в настоящее время. Такие задачи встречаются, например, при исследовании шимми колеса шасси самолетной стойки [1–3] или устойчивости вертикального движения экипажа [4, 5]. Необходимо при этом учитывать, что контакт колеса с дорогой не является точечным, а происходит по некоторой (пусть и малой) площадке. Тогда классическая (по Эйлеру—Кулону) модель сухого трения должна быть заменена более реальной моделью Контенсу—Журавлева [6]. Это обстоятельство усложняет решение задач устойчивости, но приводит к более точным результатам и выводам.

Другая сторона задач о качении колеса заключается в исследовании нарушения контакта (односторонней связи) колеса с дорогой, в частности, при наезде колеса на препятствие или, наоборот, съезде с препятствия (например, это может быть выбоина или крышка канализационного люка). В этих случаях необходимо использовать теорию удара с трением [7]. Ясно, что в таких случаях сила трения, приложенная к колесу, существенно меняется (в частности, она может и равняться нулю). Такие критические ситуации, конечно, крайне нежелательны при движении транспортных средств или других колесных устройств. Поэтому исследование таких критических ситуаций представляется полезным с практической точки зрения.

В настоящей работе сделана попытка полного аналитического решения и анализа таких задач на достаточно простых моделях качения колеса. Предполагается, что контакт колеса с дорогой точечный, а модель сухого трения является классической по Эйлеру—Кулону. Рассмотрены некоторые задачи теоретической механики с ударами и

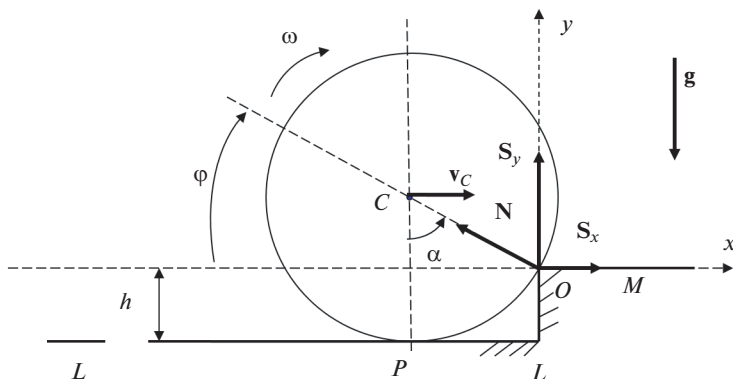


Рис. 1. Схема к задаче № 1.

односторонними связями, которые ранее были решены некорректно или неполно [8, 9]. В статье приведены полные решения таких задач, указаны причины допущенных ошибок и неполных решений. Также рассмотрены решения указанных задач для случаев их более широкой постановки. Отдельное внимание уделено возможности реализации движения тел с учетом действующих сил трения.

В частности, в задаче о скатывании колеса с уступа рассмотрен весь спектр инерционных свойств колеса относительно центра масс, совпадающего с его геометрическим центром. Показано, что при конечном значении коэффициента трения колесо начнет проскальзывать до его отрыва от уступа. Исключение составляет случай, соответствующий системе, состоящей из точечной массы, закрепленной в центре колеса, инерционными свойствами которого можно пренебречь. В этой ситуации колесо, обладающее указанными свойствами, проскальзывать не будет при любом значении коэффициента трения скольжения.

В задаче о перекаtywании колеса через уступ рассматриваются условия, при которых колесо может преодолеть препятствие без отрыва от поверхности и без проскальзывания относительно нее, а также определяются дополнительные ограничения, накладываемые на высоту уступа при условии конечности коэффициента трения скольжения.

В задаче о подкидной доске и шарах рассматриваются возможные варианты последующего движения системы.

1. Задача о перекаtywании колеса через уступ [8]. Пусть колесо массы m и радиуса r , катясь без скольжения по горизонтальной направляющей LL , наталкивается на уступ высотой h и, огибая его, поднимается на горизонтальную направляющую OM . Удар колеса об уступ считается неупругим, скольжение при ударе и огибании уступа отсутствует.

Определим, какой должна быть скорость центра C колеса перед ударом, чтобы колесо вкатилось на верхнюю направляющую.

Пусть S_x и S_y – ударные импульсы, приложенные в точке контакта O (см. рис. 1). Обозначим через α угол, образуемый радиусом CO с вертикалью ($\alpha = \angle OCP$). Ясно, что:

$$\cos \alpha = 1 - \varepsilon, \quad \sin \alpha = \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}, \quad \varepsilon = h/r \quad (1.1)$$

Предударное состояние колеса является качением без проскальзывания, а последующее – это вращение без проскальзывания вокруг точки O . В системе координат Oxy (рис. 1) имеем для скорости центра масс C и угловой скорости ω колеса:

$$\begin{aligned} v_{Cx}^- &= v_C, & v_{Cy}^- &= 0, & \omega &= \omega^- = v_C/r \\ v_{Cx}^+ &= \omega^+ r \cos \alpha, & v_{Cy}^+ &= \omega^+ r \sin \alpha, & \omega &= \omega^+ \end{aligned} \quad (1.2)$$

В (1.2) знак “–” относится к предупредному состоянию, а знак “+” относится к состоянию, наступившему сразу после момента удара. Т.к., ударные импульсы S_x и S_y не создают момента относительно точки O , то сохраняется кинетический момент колеса относительно точки O . Имеем, используя (1.2):

$$K_O^- = mv_C(r - h) + J_C \omega^- = \frac{3}{2} mv_C r \left(1 - \frac{2}{3} \varepsilon\right), \quad K_O^+ = m(\omega^+ r) r + J_C \omega^+ = \frac{3}{2} m r^2 \omega^+$$

Приравнявая полученные выражения, найдем ω^+ :

$$\omega^+ = \frac{\sigma v_C}{r}, \quad \text{где} \quad \sigma = \left(1 - \frac{2}{3} \varepsilon\right) \quad (1.3)$$

Отметим, что для корректной реализации послеударного движения колеса необходимо, чтобы $\omega^+ > 0$. Согласно (1.3), это эквивалентно неравенству $\sigma > 0$, из которого следует неравенство $\varepsilon = h/r < 1.5$.

После удара колесо начинает вращаться вокруг точки O по часовой стрелке, т.е. поднимается вверх. Если не рассматривать процесс этого движения в деталях, то ясно, что колесо поднимется до уровня OM , если у него будет достаточный запас послеударной кинетической энергии. Ввиду того, что полная механическая энергия при таком движении без проскальзывания в точке O сохраняется, минимальное значение угловой скорости ω_1 , необходимое для такого подъема, находится из соотношения $T^+ = \Pi$, где

$$T^+ = \frac{m}{2} (\omega_1 r)^2 + \frac{J_C}{2} \omega_1^2, \quad \Pi = mgh$$

Отсюда получим $\omega_1^2 = 4gh/(3r^2)$. Таким образом, для подъема до уровня OM , необходимо, чтобы:

$$(\omega^+)^2 \geq \omega_1^2 = 4gh/(3r^2) \quad (1.4)$$

Используя (1.3), из (1.4) получим соответствующее неравенство для:

$$v_C^2 \geq 4gh/(3\sigma^2) \quad (1.5)$$

Формула (1.5) приведена в [1], где дополнительно указано также и неравенство, при котором этот ответ справедлив.

$$0 \leq \varepsilon = h/r \leq 1$$

Это неравенство v_C очевидно из геометрических соображений, если считать уступ прямоугольным, как это изображено на рис. 1. Однако можно представлять себе уступ и криволинейным, а тогда указанное послеударное кинематическое движение колеса реализуется также и при $0 \leq \varepsilon = h/r \leq 1.5$.

Рассмотрим процесс послеударного движения колеса более детально, предполагая, что в точке O отсутствует проскальзывание. Пусть φ – угол между радиусом CO и отрицательным направлением горизонтальной оси Ox (рис. 1). Запишем уравнение движения центра масс C колеса в проекции на радиус OC :

$$m\ddot{\varphi}^2 r = mg \sin \varphi - N \quad (1.6)$$

где N – нормальная реакция, действующая на колесо со стороны уступа O .

Для осуществимости безотрывного движения колеса необходимо, чтобы $N > 0$. Тогда из (1.6) имеем неравенство:

$$N = mg \sin \varphi - m\dot{\varphi}^2 r > 0 \quad (1.7)$$

Ясно, что $\varphi \in [0.5\pi - \alpha, 0.5\pi]$.

Запишем теорему об изменении кинетического момента колеса относительно точки O :

$$\frac{3}{2} m r^2 \ddot{\varphi} = -m g r \cos \varphi$$

Отсюда следует, что $\ddot{\varphi} < 0$, т.е. $\dot{\varphi}(\varphi)$ — монотонно-убывающая функция от аргумента φ , а $\sin \varphi$ — монотонно возрастающая функция при $\varphi \in [0.5\pi - \alpha, 0.5\pi]$. Тогда, если неравенство (1.7) выполнено в начальный момент при $\varphi = \varphi_0 = 0.5\pi - \alpha$, то оно будет выполнено вплоть до подъема колеса на OM . Таким образом, нарушение неравенства (1.7) (т.е. неосуществимость описанного движения) может произойти лишь при $\varphi = \varphi_0 = 0.5\pi - \alpha$, т.е., если сразу после удара выполняется соотношение:

$$g \sin(0.5\pi - \alpha) - (\omega^+)^2 r < 0 \Rightarrow (\omega^+)^2 > \frac{g \cos \alpha}{r} = \frac{g}{r} (1 - \epsilon)$$

Итак, получен следующий результат.

1) Если

$$\frac{4}{3} \frac{gh}{r^2} \leq (\omega^+)^2 \leq \frac{g}{r} (1 - \epsilon) \quad (1.8)$$

то безотрывное перекачивание колеса через уступ возможно и реализуется при отсутствии проскальзывания в точке O .

2) Если $(\omega^+)^2 \leq \frac{4}{3} \frac{gh}{r^2}$, то преодоление уступа невозможно, а если $(\omega^+)^2 > \frac{g}{r} (1 - \epsilon)$, то безотрывное движение вообще невозможно реализовать при отсутствии проскальзывания в точке O .

Множество движений, удовлетворяющих неравенству (1.8), может быть не пусто только при соблюдении неравенства, вытекающего из (1.8):

$$\frac{4}{3} \frac{gh}{r^2} \leq \frac{g}{r} \left(1 - \frac{h}{r}\right) \Rightarrow 0 \leq h \leq \frac{3}{7} r$$

Если $h > \frac{3}{7} r$, то перекачивание колеса при отсутствии проскальзывания в точке O , не реализуется. Таким образом, послеударное перекачивание колеса на верхнюю направляющую OM при отсутствии проскальзывания в точке контакта O возможно только при соблюдении следующих неравенств:

$$\frac{4}{3} \frac{gh}{\sigma^2} < v_C^2 < \frac{g(r-h)}{\sigma^2}, \quad 0 \leq h \leq \frac{3}{7} r, \quad \text{где} \quad \sigma = 1 - \frac{2}{3} \frac{h}{r} \quad (1.9)$$

Нарушение одного из этих неравенств свидетельствует о невозможности перекачивания колеса через уступ в рамках рассматриваемой модели движения с отсутствием проскальзывания колеса в точке O .

Следует отметить, что данный результат получен без каких-либо ограничений на коэффициент трения скольжения. Рассмотрим случай, когда коэффициент трения имеет конечное значение.

Для того чтобы в точке O отсутствовало проскальзывание, сила трения не должна превышать максимального значения, которое можно реализовать в данных условиях движения. Найдем силу трения, записав совместно уравнения движения центра масс и теорему об изменении кинетического момента колеса относительно точки O после соприкосновения колеса с уступом.

$$\begin{aligned}
m\ddot{\phi}r &= -mg \cos \varphi + F_{\text{тр}} \\
m\dot{\phi}^2 r &= mg \sin \varphi - N \\
\frac{3}{2}mr^2\ddot{\phi} &= -mgr \cos \varphi
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Откуда

$$F_{\text{тр}} = \frac{1}{3}mg \cos \varphi, \quad N = mg \sin \varphi - m\dot{\phi}^2 r \tag{1.11}$$

Запишем условие безотрывного движения

$$g \sin \varphi > \dot{\phi}^2 r$$

Как уже отмечалось, наиболее опасным с точки зрения отрыва колеса от уступа является момент времени сразу после удара колеса об уступ, когда $\varphi = \pi/2 - \alpha$. Подставив это значение φ в выражения (1.11) получим

$$F_{\text{тр}} = \frac{1}{3}mg \sin \alpha, \quad N = mg \cos \alpha - m\dot{\phi}^2 r$$

При отсутствии проскальзывания, согласно закону Кулона, коэффициент трения должен удовлетворять следующему неравенству.

$$\mu \geq \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{g \sin \alpha}{3(g \cos \alpha - \dot{\phi}^2 r)} \tag{1.12}$$

Подставив из (1.8) в (1.12) минимальное значение угловой скорости колеса по условию перекатывания через уступ, получим

$$\mu \geq \frac{\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}}{3 - 7\varepsilon} \tag{1.13}$$

Из неравенства (1.13) видно, что при $\varepsilon = 3/7$ коэффициент трения $\mu = \infty$. Из полученного неравенства также можно сделать вывод о том, что значение параметра ε имеет ограничения ввиду ограничений, накладываемых на значение коэффициента трения. Получим условие этого ограничения

$$\varepsilon \leq \frac{21\mu^2 + 1 - \sqrt{33\mu^2 + 1}}{49\mu^2 + 1} \tag{1.14}$$

Например, для значения $\mu = 1$, получим следующее неравенство, которое определяет область значений параметра ε , при которых перекатывание колеса через уступ возможно без проскальзывания

$$\varepsilon \leq \frac{22 - \sqrt{34}}{50} \cong 0.32$$

Полученное значение ε меньше $3/7$.

Отсюда можно сделать вывод, что при конечном значении коэффициента трения появляются дополнительные условия, накладывающие ограничение на отношение высоты уступа к радиусу колеса, при котором возможно перекатывание колеса через уступ без отрыва и проскальзывания.

2. Задача о скатывании колеса с уступа без начальной скорости [9]. Рассмотрим процесс скатывания абсолютно твердого колеса с уступа без начальной скорости в предположении, что в начальный момент времени геометрический центр C колеса находился непосредственно над точкой O (см. рис. 2).

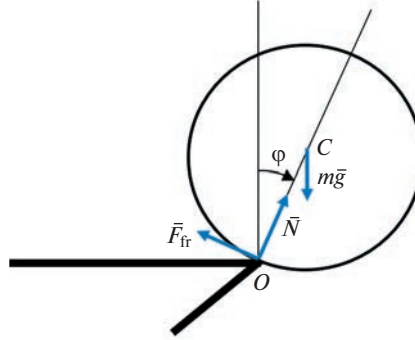


Рис. 2. Схема к задаче № 2.

Пусть колесо является любым физически реализуемым диском, центр масс которого совпадает с его геометрическим центром C (рис. 2). То есть радиус инерции колеса находится в пределах от 0 до значения, равного радиусу колеса. Найдем угол, при котором произойдет отрыв колеса от уступа без учета ограничений, накладываемых на движение колеса вследствие конечного значения коэффициента трения. Для этого запишем совместно уравнения движения центра масс и теорему об изменении кинетического момента колеса относительно точки O

$$\begin{aligned} m\ddot{\varphi}r &= mg \sin \varphi - F_{fr} \\ m\dot{\varphi}^2 r &= mg \cos \varphi - N \\ I_{Oz}\ddot{\varphi} &= mgr \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $I_{Oz} = m(\rho^2 + r^2)$ — момент инерции колеса относительно оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через точку O , ρ и r — радиус инерции и радиус колеса соответственно.

Найдем нормальную реакцию

$$N = mg \cos \varphi - m\dot{\varphi}^2 r \quad (2.2)$$

Квадрат угловой скорости колеса найдем из закона сохранения полной механической энергии

$$\frac{1}{2} I_{Oz} \dot{\varphi}^2 = mgr(1 - \cos \varphi)$$

Откуда

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2gr}{\rho^2 + r^2} (1 - \cos \varphi) \quad (2.3)$$

После подстановки (2.3) в (2.2) получим

$$N = \frac{mg}{1 + k^2} [(3 + k^2) \cos \varphi - 2] \quad (2.4)$$

где $k = \rho/r$. Параметр k находится в пределах от 0 до 1. Значение, равное нулю, соответствует системе, состоящей из точечной массы, закрепленной в центре колеса, инерционными свойствами которого можно пренебречь. Значение, равное единице, соответствует тонкостенной трубе.

Найдем косинус угла отрыва колеса от уступа, приравняв нулю нормальную реакцию

$$\cos \varphi_1 = \frac{2}{3 + k^2} \quad (2.5)$$

С учетом диапазона значений параметра k получим

$$\frac{1}{2} \leq \cos \varphi_1 \leq \frac{2}{3} \quad (2.6)$$

Или

$$48.19^\circ \leq \varphi_1 \leq 60^\circ$$

Отметим, что в случае однородного колеса при $\rho = r/\sqrt{2}$ косинус угла отрыва равен 4/7. Такой же результат получен в [9, 10].

Теперь определим, может ли колесо достичь указанных углов отрыва без проскальзывания относительно уступа. Для этого из уравнений (2.1) найдем силу трения

$$F_{\text{тр}} = mg \frac{k^2}{1 + k^2} \sin \varphi \quad (2.7)$$

Для отсутствия проскальзывания должно выполняться следующее неравенство

$$F_{\text{тр}} \leq \mu N \quad (2.8)$$

С учетом выражений (2.4), (2.7) и (2.8) получим

$$mg \frac{k^2}{1 + k^2} \sin \varphi \leq \mu \frac{mg}{1 + k^2} [(3 + k^2) \cos \varphi - 2] \quad (2.9)$$

Или с учетом того, что $1 + k^2 > 0$, перепишем неравенство (2.9) в следующем виде

$$k^2 \sin \varphi \leq \mu [(3 + k^2) \cos \varphi - 2]$$

Откуда

$$\cos \varphi_2 \geq \frac{2\mu^2 + k^2 \sqrt{\mu^2 + \frac{k^4 - 4\mu^2}{(3 + k^2)^2}}}{\mu^2(3 + k^2) + \frac{k^4}{3 + k^2}} \quad (2.10)$$

или

$$\varphi_2 \leq \arccos \frac{2\mu^2 + k^2 \sqrt{\mu^2 + \frac{k^4 - 4\mu^2}{(3 + k^2)^2}}}{\mu^2(3 + k^2) + \frac{k^4}{3 + k^2}} \quad (2.11)$$

При $\mu = 0$ получим

$$\varphi_2 \leq \arccos 1 \Rightarrow \varphi_2 = 0$$

То есть при отсутствии трения проскальзывание колеса относительно уступа начнется сразу с началом его движения. Исключение составляет случай $k = 0$, так как в этой ситуации сила трения равна нулю. В этом легко убедиться, записав теорему об изменении кинетического момента относительно центра масс колеса.

На рис. 3 приведено значение угла φ_2 в градусах, при котором колесо начнет проскальзывать, в зависимости от коэффициента трения и параметра k .

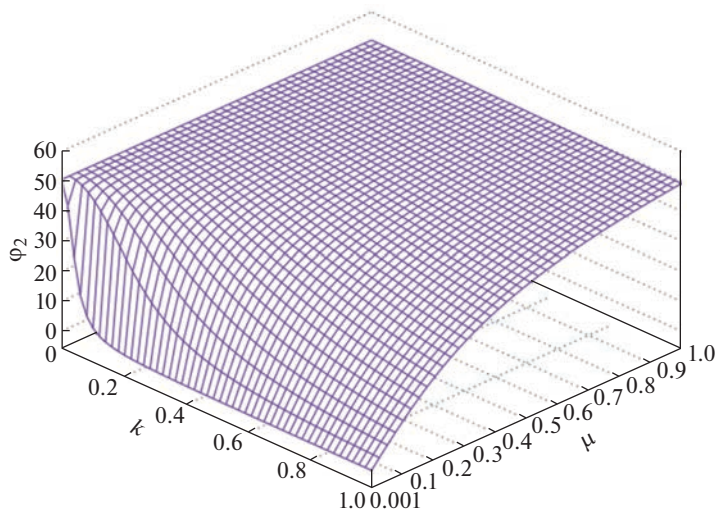


Рис. 3. Зависимость угла проскальзывания φ_2 от значений параметра k и коэффициента трения.

Для отсутствия проскальзывания колеса до момента его отрыва от уступа должно выполняться следующее неравенство

$$\varphi_1 \leq \varphi_2$$

или

$$\cos \varphi_1 \geq \cos \varphi_2 \quad (2.12)$$

С учетом выражений (2.5) и (2.11) из неравенства (2.12) получим

$$\frac{2}{3+k^2} \geq \frac{2\mu^2 + k^2 \sqrt{\mu^2 + \frac{k^4 - 4\mu^2}{(3+k^2)^2}}}{\mu^2(3+k^2) + \frac{k^4}{3+k^2}} \quad (2.13)$$

После преобразований неравенство (2.13) можно переписать в следующем виде

$$k^8 \left(\frac{4}{(3+k^2)^2} - 1 \right) \geq \mu^2 k^4 (5 + 6k^2 + k^4) \quad (2.14)$$

При значении параметра k , равном нулю, это неравенство выполняется при любом значении коэффициента трения. Напомним, что случай $k = 0$ соответствует системе, состоящей из точечной массы, закрепленной в центре колеса, инерционными свойствами которого можно пренебречь.

При значениях параметра k , отличных от нуля, последнее неравенство можно переписать в следующем виде

$$k^4 \left(\frac{4}{(3+k^2)^2} - 1 \right) \geq \mu^2 (5 + 6k^2 + k^4)$$

При всех значениях параметра k , отличных от нуля, выражение в левой части последнего неравенства меньше нуля, а выражение в правой части больше нуля. То есть при таких значениях k неравенство не может быть удовлетворено при любом μ . Следо-

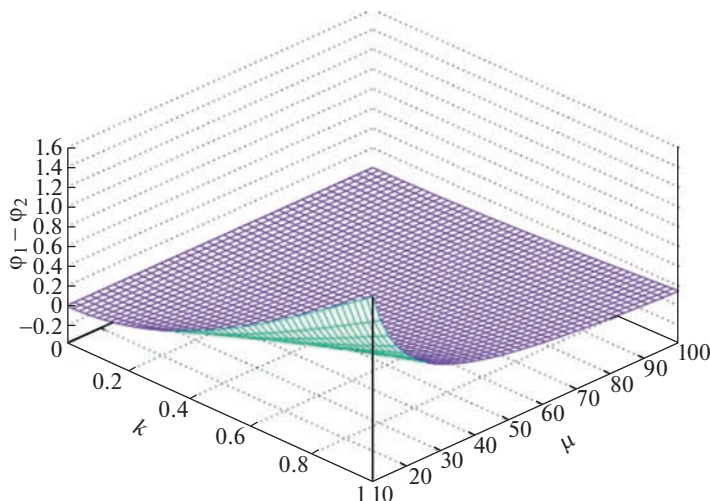


Рис. 4. Зависимость разности углов $\varphi_1 - \varphi_2$ от значений параметра k и коэффициента трения.

вательно, скатывание колеса с уступа без начальной скорости до момента отрыва невозможно без проскальзывания при всех значениях $k \neq 0$.

На рис. 4 приведены значения разности углов φ_1 и φ_2 в градусах при различных значениях коэффициента трения μ и параметра k .

Определим к какому значению стремится угол φ_2 с увеличением коэффициента трения μ . Для этого найдем предел косинуса угла φ_2 при стремлении коэффициента трения к бесконечности

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \cos \varphi_2 = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{2\mu^2 + k^2 \sqrt{\mu^2 + \frac{k^4 - 4\mu^2}{(3 + k^2)^2}}}{\mu^2(3 + k^2) + \frac{k^4}{3 + k^2}}$$

Применив правило Лопиталя, этот предел можно привести к следующему виду

$$\frac{2}{3 + k^2} + k^2 \frac{5 + 6k^2 + k^4}{2(3 + k^2)^3} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\mu^2 \left(1 - \frac{4}{(3 + k^2)^2}\right) + \frac{k^4}{(3 + k^2)^2}}}$$

Очевидно, что M_2

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \cos \varphi_2 = \frac{2}{3 + k^2}$$

То есть $\cos \varphi_2$ стремится к $\cos \varphi_1$ справа при стремлении коэффициента трения μ к бесконечности. Следовательно, при $\mu \rightarrow \infty$ угол φ_2 , при котором начнется проскальзывание колеса, стремится слева к углу φ_1 отрыва колеса от уступа.

3. Задача о подкидной доске [8]. В цирковом аттракционе используется подкидная доска, на правый конец которой с высоты H падает шар А массы M_1 и остается на доске в точке контакта. На другом конце доски находится шар В массы M_2 , который, при-

обретя скорость, отделяется от доски при повороте ее вокруг горизонтальной оси. Момент инерции доски относительно горизонтальной оси вращения, проходящей через точку O , равен J , угол наклона доски к горизонту равен α .

Определим наибольшую высоту подъема шара B , если $OA_1 = l_1, OB = l_2$. Также рассмотрим случай, когда шару B сообщена в конце удара относительная по отношению к доске скорость v , направленная перпендикулярно к доске.

Состояние системы “доска + шары A и B ” до удара известно. Доска и шар B находятся в покое. Тогда $\omega^- = 0$, где ω^- — угловая скорость доски до удара, а шар A непосредственно перед ударом имеет направленную вниз вертикальную скорость $v_1^- = \sqrt{2gH}$ (эта скорость определяется из закона сохранения полной механической энергии для процесса свободного падения шара A с высоты H : $M_1 g H = 0.5 M_1 (v_1^-)^2$). Послеударное состояние системы также определено: доска вместе с шарами A и B начинает поворачиваться вокруг точки O . Неизвестна послеударная угловая скорость этого поворота, которую обозначим ω^+ .

Подчеркнем еще раз, что непосредственно после удара оба шара сохраняют свой контакт с доской (шар A по условию абсолютно неупругого удара “прилипает к доске”, а шар B может оторваться от доски только при дальнейшем ее вращении). Для определения ω^+ , применяем теорему об изменении кинетического момента при ударе относительно точки O . Выбор точки O связан с тем, что внешние ударные импульсы возникают только в шарнире O , тогда их момент относительно этой точки равен нулю, а поэтому кинетический момент всей системы относительно точки O сохраняется. До удара $K_O^- = M_1 v_1^- l_1 \cos \alpha$. После удара $K_O^+ = (J + M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2) \omega^+$. Используя условие $K_O^- = K_O^+$, получим

$$\omega^+ = \frac{M_1 \sqrt{2gH} l_1 \cos \alpha}{J_0}, \quad J_0 = J + M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2 \quad (3.1)$$

Исследуем теперь вопрос отрыва шара B от доски. Будем предполагать, что доска абсолютно шероховатая, или шар B помещен в небольшом желобе доски, чтобы исключить возможность перемещения его вдоль доски при ее вращении. Введем систему координат Bx с началом в точке B и осью y , перпендикулярной доске (см. рис. 5). Основным критерием безотрывного движения груза B на доске является положительность нормальной (т.е. вдоль оси Bx) силы, действующей на шар со стороны доски. Запишем уравнение динамики для груза B вдоль оси y при его безотрывном движении (т.е., вместе с доской):

$$M_2 \dot{\omega} l_2 = N - M_2 g \cos \varphi \quad (3.2)$$

В (3.2) введены обозначения: N — нормальная реакция, $\dot{\omega}$ — угловое ускорение доски, φ — угол наклона доски к горизонту, причем $\varphi \in (-\alpha, \alpha)$. Здесь мы для простоты предполагаем, что граничные положения доски симметричны при опоре на A и B , т.е. угол наклона φ доски к горизонтали меняется в пределах от $-\alpha$ до $+\alpha$. Этого всегда можно добиться, подняв или опустив уровень пола под одной из точек A или B .

Пусть M_3 — масса доски, x_3 — координата центра ее масс в системе Bx . Тогда уравнение моментов для системы (доска с шарами) относительно точки O в послеударном движении имеет вид

$$J_0 \dot{\omega} = [M_1 g l_1 - M_2 g l_2 + M_3 g (x_3 - l_2)] \cos \varphi \quad (3.3)$$

Из (3.2) и (3.3) получим следующую формулу для N

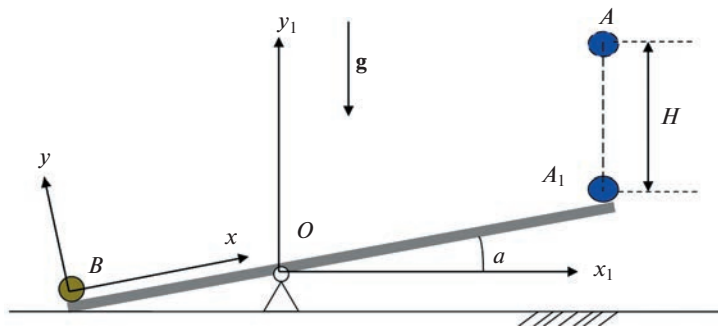


Рис. 5. Схема задачи № 3.

$$N = \left\{ 1 + \frac{l_2}{J_0} [M_1 l_1 - M_2 l_2 + M_3 (x_3 - l_2)] \right\} M_2 g \cos \varphi \quad (3.4)$$

В (3.3) и (3.4) величина J_0 дается выражением из (3.1).

Изучим следующие две возможные ситуации.

1. Отрыв происходит сразу, т.е., при $\varphi = -\alpha$.

2. Отрыва при $\varphi \in [-\alpha, \alpha]$ нет, и он происходит “естественным” образом при $\varphi = \alpha$, когда конец A доски ударится об опорную горизонтальную плоскость, и доска начнет обратное вращение.

Из формулы (3.4) видно, что случай 1 имеет место при выполнении неравенства

$$J + M_1 l_1^2 + M_1 l_1 l_2 + M_3 l_2 (x_3 - l_2) < 0 \quad (3.5)$$

В этом случае выражение в фигурных скобках в равенстве (3.4) является отрицательным, а нормальная реакция для шара B сразу (в начальный момент послеударного движения доски) становится отрицательной, и шар B сразу перестает контактировать с доской.

Если выполнено противоположное неравенство

$$J + M_1 l_1^2 + M_1 l_1 l_2 + M_3 l_2 (x_3 - l_2) > 0 \quad (3.6)$$

то имеет место случай 2, что также следует из (3.4).

Пусть, например, доска является однородной, тогда

$$x_3 = \frac{l_1 + l_2}{2}, \quad J = M_3 \frac{(l_1 + l_2)^2}{12} + M_3 \frac{(l_1 - l_2)^2}{4}$$

Неравенства (3.5) и (3.6) принимают вид

$$\frac{1}{6} M_3 (2l_1^2 - l_2^2 + l_1 l_2) + M_1 l_1^2 + M_1 l_1 l_2 < 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{6} M_3 (2l_1^2 - l_2^2 + l_1 l_2) + M_1 l_1^2 + M_1 l_1 l_2 > 0 \quad (3.8)$$

Из этих формул видно, что если M_3 достаточно велико и $l_2 > 2l_1$, то груз B отскочит сразу, а если $l_2 < 2l_1$, то груз B отскочит лишь в момент удара конца A доски о землю.

Пусть выполнено неравенство (3.5). Тогда груз B , получив скорость $v_2^+ = \omega^+ l_2$ перпендикулярно к доске, сразу после удара не будет контактировать с доской и полетит по параболе влево от доски (как указывалось выше, предположение наличия контакта

приводит к отрицательности нормальной реакции, действующей на шар B вдоль оси Bu). Наибольшую высоту его подъема определим из закона сохранения полной механической энергии, записанного в неподвижных осях Ox_1y_1 (см. рис. 5)

$$\begin{aligned} \frac{M_2}{2}[(v_{2x_1}^+)^2 + (v_{2y_1}^+)^2] &= M_2gy_{\max} + \frac{M_2}{2}(v_{2x_1}^+)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow y_{\max} &= \frac{1}{2g}(v_{2y_1}^+)^2 = \frac{1}{2g}(\omega^+)^2 l_2^2 \cos^2 \alpha = H(M_1 l_1 l_2 / J_0)^2 \cos^4 \alpha \end{aligned} \quad (3.9)$$

Этот же ответ приведен в задачке [8], но, однако, без неравенства (3.5), при котором этот ответ справедлив.

Пусть выполнено неравенство (3.6). Тогда груз B оторвется лишь при $\varphi = \alpha$, т.е. в момент удара конца доски A о землю. В этот момент он будет иметь скорость $v_2 = \omega_2 l_2$, где $\omega_2 \neq \omega^+$, $\omega_2 > \omega^+$. Эта скорость будет перпендикулярна доске и направлена уже вправо. Скорость ω_2 мы найдем из закона сохранения полной механической энергии для системы “доска + шары A и B ” в процессе ее вращательного движения.

$$J_0[\omega_2^2 - (\omega^+)^2] = [M_1 l_1 - M_2 l_2 + M_3(x_3 - l_2)]4g \sin \alpha$$

Из последнего уравнения получаем

$$\omega_2^2 = (\omega^+)^2 + 4g \sin \alpha [M_1 l_1 - M_2 l_2 + M_3(x_3 - l_2)] / J_0 \quad (3.10)$$

Теперь нетрудно (аналогично приведенной выше выкладке (3.9)) найти максимальную высоту подъема для новых условий. Ясно, что при малых α эта высота количественно будет мало отличаться от уже полученного ответа (3.9). Однако качественно результаты отличаются существенно: в одном случае шар B (по параболе) полетит налево, а в другом — направо.

Отметим еще одну возможную (несколько вырожденную) ситуацию, которая может реализоваться в случае выполнения неравенства (3.6). Пусть вместе с неравенством (3.6) выполнено неравенство

$$M_1 l_1 - M_2 l_2 + M_3(x_3 - l_2) < 0 \quad (3.11)$$

Тогда доска с шарами совершает замедленное вращение, а ситуация 2 будет иметь место при выполнении неравенства

$$(\omega^+)^2 + 4g \sin \alpha [M_1 l_1 - M_2 l_2 + M_3(x_3 - l_2)] / J_0 > 0$$

Используя формулу (3.1), отсюда получим следующее неравенство

$$M_1^2 H l_1^2 \cos^2 \alpha + 2J_0 [M_1 l_1 - M_2 l_2 + M_3(x_3 - l_2)] \sin \alpha > 0$$

Пусть выполнено неравенство, противоположное последнему

$$M_1^2 H l_1^2 \cos^2 \alpha + 2J_0 [M_1 l_1 - M_2 l_2 + M_3(x_3 - l_2)] \sin \alpha < 0$$

Тогда после удара доска с шарами будет совершать замедленное вращение. Кроме того, будет существовать такое $\varphi^* \in (-\alpha, \alpha)$, при котором $\omega(\varphi^*) = 0$ (т.е., доска на мгновение остановится). После этого доска начнет вращаться назад, против часовой стрелки, и ударится о землю уже концом B вместе с шаром B . Если удары доски о пол абсолютно упруги, то никаких отрывов вообще не будет, а будут наблюдаться периодические колебания доски вместе с шарами.

Покажем, что множество, задаваемое одновременно неравенствами (3.6) и (3.11), не пусто. Пусть доска однородная. Тогда имеем неравенства

$$\frac{1}{6} M_3(2l_1^2 - l_2^2 + l_1 l_2) + M_1 l_1^2 + M_1 l_1 l_2 > 0, \quad M_1 l_1 - M_2 l_2 + M_3 \frac{l_1 - l_2}{2} < 0$$

Ясно, что при выборе достаточно большой массы M_2 эти неравенства заведомо имеют общие решения.

Таким образом, имеются следующие три случая послеударного поведения шара B .

I. После удара шар B отрывается от доски и летит по параболе влево от нее.

II. После удара шар B вращается вместе с доской, и этот процесс длится вплоть до удара конца A о землю, после чего шар B отрывается от доски и летит по параболе вправо от нее.

III. После удара шар B вращается по часовой стрелке вместе с доской замедленно вплоть до того момента, когда доска остановится в своем вращении (не ударившись концом A). Затем продолжается ускоренное вращение против часовой стрелки вплоть до момента удара доски о землю концом B . В этом случае, в предположении абсолютной упругости ударов доски о пол, никаких отрывов вообще не будет, а будут наблюдаться периодические колебания доски вместе с шарами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В.Ф. Явление шимми с позиций поликомпонентного сухого трения // Космонавтика и ракетостроение. 2014. № 1 (74). С. 7–14.
2. Журавлев В.Ф., Климов Д.М., Плотников П.К. Новая модель шимми // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 13–23.
3. Zhuravlev V.Ph., Klimov D.M., Plotnikov P.K. A new shimmy model // Proc. Steklov Inst. Math. 2013. V. 281. № 1. P. 27–36.
<https://doi.org/10.1134/S0081543813040044>
4. Журавлев В.Ф., Розенблат Г.М. О колебаниях колесного экипажа при наличии трения // Доклады академии наук. 2011. Т. 436. № 5. С. 627–630.
5. Журавлев В.Ф., Розенблат Г.М. О неустойчивости экипажа в вертикальной плоскости при прямолинейном движении с учетом сил трения // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 4. С. 3–17.
6. Журавлев В.Ф. Динамика тяжелого однородного шара на шероховатой плоскости // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 3–9.
7. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Изд-во литературы по строительству, 1965. 448 с.
8. Сборник задач по теоретической механике: учебное пособие / Под ред. К.С. Колесникова. СПб.: Лань, 2007. 448 с.
9. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике. Учебное пособие. СПб.: Лань, 2005. 448 с.
10. Козлова З.П., Панишина А.В., Розенблат Г.М. Теоретическая механика в решениях задач из сборника И.В. Мещерского: Динамика материальной системы. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 432 с.

УДК 531.36

ДИНАМИКА ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ С ДВУМЯ ПОДВИЖНЫМИ МАССАМИ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕЙ ЭФФЕКТ ГАЛОПИРОВАНИЯ

© 2023 г. Ю. Д. Селюцкий^{a,*}

^aНИИ механики МГУ, Москва, Россия

*e-mail: seliutski@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 22.02.2022 г.

После доработки 26.04.2022 г.

Принята к публикации 26.04.2022 г.

Рассматривается ветроэнергетическая установка, использующая эффект галопирования, которая включает два упруго соединенных поступательно движущихся тела: одно представляет собой призму квадратного сечения с жестко прикрепленным к ней постоянным магнитом, а другое — материальную точку. Электричество вырабатывается в результате движения магнита в катушке. Анализируется влияние параметров системы на скорость ветра, при которой возникают галопирующие колебания. Показано, что надлежащий выбор параметров позволяет значительно расширить диапазон скоростей ветра, при которых существуют периодические режимы, по сравнению с системой, содержащей одно движущееся тело. Получены аппроксимации для амплитуд и частот предельных циклов, возникающих в системе. Исследована эволюция этих циклов при изменении жесткости пружины между телами. Установлено, что при определенных значениях параметров возможно одновременное существование двух притягивающих периодических решений. Получены условия, при которых мощность, вырабатываемая такой системой, больше, чем мощность, вырабатываемая системой с одной движущейся массой.

Ключевые слова: колебания, устойчивость, цикл, галопирование, аэроупругость

DOI: 10.31857/S0572329922100117, **EDN:** DFMZMU

1. Введение. Эффект возникновения колебаний плохообтекаемых тел в направлении поперек потока в случае, когда скорость потока превосходит некоторое критическое значение, называют галопированием. Это явление наблюдается для различных конструкций, таких как мосты, высокие конструкции призматической формы и т.д. Вообще говоря, оно обусловлено тем, что при определенных условиях для плохообтекаемых тел аэродинамическое демпфирование оказывается отрицательным. Критерий, определяющий условия возникновения галопирования, впервые был получен Ден Гартогом [1].

Изучению различных аспектов галопирования посвящена обширная литература. Здесь мы сосредоточимся только на работах, в которых рассматривается динамика тел с острыми кромками (таких как прямоугольные призмы). В работах [2, 3] было показано, что квазистатический подход может обеспечить достаточно точное описание данного явления для призмы квадратного сечения. В частности, в работе [3] был объяснен наблюдающийся в экспериментах гистерезис колебаний, существующий в определенном диапазоне скоростей ветра. В работе [4] проведен подробный численный анализ этого гистерезиса для чисел Рейнольдса до 1000. В работе [5] выполнено численное исследование аэродинамических сил, действующих на квадратную призму

при числах Рейнольдса порядка 10000. Зависимость характеристик колебаний от удлинения призмы исследована в работе [6].

Существует множество экспериментальных работ, посвященных изучению аэродинамических сил, действующих на прямоугольные и квадратные призмы. Так, в работе [7] определялись характеристики галопирующих колебаний квадратного цилиндра и измерялась боковая (перпендикулярная набегающему потоку) сила, действующая на этот объект, при углах атаки до 18 градусов. В работе [8] исследовалось обтекание квадратной призмы с прикрепленной к ней пластиной и без нее, и измерялись подъемная сила и сила лобового сопротивления во всем диапазоне углов атаки. В [9] описаны эксперименты по исследованию нестационарных аэродинамических сил при галопировании прямоугольной призмы.

Очевидная нежелательность галопирования с точки зрения прочности и износа конструкций привела к появлению целого ряда работ, в которых предлагались различные методы подавления таких колебаний. В частности, в [10] описывается использование пассивного инерционного гасителя для уменьшения амплитуды. В работе [11] проведен подробный анализ бифуркаций Андронова–Хопфа в динамике системы, содержащей плохообтекаемое тело и инерционный гаситель. В [12] анализируется возможность предотвращения галопирования квадратной призмы с помощью “поглотителя энергии”, представляющего собой шар, движущийся по круговой направляющей, прикрепленной к этой призме.

В то же время, галопирующие колебания могут быть использованы для преобразования энергии потока в полезные формы. В последнее время появляется большое количество работ, направленных на разработку и изучение различных колебательных ветроэнергетических установок. Это обусловлено растущей потребностью в использовании возобновляемой энергии. Так, в [13] показано, что галопирующие колебания имеют достаточно хороший потенциал для такого использования. В работе [14] исследована ветроэнергетическая установка на базе галопирования, в которой электричество вырабатывается линейным генератором на постоянном магните. Экспериментальное исследование аналогичного устройства с рабочими элементами в виде квадратной и прямоугольной призмы проведено в [15] и исследовано влияние угла между стороной призмы и направлением потока на характеристики колебаний. В [16] предложена система, состоящая из плохообтекаемого тела и пьезоэлемента. В [17] анализируется ветроэнергетическая установка, использующая галопирование пьезоэлектрической консоли, закрепленной балки и исследуется влияние геометрической формы на вырабатываемую мощность. В работе [18] проводится экспериментальное сравнение мощности, вырабатываемой при галопировании призм с разной формой поперечного сечения (прямоугольник, треугольник и т.д.).

Несколько конфигураций галопирующей ветроэнергетической установки с двумя движущимися массами рассмотрены в [19]. Показано, что некоторые конфигурации позволяют добиться увеличения выходной мощности по сравнению с системой, содержащей одну колеблющуюся массу. В [20] рассматривается галопирующая ветроэнергетическая установка с двумя подвижными массами, установленная на подвижном основании.

В данной работе исследуется динамика галопирующей ветроэнергетической установки, содержащей две подвижные массы и линейный генератор. Анализируется влияние параметров системы на область устойчивости равновесия. Проводится численное и аналитическое исследование периодических режимов. Выполняется сравнение выходной мощности такой системы и аналогичной системы с одной подвижной массой.

2. Постановка задачи. Рассмотрим аэроупругую систему, состоящую из тела M_1 и M_2 , которые могут двигаться поступательно вдоль горизонтальной оси OY (см. рис. 1). Тело M_1 представляет собой материальную точку, а тело M_2 имеет форму квадратной

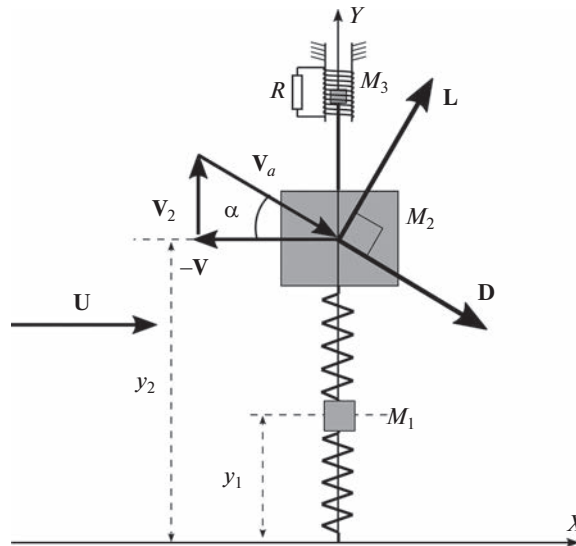


Рис. 1. Галопирующая ветроэнергетическая установка с двумя подвижными массами (вид сверху).

призмы, ось которой перпендикулярна линии движения и вертикальна. Две стороны основания призмы параллельны оси OY . Оба тела соединены пружиной. Точка M_1 , кроме того, прикреплена пружиной к неподвижной точке O . К призме жестко прикреплен магнит M_3 , который может двигаться внутри катушки индуктивности. Эта катушка включена в электрическую цепь, которая также содержит нагрузочное сопротивление R_l . При движении призмы магнит движется внутри катушки, и в цепи индуцируется электрический ток (эта схема представляет собой простейший линейный электрогенератор). Тела M_1 и M_2 находятся в горизонтальном стационарном потоке воздуха. Предполагается, что поток действует только на призму. Скорость потока равна U и перпендикулярна оси OY . Такая конфигурация системы отличается от рассмотренных в [19] наличием электрического контура и тем, что аэродинамическое воздействие приложено к первому телу (которое непосредственно связано с неподвижным основанием).

Пусть OXY — неподвижная система координат, ось абсцисс которой направлена вдоль набегающего потока. Чтобы описать динамику нашей электромеханической системы, введем координаты Y_1 и Y_2 тел M_1 и M_2 , соответственно, и ток J в электрической цепи.

Чтобы смоделировать аэродинамическое воздействие на призму, воспользуемся квазистатическим подходом. В рамках этого подхода аэродинамические силы предполагаются зависящими только от мгновенного состояния движения тела. Он широко используется (например, в [21, 22]), поскольку позволяет эффективно проводить параметрический анализ и во многих случаях обеспечивает достаточно точное описание особенностей поведения тела. Многочисленные исследования (в частности, [3]) показывают, что феномен галопирования достаточно хорошо описывается данной моделью. Аэродинамическую силу, действующую на призму, представим в виде суммы подъемной (или боковой) силы L и силы лобового сопротивления D , приложенных в центре призмы, причем сила D направлена вдоль воздушной скорости V_a (т.е. скоро-

сти призмы относительно набегающего потока), а сила L — перпендикулярно ей. Эти силы имеют следующую структуру:

$$D = \frac{\rho S}{2} V_a^2 C_d(\alpha), \quad L = \frac{\rho S}{2} V_a^2 C_l(\alpha) \quad (2.1)$$

где ρ — плотность воздуха, S — площадь боковой поверхности призмы, α — угол атаки, т.е. угол между скоростью V_a и осью OX , C_d и C_l — безразмерные коэффициенты подъемной силы и силы лобового сопротивления соответственно. Очевидно, выполнены следующие соотношения:

$$V_a = \sqrt{V_2^2 + U^2}, \quad \alpha = \arctg\left(\frac{V_2}{U}\right), \quad \text{где} \quad V_2 = \frac{dY_2}{dt} \quad (2.2)$$

Из (2.1) и (2.2) мы можем найти проекцию F_y результирующей аэродинамической силы на направление движения:

$$F_y = \frac{\rho S}{2} V_a^2 C_y(\alpha) = \frac{\rho S}{2} V_a^2 (C_l \cos \alpha - C_d \sin \alpha) \quad (2.3)$$

Из соображений симметрии ясно, что C_y в выражении (2.3) представляет собой нечетную функцию α . Поэтому в области сравнительно малых α эту функцию можно приближенно представить в виде полинома следующего вида: $C_y = \sum_{i=1}^n C_{y,2i+1} \alpha^{2i+1}$. Коэффициенты $C_{y,2i+1}$ и их количество зависят от формы призмы. Во многих исследованиях (например, [19]) используются кубические полиномы. Однако такое число членов разложения во многих случаях оказывается недостаточным для того, чтобы описать основные особенности поведения C_y даже в диапазоне малых α . В частности, рассмотрим экспериментальные данные из работы [8], относящиеся к квадратной призме (без соединенной с ней пластины). Измеренные значения коэффициента C_y представлены на рис. 2 точками. Для того чтобы получить достаточно точную аппроксимацию C_y , необходим полином, по крайней мере, 5 степени:

$$C_y^{appr} = C_{y1} \alpha + C_{y3} \alpha^3 + C_{y5} \alpha^5 \quad (2.4)$$

где $C_{y1} = 1.64$, $C_{y3} = 17.5$, $C_{y5} = -272.3$. Аппроксимационная кривая (2.4) изображена на рис. 2 пунктирной линией. Она достаточно близка к экспериментальным данным в диапазоне $|\alpha| < 0.35$. Поэтому в дальнейшем мы будем использовать формулу (2.4), предполагая, что $C_{y1} > 0$, $C_{y3} > 0$ и $C_{y5} < 0$.

Аналогично [14, 23], мы будем использовать следующие формулы для описания ЭДС E , создаваемой в катушке движущимся магнитом, и силы F_{em} , действующей на магнит со стороны электромагнитного поля:

$$E = C \frac{dY_2}{dt}, \quad F_{em} = -CI$$

При записи уравнения для электрического контура необходимо учитывать наличие у катушки индуктивности L_c и внутреннего сопротивления R_c .

Таким образом, уравнения движения рассматриваемой электромеханической системы можно записать следующим образом:

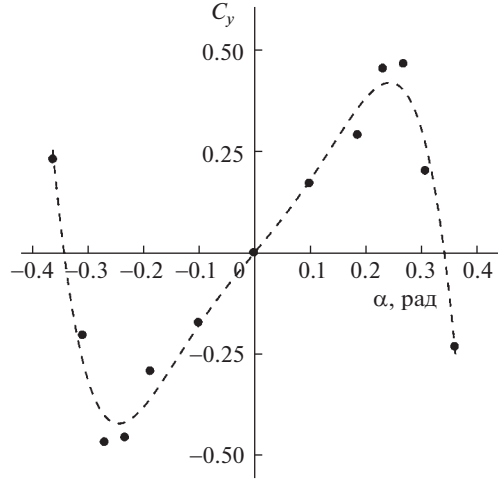


Рис. 2. Зависимость коэффициента поперечной аэродинамической силы от угла атаки α (рад); точки — экспериментальные данные из [8]; пунктирная линия — аппроксимация (2.4).

$$\begin{aligned}
 m_1 \frac{d^2 Y_1}{dt^2} + K_1 Y_1 + k_2 (Y_1 - Y_2) + H_1 \frac{dY_1}{dt} + H_2 \left(\frac{dY_1}{dt} - \frac{dY_2}{dt} \right) &= 0 \\
 m_2 \frac{d^2 Y_2}{dt^2} + K_2 (Y_2 - Y_1) + H_2 \left(\frac{dY_2}{dt} - \frac{dY_1}{dt} \right) &= \frac{\rho S}{2} \left(V^2 + \left(\frac{dY_2}{dt} \right)^2 \right) C_y(\alpha) - C J \\
 L_c \frac{dJ}{dt} &= -(R_l + R_c) J + C \frac{dY_2}{dt}
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь m_1 — масса точки M_1 , m_2 — масса призмы M_2 вместе с магнитом M_3 ; $K_{1,2}$ — коэффициенты жесткости пружин; $H_{1,2}$ — коэффициенты демпфирования пружин.

Чтобы уменьшить число параметров, перейдем к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned}
 \tau &= t \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad y_1 = \frac{Y_1}{b}, \quad y_2 = \frac{Y_2}{b}, \quad I = \frac{J R_c}{C b} \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \\
 m &= \frac{m_2}{m_1}, \quad k = \frac{k_2}{k_1}, \quad h_{1,2} = \frac{H_{1,2}}{\sqrt{k_1 m_1}}, \quad V = \frac{U}{b} \sqrt{\frac{m_1}{k_1}}, \quad \mu = \frac{\rho S b}{2 m_1} \\
 L &= \frac{L_c}{R_c} \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad R = \frac{R_l}{R_c}, \quad \chi = \frac{C^2}{R_c \sqrt{k_1 m_1}}
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Используя (2.6) и обозначая производную по τ точкой, преобразуем систему (2.5) в следующую систему безразмерных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \ddot{y}_1 + y_1 + k(y_1 - y_2) + h_1 \dot{y}_1 + h_2 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) &= 0 \\
 m \ddot{y}_2 + k(y_2 - y_1) + h_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) &= \mu (V^2 + \dot{y}_2^2) C_y(\alpha) - \chi I \\
 L \dot{I} &= -(R + 1) I + \dot{y}_2
 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Очевидно, эта система имеет единственное положение равновесия, а именно, тривиальное: $y_1 = y_2 = I = 0$.

Представляется интересным сопоставить динамику системы (2.7) с поведением системы, содержащей только одно подвижное тело (призму), масса которого равна суммарной массе системы, изображенной на рис. 1.

Безразмерные уравнения движения системы с одной колеблющейся массой, как нетрудно видеть, могут быть представлены в следующем виде с сохранением прежних обозначений:

$$\begin{aligned}(m+1)\ddot{y}_2 + y_2 + h_1\dot{y}_2 &= \mu(V^2 + \dot{y}_2^2)C_y(\alpha) - \chi I \\ L\dot{I} &= -(R+1)I + \dot{y}_2\end{aligned}\quad (2.8)$$

Чтобы сопоставить эффективность отбора энергии потока с помощью систем с одной и двумя подвижными массами, исследуем и сравним области неустойчивости тривиального равновесия этих систем в пространстве параметров и мощность, вырабатываемую этими системами на установившихся колебаниях.

