

Известия

ISSN 0572-3299

Российской академии наук

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА



2023

3

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Результаты экспериментально–теоретических исследований возможностей резонансного метода разрушения ледяного покрова <i>В. М. Козин</i>	3
Экспериментальное исследование влияния анизотропии на ориентацию вывалов в скважинах <i>К. Б. Устинов, В. И. Карев, Ю. Ф. Коваленко, С. О. Барков, В. В. Химуля, Н. И. Шевцов</i>	21
Асимптотическое исследование изгиба пластины для сильно ортотропного материала <i>С. В. Шешенин, Р. Р. Мурадханов</i>	36
Новый метод релаксации упругих напряжений при росте гетероэпитаксиальных пленок <i>А. А. Корякин, С. А. Кукушкин, А. В. Осипов, Ш. Ш. Шарофидинов, М. П. Щеглов</i>	58
Закономерности изменения предельных значений инвариантов напряжений и деформаций в микронеоднородных средах <i>В. Ю. Марина</i>	73
Об относительных равновесиях тяжелой бусинки на равномерно вращающейся шероховатой спице <i>А. А. Буров, В. И. Никонов</i>	99
Управление динамическими параметрами плоской балочной конструкции посредством выбора закреплений <i>И. В. Кудрявцев, В. А. Иванов, Н. В. Суходоева, О. И. Рабецкая, А. Е. Митяев</i>	106
Постановка задачи о прецессиях твердого тела с неподвижной точкой в трех однородных силовых полях. прецессионно-изоконические движения тела <i>Г. В. Горр</i>	123
Модель микромеханического модально-локализованного акселерометра с чувствительным элементом в виде балки с начальной погибью <i>Д. А. Индейцев, Н. В. Можгова, А. В. Лукин, И. А. Попов</i>	135
Об оценке чувствительности коэффициентов моделей для неоднородных тел <i>А. О. Ватульян, В. О. Юров</i>	152
Связанная термоупругость гемитропных сред. псевдотензорная формулировка <i>Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев</i>	163
Об устойчивости стационарных движений механических систем с частным интегралом Горячева–Чаплыгина <i>М. А. Новиков</i>	177

УДК 624.124

**РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО–ТЕОРЕТИЧЕСКИХ
ИССЛЕДОВАНИЙ ВОЗМОЖНОСТЕЙ РЕЗОНАНСНОГО МЕТОДА
РАЗРУШЕНИЯ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА**

© 2023 г. В. М. Козин^{а,*}

^а *Институт машиноведения и металлургии Хабаровского федерального исследовательского центра
Дальневосточного отделения Российской академии наук, Комсомольск-на-Амуре, Россия
e-mail: kozinvictor@rambler.ru

Поступила в редакцию 09.06.2022 г.

После доработки 11.07.2022 г.

Принята к публикации 14.07.2022 г.

На основании экспериментов, выполненных: в ледовых бассейнах; с крупномасштабными моделями судов на воздушной подушке в полевых условиях; с натурными судами на воздушной подушке (СВП), а также с использованием теоретических зависимостей для расчета напряженно-деформированного состояния ледяного покрова от действия движущихся нагрузок исследованы возможности (закономерности) резонансного метода разрушения льда, т.е. путем возбуждения резонансных изгибно-гравитационных волн (ИГВ). Поясняются его физическая сущность, целесообразность его реализации СВП, указаны возможные области эффективного использования этого метода. Приведены результаты информационного обзора по теме работы, на основании которого поставлена цель исследований. При описании вязкоупругого характера соотношения между напряжениями и деформациями во льду использовался закон деформирования упруго-запаздывающей среды Кельвина–Фойгта. В качестве критерия ледоразрушающей способности ИГВ была принята теоретическая плотность потенциальной энергии изгиба бесконечной пластины. При этом использовано условие, что при ее достижении определенного значения происходит полное (с раскрытием трещин) разрушение льда. Исходные данные для этих расчетов взяты из выполненных экспериментов. Приведены зависимости, позволяющие определить параметры движущейся с резонансной скоростью нагрузки (параметры СВП), достаточные для разрушения ледяного покрова заданной толщины при заданных ледовых условиях.

Ключевые слова: ледяной покров, изгибно-гравитационные волны, резонанс, разрушение, параметры нагрузки

DOI: 10.31857/S0572329922600396, EDN: JKYRWS

1. Введение. Известно, что основным средством для разрушения ледяного покрова является ледокольный флот. Однако, большие энергетические затраты на разрушение льда, невозможность его использования на малых глубинах из-за большой осадки ледоколов, а также для разрушения заторов и зажоров заставляют искать новые способы борьбы со льдом. В этом направлении перспективы открываются благодаря открытой в Канаде способности СВП разрушать ледяной покров при их движении по льду со скоростью резонансных ИГВ [1]. При такой скорости частота изгибных волн, распространяющихся в свободной плавающей пластине, совпадает с частотой гравитационных волн на поверхности чистой воды, т.е. возникают условия для их резонансного взаимодействия. В этом случае архимедовы силы (силы плавучести) полностью урав-

новешиваются гидродинамическими силами и вода перестает поддерживать ледяной покров, т.е. его равновесие достигается только за счет внутренних сил упругости, возникающих в самой пластине. Это приводит к резкому увеличению амплитуды возбуждаемых изгибно-гравитационных волн (ИГВ), что значительно повышает энергоэффективность разрушения льда по сравнению с известными методами. На основании этого метод разрушения ледяного покрова путем возбуждения резонансных ИГВ был назван резонансным [2].