3. Область неустойчивости. Для анализа устойчивости равновесия линеаризуем систему (2.7) в окрестности этой неподвижной точки с учетом соотношений (2.2) и (2.4):

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 + y_1 + k(y_1 - y_2) + h_1\dot{y}_1 + h_2(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) &= 0 \\ m\ddot{y}_2 + k(y_2 - y_1) + h_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) &= \mu VC_{y1}\dot{y}_2 - \chi I \\ L\dot{I} &= -(R+1)I + \dot{y}_2\end{aligned}\quad (3.1)$$

Характеристический полином системы (3.1) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}& Lm\lambda^5 + (-LV\mu C_{y1} + ((h_1 + h_2)m + h_2)L + m(R+1))\lambda^4 + \\ & + (-V\mu C_{y1}((R+1) + L(h_1 + h_2)) + (h_1h_2 + (k+1)m + k)L + \\ & + (R+1)((m+1)h_2 + mh_1) + \chi)\lambda^3 + \\ & + (-((k+1)L + (R+1)(h_1 + h_2))V\mu C_{y1} + (h_1k + h_2)L + \\ & + (R+1)h_2 + \chi(h_1 + h_2) + (R+1)((m+1)k + m))\lambda^2 + \\ & + ((-V\mu C_{y1}(k+1)(R+1) + kL + (R+1)(kh_1 + h_2) + (k+1)\chi)\lambda + k(R+1))\end{aligned}\quad (3.2)$$

Чтобы проанализировать устойчивость, сделаем некоторые дополнительные предположения. Если тела движутся в воздухе, представляется естественным предположить, что их средняя плотность значительно больше, чем плотность воздуха, т.е. величина μ мала. Кроме того, предположим, что коэффициенты демпфирования пружин и безразмерный коэффициент электромеханического взаимодействия также малы. Такая ситуация имеет место, в частности, если выбрать параметры, приведенные в работе [14]. Наконец, будем считать, что безразмерный коэффициент индуктивности тоже мал (т.е. характерные времена для процессов, протекающих в электрической цепи, существенно меньше, чем для процессов, протекающих в механической части системы). Иными словами:

$$\mu \ll 1, \quad h_1 \sim \mu, \quad h_2 \sim \mu, \quad \chi \sim \mu, \quad L \sim \mu \quad (3.3)$$

Отметим, что в “вырожденном” случае, т.е. при $\mu = h_1 = \mu = h_2 = \chi = L = 0$, полином (3.2) принимает следующий вид:

$$(R+1)(m\lambda^4 + ((m+1)k + m)\lambda^2 + k)$$

С учетом (3.3) мы можем найти корни полинома (3.2) в виде разложения по малому параметру:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{R+1}{L} + \frac{\chi}{m(R+1)} + o(\mu) \\ \lambda_{2-5} &= \pm i\omega_{1,2} + \frac{\mu C_{y1}(-\omega_{1,2}^2 + k + 1)}{(-4\omega_{1,2}^2 + 2k + 2)m + 2k} (V - V_{c1,2}) + o(\mu)\end{aligned}\quad (3.4)$$

где

$$V_{c1,2} = \frac{h_1(k - m\omega_{1,2}^2) + h_2(1 - m\omega_{1,2}^2 - \omega_{1,2}^2)}{\mu C_{y1}(-\omega_{1,2}^2 + k + 1)} + \frac{\chi}{\mu C_{y1}(R+1)} \quad (3.5)$$

а $\omega_{1,2}$ — положительные корни следующего уравнения:

$$m\omega^4 - (mk + k + m)\omega^2 + k = 0 \quad (3.6)$$

причем для определенности будем считать, что $\omega_1 < \omega_2$.

Величины $\omega_{1,2}$ представляют собой собственные частоты системы колебаний в отсутствие потока и без сопряжения с электрической частью.

Прямой подстановкой в (3.6) нетрудно показать, что выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned}\omega_1 < 1 < \omega_2, \quad \omega_1 < \sqrt{k+1} < \omega_2, \quad \omega_1 < \sqrt{\frac{1}{m+1}} < \omega_2 \\ \omega_1 < \sqrt{\frac{k}{m}} < \omega_2, \quad \omega_1 < \sqrt[4]{\frac{k}{m}} < \omega_2\end{aligned}\quad (3.7)$$

Из (3.4) и (3.7) нетрудно видеть, что вещественная часть корня λ_1 всегда отрицательна (поскольку величины L и χ малы), и равновесие становится неустойчивым, когда скорость ветра превышает критическое значение $V_c = \min(V_{c1}, V_{c2})$.

Нетрудно показать, что для системы (2.8) в предположениях (3.3) критическая скорость ветра V_c^s определяется следующим выражением:

$$V_c^s = \frac{h_1}{\mu C_{y1}} + \frac{\chi}{\mu C_{y1}(R+1)} \quad (3.8)$$

Заметим, что из (3.6) следует, что $\omega_1 \rightarrow (m+1)^{-1/2} \sim 1$ при $k \rightarrow \infty$. Соответственно, из (3.5) мы получаем, что имеет место соотношение $V_c^s = \lim_{k \rightarrow \infty} V_{c1}$, как и следовало ожидать.

Вычисление производных от выражений (3.5) по h_1 , h_2 и χ с учетом неравенств (3.7) показывает, что V_{c1} и V_{c2} , монотонно растут с увеличением этих параметров, что представляется вполне естественным.

Чтобы определить влияние жесткости пружины между телами на устойчивость, будем рассматривать величины $V_{c1,2}$ как функции k и вычислим их производные по этому параметру:

$$\begin{aligned}\frac{dV_{c1}}{dk} &= -\frac{4m^2((h_2 - (2h_1 + h_2)k)m + h_2(\Delta - k))}{\mu C_{y1}\Delta(m(k+1) - k + \Delta)} \\ \frac{dV_{c2}}{dk} &= -\frac{4m^2((-h_2 + (2h_1 + h_2)k)m + h_2(\Delta - k))}{\mu C_{y1}\Delta(-m(k+1) + k + \Delta)}\end{aligned}\quad (3.9)$$

Здесь $\Delta = \sqrt{(m+1)^2 k^2 + 2mk(m-1) + m^2}$.

Обе производные (3.9) обращаются в нуль при одном и том же значении k :

$$k_c = \frac{mh_2(h_1 + h_2)}{h_1(mh_1 + mh_2 + h_2)} \quad (3.10)$$

Заметим, что величина k_c монотонно растет с ростом m . Очевидно, для больших k мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{dV_{c1}}{dk} &= \frac{2mh_1}{\mu C_{y1}k^2(m+1)} + o(k^{-2}) > 0 \\ \frac{dV_{c2}}{dk} &= -\frac{2m^2((h_1 + h_2)m + h_2)}{\mu k^2 C_{y1}(m+1)} + o(k^{-2}) < 0 \end{aligned}$$

Учитывая то обстоятельство, что $\omega_1\omega_2 = \sqrt{k/m}$, разность значений этих критических скоростей можно представить в следующем виде:

$$V_{c2} - V_{c1} = -\frac{(((h_1 + h_2)m - h_1 + h_2)k + (h_1 + h_2)m)(k - m\omega_1^4)}{\mu C_{y1}(k + 1 - \omega_1^2)(\omega_1^2 m(k + 1) - k)}$$

Следовательно, мы можем заключить с учетом (3.7), что если

$$h_2 \geq h_1 \frac{1-m}{1+m} \quad (3.11)$$

то $V_{c1} < V_{c2}$ и $V_c = V_{c1}$ для всех k (заметим, что неравенство (3.11) заведомо выполнено в случае $m \geq 1$). В этой ситуации критическая скорость ветра V_c имеет единственный минимум на интервале $k \in [0, \infty)$. В то же время,

$$V_{c1}|_{k=0} = \frac{h_2}{\mu C_{y1}} + \frac{\chi}{\mu C_{y1}(R+1)}$$

Таким образом, если $h_2 > h_1$, то из (3.8) следует, что $V_c > V_c^s$ при малых k . Если $h_2 \leq h_1$, то $V_c \leq V_c^s$ при всех k .

Если неравенство (3.11) не выполнено (и, следовательно, $m < 1$ и $h_2 < h_1$), то существует такое значение k_* коэффициента жесткости, что $V_{c1} < V_{c2}$ при $k < k_*$ и $V_{c1} > V_{c2}$ при $k > k_*$. При этом $V_{c1}|_{k=0} < V_c^s$. Это означает, при нарушении условия (3.11) критическая скорость ветра для системы с двумя массами всегда меньше, чем для соответствующей системы с одной массой.

Если условие (3.11) выполнено и, кроме того, $V_{c1}(k_c) < V < V_{c1}(0)$ (где k_c определяется формулой (3.10)), то существует диапазон скоростей ветра, в котором равновесие асимптотически устойчиво при достаточно малых и достаточно больших величинах жесткости и неустойчиво при “промежуточных” значениях k . Этот эффект был отмечен в работе [24] для системы с двумя подвижными массами без электрической цепи.

Если $V > \max(V_{c0}, V_c^s)$, то равновесие неустойчиво при всех k . В то же время, если условие (3.11) не выполнено, то при некоторых значениях скорости ветра существует интервал положительных значений k , в котором равновесие асимптотически устойчиво. Вне этого интервала (т.е. и при малых, и при больших k) имеет место неустойчивость.

Границы областей устойчивости показаны на рис. 3 на плоскости (k, V) для различных величин R , m и h_2 при следующих значениях остальных параметров: $\mu = \chi = h_1 = L = 0.01$. Сплошные линии обозначают границы областей устойчивости, а пунктирные соответствуют значениям критической скорости для системы с одной подвижной

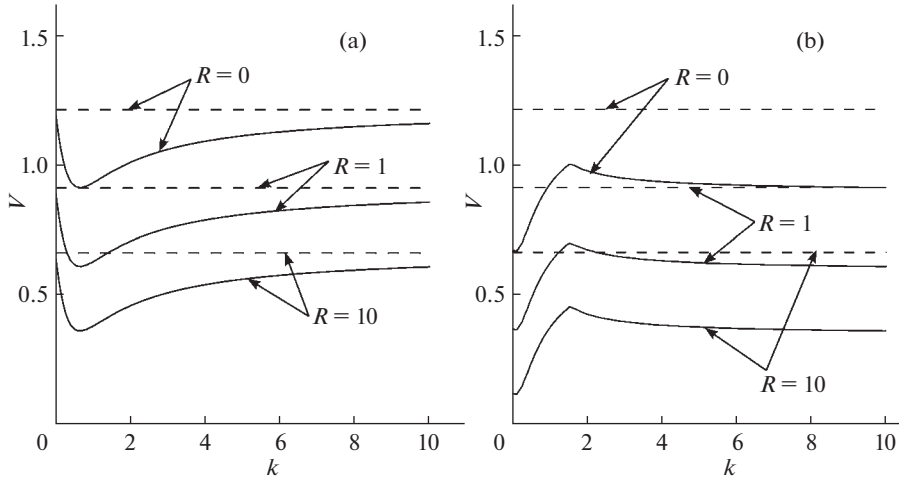


Рис. 3. Границы области устойчивости на плоскости параметров V и k : а) $m = 1$, $h_2 = 0.01$; б) $m = 0.5$, $h_2 = 0.001$.

массой. На рис. 3,а представлен случай, когда условие (3.11) выполнено, а на рис. 3,б — случай, когда оно не выполняется.

Из результатов расчетов, приведенных на рис. 3, видно, что надлежащим выбором k можно существенно уменьшить скорость, при которой начинается галопирование (и, соответственно, когда становится возможным отбор энергии у потока).

4. Периодические решения. Предположим, что $C_{y1} \sim 1$, $C_{y3} \sim \mu^{-1}$ и $|C_{y5}| \sim \mu^{-2}$. Для удобства обозначений введем дополнительный малый параметр $\epsilon = \sqrt{\mu}$. Будем искать периодические решения системы (2.7) следующего вида:

$$y_1 = \epsilon y_{11} \sin \omega t, \quad y_2 = \epsilon y_{21} \sin \omega t + \epsilon^3 y_{22} \cos \omega t, \quad I = \epsilon^3 I_1 \sin \omega t + \epsilon I_2 \cos \omega t \quad (4.1)$$

Подставив (4.1) в (2.7), приравнявая коэффициенты при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ и удерживая только члены минимального порядка по ϵ , получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} -y_{11}\omega^2 + (k+1)y_{11} - ky_{21} &= 0 \\ \frac{h_1 + h_2}{\mu} y_{11}\omega - \frac{h_2}{\mu} y_{21}\omega - ky_{22} &= 0 \\ -m\omega^2 y_{21} - ky_{11} + ky_{21} &= 0 \\ \frac{5}{8V^3} C_{y5} \mu^2 \omega^5 y_{21}^5 + \frac{3}{4V} C_{y3} \mu \omega^3 y_{21}^3 + C_{y1} V \omega y_{21} - m\omega^2 y_{22} - \\ - \frac{h_2}{\mu} \omega y_{11} + \frac{h_2}{\mu} \omega y_{21} + \frac{\chi}{\mu} I_2 + ky_{22} &= 0 \\ -\frac{L}{\mu} I_2 \omega + (R+1)I_1 + \omega y_{22} &= 0 \\ (R+1)I_2 - \omega y_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отсюда:

$$\begin{aligned}
y_{21} &= y_{11} \frac{k+1-\omega^2}{k}, & y_{22} &= y_{11} \omega \frac{h_2 \omega^2 + h_1 k - h_2}{k^2 \mu}, & I_2 &= y_{11} \omega \frac{k+1-\omega^2}{k(R+1)} \\
I_1 &= y_{11} \omega^2 \frac{Lk(1+k-\omega^2) + (R+1)h_2(1-\omega^2) - h_1 k(R+1)}{k^2 \mu (R+1)^2}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Подставив (4.3) в третье уравнение системы (4.2) получим уравнение для частоты предельного цикла:

$$m\omega^4 - (mk + k + m)\omega^2 + k = 0 \tag{4.4}$$

Это уравнение, как и следовало ожидать при сделанных предположениях относительно параметров, совпадает с уравнением (3.6), так что частоты предельных циклов близки к собственным частотам $\omega_{1,2}$ нашей системы.

Амплитуда колебаний первого тела определяется следующим уравнением:

$$\begin{aligned}
5\mu^2 C_{y5} \omega_{1,2}^4 (k+1-\omega_{1,2}^2)^4 y_{11}^4 + 6\mu V^2 k^2 C_{y3} \omega_{1,2}^2 (k+1-\omega_{1,2}^2)^2 y_{11}^2 + \\
+ 8V^3 k^4 C_{y1} (V - V_{cl,2}) = 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Заметим, что величины C_{y1} и C_{y3} положительны, а C_{y5} — отрицательна.

Формально уравнения (4.4), (4.5) могут иметь до 4 положительных корней, которые отвечают предельным циклам динамической системы (2.7). Вообще говоря, для определения характера устойчивости этих циклов можно воспользоваться методами, основанными на теории Флоке (например, [25]) или на построении систем сравнения (например, [26]). Однако в нашем случае выводы об устойчивости периодических решений можно сделать из некоторых простых соображений.

Пусть выполнено условие (3.11). Тогда равновесие устойчиво при $V < V_{cl}$ и неустойчиво при $V > V_{cl}$ для всех k . При $V = V_{cl}$ имеет место бифуркация Андронова–Хопфа. Рассмотрим случай $\omega = \omega_1$. Нетрудно показать, что при этом уравнение (4.5) имеет два положительных корня, если V меньше V_{cl} , но достаточно близко к этой величине. Это означает, что бифуркация является субкритической. Очевидно, один из этих корней (тот, который стремится к нулю при $V \rightarrow V_{cl} - 0$), соответствует неустойчивому предельному циклу. Другой корень отвечает притягивающему циклу. Значение V , при котором они сливаются, нетрудно получить из условия обращения в нуль дискриминанта уравнения (4.5) при $\omega = \omega_1$. При $V > V_{cl}$ уравнение (4.5) имеет только один положительный корень, и соответствующий цикл является притягивающим.

Субкритический характер бифуркации можно считать благоприятным с точки зрения выработки энергии, поскольку он позволяет дополнительно увеличить “рабочий” диапазон скоростей ветра.

Пусть теперь $\omega = \omega_2$. Тогда при V , достаточно близких к V_{c2} и не превышающих этого значения, уравнение (4.5) имеет два положительных корня. Меньший из них, который стремится к нулю при $V \rightarrow V_{c2} - 0$, отвечает неустойчивому предельному циклу. Когда параметр V проходит значение V_{c2} , этот цикл стягивается в начало координат, и знак вещественной части второй пары корней характеристического полинома меняется на положительный. Другой корень уравнения (4.5), который существует и при $V > V_{c2}$, отвечает притягивающему циклу.

Если (3.11) не выполнено, имеет место в целом аналогичная ситуация.

С точки зрения выработки энергии важны, в первую очередь, притягивающие циклы. Предшествующий анализ показывает, что при надлежащем выборе параметров системы такие циклы возникают при скоростях потока, меньших, чем в случае системы с одной подвижной массой.

Другой важной характеристикой ветроэнергетической установки является, разумеется, выходная мощность. Безразмерная мощность, вырабатываемая рассматриваемой системой в электрическом контуре и осредненная на периоде T колебаний, задается следующей формулой:

$$P = \frac{1}{T} \int_{\tau=0}^T I^2 R d\tau \quad (4.6)$$

Вычислим интеграл (4.6) с учетом выражений (4.1) и (4.3) и оставим только члены порядка ϵ^2 :

$$P = \epsilon^2 \frac{I_2^2 R}{2} = \frac{R\eta}{2(R+1)^2} \quad (4.7)$$

$$\text{где } \eta = \frac{\mu y_{11}^2 \omega^2 (k+1-\omega^2)^2}{k^2} > 0.$$

Заметим, что (4.5) можно переписать следующим образом:

$$5C_{y5}\eta^2 + 6V^2C_{y3}\eta + 8V^3C_{y1}(V - V_{cl,2}) = 0 \quad (4.8)$$

Нетрудно показать, что для системы с одной подвижной массой величина η удовлетворяет уравнению, аналогичному (4.8), где вместо $V_{cl,2}$ стоит V_c^s .

Как нетрудно видеть из (4.8),

$$\frac{d\eta}{dk} = \frac{8V^3C_{y1}}{10C_{y5}\eta + 6V^2C_{y3}} \frac{dV_{cl,2}}{dk} \quad (4.9)$$

Из двух решений (4.8) притягивающему циклу соответствует большее, поэтому первый сомножитель в (4.9) всегда отрицателен. Соответственно, поскольку V_{cl} имеет минимум при $k = k_c$, то η (а значит, и мощность) при этом достигает максимума. Поскольку V_{c2} убывает на интервале $k \in [k_c, \infty)$, то мощность на этом промежутке возрастает (конечно, там, где существуют циклы).

Предположим, что условие (3.11) выполнено. Тогда $V_{cl} < V_{c2}$ при всех k и, кроме того, $V_c^s > V_{cl}$ на интервале $k \in [k_c, \infty)$. С учетом этого нетрудно показать, что при таких значениях жесткости мощность на циклах с частотой ω_1 больше, чем в системе с одной подвижной массой, и больше, чем на циклах с частотой ω_2 .

Чтобы несколько более подробно исследовать влияние параметров k и m системы на характеристики предельных циклов и на выходную мощность, проведем численное моделирование. Для коэффициентов, описывающих аэродинамическое воздействие и для параметров μ , L , χ и h_1 примем значения, указанные в предыдущих пунктах. Предположим также, что коэффициенты демпфирования обеих пружин одинаковы: $h_2 = h_1$.

Вначале рассмотрим случай $m = 1$, $R = 1$. Тогда $V_c^s \approx 0.91$. На рис. 4 представлены амплитуды A_{y1} колебаний точки M_1 , амплитуды A_{y2} колебаний призмы, частоты колебаний и выходная мощность в зависимости от десятичного логарифма коэффициента жесткости k для нескольких значений V . Сплошные линии обозначают результаты, полученные с помощью соотношений (4.3)–(4.5), а точки – значения, полученные при численном интегрировании системы (2.7) стандартным методом Рунге–Кутты 4 порядка. Черные линии и точки соответствуют притягивающим циклам, а серые – неустойчивым. Мощность показана только для притягивающих решений. Значения

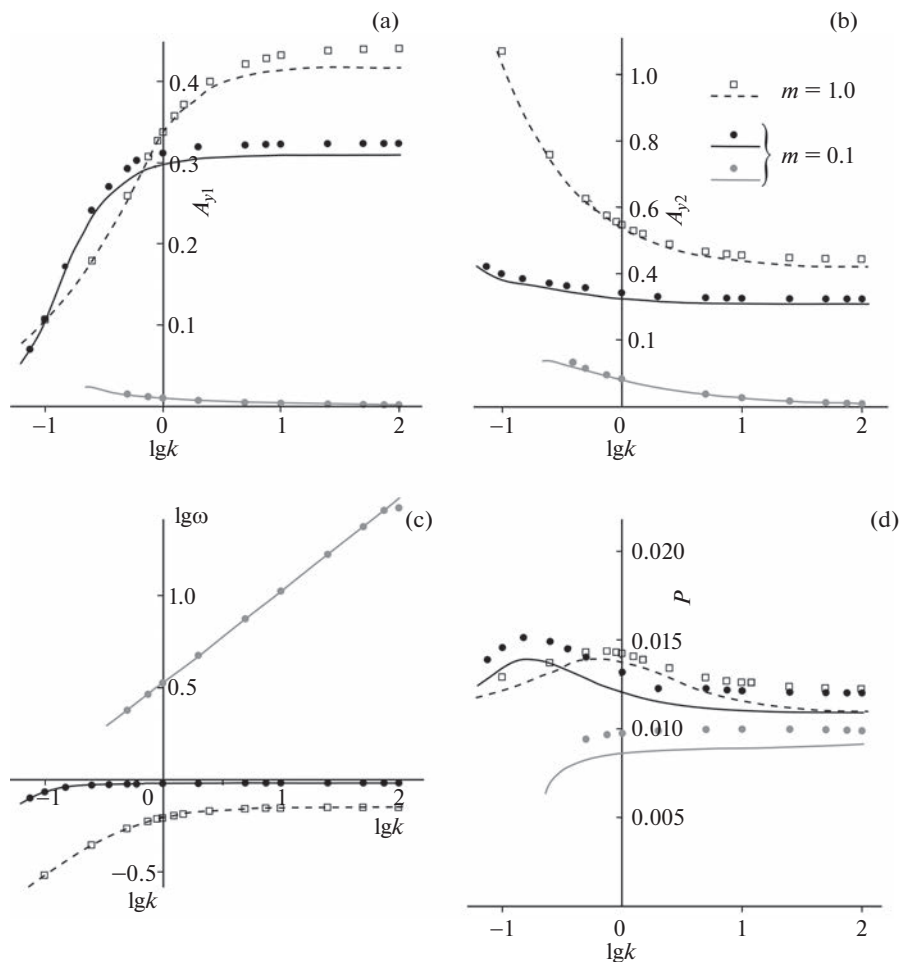


Рис. 4. Характеристики предельных циклов в зависимости от параметров k и V : а) амплитуда колебаний точки M_1 ; б) амплитуда колебаний призмы; в) десятичный логарифм частоты; д) мощность.

мощности, обеспечиваемые системой с одной подвижной массой, $P_{\max}^s$, показаны пунктиром (разумеется, только для тех скоростей ветра, при которых такая система имеет притягивающее периодическое решение).

Видно, что аппроксимация достаточно близка к значениям, получаемым прямым интегрированием уравнений движения. Однако точность заметно падает вблизи точек, в которых сливаются устойчивый и неустойчивый периодические режимы. Кроме того, аппроксимация дает несколько заниженные значения амплитуд. С этим связано то обстоятельство, что выходная мощность, даваемая приближенной формулой (4.7), оказывается меньше, чем мощность, полученная непосредственным интегрированием системы (2.7). Для обеспечения большей точности необходим учет членов более высокого порядка.

Тем не менее, аппроксимация отражает основные тенденции в отношении мощности. Для каждого значения V мощность имеет единственный максимум $P_{\max}$ по k .

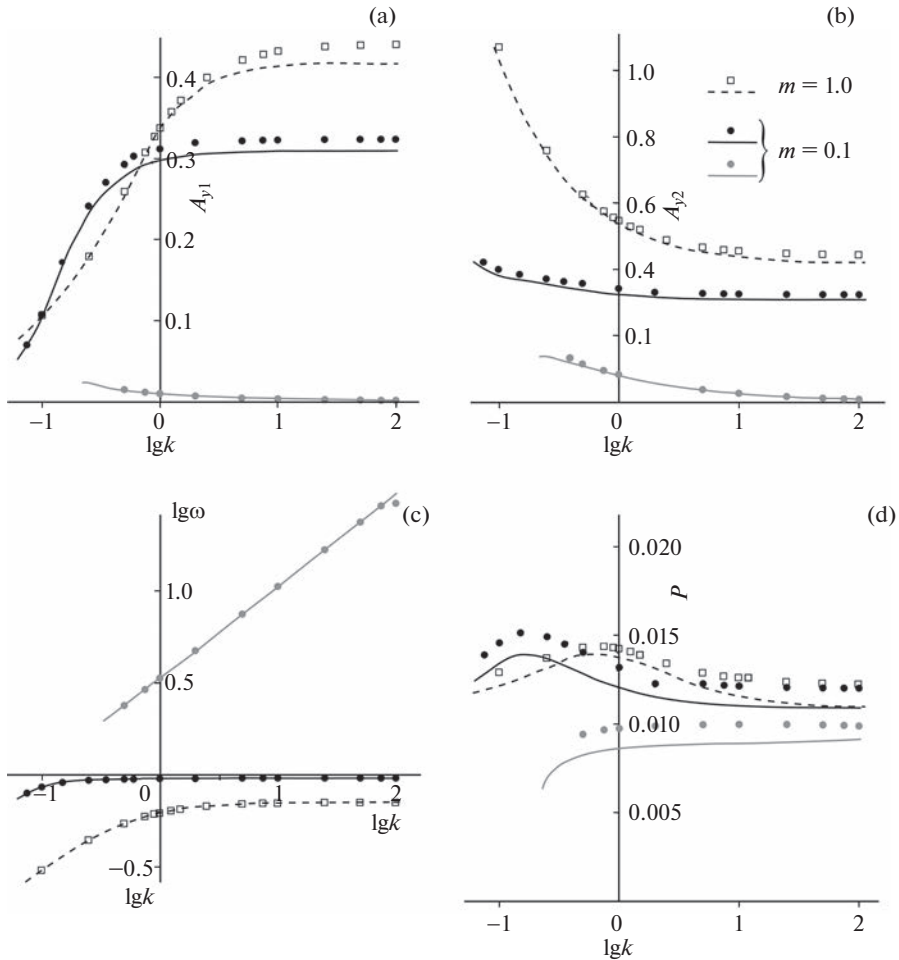


Рис. 5. Характеристики предельных циклов в зависимости от параметров k и m : а) амплитуда колебаний точки M_1 ; б) амплитуда колебаний призмы; в) десятичный логарифм частоты; д) мощность.

Видно, что мощность, вырабатываемая системой с двумя массами, всегда больше, чем $P_{\max}^s$. В то же время, отношение $P_{\max}/P_{\max}^s$ уменьшается с ростом V : так, при $V = 1$ выигрыш составляет примерно 17%, а при $V = 1.5$ он снижается до примерно 11%.

Отметим, что на рис. 4 представлены только циклы, отвечающие частоте ω_1 . Циклы с другой частотой при выбранных значениях параметров существуют только при больших значениях скорости ветра.

Влияние отношения m масс подвижных тел на характеристики притягивающих циклов проиллюстрировано на рис. 5 для случая $V = 1$. Квадратики (кружки) и сплошные (пунктирные) линии обозначают, соответственно, результаты численного интегрирования и расчетов по аппроксимационным формулам при $m = 1$ ($m = 0.1$). В случае $m = 0.1$ видны два семейства притягивающих решений (то, которое отвечает $\omega = \omega_1$, обозначено

черным цветом; то, которое отвечает $\omega = \omega_2$ – серым). Следует отметить, что аппроксимации дают заниженное значение k , при котором появляется семейство с $\omega = \omega_2$.

Амплитуды колебаний в решениях семейства $\omega = \omega_2$ достаточно малы и уменьшаются с ростом k . Однако ω при этом растет, что до некоторой степени компенсирует малость амплитуд в том, что касается мощности. Тем не менее, выходная мощность на этих решениях заметно меньше, чем на решениях семейства с $\omega = \omega_1$. Особенно эта разница заметна при k , близких к единице, где она может достигать 40%. Поэтому представляется целесообразным избегать перехода на циклы второго семейства.

Из рис. 5 видно, что уменьшение m приводит к уменьшению амплитуды колебаний призмы. Однако максимальная выходная мощность оказывается даже несколько больше, чем при $m = 1$, причем этот максимум достигается при меньшем значении k . В будущем представляется целесообразным провести более подробный анализ влияния отношения масс подвижных тел на производительность установки.

6. Заключение. Рассмотрена динамика галопирующей ветроэнергетической установки с двумя подвижными массами. Исследована область устойчивости положения равновесия в зависимости от параметров. Установлено, что при определенных условиях система имеет два притягивающих предельных цикла. Прослежена эволюция этих циклов при изменении различных параметров.

Показано, что рассматриваемая система имеет заметные преимущества по сравнению с системой, содержащей только одну подвижную массу. В частности, при надлежащем выборе параметров она имеет значительно более широкий рабочий диапазон скоростей ветра. Кроме того, ее выходная мощность больше, чем в случае системы с одной подвижной массой, и эта разница особенно заметна при скоростях ветра, близких к критической.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (грант № 22-29-00472).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Den Hartog J.P. Transmission line vibration due to sleet // Trans. AIEE. 1932. V. 51. P. 1074–1086.
2. Parkinson G.V., Brooks N.P.H. On the aeroelastic instability of bluff cylinders // ASME. J. Appl. Mech. 1961. V. 28. № 2. P. 252–258.
<https://doi.org/10.1115/1.3641663>
3. Parkinson G.V., Smith J.D. The square prism as an aeroelastic non-linear oscillator // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1964. V. 17. № 2. P. 225–239.
<https://doi.org/10.1093/qjmam/17.2.225>
4. Luo S.C., Chew Y.T., Ng Y.T. Hysteresis phenomenon in the galloping oscillation of a square cylinder // J. Fluids Struct. 2003. V. 18. № 1. P. 103–118.
[https://doi.org/10.1016/S0889-9746\(03\)00084-7](https://doi.org/10.1016/S0889-9746(03)00084-7)
5. Oka S., Ishihara T. Numerical study of aerodynamic characteristics of a square prism in a uniform flow // J. Wind Eng. Ind. Aerodyn. 2009. V. 97. P. 548–559.
<https://doi.org/10.1016/j.jweia.2009.08.006>
6. Люсин В.Д., Рябинин А.Н. О галопировании призм в потоке газа или жидкости // Тр. ЦНИИ им. ак. А.Н. Крылова. 2010. Вып. 53(337). С. 79–84.
7. Bearman P.W., Gartshore I.S., Maull D.J., Parkinson G.V. Experiments on flow-induced vibration of a square-section cylinder // J. Fluids Struct. 1987. V. 1. № 1. P. 19–34.
[https://doi.org/10.1016/s0889-9746\(87\)90158-7](https://doi.org/10.1016/s0889-9746(87)90158-7)
8. Sarioglu M., Akansu Y.E., Yavuz T. Flow around a rotatable square cylinder-plate body // AIAA J. 2006. Vol. 44. №. 5. P. 1065–1072.
<https://doi.org/10.2514/1.18069>
9. Gao G.-Z., Zhu L.-D. Nonlinear mathematical model of unsteady galloping force on a rectangular 2:1 cylinder // J. Fluids Struct. 2017. V. 70. P. 47–71.
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2017.01.013>

10. *Abdel-Rohman M.* Design of tuned mass dampers for suppression of galloping in tall prismatic structures // *J. Sound Vibr.* 1994. V. 171. № 3. P. 289–299.
<https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1121>
11. *Gattulli V., Di Fabio F., Luongo A.* Simple and double Hopf bifurcations in aeroelastic oscillators with tuned mass dampers // *J. Franklin Inst.* 2001. V. 338. P. 187–201.
[https://doi.org/10.1016/S0016-0032\(00\)00077-6](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(00)00077-6)
12. *Selwanis M.M., Franzini G.R., Beguin C., Gosselin F.P.* Wind tunnel demonstration of galloping mitigation with a purely nonlinear energy sink // *J. Fluids Struct.* 2021. V. 100. P. 103169.
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2020.103169>
13. *Barrero-Gil A., Alonso G., Sanz-Andres A.* Energy harvesting from transverse galloping // *J. Sound Vibr.* 2010. V. 329. P. 2873–2883.
<https://doi.org/10.1016/J.JSV.2010.01.028>
14. *Dai H.L., Abdelkefi A., Javed U., Wang L.* Modeling and performance of electromagnetic energy harvesting from galloping oscillations // *Smart Mater. Struct.* 2015. V. 24. № 4. P. 045012.
<https://doi.org/10.1088/0964-1726/24/4/045012>
15. *Hemon P., Amandolese X., Andrianne T.* Energy Harvesting from Galloping of Prisms: A Wind Tunnel Experiment // *J. Fluids & Struct.* 2017. V. 70. P. 390–402.
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2017.02.006>
16. *Javed U., Abdelkefi A., Akhtar I.* An improved stability characterization for aeroelastic energy harvesting applications // *Comm. Nonlin. Sci. Num. Simul.* 2016. V. 36. P. 252–265.
<https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.12.001>
17. *Wang K.F., Wang B.L., Gao Y., Zhou J.Y.* Nonlinear analysis of piezoelectric wind energy harvesters with different geometrical shapes // *Arch. Appl. Mech.* 2020. V. 90. P. 721–736.
<https://doi.org/10.1007/s00419-019-01636-8>
18. *Zhao D., Hu X., Tan T., Yan Zh., Zhang W.* Piezoelectric galloping energy harvesting enhanced by topological equivalent aerodynamic design // *Energy Conv. Manag.* 2020. V. 222. P. 113260.
<https://doi.org/10.1016/j.enconman.2020.113260>
19. *Vicente-Ludlam D., Barrero-Gil A., Velazquez A.* Enhanced mechanical energy extraction from transverse galloping using a dual mass system // *J. Sound Vibr.* 2015. V. 339. P. 290–303.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.11.034>
20. *Karlicic D., Cajic M., Adhikari S.* Dual-mass electromagnetic energy harvesting from galloping oscillations and base excitation // *J. Mech. Eng. Sci.* 2021. V. 235. № 20. P. 4768–4783.
<https://doi.org/10.1177/0954406220948910>
21. *Dosaev M.* Interaction between internal and external friction in rotation of vane with viscous filling // *Appl. Math. Mod.* 2019. V. 68. P. 21–28.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.11.002>
22. *Saettone S., Taskar B., Regener P.B., Steen S., Andersen P.* A comparison between fully-unsteady and quasi-steady approach for the prediction of the propeller performance in waves // *Appl. Ocean Res.* 2020. Vol. 99. P. 102011.
<https://doi.org/10.1016/j.apor.2019.102011>
23. *Abohamer M.K., Awrejcewicz J., Starosta R., Amer T.S., Bek M.A.* Influence of the motion of a spring pendulum on energy-harvesting devices // *Appl. Sci.* 2021. V. 11. P. 8658.
<https://doi.org/10.3390/app11188658>
24. *Selyutskiy Y.D.* Potential forces and alternation of stability character in non-conservative systems // *Appl. Math. Mod.* 2021. Vol. 90. P. 191–199.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.08.070>
25. *Lazarus A., Thomas O.* A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems // *Comptes Rendus Mecanique.* 2021. V. 338. № 9. P. 510–517.
<https://doi.org/10.1016/j.crme.2010.07.020>
26. *Климина Л.А.* Метод формирования асинхронных автоколебаний в механической системе с двумя степенями свободы // *ПММ.* 2021. Т. 85. № 2. С. 152–171.
<https://doi.org/10.31857/S0032823521020065>

УДК 539.3

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОГО КОНТАКТА ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ

© 2023 г. А. А. Бобылев^{a,b,*}

^aМосковский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

^bМосковский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*e-mail: abobylov@gmail.com

Поступила в редакцию 06.03.2022 г.

После доработки 22.03.2022 г.

Принята к публикации 23.03.2022 г.

Рассмотрены задачи дискретного контакта упругого слоя и жесткого штампа с заранее неизвестными площадками фактического контакта. Получена вариационная формулировка задач в виде граничного вариационного неравенства с использованием оператора Пуанкаре–Стеклова, отображающего на части границы упругого слоя нормальные напряжения в нормальные перемещения. При аппроксимации этого оператора используется двумерное дискретное преобразование Фурье, для численной реализации которого применяются алгоритмы быстрого преобразования Фурье. Приведена эквивалентная вариационному неравенству задача минимизации, в результате аппроксимации которой получена задача квадратичного программирования с ограничениями в виде равенств и неравенств. Для численного решения этой задачи использован алгоритм на основе метода сопряженных градиентов, учитывающий специфику множества ограничений. Построены двухпараметрические семейства прямоугольных в плане штампов с поверхностным рельефом. В результате вычислительных экспериментов установлено существование для каждого семейства штампов единой огибающей контактного давления, единой огибающей нормализованных контактных усилий и единой огибающей относительных величин фактических площадей контакта микровыступов. Форма и положение этих огибающих для семейства штампов зависят от параметров внешней нагрузки и отношения размеров номинальной области контакта к толщине слоя.

Ключевые слова: дискретный контакт, упругий слой, граничное вариационное неравенство, преобразование Фурье

DOI: 10.31857/S0572329922100129, EDN: DFNUIO

1. Введение. При контактном взаимодействии твердых тел область фактического контакта, как правило, дискретна. Размеры и положение пятен фактического контакта зависят от условий контактного взаимодействия, механических характеристик тел и их поверхностной микроструктуры. Для описания дискретного (множественного) контакта твердых тел предложены различные математические модели, учитывающие параметры макро- и микрогеометрии реальных поверхностей и условия их контактного взаимодействия [1–4]. Большинство этих моделей основано на классической теории контактного взаимодействия деформируемых тел [5, 6]. Подробный обзор современного состояния исследований в области механики дискретного контакта, включая основные подходы к постановке задач, методы аналитического и численного реше-

ния, конкретные результаты и области их практического использования, приведен в статье [7].

В настоящей работе рассматриваются задачи дискретного контакта упругого однородного слоя, сцепленного с недеформируемым основанием, и жесткого штампа конечных размеров, основание которого имеет поверхностный рельеф. На части границы слоя, по которой возможен контакт со штампом, задаются условия одностороннего контакта, трение на площадках контакта отсутствует. Такая расчетная схема применяется при моделировании локального контактного взаимодействия твердых тел, одно из которых имеет мягкое покрытие, а другое — поверхностный микрорельеф. Отметим, что в рассматриваемых задачах дискретного контакта априори задается лишь предельно допустимая (номинальная) область контакта, которая включает в себя множество отдельных пятен фактического контакта, положение и форма которых заранее неизвестны и подлежат определению.

Задачи дискретного контакта с односторонними связями являются нелинейными вследствие наличия в постановке граничных условий в виде неравенств. Для их численного решения требуется применение итерационных алгоритмов. Наиболее распространенный подход к построению вычислительных алгоритмов решения контактных задач с односторонними связями состоит в использовании вариационных методов [8–10]. Вариационные формулировки также применяются для исследования проблемы существования, единственности и регулярности решения контактных задач [11–13].

Используя математический аппарат преобразования вариационных задач [8], можно получить семейство вариационных формулировок. С вычислительной точки зрения наиболее эффективным является применение граничных вариационных формулировок с использованием оператора Пуанкаре–Стеклова, отображающего на части границы упругого тела, по которой возможен контакт, поверхностные силы в перемещения поверхности. В этом случае для дискретизации контактной задачи применяется метод граничных элементов, причем дискретизации подлежит не вся граница упругого тела, а лишь ее часть — область возможного контакта.

Для построения оператора Пуанкаре–Стеклова требуется решить линейную краевую задачу с заданными силами на поверхности возможного контакта. Как известно [14], при решении краевых задач для упругого слоя может быть эффективно использовано двумерное интегральное преобразование Фурье. В ряде случаев удается получить аналитические выражения для трансформант Фурье искомых функций, однако выполнить аналитически обратное преобразование Фурье этих двумерных трансформант весьма затруднительно, поэтому используют приближенные методы. Асимптотические методы представлены в монографиях [15, 16]. Численные методы, как правило, основаны на двумерном дискретном преобразовании Фурье (ДПФ), при реализации которого применяются алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ) [17, 18]. Подробный обзор современного состояния исследований и анализ различных аспектов применения ДПФ и БПФ в контактных задачах приведен в [19, 20].

В результате аппроксимации граничных вариационных формулировок контактных задач с односторонними связями методом граничных элементов получают задачи квадратичного программирования, для решения которых в настоящее время наиболее эффективными считаются алгоритмы, разработанные на основе метода сопряженных градиентов (МСГ).

Впервые алгоритм решения задач квадратичного программирования на основе МСГ был предложен в работе [21]. Идея алгоритма состояла в использовании стратегии рабочего списка активных ограничений-неравенств (активного набора) и применении МСГ для нахождения минимума на текущем рабочем подпространстве. Была доказана теоретическая сходимость алгоритма за конечное число шагов. При практическом использовании алгоритма оказалось, что скорость сходимости итерационного

процесса существенно зависит от количества и вида ограничений. Поэтому впоследствии были предложены различные модификации базового алгоритма, адаптированные для решения конкретных классов прикладных задач. Описание и анализ алгоритмов на основе МСГ для решения контактных задач с односторонними связями можно найти, например, в работах [22, 23].

Один из наиболее известных алгоритмов, приведенный в часто цитируемой статье [24], отличается от базового алгоритма [21] учетом специфики множества ограничений решаемой задачи квадратичного программирования, что позволило значительно повысить скорость работы алгоритма. Однако алгоритм [24] имеет существенное ограничение. В нем учитывается только одно уравнение равновесия штампа (для сил) и, следовательно, только поступательное движение штампа. Это не позволяет использовать алгоритм для решения контактных задач при внецентренном нагружении штампа, когда необходимо учитывать его повороты.

В [25] автором предложен новый алгоритм решения задач дискретного контакта для упругой полуплоскости, разработанный на основе МСГ. Основная идея этого алгоритма состоит в применении линейного преобразования переменных, позволяющего свести ограничения в виде равенств, которые аппроксимируют уравнения равновесия штампа и содержат все переменные задачи, к простым ограничениям, содержащим только одну переменную. Такие ограничения несложно учесть в алгоритме МСГ. Этот прием позволяет рассматривать оба уравнения равновесия штампа и задавать значение момента внешних сил. Проведенные вычислительные эксперименты подтвердили вычислительную эффективность разработанного алгоритма.

В настоящей работе алгоритм [25] обобщен для пространственных контактных задач. Предложено линейное преобразование переменных, позволяющее учесть все три уравнения равновесия штампа и рассматривать случаи внецентренного нагружения штампа в пространственных контактных задачах для упругого слоя. Отметим также, что в отличие от работы [25] при аппроксимации оператора Пуанкаре–Стеклова используется ДПФ, для численной реализации которого применяются алгоритмы БПФ. Это позволило существенно сократить вычислительные затраты при решении пространственных контактных задач.

В [25] построено однопараметрическое семейство штампов с поверхностным рельефом, для которого в результате вычислительных экспериментов установлено, что при вдавливании штампов в упругую полуплоскость существует единая огибающая контактного давления — кривая, проходящая через локальные максимумы контактного давления на отдельных пятнах контакта. Положение огибающей для семейства штампов зависит от параметров внешней нагрузки. В настоящей работе этот результат обобщен для пространственной контактной задачи — построено двухпараметрическое семейство штампов с поверхностным рельефом, при вдавливании которых в упругий слой существует единая огибающая контактного давления. Кроме того, в результате вычислительных экспериментов установлено существование для семейства штампов единой огибающей нормализованных контактных усилий и единой огибающей относительных величин фактических площадей контакта микровыступов.

2. Постановка задачи. Пусть в неподвижной прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ невесомый однородный изотропный упругий слой занимает область $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1| \leq \infty, |x_2| \leq \infty, 0 \leq x_3 \leq h\}$. Границу слоя $x_3 \equiv 0$ будем обозначать Γ_0 , а границу $x_3 \equiv h$ — через Γ_1 . Далее под $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ будем понимать соответственно вектор перемещений и тензоры деформаций и напряжений в точке $\mathbf{x} \in \Omega$. Предполагается, что деформации малы, а напряжения в недеформированном состоянии отсутствуют. Напряженно-деформированное состояние слоя описывается системой уравнений [14, 15]:

$$\varepsilon = \text{def } \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} : \varepsilon, \quad \text{div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{в} \quad \Omega \quad (2.1)$$

где $\text{def} \equiv 1/2(\text{grad} + \text{grad}^T)$, $\mathbf{S}$ – тензор модулей упругости.

По границе Γ_0 слой соединен с недеформируемым основанием. В случае идеально-го контакта граничные условия имеют вид

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0 \quad (2.2)$$

В слой вдавливаются гладкий жесткий штамп, основание которого имеет поверхностный рельеф. Часть границы Γ_1 , по которой возможен контакт слоя со штампом, обозначается Γ_p . Положение и предельные размеры Γ_p , т.е. номинальная область контакта, задаются априори, исходя из геометрических соображений. Без потери общности будем полагать, что область Γ_p представляет собой прямоугольник размеров $b_1 \times b_2$ со сторонами, параллельными осям координат Ox_1 и Ox_2 соответственно. Отметим, что при вдавливании штампа с поверхностным рельефом номинальная область контакта Γ_p включает в себя множество отдельных пятен фактического контакта, положение и форма которых заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения задачи.

Макроформа основания штампа и его поверхностный рельеф описываются функцией $\Phi(x_1, x_2)$, значение которой в точке $\mathbf{x} \in \Gamma_p$ равно расстоянию от этой точки до поверхности штампа, измеренному вдоль направления внешней нормали к границе Γ_p . Расстояние $\Phi(x_1, x_2)$ отсчитывается по отношению к недеформированному состоянию слоя. Для определенности будем полагать $\min_{\mathbf{x} \in \Gamma_p} \Phi(x_1, x_2) = 0$. Для штампа с поверхностным рельефом функция $\Phi(x_1, x_2)$ является мультимодальной (многоэкстремальной). Положение штампа определяется векторами перемещений $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ и углов поворота $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Главный вектор $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ и главный момент $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ внешних сил, приложенных к штампу, считаются заданными. В качестве центра приведения выбирается точка $\mathbf{x}^c = (x_1^c, x_2^c, x_3^c)$. Далее рассматривается задача нормального контакта слоя со штампом, поэтому будем полагать $F_1 = F_2 = 0$, $M_3 = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$ и $\varphi_3 = 0$.

Контактное взаимодействие упругого слоя с жестким штампом описывается условиями одностороннего гладкого контакта:

$$u_3 \leq \Phi + \delta_3 + \varphi_1(x_2 - x_2^c) - \varphi_2(x_1 - x_1^c), \quad \sigma_{33} \leq 0, \quad \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$$

$$\sigma_{33}[\sigma_{33} - \Phi - \delta_3 - \varphi_1(x_2 - x_2^c) + \varphi_2(x_1 - x_1^c)] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_p \quad (2.3)$$

Остальная часть границы Γ_1 свободна от внешних нагрузок:

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \setminus \Gamma_p \quad (2.4)$$

Уравнения равновесия жесткого штампа имеют вид:

$$\int_{\Gamma_p} \sigma_{33} d\Gamma_p = F_3, \quad \int_{\Gamma_p} \sigma_{33}(x_2 - x_2^c) d\Gamma_p = M_1, \quad \int_{\Gamma_p} \sigma_{33}(x_1 - x_1^c) d\Gamma_p = -M_2 \quad (2.5)$$

Отметим, что соотношения (2.5), по существу, представляют собой нелокальные граничные условия.

Для существования решения рассматриваемой контактной задачи далее будем предполагать, что внешние силы и моменты, приложенные к жесткому штампу, удовлетворяют следующим условиям:

– компонента главного вектора F_3 ограничена по абсолютной величине и $F_3 < 0$;

— значения силы F_3 и моментов M_1 и M_2 согласованы между собой таким образом, что существует распределение нормальных напряжений $\sigma_{33} \leq 0$ на Γ_p , удовлетворяющее уравнениям равновесия штампа (2.5).

Для замыкания постановки контактной задачи необходимо задать условия на бесконечности. Обычно в качестве таковых используются условия, характеризующие определенный порядок изменения перемещений и напряжений на бесконечности. Как правило, эти условия носят чисто математический характер. Более естественным является условие конечности потенциальной энергии деформации упругого слоя

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega < \infty \quad (2.6)$$

которое вполне замыкает постановку задачи и определяет поведение решения на бесконечности [15].

Задача (в дифференциальной постановке) состоит в определении полей перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ и напряжений $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$, удовлетворяющих уравнениям (2.1), граничным условиям (2.2)–(2.4), уравнениям равновесия штампа (2.5) и условию (2.6). Также необходимо найти смещение δ_3 и повороты φ_1 и φ_2 жесткого штампа. Подчеркнем, что в рассматриваемой задаче дискретного контакта априори задается лишь предельно допустимая (номинальная) область контакта Γ_p , положение и форма пятен фактического контакта заранее неизвестны и подлежат определению.

Отметим, что более общие постановки задач дискретного контакта для упругого слоя с заданными массовыми силами и неоднородными смешанными граничными условиями на $\Gamma_1 \setminus \Gamma_p$ можно рассматривать как контактные задачи при наличии пригрузки вне штампа [1, 5]. Следуя общему подходу, несложно показать, что эти задачи могут быть сведены к рассматриваемой путем модификации функции, описывающей форму основания штампа

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \tilde{u}_3 \quad (2.7)$$

где $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$ — решение краевой задачи для упругого слоя с заданными массовыми силами и неоднородными смешанными граничными условиями на $\Gamma_1 \setminus \Gamma_p$ при отсутствии штампа, т.е. когда

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_p \quad (2.8)$$

3. Функциональные пространства. Решение $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ задачи (2.1)–(2.6), принадлежащее классу функций $[C^2(\Omega)]^3 \cap [C^1(\bar{\Omega})]^3$, является классическим решением. Переход к вариационной формулировке задачи позволяет определить обобщенное решение. Введем необходимые для этого функциональные пространства [15, 26, 27]. Обозначим

$$\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega) = \{\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \text{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \in \mathbf{L}_2(\Omega)\} \quad (3.1)$$

где $\mathbf{H}^1(\Omega) = [H^1(\Omega)]^3$, $\mathbf{L}_2(\Omega) = [L_2(\Omega)]^3$ — прямые произведения пространств Соболева. Пространство $\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)} = (\mathbf{v}, \mathbf{w})_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + (\text{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}), \text{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}))_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \quad (3.2)$$

Для однородного изотропного упругого слоя несложно получить неравенство

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega \leq c_1 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega) \quad (3.3)$$

с положительной постоянной c_1 , не зависящей от $\mathbf{v}$. Следовательно, элементы пространства $\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)$ удовлетворяют условию конечности потенциальной энергии деформации (2.6).

Выделим в $\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)$ подпространство

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega) : \text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \text{ в } \Omega; \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ на } \Gamma_0\} \quad (3.4)$$

Нетрудно видеть, что

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (3.5)$$

Из результатов [11] с учетом (3.5) следует, что существует постоянная $c_2 > 0$, зависящая лишь от Ω , такая, что

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \geq c_2 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (3.6)$$

Неравенство (3.6) представляет собой первое неравенство Корна.

Используя далее результаты [15, 28], можно показать, что существуют линейные непрерывные операторы следа

$$\gamma_u : \mathbf{V} \rightarrow [H^{1/2}(\Gamma_1)]^3, \quad \gamma_t : \mathbf{V} \rightarrow [H^{-1/2}(\Gamma_1)]^3 \quad (3.7)$$

определяющие для полей перемещений $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ соответственно векторные функции перемещений $\gamma_u \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ и напряжений $\gamma_t \mathbf{v} = (\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33})$ на Γ_1 такие, что

$$\|\gamma_u \mathbf{v}\|_{[H^{1/2}(\Gamma_1)]^3} \leq c_3 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)}, \quad \|\gamma_t \mathbf{v}\|_{[H^{-1/2}(\Gamma_1)]^3} \leq c_4 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)} \quad (3.8)$$

где c_3, c_4 — положительные постоянные, не зависящие от $\mathbf{v}$.

Обратно, существует линейный непрерывный оператор

$$\boldsymbol{\tau}_t : [H^{-1/2}(\Gamma_1)]^3 \rightarrow \mathbf{V} \quad (3.9)$$

такой, что для заданного $\mathbf{t} \in [H^{-1/2}(\Gamma_1)]^3$ можно построить функцию $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, обладающую свойством $\gamma_t \mathbf{v} = \mathbf{t}$.

Введем пространство сужений на Γ_p функций из $H^{1/2}(\Gamma_1)$

$$H^{1/2}(\Gamma_p) = \{v = w|_{\Gamma_p} : w \in H^{1/2}(\Gamma_1)\} \quad (3.10)$$

и оснастим его нормой

$$\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_p)} = \inf_{w \in H^{1/2}(\Gamma_1)} \{\|w\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} : v = w|_{\Gamma_p}\} \quad (3.11)$$

Имеет место вложение пространств $H^{1/2}(\Gamma_p) \subset L_2(\Gamma_p)$ [29]. Двойственным к пространству $H^{1/2}(\Gamma_p)$ является пространство $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ — пополнение $L_2(\Gamma_p)$ по норме

$$\|p\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)} = \sup_{\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_p)}=1} |(p, v)_{L_2(\Gamma_p)}| \quad (3.12)$$

т.е. отношение двойственности $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p) \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{1/2}(\Gamma_p)}$ порождается продолжением стандартного скалярного произведения в $L_2(\Gamma_p)$ и имеет место плотное вложение пространств [29]

$$L_2(\Gamma_p) \subset \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p) \quad (3.13)$$

Для упрощения обозначений указанное отношение двойственности далее будем обозначать как $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Заметим, что тривиальное продолжение функции $p \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ на Γ_1 принадлежит пространству $H^{-1/2}(\Gamma_1)$, т.е. существует функция $p^* \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$ такая, что $\text{supp } p^* \subset \bar{\Gamma}_p$, p является сужением p^* на Γ_p и выполняется равенство [28]

$$\|p\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)} = \|p^*\|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} \quad (3.14)$$

Следовательно, с учетом (3.9) существует линейный непрерывный оператор

$$\tau_p : [\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)]^3 \rightarrow \mathbf{V} \quad (3.15)$$

такой, что для заданного $\mathbf{p} \in [\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)]^3$ можно построить функцию $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, обладающую свойством $\gamma_t \mathbf{v}|_{\Gamma_p} = \mathbf{p}$.

4. Интегральное представление решения. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу для упругого слоя: найти поле перемещений $\mathbf{u}$, удовлетворяющее уравнениям (2.1), граничным условиям (2.2) и (2.4), а также условиям

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0, \quad \sigma_{33} = q \quad \text{на} \quad \Gamma_p \quad (4.1)$$

В [15] показано, что для любого $q \in L_2(\Gamma_p)$ данная задача имеет единственное решение $\mathbf{u}$ и выполняется интегральное тождество (обобщенная формула Грина)

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Gamma_p} q v_3 d\Gamma_p \quad \forall \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{V} \quad (4.2)$$

Из (4.2) с учетом (3.6) следует оценка

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)} \leq c_5 \|q\|_{L_2(\Gamma_p)} \quad (4.3)$$

с положительной постоянной c_5 , не зависящей от q . Следовательно, с помощью решения вспомогательной краевой задачи можно определить линейный непрерывный оператор $\mathbf{G}_p : q \mapsto \mathbf{u}$ из $L_2(\Gamma_p)$ в $\mathbf{V}$.

Решение вспомогательной краевой задачи для $q \in L_2(\Gamma_p)$ имеет вид [16]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(\alpha, \beta, x_3) Q(\alpha, \beta) \exp[-i(\alpha x_1 + \beta x_2)] d\alpha d\beta \quad (4.4)$$

$$Q(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_p} q(x_1, x_2) \exp[i(\alpha x_1 + \beta x_2)] dx_1 dx_2 \quad (4.5)$$

Выражение для ядра $\mathbf{U}(\alpha, \beta, x_3)$ приведено, например, в [16]. Учитывая плотность вложения (3.13), оператор $\mathbf{G}_p$ можно продолжить по непрерывности на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ и с учетом (3.15) рассматривать как оператор, действующий из $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ в $\mathbf{V}$.

Таким образом, использование интегрального представления (4.4)–(4.5) в предположении, что $\Phi \in H^{1/2}(\Gamma_p)$, позволяет свести решение контактной задачи (2.1)–(2.6) к нахождению нормальных напряжений $\sigma_{33} = q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, удовлетворяющих следующей системе уравнений и неравенств:

$$q \leq 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_p \quad (\text{в смысле } \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)) \quad (4.6)$$

$$u_3(q) \leq \Phi + \delta_3 + \varphi_1(x_2 - x_2^c) - \varphi_2(x_1 - x_1^c) \quad \text{на} \quad \Gamma_p \quad (\text{в смысле } H^{1/2}(\Gamma_p)) \quad (4.7)$$

$$q[u_3(q) - \Phi - \delta_3 - \varphi_1(x_2 - x_2^c) + \varphi_2(x_1 - x_1^c)] = 0 \text{ на } \Gamma_p \text{ (в смысле } \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)) \quad (4.8)$$

$$\langle q, 1 \rangle = F_3, \quad \langle q, x_2 - x_2^c \rangle = M_1, \quad \langle q, x_1 - x_1^c \rangle = -M_2 \quad (4.9)$$

Перемещения $\mathbf{u} = \mathbf{G}_p q$, соответствующие решению $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ системы (4.6)–(4.9), будем называть обобщенным решением контактной задачи (2.1)–(2.6).

5. Оператор Пуанкаре–Стеклова. Введем оператор Пуанкаре–Стеклова $G_s : q \mapsto w$, отображающий посредством решения (4.4)–(4.5) нормальные напряжения $q(x_1, x_2) \equiv \equiv \sigma_{33}(x_1, x_2, h)$ на части Γ_p границы упругого слоя в нормальные перемещения $w(x_1, x_2) \equiv \equiv u_2(x_1, x_2, h)$ на Γ_p .

Соответствующее решению (4.4)–(4.5) выражение для оператора Пуанкаре–Стеклова $G_s : q \mapsto w$ для $p \in L_2(\Gamma_p)$ имеет вид [16]:

$$w(x_1, x_2) = \int_{\Gamma_p} K_s(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (5.1)$$

Отметим, что ядро $K_s(\cdot, \cdot)$ интегрального представления (5.1) является разностным по обоим аргументам [16]. Учитывая плотность вложения (3.13), оператор G_s можно продолжить по непрерывности на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ и с учетом (3.7), (3.10), (3.15) рассматривать как оператор, действующий из $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ в $H^{1/2}(\Gamma_p)$.

Введем на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ непрерывную билинейную форму

$$g(p, q) = \langle p, G_s q \rangle \quad (5.2)$$

Учитывая плотность вложения (3.17), из (4.2) получим, что

$$g(p, q) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \quad (5.3)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{G}_p q$, $\mathbf{v} = \mathbf{G}_p p$.

Для изотропного упругого слоя билинейная форма $g(\cdot, \cdot)$ является симметричной. Используя (3.6), далее получим неравенство

$$g(q, q) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega \geq c_0 \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega \geq c_0 c_2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)}^2 \quad (5.4)$$

из которого с учетом (3.8) и (3.14) следует оценка

$$g(q, q) \geq c_6 \|q\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)}^2 \quad (5.5)$$

с положительной постоянной c_6 , не зависящей от q . В результате, билинейная форма $g(\cdot, \cdot)$ и оператор Пуанкаре–Стеклова G_s являются положительно определенными на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$.

6. Вариационная формулировка задачи. Для решения системы (4.6)–(4.9), содержащей уравнения и неравенства, используется вариационный подход [8–13]. Образует множество статически допустимых нормальных напряжений на Γ_p

$$\Sigma = \left\{ p \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p) : p \leq 0; \langle p, 1 \rangle = F_3; \langle p, x_2 - x_2^c \rangle = M_1; \langle p, x_1 - x_1^c \rangle = -M_2 \right\} \quad (6.1)$$

Нетрудно видеть, что множество Σ является замкнутым выпуклым множеством в $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$. Кроме того, в соответствии со сделанными при постановке задачи предположениями это множество является непустым.

Пусть $q \in \Sigma$ — решение системы (4.6)–(4.9). Тогда для произвольного $p \in \Sigma$ получим следующую оценку

$$\begin{aligned}
 \langle p - q, G_s q - \Phi \rangle &= \langle p - q, G_s q - \Phi - \delta_3 - \varphi_1(x_2 - x_2^c) + \varphi_2(x_1 - x_1^c) \rangle + \\
 &\quad + \langle p - q, \delta_3 + \varphi_1(x_2 - x_2^c) - \varphi_2(x_1 - x_1^c) \rangle = \\
 &= \langle p, G_s q - \Phi - \delta_3 - \varphi_1(x_2 - x_2^c) + \varphi_2(x_1 - x_1^c) \rangle - \\
 &\quad - \langle q, G_s q - \Phi - \delta_3 - \varphi_1(x_2 - x_2^c) + \varphi_2(x_1 - x_1^c) \rangle + \\
 &\quad + \delta_3 \langle p, 1 \rangle + \varphi_1 \langle p, x_2 - x_2^c \rangle - \varphi_2 \langle p, x_1 - x_1^c \rangle - \delta_3 \langle q, 1 \rangle - \varphi_1 \langle q, x_2 - x_2^c \rangle + \\
 &\quad + \varphi_2 \langle q, x_1 - x_1^c \rangle = \langle p, G_s q - \Phi - \delta_3 - \varphi_1(x_2 - x_2^c) + \varphi_2(x_1 - x_1^c) \rangle \geq 0
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Из (6.2) следует, что искомые нормальные напряжения $q \in \Sigma$ удовлетворяют граничному вариационному неравенству

$$g(p - q, q) - \phi(p - q) \geq 0 \quad \forall p \in \Sigma \tag{6.3}$$

где $\phi(\cdot)$ — определенная на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ линейная форма

$$\phi(p) = \langle p, \Phi \rangle \tag{6.4}$$

Отметим, что неравенство (6.3) не содержит неизвестных смещения δ_3 и поворотов φ_1 и φ_2 жесткого штампа. Как нетрудно видеть из преобразований (6.2), это является следствием того, что элементы множества статически допустимых нормальных напряжений Σ удовлетворяют уравнениям равновесия штампа (4.9).

Используя известные приемы [30, 31], можно доказать обратное утверждение: решение q вариационного неравенства (6.3) удовлетворяет системе уравнений и неравенств (4.6)–(4.9).

Учитывая, что билинейная форма $g(p, q)$ является положительно определенной, а множество Σ — непустым замкнутым выпуклым множеством в $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, вариационное неравенство (6.3) эквивалентно задаче минимизации граничного функционала: найти $q \in \Sigma$ такой, что

$$J(q) = \inf_{p \in \Sigma} \left\{ J(p) = \frac{1}{2} g(p, p) - \phi(p) \right\} \tag{6.5}$$

Кроме того, решение вариационного неравенства (6.3) и задачи минимизации (6.5) существует и единственно [8, 12, 13].

Отыскав нормальные напряжения $q \equiv \sigma_{33}$ на Γ_p как решение задачи (6.5), можно определить напряженно-деформированное состояние всего слоя, используя (4.4)–(4.5).

7. Аппроксимация задачи. Выбор метода аппроксимации задачи минимизации (6.5) определяется, в первую очередь, возможностью построения эффективной с вычислительной точки зрения аппроксимации оператора Пуанкаре–Стеклова G_s , ядро интегрального представления (5.1) которого имеет вид [16]

$$K_s(z_1, z_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{K}_s(\alpha, \beta) \cos \alpha z_1 \cos \beta z_2 d\alpha d\beta \tag{7.1}$$

где

$$\tilde{K}_s(\alpha, \beta) = S_s(h(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}), \quad S_s(t) = \frac{2(1 - \nu^2)h}{Et} \frac{2\kappa \operatorname{sh} 2t - 4t}{2\kappa \operatorname{ch} 2t + \kappa^2 + 1 + 4t^2}, \quad (7.2)$$

$$\kappa = 3 - 4\nu$$

Аналитическое выражение для интеграла (7.1) неизвестно. Применение кубатурных формул для вычисления этого несобственного двойного интеграла представляет собой трудоемкую вычислительную задачу. Альтернативный подход состоит в следующем. Нетрудно видеть, что $\tilde{K}_s(\alpha, \beta)$ является двумерной косинус-трансформантой Фурье функции $K_s(z_1, z_2)$. Подвергнем (5.1) двумерному преобразованию Фурье и в соответствии с теоремой о свертке [32] получим

$$\tilde{w}(\alpha, \beta) = \tilde{K}_s(\alpha, \beta) \tilde{q}(\alpha, \beta) \quad (7.3)$$

где $\tilde{w}(\alpha, \beta)$, $\tilde{q}(\alpha, \beta)$ – двумерные трансформанты Фурье соответственно нормальных перемещений $w(x_1, x_2)$ на Γ_1 и тривиального продолжения на Γ_1 нормальных напряжений $q(x_1, x_2)$. Следовательно, вычисление оператора Пуанкаре–Стеклова G_s сводится к выполнению пары (прямого и обратного) двумерных преобразований Фурье и перемножению спектров (7.3).

В численном анализе использование преобразования Фурье наиболее эффективно в случае периодических функций благодаря дискретности их спектра и, как следствие, переходе от непрерывного преобразования к дискретному [17, 18]. Поэтому основная идея используемого ниже подхода состоит в аппроксимации искомых нормальных напряжений на Γ_p сеточными функциями, периодическими на всей границе Γ_1 , и применении алгоритмов БПФ. Для уменьшения возникающей при этом так называемой ошибки периодичности вводится расширенная вычислительная область Γ_c [19, 20].

Выберем прямоугольную вычислительную область $\Gamma_c \subset \Gamma_1$ размеров $a_1 \times a_2$ со сторонами, параллельными осям координат Ox_1 и Ox_2 , так, чтобы выполнялись условия

$$\Gamma_p \subset \Gamma_c, \quad a_i = \chi_i b_i, \quad \chi_i \in \mathbb{N}, \quad \chi_i > 1, \quad i = 1, 2 \quad (7.4)$$

где χ_i – коэффициенты расширения вычислительной области. Далее аналогично (3.10)–(3.12) введем пространство $H^{1/2}(\Gamma_c)$ и двойственное ему пространство $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$. Используя результаты [29], можно показать, что сужения функций из $H^{1/2}(\Gamma_c)$ на Γ_p принадлежат пространству $H^{1/2}(\Gamma_p)$, а тривиальное продолжение q_0 функции $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ на Γ_c принадлежит пространству $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$. Обозначим через $\hat{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$ подпространство функций из $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$, имеющих носитель на $\bar{\Gamma}_p$. Учитывая (7.4), аналогично [33] продолжим периодически функции из $\hat{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$ на всю границу Γ_1 с периодом Γ_c и образуем пространство $\hat{H}_{per}^{-1/2}(\Gamma_1)$ Γ_c -периодических функций. Далее функции из $\hat{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$ будем отождествлять с их периодическими продолжениями на Γ_1 . Тем самым определим оператор $P : \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p) \rightarrow \hat{H}_{per}^{-1/2}(\Gamma_1)$, ставящий в соответствие функции из $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ периодическое продолжение $q_{per} \in \hat{H}_{per}^{-1/2}(\Gamma_1)$ на Γ_1 ее тривиального продолжения $q_0 \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$ на Γ_c .

Обозначим через $\hat{L}_2(\Gamma_c)$ подпространство функций из $L_2(\Gamma_c)$, имеющих носитель на $\bar{\Gamma}_p$. Используя (3.13), можно показать, что имеет место плотное вложение пространств $\hat{L}_2(\Gamma_c) \subset \hat{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$. Функции из $\hat{L}_2(\Gamma_c)$ можно рассматривать как Γ_c -периодические,

следовательно система функций $\exp[2\pi i(l_1 x_1/a_1 + l_2 x_2/a_2)]$, $l_1, l_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, является плотной в $\tilde{L}_2(\Gamma_c)$ [34]. Поэтому $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$ можно аппроксимировать с заданной точностью конечным отрезком ряда Фурье

$$q_f = \sum_{|l_1| \leq L_1} \sum_{|l_2| \leq L_2} c[l_1, l_2] \exp[2\pi i(l_1 x_1/a_1 + l_2 x_2/a_2)] \quad (7.5)$$

Для вычисления коэффициентов Фурье $c[l_1, l_2] \in \mathbb{Z}$ с помощью ДПФ введем сеточные функции. Построим на Γ_c регулярную (равномерную) сетку Υ_c , состоящую из $N_c = N_{c1} \cdot N_{c2}$ одноузловых прямоугольных граничных элементов нулевого порядка размеров $d_1 \times d_2$, где $d_i = a_i/N_{ci}$, $i = 1, 2$. Узлы Υ_c обозначим s_{nm} , $n = \overline{1, N_{c1}}$, $m = \overline{1, N_{c2}}$. Часть Υ_c , расположенную на Γ_p и содержащую $N = N_{p1} \cdot N_{p2}$ элементов, обозначим Υ_p . Из (7.4) следует, что $N_{pi} = N_{ci}/\chi_i$, $i = 1, 2$.

Далее векторы и матрицы будем обозначать большими латинскими буквами, а их элементы — соответствующими малыми латинскими буквами.

Введем на Υ_c сеточные функции (матрицы) нормальных напряжений и перемещений

$$\mathbf{Q}_c = [q_{nm}], \quad \mathbf{W}_c = [w_{nm}], \quad n = \overline{1, N_{c1}}, \quad m = \overline{1, N_{c2}} \quad (7.6)$$

и соответствующие им векторы

$$\mathbf{Q}_{cv} = \text{vec}(\mathbf{Q}_c), \quad \mathbf{W}_{cv} = \text{vec}(\mathbf{W}_c) \quad (7.7)$$

где $\text{vec}(\cdot)$ — оператор векторизации матрицы, преобразующий ее в вектор путем расположения ее столбцов друг под другом.

Введем также редукции сеточных функций на Υ_p

$$\mathbf{Q}_{pv} = \mathbf{R}_{pc} \mathbf{Q}_{cv}, \quad \mathbf{W}_{pv} = \mathbf{R}_{pc} \mathbf{W}_{cv} \quad (7.8)$$

где $\mathbf{R}_{pc}$ — прямоугольная матрица размеров $N \times N_c$, в каждой строке которой имеется ровно один ненулевой элемент, равный 1.

Обратные операции тривиального продолжения (дополнения нулевыми элементами) $\mathbf{Q}_{pv}$ и $\mathbf{W}_{pv}$ на Υ_c могут быть выполнены с помощью транспонированной матрицы $\mathbf{R}_{pc}^T$

$$\mathbf{Q}_{cv} = \mathbf{R}_{pc}^T \mathbf{Q}_{pv}, \quad \mathbf{W}_{cv} = \mathbf{R}_{pc}^T \mathbf{W}_{pv} \quad (7.9)$$

Известно [17, 18], что спектр сеточной функции является периодическим и представляет собой бесконечный ряд сдвинутых копий спектра аппроксимируемой функции. Расстояние в частотной области между соседними копиями спектра равно частоте дискретизации $\omega_0 = 2\pi/d$, где d — шаг сетки. Для исключения эффекта наложения частот и возможности восстановления периодической функции по ее сеточной аппроксимации будем полагать, что число гармоник в (7.5) и количество узлов сетки Υ_c удовлетворяют условиям

$$L_i < N_{ci}/2, \quad i = 1, 2 \quad (7.10)$$

вытекающим из теоремы Котельникова–Шеннона [17, 18].

Введем матрицы Фурье $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ порядков N_{c1} и N_{c2} соответственно

$$\mathbf{F}_1 = (N_{c1})^{-1/2} [f_{nm}], \quad f_{nm} = \omega_1^{(n-1)(m-1)}, \quad \omega_1 = \exp(-2\pi i/N_{c1}) \quad (7.11)$$

$$\mathbf{F}_2 = (N_{c2})^{-1/2} [f_{nm}], \quad f_{nm} = \omega_2^{(n-1)(m-1)}, \quad \omega_2 = \exp(-2\pi i/N_{c2}) \quad (7.12)$$

Матрицы Фурье обратимы и при этом обратные матрицы имеют вид

$$\mathbf{F}_1^{-1} = \mathbf{F}_1^*, \quad \mathbf{F}_2^{-1} = \mathbf{F}_2^* \quad (7.13)$$

где $\mathbf{F}_1^*, \mathbf{F}_2^*$ — эрмитово сопряженные матрицы.

Используя матрицы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, вычислим образы Фурье $\tilde{\mathbf{Q}}_c$ и $\tilde{\mathbf{W}}_c$ сеточных функций нормальных напряжений и перемещений

$$\tilde{\mathbf{Q}}_c = \mathbf{F}_2 \mathbf{Q}_c \mathbf{F}_1, \quad \tilde{\mathbf{W}}_c = \mathbf{F}_2 \mathbf{W}_c \mathbf{F}_1 \quad (7.14)$$

Для соответствующих матриц $\mathbf{Q}_c$ и $\mathbf{W}_c$ векторов формулы (7.14) примут вид

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{cv} = (\mathbf{F}_2 \otimes \mathbf{F}_1) \mathbf{Q}_{cv}, \quad \tilde{\mathbf{W}}_{cv} = (\mathbf{F}_2 \otimes \mathbf{F}_1) \mathbf{W}_{cv} \quad (7.15)$$

где символом $\otimes$ обозначено кронекерово произведение матриц $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_1$.

Сеточные функции $\mathbf{Q}_c$ и $\mathbf{W}_c$ являются вещественными, поэтому из свойств двумерного ДПФ [17, 18] следует, что элементы матриц $\tilde{\mathbf{Q}}_c$ и $\tilde{\mathbf{W}}_c$ удовлетворяют для $n_1 = \overline{2, N_{c1}}$ и $n_2 = \overline{2, N_{c2}}$ условиям

$$\begin{aligned} \tilde{q}(n_1, n_2) &= \tilde{q}^*(N_{c1} - n_1 + 2, N_{c2} - n_2 + 2) \\ \tilde{w}(n_1, n_2) &= \tilde{w}^*(N_{c1} - n_1 + 2, N_{c2} - n_2 + 2) \end{aligned} \quad (7.16)$$

Для сеточных функций соотношение (7.3) примет вид

$$\tilde{\mathbf{W}}_c = \tilde{\mathbf{K}}_s \circ \tilde{\mathbf{Q}}_c \quad (7.17)$$

где символом $\circ$ обозначено адамарово произведение матриц $\tilde{\mathbf{K}}_s$ и $\tilde{\mathbf{Q}}_c$.

Элементы матрицы $\tilde{\mathbf{K}}_s$ с учетом (7.2) и (7.16) для индексов n_1 и n_2 из диапазонов $1 \leq n_1 \leq N_{c1}/2 + 1$ и $1 \leq n_2 \leq N_{c2}/2 + 1$ вычисляются по формуле

$$\tilde{k}(n_1, n_2) = S_s(2\pi h(((n_1 - 1)/a_1)^2 + ((n_2 - 1)/a_2)^2)^{1/2}) \quad (7.18)$$

Остальные элементы матрицы $\tilde{\mathbf{K}}_s$ определяются с помощью равенств

$$\tilde{k}(n_1, n_2) = \tilde{k}(N_{c1} - n_1 + 2, N_{c2} - n_2 + 2), \quad n_1 = \overline{2, N_{c1}}, \quad n_2 = \overline{2, N_{c2}} \quad (7.19)$$

Несложно показать, что элемент

$$\tilde{k}(1, 1) = \lim_{t \rightarrow 0} S_s(t) = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)h}{(1 - \nu)E} \quad (7.20)$$

представляет собой коэффициент податливости рассматриваемого упругого слоя для случая приложения равномерной нормальной нагрузки по всей границе Γ_1 .

Из (7.7)–(7.9), (7.14)–(7.15) и (7.17) следует, что сеточная аппроксимация $\mathbf{G}_{sv} : \mathbf{Q}_{pv} \mapsto \mathbf{W}_{pv}$ оператора Пуанкаре–Стеклова G_s имеет вид

$$\mathbf{G}_{sv} = \mathbf{R}_{pc} (\mathbf{F}_2 \otimes \mathbf{F}_1)^* \tilde{\mathbf{K}}_{sv} \circ (\mathbf{F}_2 \otimes \mathbf{F}_1) \mathbf{R}_{pc}^T \quad (7.21)$$

где $\tilde{\mathbf{K}}_{sv} = \mathbf{vec}(\tilde{\mathbf{K}}_s)$.

Учитывая, что все элементы $\tilde{\mathbf{K}}_{sv}$ положительны, можно показать, что $\mathbf{G}_{sv}$ является симметричной положительно-определенной квадратной матрицей порядка N . При численной реализации формировать матрицу $\mathbf{G}_{sv}$ в явном виде не требуется, достаточно лишь программно реализовать вычисление произведений каждой из матриц в правой части (7.21) на векторы. Учитывая, что матрицы $\mathbf{R}_{pc}$ и $\mathbf{R}_{pc}^T$ содержат только N ненулевых элементов, причем равных 1, вычисление произведений этих матриц на векторы сводится к выполнению N операций присваивания. Умножение на вектор $\tilde{\mathbf{K}}_{sv}$ требует выполнения N_c операций умножения. Для вычисления произведений мат-

риц $\mathbf{F}_2 \otimes \mathbf{F}_1$ и $(\mathbf{F}_2 \otimes \mathbf{F}_1)^*$ на векторы целесообразно использовать алгоритмы БПФ. Поэтому далее будем полагать $N_{c1} = 2^{n_1}$, $N_{c2} = 2^{n_2}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. В этом случае общее число операций для выполнения одного преобразования имеет порядок $O(N_c \log_2 N_c)$ [17, 18].

Далее для аппроксимации задачи (6.5) применим гранично-элементный подход [35–37]. Для вычисления билинейной $g(\cdot, \cdot)$ и линейной $\phi(\cdot)$ форм, определенных соответственно формулами (5.2) и (6.4), используем кубатурную формулу – прямое произведение квадратурных формул прямоугольников, узлы которой совпадают с узлами сетки Υ_p . Тем самым определяются аппроксимирующие билинейная $g_h(\cdot, \cdot)$ и линейная $\phi_h(\cdot)$ формы в пространстве $\mathbb{R}^N$

$$g_h(\mathbf{P}_{pv}, \mathbf{Q}_{pv}) = \mathbf{P}_{pv}^T \mathbf{G}_{sv} \mathbf{Q}_{pv} d_1 d_2, \quad \phi_h(\mathbf{P}_{pv}) = \mathbf{\Phi}_v^T \mathbf{P}_{pv} d_1 d_2 \quad (7.22)$$

где $\mathbf{\Phi}_v = \text{vec}(\mathbf{\Phi}) \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{\Phi}$ – сеточная аппроксимация на Υ_p функции $\Phi(x_1, x_1)$, описывающей форму основания штампа.

При аппроксимации множества статически допустимых нормальных напряжений Σ , определенного формулой (6.1), применяется комбинированный подход. Для аппроксимации ограничений в виде неравенств используется коллокационный метод, а при аппроксимации ограничений в виде равенств – указанная выше кубатурная формула. В результате получается замкнутое выпуклое множество статически допустимых узловых нормальных напряжений

$$\Sigma_h = \left\{ \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^N : q_n \leq 0, n \in I_N = \{1, 2, \dots, N\}; \sum_{i=1}^N \lambda_i q_i = F_3; \right. \\ \left. \sum_{i=1}^N \vartheta_i q_i = M_1; \sum_{i=1}^N \theta_i q_i = -M_2 \right\} \quad (7.23)$$

Коэффициенты λ_i , ϑ_i и θ_i вычисляются по формулам

$$\lambda_i = d_1 d_2, \quad \vartheta_i = d_1 d_2 (x_2^i - x_2^c), \quad \theta_i = d_1 d_2 (x_1^i - x_1^c), \quad i \in I_N \quad (7.24)$$

где x_1^i, x_2^i – координаты i -го узла сетки Υ_p .

В результате для задачи минимизации (6.5) получим сеточную аппроксимацию – задачу квадратичного программирования: найти сеточную функцию нормальных напряжений $\mathbf{Q}_{pv} \in \mathbb{R}^N$ такую, что

$$J_h(\mathbf{Q}_{pv}) = \min_{\mathbf{Q} \in \Sigma_h} \left\{ J_h(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{G}_{sv} \mathbf{Q} d_1 d_2 - \mathbf{\Phi}^T \mathbf{Q} d_1 d_2 \right\} \quad (7.25)$$

Отметим, что размерность задачи (7.25) равна N – количеству узлов сетки Υ_p на Γ_p и не зависит от размера вычислительной области Γ_c , т.е. от выбора коэффициентов расширения вычислительной области χ_1 и χ_2 .

8. Решение задачи квадратичного программирования. Одна из сложностей, возникающих при численном решении задачи (7.25), состоит в наличии ограничений в виде равенств, содержащих все переменные задачи. Аналогично [25] для упрощения вида ограничений введем линейное преобразование переменных $\mathbf{Z} = \mathbf{CQ}$ такое, что

$$z_k = \sum_{i=1}^N \lambda_i q_i, \quad z_m = \sum_{i=1}^N \vartheta_i q_i, \quad z_l = \sum_{i=1}^N \theta_i q_i, \quad I_1 = \{k, m, l\} \subset I_N \quad (8.1)$$

$$z_n = q_n, \quad n \in I_0 = I_N \setminus I_1 \quad (8.2)$$

Выбор индексов k, m и l в общем случае произволен при условии, что соответствующие компоненты вектора решения $\mathbf{Q}_{pv}$ отличны от нуля, т.е. выполняются неравенства $q_k < 0$, $q_m < 0$ и $q_l < 0$. При решении конкретной задачи такие индексы (номера узлов) могут быть выбраны из априорных соображений. Корректность сделанного выбора проверяется путем апостериорного анализа полученного решения.

Нетрудно видеть, что матрица $\mathbf{C}$ является невырожденной. Выражения для элементов матриц $\mathbf{C}^{-1}$ и $\mathbf{C}^{-T}$ несложно получить в явном виде, однако формировать матрицы в явном виде не требуется, достаточно лишь программно реализовать вычисление произведений этих матриц на векторы.

В результате преобразования переменных (8.1)–(8.2) получим эквивалентную (7.25) задачу квадратичного программирования: найти элемент $\mathbf{Z}_p \in V_z$ такой, что

$$J_z(\mathbf{Z}_p) = \min_{\mathbf{Z} \in V_z} \left\{ J_z(\mathbf{Z}) = \frac{1}{2} \mathbf{Z}^T \mathbf{A}_z \mathbf{Z} - \mathbf{B}_z^T \mathbf{Z} \right\} \quad (8.3)$$

где

$$\mathbf{A}_z = \mathbf{C}^{-T} \mathbf{G}_{sv} \mathbf{C}^{-1}, \quad \mathbf{B}_z = \mathbf{C}^{-T} \mathbf{\Phi}_v \quad (8.4)$$

$$V_z = \left\{ \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^N : z_n \leq 0, n \in I_0; z_k = F_3, z_m = M_1, z_l = -M_3, k, m, l \in I_1 \right\} \quad (8.5)$$

Задача (8.3) является задачей квадратичного программирования с простыми ограничениями. Учитывая, что решение задачи (7.25) не зависит от значения множителя $d_1 d_2$ — площади граничного элемента, в (8.3) этот множитель опущен.

Из (8.4) следует, что матрицы $\mathbf{G}_{sv}$ и $\mathbf{A}_z$ подобны, поэтому матрица Гессе $\mathbf{A}_z$ минимизируемой функции $J_z(\mathbf{Z})$ также является симметричной положительно-определенной матрицей.

Для численного решения задачи квадратичного программирования (8.3) в настоящей работе используется вариант МСГ, подробно рассмотренный в [25] при решении задач дискретного контакта для упругой полуплоскости.

9. Численные результаты. Разработанный вычислительный алгоритм реализован на языке FORTRAN с применением программного пакета для разработчиков NVIDIA HPC SDK. Для выполнения двумерных ДПФ использовалась библиотека cuFFT, позволяющая с помощью технологии CUDA производить вычисления на графических процессорах.

Для верификации алгоритма и разработанного программного обеспечения проведено сравнение численных решений ряда задач дискретного контакта, в частности, рассмотренных ниже задач для штампов с регулярным поверхностным рельефом с решениями, полученными с помощью известного алгоритма [24]. Учитывая возможности последнего, при постановке контактных задач использовалось лишь первое из уравнений равновесия штампа (2.5) и полагалось $\varphi_1 = \varphi_1 = 0$. Проведенные расчеты показали, что среднеквадратичные относительные расхождения решений (сеточных функций нормальных напряжений) не превышают 10^{-5} .

Кроме того, при тестировании разработанного алгоритма получены решения задач о вдавливании в упругий слой штампа, форма основания которого описывается функцией

$$\Phi(x_1, x_2) = \alpha_1 b_1 (x_1/b_1)^2 + \alpha_2 b_2 (x_2/b_2)^2 \quad (9.1)$$

где b_1, b_2 — размеры области контакта Γ_p , $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ — безразмерные параметры.

Несложно показать аналитически, что в случае нагружения такого штампа с эксцентриситетом $(e_1 b_1, e_2 b_2)$ относительно точки начального контакта $x_1 = x_2 = 0$ распределение нормальных напряжений будет соответствовать распределению при отсут-

ствии эксцентриситета, смещенному вдоль осей координат Ox_1 и Ox_2 соответственно на e_1b_1 и e_2b_2 , осадка штампа δ_3 уменьшится на $\alpha_1b_1e_1^2 + \alpha_2b_2e_2^2$, а сам штамп повернется на углы $\varphi_1 = -2\alpha_2e_2$ и $\varphi_2 = 2\alpha_1e_1$. Проведенные расчеты подтвердили эти выводы.

Далее приведен анализ результатов решения задач дискретного контакта, в которых область фактического контакта состояла из совокупности отдельных пятен контакта. Рассматривались задачи для гладких прямоугольных в плане штампов с регулярным поверхностным рельефом, состоящим из $K = K_1 \times K_2$ микровыступов. Номинальная область контакта полагалась равной $\Gamma_p = \{0 \leq x_1 \leq b_1, 0 \leq x_2 \leq b_2, x_3 = h\}$. Форма оснoвания штампов задавалась функцией

$$\Phi(x_1, x_2) = \Phi^*(x_1, x_2) + \Psi_1(\xi_1)/K_1 + \Psi_2(\xi_2)/K_2 \quad (9.2)$$

где $\Phi^*(x_1, x_2)$ – выпуклая функция, определяющая макроформу штампа; $\Psi_1(\xi_1)$, $\Psi_2(\xi_2)$ – строго выпуклые функции, характеризующие форму микровыступов; $\xi_1 = \{K_1x_1/b_1\}$, $\xi_2 = \{K_2x_2/b_2\}$ – “быстрые” координаты, $\{\cdot\}$ – дробная часть числа.

Для заданной тройки функций $\Phi^*(x_1, x_2)$, $\Psi_1(\xi_1)$ и $\Psi_2(\xi_2)$ формула (9.2) определяет двухпараметрическое семейство штампов $\Xi(K_1, K_2)$, в качестве параметров которого выступают числа микровыступов K_1 и K_2 вдоль сторон штампа. Штамп, принадлежащий к одному семейству, имеют одинаковую макроформу $\Phi^*(x_1, x_2)$, а поперечные сечения их микровыступов, параллельные соответствующим координатным плоскостям, являются подобными.

Расчеты выполнялись для следующего семейства жестких штампов:

$$\Phi^*(x_1, x_2) = \alpha_1b_1(2x_1/b_1 - 1)^{m_1} + \alpha_2b_2(2x_2/b_2 - 1)^{m_2} \quad (9.3)$$

$$\Psi_1(\xi_1) = \beta_1b_1(2\xi_1 - 1)^{n_1}, \quad \Psi_2(\xi_2) = \beta_2b_2(2\xi_2 - 1)^{n_2} \quad (9.4)$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\beta_1, \beta_2 > 0$, $m_1, m_2, n_1, n_2 > 1$ – безразмерные параметры.

Компоненты главного вектора и главного момента внешних сил, приложенных к штампу, задавались в виде:

$$F_3 = -fb_1b_2E^*, \quad M_1 = e_2F_3b_2, \quad M_2 = -e_1F_3b_1 \quad (9.5)$$

где $E^* = E/(1 - \nu^2)$ – приведенный модуль упругости; $f > 0$ – безразмерный параметр; e_1, e_2 – безразмерные параметры, характеризующие эксцентриситет равнодействующей внешней нагрузки относительно центра приведения $\mathbf{x}^c = (0.5b_1, 0.5b_2, h)$. При проведении расчетов значения параметров внешней нагрузки f , e_1 и e_2 выбирались таким образом, чтобы решение контактной задачи существовало и пятна контакта отдельных микровыступов оставались изолированными друг от друга.

Введем на множестве микровыступов сеточные координаты (i, j) , $i = 1, K_1$, $j = 1, K_2$, и обозначим через Γ_{ij} часть Γ_p , соответствующую микровыступу с координатами (i, j) . Отметим, что каждый штамп рассматриваемого семейства $\Xi(K_1, K_2)$ имеет свою собственную систему сеточных координат, определяемую параметрами K_1 и K_2 . Далее для каждого штампа введем следующие пары сеточные функций:

– значений $\mathbf{P} = [p_{ij}]$ и координат $\mathbf{X}_p = [(x_1, x_2)_{ij}]$ максимумов контактного давления на микровыступах

$$p_{ij} = \max_{(\xi_1, \xi_2) \in \Gamma_{ij}} p(\xi_1, \xi_2), \quad (x_1, x_2)_{ij} = \arg \max_{(\xi_1, \xi_2) \in \Gamma_{ij}} p(\xi_1, \xi_2) \quad (9.6)$$

– нормализованных контактных усилий $\mathbf{R} = [r_{ij}]$ и координат $\mathbf{X}_r = [(x_1, x_2)_{ij}]$ точек их приложения на микровыступах

$$r_{ij} = \frac{K_1 K_2}{|F_3|} \int_{\Gamma_{ij}} p d\xi_1 d\xi_2, \quad \int_{\Gamma_{ij}} p(\xi_1 - x_1) d\xi_1 d\xi_2 = 0, \quad \int_{\Gamma_{ij}} p(\xi_2 - x_2) d\xi_1 d\xi_2 = 0 \quad (9.7)$$

– относительных величин площадей $\mathbf{S} = [s_{ij}]$ и координат $\mathbf{X}_s = [(x_1, x_2)_{ij}]$ центров тяжести пятен фактического контакта на микровыступах

$$s_{ij} = \frac{1}{\text{meas } \Gamma_{ij}} \int_{\Gamma_{ij}} [p > 0] d\xi_1 d\xi_2, \quad \int_{\Gamma_{ij}} [p > 0](\xi_1 - x_1) d\xi_1 d\xi_2 = 0, \quad \int_{\Gamma_{ij}} [p > 0](\xi_2 - x_2) d\xi_1 d\xi_2 = 0 \quad (9.8)$$

где $[\cdot]$ – скобка Айверсона (функция равная 1 для истинного аргумента и равная 0 в противном случае).

Для каждой пары функций $\{\mathbf{P}, \mathbf{X}_p\}$, $\{\mathbf{R}, \mathbf{X}_r\}$ и $\{\mathbf{S}, \mathbf{X}_s\}$ с помощью некоторого оператора интерполяции построим на Γ_p непрерывные функции $p(x_1, x_2)$, $r(x_1, x_2)$ и $s(x_1, x_2)$, называемые далее соответственно огибающей контактного давления, огибающей нормализованных контактных усилий и огибающей относительных величин фактических площадей контакта микровыступов.

В результате обработки результатов многочисленных вычислительных экспериментов установлена следующая закономерность: если условия нагружения штампов таковы, что пятна контакта отдельных микровыступов остаются изолированными друг от друга, то для двухпараметрического семейства штампов $\Xi(K_1, K_2)$ существуют единая огибающая контактного давления $\tilde{p}(x_1, x_2)$, единая огибающая нормализованных контактных усилий $\tilde{r}(x_1, x_2)$ и единая огибающая относительных величин фактических площадей контакта $\tilde{s}(x_1, x_2)$ микровыступов, форма и положение которых зависят от параметров f , e_1 и e_2 внешней нагрузки, а также отношения размеров области контакта Γ_p к толщине упругого слоя h . В качестве $\tilde{p}(x_1, x_2)$, $\tilde{r}(x_1, x_2)$ и $\tilde{s}(x_1, x_2)$ можно выбирать соответственно огибающие $p(x_1, x_2)$, $r(x_1, x_2)$ и $s(x_1, x_2)$ для некоторого “базового” штампа рассматриваемого семейства $\Xi(K_1, K_2)$, например, штампа с наибольшим числом микровыступов $K = K_1 \cdot K_2$ в проведенной серии расчетов. Альтернативный подход к построению единых огибающих состоит в применении некоторой процедуры осреднения данных по всем штампам рассматриваемого семейства $\Xi(K_1, K_2)$.

В качестве примера в табл. 1 приведены среднеквадратичные относительные отклонения

$$\varepsilon_p = \|p - \tilde{p}\|_2 / \|\tilde{p}\|_2, \quad \varepsilon_r = \|r - \tilde{r}\|_2 / \|\tilde{r}\|_2, \quad \varepsilon_s = \|s - \tilde{s}\|_2 / \|\tilde{s}\|_2 \quad (9.9)$$

для семейства штампов $\Xi(K_1, K_2)$ при следующих значениях параметров: $\alpha_1 = \alpha_2 = 3 \times 10^{-5}$, $\beta_1 = \beta_2 = 10^{-4}$, $m_1 = m_2 = 2$, $n_1 = n_2 = 4$, $b_1 = b_2 = b$. В качестве базового выбирался штамп со 128×128 микровыступами. Параметры внешней нагрузки в (9.5) полагались следующими: $f = 2 \times 10^{-5}$, $e_1 = 0.05$ и $e_2 = 0$. Толщина упругого слоя принималась равной $h = b/5$.

Сеточные нормы $\|\cdot\|_2$ в (9.9) вычислялись соответственно в узлах сеток $\mathbf{X}_p$, $\mathbf{X}_r$ и $\mathbf{X}_s$ для каждого штампа рассматриваемого семейства. Интерполяция функций $\tilde{p}(x_1, x_2)$, $\tilde{r}(x_1, x_2)$ и $\tilde{s}(x_1, x_2)$ производилась с помощью метода обратно взвешенных расстояний.

Таблица 1. Среднеквадратичные относительные отклонения ε_p , ε_r и ε_s для семейства штампов $\Xi(K_1, K_2)$

$K_1 \times K_2$	ε_p	ε_r	ε_s
256×64	0.0099	0.0079	0.0220
256×32	0.0264	0.0095	0.0230
256×16	0.0334	0.0184	0.0377
256×8	0.0409	0.0337	0.0523
128×64	0.0051	0.0061	0.0149
128×32	0.0271	0.0094	0.0225
128×16	0.0359	0.0185	0.0369
128×8	0.0426	0.0338	0.0536
64×64	0.0060	0.0099	0.0140
64×32	0.0225	0.0116	0.0135
64×16	0.0308	0.0198	0.0285
64×8	0.0422	0.0359	0.0455
32×32	0.0323	0.0145	0.0217
32×16	0.0423	0.0216	0.0305
32×8	0.0453	0.0371	0.0358
16×16	0.0427	0.0269	0.0307
16×8	0.0285	0.0427	0.0539
8×8	0.0163	0.0556	0.0351

В табл. 2 приведены аналогичные данные для семейства штампов $\Xi(K_1, K_2)$ при следующих значениях параметров: $m_1 = 2$, $m_2 = 4$, $n_1 = 4$, $n_2 = 2$, $e_1 = e_2 = 0.05$, $h = b/2$. Значения остальных параметров принимались такими же, как и для табл. 1.

Отметим, что при проведении расчетов необходимое количество $N = N_{p1} \cdot N_{p2}$ граничных элементов определялось путем сравнения решений, полученных на вложенных сетках при их двукратном последовательном измельчении. При решении рассмотренных выше задач для штампов с регулярным поверхностным рельефом каждый микровыступ Γ_{ij} аппроксимировался сеткой из 64×64 граничных элементов. Наибольшее количество элементов сетки для базового штампа со 128×128 микровыступами составляло $2^{26} = 67\,108\,864$ граничных элемента.

10. Заключение. Для решения задач дискретного контакта упругого слоя и жесткого штампа с заранее неизвестными площадками фактического контакта в настоящей работе применяется вариационный подход. Построено граничное вариационное неравенство с использованием оператора Пуанкаре—Стеклова, отображающего на части границы упругого слоя нормальные напряжения в нормальные перемещения. Получена эквивалентная задача минимизации граничного функционала на множестве статически допустимых контактных напряжений.

Оператор Стеклова—Пуанкаре для упругого слоя строится с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье, поэтому при аппроксимации этого оператора используется двумерное ДПФ. Для численной реализации прямого и обратного ДПФ применяются алгоритмы БПФ.

Таблица 2. Среднеквадратичные относительные отклонения ε_p , ε_r и ε_s для семейства штампов $\Xi(K_1, K_2)$

$K_1 \times K_2$	ε_p	ε_r	ε_s
256 × 64	0.0284	0.0152	0.0233
256 × 32	0.0388	0.0181	0.0365
256 × 16	0.0524	0.0271	0.0535
256 × 8	0.0639	0.0349	0.0666
128 × 64	0.0151	0.0088	0.0149
128 × 32	0.0334	0.0145	0.0318
128 × 16	0.0496	0.0246	0.0500
128 × 8	0.0617	0.0319	0.0633
64 × 64	0.0089	0.0095	0.0086
64 × 32	0.0294	0.0134	0.0235
64 × 16	0.0456	0.0236	0.0423
64 × 8	0.0588	0.0318	0.0580
32 × 32	0.0336	0.0154	0.0226
32 × 16	0.0448	0.0246	0.0387
32 × 8	0.0500	0.0325	0.0523
16 × 16	0.0359	0.0270	0.0289
16 × 8	0.0410	0.0321	0.0360
8 × 8	0.0112	0.0396	0.0286

В результате аппроксимации вариационной формулировки с использованием гранично-элементного подхода получена задача квадратичного программирования с ограничениями в виде равенств и неравенств. Для численного решения этой задачи использован алгоритм на основе МСГ [25], учитывающий специфику множества ограничений и позволяющий получать решения контактных задач для случаев внецентренного нагружения штампа, когда необходимо учитывать его повороты.

Построены двухпараметрические семейства прямоугольных в плане штампов с поверхностным рельефом, в качестве параметров которого выступают числа микровыступов вдоль сторон штампа. Штампы, принадлежащие к одному семейству, имеют одинаковую макроформу, а поперечные сечения их микровыступов, параллельные соответствующим координатным плоскостям, являются подобными. В результате вычислительных экспериментов установлено существование для каждого семейства штампов единой огибающей контактного давления, единой огибающей нормализованных контактных усилий и единой огибающей относительных величин фактических площадей контакта микровыступов. Форма и положение этих огибающих для семейства штампов зависят от параметров внешней нагрузки и отношения размеров номинальной области контакта к толщине слоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
2. Аргатов И.И., Дмитриев Н.Н. Основы теории упругого дискретного контакта. СПб.: Политехника, 2003. 233 с.

3. *Popov V.L.* Contact Mechanics and Friction. Physical Principles and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. 362 p. = *Попов В.Л.* Механика контактного взаимодействия и физика трения. От нанотрибологии до динамики землетрясений. М.: Физматлит, 2013. 352 с.
4. *Barber J.R.* Contact Mechanics. Cham: Springer, 2018. 585 p.
5. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
6. *Johnson K.L.* Contact Mechanics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. 452 p. = *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
7. *Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y.* Development of discrete contact mechanics with applications to study the frictional interaction of deformable bodies // Mech. Solids. 2020. V. 55. P. 1441–1462. <https://doi.org/10.3103/S0025654420080099>
8. *Kravchuk A.S., Neittaanmäki P.J.* Variational and Quasi-Variational Inequalities in Mechanics. Dordrecht: Springer, 2007. 329 p.
9. *Wriggers P.* Computational Contact Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 2006. 518 p.
10. *Yastrebov V.A.* Numerical Methods in Contact Mechanics. New York: ISTE/Wiley, 2013. 416 p.
11. *Eck C., Jarušek J., Krbeč M.* Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems. New York: CRC Press, 2005. 398 p.
12. *Safonea M., Matei A.* Mathematical Models in Contact Mechanics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012. 280 p.
13. *Capatina A.* Variational Inequalities and Frictional Contact Problems. Cham: Springer, 2014. 235 p.
14. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
15. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
16. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Изд-во “Факториал”, 1998. 299 с.
17. *Brigham E.O.* The Fast Fourier Transform and Its Applications. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1988. 448 p.
18. *Jain A.K.* Fundamentals of Digital Image Processing. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989. 569 p.
19. *Wang Q.J., Zhu D.* Interfacial Mechanics: Theories and Methods for Contact and Lubrication. Boca Raton: CRC Press, 2019. 636 p.
20. *Wang Q.J., Sun L., Zhang X., Liu S., Zhu D.* FFT-Based Methods for Computational Contact Mechanics // Front. Mech. Eng. 2020. V. 6. № 61. P. 92–113. <https://doi.org/10.3389/fmech.2020.00061>
21. *Поляк Б.Т.* Метод сопряженных градиентов в задачах на экстремум // Ж. выч. мат. мат. физ. 1969. Т. 9. № 4. С. 807–821.
22. *Dostál Z.* Optimal Quadratic Programming Algorithms. With Applications to Variational Inequalities. New York: Springer, 2009. 284 p.
23. Scalable Algorithms for Contact Problems / Ed. by *Z. Dostál, T. Kozubek, M. Sadowská, V. Vondrák*. New York: Springer, 2016. 340 p.
24. *Polonsky I.A., Keer L.M.* A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques // Wear. 1999. V. 231. P. 206–219. [https://doi.org/10.1016/S0043-1648\(99\)00113-1](https://doi.org/10.1016/S0043-1648(99)00113-1)
25. *Бобылев А.А.* Применение метода сопряженных градиентов к решению задач дискретного контакта для упругой полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 2. С. 154–172. <https://doi.org/10.31857/S0572329922020052>
26. *Lions J.L., Magenes E.* Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1972. 360 p. = *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 372 с.
27. *McLean W.* Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. 357 p.
28. *Sauter S.A., Schwab C.* Boundary Element Methods. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011. 652 p.
29. *Hsiao G.C., Wendland W.L.* Boundary Integral Equations. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. 620 p.
30. *Хлуднев А.М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010. 252 с.
31. *Khudnev A.M., Kovtunenkov V.A.* Analysis of Cracks in Solids. Boston, Southampton: WIT-Press, 2000. 386 p.

-
32. *Sneddon I.N.* Fourier transforms. NY etc.: McGraw-Hill, 1951. 542 p. = *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М.: ИЛ, 1955. 667 с.
 33. *Sanchez-Palencia E.* Non-homogeneous Media and Vibration Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1980. 398 p. = *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
 34. *Serov V.* Fourier Series, Fourier Transform and Their Applications to Mathematical Physics. Cham: Springer, 2017. 534 p.
 35. *Gwinner J., Stephan E.P.* Advanced Boundary Element Methods. Treatment of Boundary Value, Transmission and Contact Problems. Cham: Springer, 2018. 652 p.
 36. *Rjasanow S., Steinbach O.* The Fast Solution of Boundary Integral Equations. New York: Springer, 2007. 284 p.
 37. *Steinbach O.* Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems: Finite and Boundary Elements. New York: Springer, 2008. 386 p.

УДК 539.3

**ЦИФРОВОЕ СРЕДСТВО ПРОИЗВОДСТВА – ПАКЕТ ДЛЯ ПРОЧНОСТНОГО
ИНЖЕНЕРНОГО АНАЛИЗА КАК ИНСТРУМЕНТ ТРАНСФЕРА
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУЧНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ В ПРОМЫШЛЕННОСТЬ
НА ПРИМЕРЕ ПАКЕТА ФИДЕСИС И ТЕОРИИ МНОГОКРАТНОГО
НАЛОЖЕНИЯ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ**

© 2023 г. В. А. Левин^{а,*}

^аМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия

*e-mail: v.a.levin@mail.ru

Поступила в редакцию 18.04.2022 г.

После доработки 26.04.2022 г.

Принята к публикации 28.04.2022 г.

Отмечается, что значительно автоматизируются интеллектуальные операции при проектировании новых материалов (особенно метаматериалов, умных материалов, композитов), новых изделий, сооружений, технологических операций (включая аддитивное производство), и поэтому существенно изменилась роль специалистов в области механики деформируемого твердого тела (МДТТ). Появилась возможность полностью автоматизировать процесс решения дифференциальных уравнений, описывающих постановку задачи, включая связанные. Это осуществляется с использованием пакета для инженерного анализа (CAE) или их комбинаций. Расчетчик, конструктор, исследователь задает конструкцию (ее CAD-модель) и внешние усилия (в терминах МДТТ граничные условия), описание материалов (в терминах МДТТ определяющие соотношения), и автоматически проводится расчет.

Отмечается, что востребованными остаются, в частности, формулировка механических и математических постановок для новых типов задач (преднагружение, междисциплинарные задачи); построение определяющих соотношений (моделей материалов) для новых материалов (композиты, метаматериалы, умные материалы) и модели с использованием дополнительных соотношений для их последующей реализации в CAE. Также востребовано нахождение точных решений для валидации CAE.

На примере теории многократного наложения больших деформаций и реализации этой теории и сопутствующих ей результатов в промышленном полнофункциональном пакете Фидесис демонстрируется возможность реализации результатов МДТТ для промышленности.

Ключевые слова: пакет инженерного анализа, многократное наложение больших деформаций, метаматериалы, композиты, аддитивные технологии, локализация пластических деформаций

DOI: 10.31857/S0572329922600207, EDN: DFPXCA

1. Введение. В условиях Индустрии 4.0 (и начинающегося перехода к Индустрии 5.0), когда автоматизируются не только физические, но и интеллектуальные операции при проектировании новых материалов (особенно метаматериалов, умных материалов, композитов), новых изделий, сооружений, технологических операций (включая аддитивное производство) существенно изменилась роль специалистов в области ме-

Таблица 1. Изменения при практическом решении задачи МДТТ и теории прочности после внедрения CAE в расчетную практику

	До 1995 г. — до внедрения CAE в расчетную практику	После 1995 — после внедрения CAE в расчетную практику
1	Механическая постановка задачи	Механическая постановка задачи (CAD-модель, материал, внешние воздействия)
2	Математическая постановка задачи (в общем случае — система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с граничными и начальными условиями)	Считается, что общая математическая постановка задачи есть внутри пакета и автоматически адаптируется под конкретную задачу
3	Решение системы дифференциальных уравнений (обычно одним из методов для получения приближенного решения с тем или иным обоснованием единственности и сходимости)	Расчет в пакете (обычно МКЭ), оценка инженерной сходимости средствами пакета [3–8]
4	Оценка НДС, на ее основе в соответствии с выбором критерия выделения “опасных областей”	Получение (в любом виде; обычно графическое, включая 3D) полей параметров НДС и практически автоматический вывод об “опасных областях” в соответствии с выбранными критериями

ханики деформируемого твердого тела (МДТТ). Следует отметить, что МДТТ исторически была основой для проведения поверочных прочностных расчетов при проектировании новых изделий и принятия решения о ресурсе изделия на основе данных мониторинга в процессе эксплуатации.

Появилась возможность полностью автоматизировать процесс решения дифференциальных уравнений, описывающих постановку задачи, включая связанные. Эту автоматизацию выполняют с использованием пакета для инженерного анализа, который является цифровым средством производства [1, 2] (CAE — Computer-aided engineering) или их комбинаций. И поэтому расчетчик, конструктор, исследователь задает конструкцию (ее CAD-модель) и внешние усилия (в терминах МДТТ граничные условия), описание материалов (в терминах МДТТ определяющие соотношения) и автоматически проводится расчет, если выбрана теория прочности, то определяются и “потенциальные зоны разрушения” при закритическом сценарии нагружения. То есть одна из основных функций расчетчика, исследователя автоматизирована (табл. 1).

Таким образом, произошли значительные изменения в востребованности результатов ученых-механиков как в фундаментальной, так и в прикладной науке (особенно с учетом того, что практически общепринятыми стали сквозное проектирование изделия и унификация методик проектирования, создание “цифровых двойников”, оцифровка имеющихся технических архивов и вовлечение их в моделирование):

1. С развитием промышленных пакетов для моделирования прочности механики перестали самостоятельно получать численное решение. Осталась формулировка изменений, которые вносятся в механическую модель (по сравнению со стандартной моделью), и разработка небольшого дополнения к пакету на исследовательском уровне, обычно на языке пакета (п. 4.1). Отметим, что это касается и случая использования компьютерной алгебры для решения исследовательских задач [9–13], например, при нахождении точных и приближенных аналитических решений [13–15]. Конечно, метод и алгоритм решения в этом случае выбирает исследователь.

2. С развитием использования промышленных пакетов при сквозном проектировании изделия и унификацией методик проектирования стали не востребованы работы ученых-механиков, за исключением “острых качественных решений” для описания проблемы и путей ее решения.

Таблица 2. Свойства горной породы и насыщающей жидкости

Модуль Юнга	1 ГПа
Коэффициент Пуассона	0.25
Когезия	2 ГПа
Угол внутреннего трения	20 градусы
Угол дилатансии	0 градусы
Плотность породы	2650 кг/м ³
Пористость	0.25
Проницаемость	1 Дарси
Плотность жидкости	900 кг/м ³
Объемный модуль жидкости	1 ГПа
Вязкость жидкости	0.005 Па*с

3. Остаются востребованными точные решения задач, в основном как верификационные задачи для тестирования промышленного ПО [14–23].

4. Остаются востребованными, на взгляд автора, классические направления МДТТ:

4.1. Построение определяющих соотношений (моделей материалов) для новых материалов (композиты, метаматериалы, умные материалы) и модели с использованием дополнительных соотношений, но и в этом случае моделирование поведения новых материалов проводится на основе промышленных пакетов.

4.2. Построение (формулировка) механических и математических постановок для новых типов задач (преднагружение, междисциплинарные задачи).

5. Экспериментальные работы, в основном для п. 4.

6. Разработка новых направлений использования МДТТ: механических моделей и механическая постановка задач (при необходимости) для систем машинного обучения на основе нейронных сетей при разработке систем искусственного интеллекта для профильных отраслей промышленности в части формирования синтетических “исходных” данных и предсказательной аналитики.

6.1. Разработка механических моделей и механическая постановка задач для систем промышленного интернета вещей для профильных отраслей промышленности, когда необходимо проводить моделирование с учетом информации, получаемой при измерении (и изменении) параметров в режиме реального времени.

6.2. Разработки в области вычислительных методов с учетом специфики задач МСС для решения прикладных задач механики сплошной среды, адаптированных под современные высокопроизводительные и облачные платформы.

6.3. Работы совместно с разработчиками CAE для демократизации численного моделирования в задачах МСС для широкого круга пользователей-неспециалистов в данной области.

Отметим, хотя это не относится к формату статьи и направлению журнала, что такая ситуация приводит к изменению (и уменьшению) финансирования работ в области “привычного понимания МДТТ”, отнесения Механики к техническим наукам (разделу “Техника”) и т.д.

Приведем на примере реализацию теории многократного наложения больших деформаций [18–20] и сопутствующих результатов нелинейной механики в промышленном пакете Фидесис. Такая реализация позволяет расчетчикам и исследователям самостоятельно решать необходимые задачи без глубокого понимания и детальной проработки математической постановки задачи и механической в части записи уравнений равновесия (движения) граничных и начальных условий. Отметим, что часть результатов, приведенных в статье, получена самостоятельно независимыми ис-

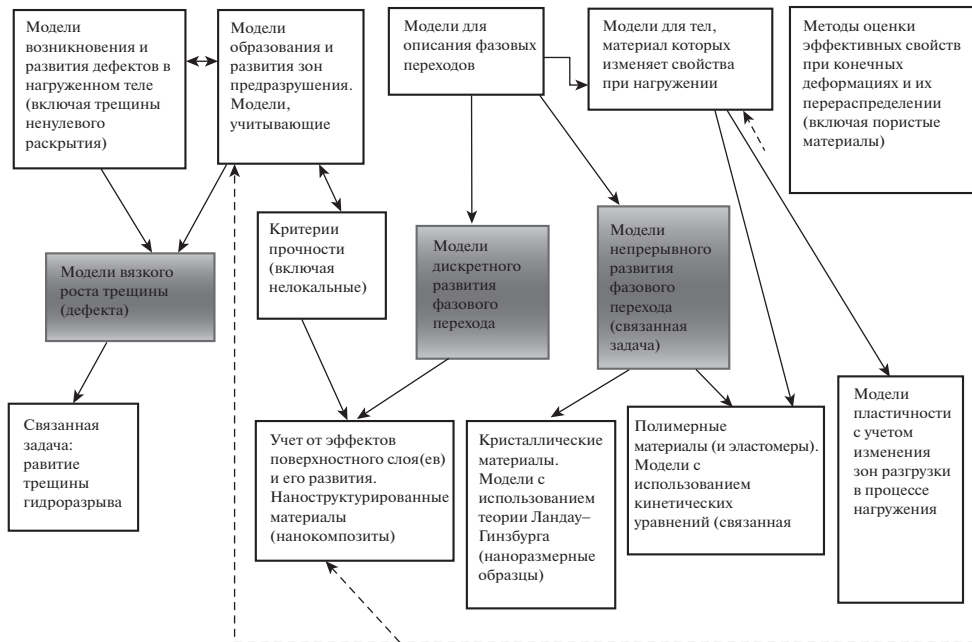


Рис. 1. Теория многократного наложения больших деформаций.

следователями на основе программной реализации научных разработок автора статьи и его коллег по научной группе в пакете Фидесис, созданном под руководством автора статьи. По мнению автора, реализация в САЕ фундаментальных результатов МДТТ является новым и востребованным направлением деятельности ученых — механиков, позволяющим переформатировать, сохранить и развить научные коллективы.

В работе даны некоторые примеры реализации в пакете Фидесис практически нужных научных разработок и результаты их использования для решения задач.

Теория наложения больших деформаций (рис. 1) [24–26], реализованная в пакете Фидесис, позволила рассмотреть и решить при больших деформациях принципиально новые классы статических и динамических задач, в которых дискретно (скачкообразно) или непрерывно в процессе нагружения изменяются границы (включая связность области, занимаемой телом, например образование концентраторов напряжений в нагруженном теле с большими деформациями полостей и включений), граничные условия, свойства части материала тела. При программной реализации в пакете Фидесис не использовался приближенный метод “убийства элементов” [1], а учитывалась необходимость совместного решения нескольких “не распадающихся” систем уравнений равновесия (движения).

2. Моделирование процесса образования детали с помощью аддитивных технологий на примере лазерного спекания (ЛС). Постановка в рамках теории наложения больших деформаций реализована в пакете Фидесис [24–26]. Следуя терминологии и моделям данной теории, постановка краевой задачи о добавлении n -го элемента, форма которого задана в момент спекания с остальным телом, т.е. в координатах $(n-1)$ -го промежуточного состояния, запишется следующим образом:

$$\nabla \cdot \left[(1 + \Delta_{0,n-1})^{-1} \sum_{0,n}^{n-1} \cdot \Psi_{n-1,n} \right] = 0$$

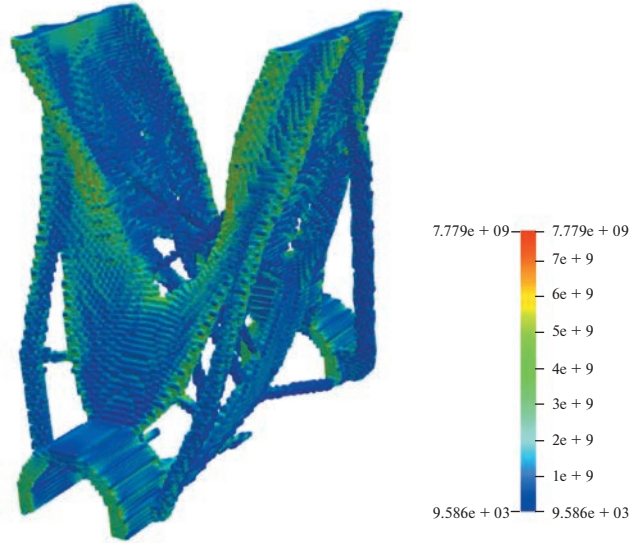


Рис. 2. Распределение истинных остаточных напряжений по Мизесу в изделии аддитивного производства после его изготовления.

— уравнение равновесия в координатном базисе $(n-1)$ -го состояния;

$$\Sigma_{0,n}^{n-1} = \Psi_{0,n-1}^T \cdot \Sigma_{0,n}^0 \cdot \Psi_{0,n-1}$$

— связь тензоров обобщенных напряжений в координатных базисах различных состояний;

$$\Sigma_{0,n}^0 = \lambda(E_{0,n}^0 : I)I + 2G E_{0,n}^0$$

— определяющее соотношение Мурнагана (в частном случае, связано с наличием информации о константах);

$$E_{0,n}^0 = \frac{1}{2}(\Psi_{0,n}^e \cdot \Psi_{0,n}^{eT} - I)$$

— представление тензора полных упругих деформаций через аффинол полных упругих деформаций в случае конечных деформаций;

$\Psi_{0,n}^e = \Psi_{0,n-1} \cdot \Psi_{n-1,n} \cdot \Psi_T^{-1} \cdot \Psi_P^{-1}$ — мультипликативное разложение аффинора полных упругих деформаций в виде произведения аффинора накопленных деформаций (за предыдущие шаги наращивания) и аффинора дополнительных деформаций (вызванного добавлением текущего n -го элемента), а также аффиноров внутренних термических и пластических деформаций;

$\Psi_T = \exp(\alpha T^n)I$ — аффинол температурных деформаций, здесь α — коэффициент линейного теплового расширения, T^n — температура на n -м шаге, I — единичный тензор.

$\Psi_{0,n-1} = \left(I - \sum_{i=k}^{n-1} \nabla u_i \right)^{-1} = \left(I - \nabla \sum_{i=k}^{n-1} u_i \right)^{-1} = (I - \nabla U)^{-1}$ — представление аффинора накопленных деформаций через вектор накопленных перемещений в координатном

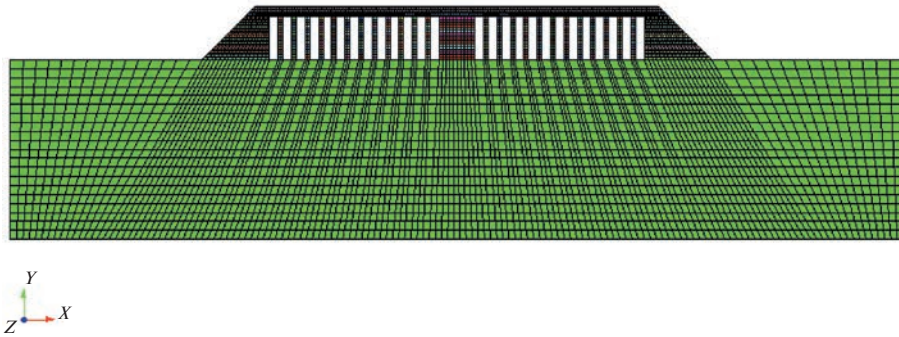


Рис. 3. Вертикальное сечение изделия и платформы с конечноэлементной сеткой.

базисе текущего $(n-1)$ -го состояния. Здесь, как и ранее, k — номер шага, на котором элемент, содержащий текущую Лагранжеву точку, возник. В частности, для вновь добавляемого n -го элемента данный аффиноид будет единичным тензором;

$$I + \Delta_{0,n-1} = \det \Psi_{0,n-1}$$

$\Psi_{n-1,n} = I + \nabla u_n$ — представление аффинора дополнительных деформаций через вектор дополнительных перемещений в координатном базисе текущего $(n-1)$ -го состояния.

Приведем для наглядности результат расчета для случая послойного изготовления изделия (крепления автомобильного руля). Материал изделия — углеродистая сталь. Температура основания 100°C , температура присоединяемого слоя 1100°C . Температура, до которой остывает слой, прежде чем к нему присоединяется следующий слой — 1000°C . Количество слоев — 121.

На рис. 2 показано распределение истинных остаточных напряжений по Мизесу в изделии после его изготовления.

Приведем описание натурального эксперимента [27], с которым проводилось сравнение при численном моделировании послойного изготовления изделия аддитивного производства. Изделие в форме бруса размером $(45 \text{ мм} \cdot 6 \text{ мм} \cdot 5 \text{ мм})$ с вырезами печатается на цилиндрической платформе радиусом 50 мм и высотой 20 мм. Форма вертикального сечения бруса и платформы представлена на рис. 3. Температура порошка для печати TI-6AL-4V считается равной 26°C . На основании платформы в процессе печати поддерживается постоянная температура 150°C . Мощность лазера составила 200 Вт, время воздействия лазера 40 мкс, толщина слоя печати 60 мкм. После печати изделия медленно выполняется горизонтальный разрез в его верхней части. В результате накопленных остаточных напряжений в изделии происходит вертикальный изгиб верхней надрезанной части изделия. Измеренные перемещения верхней грани изделия в процессе эксперимента [27] представлены на рис. 4.

Численное моделирование проводилось в плоско-деформированном состоянии на сетке и геометрии, представленных на рис. 2. Для расчета использовались 10 слоев изготовления изделия. При моделировании несколько слоев печати объединялись в один слой изготовления, которому передавалось количество тепла, равное передаваемому лазером при печати всех слоев внутри слоя изготовления. Расчет распределения температуры в слое проводился путем решения нелинейного уравнения теплопроводности с параметрами модели (коэффициент теплопроводности, коэффициент теплового расширения и другие), зависящими от температуры. После расчета распределения температуры в слое полученные температурные деформации использовались как

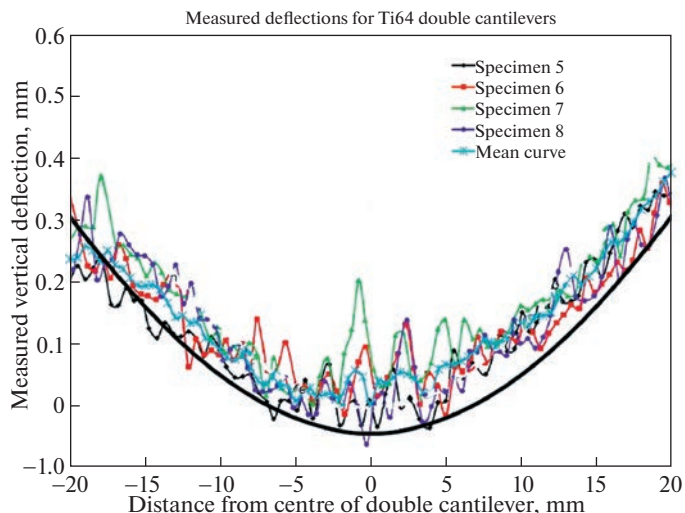


Рис. 4. Вертикальные перемещения верхней грани изделия по результатам натурного эксперимента [27] и расчета в CAE Fidesys (сплошная линия).

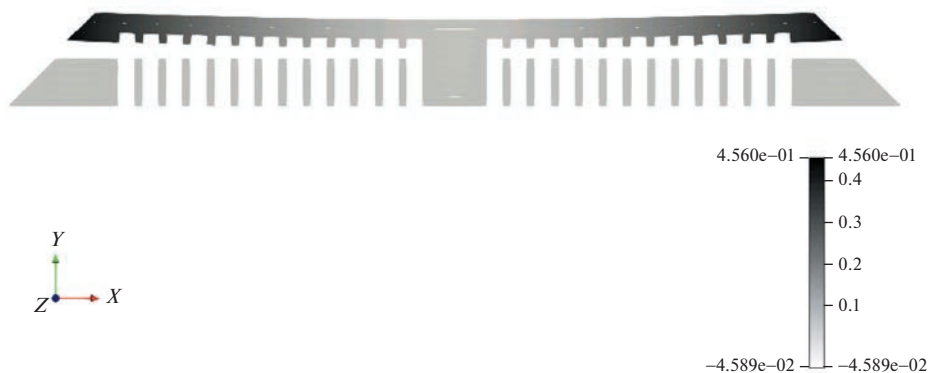


Рис. 5. Вычисленные вертикальные перемещения в сечении изделия аддитивного производства после выполнения надреза.

начальные деформации при добавлении данного слоя к телу с накопленными деформациями на предыдущих шагах печати.

На рис. 5 показаны вычисленные вертикальные перемещения в сечении изделия аддитивного производства после выполнения надреза.

На рис. 6 приведены вычисленные вертикальные перемещения верхней грани изделия при малых деформациях (пунктирная линия) и при конечных деформациях (сплошная линия).

Полученные при численном моделировании результаты хорошо согласуются с результатами натурного эксперимента, что подтверждает корректность предложенного в статье подхода к анализу напряженно-деформированного состояния и расчету остаточных напряжений в изделии аддитивного производства, изготовленного методом

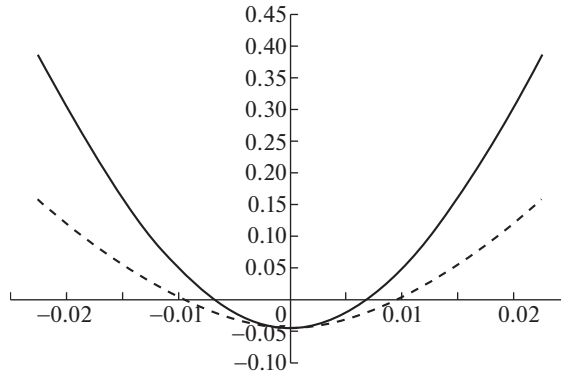


Рис. 6. Вычисленные вертикальные перемещения верхней грани изделия (мм) при малых деформациях (пунктирная линия) и при конечных деформациях (сплошная линия) в зависимости от расстояния до центра балки (м).

селективного лазерного спекания, на основе теории многократного наложения конечных деформаций.

3. Моделирование развития больших пластических деформаций во вращающемся диске [28]. Полученный механический эффект — локализованная утяжка диска, характеризующаяся развитием нелинейной упругопластической неустойчивости. Определение разрушающих частот вращения и остаточных удлинений дисков газотурбинных двигателей (ГТД) является обязательным требованием при их проектировании и сертификации. С этой целью проводятся натурные разгонные испытания дисков или роторов. Ниже приведены результаты моделирования с использованием пакета Фидесис процесса раскрутки модельного диска под действием постепенно увеличивающейся центробежной нагрузки с учетом физической и геометрической нелинейностей [28].

Моделирование выполнялось как квазистатический пошаговый расчет диска при увеличении внешней нагрузки на расчетную модель. Учитывалось, что для большинства конструкционных сплавов, используемых при изготовлении дисков ГТД, данный процесс сопровождается развитием больших пластических деформаций вплоть до разрушения. Не приводя математическую постановку задачи (она есть в пакете Фидесис, см. п. 2 таблицы 1), отметим, что для связи напряжений с деформациями используются определяющие соотношения гиперупругопластичности. Используется классический критерий пластичности Губера—Мизеса, записанный в терминах напряжений Кирхгоффа с мультилинейной функцией изотропного упрочнения. Замыкающими уравнениями являются условия Куна—Таккера, из которых определяется множитель совместности.

Сравнение с экспериментом (валидация). Объектами экспериментального исследования являлись две заготовки диска, отрезанные от прутка диаметром 330 мм из стали ЭИ961-ш. Из первой заготовки был изготовлен модельный диск для разгонных испытаний (рис. 7, а), а из второй — десять цилиндрических образцов для испытаний на разрыв для построения функции упрочнения.

Разгонные испытания диска проводились при нормальной температуре в один этап до разрушения на фрагменты. В процессе проведения испытания выполнялись записи частоты вращения и удлинения наружного диаметра диска. Объект разрушился при частоте вращения 24282 об/мин, при этом удлинение наружного диаметра диска в момент разрушения составило 4.4 мм. На рис. 7,б показан разрушившийся модельный

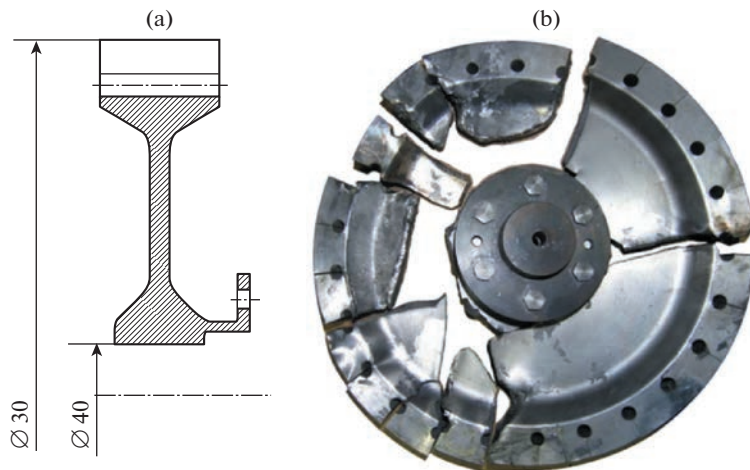


Рис. 7. Эскиз модельного диска (а) и характер его разрушения (б).

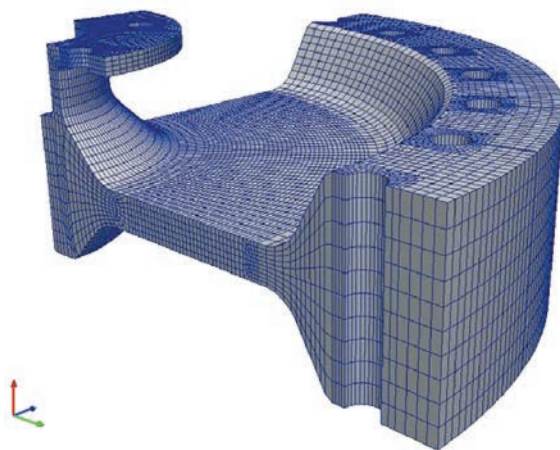


Рис. 8. Конечно-элементная сетка модельного диска.

диск. Первичное разрушение произошло по цилиндрическому сечению на радиусе $R = 55$ мм.

Оценка несущей способности диска по теории предельного равновесия показала, что разрушение диска наступает в цилиндрическом сечении на радиусе $R = 56$ мм при частоте вращения 23 100 об/мин, что удовлетворительно совпадает с результатами испытаний.

Результаты моделирования. Расчетная модель диска представляет собой сектор с углом в основании 90° (рис. 8). По меридиональным сечениям сектора задано граничное условие в виде равенства нулю окружных перемещений. К каждому узлу расчетной модели прикладывалась центробежная сила, пропорциональная квадрату частоты вращения и текущему радиусу, $\vec{f} = \rho \omega^2 \vec{r}$. Для построения функции упрочнения было

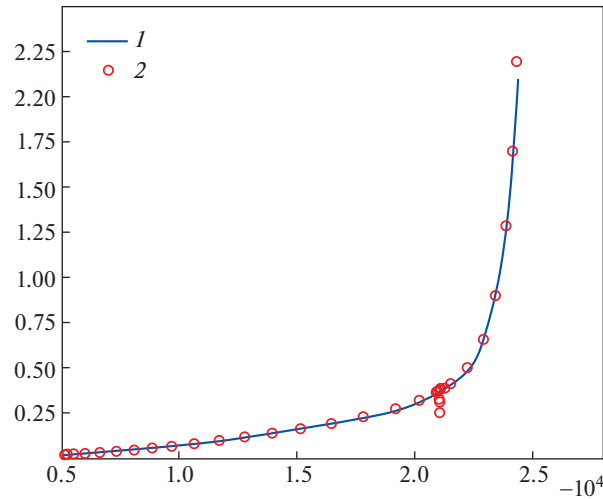


Рис. 9. Расчетная и экспериментальная кривые удлинения наружного диаметра модельного диска в зависимости от частоты вращения. Где 1 — результаты расчета, 2 — результаты эксперимента.

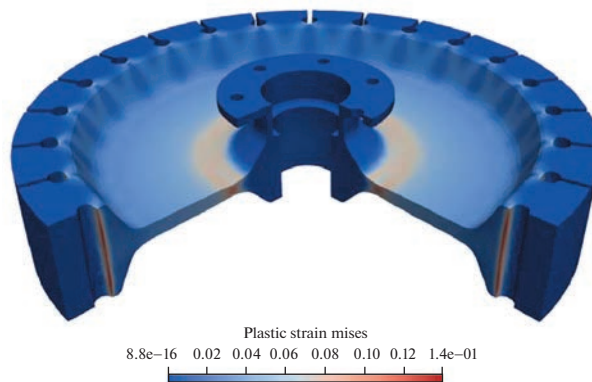


Рис. 10. Распределение осевых перемещений в модельном диске при частоте вращения $\omega = 24\,375$ об/мин (размерность на шкале — отн. ед.).

выполнено перестроение условной кривой деформирования в истинную в соответствии с допущением о постоянстве объема рабочей части образца до и после пластического деформирования.

Одним из характерных наблюдаемых в натурных экспериментах явлений, возникающих непосредственно перед разрушением диска, является локализованная “утяжка” диска, являющаяся аналогом “шейки” в образце и характеризующаяся развитием нелинейной упругопластической неустойчивости.

Результаты расчета удлинений наружного диаметра модельного диска и их сопоставление с экспериментальными данными представлены на рис. 9. Видно, что кривые согласуются между собой. Начиная с частоты вращения 20000 об/мин происходит существенное изменение скорости роста удлинений модельного диска, а при прибли-

Таблица 3. Граничные и начальные условия

Минимальное горизонтальное напряжение	25 МПа
Максимальное горизонтальное напряжение	32 МПа
Вертикальное напряжение	35 МПа
Начальное поровое давление	25 МПа
Падение порового давления на скважине	0.6 МПа/ч

Таблица 4. Свойства породы

Материал	Кероген	Песчаник
Модуль Юнга	5000 Ма	80000 МПа
Коэффициент Пуассона	0.3	0.1
Когезия	0.5 МПа	3 МПа
Угол внутреннего трения	30	30
Угол дилатансии	30	30

жении к разрушающей частоте вращения зависимость близка к вертикальной линии. При частоте вращения $\omega = 24375$ об/мин, близкой к разрушению, максимальные пластические деформации локализуются на радиусе диска $R = 50\text{--}60$ мм с образованием “утяжки” (рис. 10 и 11), что согласуется с зоной разрушения модельного диска.

4. Метаматериалы (на примере NTE-метаматериалов). Научные разработки [29, 30], реализованные в модуле “Композит” пакета Фидесис, позволили провести моделирование для оценки механических характеристик метаматериалов (композиционных материалов-конструкций), осуществить подбор геометрических параметров ячейки, чтобы добиться как отрицательного эффективного коэффициента теплового расширения, достаточно большого по модулю, так и близкого к нулю эффективного коэффициента [29, 30].

При моделировании учитывалось, что свойства таких материалов определяются в первую очередь их геометрической (ячеистой) микроструктурой, а не свойствами входящих в их состав компонент [31, 32]. Ниже в качестве примера приведены результаты для метаматериалов с отрицательным коэффициентом теплового расширения [33–35]. По международной терминологии такие метаматериалы называются NTE-метаматериалы (negative thermal expansion). NTE-метаматериалы при нагревании сжимаются. На взгляд автора, наибольший практический интерес представляют метаматериалы, которые при нагревании и охлаждении не меняют своих размеров. В настоящее время такие материалы, как правило, изготавливаются с помощью 3D-печати [36] из двух и более компонент с различными механическими и тепловыми свойствами: более жесткие с меньшим коэффициентом теплового расширения и более мягкие с большим коэффициентом. Следует отметить, что у компонент коэффициенты теплового расширения положительны.

Модуль “Композит” пакета Фидесис позволяет проводить оценку эффективных тепловых характеристик NTE-метаматериала на основе численного решения краевой задачи термоупругости на ячейке периодичности с заданием периодических граничных условий с осреднением по объему. Пользователь пакета в качестве результата получает эффективные коэффициенты теплового расширения.

Для построенных ячеек проведен ряд численных экспериментов [29, 30], в которых показано влияние геометрических параметров модели на коэффициент теплового расширения метаматериала. Свойства компонент при этом задавались модулем Юнга, коэффициентом Пуассона и коэффициентом теплового расширения.

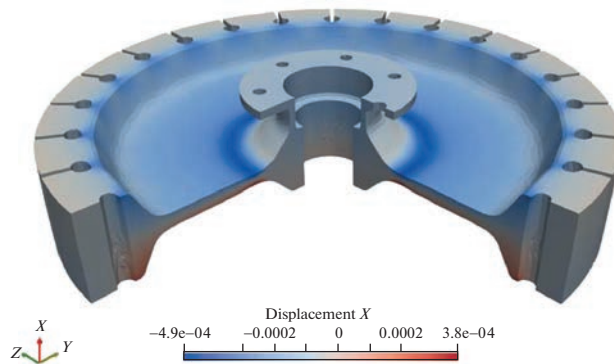


Рис. 11. Распределение осевых перемещений в модельном диске при частоте вращения $\omega = 24375$ об/мин (размерность на шкале – м).

В ходе исследования рассматривается модель ячейки из двух материалов: меди (жесткой, но с меньшим коэффициентом теплового расширения) и полимера (мягкого, но с большим коэффициентом теплового расширения) с большим количеством пустот. На рис. 12 приведена структура ячейки такого метаматериала. Черным цветом изображена медь (более твердая компонента с меньшим коэффициентом теплового расширения), серым – полимер (более мягкая компонента с большим коэффициентом теплового расширения).

Для этой модели метаматериала построены графики зависимости эффективного коэффициента теплового расширения от геометрических параметров – угла наклона полимерных стержней к медному контуру. Эти расчеты произведены для разных комбинаций параметров исходной модели: толщины контура ячейки, толщины полимерного стержня и толщины диагональных медных стержней. Также произведен расчет на устойчивость данной ячейки к тепловым деформациям. По результатам которого был определен температурный диапазон, в пределах которого эта структура применима. Для модели, состоящей из двух материалов – меди и полимера, были построены графики зависимости коэффициента теплового расширения от угла α при определенной толщине рамки. Анализ зависимостей этих коэффициентов от параметров модели



Рис. 12. Структура ячейки метаматериала с отрицательным коэффициентом теплового расширения.

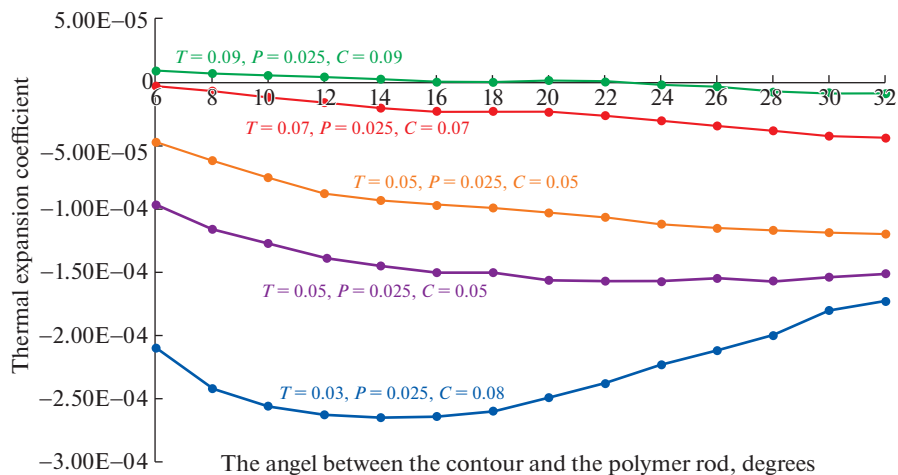


Рис. 13. Зависимость коэффициента температурного расширения (K^{-1}) от угла наклона между медным контуром и полимерным стержнем.

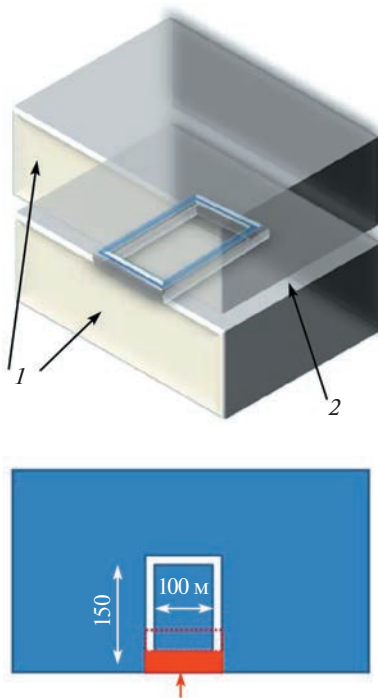


Рис. 14. Геометрия и свойства модели очистного забоя. На верхнем рисунке изображен вид на угольный пласт сверху, где 1 – аргиллит ($E = 1000$ МПа, $\mu = 500$ МПа, $\nu = 0.25$, $P = 2$), 2 – угольный пласт (Толщина – 4 м, $E = 20\text{--}200$ МПа, $\mu = 10$ МПа, $\nu = 0.4$, $P = 1.3$). На нижнем рисунке изображен очистной забой с варьирующей шириной от 4 до 50 м.

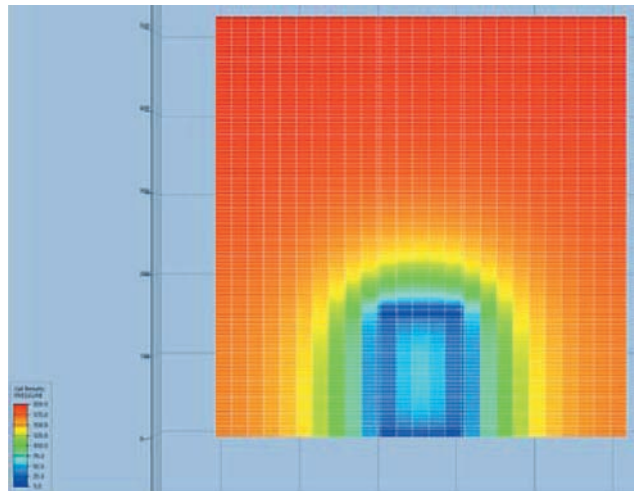


Рис. 15. Распределение давления на первом шаге расчетов.

показал следующие результаты. Во-первых, существует возможность подбора параметров ячейки, при которых метаматериал имеет нулевой эффективный коэффициент теплового расширения — то есть при изменении температуры сохраняет свои размеры. Во-вторых, при определенных комбинациях параметров эффективный коэффициент — отрицательный, а модуль его достаточно большой (равен коэффициенту теплового расширения полимера). На рис. 13 представлена зависимость коэффициента теплового расширения (единица измерения K^{-1}) от угла наклона между медным контуром и полимерным стержнем. На графике введены следующие обозначения: толщина медного контура ячейки — T , толщина полимерного стержня — P , толщина медной диагонали — S . Размеры приведены в отношении к общему размеру ячейки. Проводились численные исследования, в которых толщина контура варьировалась в пределах от 0.03 до 0.09, толщина полимера — от 0.025 до 0.075, толщина диагонали — от 0.05 до 0.09. В расчетах задавались следующие свойства меди: модуль Юнга 1.1×10^5 МПа, коэффициент Пуассона 0.35, коэффициент теплового расширения $1.67 \times 10^{-5} K^{-1}$. Свойства полимера: модуль Юнга 10^4 МПа, коэффициент Пуассона 0.45, коэффициент теплового расширения $1.5 \times 10^{-4} K^{-1}$.

Результаты расчетов показывают, что подбор геометрических параметров ячейки указанной формы позволяет добиться как отрицательного эффективного коэффициента теплового расширения, достаточно большого по модулю, так и близкого к нулю эффективного коэффициента.

5. Оценка метанообильности угольного пласта на основе анализа НДС в этом пласте вблизи штрека. Оценка деформаций угольного пласта в зависимости от давления метана (с учетом изменения проницаемости) внутри него позволяет расширить возможности геомеханического моделирования [37] и уточнить рекомендации к параметрам горнопроходческих работ. Моделирование и расчет параметров НДС в рамках модели осуществляется в 2 этапа.

На первом этапе находятся эффективные механические характеристики [38]. Далее на основе найденных эффективных механических параметров в подобластях решается геомеханическая задача о нахождении НДС во всей области. После этого на основе рассчитанных глобальных напряжений решаются серии задач о нагружении матрицы

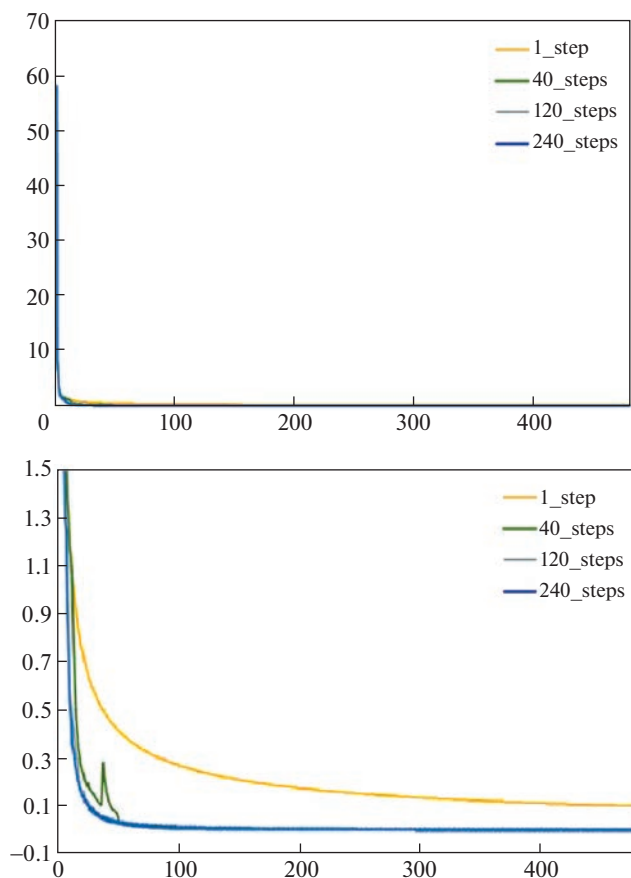


Рис. 16. Графики выделения метана в угольном пласте при различных сопряжениях. 1_step — без сопряжения. 40_steps — 60 шагов сопряжения газодинамического и геомеханического симуляторов, каждый 12 расчетный шаг газодинамического симулятора. 120_steps — 120 шагов сопряжения, 240_steps — 240 шагов сопряжения.

и трещин в каждой из подобластей для определения деформаций внутри матрицы материала блоков и раскрытий трещин между ними, соответствующих текущему локальному НДС в окрестности конкретной грани блока. Рассчитанные деформации матрицы и раскрытия трещин используются при вычислении проницаемостей угольного пласта на основе подходов [39, 40]. Рассчитанные проницаемости (матрицы и межблочных трещин) передаются в газодинамический симулятор на основе модели двойной проницаемости [41, 42], который определяет поле давлений метана во всей модели. Затем на основе рассчитанных давлений в матрице и трещинах определяется среднее давление в эффективном континууме и повторяется расчет НДС и параметров геомеханической модели.

Пример расчета проницаемости для очистного забоя в угольном пласте. Данные о геометрии и свойствах модели очистного забоя приведены на рис. 14.

Параметры модели. Размер куба 500 на 500 метров. Геометрия штрекового канала — периметр прямоугольника размерами 100 на 150 метров. Внутреннее сечение штрека: 4

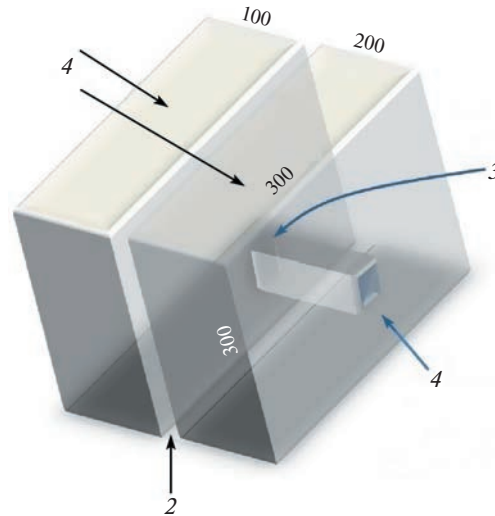


Рис. 17. Механическая модель угольного месторождения, использованная при расчете метанообильности. Где 1 – аргиллит ($E = 1000$ МПа, $\mu = 500$ МПа, $\nu = 0.25$), 2 – угольный пласт (Толщина – 4 м, $E = 20$ МПа, $\mu = 10$ МПа, $\nu = 0.4$), 3 – грудь забоя, 4 – проходческий штрек $4 \cdot 4$ м в центре модели.

на 4 метра. Количество ячеек $27 \cdot 104 \cdot 1$. Свойства газодинамической модели: проницаемость куба – 10 мД, давление в толще угольного пласта – 200 атм, давление в штреке – 1 атм. Реализованы открытые граничные условия с постоянным давлением 200 атм и индексом продуктивности $340.56 \text{ м}^3/\text{сутки}/\text{атм}$ (поверхностные условия). Свойства геомеханической модели: коэффициент Пуассона – 0.4; модуль Юнга – 20 МПа. Продолжительность расчета 480 минут с шагом 1 минута. При расчетах на основе газодинамической модели использовался модуль ECLIPSE Compositional ESMV3. На рис. 15 приведено распределение давления на первом шаге расчетов.

Результаты расчетов параметров газового потока приведены на рис. 16.

Графики свидетельствуют о том, что временной интервал истечения газа из зоны разгрузки в очистной забой равен примерно одному часу.

Также была решена задача о зависимости метанообильности от расстояния от штрека до угольного пласта [37, 43]. Использовалась механическая модель, приведенная на рис. 17.

При расчетах использовались следующие значения параметров проницаемости пород (коэффициенты фильтрации K_f и проницаемости K_p и абсолютная проницаемость K):

1. Уголь. $K_f = 1.2 \times 10^{-5}$ м/с, $K_p = 1.2 \times 10^{-12} \text{ м}^2$ или $K = 10$ мД (миллидарси)
2. Вмещающие породы: $K_f = 1.2 \times 10^{-3}$ м/с, $K_p = 1.2 \times 10^{-10} \text{ м}^2$ или $K = 300$ мД.

Модели были просчитаны при давлении на верхнюю грань порядка 200 МПа (это соответствует глубине около 1000 м). В пласте угля начальное давление газа было принято равным 1.5 МПа (15 атм). Во вмещающей породе – 0.1 МПа (1 атм).

Для расчета была построена сопряженная трехслойная газодинамическая и геомеханическая модель угольного пласта с изменяющейся проницаемостью угля в зависимости от геомеханических напряжений и пластового давления газа.

Были произведены расчеты для четырех положений штрека относительно угольного пласта: 180 м, 80 м, 60 м и 20 м. На основе результатов расчетов был построен гра-

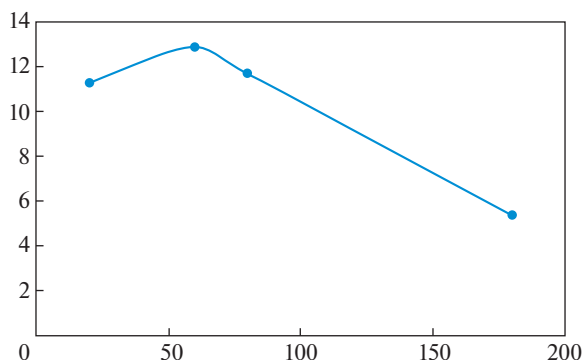


Рис. 18. Изменение интенсивности выделения метана по мере удаления от угольного пласта. Результаты численного моделирования.

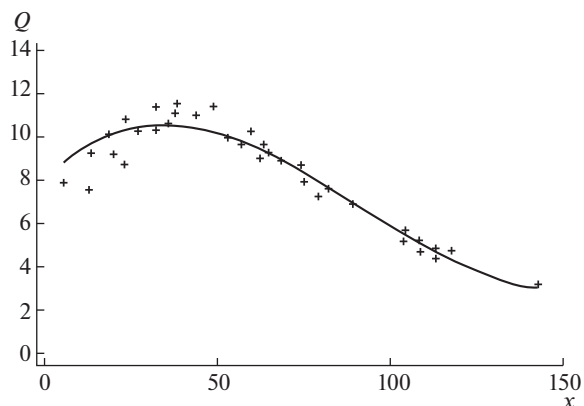


Рис. 19. Изменение интенсивности выделения метана по мере удаления от угольного пласта. Экспериментальные данные [44].

фик зависимости метановыделения от расстояния до пласта (рис. 18). Отметим его близость к экспериментальному графику из работы [44] (рис. 19).

6. Расчет НДС вблизи скважины в пласте горных пород на основе модели пороупругопластичности. Верификация численной пороупругопластической модели CAE Fidesys основана на аналитическом решении Карева [45]. В [45] рассматривается распределение напряжений в окрестности вертикальной скважины радиуса R_w , пробуренной на глубину h . Пласт считается изотропным, однородным.

Исходное напряженное состояние пласта рассматривается как состояние всестороннего сжатия горным давлением $Q = -\gamma h$, где γ — средний удельный вес вышележащих пород.

Предполагается, что коэффициент Био равен единице, p_0 — начальное пластовое давление фильтрующей жидкости. В [45] считается, что фильтрация жидкости отсутствует, поэтому на скважине поровое давление p_w совпадает с p_0 , предполагается,

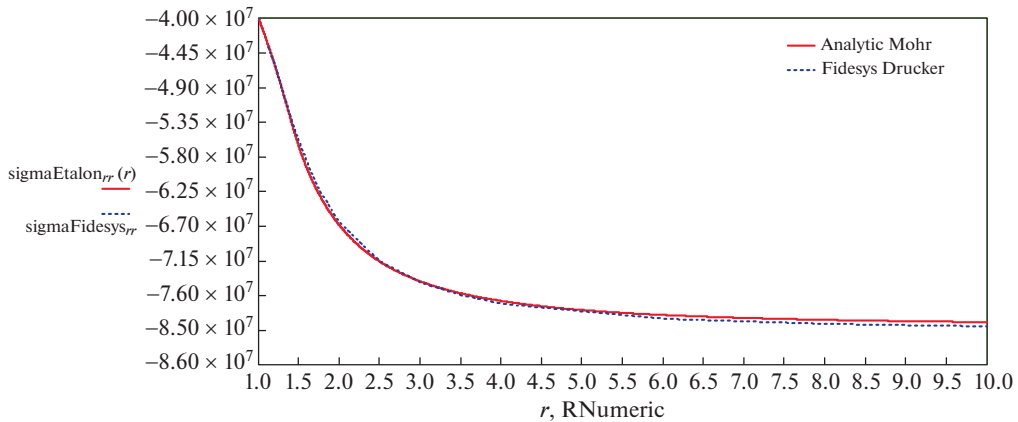


Рис. 20. $\sigma_{rr}(r)$ — аналитическое решение с критерием пластичности Кулона—Мора и численное решение CAE Fidesys с критерием пластичности Друкера—Прагера.

что в качестве критерия пластичности используется критерий Кулона—Мора с параметрами τ_s — коэффициент сцепления, ρ — угол внутреннего трения породы.

В пакете Фидесис используется критерий пластичности Друкера—Прагера. Поверхность Друкера—Прагера является сглаженной поверхностью Кулона—Мора (в CAE Fidesys поверхность Друкера—Прагера вписана в шестигранный конус Кулона—Мора). На основании исследования [46] предполагаем, что отличия в результатах для критериев Друкера—Прагера и Кулона—Мора должны быть незначительны.

Для сравнения результатов аналитического решения и решения в пакете CAE Fidesys использовались параметры модели: $\tau_s = 8$ МПа, $\rho = 30^\circ$, $Q = -80$ МПа, $p_0 = p_W = 40$ МПа.

Графики зависимостей напряжений $\sigma_{rr}(R)$, $\sigma_{\theta\theta}(R)$ приведены на рис. 20, 21.

Из рис. 20, 21 следует, что результаты расчета с использованием CAE Fidesys хорошо согласуются с аналитическим решением, за исключением области в окрестности радиуса пластической зоны. Данные отличия являются следствием использования различных критериев пластичности в аналитическом решении и CAE Fidesys.

CAE Fidesys предлагает широкие возможности решения различных задач геомеханики, учитывающих уравнение пьезопроводности (закон Дарси) и упругопластическое течение с критерием пластичности Друкера—Прагера. Так, в CAE Fidesys выполнено моделирование образования и развития полос локализации пластических деформаций (полос Людерса) для модели нагружения однородной изотропной квадратной области со стороной 20 м, в центре которой расположено круговое отверстие радиуса 1 м. В силу симметрии смоделирована четверть пластины. Материал имеет следующие безразмерные параметры: модуль Юнга 10^9 Па, коэффициент Пуассона 0.25, плотность 2650, когезия 2×10^6 Па, угол внутреннего трения 0.349, угол дилатансии 0, коэффициент Био 0.8, пористость 0.25, проницаемость 10^{-12} м², вязкость жидкости 0.005, объемный модуль упругости жидкости 10^9 Па.

К модели приложены следующие граничные условия: перемещения $u_x|_{y=0} = 0$, $u_y|_{x=0} = 0$, давление $p|_{x=10} = 28 \times 10^6$, $p|_{y=10} = 32 \times 10^6$, давление $25 \times 10^6 - 166.67 t$ на

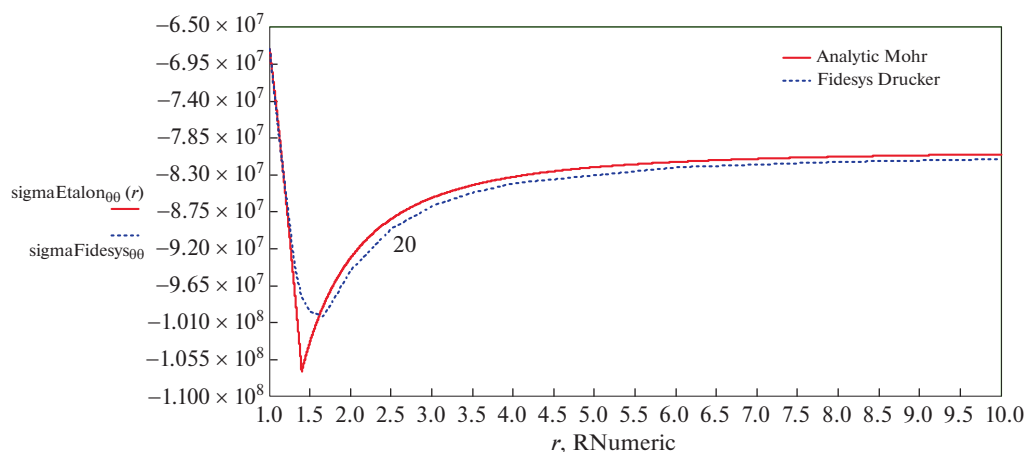


Рис. 21. $\sigma_{\theta\theta}(r)$ – аналитическое решение с критерием пластичности Кулона–Мора и численное решение CAE Fidesys с критерием пластичности Друкера–Прагера.

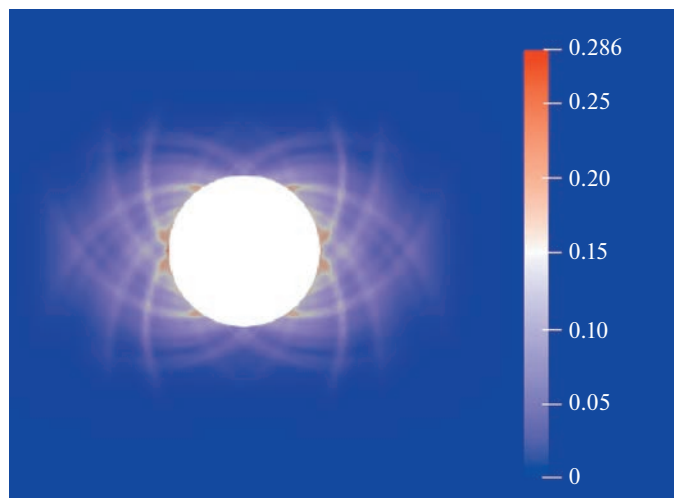


Рис. 22. Локализация полос Людерса. Пластические деформации по Мизесу.

контуре отверстия, поровое давление $f|_{x=10} = 25 \times 10^6 \text{ е6}$, $f|_{y=10} = 25 \times 10^6 \text{ е6}$, поровое давление на контуре отверстия $25 \times 10^6 - 166.67t$.

В результате динамического расчета модели в пакете CAE Fidesys получены следующие результаты: вблизи контура отверстия образуются полосы локализации пластических деформаций (полосы Людерса), к моменту времени $t = 19919 \text{ с}$ их локализация принимает вид, представленный на рис. 22.

Отметим, что проблема верификации и особенно валидации пакетов для прочностного инженерного анализа при обосновании их использования для решения нелинейных задач, особенно для задач о поэтапном нагружении тел при конечных деформаци-

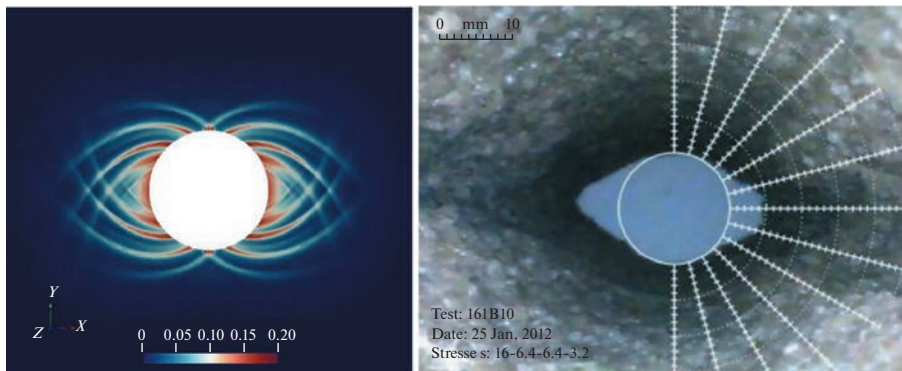


Рис. 23. Полость после эрозии (справа) и локализация пластических деформаций, численный эксперимент (слева) под действием анизотропного поля напряжений.

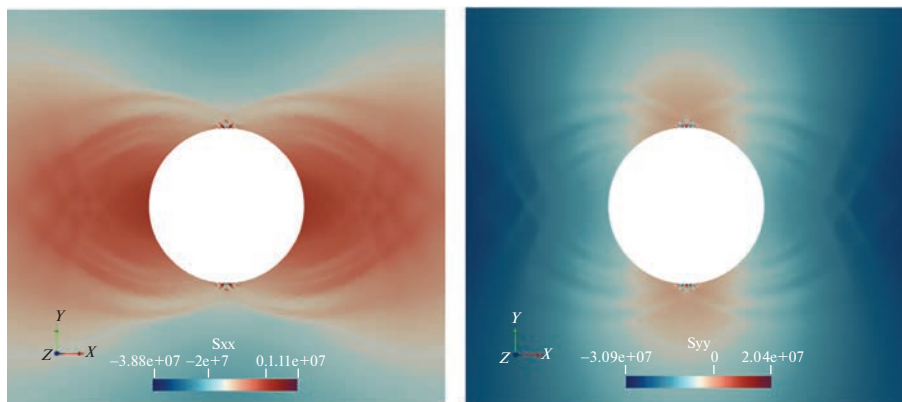


Рис. 24. Компоненты девиатора эффективных напряжений горной породы.

ях, очень важна, и наличие точных решений позволяет ее частично решить [13–23, 47–52].

7. Многофазная пьезоупругопластическая модель скважины. Большая часть мировых запасов нефти и газа находятся в слабо консолидированных коллекторах, где, может происходить вынос песка (пескопроявление) и последующая эрозия [53]. Эрозия пласта может привести к неустойчивости ствола скважины и обрушению некоторых участков скважины. Поэтому необходима математическая модель, способная предсказать начало выноса песка и его объем.

Используется связанная модель пороупругопластичности. Критерием начала пескопроявления в рамках этой модели является возникновение областей локализации пластических деформаций. Эта модель позволяет проанализировать влияние напряжений и изменения давления на пескопроявление.

Результаты расчетов в рамках этой модели приведены на рис. 23, 24. Исходные данные для расчетов приведены в табл. 2, 3. На рис. 23 справа показана форма полости после эрозии по данным натурного эксперимента. Сопоставление данных о локализации пластических деформаций, приведенных на рис. 23 слева, с данными натурного



Рис. 25. Круговые включения (Кероген).

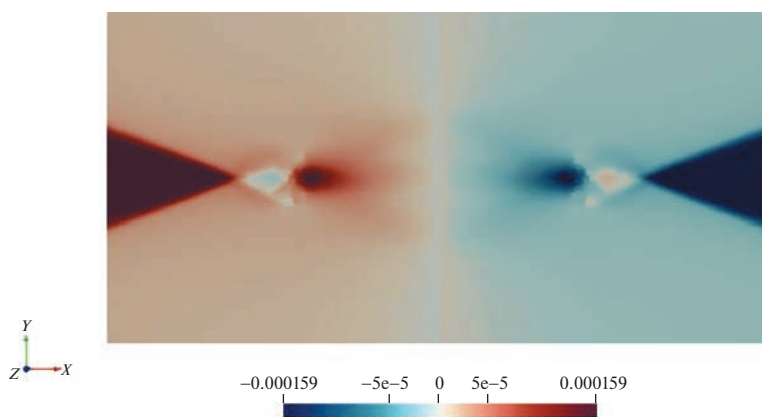


Рис. 26. Перемещения по оси Ox .

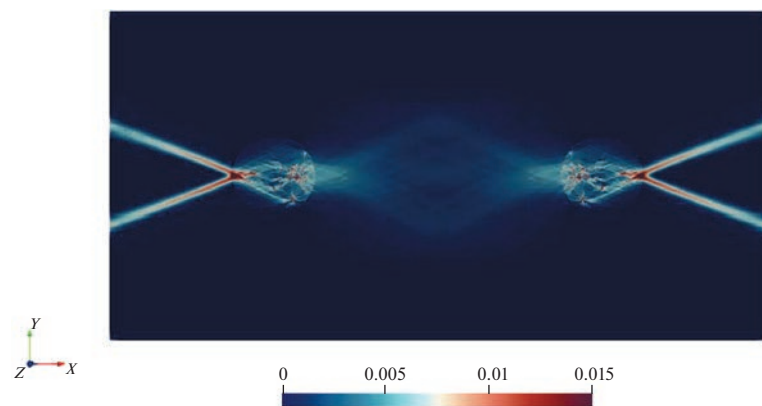


Рис. 27. Локализация пластических деформаций под действием растягивающих усилий, численный эксперимент.

эксперимента показывает, что зоны локализации пластических деформаций, определенные в результате расчета, расположены в тех областях, где в соответствии с данными натурного эксперимента происходит эрозия.

8. Пример локализации пластических деформаций в горной породе с включениями. Исследуется НДС горной породы (песчаника) с включениями из керогена. Задача решается для случая плоской деформации. Материалы считаются упругопластическими. Механические свойства материалов приведены в табл. 4. Форма области, в которой решается задача, показана на рис. 25. На рис. 26, 27 показаны результаты расчетов. Рис. 27 показывает наличие полос скольжения (областей локализации пластических деформаций), при этом следует отметить существенный эффект взаимовлияния включений. Граничные условия: боковые грани свободны, растяжение по оси Oy .

9. Заключение. Автор отмечает, что все приведенные примеры показывают возможность ученого-механика, инженера-расчетчика проводить сложные расчеты для нелинейных задач без необходимости самостоятельно выписывать систему уравнений, описывающую постановку задачи, и решать ее. Это подтверждает значительное (возможно, кардинальное) изменение в работе специалистов и требования к их навыкам. Такие изменения происходят практически во всех отраслях научно-технической деятельности в рамках Индустрии 4.0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каплун А.Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А. Ansys в руках инженера. М.: Едиториал УРСС, 2004. 272 с.
2. Морозов Е.М., Левин В.А., Вершинин А.В. Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. М.: URRS, 2015. 400 с.
3. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. V. 1. The Basis. L.: Butterworth—Heinemann, 2000. 707 p.
4. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. V. 2. Solid Mechanics. L.: Butterworth—Heinemann, 2000. 479 p.
5. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Sherwin S.J., Peiró J. On discontinuous Galerkin methods // Int. J. Numer. Meth. Eng. 2003. V. 58. № 8. P. 1119–1148.
<https://doi.org/10.1002/nme.884>
6. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Amsterdam: Elsevier, 2005.
7. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Amsterdam: Elsevier, 2005.
8. Левин В.А., Вершинин А.В. Нелинейная вычислительная механика прочности. 5-томный цикл монографий. Модели и методы. Численные методы. Реализация на высокопроизводительных вычислительных системах. М.: Физматлит, 2015. Т. 2. 543 с.
9. Климов Д.М., Руденко В.М. Методы компьютерной алгебры в задачах механики. М.: Наука, 1989. 215 с.
10. Левин В.А. К использованию метода последовательных приближений в задачах теории наложения конечных деформаций // Прикладная механика. 1987. Т. 23. № 5. С. 66–71.
11. Левин В.А., Зингерман К.М., Санченко Е.П. Об использовании численно-аналитических вычислений на ЭВМ для оценки эффектов третьего порядка в задаче об образовании отверстий в упругом теле с начальными деформациями // ТПИ. Деп. в ВИНТИ, 1987. 10 с. № 7993–В87.
12. Левин В.А., Зингерман К.М. Об одной возможности использования методов аналитических вычислений на ЭВМ в приложении к задачам теории наложения конечных деформаций // Механика эластомеров. Межвуз. сб. науч. тр. Краснодар: КПИ, 1987. С. 28–35.
13. Левин В.А., Зингерман К.М. Нелинейная вычислительная механика прочности. 5-томный цикл монографий. Модели и методы. Точные и приближенные аналитические решения при конечных деформациях и их наложении. М.: Физматлит, 2016. Т. 3. 393 с.

14. *Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M.* Influence of the prestressed layer on the nonlinear flexure of a rectangular beam made of compressible material // *Dokl. Phys.* 2015. V. 60. P. 167–170.
<https://doi.org/10.1134/S1028335815040023>
15. *Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M.* Multiple joined prestressed orthotropic layers under large strains // *Int. J. Eng Sci.* 2018. V. 133. 47–59.
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.08.008>
16. *Rivlin R.S.* A note on the torsion of an incompressible, highly-elastic cylinder // *Proc. Cambridge Phys. Soc.* 1949. V. 45. № 3. P. 485–487.
<https://doi.org/10.1017/S0305004100025135>
17. *Rivlin R.S.* Large elastic deformations of isotropic materials. IV. Further developments of the general theory // *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A. Math. Phys. Sci.* 1948. V. 241. № 835. P. 379–397.
<https://doi.org/10.1098/rsta.1948.0024>
18. *Rivlin R.S.* Large elastic deformations of isotropic materials. V. The problem of flexure // *Proc. Royal Soc. Ser. A. Math Phys Sci.* 1949. V. 195. № 1043. P. 463–473.
<https://doi.org/10.1098/rspa.1949.0004>
19. *Rivlin R.S.* Large elastic deformations of isotropic materials. VI. Further results in the theory torsion, shear and flexure // *Philos. Trans. Royal Soc. Ser. A. Math. Phys. Sci.* 1949. V. 242. № 845. P. 173–195.
<https://doi.org/10.1098/rsta.1949.0009>
20. *Ericksen J.L.* Deformations possible in every isotropic, incompressible, perfectly elastic body // *ZAMP.* 1954. V. 5. P. 466–489.
<https://doi.org/10.1007/BF01601214>
21. *Green A.E., Shield R.T.* Finite extension and torsion of cylinders // *Philos. Trans. Royal Soc. Ser. A. Math. Phys. Sci.* 1951. V. 224. № 846. P. 47–86.
<https://doi.org/10.1098/rsta.1951.0015>
22. *Levin V.A., Podladchikov Y.Y., Zingerman K.M.* An exact solution to the Lamé problem for a hollow sphere for new types of nonlinear elastic materials in the case of large deformations // *Eur. J. Mech. A/Solids.* 2021. V. 90. <https://doi.org/>
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104345>
23. *Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M.* An exact solution to the problem of biaxial loading of a micropolar elastic plate made by joining two prestrained arc-shaped layers under large strains // *Eur. J. Mech. A/Solids.* 2021. V. 88. <https://doi.org/>
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.10423>
24. *Левин В.А.* Нелинейная вычислительная механика прочности. 5-томный цикл монографий. Модели и методы. Образование и развитие дефектов (предисловие академика Г.И. Марчука) М.: Физматлит, 2015. Т. 1. 454 с.
25. *Левин В. А.* Многократное наложение больших деформаций в упругих и вязкоупругих телах (предисловие академика Л.И. Седова). М.: Наука, Физматлит, 1999. 223 с.
26. *Левин В.А.* Концентрация напряжений околосферического в момент образования отверстия в теле из вязкоупругого материала // *Док. ак. наук СССР.* 1988. Т. 299. № 5. С. 1079–1082.
27. *Tripathy S., Chin C., London T., Ankalkhope U., and Oancea V.* Process Modeling and Validation of Powder Bed Metal Additive Manufacturing // *Proc. of NAFEMS World Congress, Stockholm, 2017.* URL: <https://www.researchgate.net/publication/319173249>
28. *Абрамов С.М., Амеликин С.А., Клюев Л.В., Крапивин К.Ю., Ножницкий Ю.А., Серветник А.Н., Чичковский А.А.* Использование программы Фидесис для моделирования развития больших пластических деформаций во вращающемся диске // *Чебышев. сб.* 2017. Т. 18. № 3. С. 15–27.
<https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-3-15-27>
29. *Яковлев М.Я., Танасевич П.С., Вершинин А.В., Левин В.А.* Численный анализ эффективных теплофизических свойств и устойчивости метаматериалов с отрицательным коэффициентом теплового расширения с помощью CAE Fidesys // *Тез. докл. Межд. конф. “Физическая мезомеханика. Материалы с многоуровневой иерархически организованной структурой и интеллектуальные производственные технологии.”* Томск: ТГУ, 2021. С. 340–341.
30. *Yakovlev M.Y., Tanasevich P., Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M.* Application of the finite element method to modeling the effective mechanical and thermomechanical properties of meta-materials of the 3D lattice structure // *Proc. NAFEMS World Congress 2021.* P. 403.

31. *Barchiesi E., dell'Isola F., Hild F.* On the validation of homogenized modeling for bi-pantographic metamaterials via digital image correlation // *Int. J. Solids Struct.* 2021. V. 208–209. P. 49–62. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.09.036>
32. *dell'Isola F., Della Corte A., Giorgio I., Scerrato D.* Pantographic 2D sheets: Discussion of some numerical investigations and potential applications // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2016. V. 80. P. 200–208. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.10.010>
33. *Shubin S.N., Freidin A.B., Akulichev A.G.* Elastomer composites based on filler with negative thermal expansion coefficient in sealing application // *Arch. Appl. Mech.* 2016. V. 86. 351–360 (2016). <https://doi.org/10.1007/s00419-016-1120-1>
34. *Peng X.-L., Bargmann S.* Tunable auxeticity and isotropic negative thermal expansion in three-dimensional lattice structures of cubic symmetry // *Extreme Mech. Lett.* 2021. V. 43. P. 101201. <https://doi.org/10.1016/j.eml.2021.101201>
35. *Wang Q., Jackson J.A., Ge Q., Hopkins J.B., Spadaccini C.M., Fang N.X.* Lightweight mechanical metamaterials with tunable negative thermal expansion // *Phys. Rev. Lett.* 2016. V. 116. P. 175901. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.175901>
36. *Bückmann T., Stenger N., Kadic M., Kaschke J., Frölich A., Kennerknecht T., Eberl C., Thiel M., Wegener M.* Tailored 3D mechanical metamaterials made by dip-in direct-laser-writing optical lithography // *Adv. Mater.* 2012. V. 24. № 20. P. 2710–2714. <https://doi.org/10.1002/adma.201200584>
37. *Лапин С.Э., Писецкий В.Б.* К разработке геoinформационной панели безопасности подземных горных работ на основе связанных решений по прогнозу развития напряженного состояния массива горных пород и газовых потоков // *Чебышев. сб.* 2017. Т. 18. Вып. 3. С. 350–362. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-3-350-362>
38. *Myasnikov A., Vershinin A., Sboychakov A.* A generalization of geomechanical model for naturally fractured reservoirs // *SPE Russian Petroleum Technology Conference and Exhibition, Moscow, Russia, October 2016. SPE, 2016.* <https://doi.org/10.2118/182033-MS>
39. *Gupta A., Penuela G., Avila R.* An integrated approach to the determination of permeability tensors for naturally fractured reservoirs // *J. Can. Pet. Technol.* V. 40. № 12. P. PETSOC-01-12-02. <https://doi.org/10.2118/01-12-02>
40. *Costa A.* Permeability-porosity relationship: A reexamination of the Kozeny-Carman equation based on a fractal pore-space geometry assumption // *Geophys. Res. Lett.* V. 33. № 2. <https://doi.org/10.1029/2005GL025134>
41. *Bagheri M., Settari A.* Modeling of geomechanics in naturally fractured reservoirs // *SPE Reservoir Simulation Symposium. Houston, 2005. SPE, 2005. P. SPE-93083-MS.* <https://doi.org/10.2118/93083-MS>
42. *Bagheri M., Settari A.* Effects of fractures on reservoir deformation and flow modeling // *Can. Geotech. J.* 2006. V. 43. № 6. P. 574–586. <https://doi.org/10.1139/T06-024>
43. *Писецкий В.Б., Власов В.В., Черепанов В.П. и др.* Прогноз устойчивости горного массива на основе метода сейсмической локации в процессах строительства подземных сооружений // *Инженерные изыскания.* 2014. № 9–10. С. 46–51.
44. *Шувалов Ю.В., Коршунов Г.И., Монтиков А.В., Истомин Р.С., Суфияров А.М., Ютяев Е.П.* Геомеханические и газодинамические процессы в угленосном массиве при высоких скоростях подвигания очистных забоев // *Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал).* 2011. № 6. С. 80–88.
45. *Журавлев А.Б., Карев В.И., Коваленко Ю.Ф., Устинов К.Б.* Влияние фильтрации на напряженно-деформированное состояние породы в окрестности скважины // *ПММ.* 2014. Т. 78. Вып. 1. С. 86–97.
46. *Souley M., Thoraval A.* Nonlinear mechanical and poromechanical analyses: comparison with analytical solutions // *COMSOL Conference 2011. Stuttgart, Germany. 2011. P. NC.fineris00973639.*
47. *Carroll M.M., Horgan O.* Finite strain solutions for compressible elastic solid // *Quart. Appl. Math.* 1990. V. 48. № 3. P. 767–780. <https://doi.org/10.1090/qam/1079919>

-
48. *Ball J.M.* Discontinuous equilibrium solutions and cavitation in nonlinear elasticity // *Philos. Trans. Royal Soc. Ser A.* 1982. V. 306. № 1496. P. 557–611.
<https://doi.org/10.1098/rsta.1982.0095>
 49. *Zubov L.M.* Universal solutions of nonlinear dislocation theory for elastic cylinder // *Mech. Solids*, 2020. V. 55. P. 701–709.
<https://doi.org/10.3103/S0025654420050167>
 50. *Zubov L.M.* Universal solution of nonlinear elasticity for a hollow cylinder with prestressed coatings // *Acta Mech.* 2019. V. 230. P. 4137–4143.
<https://doi.org/10.1007/s00707-018-2333-x>
 51. *Еремеев В.А., Зубов Л.М.* Механика упругих оболочек. М.: Наука, 2008. 280 с.
 52. *Batra R., dell'Isola F., Ruta G.* Second-order solution of Saint-Venant's problem for an elastic bar predeformed in flexure // *Int. J. Non-Lin. Mech.* 2005. V. 40. № 2-03. P. 411–422.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2004.08.002>
 53. *Sharma M., Wang H.* A Fully 3-D, multi-phase, poro-elasto-plastic model for sand production // SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dubai, UAE, September 2016. SPE, 2016. P. SPE–181566–MS.
<https://doi.org/10.2118/181566-MS>

УДК 531.38;531.39

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЛУРЕГУЛЯРНЫХ ПРЕЦЕССИЙ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

© 2023 г. Г. В. Горр^{а,*}

^аГосударственное учреждение “Институт прикладной математики и механики”,
Донецк, Россия

*e-mail: gygorr@gmail.com

Поступила в редакцию 11.06.2022 г.

После доработки 28.06.2022 г.

Принята к публикации 30.06.2022 г.

В статье рассмотрена задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента. Исследованы условия существования полурегулярных прецессий, характеризующихся постоянством скорости собственного вращения. Построено новое решение уравнений класса Кирхгофа–Пуассона, основанное на специальном типе трех инвариантных соотношений по основным переменным данным уравнений.

Ключевые слова: потенциальные и гироскопические силы, переменный гиростатический момент, полурегулярные прецессии

DOI: 10.31857/S0572329922600414, EDN: DFXOLF

Введение. Прецессионные движения твердых тел занимают особое место в классической задаче о движении тяжелого твердого тела и ее обобщениях. Прикладные задачи, связанные с изучением прецессий гироскопических приборов, рассмотрены А.Ю. Ишлинским [1]. В динамике твердого тела прецессии изучали Д. Гриоли [2], Ф. Кляйн и А. Зоммерфельд [3], автор данной статьи [4] и многие другие авторы (см. книги [5, 6]). Монография [7] посвящена исследованию условий существования прецессионных движений гиростата с переменным гиростатическим моментом. В ней приведен обзор результатов, полученных в данной задаче и сформулированы основные определения гиростата. Важное значение в постановке задачи о движении гиростата имеют подходы, которые приняты в работах Й. Виттенбурга [8], В.В. Румянцев [9], П.В. Харламова [10]. Прецессионные движения характеризуются свойством постоянства угла между двумя осями l_1, l_2 , проходящими через неподвижную точку, одна из которых (l_1) связана с телом-носителем, а другая (l_2) неподвижна в пространстве. В случае, когда одна из осей подвижной системы координат содержит ось l_1 , то целесообразно такую систему координат называть прецессионной системой координат [11]. Согласно [2, 4], прецессионные движения подразделяются на классы: если скорости прецессии и собственного вращения постоянны, то прецессия называется регулярной; если скорость прецессии постоянна, то прецессия называется полурегулярной первого типа; если только скорость собственного вращения постоянна, то прецессию называют полурегулярной прецессией второго типа; в других случаях прецессия называется прецессией общего типа. Наибольшее количество прецессионных движений гиростата установлено для классов регулярных и полурегулярных прецессий первого типа. Следует отметить, что уникальными случаями прецессий тяже-

лого твердого тела, описываемых уравнениями Эйлера–Пуассона, являются регулярные прецессии, полученные Д. Гриоли [2], относительно наклонной оси и случай А.И. Докшевича [12], для которого постоянно произведение скоростей прецессии и собственного вращения. Полурегулярные прецессии второго типа твердого тела и гиростата относятся к меньшему числу найденных прецессий. Например, в [4] доказано, что в классической задаче полурегулярные прецессии второго типа динамически невозможны. Несмотря на это, в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом получены некоторые решения, имеющие такое свойство [7].

В данной статье исследованы условия существования полурегулярных прецессий второго типа гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил. Указаны условия на параметры уравнений движения и прецессии, при выполнении которых гиростат совершает прецессию второго типа.

1. Постановка задачи. При изучении уравнений движения гиростата с постоянным гиростатическим моментом следует учитывать известное свойство аналогии задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и задачи о движении тела в идеальной жидкости, которую в частном случае доказали В.А. Стеклов [13] и П.В. Харламов [14], а в общем случае – Х.М. Яхья [15]. Для случая переменного гиростатического момента $\lambda(t)$ такой аналогии нет. Поэтому в данной статье будем использовать дифференциальные уравнения в следующей форме [6, 7, 15]:

$$A\dot{\omega} + \dot{\lambda}(t) = (A\omega + \lambda(t)) \times \omega + \omega \times Bv + v \times (Cv - s) \quad (1.1)$$

$$\dot{v} = v \times \omega \quad (1.2)$$

где введены обозначения: $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости; $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$ – вектор гиростатического момента; $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции гиростата; $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$ – матрица, характеризующая гироскопические силы; $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$ – матрица, определяющая квадратичные по компонентам вектора $v = (v_1, v_2, v_3)$ члены; $s = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор обобщенного центра масс гиростата; точка над переменными $\omega(t)$, $\lambda(t)$, $v(t)$ обозначает дифференцирование по времени t .

Уравнения (1.1), (1.2) имеют первые интегралы

$$v \cdot v = 1, \quad (A\omega + \lambda(t)) \cdot v - \frac{1}{2}(Bv \cdot v) = k \quad (1.3)$$

где k – произвольная постоянная. Все указанные выше величины заданы в главной подвижной системе координат с единичными векторами i_1, i_2, i_3 .

Система (1.1), (1.2) является неавтономной системой дифференциальных уравнений относительно переменных $\omega(t)$, $\lambda(t)$, $v(t)$. Ее интегрирование может быть основано на нескольких подходах. В данной статье будем полагать, что ротор S_3 , который несет тело-носитель S_0 , лежит на третьей координатной оси, то есть $\lambda(t) = (0, 0, \lambda_3(t))$. Тогда в силу [10] систему (1.1), (1.2) будем рассматривать совместно с уравнениями

$$\dot{\lambda}_3(t) = L(t), \quad \lambda_3(t) = D_3[\omega(t) \cdot i_3 + \dot{\kappa}(t)] \quad (1.4)$$

здесь $\dot{\kappa}(t)$ – скорость вращения ротора S_3 ; D_3 – момент инерции ротора S_3 относительно оси вращения Oz ; $L(t)$ – проекция моментов и сил на ось Oz со стороны тела-носителя. Уравнения (1.4) можно изучать с помощью двух подходов: если задана функция $L(t)$, то вначале из первого уравнения системы (1.4) находится функция $\lambda_3(t)$ и интегрируются уравнения (1.1), (1.2), а затем из второго уравнения (1.4) определяет-

ся функция $\dot{\kappa}(t)$; если $\dot{\kappa}(t)$ задана и известна функция $\lambda_3(t)$, то из (1.4) находится функция $L(t)$.

Задача о движении гиростата с постоянным гиростатическим моментом на основе функции Лагранжа изучалась в [16].

Исследование полурегулярных прецессий будем вести, используя метод [17, 18]. Согласно этому методу, вектор угловой скорости гиростата представим в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \varepsilon(v_3)\mathbf{v} + g_0\boldsymbol{\beta} \quad (1.5)$$

где $\varepsilon(v_3)$ – дифференцируемая функция; $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ – постоянный единичный вектор; g_0 – постоянный параметр. Случай $\varepsilon(v_3) = \varepsilon_0$, где ε_0 – постоянная, рассмотрен в [19].

Подставим значение (1.5) в уравнение (1.2):

$$\dot{\mathbf{v}} = g_0(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\beta}) \quad (1.6)$$

Из уравнения (1.6) следует первый интеграл

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 = c_0 \quad (1.7)$$

который в векторной форме представим так: $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{v} = c_0$, где c_0 – постоянная. То есть в силу равенств $|\boldsymbol{\beta}| = 1$, $|\mathbf{v}| = 1$ параметр c_0 удовлетворяет условию $c_0 < 1$. Из (1.5) следует, что скорость прецессии равна $\varepsilon(v_3)$, а скорость собственного вращения – g_0 . То есть прецессия гиростата относится к полурегулярной прецессии второго типа. Запишем (1.5), (1.6) в скалярной форме:

$$\omega_i = \varepsilon(v_3)v_i + g_0\beta_i \quad (i = \overline{1,3}) \quad (1.8)$$

$$\dot{v}_1 = g_0(\beta_3 v_2 - \beta_2 v_3), \quad \dot{v}_2 = g_0(\beta_1 v_3 - \beta_3 v_1), \quad \dot{v}_3 = g_0(\beta_2 v_1 - \beta_1 v_2) \quad (1.9)$$

Используя равенства $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$ и (1.7), найдем функции $v_1(v_3)$, $v_2(v_3)$:

$$\begin{aligned} v_1(v_3) &= \frac{1}{\kappa_0^2} [\beta_1(c_0 - \beta_3 v_3) + \beta_2 \sqrt{F(v_3)}] \\ v_2(v_3) &= \frac{1}{\kappa_0^2} [\beta_2(c_0 - \beta_3 v_3) - \beta_1 \sqrt{F(v_3)}] \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $\kappa_0^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2$, а функция $F(v_3)$ такова

$$F(v_3) = -v_3^2 + 2c_0\beta_3 v_3 + (\kappa_0^2 - c_0^2) \quad (1.11)$$

Подставляя $v_1(v_3)$, $v_2(v_3)$ из (1.10) в третье уравнение системы (1.9), получим, что функцию $v_3(t)$ можно получить обращением интеграла [17]

$$\int_{v_3^{(0)}}^{v_3} \frac{dv_3}{\sqrt{F(v_3)}} = g_0(t - t_0) \quad (1.12)$$

Тогда функции $v_i(t)$ ($i = 1, 2$), $\omega_i(t)$ ($i = \overline{1,3}$) находятся из формул (1.10), (1.8). В силу того, что функция (1.11) удовлетворяет условию $F(v_3) < 0$ при $|v_3| > 1$, то при действительном значении параметра $\mu_0 = \sqrt{1 - c_0^2}$ корни уравнения $F(v_3) = 0$ действительны. То есть из (1.11), (1.12) найдем

$$(v_3)_{1,2} = c_0\beta_3 \pm \mu_0\kappa_0 \sin \psi \quad (1.13)$$

где в силу третьего уравнения из (1.9) $\psi = g_0 t$. Выбирая для определенности в (1.13) знак плюс, из (1.13), (1.10) получим

$$\begin{aligned} v_1(\psi) &= h_0 + h_1 \cos \psi + h_2 \sin \psi, & v_2(\psi) &= r_0 + r_1 \cos \psi + r_2 \sin \psi \\ v_3(\psi) &= a_0 + a_2 \sin \psi \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} h_0 &= c_0 \beta_1, & h_1 &= \frac{\beta_2 \mu_0}{\kappa_0}, & h_2 &= -\frac{\beta_1 \beta_3 \mu_0}{\kappa_0} \\ r_0 &= c_0 \beta_2, & r_1 &= -\frac{\beta_1 \mu_0}{\kappa_0}, & r_2 &= -\frac{\beta_2 \beta_3 \mu_0}{\kappa_0}, & a_0 &= c_0 \beta_3, & a_2 &= \kappa_0 \mu_0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Отметим вид решения (1.14) и обозначений (1.15) в случае $\beta_3 = 0$, который рассмотрен в статье [19] при изучении регулярных прецессий гиростата ($\varepsilon(v_3) = \varepsilon_0$):

$$\begin{aligned} v_1(\psi) &= h_0 + h_1 \cos \psi, & v_2(\psi) &= r_0 + r_1 \cos \psi, & v_3(\psi) &= a_2 \sin \psi \\ h_0 &= c \beta_1, & h_1 &= \beta_2 \mu_0, & h_2 &= 0, & r_0 &= c_0 \beta_2 \\ r_1 &= -\beta_1 \mu_0, & r_2 &= 0, & a_0 &= 0, & a_2 &= \mu_0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Поставим задачу: определить условия существования у уравнения (1.1) решения (1.8), (1.14).

2. Исследование уравнения (1.1). Запишем уравнение (1.1) в скалярной форме:

$$A_1 \dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3) \omega_2 \omega_3 - \lambda_3(t) \omega_2 + \omega_2 B_3 v_3 - \omega_3 B_2 v_2 + s_2 v_3 - s_3 v_2 + (C_3 - C_2) v_2 v_3 \quad (2.1)$$

$$A_2 \dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1) \omega_3 \omega_1 + \lambda_3(t) \omega_1 + \omega_3 B_1 v_1 - \omega_1 B_3 v_3 + s_3 v_1 - s_1 v_3 + (C_1 - C_3) v_3 v_1 \quad (2.2)$$

$$\dot{\lambda}_3(t) + A_3 \dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2) \omega_1 \omega_2 + \omega_1 B_2 v_2 - \omega_2 B_1 v_1 + s_1 v_2 - s_2 v_1 + (C_2 - C_1) v_1 v_2 \quad (2.3)$$

Подставим в (2.1)–(2.3) выражения ω_i из (1.8) и воспользуемся уравнениями (1.9). Тогда получим систему трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_3(t)(v_2 \varepsilon(v_3) + \beta_2 g_0) &= A_1 g_0 v_1 \varepsilon'(v_3)(\beta_1 v_2 - \beta_2 v_1) + A_1 g_0 \varepsilon(v_3)(\beta_2 v_3 - \beta_3 v_2) + \\ &+ v_2 v_3 [\varepsilon^2(v_3)(A_2 - A_3) + \varepsilon(v_3)(B_3 - B_2) + C_3 - C_2] + \\ &+ v_2 \{\beta_3 g_0 [\varepsilon(v_3)(A_2 - A_3) - B_2] - s_3\} + \\ &+ v_3 \{\beta_2 g_0 [\varepsilon(v_3)(A_2 - A_3) + B_3] + s_2\} + \beta_2 \beta_3 g_0^2 (A_2 - A_3) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} -\lambda_3(t)(v_1 \varepsilon(v_3) + \beta_1 g_0) &= A_2 g_0 v_2 \varepsilon'(v_3)(\beta_1 v_2 - \beta_2 v_1) + A_2 g_0 \varepsilon(v_3)(\beta_3 v_1 - \beta_1 v_3) + \\ &+ v_1 v_3 [\varepsilon^2(v_3)(A_3 - A_1) + \varepsilon(v_3)(B_1 - B_3) + C_1 - C_3] + \\ &+ v_1 \{\beta_3 g_0 [\varepsilon(v_3)(A_3 - A_1) + B_1] + s_3\} + \\ &+ v_3 \{\beta_1 g_0 [\varepsilon(v_3)(A_3 - A_1) - B_3] - s_1\} + \beta_1 \beta_3 g_0^2 (A_3 - A_1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_3(t) &= A_3 v_3 \varepsilon'(v_3)(\beta_1 v_2 - \beta_2 v_1) + A_3 g_0 \varepsilon(v_3)(\beta_1 v_2 - \beta_2 v_1) + \\ &+ v_1 v_2 [\varepsilon^2(v_3)(A_1 - A_2) + \varepsilon(v_3)(B_2 - B_1) + C_2 - C_1] + \\ &+ v_1 \{\beta_2 g_0 [\varepsilon(v_3)(A_1 - A_2) - B_1] - s_2\} + \\ &+ v_2 \{\beta_1 g_0 [\varepsilon(v_3)(A_1 - A_2) + B_2] + s_1\} + \beta_1 \beta_2 g_0^2 (A_1 - A_2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Выбор формы дифференциальных уравнений (2.4)–(2.6) связан с применяемой методикой их изучения в дальнейших преобразованиях.

В некоторых случаях целесообразно использовать уравнения (2.1), (2.2), исключив из них функцию $\lambda_3(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2)' &= (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2\omega_3 + \omega_3(B_1v_1\omega_2 - B_2v_2\omega_1) + \\ &+ s_3(\omega_2v_1 - \omega_1v_2) + v_3(\omega_1s_2 - \omega_2s_1) + v_3[v_2\omega_1(C_3 - C_2) - v_1\omega_2(C_3 - C_1)] \end{aligned} \quad (2.7)$$

В общем случае при подстановке функций (1.14) в уравнения (2.4), (2.5) и исключения из полученных уравнений функции $\lambda_3(t)$ приходим к уравнению типа Риккати, решение которого установить не представляется возможным. Поэтому в дальнейших преобразованиях положим, что выполняются условия

$$A_2 = A_1, \quad B_2 = B_1, \quad C_2 = C_1 \quad (2.8)$$

Кроме этого, будем рассматривать два независимых варианта дополнительных ограничений на параметры:

$$1. \quad s_3 = 0, \quad s_1 = d_0\beta_1, \quad s_2 = d_0\beta_2 \quad (2.9)$$

$$2. \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 \neq 0 \quad (2.10)$$

где d_0 — параметр. В случае (2.9) уравнение (2.7) на основе (1.8), (1.9) преобразуем к виду

$$\frac{1}{2}A_1(\omega_1^2 + \omega_2^2)'_{v_3} = \frac{d_0 + g_0B_1}{g_0}v_3\varepsilon(v_3) + B_1g_0\beta_3 + (C_1 - C_3)v_3 \quad (2.11)$$

В силу (2.8), (2.9) данные равенства можно интерпретировать, как обобщенные условия С.В. Ковалевской.

При выполнении условий (2.10) уравнение (2.7) представим следующим образом:

$$\frac{1}{2}A_1(\omega_1^2 + \omega_2^2)'_{v_3} = B_1v_3\varepsilon(v_3) + (s_3 + \beta_3g_0B_1) + (C_1 - C_3)v_3 \quad (2.12)$$

Аналоги первых интегралов, следующих из (2.12), рассматривались в [20]. Запишем уравнение (2.3) в случае (2.9):

$$A_3\omega_3(v_3) + \lambda_3(v_3) = -\frac{d_0 + B_1g_0}{g_0}v_3 + B_0 \quad (2.13)$$

где B_0 — произвольная постоянная. Если учесть в уравнении (2.3) условия (2.10) и третье уравнение из (1.9), то получим

$$A_3\omega_3(v_3) + \lambda_3(v_3) = -B_1v_3 + l_0 \quad (2.14)$$

Здесь l_0 — произвольная постоянная. Аналогия уравнений (2.11) и (2.12), а также (2.13), (2.14) очевидна.

Рассмотрим линейную комбинацию уравнений (2.4), (2.5), умножив уравнение (2.4) на v_1 , уравнение (2.5) — на v_2 и сложив левые и правые части полученных уравнений. Тогда в силу уравнения $\dot{v}_3 = g_0(\beta_2v_1 - \beta_1v_2)$ найдем

$$\{A_1[(v_3^2 - 1)\varepsilon(v_3)]' - A_3 v_3 \varepsilon(v_3) + B_3 v_3 + g_0 \beta_3 (A_1 - A_3) - \lambda_3(v_3)\} \dot{v}_3 + s_2 v_1 - s_1 v_2 = 0 \quad (2.15)$$

В случае (2.9), (2.13) из (2.15) следует

$$\varepsilon(v_3) = \frac{1}{1 - v_3^2} (E_2 v_3^2 + E_1 v_3 + E_0) \quad (2.16)$$

где E_0 — произвольная постоянная, а E_2, E_1 таковы:

$$E_2 = \frac{1}{2g_0 A_1} [g_0 (B_1 + B_3) + 2d_0], \quad E_1 = \frac{1}{A_1} (\beta_3 g_0 A_1 - B_0) \quad (2.17)$$

Распишем уравнение (2.15) при условиях (2.10), (2.14):

$$\varepsilon(v_3) = \frac{1}{1 - v_3^2} (G_2 v_3^2 + G_1 v_3 + G_0) \quad (2.18)$$

где G_0 — произвольная постоянная, а G_2, G_1 имеют вид

$$G_2 = \frac{1}{2A_1} (B_1 + B_3), \quad G_1 = \frac{\beta_3 g_0 A_1 - l_0}{A_1} \quad (2.19)$$

Из (2.17), (2.19) следует, что величина E_2 при $d_0 = 0$ примет значение G_2 , а для получения из (2.17) значения G_1 необходимо положить $B_0 = l_0$. Однако уравнения (2.11), (2.12) такой аналогией не обладают.

3. Случай (2.9). Этот случай на первом этапе будем изучать при выполнении условия

$$d_0 + g_0 B_1 = 0 \quad (3.1)$$

При выполнении равенства (3.1) уравнение (2.11) запишем в виде его первого интеграла

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{2} [(1 - v_3^2) \varepsilon^2(v_3) + 2g_0 \varepsilon(v_3)(c_0 - \beta_3 v_3 - g_0 B_1 \beta_3 v_3) - \\ - \beta_3 g_0 B_1 v_3 + \frac{1}{2}(C_3 - C_1)v_3^2] = D_0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

где D_0 — произвольная постоянная. В уравнении (3.2) учтены инвариантные соотношения (1.8). Подставим в равенство (3.2) значение $\varepsilon(v_3)$ из формулы (2.16) и потребуем, чтобы полученное равенство было тождеством по переменной v_3 . Тогда получим следующую алгебраическую систему на параметры задачи:

$$C_1 - C_3 + A_1 E_2^2 = 0 \quad (3.3)$$

$$B_0 = \frac{g_0 \beta_3 B_1}{E_2}, \quad E_1^2 + (E_0 + E_2)^2 + 2g_0 c_0 (E_0 + E_2) + E_1 (E_1 - 2g_0 \beta_3) = 0 \quad (3.4)$$

$$E_0 (E_1 - \beta_3 g_0) + 2g_0 c_0 E_1 - \frac{\beta_3 g_0 B_1}{A_1} = 0 \quad (3.5)$$

$$D_0 = \frac{A_1 E_0}{2} (E_0 + 2g_0 c_0) \quad (3.6)$$

Уравнение (3.3) будем рассматривать как условие на параметры C_1, C_3 . Первое равенство из (3.4), в силу (2.17) и предположения (3.1), для которого значение E_2 имеет вид

$$E_2 = \frac{B_3 - B_1}{2A_1} \quad (3.7)$$

запишем так:

$$B_0 = \frac{2\beta_3 g_0 A_1 B_1}{B_3 - B_1} \quad (3.8)$$

На основании значения (3.8) параметр E_1 из (2.17) выразим через параметры задачи:

$$E_1 = \frac{\beta_3 g_0 (B_3 - 3B_1)}{B_3 - B_1} \quad (3.9)$$

Из второго уравнения системы (3.4) и уравнения (3.6) найдем значения c_0, E_0 :

$$c_0 = \delta_0 \frac{2\beta_3 B_1}{B_3 - B_1}, \quad E_0 = \delta_0 E_1 - \frac{B_3 - B_1}{2A_1} \quad (3.10)$$

где $\delta_0 = \pm 1$. Уравнение (3.6) на основании (3.10) служит для определения постоянной D_0 . Изучим функцию (2.16) с учетом (3.7), (3.10). Для определенности предположим $\delta_0 = 1$. Тогда

$$\varepsilon(v_3) = \frac{1}{1 - v_3} (E_2 v_3 + E_2^*), \quad E_2^* = \frac{2\beta_3 g_0 (B_3 - 3B_1) - (B_3 - B_1)^2}{2A_1 (B_3 - B_1)} \quad (3.11)$$

Для того, чтобы функция $\varepsilon(v_3)$ не принимала постоянное значение, полагаем, что выполняются условия $\beta_3 \neq 0, B_3 - 3B_1 \neq 0$. Таким образом, функция $\varepsilon(v_3)$ из (3.11) является дробно-линейной функцией от $v_3 = a_0 + a_2 \sin g_0 t$. Укажем значение $\lambda_3(v_3)$ в рассматриваемом случае. Из формул (2.13), (3.11) имеем

$$\lambda_3(v_3) = \frac{\beta_3 g_0 [2A_1 B_1 - A_3 (B_3 - B_1)]}{B_3 - B_1} - \frac{A_3 v_3 (E_2 v_3 + E_2^*)}{1 - v_3} \quad (3.12)$$

Для окончательного решения задачи об условиях существования полурегулярных прецессий гиростата необходимо рассмотреть уравнения (1.4) совместно со значением функции (3.12), положив $v_3(t) = a_0 + a_2 \sin g_0 t$. В силу очевидности указанных преобразований ограничимся лишь их объяснениями.

4. Случай $d_0 + g_0 B_1 \neq 0$. Рассмотрим уравнение (2.11) при условии $d_0 + g_0 B_1 \neq 0$. Функция $\varepsilon(v_3)$ имеет вид (2.16) с обозначениями (2.17). Подставим в него ω_1, ω_2 из (1.8) и учтем уравнения (1.9). Тогда получим дифференциальное уравнение на функцию $\varepsilon(v_3)$:

$$A_1 \varepsilon'(v_3)[(1 - v_3^2)\varepsilon(v_3) + g_0(c_0 - \beta_3)v_3] - A_1 v_3 \varepsilon^2(v_3) - \frac{1}{g_0} \varepsilon(v_3)[(d_0 + B_1 g_0)v_3 + g_0^2 \beta_3 A_1] + g_0(C_3 - C_1)v_3 - \beta_3 g_0 B_1 = 0 \quad (4.1)$$

Внесем функцию (2.16) в уравнение (4.1). Результат удобно представить так:

$$A_1 [E_1 v_3^2 + 2(E_0 + E_2)v_3 + E_1](E_2 v_3^2 + \tilde{E}_1 v_3 + \tilde{E}_0) - A_1 v_3 (E_2 v_3^2 + E_1 v_3 + E_0)^2 - (1 - v_3^2)(E_2 v_3^2 + E_1 v_3 + E_0)(R_0 + R_1 v_3) + (1 - v_3^2)^2[(C_3 - C_1)v_3 - \beta_3 B_1 g_0] = 0 \quad (4.2)$$

где

$$\tilde{E}_0 = E_0 + c_0 g_0, \quad \tilde{E}_1 = E_1 - \beta_3 g_0, \quad R_1 = \frac{d_0 + g_0 B_1}{g_0}, \quad R_0 = \beta_3 g_0 A_1 \quad (4.3)$$

Потребуем, чтобы уравнение (4.2) было тождеством по переменной v_3 . Равенство нулю коэффициента при v_3^5 имеет вид

$$E_2 R_1 + C_3 - C_1 - A_1 E_2^2 = 0 \quad (4.4)$$

Для упрощения других условий выразим из равенства (4.4) величину $C_3 - C_1$ и подставим ее в (4.2). Выпишем равенство нулю коэффициента при v_3^3 . Используя формулы (4.3), получим

$$R_1 (E_0 + E_2) = 0 \quad (4.5)$$

Покажем, что должно выполняться равенство $R_1 = 0$. Предположим противное; тогда из (4.5) имеем

$$E_0 + E_2 = 0 \quad (4.6)$$

Условие (4.6) позволяет рассмотреть уравнение (4.2) при $v_3 = \pm 1$:

$$E_1 (2c_0 g_0 \pm E_1 \mp 2g_0 \beta_3) = 0 \quad (4.7)$$

Случай $E_1 = 0$, в силу (4.6) для функции $\varepsilon(v_3)$ из (2.16), приводит к постоянному значению $\varepsilon(v_3)$. Поэтому в (4.7) необходимо положить

$$c_0 = 0, \quad E_1 = 2g_0 \beta_3 \quad (4.8)$$

Из равенств нулю в уравнении (4.2) коэффициентов при v_3^4 и свободного члена следует

$$E_1 R_1 = E_2 R_0 + g_0 B_1 \beta_3, \quad R_0 E_0 - g_0 B_1 \beta_3 = 0 \quad (4.9)$$

Поскольку по предположению (4.6) $E_0 = -E_2$, то в силу $E_1 \neq 0$ из (4.9) получим $R_1 = 0$, что и требовалось доказать. Итак, вариант, когда параметры удовлетворяют условию $d_0 + g_0 B_1 \neq 0$, невозможен.

5. Случай (2.10). Рассмотрим уравнения (2.11), (2.12) и функции (2.13), (2.14), (2.16), (2.18). Для того, чтобы изучить данный вариант, можно формально от уравнения (2.11) перейти к уравнению (2.12), от уравнения (2.13) перейти к уравнению (2.14), от функции (2.16) — к функции (2.18), то случай (2.10) получим из случая (2.9), положив в нем

$d_0 = 0$, $B_0 = l_0$ и заменив выражение $B_1 g_0 \beta_3$ выражением $s_3 + B_1 g_0 \beta_3$. Следовательно, уравнению (4.1) будет соответствовать уравнение, в котором $R_1 = B_1$, а вместо последнего слагаемого в (4.1) необходимо рассматривать слагаемое $-(s_3 + B_1 g_0 \beta_3)$. Принимая во внимание результат п. 4, в данном варианте получим $R_1 = B_1 = 0$. То есть квадратичная форма $B_1 v_1^2 + B_2 v_2^2 + B_3 v_3^2$ становится вырожденной $B_3 v_3^2$. Данный результат не представляет интереса для динамики гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.

Заключение. При рассмотрении условий существования полурегулярных прецессий второго типа гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил построено новое решение уравнений движения, в которых учтено свойство переменности гиросtatического момента. Данное решение характеризуется тремя инвариантными соотношениями: (1.8) и формулами (1.14). Ключевыми условиями существования этого решения являются равенства (2.8), (2.9), характеризующие распределение масс, которое можно отнести к обобщенным условиям С.В. Ковалевской. Решение описывается элементарными функциями времени, а скорость прецессии тела-носителя является дробно-линейной функцией тригонометрической функции $\sin g_0 t$. В общем случае решение поставленной задачи достаточно сложно. Оно может быть описано следующим образом: на первом этапе исследования условий существования на основании второго интеграла из (1.3) с помощью инвариантного соотношения (1.8) и решения (1.14), (1.15) (в частном случае вместо (1.14), (1.15) можно привлечь (1.16)) определяется функция $\lambda_3(\psi)$; на втором этапе эта функция подставляется в уравнения (2.4)–(2.6) и находятся три дифференциальных уравнения на функцию $\varepsilon(\psi)$ (очевидно, что они будут зависимыми); на третьем этапе исследуется задача об условиях интегрирования полученных уравнений в квадратурах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
2. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. Pura Appl. 1947. V. 26. 271–281.
<https://doi.org/10.1007/BF02415381>
3. Klein F., Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisel. New York: Johnson Reprint corp., 1965. 966 p.
4. Горр Г.В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // Прикл. мат. мех. 2003. Т. 67. № 4. С. 573–587.
5. Горр Г.В., Мазнев А.В., Шетинина Е.К. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. Донецк: ДонНУ, 2009. 222 с.
6. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. Донецк: ДонНУ, 2010. 364 с.
7. Горр Г.В., Мазнев А.В., Котов Г.А. Движение гиростата с переменным гиросtatическим моментом. Донецк: ГУ “ИПММ”, 2018. 265 с.
8. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
9. Румянцев В.В. Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Мат. мех. 1970. № 2. С. 83–96.
10. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Мех. тверд. тела. 1972. Вып. 4. С. 52–73.
11. Горр Г.В., Балаклицкая Т.В. О движении главных осей твердого тела, имеющего неподвижную точку, в случае прецессий относительно вертикали // Мех. тверд. тела. 2019. Вып. 49. С. 55–65.
12. Докшевич А.И. Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. Киев: Наук. думка, 1992. 168 с.
13. Стеклов В.А. О движении твердого тела в жидкости. Харьков, 1893. 234 с.

14. Харламов П.В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журнал прикл. механики и техн. физики. 1963. № 4. С. 17–29.
15. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations // J. Mecan. Theor. Appl. 1986. V. 5. № 5. P. 747–754.
16. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 384 с.
17. Горр Г.В. О трех инвариантных соотношениях уравнений движения тела в потенциальном поле сил // Прикл. мат. мех. 2019. Т. 83. № 2. С. 202–214.
18. Gorrr G.V. On three invariant of the equations of motion of a body in a potential field of force // Mech. Solid. 2019. V. 54. P. 234–244.
<https://doi.org/10.3103/S0025654419030105>
19. Горр Г.В., Белоконь Т.В. О решениях уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом // Прикл. мат. мех. 2021. Т. 85. № 2. С. 139–151.
<https://doi.org/10.31857/S0032823521020053>
20. Асланов В.С., Дорошин А.В. Движение системы соосных тел переменной массы // Прикл. мат. мех. 2004. Т. 68. № 6. С. 999–1009.

УДК : 517.977, 534.11

ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ СМЕЩЕНИЕМ НА ДВУХ КОНЦАХ ПРОЦЕССОМ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ, СОСТОЯЩЕГО ИЗ ДВУХ УЧАСТКОВ РАЗНОЙ ПЛОТНОСТИ И УПРУГОСТИ

© 2023 г. В. Р. Барсегян^{a,b,*}

^aИнститут механики НАН Армении, Ереван, Армения

^bЕреванский государственный университет, Ереван, Армения

*e-mail: barseghyan@sci.am

Поступила в редакцию 29.11.2021 г.

После доработки 14.03.2022 г.

Принята к публикации 20.04.2022 г.

Рассмотрена задача граничного управления для одномерного волнового уравнения с кусочно-постоянными характеристиками. При этом полагается, что время прохождения волны через каждый однородный участок одинаково. Управление осуществляется смещением на двух концах. Предложен конструктивный подход построения управляющего воздействия с заданными начальным и конечным условиями. Схема построения заключается в следующем: исходная задача сводится к задаче управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями. Далее используется метод разделения переменных и методы теории управления конечными системами. Полученные результаты иллюстрируются на конкретном примере.

Ключевые слова: управление колебаниями, продольные колебания кусочно-однородного стержня, поперечные колебания кусочно-однородной струны, граничное управление, разделение переменных

DOI: 10.31857/S0572329922600517, EDN: DGCRJE

Введение. Задачам граничного управления и оптимального управления колебательными процессами посвящены многие исследования, в частности, работы [1–12].

В настоящей работе рассмотрена задача граничного управления для одномерного волнового уравнения, описывающего не только поперечные колебания неоднородной струны, но и продольные колебания неоднородного стержня. Рассмотренный колебательный процесс состоит из двух участков с разными упругими свойствами и плотностями. Предполагается, что длины однородных участков такие, что время прохождения волны по каждому из однородных участков является одинаковым. Условия, определяющие контактные взаимодействия материалов разнородных тел имеют важное значение. Следовательно, при математическом моделировании учет этих условий сопряжения, соединения (склейки) двух участков с разными физическими характеристиками материалов, должны соответствовать условиям непрерывного истечения возбуждаемых волновых процессов.

Необходимость моделирования и управления распределенных колебательных процессов составных систем с кусочно-постоянными (неоднородными) характеристиками возникает во многих теоретических и прикладных областях науки и техники. Однако, научное направление по управлению неоднородными упругими колебаниями пока еще недостаточно исследовано, находится в стадии становления и по нему име-

ются лишь некоторые результаты. К исследованию решений задач управления подобных разнородных распределенных составных систем посвящены, в частности, работы [6–12]. В работах [6, 7] (и других работах этого же автора и его учеников) изучены подобные задачи граничного управления неоднородными колебательными процессами. При исследовании этих задач граничного управления использованы метод Даламбера и выведены формулы типа Даламбера. К крайним задачам для уравнения, описывающего процесс продольных колебаний стержня с кусочно-постоянными характеристиками (состоящими из не менее двух участков) со свободным либо закрепленным правым концом, посвящены, в частности, работы [13–18]. В этих работах исследования проведены в классе обобщенного решения. В [19] рассматриваются колебания механической системы, представляющей собой два куска струны одинаковой длины, соединенных между собой пружиной. С помощью формулы Даламбера исследована задача граничного управления колебаниями сложносочлененной системы с особенностями. Получен аналог формулы Даламбера.

Цель данной статьи состоит в разработке аналитического подхода построения функции граничного управления одномерными колебательными неоднородными процессами, переводящего колебания за заданный промежуток времени из начального состояния в конечное состояние.

1. Постановка задачи. Рассматриваются продольные колебания кусочно-однородного стержня, расположенного вдоль отрезка $-l_1 \leq x \leq l$ и состоящего из двух участков: участок $-l_1 \leq x \leq 0$ с линейной плотностью $\rho_1 = \text{const}$, с модулем Юнга $k_1 = \text{const}$ и скоростью прохождения по нему волны, равной $a_1 = \sqrt{\frac{k_1}{\rho_1}}$, и участка $0 \leq x \leq l$ с линейной плотностью $\rho_2 = \text{const}$, с модулем Юнга $k_2 = \text{const}$ и скоростью прохождения по нему волны, равной $a_2 = \sqrt{\frac{k_2}{\rho_2}}$. Как и в работе [6], предполагается, что длины l_1 и l участков стержневых систем выбраны так, что время прохождения волны по участку $-l_1 \leq x \leq 0$ совпадает со временем прохождения волны по участку $0 \leq x \leq l$, т.е.

$$\frac{l_1}{a_1} = \frac{l}{a_2} \quad (1.1)$$

Пусть состояние (продольные колебания) стержня (или поперечные колебания струны), описывается функцией $Q(x, t)$, $-l_1 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, а отклонения от состояния равновесия, подчиняются следующему волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & -l_1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ a_2^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (1.2)$$

с начальными (при $t = t_0 = 0$) условиями

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad -l_1 \leq x \leq l \quad (1.3)$$

с граничными условиями

$$Q(-l_1, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.4)$$

и с условиями сопряжения в точке $x = 0$ соединения участков

$$Q(0-0, t) = Q(0+0, t)$$

$$a_1^2 \rho_1 \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0-0} = a_2^2 \rho_2 \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0+0} \quad (1.5)$$

и конечными (при $t = T$) условиями

$$Q(x, T) = \varphi_T(x), \quad \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{t=T} = \psi_T(x), \quad -l_1 \leq x \leq l \quad (1.6)$$

В формуле (1.4) функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ – управляющие воздействия (граничные управления). Предполагается, что функция $Q(x, t) \in C^2(\Omega_T)$, где $\Omega_T = \{(x, t) : x \in [-l_1, l], t \in [0, T]\}$, а функции $\varphi_0(x), \varphi_T(x) \in C^2[-l_1, l], \psi_0(x), \psi_T(x) \in C^1[-l_1, l]$.

Предполагается также, что все функции такие, что выполняются условия согласования.

$$\begin{aligned} \mu(0) &= \varphi_0(-l_1), & \dot{\mu}(0) &= \psi_0(-l_1), & \nu(0) &= \varphi_0(l), & \dot{\nu}(0) &= \psi_0(l) \\ \mu(T) &= \varphi_T(-l_1), & \dot{\mu}(T) &= \psi_T(-l_1), & \nu(T) &= \varphi_T(l), & \dot{\nu}(T) &= \psi_T(l) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Задача граничного управления. Требуется найти граничные управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$ $0 \leq t \leq T$, переводящие колебания системы (1.2), из заданного начального состояния (1.3) в конечное состояние (1.6).

2. Сведение задачи к задаче с нулевыми граничными условиями. Для решения поставленной задачи перейдем к новой переменной [20]

$$\xi = \begin{cases} \frac{a_2}{a_1} x, & -l_1 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.1)$$

что приводит к растяжению или сжатию отрезка $-l_1 \leq x \leq 0$ относительно точки $x = 0$. При этом с учетом (1.1), будем иметь, что отрезок $-l_1 \leq x \leq 0$ переходит к отрезку $-l \leq \xi \leq 0$. Для функции $Q(\xi, t)$ получим на отрезках одинаковой длины одинаковое уравнение

$$\frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, & -l \leq \xi \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, & 0 \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

или

$$\frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, \quad -l \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.2)$$

с соответствующими начальными условиями

$$Q(\xi, 0) = \varphi_0(\xi), \quad \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_0(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l \quad (2.3)$$

с граничными условиями

$$Q(-l, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.4)$$

с конечными условиями

$$Q(\xi, T) = \varphi_T(\xi), \quad \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} \Big|_{t=T} = \psi_T(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l \quad (2.5)$$

и с условиями сопряжения в точке $\xi = 0$ соединения участков

$$Q(0-0, t) = Q(0+0, t), \quad a_1 \rho_1 \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0-0} = a_2 \rho_2 \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0+0} \quad (2.6)$$

Так как граничные условия (2.4) неоднородны, решение уравнения (2.2) построим в виде суммы

$$Q(\xi, t) = V(\xi, t) + W(\xi, t) \quad (2.7)$$

где $V(\xi, t)$ – функция с однородными граничными условиями

$$V(-l, t) = V(l, t) = 0 \quad (2.8)$$

требующая определения, а $W(\xi, t)$ – решение уравнения (2.2) с неоднородными граничными условиями

$$W(-l, t) = \mu(t), \quad W(l, t) = \nu(t) \quad (2.9)$$

Функция $W(\xi, t)$ имеет вид

$$W(\xi, t) = \frac{1}{2l} [(l - \xi)\mu(t) + (l + \xi)\nu(t)] \quad (2.10)$$

Подставив (2.7) в (2.2) и учитывая (2.10), получим следующее уравнение для определения функции $V(\xi, t)$

$$\frac{\partial^2 V(\xi, t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 V(\xi, t)}{\partial \xi^2} + F(\xi, t), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.11)$$

где

$$F(\xi, t) = \frac{1}{2l} [(\xi - l)\ddot{\mu}(t) - (\xi + l)\ddot{\nu}(t)] \quad (2.12)$$

Функция $V(\xi, t)$ удовлетворяет соответствующему (2.6) условию сопряжения в точке $\xi = 0$ соединения участков. Отметим, что согласно (2.1) будем иметь

$$\varphi_0(-l) = \varphi_0(-l), \quad \varphi_T(-l) = \varphi_T(-l), \quad \psi_0(-l) = \psi_0(-l), \quad \psi_T(-l) = \psi_T(-l) \quad (2.13)$$

В силу начальных и конечных условий, соответственно (2.3) и (2.5), функция $V(\xi, t)$ должна удовлетворять следующим начальным

$$\begin{aligned} V(\xi, 0) &= \varphi_0(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\mu(0) + (l + \xi)\nu(0)] \\ \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \psi_0(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\dot{\mu}(0) + (l + \xi)\dot{\nu}(0)] \end{aligned} \quad (2.14)$$

и конечным условиям

$$\begin{aligned} V(\xi, T) &= \varphi_T(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\mu(T) + (l + \xi)\nu(T)] \\ \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \Big|_{t=T} &= \psi_T(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\dot{\mu}(T) + (l + \xi)\dot{\nu}(T)] \end{aligned} \quad (2.15)$$

С учетом условий (1.7) и (2.13), условия (2.14), (2.15) запишутся следующим образом, соответственно:

$$\begin{aligned}
V(\xi, 0) &= \varphi_0(\xi) - \frac{1}{2l}[(l - \xi)\varphi_0(-l) + (l + \xi)\varphi_0(l)] \\
\left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= \psi_0(\xi) - \frac{1}{2l}[(l - \xi)\psi_0(-l) + (l + \xi)\psi_0(l)]
\end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
V(\xi, T) &= \varphi_T(\xi) - \frac{1}{2l}[(l - \xi)\varphi_T(-l) + (l + \xi)\varphi_T(l)] \\
\left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=T} &= \psi_T(\xi) - \frac{1}{2l}[(l - \xi)\psi_T(-l) + (l + \xi)\psi_T(l)]
\end{aligned} \quad (2.17)$$

Таким образом, решение задачи сведено к задаче управления движением, описываемым уравнением (2.11) с однородными граничными условиями (2.8), которая формулируется следующим образом: требуется найти такие граничные управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \leq t \leq T$, под воздействием которых колебание, описываемое уравнением (2.11) с граничными условиями (2.8), переходит из заданного начального состояния (2.16) в конечное состояние (2.17).

3. Решение задачи. Учитывая, что граничные условия (2.8) однородны и выполнены условия согласованности, решение уравнения (2.11) ищем в виде

$$V(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin \frac{\pi k \xi}{l}, \quad V_k(t) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l V(\xi, t) \sin \frac{\pi k \xi}{l} d\xi \quad (3.1)$$

Представим в виде рядов Фурье, в базисе $\left\{ \sin \frac{\pi k \xi}{l} \right\}$ ($k = 1, 2, \dots$), функции $F(\xi, t)$, $\varphi_0(\xi)$, $\varphi_T(\xi)$, $\psi_0(\xi)$ и $\psi_T(\xi)$ и, подставив их значения вместе с $V(\xi, t)$ в уравнения (2.11), (2.12) и в условия (2.16), (2.17), получим

$$\ddot{V}_k(t) + \lambda_k^2 V_k(t) = F_k(t), \quad \lambda_k^2 = \left(\frac{a_2 \pi k}{l} \right)^2 \quad (3.2)$$

$$F_k(t) = \frac{a_2}{\lambda_k l} [\ddot{v}(t)(2(-1)^k - 1) - \ddot{u}(t)] \quad (3.3)$$

$$V_k(0) = \varphi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} [\varphi_0(-l) - \varphi_0(l)(2(-1)^k - 1)] \quad (3.4)$$

$$\dot{V}_k(0) = \psi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} [\psi_0(-l) - \psi_0(l)(2(-1)^k - 1)]$$

$$V_k(T) = \varphi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} [\varphi_T(-l) - \varphi_T(l)(2(-1)^k - 1)] \quad (3.5)$$

$$\dot{V}_k(T) = \psi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} [\psi_T(-l) - \psi_T(l)(2(-1)^k - 1)]$$

Здесь коэффициенты Фурье функции $F(\xi, t)$, $\varphi_0(\xi)$, $\varphi_T(\xi)$, $\psi_0(\xi)$ и $\psi_T(\xi)$ обозначены через $F_k(t)$, $\varphi_k^{(0)}$, $\varphi_k^{(T)}$, $\psi_k^{(0)}$ и $\psi_k^{(T)}$ соответственно.

Общее решение неоднородного уравнения (3.2) с условиями (3.4) и его производная имеют вид

$$\begin{aligned}
V_k(t) &= V_k(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k(\tau) \sin \lambda_k (t - \tau) d\tau \\
\dot{V}_k(t) &= -\lambda_k V_k(0) \sin \lambda_k t + \dot{V}_k(0) \cos \lambda_k t + \int_0^t F_k(\tau) \cos \lambda_k (t - \tau) d\tau
\end{aligned} \quad (3.6)$$

Далее, для формулы (3.6), при $t = T$, учитывая конечные (3.5) условия применяем подходы, приведенные в работах [2–5, 20]. Тогда получим, что функции управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$ для каждого k должны удовлетворять следующим интегральным соотношениям:

$$\begin{aligned} \int_0^T \mu(\tau) \sin \lambda_k (T - \tau) d\tau + E_k \int_0^T \nu(\tau) \sin \lambda_k (T - \tau) d\tau &= C_{1k} \\ \int_0^T \mu(\tau) \cos \lambda_k (T - \tau) d\tau + E_k \int_0^T \nu(\tau) \cos \lambda_k (T - \tau) d\tau &= C_{2k} \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} C_{1k} &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{1k} + X_{1k} + E_k Y_{1k} \right], \quad \tilde{C}_{1k} = \lambda_k V_k(T) - \lambda_k V_k(0) \cos \lambda_k T - \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k T \\ C_{2k} &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{2k} + X_{2k} + E_k Y_{2k} \right], \quad \tilde{C}_{2k} = \dot{V}_k(T) + \lambda_k V_k(0) \sin \lambda_k T - \dot{V}_k(0) \cos \lambda_k T \\ X_{1k} &= \lambda_k \Phi_T(-l) - \Psi_0(-l) \sin \lambda_k T - \lambda_k \Phi_0(-l) \cos \lambda_k T, \quad E_k = 1 - 2(-1)^k \\ X_{2k} &= \Psi_T(-l) - \Psi_0(-l) \cos \lambda_k T + \lambda_k \Phi_0(-l) \sin \lambda_k T \\ Y_{1k} &= \lambda_k \Phi_T(l) - \Psi_0(l) \sin \lambda_k T - \lambda_k \Phi_0(l) \cos \lambda_k T \\ Y_{2k} &= \Psi_T(l) - \Psi_0(l) \cos \lambda_k T + \lambda_k \Phi_0(l) \sin \lambda_k T \end{aligned} \quad (3.8)$$

Введем следующие обозначения:

$$\bar{H}_k(\tau) = \begin{pmatrix} \sin \lambda_k (T - \tau) & E_k \sin \lambda_k (T - \tau) \\ \cos \lambda_k (T - \tau) & E_k \cos \lambda_k (T - \tau) \end{pmatrix}, \quad C_k = \begin{pmatrix} C_{1k} \\ C_{2k} \end{pmatrix}, \quad U(\tau) = \begin{pmatrix} \mu(\tau) \\ \nu(\tau) \end{pmatrix}$$

Тогда соотношение (3.7) запишется следующим образом

$$\int_0^T \bar{H}_k(\tau) U(\tau) d\tau = C_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

Следовательно, для нахождения функции $U(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, получаются бесконечные интегральные соотношения (3.9).

На практике задача синтеза управления решается используя методы теории управления конечномерными системами [1, 21, 22]. Для первых n гармоник введем следующие обозначения блочных матриц

$$H_n(\tau) = \begin{pmatrix} \bar{H}_1(\tau) \\ \bar{H}_2(\tau) \\ \vdots \\ \bar{H}_n(\tau) \end{pmatrix}, \quad \eta_n = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

с размерностями $H_n(\tau) - (2n \cdot 2)$, $\eta_n - (2n \cdot 1)$.

Для первых n гармоник, с учетом (3.10), из (3.9) будем иметь

$$\int_0^T H_n(\tau) U_n(\tau) d\tau = \eta_n \quad (3.11)$$

(здесь и далее обозначение в нижнем индексе буквы “ n ” будет означать — “для первых n гармоник”).

Таким образом, из (3.11) следует, что первые n гармоники системы (3.2) с условиями (3.3)–(3.5) вполне управляемы тогда и только тогда, когда для любого вектора η_n (3.10) можно найти управление $U_n(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющее условию (3.11).

Управляющее воздействие $U_n(t)$, удовлетворяющее интегральному соотношению (3.11), представим в виде [21, 22]

$$U_n(t) = H_n^T(t) S_n^{-1} \eta_n + f_n(t) \quad (3.12)$$

где $H_n^T(t)$ — транспонированная матрица, $f_n(t)$ — вектор-функция и такая, что

$$\int_0^T H_n(t) f_n(t) dt = 0, \quad S_n = \int_0^T H_n(t) H_n^T(t) dt \quad (3.13)$$

Здесь, S_n — известная матрица размерностью $(2n \cdot 2n)$, для которой предполагается, что $\det S_n \neq 0$.

Из формулы (3.12) следует, что существует множество управляющих функций, решающих задачу граничного управления.

Обозначим

$$S_n^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{s}_{11}^{(11)} & \hat{s}_{12}^{(11)} & \dots & \hat{s}_{11}^{(1n)} & \hat{s}_{11}^{(1n)} \\ \hat{s}_{12}^{(11)} & \hat{s}_{12}^{(11)} & \dots & \hat{s}_{21}^{(11)} & \hat{s}_{22}^{(11)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{s}_{11}^{(nl)} & \hat{s}_{12}^{(nl)} & \dots & \hat{s}_{11}^{(nn)} & \hat{s}_{12}^{(nn)} \\ \hat{s}_{21}^{(nl)} & \hat{s}_{22}^{(nl)} & \dots & \hat{s}_{21}^{(nn)} & \hat{s}_{22}^{(nn)} \end{pmatrix}$$

Из формулы (3.10), (3.12) с учетом введенных обозначений функции граничного управления представляются в виде

$$\begin{aligned} \mu_n(t) &= \sum_{k=1}^n \left[S_1^{(k)} \sin \lambda_k (T-t) + S_2^{(k)} \cos \lambda_k (T-t) \right] + f_n(t) \\ \nu_n(t) &= \sum_{k=1}^n E_k \left[S_1^{(k)} \sin \lambda_k (T-t) + S_2^{(k)} \cos \lambda_k (T-t) \right] + f_n(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$S_1^{(k)} = \sum_{j=1}^n \left[\hat{s}_{11}^{(k,j)} C_{1j} + \hat{s}_{12}^{(k,j)} C_{2j} \right], \quad S_2^{(k)} = \sum_{j=1}^n \left[\hat{s}_{21}^{(k,j)} C_{1j} + \hat{s}_{22}^{(k,j)} C_{2j} \right]$$

Подставляя построенные выражения для функции $\mu_n(t)$ и $\nu_n(t)$ в (3.3), а найденное для $F_k(t)$ выражение — в (3.6), получим функцию $V_k(t)$, $t \in [0, T]$. Далее, из формулы (3.1) будем иметь

$$V_n(\xi, t) = \sum_{k=1}^n V_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} \xi \quad (3.15)$$

а с помощью (2.7) и (2.10) функция колебания $Q_n(\xi, t)$ для первых n гармоник запишется в виде

$$Q_n(\xi, t) = V_n(\xi, t) + W_n(\xi, t) \quad (3.16)$$

$$W_n(\xi, t) = \frac{1}{2l}[(l - \xi)\mu_n(t) + (l + \xi)v_n(t)] \quad (3.17)$$

Учитывая обозначения (2.1) функция $Q_n(x, t)$ при $-l_1 \leq x \leq l$ представляется в виде:

$$Q_n(x, t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n V_k(t) \sin \frac{\pi k}{l_1} x + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{x}{l_1}\right) \mu_n(t) + \left(1 + \frac{x}{l_1}\right) v_n(t) \right] & -l_1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ \sum_{k=1}^n V_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \mu_n(t) + \left(1 + \frac{x}{l}\right) v_n(t) \right] & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.18)$$

4. Пример. Для иллюстрации вышеизложенного построения предположим, что в граничных условиях (1.4) $Q(l, t) = 0$, $0 \leq t \leq T$ (т.е. $v(t) = 0$).

В этом случае из формулы (3.3) следует $F_k(t) = -\frac{2a_2}{\lambda_k l} \mu''(t)$, а согласно формулам (3.7) будем иметь следующие интегральные соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^T \mu(\tau) \sin \lambda_k (T - \tau) d\tau &= C_{1k} \\ \int_0^T \mu(\tau) \cos \lambda_k (T - \tau) d\tau &= C_{2k} \\ C_{1k} &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{1k} + X_{1k} \right], \quad C_{2k} = \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{2k} + X_{2k} \right] \end{aligned}$$

Постоянные $\tilde{C}_{1k}$, $\tilde{C}_{2k}$, X_{1k} и X_{2k} определяются из формулы (3.8). Следовательно

$$\bar{H}_k(\tau) = \begin{pmatrix} \sin \lambda_k (T - \tau) \\ \cos \lambda_k (T - \tau) \end{pmatrix}, \quad C_k = \begin{pmatrix} C_{1k} \\ C_{2k} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для простоты изложения, согласно формуле (3.12) (или (3.14)), (3.13), построим функцию граничного управления $\mu_n(t)$ при $n = 1$ (следовательно $k = 1$). Тогда, согласно (3.10), будем иметь $H_1(\tau) = \bar{H}_1(\tau)$, $\eta_1 = C_1$, а из (3.13), элементы матрицы

$$S_1 = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

получим в виде:

$$s_{11} = \frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T, \quad s_{12} = s_{21} = \frac{1}{2\lambda_1} \sin^2 \lambda_1 T, \quad s_{22} = \frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T$$

при этом $\Delta = \det S_1 \neq 0$.

Из формулы (3.12) (или (3.14)) следует, что $\mu_1(\tau) = H_1^T(\tau) S_1^{-1} \eta_1 + f_1(\tau)$. Предполагая, что $f_1(\tau) = 0$, получим, при $\tau \in [0, T]$

$$\mu_1(\tau) = \sin \lambda_1 (T - \tau) [\hat{s}_{11}^{(1)} C_{11} + \hat{s}_{12}^{(1)} C_{21}] + \cos \lambda_1 (T - \tau) [\hat{s}_{21}^{(1)} C_{11} + \hat{s}_{22}^{(1)} C_{21}]$$

Отметим, что согласно формулам (3.15)–(3.16) будем иметь

$$Q_1(\xi, t) = V_1(t) \sin \frac{\pi}{l} \xi + \frac{1}{2l} (l - \xi) \mu_1(t)$$

Предположим, что $T = 2 \frac{l}{a_2}$. Тогда, с учетом $\lambda_1 = \frac{a_2 \pi}{l}$, получим $T \lambda_1 = 2\pi$. Для матриц S_1

и S_1^{-1} будем иметь:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{l}{a_2} & 0 \\ 0 & \frac{l}{a_2} \end{pmatrix}, \quad S_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_2}{l} & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{l} \end{pmatrix}, \quad \det S_1 = \left(\frac{l}{a_2}\right)^2$$

Учитывая, что $\hat{s}_{12}^{(11)} = \hat{s}_{21}^{(11)} = 0$, получим

$$C_{11} = \frac{l}{a_2} (\varphi_1^{(T)} - \varphi_1^{(0)}), \quad C_{21} = \frac{l}{a_2 \lambda_1} (\psi_1^{(T)} - \psi_1^{(0)})$$

$$\mu_1(\tau) = \frac{1}{\lambda_1} (\psi_1^{(T)} - \psi_1^{(0)}) \cos \lambda_1 \tau - (\varphi_1^{(T)} - \varphi_1^{(0)}) \sin \lambda_1 \tau$$

следовательно

$$F_1(\tau) = \frac{a_2}{l} (\psi_1^{(T)} - \psi_1^{(0)}) \cos \lambda_1 \tau - \frac{a_2 \lambda_1}{l} (\varphi_1^{(T)} - \varphi_1^{(0)}) \sin \lambda_1 \tau$$

Подставляя найденное для $F_1(\tau)$ выражение в (3.6), получим функцию $V_1(t)$, $t \in [0, T]$ в явном виде

$$V_1(t) = \left[\varphi_1^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_1 l} \varphi_0(-l) + \frac{a_2}{2l} (\varphi_1^{(T)} - \varphi_1^{(0)}) t \right] \cos \lambda_1 t + \\ + \frac{1}{\lambda_1} \left[\psi_1^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_1 l} \psi_1(-l) - \frac{a_2}{2l} (\varphi_1^{(T)} - \varphi_1^{(0)}) + \frac{a_2}{2l} (\psi_1^{(T)} - \psi_1^{(0)}) t \right] \sin \lambda_1 t$$

Следовательно, для функций $Q_1(\xi, t)$, получим следующее явное выражение

$$Q_1(\xi, t) = \left\{ \left[\varphi_1^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_1 l} \varphi_0(-l) + \frac{a_2}{2l} (\varphi_1^{(T)} - \varphi_1^{(0)}) t \right] \cos \lambda_1 t + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda_1} \left[\psi_1^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_1 l} \psi_1(-l) - \frac{a_2}{2l} (\varphi_1^{(T)} - \varphi_1^{(0)}) + \frac{a_2}{2l} (\psi_1^{(T)} - \psi_1^{(0)}) t \right] \sin \lambda_1 t \right\} \sin \frac{\pi}{l} \xi + \\ + \frac{1}{2l} (l - \xi) \left[\frac{1}{\lambda_1} (\psi_1^{(T)} - \psi_1^{(0)}) \cos \lambda_1 t - (\varphi_1^{(T)} - \varphi_1^{(0)}) \sin \lambda_1 t \right]$$

Имея явные виды функции $\mu_1(t)$, $V_1(t)$ или $Q_1(\xi, t)$ с помощью формул (3.15)–(3.18) или формулы замены переменных (2.1) можно записать явное выражение функции $Q_1(x, t)$, $-l \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$.

Заключение. В работе рассмотрена задача граничного управления одномерным волновым уравнением, описывающим поперечные колебания кусочно-однородной струны или продольные колебания кусочно-однородного стержня. Предложен конструктивный подход построения функции граничного управления одномерными неоднородными колебательными процессами. При этом явное выражение функции граничного управления представлено через заданные начальные и конечные функции прогиба и скоростей точек распределенной системы. Результаты могут быть использо-

ваны при проектировании граничного управления процессами разнородных колебаний в физических и технологических системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
2. Barseghyan V.R. The control problem for stepwise changing linear systems of loaded differential equations with unseparated multipoint intermediate conditions // *Mech. Solids*. 2018. V. 53. № 6. P. 615–622.
<https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-3-24-33>
3. Barseghyan V.R. The problem of optimal control of string vibrations // *Int. Appl. Mech.* 2020. V. 56. № 4. P. 471–480.
<https://doi.org/10.1007/s10778-020-01030-w>
4. Barseghyan V.R. The problem of optimal control of vibrations of a string with non-separated conditions into state functions at given intermediate time instants // *Autom. Remote Control*. 2020. V. 81. № 2. P. 226–235.
<https://doi.org/10.31857/S0005231020020038>
5. Barseghyan V., Solodusha S. Optimal boundary control of string vibrations with given shape of deflection at a certain moment of time // *Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2021. Lecture Notes in Computer Science*. V. 12755 / Ed. by P. Pardalos, M. Khachay, A. Kazakov. Cham: Springer, 2021. P. 299–313.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-77876-7_20
6. Ильин В.А. Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков // *Доклады РАН*. 2011. Т. 440. № 2. С. 159–163.
7. Ильин В.А. О приведении в произвольно заданное состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков // *Доклады РАН*. 2010. Т. 435. № 6. С. 732–735.
8. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами // *Тр. ИММ УрО РАН*. 2011. Т. 17. № 1. С. 85–92.
9. Провоторов В.В. Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн // *Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. I*. С. 62–71.
<https://doi.org/10.2012. Вып. 1>
10. Amara J. Ben, Bouzidi H. Null boundary controllability of a one-dimensional heat equation with an internal point mass and variable coefficients // *J. Math. Phys.* 2018. V. 59. № 1. P. 011512.
<https://doi.org/10.1063/1.5021947>
11. Amara J. Ben, Beldi E. Boundary controllability of two vibrating strings connected by a point mass with variable coefficients // *SIAM J. Control Optim.* 2019. V. 57. № 5. P. 3360–3387.
<https://doi.org/10.1137/16M1100496>
12. Mercier D., Régnier V. Boundary controllability of a chain of serially connected Euler-Bernoulli beams with interior masses // *Collect. Math.* 2009. V. 60. № 3. P. 307–334.
<https://doi.org/10.1007/BF03191374>
13. Кулешов А.А. Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня и уравнения поперечных колебаний неоднородной струны, состоящих из двух участков разной плотности и упругости // *Доклады РАН*. 2012. Т. 442. № 5. С. 594–597.
14. Кулешов А.А. Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня со свободным либо закрепленным правым концом, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // *Доклады РАН*. 2012. Т. 442. № 4. С. 451–454.
15. Рогожников А.М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков // *Доклады РАН*. 2011. Т. 441. № 4. С. 449–451.
16. Рогожников А.М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // *Доклады РАН*. 2012. Т. 444. С. 488–491.

-
17. Аниконов Д.С., Коновалова Д.С. Прямая и обратная задачи для волнового уравнения с разрывными коэффициентами // Науч.-тех. ведом. СПбГПУ. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 11. № 2. С. 61–72.
 18. Смирнов И.Н. Смешанные задачи для телеграфного уравнения, в случае системы, состоящей из двух участков, имеющих разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы // Доклады РАН. 2010. Т. 435. № 2. С. 172–177.
 19. Зверева М.Б., Найдюк Ф.О., Залукаева Ж.О. Моделирование колебаний сингулярной струны // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физ., мат. 2014. № 2. С. 111–119.
 20. Холодовский С.Е., Чухрий П.А. Задача о движении неограниченной кусочно-однородной струны // Уч. зап. Забайкальск. гос. ун-та. Сер. Физ. мат. техн. технол. 2018. Т. 13. № 4. С. 42–50.
<https://doi.org/10.21209/2308-8761-2018-13-4-42-50>
 21. Барсегян В.Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.
 22. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.

УДК 539.374

О ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ В МАТЕРИАЛЕ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ, НАСАЖЕННОГО НА ЖЕСТКИЙ ВАЛ
В УСЛОВИЯХ ЕГО ПЕРЕМЕННОГО ВРАЩЕНИЯ

© 2023 г. С. В. Фирсов^{а,*}

^аИМиМ, ХФИЦ ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация

^{*}*e-mail*: firsov.s.new@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.05.2022 г.

После доработки 24.05.2022 г.

Принята к публикации 26.05.2022 г.

Расчитывается развитие вязкопластического течения в материале цилиндрического слоя, помещенного на жесткий цилиндрический вал, и вращающегося вместе с ним вокруг их общей оси. Определяются в зависимости от возрастающей скорости вращения до максимальной место и моменты времени начала вязкопластического течения, закономерности продвижения области течения, изменяющиеся деформации и напряжения в деформируемом материале. В качестве условия вязкопластического течения принимается соответствующее обобщение условия максимальных октаэдрических напряжений. Для целей тестирования программ расчетов получено точное решение задачи об установившемся вязкопластическом течении материала при вращении составного цилиндра с постоянной скоростью.

Ключевые слова: упругость, вязкопластичность, вращающийся цилиндр, деформирование за счет инертностных сил

DOI: 10.31857/S0572329922600359, EDN: DFBVULC

1. Введение. С тех пор как был сформулирован практический интерес к задачам о приобретении материалом вращающихся цилиндров и дисков необратимых деформаций [1, 2] такая задача становится одной из классических для теории ползучести и теории пластического течения. Рассматривалась она неоднократно [3–7]. При использовании кусочно-линейных потенциалов (классических поверхностей нагружения) удалось получить точные или численно-аналитические решения задачи [8–10]. Совместное производство необратимых деформаций за счет инертностных массовых сил как в медленном процессе ползучести материала, так и в более быстром процессе пластического течения рассматривалось в [10, 11].

2. Исходные соотношения принимаемой математической модели. Деформируемый материал полагаем упруговязкопластическим, допускающим лишь малые деформации. Полные деформации $\mathbf{d}$ в материале считаем представленными суммой его обратимых (упругих) деформаций $\mathbf{e}$ и необратимых вязкопластических $\mathbf{p}$ деформаций

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad (2.1)$$

В (2.1) $\mathbf{u}$ — вектор перемещений. Упругие деформации задают напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ в деформируемом материале.

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\mathbf{e})\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e} \quad (2.2)$$

Здесь λ , μ – параметры Ламе, $\mathbf{I}$ – единичный тензор составленный из символов Кронекера. Пластические деформации производятся в материале в условиях принадлежности напряжений поверхности нагружений (текучести) в пространстве напряжений $f(\boldsymbol{\sigma}, k) = 0$ (k – предел текучести). В условиях принятия принципа Мизеса [12] функция $f(\boldsymbol{\sigma}, k)$ оказывается пластическим потенциалом со следованием ассоциированного с поверхностью нагружения закона пластического течения

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \Phi \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \Phi > 0 \quad (2.3)$$

В качестве условия пластического течения (поверхности нагружения) будем использовать следующее обобщение условия максимальных октаэдрических напряжений Мизеса [13, 14]

$$(\boldsymbol{\tau} - \eta\boldsymbol{\theta}) \cdot (\boldsymbol{\tau} - \eta\boldsymbol{\theta}) = \frac{8}{3}k^2, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.4)$$

Вместе с уравнением движения (равновесия) система уравнений (2.1)–(2.4) составляет замкнутую систему уравнений, которой подчинено деформирование упруговязкопластического тела.

3. Постановка задачи. Первоначальное упругое деформирование. Рассматриваем двухслойный вал конечной длины. Внутреннюю часть вала $0 \leq r \leq R_1$ полагаем абсолютно жесткой, а часть $R_1 \leq r \leq R_2$ деформируемой. Считаем, что вал вращается вокруг своей оси с переменной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$. Для деформаций материала такого составного цилиндра имеем в цилиндрической системе координат r, φ, z , связанной с вращающимся цилиндром

$$\begin{aligned} u_r &= u_r(r, t), \quad u_\varphi = u_\varphi(r, t), \quad u_z = 0, \quad d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = u_{r,r} \\ d_{\varphi\varphi} &= e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = r^{-1}u_r, \quad d_{zz} = e_{zz} + p_{zz}, \quad d_{\varphi r} = \frac{1}{2}(u_{\varphi,r} - r^{-1}u_\varphi) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Когда торцы жестко закреплены, тогда $d_{zz} = 0$. Если они свободны, то считаем $d_{zz} = f(t)$. Такой случай называют обобщенной плоской деформацией и для определения d_{zz} вводят ограничения на осевую нагрузку

$$2\pi \int_{R_1}^{R_2} r \sigma_{zz}(r, t) dr = 0 \quad (3.2)$$

Далее рассматривается такой случай. Уравнение движения во введенной системе координат принимают форму

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,r} + r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) &= -\rho r \omega^2 \\ \sigma_{\varphi r,r} + 2r^{-1}\sigma_{\varphi r} &= -\rho r \dot{\omega} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь, также как и в (3.1) индекс после запятой обозначает дифференцирование по данной пространственной переменной; точкой обозначается производная по времени. Введем безразмерные зависимые и независимые переменные

$$\begin{aligned} r &= R_2 \xi, \quad \sigma_{ij} = \sigma_0 \tilde{\sigma}_{ij}, \quad u_r = R_2 \tilde{u}_r, \quad u_\varphi = R_2 \tilde{u}_\varphi \\ \psi &= R_2 \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_0}} \omega, \quad t = R_2 \sqrt{\rho \sigma_0^{-1}} \tau \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для постоянных задачи принимаем

$$\xi_0 = \frac{R_1}{R_2} = 0.2, \quad \alpha = \frac{\lambda}{\sigma_0} = 250, \quad \beta = \frac{\mu}{\sigma_0} = 195, \quad \xi = \frac{\eta}{R_2 \sqrt{\rho \sigma_0}} = 100 \quad (3.5)$$

Здесь ρ – плотность деформируемого материала. Далее знак “~” опускаем, так как будут использоваться только безразмерные переменные. В безразмерных переменных уравнение (3.3) принимает форму

$$\begin{aligned} \xi^2 u_{r,\xi\xi} + \xi u_{r,\xi} - u_r &= -\frac{\xi^3 \psi^2}{\alpha + 2\beta} \\ \xi^2 u_{\varphi,\xi\xi} + \xi u_{\varphi,\xi} - u_\varphi &= -\frac{\xi^3 \dot{\psi}}{\beta} \end{aligned} \quad (3.6)$$

В (3.6) следует иметь ввиду, что $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{d\tau}$. Проинтегрировав (3.6), запишем

$$\begin{aligned} u_r &= c_1 \xi + c_2 \xi^{-1} - \frac{1}{8} \frac{\xi^3 \psi^2}{\alpha + 2\beta} \\ u_\varphi &= c_3 \xi + c_4 \xi^{-1} - \frac{\xi^3 \dot{\psi}}{8\beta} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для напряжений, следуя (2.2) найдем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2(\alpha + \beta) c_1 - 2\beta c_2 \xi^{-2} + \alpha d_{zz} - \frac{1}{4} \frac{2\alpha + 3\beta}{\alpha + 2\beta} \xi^2 \psi^2 \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2(\alpha + \beta) c_1 + 2\beta c_2 \xi^{-2} + \alpha d_{zz} - \frac{1}{4} \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} \xi^2 \psi^2 \\ \sigma_{zz} &= 2\alpha c_1 + (\alpha + 2\beta) d_{zz} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} \xi^2 \psi^2 \\ \sigma_{\varphi r} &= -2\beta c_4 \xi^{-2} - \frac{1}{4} \xi^2 \dot{\psi}^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из (3.2) находим d_{zz} , зависящую только от безразмерного времени τ

$$d_{zz} = \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} \left(\frac{1}{4} \frac{\xi_0^2 + 1}{\alpha + 2\beta} \psi^2 - 2c_1 \right) \quad (3.9)$$

Постоянные в каждый момент времени c_1, c_2, c_3, c_4 находим из граничных условий. Последние имеют вид

$$u_r(\xi_0, \tau) = 0, \quad u_\varphi(\xi_0, \tau) = 0, \quad \sigma_{rr}(1, \tau) = 0, \quad \sigma_{\varphi r}(1, \tau) = 0 \quad (3.10)$$

Выполняя условия (3.10), находим

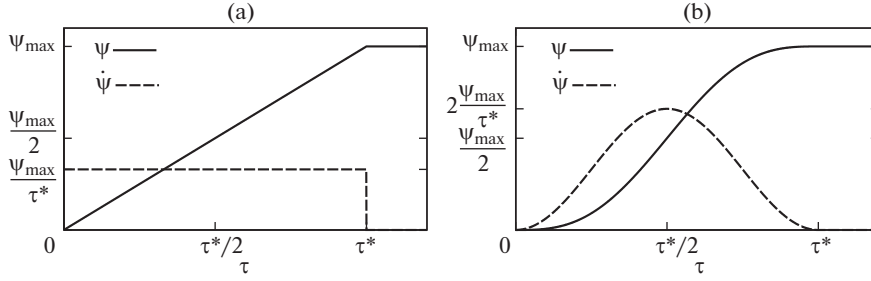


Рис. 1. Варианты задания угловой скорости $\psi(\tau)$ и ускорения $\dot{\psi}(\tau)$: линейная (а) и гладкая (б).

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{\beta(\alpha + 2\beta)\xi_0^4 - \alpha^2\xi_0^2 + (\alpha + \beta)(\alpha + 6\beta)}{8\beta(\alpha + 2\beta)((\alpha + 2\beta)\xi_0^2 + (3\alpha + 2\beta))} \psi^2 \\
 c_2 &= \frac{1}{8\beta} \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} \frac{(\alpha + 2\beta)\xi_0^2 - (\alpha + 6\beta)}{(\alpha + 2\beta)\xi_0^2 + (3\alpha + 2\beta)} \xi_0^2 \psi^2 \\
 c_3 &= \frac{\xi_0^4 + 1}{8\beta\xi_0^2} \dot{\psi}, \quad c_4 = -\frac{1}{8\beta} \dot{\psi}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Решение задачи (3.7)–(3.11) справедливо до моментов времени до наступления вязкопластического течения.

4. Вязкопластическое течение. Начало вязкопластического течения связано с выполнением в некоторый рассчитываемый момент времени условия (2.4). В такой начальный момент времени в (2.4) скорости необратимых деформаций θ следует положить равными нулю ($\theta = 0$). Во введенных безразмерных переменных условие (2.4) принимает форму

$$\Sigma = \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}\sigma_{zz} - \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{zz} - 3\sigma_{\varphi r}^2} = 1 \tag{4.1}$$

После подстановки в (4.1) напряжений, вычисленных согласно (3.8) и (3.11), находим, что это условие первоначально выполнится на поверхности $\xi = \xi_0$ ($\Sigma(\xi_0, \tau) = 1$). Это произойдет при следующих безразмерных значениях для угловой скорости ψ_p и углового ускорения $\dot{\psi}_p$

$$\begin{aligned}
 \psi_p^2 &= \frac{\alpha + 2\beta}{2\xi_0^2(1 - \xi_0^2)} ((\alpha + 2\beta)\xi_0^2 + 3\alpha + 2\beta) \sqrt{16\xi_0^4 - 9(1 - \xi_0^2)^2 \dot{\psi}_p^2 (3\alpha^4 + 27\alpha^3\beta +} \\
 &+ 85\alpha^2\beta^2 + 96\alpha\beta^3 + 36\beta^4 + \beta(\alpha + 2\beta)\xi_0^2(\beta(\alpha + 2\beta)\xi_0^2 + (3\alpha^2 + 16\alpha\beta + 12\beta^2)))}^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\dot{\psi} < \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\xi_0^2}{1 - \xi_0^2} \tag{4.3}$$

Вязкопластическое течение на поверхности $\xi = \xi_0$ может наступить при предельном значении $\dot{\psi}_p$, когда неравенство (4.3) обратится в равенство. При равноускорен-

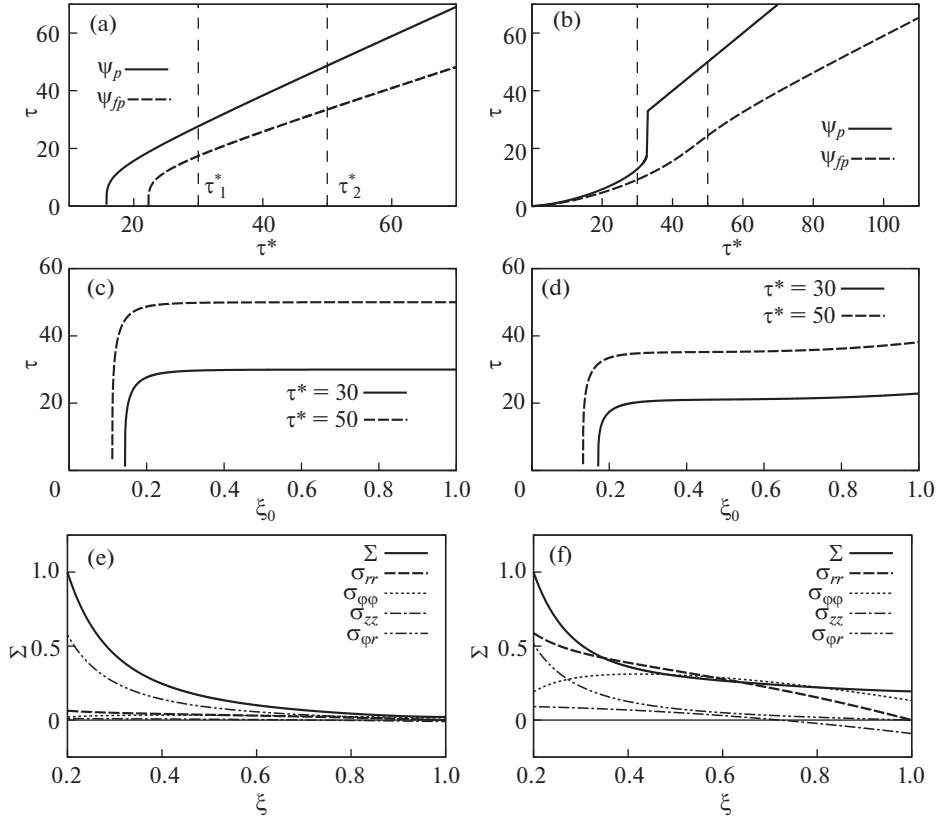


Рис. 2. Зависимость времени начала пластического течения от времени разгона τ^* при линейном росте угловой скорости (а) и при плавном (б), а также от положения внутренней границы ξ_0 для линейной зависимости при $\Psi_{\max} = \Psi_{fp}$ (с) и $\Psi_{\max} = \Psi_{fp}$ (д). Распределение напряжений в материале перед началом пластического течения при плавном разгоне и $\Psi_{\max} = \Psi_{fp}$ для $\tau^* = 30$ (е) и $\tau^* = 50$ (ф).

ном (с самого начала) вращения, когда задаваемая функция линейная ($\psi(\tau) = a\tau$) вязкопластическое течение наступает с момента начала вращения, если

$$a = \pm \frac{\xi_0^2}{\sqrt{3}(1 - \xi_0^2)}$$

Такой случай иллюстрируется зависимостями $\psi = \psi(\tau)$ и $\dot{\psi} = \dot{\psi}(\tau)$ на рис. 1а, где $\Psi_{\max}$ – предельно допустимая угловая скорость вращения, τ^* – момент времени, когда такая угловая скорость достигается. Здесь будем задавать вращение цилиндра, постулируя зависимости

$$\psi(\tau) = \Psi_{\max} \left(\frac{\tau}{\tau^*} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi\tau}{\tau^*} \right), \quad \dot{\psi}(\tau) = \frac{\Psi_{\max}}{\tau^*} \left(1 - \cos \frac{2\pi\tau}{\tau^*} \right) \quad (4.4)$$

Эти функции иллюстрируются графически на рис. 1б.

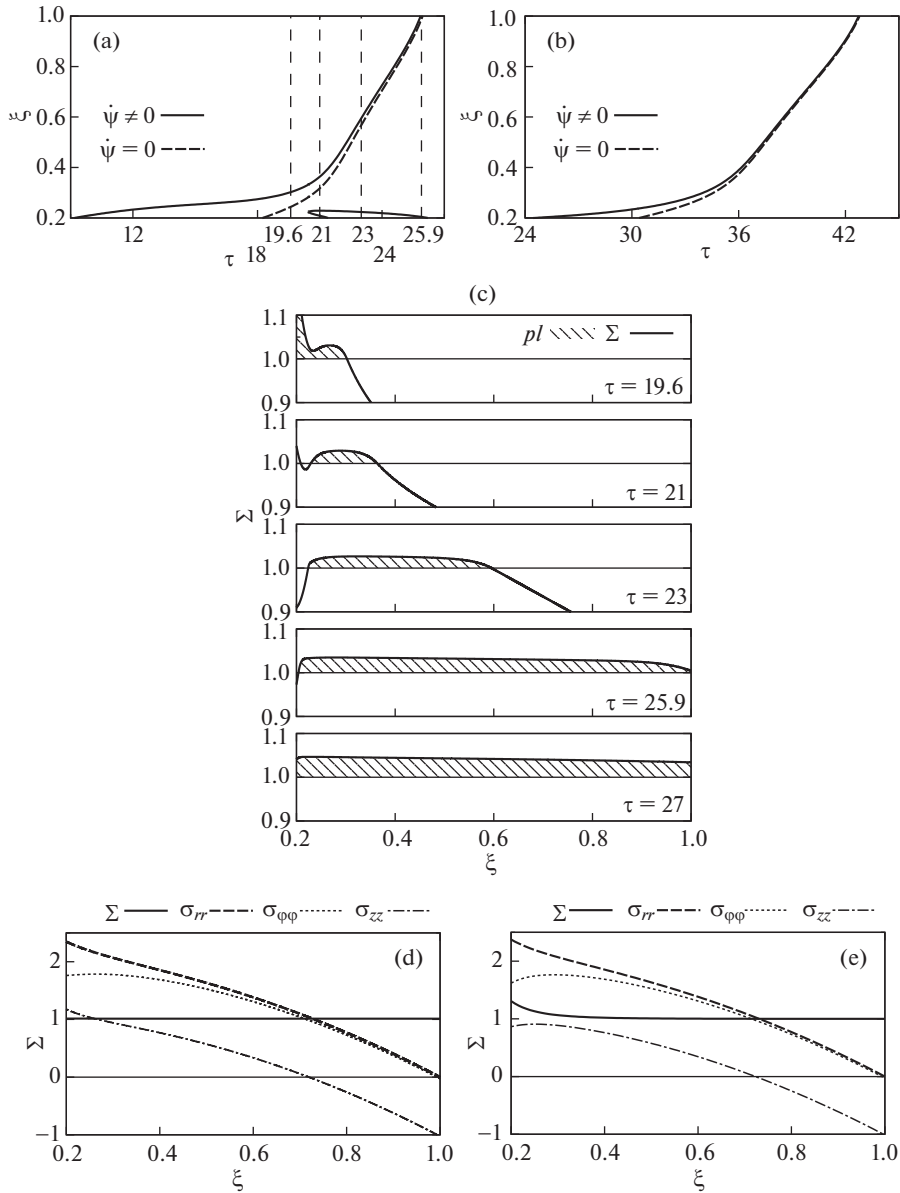


Рис. 3. Результаты численных расчетов. Движение границ областей пластического течения при $\tau^* = 30$ (a) и $\tau^* = 50$ (b). Распределение интенсивности напряжений Σ в различные моменты времени при $\tau^* = 30$ и с учетом углового ускорения (c). Распределение напряжений в среде при установившемся вязкопластическом течении при численном (d) и аналитическом (e) решениях.

Уравнения равновесия в перемещениях с учетом сил инерции (аналог (3.6)) теперь будут включать в себя неизвестные пластические деформации.

$$\begin{aligned} \xi^2 u_{r,\xi\xi} + \xi u_{r,\xi} - u_r &= \frac{2\beta}{\alpha + 2\beta} \xi(p_{\varphi\varphi} - p_{rr}) + \xi^2 p_{rr,\xi} + \xi^2 \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} (p_{\varphi\varphi,\xi} + p_{zz,\xi}) - \frac{\xi^3 \psi^2}{\alpha + 2\beta} \\ \xi^2 u_{\varphi,\xi\xi} + \xi u_{\varphi,\xi} - u_\varphi &= 4\xi p_{\varphi r} + 2\xi^2 p_{\varphi r,\xi} - \frac{\xi^3 \psi'}{\beta} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Запишем решение (4.5) в форме

$$\begin{aligned} u_r &= C_1 \xi + C_2 \xi^{-1} + \frac{\beta\beta}{\alpha + 2\beta} \Phi_1 + \xi^{-1} \Phi_2 - \frac{1}{8} \frac{\xi^3 \psi^2}{\alpha + 2\beta} \\ u_\varphi &= C_3 \xi + C_4 \xi^{-1} + 2\xi I_3 - \frac{\xi^3 \psi'}{8\beta} \\ \Phi_1(\xi, \tau) &= \int_{\xi_0}^{\xi} x^{-1} (p_{rr}(x, \tau) - p_{\varphi\varphi}(x, \tau)) dx \\ \Phi_2(\xi, \tau) &= \int_{\xi_0}^{\xi} x \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} (p_{rr}(x, \tau) + p_{\varphi\varphi}(x, \tau)) + \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} p_{zz}(x, \tau) \right) dx \\ \Phi_3(\xi, \tau) &= \int_{\xi_0}^{\xi} x^{-1} p_{\varphi r}(x, \tau) dx \end{aligned} \quad (4.6)$$

В (4.6) следует учитывать, что постоянные в рассматриваемый момент времени C_j ($j = 1, 2, 3, 4$) являются все же функциями безразмерного времени τ , а Φ_i ($i = 1, 2, 3$) определяются неизвестными пластическими деформациями. Для компонент тензора напряжений из (2.2) и (4.6) следуют зависимости

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2(\alpha + \beta)C_1 - 2\beta\xi^{-2}C_2 + \alpha d_{zz} + \frac{2\beta(\alpha + \beta)}{\alpha + 2\beta} \Phi_1 - 2\beta\xi^{-2}\Phi_2 - \frac{1}{4} \frac{2\alpha + 3\beta}{\alpha + 2\beta} \xi^2 \psi^2 \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2(\alpha + \beta)C_1 + 2\beta\xi^{-2}C_2 + \alpha d_{zz} - 2\beta \left(\frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} p_{zz} + 2 \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} p_{\varphi\varphi} \right) + \\ &\quad + 2\beta \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} \Phi_1 + 2\beta\xi^{-2}\Phi_2 - \frac{1}{4} \frac{2\alpha + 3\beta}{\alpha + 2\beta} \xi^2 \psi^2 \\ \sigma_{zz} &= 2\alpha C_1 + (\alpha + 2\beta)d_{zz} - 4\beta \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} p_{zz} + \frac{2\alpha\beta}{\alpha + 2\beta} (\Phi_1 - p_{\varphi\varphi}) - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} \xi^2 \psi^2 \\ \sigma_{\varphi r} &= -2\beta C_4 \xi^{-2} - \frac{1}{4} \xi^2 \psi' \end{aligned} \quad (4.7)$$

Выполняя ограничение (3.2), налагаемое на значение осевых усилий, находим

$$\begin{aligned} d_{zz} &= \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} \left(\frac{1}{4} \frac{\xi_0^2 + 1}{\alpha + 2\beta} \psi^2 - 2C_1 \right) + \frac{2\beta}{(\alpha + 2\beta)(\xi_0^2 - 1)} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} \Phi_1(1, \tau) - \Phi_4(1, \tau) \right) \\ \Phi_4(\xi, \tau) &= \int_{\xi_0}^{\xi} x \left(\frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} (p_{rr}(x, \tau) + p_{\varphi\varphi}(x, \tau)) + 4 \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} p_{zz}(x, \tau) \right) dx \end{aligned} \quad (4.8)$$

Исходя из граничных условий (3.10), вычисляем постоянные в этот момент времени C_j ($j = 1, 2, 3, 4$)

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \left((\alpha + 2\beta)(I_2(1, \tau) - I_1(1, \tau)) + \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} (1 - \xi_0^2)^{-1} (\alpha I_1(1, \tau) - I_4(1, \tau)) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\beta \xi_0^4 - \frac{\alpha^2 \xi_0^2}{\alpha + 2\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} (\alpha + 6\beta) \right) \frac{\Psi^2}{8\beta} \right) ((\alpha + 2\beta)\xi_0^2 + (3\alpha + 2\beta))^{-1} \\
 C_2 &= \xi_0^2 \left((\alpha + 2\beta)(I_1(1, \tau) - I_2(1, \tau)) + \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} \frac{I_4(1, \tau) - \alpha I_1(1, \tau)}{1 - \xi_0^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} ((\alpha + 2\beta)\xi_0^2 - (\alpha + 6\beta)) \frac{\Psi^2}{8\beta} \right) ((\alpha + 2\beta)\xi_0^2 + (3\alpha + 2\beta))^{-1} \\
 C_3 &= \frac{\xi_0^4 + 1}{8\beta \xi_0^2} \Psi, \quad C_4 = -\frac{1}{8\beta} \Psi
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

В соотношениях (4.6)–(4.9) компоненты пластических деформаций остаются неизвестными. Для отыскания распределения этих деформаций в каждый рассматриваемый момент времени следует воспользоваться ассоциированным с выбранной поверхностью нагружения (2.4) законом вязкопластического течения (2.3). Таким способом получаем

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial p_{rr}}{\partial \tau} = \frac{1}{3\xi} \frac{\Sigma - 1}{\Sigma} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}) \\
 \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial \tau} = \frac{1}{3\xi} \frac{\Sigma - 1}{\Sigma} (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}) \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial p_{zz}}{\partial \tau} = \frac{1}{3\xi} \frac{\Sigma - 1}{\Sigma} (2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \\
 \varepsilon_{\varphi r} &= \frac{\partial p_{\varphi r}}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\Sigma - 1}{\Sigma} \sigma_{\varphi r}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

В момент начала вязкопластического течения при $\Sigma = 1$ пластические деформации в деформируемом материале равны нулю. Для расчетов следующих шагов по времени представляем (4.10) его конечно-разностным аналогом, включая последний в общий алгоритм расчетов последовательными шагами по времени.

5. Некоторые результаты расчетов. Далее, если это специально не оговорено, результаты расчетов будут представляться при следующем выборе для постоянных деформируемого материала и его геометрии

$$\xi_0 = \frac{R_1}{R_2} = 0.2, \quad \alpha = \frac{\lambda}{\sigma_0} = 250, \quad \beta = \frac{\mu}{\sigma_0} = 195, \quad \xi = \frac{\eta}{R_2 \sqrt{\rho \sigma_0}} = 100 \tag{5.1}$$

Согласно (4.4) параметрами задачи являются $\Psi_{\max}$ и τ^* – момент времени, в который значение $\Psi_{\max}$ достигается. С целью задания (оценки) значения $\Psi_{\max}$ в (4.4) имеем возможность вычислить его в момент начала вязкопластического течения, если не учитывать угловое ускорение. Такое значение, согласно (4.2), оказалось равным $\Psi_{\max} = \Psi_p \approx 1.45893$. Другое значение $\Psi_{\max}$ можно связать с переходом всего материала деформируемой части вращающегося цилиндра в пластическое состояние. Тогда, по-

лагая угловое ускорение нулевым, получаем значение $\psi_{\max} = \psi_{fp} \approx 2.06118$. Дальнейшие результаты расчетов связываются с такими двумя значениями $\psi_{\max}$ в (4.4).

На рис. 2,а и рис. 2,б указывается безразмерное время τ начала вязкопластического течения в зависимости от назначаемого параметра τ^* . При этом на рис. 2,а данная зависимость получена при равноускоренном начальном вращении, а на рис. 2,б для закона вращения (4.4). Сплошная линия соответствует $\psi_{\max} = \psi_p$, пунктирная $\psi_{\max} = \psi_{fp}$.

В (5.1) геометрический параметр ξ_0 также является параметром задачи. Если фиксировать τ^* , то можно указать время начала вязкопластического течения в зависимости от назначаемого параметра ξ_0 . Такие графические зависимости представлены для $\psi_{\max} = \psi_p$ на рис. 2,с и для $\psi_{\max} = \psi_{fp}$ на рис. 2,д при $\tau^* = 30$ (сплошная линия) и $\tau^* = 50$ (пунктирная линия).

Распределение напряжений по деформируемому материалу перед началом пластического течения иллюстрируют графические зависимости рис. 2,е ($\tau^* = 30$) и рис. 2,ф ($\tau^* = 50$). При этом в (4.4) принимается, что $\psi_{\max} = \psi_{fp}$.

6. Установившееся вязкопластическое течение. Согласно (4.4) при $\tau \geq \tau^*$ $\psi(\tau) = \psi_{\max} - \text{const}$ и $\dot{\psi}(\tau) = 0$. Если $\psi_{\max} \geq \psi_{fp}$, то деформируемая часть $\xi_0 \leq \xi \leq 1$ вращающегося цилиндра будет находиться в пластическом состоянии. Возможно ли в таком случае предельное установившееся пластическое течение? Расчет параметров такого течения, покажем, что оно осуществляется. Из (3.1) в случае установившегося вязкопластического течения с учетом того, что скорости пластических деформаций отождествляются со скоростями полных деформаций, получаем

$$\epsilon_{rr} = v_{r,\xi}, \quad \epsilon_{\phi\phi} = \xi^{-1}v_r, \quad \epsilon_{zz} = \text{const}, \quad \epsilon_{\phi r} = \frac{1}{2}(v_{\phi,\xi} - \xi^{-1}v_{\phi}) \quad (6.1)$$

Учитывая, что согласно выбранному условию пластического течения деформируемый материал пластически несжимаем, запишем

$$v_{r,\xi} + \xi^{-1}v_r + \epsilon_{zz} = 0, \quad v_r = \xi^{-1}C_1 - \frac{1}{2}\xi\epsilon_{zz} \quad (6.2)$$

Если учесть кинематику такого установившегося вязкопластического течения (6.1) и (6.2), то из (4.10) следуют соотношения

$$\begin{aligned} C_1 &= \xi^2 \frac{\Sigma - 1}{2\xi\Sigma} (\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}) \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\Sigma - 1}{3\xi\Sigma} (2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}) \\ v_{\phi,\xi} - \xi^{-1}v_{\phi} &= 2 \frac{\Sigma - 1}{\xi\Sigma} \sigma_{\phi r} \\ \sigma_{zz} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{3\xi^2\epsilon_{zz}}{4C_1} \right) \sigma_{rr} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3\xi^2\epsilon_{zz}}{4C_1} \right) \sigma_{\phi\phi} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Проинтегрировав уравнение равновесия (3.3), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_2 - \xi\xi^{-2}C_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 \ln \xi - \ln \left(2 + \sqrt{4 + 3 \frac{\xi^4 \epsilon_{zz}^2}{C_1^2}} \right) \right) - \frac{1}{2} \xi^2 \psi^2 \\ \sigma_{\phi\phi} &= 2\xi\xi^{-2}C_1 + \sigma_{rr} + 4 \left(12 + 9 \frac{\xi^4 \epsilon_{zz}^2}{C_1^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \sigma_{\phi r} = \xi^{-2}C_3 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Постоянные интегрирования в рассматриваемый момент времени находим при выполнении граничных условий (3.10)

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \xi_0^2 \epsilon_{zz}, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0 \\ C_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln(2 + \sqrt{4 + 12\xi_0^4}) + \frac{1}{2} \xi \xi_0^2 \epsilon_{zz} + \frac{1}{2} \psi^2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Неизвестное ϵ_{zz} в (6.2)–(6.5) вычисляется при выполнении условия (3.2)

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{2\xi \xi_0^4 + 2\xi_0^2 - 3} \psi^2 + \frac{2}{\sqrt{3}\xi \xi_0^4 + 2\xi_0^2 - 3} \left(\sqrt{1 + 3\xi_0^4} - \ln \left(\frac{1}{3} (\xi_0^2 + \sqrt{\xi_0^4 + 3}) \right) - 2 \right) \quad (6.6)$$

Для того, чтобы установившееся вязкопластическое течение в соответствии с точным решением (6.2)–(6.6) осуществилось необходимо, чтобы угловая скорость достигла значения ψ_{fp} . Для этого $\psi_{\max}$ в (4.4) должно быть не меньше этого значения. Зависимости (6.4)–(6.5) позволяют вычислить данное значение условием $\Sigma(1, \tau) \geq 1$

$$\psi_{fp} \geq \frac{2}{1 - \xi_0^2} \sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{3 - 3\xi_0^4 - 4\xi_0^2}{\sqrt{\xi_0^4 + 3}} + \xi_0^2} \left(2 - \ln \frac{3}{\xi_0^2 + \sqrt{\xi_0^4 + 3}} \right) \quad (6.7)$$

Наименьшее из возможных ψ_{fp} использовалось при задании вращения в (4.4) $\psi_{\max} = \psi_{fp} \approx 2.06118$, когда проводились численные расчеты (рис. 3).

Сравнение результатов численных расчетов с аналогичными, получаемыми при точном решении задачи, приведено на рис. 3, d и e соответственно, где представлено распределение напряжений в материале. Сравнение показывает, что численное решение оказывается близким к точному, за исключением значений для безразмерной σ_{zz} . Несовпадение тем больше, чем ближе подходим к жесткой поверхности $\xi_0 = 0.2$. На том же рис. 3, a, b представлено развитие области вязкопластического течения при $\tau^* = 30$ и $\tau^* = 50$ соответственно. Очень часто [4–9] угловым ускорением при начале вращения пренебрегают, что делает задачу зависящей от одной переменной и приводит к значительным ее упрощениям. На рис. 3, a графиком предстает закон продвижения упруговязкопластической границы в двух случаях: при учете в расчетах изменяющегося углового ускорения $\dot{\psi}(\tau)$ (сплошная линия) и без такого учета (пунктирная). Учет в расчетах углового ускорения приводит не только к более быстрому возникновению области вязкопластического течения, но и появлению области обратимого деформирования в окрестности поверхности ξ_0 . Однако такой эффект характерен только при быстром разгоне (например при $\tau^* = 30$, как на рис. 3, a); при $\tau^* = 50$ он уже не проявляется (рис. 3, b).

Изменение безразмерного Σ при разгоне вращения графически показано на рис. 3, c. В качестве времени данного разгонного участка принято $\tau^* = 30$. Заштрихованные области – области где происходит вязкопластическое течение материала. $\psi_{\max}$ в (4.4) выбрано $\psi_{\max} = \psi_{fp}$, что обеспечивает распространение вязкопластического течения на всю деформируемую часть цилиндра $0.2 \leq \xi \leq 1$.

7. Заключение. В отличие от большинства публикаций [4–9] где на разгонном участке вращения дисков и цилиндров пренебрегается угловым ускорением, считая, что угловая скорость меняется достаточно медленно, здесь рассмотрен именно быстрый разгон вращения. В некоторых случаях приводится сравнение со случаем медленного разгона и указываются качественные отличия в процессе деформирования, вызываемые быстрым изменением угловой скорости вращения. Необходимо отметить работу [10], где также учитывались окружные силы инерции, определяемые угловым ускорением, но в иной постановке.

Основным средством тестирования программ расчетов являются точные решения упругой задачи, задающие изменения напряжений и деформаций на начальной стадии процесса, и, что более важно, точное решение задачи об установившемся вязкопластическом течении. В последнем случае весь деформируемый материал подвержен вязкопластическому течению в условии постоянства угловой скорости вращения.

Работа выполнена в рамках госзадания ХФИЦ ДВО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 2014. 752 p.
2. *Nadai A.* Theory of Flow and Fracture of Solids. McGraw Hill, 1950. 572 p.
3. *Gamer U., Sayir M.* Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // ZAMP. 1984. V. 35. № 5. P. 601–617.
<https://doi.org/10.1007/BF00952107>
4. *Mack W.* The rotating elastic-plastic solid shaft with free ends // Tech. Mech. 1991. № 12. P. 119–124.
5. *Mack W.* Rotating elastic-plastic tube with free ends // Int. J. Solids Struct. 1991. V. 27. № 11. P. 1461–1476.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(91\)90042-E](https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90042-E)
6. *Gamer U., Mack W., Varga I.* Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends // Int. J. Eng. Sci. 1997. V. 35. № 3. P. 253–267.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(96\)00085-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(96)00085-7)
7. *Прокудин А.Н., Фирсов С.В.* Вязкопластическое течение вращающегося полого цилиндра // Дальневосточный математический журнал. 2018. V. 18. № 2. P. 242–260.
8. *Прокудин А.Н., Буренин А.А.* Упругопластическое деформирование вращающегося сплошного цилиндра из линейно-упрочняющегося материала // ПММ. 2021. V. 85. № 2. P. 172–192.
<https://doi.org/10.31857/S0032823521020077>
9. *Прокудин А.Н., Буренин А.А.* Анализ упругопластического деформирования вращающегося сплошного цилиндра при общем кусочно-линейном условии пластичности // ПМТФ. 2021. V. 62. № 5 (369). P. 68–79.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20210507>
10. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Prokudin A.N.* Irreversible deformation of a rotating disk having angular acceleration // Acta Mech. 2021. V. 232. № 5. P. 1917–1931.
<https://doi.org/10.1007/s00707-021-02942-5>
11. *Firsov S.V., Prokudin A.N., Burenin A.A.* Creep and plastic flow in a rotating cylinder with a rigid inclusion // J. Appl. Industr. Math. 2019. V. 13. № 4. P. 642–652.
<https://doi.org/10.1134/S199047891904001X>
12. *Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д.* Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 p.
13. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1988. 208 p.
14. *Ковтанюк Л.В., Шитиков А.В.* О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов // Вестник ДВО РАН. 2006. № 4. P. 87–93.

УДК 534.01:539.6

ВСПЛЫТИЕ ПОДВОДНОГО ГАЗОВОГО ТРУБОПРОВОДА

© 2023 г. М. А. Ильгамов^{a,b,c,*}

^aИнститут машиноведения им А.А. Благодного РАН, Москва, Россия

^bБашкирский государственный университет, Уфа, Россия

^cИнститут механики УФИЦ РАН, Уфа, Россия

*e-mail: ilgatov@anrb.ru

Поступила в редакцию 27.06.2022 г.

После доработки 05.07.2022 г.

Принята к публикации 07.07.2022 г.

Изучен линейный и нелинейный изгиб пролета подводного трубопровода между двумя опорами. Учитываются вес трубопровода с транспортируемой средой, выталкивающая сила воды, поперечные распределенные силы, обусловленные давлениями на внутреннюю и внешнюю поверхности, изменением кривизны осевой линии при изгибе, а также уменьшение среднего давления на стенки трубы при ее подъеме. Опоры допускают перемещение в осевом направлении пропорционально возникающему усилию. Статический изгиб трубопровода рассматривается до положения, совпадающего с поверхностью воды. Приведен параметрический анализ изгиба, в частности, в зависимости от давления газа и глубины водоема. Определены условия всплытия трубопровода.

Ключевые слова: подводный трубопровод, давления воды и газа, изгиб

DOI: 10.31857/S0572329922600487, **EDN:** DGBKTM

1. Введение. Всплытие подводного трубопровода сопровождается изгибом его некоторой части. Анализ этого изгиба и возможного всплытия является необходимым с практической точки зрения [1–3]. Такое равновесное положение сооружения является недопустимым для его безопасной эксплуатации.

Подъем более тяжелого трубопровода, чем подъемная сила воды, вызывается температурным удлинением при сезонном нагреве воды, изменением температуры перекачиваемого газа, отсутствием возможности изгибаться по дну водоема для компенсации указанного удлинения, изменением рельефа дна (подъем, опускание, сдвиги), донных течений и т.д. Наибольшая вероятность всплытия наступает при одновременной реализации указанных факторов. Возможно, играют роль малые на первый взгляд факторы, проявляющиеся одновременно с другими. В литературе отмечается недостаточная разработанность механизмов явления. Обычным является недостаток информации о причинах наступившего происшествия. В качестве примера можно привести всплытие двух обетонированных газовых трубопроводов “Бованенково–Ухта-2”, проложенных рядом с другими трубопроводами и находящихся в одинаковых условиях с ними в Байдарацкой бухте (залив Карского моря, глубина 20 м, внутренний диаметр стальной трубы 1.20 м, рабочее давление 12 МПа, лето 2021 года).

Свариваемые между собой секции трубопровода изготавливаются из стальной трубы, с которой с помощью вставок центрируется стальная цилиндрическая оболочка большего диаметра. Кольцевое пространство между ними заполняется бетонным раствором. Такая слоистая конструкция обеспечивает необходимые балластные, тепло-

изоляционные, антикоррозионные свойства, защищает от механических повреждений внутреннюю трубу [2–7].

Большое внимание уделено анализу прочности и статической продольной устойчивости трубопровода при различных условиях взаимодействия с основанием на земле, под землей, под водой [4–13]. Упругое выпучивание вверх подводного трубопровода является спусковым механизмом для его дальнейшего подъема. При этом важным является учет начальной кривизны осевой линии, так как ее наличие обуславливает дальнейший подъем сооружения [9, 10]. Кроме указанных выше определяющими факторами являются осевые сжимающие силы, возможное уменьшение разности веса конструкции и подъемной силы воды в силу разных причин. Определенную роль играют колебания давления газа с частотой перекачивающих станций, возникающие ударные явления, землетрясения [14]. Изучается подъем трубопровода в результате вибрации опор. Задачи изгиба трубопровода ставятся в линейной и нелинейной постановке. Развита аналитические и численные методы. Обширный обзор литературы дан в [15].

При анализе явления представляется необходимым учет взаимодействия кривизны осевой линии трубопровода и давлений воды и газа [16]. В [17] предложена простейшая модель всплытия с учетом изменения давления воды и газа при подъеме трубопровода. В данной работе эта модель обобщается с учетом упругой реакции опор на продольное перемещение трубы, осевой силы, зависящей от угла поворота сечения, осевой и кольцевой деформации трубы, температурного расширения. Учет взаимодействия силы растяжения с кривизной осевой линии трубы приводит к уточнению распределенной поперечной силы. Кроме того дается строгий вывод выражения поперечной силы в зависимости от давления воды и газа, подъема трубы и кривизны осевой линии. Такое обобщение позволяет описывать подъем трубопровода, в частности, под действием давления газа, превышающего критическое внутреннее давление в трубе. Могут быть рассмотрены также другие режимы всплытия, которые не описываются приближенной моделью [17].

Во всех указанных работах принимаются допущения о том, что при изгибе круговая форма поперечного сечения трубопровода не меняется, это сечение перпендикулярно осевой линии, напряжения в поперечном направлении малы по сравнению с напряжением в продольном направлении (гипотезы Кирхгоффа). Эти допущения приемлемы, если диаметр трубопровода и его прогиб малы по сравнению с длиной волны изгиба. Как правило, указанные условия практически выполняются для магистральных и промысловых газовых трубопроводов.

При допущениях, указанных выше, жесткость растяжения K и изгибная жесткость D трубопроводов и других подобных сооружений (например, слоистого сверхпроводящего кабеля [18]) определяется суммой жесткостей n слоев со своими модулями упругости E_n , средними радиусами R_n и толщинами h_n . Так же определяется общий вес ρF на единицу длины трубопровода. В данном случае имеются три концентрических цилиндрических слоя, для которых

$$K = 2\pi \sum_{n=1}^3 E_n R_n h_n, \quad D = \pi \sum_{n=1}^3 E_n R_n^3 h_n, \quad \rho F = 2\pi \sum_{n=1}^3 \rho_n R_n h_n \quad (1.1)$$

где ρ – средний удельный вес, ρ_n – удельный вес слоя, F – общая площадь поперечного сечения трубы. При записи (1.1) предполагается $h_n \ll R_n$. Используется следующее уравнение статического изгиба трубопровода

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{d}{dx} \left(N \frac{dw}{dx} \right) = -\rho F + q \quad (1.2)$$

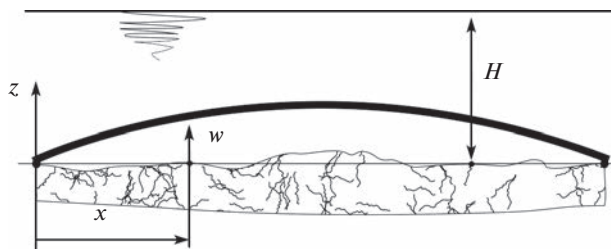
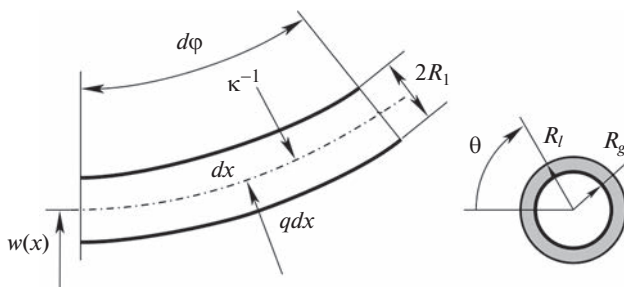


Рис. 1. Схема подводного трубопровода.


 Рис. 2. Элемент dx с плоскими поперечными сечениями, перпендикулярными к изогнутой осевой линии.

где положительное направление прогиба осевой линии $w(x)$ принято вверх, x — координата вдоль оси, N , q — продольная растягивающая и поперечная распределенная силы.

2. Постановка задачи. На рис. 1 приводится схема пролета трубопровода длиной L между опорами на дне водоема глубиной H . Имеется некоторый подъем дна между опорами, максимальное значение прогиба w не превышает глубины H . Будем предполагать, что $L/H > 10$, изогнутая форма трубопровода является пологой кривой, угол поворота поперечного сечения мал по сравнению с единицей, поперечное сечение остается круговым и перпендикулярным к осевой линии. Подъем трубопровода происходит медленно, поэтому инерционные силы в системе и гидродинамические силы в результате обтекания водой не учитываются. В этих предположениях будем пользоваться уравнением изгиба (1.2) и определять устойчивые изогнутые положения равновесия трубопровода. Как противоположный пример, где существенны инерционные силы, внешнее обтекание водой, изменение объема, его формы и Архимедовой силы, приведем всплытие газового пузыря после подводного взрыва [19].

Опоры находятся на одном уровне и неподвижны в вертикальном направлении. Одна из них обладает конечной жесткостью C в горизонтальном направлении, другая — абсолютно жесткая. Примем относительно функций продольного перемещения $u(x)$ и прогиба $w(x)$ условия

$$\begin{aligned} N = Cu, \quad w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = B \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (x = 0) \\ u = 0, \quad w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = B \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (x = L) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где B и C — жесткости опор на поворот сечения трубы и продольное перемещение.

Поперечная распределенная нагрузка q , входящая в (1.2), обусловлена воздействием сред на внешнюю и внутреннюю поверхности трубы ($q = q_l + q_g$). На рис. 2 изображен изогнутый элемент $dx = \kappa^{-1}d\varphi$ трубы. Элементарная площадка на внешней поверхности равна $(\kappa^{-1} - R_l \sin \theta)R_l d\varphi d\theta$, где κ – кривизна осевой линии, R_l – радиус внешней поверхности трубы, θ – центральный угол в поперечном сечении. Так как давление воды на уровне опор ($z = 0$) и на уровне осевой линии с прогибом $z = w$ равно соответственно $\rho_l H$ и $\rho_l(H - w)$, то на внешней поверхности изогнутой трубы оно изменяется по закону $\rho_l(H - w - R_l \sin \theta)$, где ρ_l – удельный вес. Элементарная поперечная сила от этого давления, приходящаяся на длину dx осевой линии, равна

$$q_l R_l dx d\theta = -\rho_l R_l (\kappa^{-1} - R_l \sin \theta) (H - w - R_l \sin \theta) \sin \theta dx d\theta$$

Ввиду показанного на рис. 2 начала угла θ здесь в правой части взят знак минус. Из-за оговоренной выше пологости осевой линии трубопровода $((dw/dx)^2 \ll 1)$ принято $\cos(dw/dx) \approx 1$. Проинтегрировав это выражение по θ в пределах от 0 до 2π и учитывая $dx = \kappa^{-1}d\varphi$, получаем

$$q_l = \rho_l F_l + \rho_l F_l (H - w) \kappa, \quad F_l = \pi R_l^2 \quad (2.2)$$

Как известно, давление и плотность газа по высоте убывают по экспоненте. Но до высот порядка 10^3 м может быть взят линейный закон. Давление $p_g(w)$ и плотность $\rho_g(w)$ на уровне $z = w(x)$ примем приближенно

$$\frac{p_g(w)}{p_g} = 1 - \frac{\rho_g w}{p_g}, \quad \frac{\rho_g(w)}{\rho_g} = 1 - \frac{\rho_g w}{p_g} \quad (2.3)$$

где ρ_g, p_g – значения их на уровне опор ($z = 0$). Они связаны между собой изотермическим законом. Отметим, при $w = 100$ м и атмосферных значениях параметров по (2.3) получаем уменьшение плотности и давления на 1% (известная оценка из аэростатики).

Для определения распределенной поперечной силы q_g нужно повторить приведенный выше вывод для q_l . С учетом (2.3) получаем давление на внутреннюю стенку трубы $p_g - \rho_g(w + R_g \sin \theta)$. Элементарная площадка определяется так же, что выше, но вместо R_l нужно подставить радиус внутренней поверхности R_g . Тогда вместо (2.2) имеем

$$q_g = -\rho_g F_g \left(1 - \frac{\rho_g w}{p_g} \right) - (p_g - \rho_g w) F_g \kappa, \quad F_g = \pi R_g^2 \quad (2.4)$$

Первые члены в (2.2) и (2.4) дают подъемную силу воды (Архимедову силу) и вес газа в зависимости от высоты подъема. Второй член в скобках в (2.4) дает поперечную силу на уровне $z = w$. В выражении (2.4) сохранены члены с множителем w только в первой степени. С учетом $q = q_l + q_g$, выражений (2.2), (2.4) и связи кривизны осевой линии с прогибом $\kappa \approx d^2 w / dx^2$ получаем

$$q = \rho_l F_l - \rho_g F_g \left(1 - \frac{\rho_g w}{p_g} \right) + (\rho_l F_l H - p_g F_g - (\rho_l F_l - \rho_g F_g) w) \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.5)$$

При определении продольного усилия N нужно рассмотреть осесимметричную и продольную деформацию трубы под действием давлений воды и газа. Для этого привлекаем загон Гука в осесимметричном случае

$$N_x \approx \frac{K(\epsilon_x + v\epsilon_\theta)}{2\pi R(1 - v^2)}, \quad N_\theta \approx \frac{K(\epsilon_\theta + v\epsilon_x)}{2\pi R(1 - v^2)} \quad (2.6)$$

$$R = \frac{1}{3}(R_1 + R_2 + R_3), \quad v = \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3)$$

Здесь осевое и окружное усилия N_x , N_θ приходятся на единицу длины в окружном и осевом направлениях. Так как согласно (1.1) жесткость растяжения K записана для всей трубы, то в уравнениях (2.6) есть деление на $2\pi R$. Величины R , v и ϵ_θ , ϵ_x являются средними значениями радиуса, коэффициента Пуассона и деформаций в слоистой трубе. Они являются сугубо приближенными, как и выражения (1.1). Погрешности их уменьшаются с уменьшением отношения R_l/R_g .

Исключив ϵ_θ в (2.6), получаем

$$N_x = \frac{K\epsilon_x}{2\pi R} + vN_\theta \quad (2.7)$$

Второй член в (2.7), содержащий коэффициент v , является поправочным, поэтому ограничиваемся приближенным определением силы N_θ , не учитывая изменения ее в зависимости от w . Из уравнения равновесия $(p_g R_g - p_l R_l) d\theta - 2N_\theta \sin(d\theta/2) = 0$ (рис. 2) следует $N_\theta = (p_g R_g - p_l R_l)$. Исключив N_θ в выражении (2.7), получаем

$$N_x = \frac{K\epsilon_x}{2\pi R} + v(p_g R_g - p_l R_l) - \frac{KaT}{2\pi R} \quad (2.8)$$

где учтена также температурная деформация с коэффициентом a [3, 4]. Здесь T — разность температур в рассматриваемое время и при монтаже сооружения. Значения a и T считаем постоянными по всей длине L .

С учетом средней упругой деформации по толщине стенки трубы

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2$$

а также $N \approx 2\pi R N_x$, $\pi R(p_g R_g - p_l R_l) \approx p_g F_g - p_l F_l$, выражение (2.8) запишем в виде

$$\frac{du}{dx} = \frac{N - 2v(p_g F_g - p_l F_l)}{K} - \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + aT$$

Проинтегрируем это выражение по x от 0 до L . При этом левая часть его равна $u(L) - u(0)$. Из условий (2.1) следует $u(L) = 0$, $u(0) = N/C$. Тогда получаем следующее выражение для осевого усилия

$$N = \frac{K}{1 + \lambda} \left(\frac{1}{2L} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx - aT \right) + \frac{2v(p_g F_g - p_l F_l)}{1 + \lambda}, \quad \lambda = \frac{K}{CL} \quad (2.9)$$

Подставив (2.5) и (2.9) в уравнение (1.2), получаем уравнение

$$\begin{aligned}
& \frac{d^4 w}{d\xi^4} + \left(\alpha + \mu w - \eta \int_0^\pi \left(\frac{dw}{d\xi} \right)^2 d\xi \right) \frac{d^2 w}{d\xi^2} - \beta w = \gamma \\
& \alpha = \frac{(p_g F_g - \rho_l F_l H)(1 - \chi)}{P_*} + \frac{KaT}{(1 + \lambda)P_*}, \quad P_* = \frac{\pi^2 D}{L^2} \\
& \chi = \frac{2\nu}{1 + \lambda}, \quad \beta = \frac{\rho_g^2 F_g L^2}{\pi^2 p_g P_*}, \quad \mu = \frac{(\rho_l F_l - \rho_g F_g) L}{P_*} \\
& \eta = \frac{\pi K}{2P_* (1 + \lambda)}, \quad \gamma = \frac{(\rho_l F_l - \rho F - \rho_g F_g) L}{\pi^2 P_*}, \quad \xi = \frac{\pi x}{L}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

где прогиб w отнесен к длине L .

Независимые параметры α , β , μ , η , γ , χ , λ и члены уравнения (2.10) являются безразмерными. Все параметры возрастают с уменьшением величины P_* , представляющей собой критическое значение осевой сжимающей силы на трубу (Эйлеровое значение). Параметр α характеризует влияние давлений газа и воды, а также температурного расширения на изгиб трубопровода. В его составе параметром χ учитывается отношение жесткостей трубы и опоры в продольном направлении (при малом их отношении $\lambda \rightarrow 0$, $\chi \rightarrow 2\nu$, при большом отношении $\lambda \rightarrow \infty$, $\chi \rightarrow 0$). Параметрами β и μ учитываются влияние уменьшения веса газа и его давления на стенку трубы с подъемом на величину w (в составе μ учитывается также уменьшение давления воды). Параметр η характеризует влияние на изгиб продольной растягивающей силы, возникающей в результате подъема трубы, зависит от жесткости на растяжение и указанного выше отношения жесткостей (λ). Параметр γ представляет собой разность подъемной силы воды и веса трубы и содержащегося в ней газа, поделенную на критическую силу сжатия.

При решении уравнения (2.10) ограничимся случаем больших значений B в условиях закрепления (2.1) и примем $d^2 w / d\xi^2 = 0$ ($\xi = 0, \pi$). Такое приближение является приемлемым во многих случаях нелинейного изгиба [20]. Отметим, что условия относительно продольного перемещения выполнены при выводе уравнения (2.10). Решение (2.10) будем искать в виде ряда по $\sin n\xi$, где $n = 1, 3, \dots$ ввиду симметрии изгиба относительно середины пролета. Этот ряд быстро сходится из-за наличия в (2.10) члена с четвертой производной. Например, при $\alpha = \beta = \mu = \eta = 0$ сходимость n^{-5} (при указанных ненулевых параметрах она ухудшается). Поэтому ограничиваемся применением только аппроксимации $w = W \sin \xi$. Подставив ее в (2.10), умножив на $\sin \xi$ и проинтегрировав в пределах от 0 до π , получаем приближенное уравнение относительно прогиба в середине пролета

$$\pi^2 \eta W^3 - 5\mu W^2 + 2\pi(1 - \alpha - \beta)W - 8\gamma = 0 \tag{2.11}$$

Анализ поведения трубопровода в общем случае со многими входными параметрами по (2.11) требует специального рассмотрения. Здесь ограничимся анализом некоторых характерных частных случаев. Исключим из рассмотрения влияние температурного расширения, так как оно затрагивается в работах [4–7, 13]. Основное внимание уделим выяснению роли давления газа. Температурный фактор усиливает эту роль при изгибе трубопровода.

3. Подъем при высоком давлении газа и малом превышении веса трубопровода над подъемной силой. При высоком давлении газа предполагаем $\alpha \gg 1 - \beta$, а малом отклонении веса трубопровода от Архимедовой силы $2\pi\alpha W \gg 8|\gamma|$. Так как максимальное значение $W = (H - R_l)/L$, то последнее условие может быть записано $\alpha H \gg |\gamma|L$. Здесь учтено $R_l \ll H$. Приближенное решение уравнения (2.11) примем в виде суммы $W = W_\alpha +$

+ W_γ , где W_α – прогиб, обусловленный давлением газа и воды, W_γ – прогиб, обусловленный плавучестью трубопровода и другими параметрами. Исследуем случай преобладающего вклада давления газа на значение прогиба над вкладом веса и подъемной силы. В приближенном решении будем пренебрегать W_γ^2 по сравнению с W_α^2 .

Подставляя указанную сумму в (2.11), получаем уравнения

$$\begin{aligned} W_\alpha[\pi\eta W_\alpha^2 + 2(1 - \alpha - \beta)] &= 0 \\ W_\gamma[3\pi^2\eta W_\alpha^2 - 10\mu W_\alpha + 2\pi(1 - \alpha - \beta)] &= 8\gamma + 5\mu W_\alpha^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Три корня первого уравнения (3.1) имеют вид

$$W_\alpha = 0, \quad W_\alpha = \pm \sqrt{\frac{2(\alpha + \beta - 1)}{\pi\eta}} \quad (3.2)$$

Значение W_γ из второго уравнения (3.1), соответствующее корню $W_\alpha = 0$,

$$W_\gamma = \frac{4\gamma}{\pi(1 - \alpha - \beta)} \quad (3.3)$$

представляет собой также решение линейного уравнения (2.11) при $\eta = 0$, $\mu = 0$ и условии $\alpha < 1 - \beta$. Им не охватывается поведение трубопровода, зависящее от параметров упругой нелинейности, препятствия опор изгибу и от изменения давления воды и газа при подъеме. Значение $\alpha = 1 - \beta$ является критическим, при котором линейное решение (3.3) неограниченно возрастает. При соответствующем внутреннем перепаде давления теряется устойчивость прямолинейной формы трубы [16]. Корни $W_\alpha = 0$ и (3.3) не удовлетворяют названным вначале раздела условиям и далее не рассматриваются.

Ненулевые значения W_α соответствуют нелинейному изгибу после потери устойчивости. Знаки их определяются начальным отклонением трубы вверх или вниз от прямой, соединяющей опоры.

Вследствие принятого выше положительного направления прогиба и сил решение (3.2) со знаком плюс определяет подъем трубопровода под действием внутреннего давления в трубе. Подставив W_α во второе уравнение (3.1), получаем выражение для W_γ . Поэтому общий прогиб равен

$$W = W_\alpha + W_\gamma = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi\eta}} + \frac{4\pi\eta\gamma + 5\mu\alpha}{2\pi^2\eta\alpha - 5\mu\sqrt{2\pi\eta\alpha}} \quad (3.4)$$

Так как превышению веса над подъемной силой соответствует $\gamma < 0$, то в (3.4) значение W отличается от $\sqrt{2\alpha/(\pi\eta)}$ в зависимости от соотношения членов в числителе и знаменателе второго члена (3.4). Такие устойчивые равновесные положения могут быть реализованы при дополнительных условиях, задаваемых в конкретных случаях.

Принимая для середины пролета трубопровода значение безразмерного прогиба равным $W \approx H/L$, из (3.4) получаем критерий всплытия. В частности, из этого критерия может быть определено то значение параметра α (внутреннего перепада давления), когда происходит всплытие трубопровода, при других известных входных параметрах. При отношении L/H порядка 10^2 и более критерий может быть упрощен. В исходных параметрах он может быть представлен в виде

$$\frac{H}{L} = \sqrt{\frac{2p_g F_g}{\pi^3 E R h}} + \frac{2L(\rho F - \rho_l F_l)}{\pi^3 p_g F_g} \quad (3.5)$$

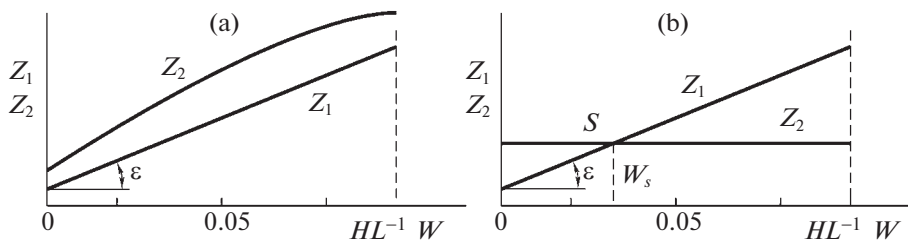


Рис. 3. Изменение сил, направленных вверх (Z_1) и вниз (Z_2), по мере поднятия трубопровода, определяемой отношением прогиба середины пролета к его длине W , в случае $\rho F > \rho_l F_l$; a – отсутствие всплытия, b – возможное всплытие.

Значение W_α с отрицательным знаком в (3.2) реализуется, если имеется углубление дна водоема между опорами и $\gamma < 0$. Тогда общий прогиб определяется выражением (3.4), в знаменателе второго члена в нем знак минус заменяется на плюс.

В зависимости от входных параметров опускание и подъем трубопровода отличаются по величине. Такое поведение определяется параметром μ , которым учитывается изменение давления воды и газа на стенки трубы при ее изгибе. Если не учитывать это изменение (как в [6–13]), то получаются одинаковые значения подъема и опускания трубопровода.

Верхний предел давления газа определяется прочностью трубы. Размеры стальных магистральных, технологических и промысловых труб определяются по ГОСТ 20295-74. Например, для трубы средним диаметром $2R = 0.524$ м и толщиной $h = 0.006$ м кольцевое растягивающее напряжение равно $\sigma_\theta \approx p_g R/h = 44p_g$. Должно быть $m\sigma_\theta = \sigma_b$, где предел прочности $\sigma_b = 600$ МПа, m – запас прочности, который задается нормами в соответствующей области применения труб (примем $m = 1.5$). Поэтому для данной трубы максимально допустимое давление газа $p_g = 9.1$ МПа. Если ее толщина составляет $h = 0.01$ м, то $p_g = 16.6$ МПа. Для трехслойной трубы можно принять эти же оценки с большим запасом прочности, чем $m = 1.5$, за счет наличия двух внешних слоев.

В принятом выше условии $\alpha \gg 1 - \beta$ примем $T = 0$. Оценки показывают, что β значительно меньше единицы. Тогда это условие приобретает вид $p_g F_g \gg P_*$. Для однослойной трубы $P_* = \pi^2 D L^{-2} = \pi^3 E R^3 h L^{-2}$ и $p_g F_g \gg \pi^2 E R h L^{-2}$. Для рассматриваемой трубы приняв $p_g \approx 10$ МПа, $E = 2 \times 10^5$ МПа, получаем $L^2 \gg 600$ м². Таким образом, можно считать, что условие $\alpha \gg 1$ выполняется при длине пролета порядка 100 м и выше. Этот результат объясняется тем, что критическая сила P_* уменьшается как L^{-2} .

4. Подъем при свободном продольном перемещении трубопровода на опорах. При этом условии в (2.1) необходимо принять $C = 0$. Это приводит в (2.9) к значениям $\lambda = \infty$ и $N = 0$, а в (2.10) – $\chi = 0$, $\eta = 0$. Решение получающегося уравнения из (2.10) остается таким же, что выше. Поэтому в уравнении (2.11) не будет первого члена. Решение уравнения изгиба трубопровода в этом случае дано в [17]. Здесь приведен более наглядный анализ поведения трубопровода в случае легкого газа ($\rho_g F_g \ll \rho_l F_l$, $\beta \ll 1$). С некоторой погрешностью можно рассматривать и случай природных газов, для которых при давлении порядка 10 МПа удельный вес ρ_g меньше ρ_l на порядок.

Перепишем уравнение (2.11) без первого члена в исходных параметрах, пользуясь обозначениями α , μ , γ , P_* согласно (2.10),

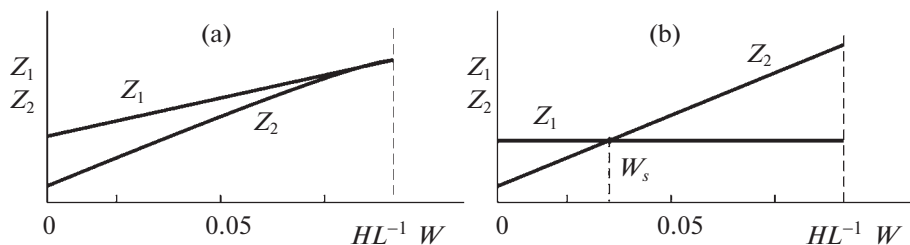


Рис. 4. Изменение сил, направленных вверх (Z_1) и вниз (Z_2), по мере поднятия трубопровода, определяемой отношением прогиба середины пролета к его длине W , в случае $\rho F < \rho_l F_l$; a – всплытие, b – возможное отсутствие всплытия, некоторый подъем.

$$\frac{\rho_l F_l}{\rho F} + \frac{\pi^3 p_g F_g}{4\rho FL} W = 1 + \frac{\pi^5 D}{4\rho FL^3} W + \frac{\pi^3 \rho_l F_l H}{4\rho FL} \left(1 - \frac{5LW}{2\pi H}\right) W \quad (4.1)$$

где в левой части содержатся члены, соответствующие силам, направленным вверх (обозначим через Z_1), а в правой части – вниз (Z_2). Все члены отнесены к постоянной величине – весу трубопровода единичной длины.

На рис. 3, a показаны зависимости $Z_1(W)$ и $Z_2(W)$ в случае, когда вес трубопровода единичной длины превышает подъемную силу воды ($\rho F > \rho_l F_l$). При этом не происходит подъема трубопровода даже при наличии его начального искривления вверх (на рис. 3, a $Z_1 < Z_2$). Картина может измениться при одновременном действии внутреннего давления и температурного расширения, как это видно по параметру α (2.10).

Однако могут быть исключения даже при $T = 0$. Рассмотрим случай большого давления газа p_g , малой глубины водоема H , большой длины пролета L . Тогда следующие члены уравнения (4.1) (при максимальном значении $W = (H - R_l)/L \approx H/L$)

$$\frac{\pi^5 DH}{4\rho FL^4} = \frac{\pi^5 ER^2 H}{8\rho L^4}, \quad \frac{\pi^3 \rho_l F_l H^2}{4\rho FL^2} \approx \frac{\pi H^2}{L^2}$$

малы по сравнению с единицей. Здесь E , R , h – средние значения параметров трехслойной трубы. При оценках принято $\pi^2 \rho_l F_l / (4\rho F) \sim 1$. При этом Z_1 остается без изменений, а $Z_2 = 1$.

На рис. 3, b точка пересечения S функций Z_1 и Z_2 показывает значение безразмерного подъема середины пролета. В соответствии с (4.1) угол $\epsilon = \pi^3 p_g F_g / (4\rho FL)$. При уменьшении угла ϵ (и давления p_g) точка S перемещается вправо, а прогиб W_s увеличивается. При увеличении угла ϵ точка S перемещается влево, трубопровод опускается.

Этот результат, парадоксальный на первый взгляд, объясняется тем, что при подъеме трубопровода его вес и Архимедова сила не изменяются, а поперечная распределенная сила от давления газа растет вместе с W (согласно (2.5) пропорционально кривизне осевой линии трубы). Из рис. 3, b видно также, что при заданном максимальном значении угла ϵ определяется необходимый начальный подъем трубопровода, обеспечивающий его дальнейший рост при снижении угла ϵ (и давления газа). Минимальное значение угла ϵ достигается при $W_s = H/L$. При дальнейшем уменьшении ϵ и давления газа p_g положение трубопровода не описывается данной моделью. В рассматриваемом простейшем случае критерием всплытия является равенство

$$\pi^3 p_g F_g H = 4L^2 (\rho F - \rho_l F_l) \quad (4.2)$$

При $\rho F < \rho_l F_l$ создаются все предпосылки для всплытия трубопровода. При этом на рис. 4,а показано распределение сил, направленных вверх Z_1 и вниз Z_2 .

В случае большой глубины H , короткого пролета L , малого давления p_g , небольшой разницы между ρF и $\rho_l F_l$ кривые Z_1 и Z_2 показаны на рис. 4,б. При малых значениях W подъемная сила, превышающая вес, приводит к некоторому подъему W_S . Так как Архимедова сила не зависит от подъема, а сила упругости и сила от давления воды, направленные вниз, растут с подъемом (кривизной осевой линии), то устойчивым положением W_S может быть некоторое промежуточное состояние между $z = 0$ и $z = HL^{-1}$. После этого будет иметь место неравенство $Z_2 > Z_1$, когда дальнейший подъем исключается. Критерием всплытия в этом случае является уравнение

$$\frac{\rho_l F_l}{\rho F} = 1 + \frac{\pi^5 DH}{4\rho FL^3} + \frac{\pi^3 \rho_l F_l H^2}{20\rho FL^2}$$

5. Максимально допустимое расстояние между опорами. Все выпускаемые газовые однослойные трубы обладают положительной плавучестью ($\gamma > 0$). Наибольшей плавучестью обладают пустые трубы, например, в период их прокладки. В период эксплуатации однослойной газовой трубы также $\gamma > 0$. Для их удержания в глубине водоема используются бетонные пригрузы, уложенные на расстоянии L друг от друга. Требуется определить максимально допустимое расстояние L , при котором подъем середины пролета не превышает некоторого предела W_S . Значение W_S должно быть меньше глубины H водоема. Оно определяется нормами в соответствующей области применения. Примем для дальнейших оценок $W_S = H/(3L)$.

Для наглядности перейдем к исходным параметрам и примем допущения: на опорах происходит свободное продольное перемещение трубопровода ($\lambda = \infty$, $\chi = 0$, $\eta = 0$), труба стальная однослойная ($n = 1$), газ отсутствует ($p_g = 0$, $\rho_g = 0$, $\beta = 0$), температура не меняется ($T = 0$). При этом в (2.11)

$$\alpha = -\frac{\rho_l F_l H}{P_*}, \quad \mu = \frac{\rho_l F_l L}{P_*}, \quad \gamma = \frac{(\rho_l F_l - \rho F) L}{\pi^2 P_*}, \quad P_* = \frac{\pi^3 E R^3 h}{L^2}$$

При $W = H/(3L)$ в исходных параметрах уравнение (2.11) относительно L приобретает вид

$$8\pi^2 \rho_l F_l H^2 L^2 - 2\pi^3 H(\pi^3 E R^3 h + \rho_l F_l H L^2) + 108 L^4 (\rho_l F_l - \rho F) = 0,$$

в решении которого

$$L^2 = \frac{5\pi^2 \rho_l F_l H^2}{54(\rho_l F_l - \rho F)} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{(\rho_l F_l - \rho F) E R^3 h}{90 \rho_l^2 F_l^2 H^3}} \right] \quad (5.1)$$

необходимо взять верхний знак.

Согласно (5.1) при заданной глубине H расстояние между опорами L тем больше, чем меньше разница между подъемной силой и весом трубы, больше ее диаметр и толщина стенки. Для относительно тонких труб и большой глубины водоема второй член под корнем в (5.1) становится меньше единицы. Тогда из (5.1) следует

$$L^2 = \frac{2\pi^2 \rho_l F_l H^2}{27(\rho_l F_l - \rho F)} + \frac{\pi^2 E R^3 h}{1944 \rho_l F_l H} \quad (5.2)$$

Для рассмотренной выше трубы с $2R = 0.524$ и длиной 1 м вес $\rho F = 760 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$ (при толщине $h = 0.006$ м, гравитационном ускорении $9.81 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$) и $\rho F = 1258 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$ (при $h = 0.01$ м). Архимедова сила трубы длиной 1 м равна $\rho_l F_l = 2164 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$. Если $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$, $H = 30$ м, то из (5.2) получаем $L^2 = (2538 + 14) \text{ м}^2$.

Для такой трубы второй член (5.2) мал по сравнению с первым. Длина L определяется в основном глубиной водоема H и отношением веса трубы ρF и подъемной силы $\rho_l F_l$ воды, а изгибная жесткость ER^3h играет меньшую роль. Поэтому переход из (5.1) в выражение (5.2) а в данном примере является правомерным. Можно предложить простую формулу

$$L \approx 1.3H \left(1 - \frac{\rho F}{\rho_l F_l} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.3)$$

Однако с увеличением диаметра трубы и ее толщины, уменьшением допустимого подъема W оба члена в (5.2) становятся сравнимыми.

При одинаковых значениях L и постоянной глубине H прогибы одинаковы между опорами, поэтому в условиях (2.1) жесткость B может быть меньше, чем при получении уравнения (2.10). В силу этого соотношения (5.1)–(5.3) являются сугубо приближенными (они точнее, если пролеты чередуясь прогибаются вверх и вниз при такой возможности по особенностям рельефа дна). Требуется дальнейшее изучение этого вопроса. Действительное значение жесткости B может быть найдено из решения обратной задачи, если известны экспериментальные данные по прогибам трубопровода [21]. Можно отметить, что при условии $B \rightarrow \infty$ прогиб несколько больше, чем при $B \rightarrow 0$ [20]. В рассматриваемом случае некоторая неопределенность с жесткостью B и соответствующим подъемом трубопровода может быть снята изменением принятой выше нормы $W = H/(3L)$, которая является достаточно произвольной.

6. Заключение. Приведенный более полный учет влияния давления газа и воды на изгиб трубопровода позволяет точнее описывать реальную картину его всплытия. Кроме веса трубы и транспортируемого газа, подъемной силы воды и температурного удлинения, учитываемых обычно при анализе всплытия, в данной работе распределенная поперечная сила определяется из рассмотрения взаимодействия изменения кривизны осевой линии и давлений на внутреннюю и внешнюю поверхности трубы. При этом учитывается также изменение давлений воды и газа с подъемом трубопровода. При определении осевых сил учитывается упругая реакция опор, изменение продольной деформации трубы за счет кольцевой деформации из-за перепада давления.

Полученное наиболее общее нелинейное уравнение относительно функции прогиба содержит безразмерные параметры, характеризующие влияние на изгиб всех входных параметров. Оно позволяет анализировать широкий спектр вопросов: линейный изгиб, устойчивость прямолинейного положения трубопровода, сверхкритический изгиб вплоть до всплытия, влияние на всплытие материала и размеров трубы, длины пролета между опорами, упругой реакции опор, давления газа, глубины водоема и т.д.

Определяется критерий в случае, когда высокое давление газа приводит к всплытию. В критерий входят все безразмерные параметры. Наиболее сильное влияние на процесс оказывают осевые растягивающие силы, зависящие от подъема трубопровода и условий закрепления на опорах. Предельное значение внутреннего перепада давления ограничивается прочностью на разрыв трубы. В случае свободного продольного перемещения на опорах возможно всплытие трубопровода, более тяжелого, чем подъемная сила воды. Определен критерий этого явления. Здесь необычным представляется результат, состоящий в том, что подъем и установление равновесного состояния тем выше, чем меньше давление газа. Возможно, такой режим не упоминается в литературе.

Естественным является всплытие, если Архимедова сила воды больше веса трубы. Однако и в этом случае может быть некоторый подъем, но не всплытие. Такой сценарий может быть реализован при большой глубине водоема, коротком пролете между опорами, низком давлении газа и небольшой плавучести. Объяснение состоит в том, что вес и подъемная сила воды остаются постоянными при подъеме, а другие силы (например, сила упругости), направленные вниз, растут при подъеме трубопровода.

Определяется необходимое расстояние между пригрузами для фиксации трубопровода на стадии прокладки, ремонтных работ, экспертизы и т.д. Это расстояние тем больше, чем больше глубина водоема и изгибная жесткость трубы, меньше отношение веса трубы и подъемной силы воды.

При анализе реального случая всплытия газового трубопровода приведенная здесь модель явления должна рассматриваться вместе с другими факторами, некоторые из которых названы в начале статьи.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00578, <https://rscf.ru/project/22-21-00578/>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин С.М. Подводные трубопроводы. М.: Недра, 1970. 280 с.
2. Астафьев В.Н. Проектирование подводных трубопроводов в условиях арктических морей. Уфа: УГНТУ, 2000. 76 с.
3. Palmer A.C., King R.A. Subsea pipeline engineering. Oklahoma: PWC, 2004. 570 p.
4. Айнбиндер А.Б. Расчет магистральных и промысловых трубопроводов на прочность и устойчивость: Справочное пособие. М.: Недра, 1991. 287 с.
5. Мансуров М.Н., Черный В.П. Методы расчета морских трубопроводов на прочность и устойчивость // Газовая промышленность. 2005. № 4. С. 47–51.
6. Peek R., Yun H. Flotation to trigger lateral buckles in pipelines on a flat seabed // J. Eng. Mech. 2007. V. 4. P. 442–451.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2007\)133:4\(442\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2007)133:4(442))
7. Коробков Г.Е., Зарипов Р.М., Шаммазов И.А. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния и устойчивости трубопроводов в осложненных условиях эксплуатации. СПб.: Недра, 2009. 410 с.
8. Лаптева Т.И., Мансуров М.Н. Сравнительный анализ устойчивости морских и сухопутных трубопроводов // Газовая промышленность. 2009. № 4. С. 37–40.
9. Hong Z., Liu R., Liu W., Yan S. Study on lateral buckling characteristics of a submarine pipeline with a single arch symmetric initial imperfection // Ocean Eng. 2015. V. 108. P. 21–32.
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2015.07.049>
10. Chee J., Walker A., White D. Controlling lateral buckling of subsea pipeline with sinusoidal shape pre-deformation // Ocean Eng. 2018. V. 151. P. 170–190.
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2018.01.024>
11. Wang Z., Tang Y. Study on symmetric buckling mode triggered by dual distributed buoyancy sections for subsea pipelines // Ocean Eng. 2020. V. 216. P. 105–110.
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.108019>
12. Chen Y., Dong S., Zang Z. Buckling analysis of subsea pipeline with idealized corrosion defects using homotopy analysis method // Ocean Eng. 2021. V. 234. P. 25–35.
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.108865>
13. Wang Z., Tang Y., Guedes S.C. Imperfection study on lateral thermal buckling of subsea pipeline triggered by a distributed buoyancy section // Marine Struct. 2021. V. 76. P. 10–29.
<https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2020.10291>
14. Bi K., Hao H. Using pipe-in-pipe systems for subsea pipeline vibration control // Eng. Struct. 2016. V. 109. P. 75–84.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.11.018>
15. Li S., Karney B.W., Liu G. arch in pipeline systems – A review of the literature // J. Fluids Struct. 2015. V. 57. P. 277–297.
<https://doi.org/10.1016/j.fluidstructs.2015.06.020>

-
16. *Ilgamov M.A.* Static Problems of Hydroelasticity. М.: Fizmatlit, 1998. 208 p.
 17. *Ильгамов М.А.* Модель всплытия подводного трубопровода // ДАН. Физика, технические науки. 2022. Т. 504. С. 12–16.
<https://doi.org/10.31857/S2686740022030087>
 18. *Ilgamov M.A., Ratrouf R.A.* Large deflection of superconducting cable // Int. J. Nonlin. Mech. 1999. V. 34. № 5. P. 869–880.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(98\)00059-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(98)00059-6)
 19. *Овсянников Л.В.* О всплытии пузыря // Некоторые проблемы математики и механики. К 70-летию М.А. Лаврентьева. Л.: Наука, 1970. С. 209–222.
 20. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
 21. *Ахтямов А.М.* Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009. 272 с.

УДК 539.735

К ВОПРОСУ КРУЧЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

© 2023 г. Б. Г. Миронов^{a,*}, Ю. Б. Миронов^{b,**}

^aРоссийский университет транспорта, Москва, Россия

^bМосковский технический университет связи и информатики, Москва, Россия

*e-mail: mbg.chspu@yandex.ru

**e-mail: i.b.mironov@mtuci.ru

Поступила в редакцию 08.06.2022 г.

После доработки 08.07.2022 г.

Принята к публикации 09.07.2022 г.

Настоящая работа посвящена изучению общих соотношений теории кручения стержней из идеального жесткопластического анизотропного материала. При этом предполагается, что стержень находится под действием внешнего давления, линейно меняющегося вдоль его образующей. Определено напряженно-деформированное состояние анизотропного стержня при произвольном условии пластичности. Найдены уравнения характеристик общих соотношений и компоненты напряжений идеформаций вдоль этих характеристик.

Ключевые слова: пластичность, анизотропия, кручение, деформация, напряжение

DOI: 10.31857/S0572329922600530, **EDN:** DGWBPU

Кручение — это вид деформации. Под влиянием моментов, действующих в поперечных сечениях стержня, эти сечения поворачиваются относительно друг друга. В результате происходит деформация сечений. При одинаковых деформациях различных сечений стержня в них возникают только касательные напряжения, которые не меняются вдоль образующей стержня. Исследования по теории кручения стержней из идеального жесткопластического материала содержатся в различных работах. Кручение стержней из идеальнопластического материала рассмотрено в работах [1–3]. В [3] изложены математические основы теории кручения стержней из изотропного материала. В работах [4, 5, 7] содержатся исследования по теории кручения призматических стержней из идеального жесткопластического анизотропного материала. Кручение призматических анизотропных стержней из идеального жесткопластического материала, находящихся под действием переменного внешнего давления, исследовано в [6]. В работах [8, 9] изучено кручение различных стержней из идеального жесткопластического материала при линеаризованном условии пластичности.

Пусть анизотропный цилиндрический или призматический стержень из идеального жесткопластического анизотропного материала закручивается вокруг своей оси. При этом предполагается, что боковая поверхность стержня свободна от нагрузок. В декартовой прямоугольной системе координат стержень расположим так, чтобы его образующие были параллельны оси z . Предположим также, что стержень находится под линейно меняющимся внешним давлением, которое действует вдоль образующей стержня.

Компоненты напряжения удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\lambda z + \mu, \quad \tau_{xy} = 0, (\lambda, \mu = \text{const}) \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y)\end{aligned}\quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \lambda \quad (2)$$

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = 0 \quad (3)$$

Компоненты скоростей деформаций ε_{ij} определяются из соотношений

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0 \quad (4)$$

Имеют место соотношения ассоциированного закона пластического течения

$$\frac{\varepsilon_{xz}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{\varepsilon_{yz}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} \quad (5)$$

На контуре сечения стержня выполняется равенство

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} \quad (6)$$

В соответствии с граничными условиями вектор $\vec{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$ касательного напряжения на контуре поперечного сечения стержня направлен по касательной к ней.

Дифференцируем соотношение (3) по переменной x . Тогда получим

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

Согласно (7) уравнение равновесия (2) примет вид

$$-\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \quad (8)$$

Тогда из (8) получим систему уравнений для определения характеристик и соотношений вдоль них

$$\frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{d\tau_{yz}}{\lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} \quad (9)$$

Из (9) вытекает, что характеристики уравнения (2) задаются в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} dx + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} dy = 0 \quad (10)$$

и вдоль характеристик верны соотношения

$$\tau_{xz} = \psi(\lambda(y + c_1)), \quad \tau_{yz} = \lambda(y + c_1) \quad (11)$$

где $f(\psi(\lambda(y + c_1)), \lambda(y + c_1)) = 0$, $c_1 = \text{const}$

Из уравнения (10) можно сделать вывод, что характеристики направлены по касательной к кривой текучести (3).

Аналогично, дифференцируем уравнение (3) по y и подставим полученное соотношение в уравнение равновесия (2). Тогда имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \quad (12)$$

а из (12) следует справедливость соотношений

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} = \frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{d\tau_{xz}}{\lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} \quad (13)$$

Из системы уравнений (13) получим, что вдоль характеристик (10) справедливы соотношения

$$\tau_{xz} = \lambda(x + c_2), \quad \tau_{yz} = \varphi(\lambda(x + c_2)) \quad (14)$$

где $f(\lambda(x + c_2))$, $\varphi(\lambda(x + c_2)) = 0$, $c_2 = \text{const}$

Компоненты напряжения в ходе кручения стержня в данной точке тела остаются постоянными. Тогда соотношения (4) и (5) можно проинтегрировать. Считая, что в начальный момент компоненты деформации e_{ij} равны нулю, получим

$$e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0, \quad \frac{e_{xz}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{e_{yz}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} \quad (15)$$

Учитывая, что компоненты перемещений u, v, w определяются из соотношений

$$u = \theta yz, \quad v = -\theta xz, \quad w = w(x, y) \quad (16)$$

где w – депланация, θ – крутка, представим соотношения связи между компонентами деформации и компонентами перемещения в следующем виде

$$e_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta y \right), \quad e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta x \right) \quad (17)$$

Согласно (17) получим

$$\frac{\partial e_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} = \theta. \quad (18)$$

Последнее уравнение из соотношений (15) запишем в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} e_{xz} - \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} e_{yz} = 0 \quad (19)$$

Дифференцируем уравнение (19) по переменной x

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial e_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} = e_{yz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz}^2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz} \partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) - e_{xz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz}^2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz} \partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) \quad (20)$$

Согласно (20) уравнение (18) примет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial e_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial e_{yz}}{\partial y} = \\ & = \theta \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} - e_{yz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz}^2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz} \partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) + e_{xz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz}^2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz} \partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Из соотношения (21) получим следующую систему уравнений для определения характеристик соотношения (19) и соотношений вдоль них

$$\frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{de_{xz}}{\theta \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} - e_{yz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz}^2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz} \partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) + e_{xz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz}^2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz} \partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right)} \quad (22)$$

Таким образом, из (22) вытекает, что уравнение характеристик соотношения (19) имеют вид (10), а соотношения вдоль характеристик (10) определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} de_{xz} + \left(-e_{yz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz}^2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz} \partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) + e_{xz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz}^2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz} \partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) \right) dx = -\theta \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} dx \\ \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} de_{yz} + \left(e_{yz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz}^2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz} \partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) - e_{xz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz}^2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz} \partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) \right) dy = \theta \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} dy \end{aligned} \quad (23)$$

Согласно (19) из первого уравнения соотношений (23) получим

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{de_{xz}}{dx} - e_{xz} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz}^2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz} \partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz}^2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz} \partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) \right) = -\theta \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \quad (24)$$

Согласно (10) и (11) из (24) следует

$$e_{xz} = \theta(y + c_3) \quad (25)$$

где $c_3 = \text{const}$. При этом компонента деформации e_{yz} определяется из соотношения (19) с учетом (25).

Аналогично, дифференцируем соотношение (19) по y и получим, что вдоль характеристик (10) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} de_{yz} + \left(e_{yz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz}^2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz} \partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) - e_{xz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz}^2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz} \partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) \right) dx = -\theta \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} dx \\ \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} de_{yz} + \left(-e_{yz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz}^2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz} \partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) + e_{xz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz}^2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz} \partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) \right) dy = \theta \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} dy \end{aligned} \quad (26)$$

С учетом (19) из второго уравнения соотношений (26) получим

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{de_{yz}}{dy} + e_{yz} \left(- \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz}^2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz} \partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) + \frac{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz}^2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz} \partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) \right) = \theta \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \quad (27)$$

Согласно (10) и (11) из (27) следует

$$e_{yz} = -\theta(x + c_4) \quad (28)$$

где $c_4 = \text{const}$. При этом компонента деформации e_{xz} определяется из соотношения (19) с учетом (28).

Предположим, что условие пластичности (3) задано в виде

$$\frac{\tau_{xz}^2}{a^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{b^2} = k^2 \quad (a = \text{const}, b = \text{const}) \quad (29)$$

Тогда с учетом (29) из соотношений (11) получим

$$\tau_{xz} = \pm \frac{a\lambda}{b} \sqrt{\frac{k^2 b^2}{\lambda^2} - (y + c_1)^2}, \quad \tau_{yz} = \lambda(y + c_1) \quad (30)$$

Пусть точка (x_0, y_0) принадлежит контуру поперечного сечения стержня и через нее проходит характеристика, $\tau_{xz}(x_0, y_0) = \tau_x^0, \tau_{yz}(x_0, y_0) = \tau_y^0$. Тогда в соответствии с уравнением (30) вдоль этой характеристики имеем

$$\tau_{xz} = \pm \frac{a\lambda}{b} \sqrt{\frac{k^2 b^2}{\lambda^2} - \left(y - \left(y_0 - \frac{\tau_y^0}{\lambda}\right)\right)^2}, \quad \tau_{yz} = \lambda \left(y - \left(y_0 - \frac{\tau_y^0}{\lambda}\right)\right) \quad (31)$$

При этом уравнение характеристики, проходящей точку (x_0, y_0) контура поперечного сечения стержня, запишется в виде

$$\frac{\left(x - \left(x_0 - \frac{b^2 \tau_x^0}{a^2 \lambda}\right)\right)^2}{b^2} + \frac{\left(y - \left(y_0 - \frac{\tau_y^0}{\lambda}\right)\right)^2}{a^2} = \frac{b^2 k^2}{a^2 \lambda^2} \quad (32)$$

Аналогично, согласно (29) из (14) получим

$$\tau_{xz} = \lambda(x + c_2), \quad \tau_{yz} = \pm \frac{b\lambda}{a} \sqrt{\frac{k^2 a^2}{\lambda^2} - (x + c_2)^2} \quad (33)$$

Тогда, согласно (14) из (33), вдоль характеристики имеем

$$\tau_{xz} = \lambda \left(x - \left(x_0 - \frac{\tau_x^0}{\lambda}\right)\right), \quad \tau_{yz} = \pm \frac{b\lambda}{a} \sqrt{\frac{k^2 a^2}{\lambda^2} - \left(x - \left(x_0 - \frac{\tau_x^0}{\lambda}\right)\right)^2} \quad (34)$$

В соответствии с (34) уравнение характеристики, проходящей точку (x_0, y_0) контура поперечного сечения стержня, примет вид

$$\frac{\left(x - \left(x_0 - \frac{\tau_x^0}{\lambda}\right)\right)^2}{b^2} + \frac{\left(y - \left(y_0 - \frac{a^2 \tau_y^0}{b^2 \lambda}\right)\right)^2}{a^2} = \frac{a^2 k^2}{b^2 \lambda^2} \quad (35)$$

Согласно (25) и (31) из (19) имеем

$$e_{xz} = \theta(y + c_3), \quad e_{yz} = \frac{b\theta \left(y - \left(y_0 - \frac{\tau_y^0}{\lambda}\right)\right)(y + c_3)}{\pm a \sqrt{\frac{k^2 b^2}{\lambda^2} - \left(y - \left(y_0 - \frac{\tau_y^0}{\lambda}\right)\right)^2}} \quad (36)$$

Аналогично, согласно (28) и (34) из (19) получим

$$e_{yz} = -\theta(x + c_4), \quad e_{xz} = -\frac{a\theta \left(x - \left(x_0 - \frac{\tau_x^0}{\lambda}\right)\right)(x + c_4)}{\pm b \sqrt{\frac{k^2 a^2}{\lambda^2} - \left(x - \left(x_0 - \frac{\tau_x^0}{\lambda}\right)\right)^2}} \quad (37)$$

На линиях разрыва напряжений следует положить

$$e_{xz} = e_{yz} = 0 \quad (38)$$

так как они являются следом исчезающих жестких областей.

Из соотношений (38) определяются константы c_3 и c_4 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
2. Прагер В., Ходж Ф.Г. Теория идеальнопластических тел. М.: ИЛ, 1956. 398 с.
3. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
4. Быковцев Г.И. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред. Сборник статей. Владивосток: Дальнаука, 2002. 566 с.
5. Миронов Б.Г., Митрофанова Т.В. К вопросу о кручении анизотропных стержней // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. 2015. № 1 (23). С. 196–199.
6. Козлова Л.С., Миронов Б.Г. Кручение призматических стержней при действии давления, линейно меняющегося вдоль образующей // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 3. С. 107–113.
7. Миронов Б.Г., Митрофанова Т.В. Деформированное состояние трансляционно-анизотропных тел при кручении // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (72). С. 57–60.
8. Mironov B.G., Mironov Y.B. Torsion of non-uniform cylindrical and prismatic rods made of ideally plastic material under linearized yield criterion // Mech. Solids. 2020. V. 55. No. 6. P. 813–819. <https://doi.org/10.3103/S0025654420060102>
9. Mironov B.G., Mironov Y.B. Problem on torsion of rods made of a hardening material under the action of variable external pressure using a linearized plasticity condition // Mech. Solids. 2022. V. 57. No. 2. P. 271–277. <https://doi.org/10.3103/S0025654422020182>

УДК 539.3

РАСЧЕТ ИЗНОСА РАДИАЛЬНОГО ПОДШИПНИКА СКОЛЬЖЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ТЕМПЕРАТУРЕ И НАГРУЗКЕ

© 2023 г. И. А. Солдатенков^{a,*}

^aИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: iasoldat@hotmail.com

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 10.09.2022 г.

Принята к публикации 19.09.2022 г.

Описывается стохастическая модель процесса изнашивания тонкого покрытия в радиальном подшипнике скольжения, учитывающая случайные изменения температуры подшипника и внешней нагрузки. Приводятся результаты численного анализа процесса изнашивания подшипника применительно к условиям работы в открытом космосе на околоземных орбитальных станциях. Оценивается важность учета случайных изменений температуры и внешней нагрузки для прогнозирования износа подшипника и, в частности, его долговечности.

Ключевые слова: контактная задача, износ, покрытие, радиальный подшипник скольжения, температура, нагрузка

DOI: 10.31857/S0572329922600669, EDN: DHFXLU

Введение. Расчет радиального подшипника скольжения на износ является предметом многочисленных работ, в которых учитывались различные факторы процесса изнашивания: смазка, поверхностная шероховатость, наличие покрытия, фрикционный разогрев, перекос вала и др. [1–5].

Ниже описывается метод расчета процесса изнашивания антифрикционного покрытия (тонкого вкладыша) в радиальном подшипнике скольжения в условиях случайно изменяющихся температуры и внешней нагрузки (величина, направление). Подобные условия характерны, например, для узлов трения, работающих в открытом космосе на околоземных орбитальных станциях [6–9]. Изменение температуры узла трения в этом случае обусловлено его заходом в тень Земли или станции и по разным оценкам лежит в диапазоне от -150°C до $+150^{\circ}\text{C}$. Для таких узлов трения также следует ожидать значительного разброса величины и направления внешней нагрузки, что обуславливается отсутствием постоянной силы тяжести, как основного фактора нагружения.

Отметим, что ранее был выполнен расчет изнашивания радиального подшипника скольжения применительно к условиям работы на орбитальных станциях, который учитывал периодическое изменение температуры подшипника, однако нагрузка при этом считалась постоянной [10]. Также был предложен метод расчета радиального подшипника скольжения на износ в условиях случайно изменяющейся внешней нагрузки при неизменной температуре [3].

Цель описываемых ниже исследований состоит в учете и оценке значимости факторов случайного изменения температуры и внешней нагрузки при моделировании процесса изнашивания радиального подшипника скольжения с покрытием.

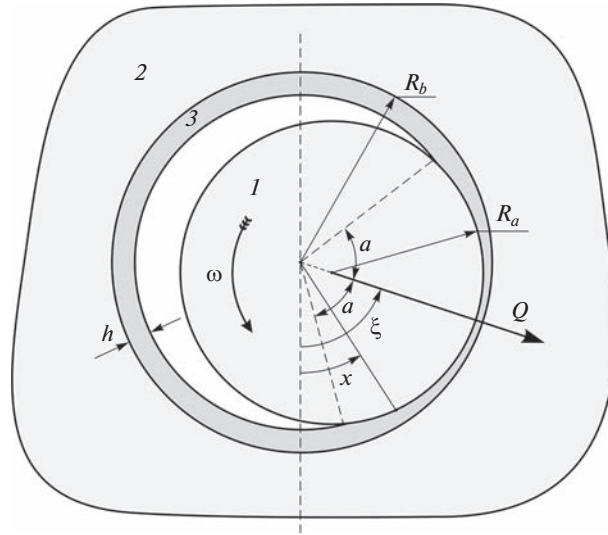


Рис. 1. Схема контакта вала 1 с покрытием 3, связанным с обоймой 2 радиального подшипника скольжения.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим радиальный подшипник скольжения (далее — подшипник), в котором вращающийся вал 1 взаимодействует с тонким покрытием 3, связанным с обоймой 2 (рис. 1). Контактное взаимодействие вала с покрытием определяется величиной Q внешней нагрузки на вал и углом $\xi \in [-\pi, \pi]$ ее приложения, который отсчитывается от вертикали (рис. 1). Соответствующая область контакта задается угловым размером a . Все элементы подшипника имеют одинаковую температуру T и при ее изменении размеры подшипника меняются вследствие теплового расширения тел. Точки поверхности покрытия задаются с помощью угловой координаты x .

Считается, что покрытие в исходном состоянии, т.е. при $t = 0$, имеет постоянную толщину h_0 . В результате взаимодействия с валом покрытие изнашивается и это приводит к изменению его толщины h как по координате x , так и во времени t . В каждый момент процесса изнашивания покрытия величины T , ξ , Q могут принимать случайные значения, т.е. они являются случайными функциями времени t (процессами) [11, 12].

Скорость износа покрытия в точке x в каждый момент времени t определяется величиной контактного давления $p(x, t)$, скоростью V скольжения и температурой T подшипника согласно закону изнашивания [1, 3]:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = F(p(x, t), V, T) \quad (1.1)$$

где $W(x, t) = h_0 - h(x, t)$ — линейный износ покрытия, вид функции $F(p, V, T)$ будет конкретизирован ниже при численном анализе.

Скорость скольжения определяется по формуле $V = \omega R_a$, в которой ω — угловая скорость вращения вала, считающаяся постоянной, R_a — радиус вала, износом которого будем пренебрегать. Отметим, что при изменении температуры радиус R_a может меняться вследствие теплового расширения вала. Однако это изменение мало по сравнению с самим радиусом R_a и не оказывает заметного влияния на скорость скольжения $V = \omega R_a$, которую, как и угловую скорость ω , можно считать постоянной.

Допустим, что случайные изменения величин T, ξ, Q приводят к тому, что на поверхности изнашиваемого покрытия отсутствует приработанная к форме вала лунка износа. Вместо этого износ распределяется достаточно равномерно по поверхности покрытия, и это позволяет пренебречь изменением толщины изношенного покрытия в пределах области контакта по сравнению с самой толщиной, положив

$$h(x, t) = h(\xi, t), \quad x \in [-a, a] \quad (1.2)$$

Толщину h тонкого покрытия можно считать малой по сравнению с размером $2aR_a$ области контакта. Кроме того, предполагая, что модуль упругости покрытия значительно меньше модулей упругости вала и обоймы подшипника, будем считать вал и обойму абсолютно жесткими.

Ставится задача: построить стохастическую модель процесса изнашивания покрытия в подшипнике, учитывающую случайный характер величин T, ξ, Q .

Для построения такой модели рассмотрим вначале контактное взаимодействие вала и покрытия при некоторых фиксированных значениях T, ξ, Q и заданной толщине $h(x, t)$.

Учитывая сделанные выше допущения относительно толщины и модуля упругости покрытия, а также пренебрегая силой трения, воспользуемся моделью Винклера [13] для описания упругого поведения покрытия. В результате можно прийти к следующему выражению для контактного давления [3]

$$p(x, t) = \mathcal{P}(x, t; T, \xi, Q) \equiv \begin{cases} \frac{\Delta}{B(T)h(\xi, t)} \left(\frac{\cos(x - \xi)}{\cos a} \right), & \cos(x - \xi) \geq \cos a \\ 0, & \cos(x - \xi) < \cos a \end{cases} \quad (1.3)$$

где

$$\Delta = R_b(T) - R_a(T) - h(\xi, t) \quad (1.4)$$

– радиальный зазор подшипника, $\Delta \ll R_a(T)$,

$$B(T) = \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}{(1 - \nu)E(T)} \quad (1.5)$$

– коэффициент податливости покрытия, E и ν – модуль упругости (Юнга) и коэффициент Пуассона покрытия, размер a области контакта находится из уравнения

$$\frac{a}{\cos a} - \sin a = \frac{QB(T)h(\xi, t)}{R_a(T)\Delta} \quad (1.6)$$

В представленных выражениях не учитывается изменение толщины h покрытия в результате его теплового расширения, что допустимо для тонкого покрытия – соответствующее обоснование дано ниже (раздел 2). Кроме того, без ограничения общности рассмотрения, коэффициент Пуассона в выражении (1.5) считается независимым от температуры.

Примем теперь во внимание случайный характер величин T, ξ, Q и введем в рассмотрение соответствующую функцию плотности вероятности $\rho(T, \xi, Q, t)$ [11]. В дальнейшем, для упрощения записи формул будут использоваться обозначения:

$$X_1 = T, \quad X_2 = \xi, \quad X_3 = Q \quad (1.7)$$

Для описания рассматриваемого процесса изнашивания покрытия воспользуемся известным подходом, основанным на статистическом осреднении закона изнашивания (1.1) по параметрам T, ξ, Q [3]. Результатом такой операции является равенство

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = - \int_{\{X\}} F(\mathcal{P}(x, t; X), V, X_1) \rho(X, t) dX \quad (1.8)$$

в котором h уже представляет собой среднее статистическое значение толщины покрытия. Для краткости символом X здесь обозначается совокупность величин X_1, X_2, X_3 , запись $\{X\}$ обозначает множество допустимых значений этих величин, $dX = dX_1 dX_2 dX_3$.

Если случайные величины X_1, X_2, X_3 в каждый момент времени t являются независимыми и стационарными как случайные процессы, то [11, 12]:

$$\rho(X, t) = \rho_1(X_1) \rho_2(X_2) \rho_3(X_3) \quad (1.9)$$

где $\rho_i(X_i)$, $i = 1, 2, 3$ — функция плотности вероятности величины X_i . Если дополнительно какая-либо из величин X_i не является случайной и принимает постоянное значение $\hat{X}_i$, то в равенстве (1.8) следует формально положить

$$\rho_i(X_i, t) = \delta(X_i - \hat{X}_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.10)$$

где $\delta(X)$ — дельта-функция.

Указанная выше функция $\mathcal{P}(x, t; X)$ определяется равенствами (1.3)–(1.6) с учетом обозначений (1.7), поэтому равенство (1.8) представляет собой дифференциальное уравнение, которое при начальном условии

$$h(x, 0) = h_0 \quad (1.11)$$

описывает кинетику изменения толщины изнашиваемого покрытия в терминах средних значений. Равенства (1.3)–(1.6), (1.8) составляют стохастическую модель процесса изнашивания покрытия в подшипнике и тем самым решают поставленную выше задачу.

Одной из важнейших характеристик процесса изнашивания покрытия является его долговечность, которая определяется как время t_* полного изнашивания покрытия в некоторой точке, т.е.

$$\min_{x \in [-a, a]} h(x, t_*) = 0 \quad (1.12)$$

В дальнейшем для сравнения будут использоваться результаты расчета процесса изнашивания покрытия в подшипнике при детерминированной постановке, т.е. при неизменной температуре и постоянной по величине и направлению внешней нагрузке. Для решения такой задачи необходимо учитывать локальный характер изнашивания покрытия, который выражается в существовании приработанной к валу лунки износа с монотонно возрастающим размером $a(t)$ области контакта [2, 3, 13]. Такой процесс описывается уравнением (1.1) с начальным условием (1.11) и равенствами

$$p(x, t) = \frac{1}{Bh(x, t)} \left[\Delta \left(\frac{\cos x}{\cos a(t)} - 1 \right) - W(x, t) \right], \quad x \in [-a(t), a(t)] \quad (1.13)$$

$$Q = R_a \int_{-a(t)}^{a(t)} p(x, t) \cos x \, dx \quad (1.14)$$

первое из которых является следствием условия контакта вала и покрытия, а второе представляет собой условие равновесия вала [3]. Подстановка выражения (1.13) для контактного давления в равенство (1.14) при $t = 0$, $h(x, 0) = h_0$, $W(x, 0) = 0$ позволяет получить для начального размера $a_0 = a(0)$ области контакта уравнение, имеющее вид (1.6). Отметим, что здесь все величины являются детерминированными.

Замечание. Для решения задачи об изнашивании покрытия при детерминированной постановке, т.е. при $X_1 = \hat{X}_1$, $X_2 = \hat{X}_2$, $X_3 = \hat{X}_3$, недопустимо использовать описанную выше стохастическую модель с функциями плотности вероятности вида (1.10) для всех величин X_1, X_2, X_3 . Действительно, в таком виде стохастическая модель приводит к образованию приработанной лунки износа и, следовательно, к нарушению допущения (1.2).

2. Численный анализ. Излагаемый далее материал связан с анализом результатов расчетов процесса изнашивания покрытия в подшипнике. Целью анализа является оценка важности учета случайных изменений температуры и внешней нагрузки для прогнозирования износа и, в частности, долговечности подшипника. Для проведения соответствующих расчетов следует конкретизировать некоторые аспекты описанных выше стохастической и детерминированной моделей процесса изнашивания покрытия.

При выборе параметров материала покрытия для расчетов будем ориентироваться на использование самосмазывающихся композитов, в том числе, на полимерной основе. Подобные композиты успешно используются в качестве антифрикционных материалов в узлах трения, работающих в открытом космосе на околоземных орбитальных станциях в условиях вакуума и при значительных перепадах температуры [6–9].

Как показывают эксперименты [14–16], для полимерных композитов характерно существенное снижение модуля упругости с ростом температуры, которое может достигать нескольких порядков. По этой причине для расчетов воспользуемся экспоненциальной зависимостью [15]

$$E(T) = E_0 \exp(k_E \theta), \quad E_0 = E(T_0) \quad (2.1)$$

с отрицательным параметром k_E , в которой $\theta = T - T_0$ — температура, отсчитываемая от нормальной температуры T_0 . Подстановка выражения (2.1) в равенство (1.5) определяет температурную зависимость $B(T)$ коэффициента податливости покрытия.

Будем использовать линейный закон изнашивания (1.1), т.е. допустим, что

$$F(p, V, T) = \alpha(T) p V$$

где α — коэффициент износа, величина которого зависит от температуры.

Результаты трибологических испытаний свидетельствуют о том, что с ростом температуры скорость $\partial W / \partial t$ износа полимерных композитов может претерпевать значительные изменения, достигающие нескольких порядков [15, 17–19]. В отличие от температурной зависимости (2.1) модуля упругости, зависимость скорости износа от температуры может быть как возрастающей, так и убывающей. С учетом указанных обстоятельств, примем экспоненциальную зависимость коэффициента износа от температуры:

$$\alpha(T) = \alpha_0 \exp(n_\alpha \theta), \quad \alpha_0 = \alpha(T_0) \quad (2.2)$$

в которой параметр n_α может принимать как отрицательные, так и положительные значения.

При увеличении температуры подшипника происходит тепловое расширение вала и обоймы, учитываемое в равенстве (1.4). В рассматриваемом случае тонкого и мягкого покрытия можно пренебречь его влиянием на расширение обоймы, полагая [10, 20]:

$$R_i(T) = R_{i0}(1 + k_i \theta), \quad R_{i0} = R_i(T_0), \quad i = a, b \quad (2.3)$$

где k_a и k_b — коэффициенты линейного теплового расширения вала и обоймы. Отметим, что, если в подшипнике вместо тонкого покрытия используется толстый вкладыш, то для определения теплового расширения обоймы следует использовать решение соответствующей термоупругой задачи [10].

Для функции плотности вероятности $\rho(X, t)$ случайных величин X_1, X_2, X_3 воспользуемся выражением (1.9), считая эти величины независимыми и стационарными во времени. Соответствующие функции плотности вероятности зададим выражениями

$$\rho_1(X_1) = \frac{1}{T^+ - T^-}, \quad X_1 = T \in [T^-, T^+] \quad (2.4)$$

$$\rho_2(X_2) = \frac{1}{2\pi A_\xi} (\cos X_2 + A_\xi), \quad A_\xi \geq 1, \quad X_2 = \xi \in [-\pi, \pi] \quad (2.5)$$

$$\rho_3(X_3) = \frac{1}{Q_m A_Q} (\cos S + A_Q), \quad S = 2\pi \frac{X_3 - Q_m/2}{Q_m}, \quad A_Q \geq 1, \quad X_3 = Q \in [0, Q_m] \quad (2.6)$$

в которых параметры $T^\pm$ и Q_m определяют диапазоны изменений температуры T и нагрузки Q . Выражения (2.4)–(2.6) удовлетворяют нормировочному условию, налагаемому на функцию плотности вероятности [11], а определяемые по ним средние значения случайных величин X_1, X_2, X_3 составляют:

$$\bar{X}_1 = \bar{T} = (T^- + T^+)/2, \quad \bar{X}_2 = \bar{\xi} = 0, \quad \bar{X}_3 = \bar{Q} = Q_m/2$$

Отметим, что функция $\rho_1(X_1)$ вида (2.4) описывает равновероятное распределение температуры $T = X_1$, тогда как функции $\rho_2(X_2)$ и $\rho_3(X_3)$ вида (2.5) и (2.6) допускают повышенную вероятность значений угла $\xi = X_2$ и нагрузки $Q = X_3$ вблизи их средних значений 0 и $Q_m/2$ соответственно.

С учетом экспериментальных данных по полимерным композитам из упомянутых выше литературных источников, для расчетов процесса изнашивания покрытия были выбраны следующие значения трибофизических параметров:

$E = 1$ ГПа, $\nu = 0.3$, $k_E = -0.01$ К $^{-1}$, $\alpha_0 = 10^{-15}$ Па $^{-1}$, $n_\alpha = 0.02$ К $^{-1}$, $k_a = 2 \times 10^{-5}$ К $^{-1}$, $k_b = 3 \times 10^{-5}$ К $^{-1}$, $T_0 = 293$ К (20°С).

Геометрические параметры подшипника и условия его работы определялись значениями

$h_0 = 0.5$ мм, $R_{a0} = 10$ мм, $R_{b0} = 10.55$ мм, $\omega = 2\pi$ с $^{-1}$, $A_\xi = 1$ или 2, $A_Q = 1$, $Q_m = 50$ кН/м, $\bar{Q} = 25$ кН/м, $T^- = 143$ К (−130°С), $T^+ = 443$ К (170°С), $\bar{T} = T_0$.

Отметим, что при выбранных значениях h_0 , R_{a0} , R_{b0} начальный зазор подшипника составляет $\Delta_0 = R_{b0} - R_{a0} - h_0 = 0.05$ мм, а указанные значения коэффициентов линейного теплового расширения вала k_a и обоймы k_b характерны для алюминиевых и магниевых сплавов [21]. Выбранный диапазон изменения температуры соответствует условиям работы узлов трения в открытом космосе на околоземных орбитальных станциях.

В качестве оценки коэффициента k_c линейного теплового расширения полимерных композитов можно использовать значение 10^{-5} К $^{-1}$ [21]. При таком значении k_c и выбранном диапазоне изменения температуры относительное изменение толщины h покрытия из полимерного композита в результате теплового расширения не превышает $\pm 1.5 \times 10^{-3}$, а относительное изменение зазора Δ не превышает $\pm 2.5 \times 10^{-2}$. Приведенные оценки обосновывают сделанное в предыдущем разделе допущение о возможности не учитывать изменение толщины h покрытия, обусловленное тепловым расширением.

Расчеты процесса изнашивания покрытия проводились с использованием стохастической (1.3)–(1.6), (1.8) и детерминированной (1.1), (1.13), (1.14) моделей. Численное решение соответствующих дифференциальных уравнений строилось на основе явной по времени разностной схемы [22], при этом для детерминированной постанов-

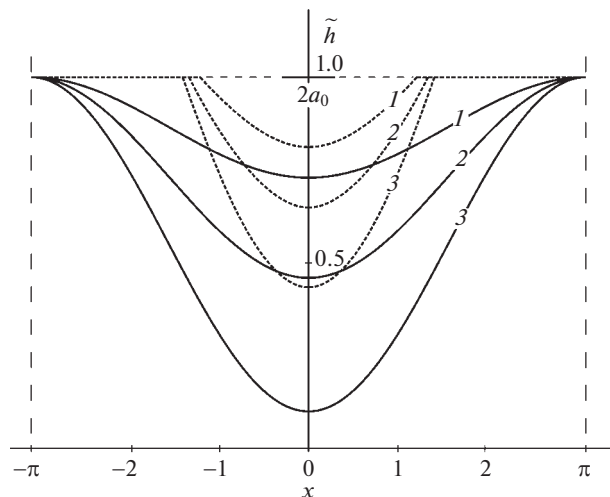


Рис. 2. Профили изношенного покрытия в различные моменты времени $\tilde{t}$: 8.03 (1), 16.1 (2), 26.8 (3) (стохастическая постановка задачи, $A_\xi = 1$). Штриховыми линиями показаны профили изношенного покрытия в те же моменты времени при детерминированной постановке задачи.

ки задачи монотонно возрастающий размер a области контакта использовался в качестве временного параметра [3].

С целью оценки важности учета случайных изменений температуры и внешней нагрузки при расчете износа покрытия, рассматривались различные варианты с одной или двумя постоянными величинами из числа T , ξ , Q . Для таких величин использовались соответствующие представления (1.10) функции плотности вероятности. Для варианта, допускающего постоянство всех трех величин T , ξ , Q , расчет процесса изнашивания проводился на основе детерминированной модели.

Полученные результаты расчетов представлены ниже с использованием безразмерных величин $\tilde{h} = h/h_0$ и $\tilde{t} = t/t_c$, $t_c = 10^5 \text{ с} \approx 27.8 \text{ ч}$.

На рис. 2 показаны профили изношенного покрытия в различные моменты времени $\tilde{t}$: 8.03 (1), 16.1 (2), 26.8 (3). Расчеты проводились в предположении, что все величины T , ξ , Q случайные с функциями плотности вероятности вида (2.4)–(2.6) и $A_\xi = 1$. Для сравнения пунктирными линиями показаны профили изношенного покрытия в те же моменты времени, но при постоянных значениях $T = \bar{T}$, $\xi = \bar{\xi} = 0$, $Q = \bar{Q}$. Соответствующая этим значениям начальная длина $2a_0 = 0.601$ области контакта обозначена на рисунке отдельным отрезком.

На рис. 3 показаны профили изношенного покрытия в различные моменты времени $\tilde{t}$: 10.7 (1), 21.4 (2), 35.8 (3). Все величины T , ξ , Q здесь считались случайными, однако, в отличие от рис. 2, расчеты проводились при $A_\xi = 2$.

В таблице представлены значения долговечности $\tilde{t}_* = t_*/t_c$ покрытия, определяемой из условия (1.12), для вариантов с различными сочетаниями постоянных и случайных величин из числа T , ξ , Q . Постоянный характер величины при этом отмечается символом “с”, а случайный – символом “г”. Для сравнения в таблице указана дол-

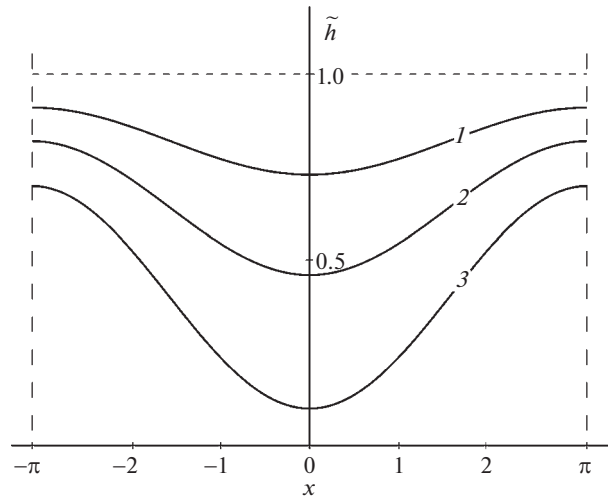


Рис. 3. Профили изношенного покрытия в различные моменты времени $\tilde{t}$: 10.7 (1), 21.4 (2), 35.8 (3) (стохастическая постановка задачи, $A_{\xi} = 2$).

говечность покрытия при всех трех постоянных величинах T , ξ , Q , рассчитанная на основе детерминированной модели (вариант 4).

3. Обсуждение результатов. Представленные на рис. 2 и 3 графики показывают, что максимальное изнашивание покрытия, как и следовало ожидать, происходит при $x = 0$, т.е. в центральной части подшипника. Именно эта часть, согласно выражению (2.5), с наибольшей вероятностью подвержена контактному взаимодействию с валом. При детерминированной постановке задачи износ покрытия также концентрируется в центральной части подшипника в направлении $\xi = 0$ ($x = 0$) приложения постоянной нагрузки Q (пунктирные линии на рис. 2). Однако в отличие от стохастической постановки задачи, здесь износ носит локальный характер и представляет собой монотонно растущую лунку износа.

Сопоставление сплошных линий (стохастическая постановка задачи) и соответствующих им по времени пунктирных линий (детерминированная постановка задачи) на рис. 2, а также вариантов 3 и 4 в таблице позволяет сделать общий вывод о важности учета факторов случайности величин T , ξ , Q при расчете износа подшипника. Действительно, использование детерминированной модели (вариант 4) приводит к оценке долговечности t_* покрытия в 1.63 раза завышенной по сравнению с оценкой по стохастической модели (вариант 3).

Наиболее значимым представляется фактор случайности направления ξ внешней нагрузки. Это проявляется, например, в том, что значение параметра A_{ξ} функции плотности вероятности (2.5) величины ξ оказывает качественное влияние на распределение износа по поверхности покрытия (рис. 2 и 3) и существенно влияет на оценку долговечности t_* покрытия (таблица). Однако фактор случайности величины нагрузки Q представляется малозначимым. Например, сравнение вариантов 2 и 3 таблицы показывает, что учет случайного изменения величины нагрузки Q не оказывает заметного влияния на оценку долговечности t_* покрытия.

Существенное влияние на результаты расчета износа покрытия оказывает фактор случайности температуры T — это, например, следует из сравнения значений долго-

Таблица 1. Значения долговечности покрытия для различных вариантов изменения температуры и нагрузки

№ варианта	T	ξ	Q	$A_{\xi} = 1$	$A_{\xi} = 2$
1	с	г	г	100.44	133.93
2	г	г	с	29.82	39.75
3	г	г	г	29.85	39.80
4	с	с	с	48.66	48.66

вечности t_* покрытия для вариантов 1 и 3 таблицы. Такое влияние обусловлено тем, что модуль упругости E и коэффициент износа α в значительной степени зависят от температуры согласно равенствам (2.1) и (2.2).

4. Выводы. 1. Предложена стохастическая модель процесса изнашивания тонкого покрытия в радиальном подшипнике скольжения, учитывающая случайные изменения температуры подшипника и внешней нагрузки.

2. Выполнен численный анализ процесса изнашивания покрытия, ориентированный на условия работы узлов трения в открытом космосе на околоземных орбитальных станциях.

3. Дана оценка значимости факторов случайного изменения температуры и внешней нагрузки при расчете износа подшипника. В частности, установлено, что наибольшую значимость имеют факторы случайности температуры подшипника и направления внешней нагрузки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 22-49-02010.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
2. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 254 с.
3. Солдатенков И.А. Износоконтактная задача с приложениями к инженерному расчету износа. М.: Физматкнига, 2010. 160 с.
4. Jang J.Y., Khonsari M.M. On the characteristics of misaligned journal bearings // *Lubricants*. 2015. V. 3. P. 27–53. <https://doi.org/10.3390/lubricants3010027>
5. Sano T., Nakasone T., Katagiri T., Okamoto Y. A Study on wear progress of plain bearing under mixed lubrication condition // *SAE Int. J. Eng.* 2011. V. 4. P. 569–580. <https://doi.org/10.4271/2011-01-0609>
6. Маленков М.И., Каратушин С.И., Тарасов В.М. Конструкционные и смазочные материалы космических механизмов. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2007. 54 с.
7. *Spacecraft Systems Engineering* / Ed. P. Fortescue, G. Swinerd, J. Stark. Chichester: John Wiley & Sons, 2011.
8. Броновец М.А. Трибология и космические транспортные системы // *Вестн. РГУПС*. 2017. № 1. С. 18–23.
9. Мышкин Н.К., Григорьев А.Я., Басинюк В.Л., Мардосевич Е.И., Ковальчук Г.Ф., Папина С.С., Ковалева И.Н., Кудрицкий В.Г. Космическая трибология: состояние и перспективы // *Механика машин, механизмов и материалов*. 2012. № 3–4 (20–21). С. 126–130.
10. Александров В.М., Броновец М.А., Солдатенков И.А. Математическое моделирование изнашивания подшипника скольжения в условиях открытого космоса // *Трение и износ*. 2008. Т. 29. № 3. С. 238–245.

11. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятности и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988. 480 с.
12. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Высшая школа, 2000. 384 с.
13. Механика контактных взаимодействий / Под ред. *И.И. Воровича, В.М. Александрова*. М.: Физматлит, 2001. 670 с.
14. *Friedrich K., Schlarb A.K.* Tribology of Polymeric Nanocomposites // Amsterdam: Elsevier, 2008.
15. Polymer Tribology / Ed. *S. K. Sinha, B. J. Briscoe*. London: Imperial College Press, 2009.
16. Дисперсно-наполненные полимерные композиты технического и медицинского назначения / Под ред. *А.В. Герасимова*. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2017. 311 с.
17. *Бартенев Г.М., Лаврентьев В.В.* Трение и износ полимеров. Л.: Химия, 1972. 240 с.
18. *Fusaro R.L., Sliney H.E.* Lubricating characteristics of polyimide bonded graphite fluoride and polyimide thin films // ASLE Trans. 1973. V. 16. P. 189–196.
<https://doi.org/10.1080/05698197308982721>
19. *Burris D.L.* Investigation of the tribological behavior of polytetrafluoroethylene at cryogenic temperatures // Tribology Trans. 2008. V. 51. P. 92–100.
<https://doi.org/10.1080/10402000701660618>
20. *Кикоин А.К., Кикоин И.К.* Молекулярная физика. М.: Наука, 1976. 480 с.
21. Физические величины: справочник / Под ред. *И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова*. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
22. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. 2-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 586 с.

УДК 531.3

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ АУКСЕТИЧЕСКИХ
И НЕАУКСЕТИЧЕСКИХ МЕТАМАТЕРИАЛОВ ИЗ МЕТАЛЛА
ПРИ ПРОНИКАНИИ В НИХ ЖЕСТКИХ УДАРНИКОВ**

© 2023 г. С. Ю. Иванова^а, К. Ю. Осипенко^а, В. А. Кузнецов^а, Н. Г. Соловьев^а,
Н. В. Баничук^а, Д. С. Лисовенко^{а,*}

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: lisovenk@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 10.10.2022 г.

После доработки 18.10.2022 г.

Принята к публикации 20.10.2022 г.

Экспериментально изучались свойства металлических сотовых метаматериалов, имеющих различную внутреннюю структуру при пробивании по нормали жестким сферическим ударником. Проведенные эксперименты с металлическими образцами метаматериалов с отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетиков), показали большее сопротивление прониканию ударников, чем эксперименты с металлическими образцами, имеющими сотовую структуру с положительным коэффициентом Пуассона.

Ключевые слова: метаматериалы, ауксетики, экспериментальные исследования, пробивание, жесткие ударники

DOI: 10.31857/S0572329922600773, **EDN:** DHLUFH

При проектировании новых метаматериалов для механических конструкций важно удовлетворять ряду требований, диктуемых экономией места, снижением веса и стоимости производства и пр. Одной из важных эксплуатационных характеристик элементов конструкций является устойчивость к пробиванию ударником. Данная работа посвящена экспериментальному изучению сопротивляемости пробиванию жестким ударником ячеистых структур из металла (метаматериалов). Исследуется влияние таких структур на глубину проникания жесткого сферического ударника. Дано сравнение результатов для сотовых структур с положительным коэффициентом Пуассона и отрицательным коэффициентом Пуассона.

Таблица 1. Толщина и масса образцов, а также значения скорости входа для каждого образца

Номер эксперимента	Рисунок	Структура образца	Толщина, мм	Масса, г	Скорость входа, м/с
1	2a	ауксетик	52	685	282
2	2b	неауксетик	55	550	283
3	3a, b (слева)	неауксетик	55	545	281
4	3a, b (справа)	ауксетик	37	490	280
5	4	сплошная пластина	5	477	281

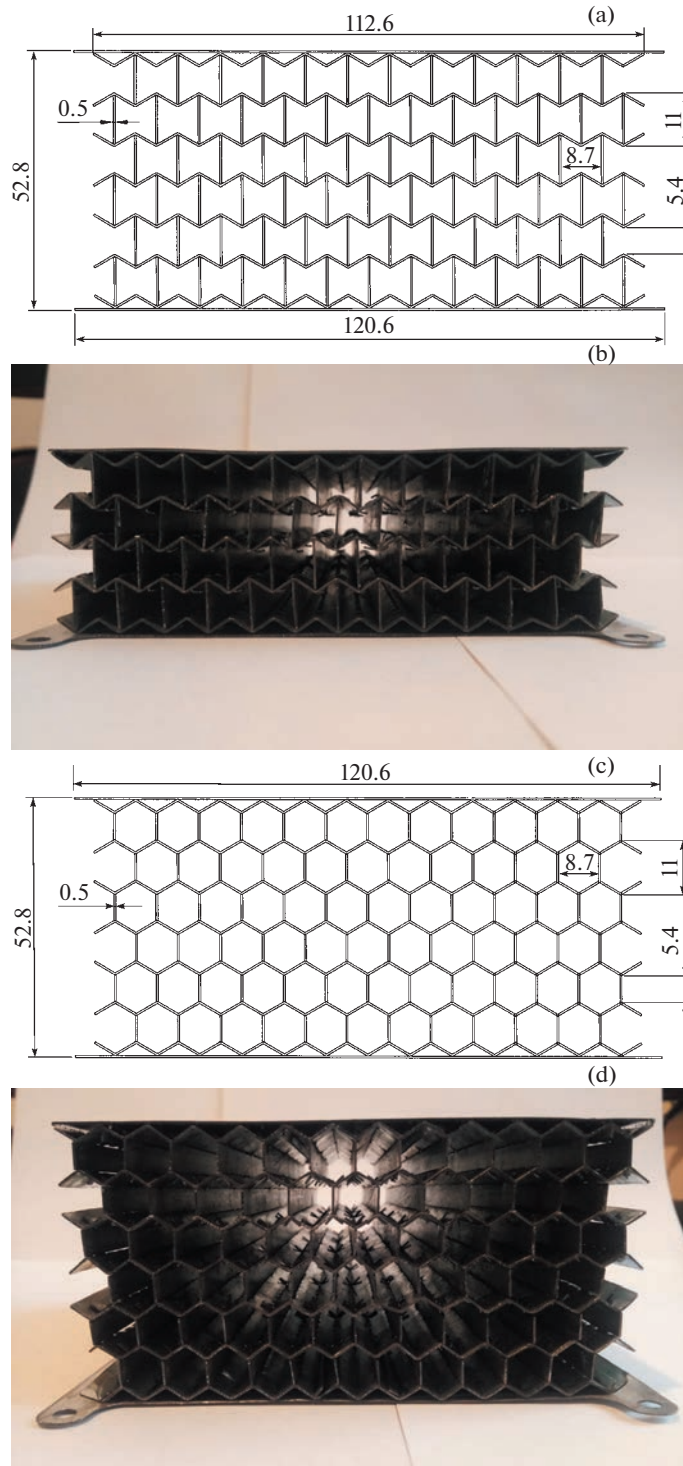


Рис. 1. Внутренняя структура образцов метаматериалов и их геометрические размеры в мм: (а), (б) — акустический; (с), (д) — неакустический сотовые образцы.



Рис. 2. Проникание ударника в ауксетический (а) и неауксетический (б) сотовые образцы в экспериментах № 1 и № 2.

В отличие от обычных материалов с положительным коэффициентом Пуассона для ауксетических материалов (материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона) продольное растяжение приводит к поперечному расширению [1–7]. Ауксетики имеют более высокое сопротивление индентированию по сравнению с обычными материалами. Можно предположить, что данный факт может способствовать увеличению сопротивления пробиванию ударником непосредственно в месте удара, что делает ауксетики перспективными для создания ударо- и энергопоглощающих конструкций.

С целью проверки такого предположения была проведена серия экспериментов. Для экспериментов с помощью лазерной технологии из листовой оцинкованной ста-

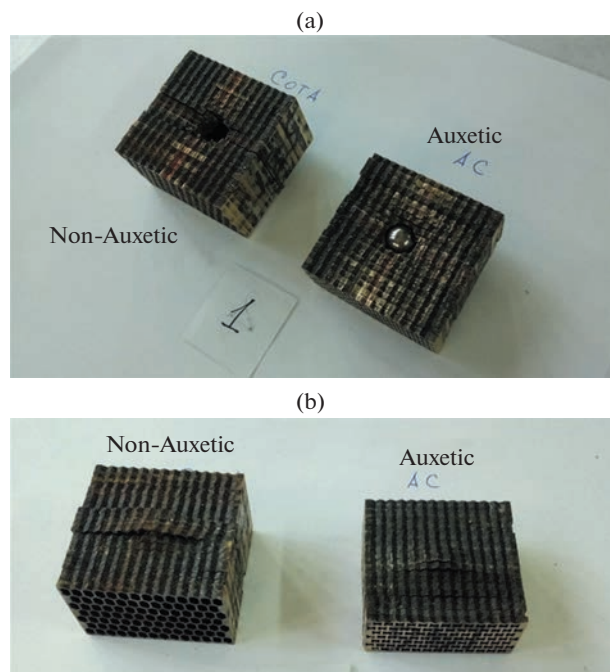


Рис. 3. Проникание ударника в неауксетический образец (слева) и ауксетик (справа) в экспериментах № 3 и № 4: (а) – вход, (б) – выход.



Рис. 4. Сплошная пластинка из стали после удара (эксперимент № 5).

ли толщиной 0.5 мм были изготовлены образцы метаматериала с ячеистой ауксетической структурой на основе вогнутого шестиугольника (рис. 1a,b). Для сравнения были изготовлены также образцы с сотовой внутренней структурой, не обладающей ауксетическими свойствами (рис. 1c,d). Элементом такой конструкции являлся выпуклый шестиугольник.

Пробивание образцов осуществлялось стальным сферическим ударником, имеющим диаметр 9.95 мм и массу 3.53 г. Образцы устанавливались на экспериментальном стенде и жестко закреплялись так, чтобы боковая поверхность была перпендикулярна направлению движения ударника, который разгонялся пневматической пушкой. Давление в камере пушки выставлялось таким образом, чтобы скорость вылета ударника составляла приблизительно 280 м/с. Скорость ударника на вылете из ствола пушки принималась за скорость входа в преграду, сопротивлением воздуха движению тела можно было пренебречь в силу небольших размеров экспериментальной установки. Скорость входа измерялась с помощью оптического рамочного хронографа ИБХ-АСС-0021 “Стрелец”. Данные серии экспериментов приведены в табл. 1. Боковая сторона образцов, которая подвергалась удару, во всех случаях имела размеры 100 · 120 мм и закрывалась ровной металлической пластинкой толщиной 0.5 мм тех же размеров.

На рис. 2a,b представлены фотографии образцов после проникновения ударника в экспериментах № 1 и № 2. Толщина пробиваемого ауксетического образца была 52.5 мм, неауксетического сотового — 55 мм (толщины были примерно одинаковыми, насколько это позволяли условия изготовления). Массы составляли 685 г и 550 г соответственно. Из рис. 2 видно, что глубина проникновения ударника в ауксетический образец (рис. 2,a) меньше, чем в неауксетический сотовый (рис. 2b). Скорость входа ударника была, соответственно, равна 282 и 283 м/с.

На рис. 3 представлены неауксетический сотовый образец и ауксетик после воздействия ударником со скоростью входа 281 м/с и 280 м/с соответственно (эксперименты № 3 и № 4). Образцы, представленные на рис. 3, были изготовлены методом лазерной резки из листовой латуни толщиной 2 мм с последующей спайкой слоев оловянно-свинцовым припоем. В этих экспериментах были выравнены, на сколько это было технологически возможно, значения массы образцов. Видно, что и в этом случае глу-

бина проникания ударника в ауксетический образец меньше, чем в неауксетический сотовый.

Для сравнения был проведен эксперимент № 5 по пробиванию примерно эквивалентной по массе (477 г) сплошной стальной пластинки с размерами $100 \cdot 120$ мм толщиной 5 мм. На скорости вылета 281 м/с пластинка не была пробита (рис. 4), что говорит о ее большей эффективности как защиты от пробивания. Но если для функционирования конструкции нужна именно ячеистая структура, то эффективнее против пробивания будет работать именно ауксетик.

Проведенные эксперименты показали преимущество ауксетической структуры металлических образцов перед неауксетической сотовой при высокоскоростном внедрении жесткого сферического тела.

Работа выполнена по темам госзадания ИПМех РАН (номера госрегистрации 123021700045-7, 123021700050-1, 123021700057-0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lim T.-C.* Auxetic Materials and Structures. Singapore: Springer, 2015.
<https://doi.org/10.1007/978-981-287-275-3>
2. *Kolken H.M.A., Zadpoor A.A.* Auxetic Mechanical Metamaterials // RSC Adv. 2017. V. 7. № 9. P. 5111–5129.
<https://doi.org/10.1039/C6RA27333E>
3. *Ren X., Das R., Tran P. et al.* Auxetic Metamaterials and Structures: A Review // Smart Mater. Struct. 2018. V. 27. № 2. P. 023001.
<https://doi.org/10.1088/1361-665X/aaa61c>
4. *Wu W., Hu W., Qian G. et al.* Mechanical design and multifunctional applications of chiral mechanical metamaterials: A review // Mater. Des. 2019. V. 180. P. 107950.
<https://doi.org/10.1016/j.matdes.2019.107950>
5. *Городцов В.А., Лисовенко Д.С.* Ауксетики среди материалов с кубической анизотропией // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 4. С. 7–24.
<https://doi.org/10.31857/S0572329920040054>
6. *Шитикова М.В.* Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 1. С. 3–40.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921060118>
7. *Gao Y., Huang H.* Energy absorption and gradient of hybrid honeycomb structure with negative Poisson's ratio // Mech. Solids. 2022. V. 57. № 5. P. 1118–1133.
<https://doi.org/10.3103/S0025654422050053>