Резонансный метод разрушения ледяного покрова (РМРЛ) может осуществляться любым транспортным средством, обладающим возможностью перемещаться по ледяному покрову с достаточной скоростью и создающим необходимую для разрушения льда нагрузку. Так, разрушение льда резонансными ИГВ наблюдалось при движении автомашин, танков, поездов по ледяным переправам, при использовании ледяного покрова в качестве взлетно-посадочных полос для самолетов и автомобильных трасс.

При решении ледотехнических задач на замерзающих водоемах с использованием резонансного метода необходимо возбуждать ИГВ значительной амплитуды. Для этого потребуются транспортные средства массой в десятки и сотни тонн и способные безопасно двигаться над льдом с большой скоростью. В настоящее время этим требованиям удовлетворяют только СВП. Кроме того, их вездеходные качества позволяют разрушать ледяной покров на акваториях любой глубины. Обладая большой скоростью, маневренностью и амфибийными свойствами, СВП могут быстро перемещаться в районы с ледовыми осложнениями. Преимуществами СВП являются также отсутствие непосредственного контакта судна со льдом (это повышает надежность их эксплуатации), проходимость над заснеженным и затороженным ледяным покровом, безопасность движения над подводными островами, битым льдом, возможность выхода со льда на чистую воду и наоборот, на необорудованный берег. Это позволяет решать ряд задач по продлению навигации на внутренних водных путях, использовать СВП для быстрого (с резонансной скоростью 20–25 км/ч [2]) разрушения льда на больших площадях с целью более раннего вскрытия рек и водохранилищ. В периоды ледостава и ледохода для предотвращения разрушительных наводнений приходится разрушать ледяные заторы и зажоры. В этих случаях РМРЛ окажется более эффективным по сравнению с традиционными технологиями.

2. Краткий обзор экспериментальных исследований нагружения ледяного покрова движущимися нагрузками. Первое упоминание об экспериментальных исследованиях грузоподъемности пресноводного ледяного покрова и определения предельных нагрузок с целью транспортировки по нему грузов относится к середине 20-х годов прошлого столетия [3–5]. Записи колебаний ледяного покрова от действия импульсной нагрузки при посадке на лед самолета и его пролете на предельно малой высоте и их анализ приведены в работе [6]. Волновой характер колебаний льда под действием движущейся нагрузки описан в работах [7, 8]. Автором было высказано предположение о возможности проявления опасных явлений резонанса. Анализируя данные о волнообразных колебаниях ледяного покрова при перемещении грузов, авторы работы [9] пришли к выводу о существовании определенной скорости, превышение которой может привести к разрушению ледяного покрова. В 1949 г. были проведены экспериментальные исследования деформаций ледяного покрова от движущихся нагрузок, что позволило установить, как скорость перемещения нагрузки влияет на величину и характер прогиба льда [10]. При выполнении экспериментальных исследований по возбуждению в ледяном покрове волн сравнительно низкой частоты были обнаружены недиспергирующие волны [11]. Позднее были опубликованы результаты натурных наблюдений за естественными колебаниями льда арктических и антарктических морей [12, 13]. Записи профиля резонансных ИГВ, генерируемых в ледяном покрове, при посадке и маневрировании самолетов приведены в работе [14]. Экспериментальным исследованиям колебаний ледяного покрова посвящены работы [15, 16]. Автор работы [17]

проводил исследования на озерном льду толщиной порядка 0.5 м при перемещении транспортных средств массой от 3.8 до 7.7 тонн со скоростью от 2.8 до 8.9 м/с, а работы [18] – замерил параметры волнения в дрейфующих льдах. Результаты замеров свободных и вынужденных колебаний ледяного покрова приведены в работе [19]. Спектры естественного фона вертикальных колебаний ледяного покрова приводятся в работе [20]. При изучении опыта использования ледяного покрова для транспортировки грузов с помощью колесной и гусеничной техники было установлено, что при резонансной скорости движения прогибы льда возрастали в два раза [21]. Во время испытаний канадского СВП “Voyageur” были обнаружены его ледокольные качества, при этом на его резонансной скорости 6.2 м/с судно непрерывно разрушало ледяной покров толщиной 0.38 м [1]. Экспериментальные исследования по распространению волн в ледяном покрове для определения его напряженно-деформированного состояния (НДС) и физико-механических свойств проводились в ААНИИ [22, 23]. С помощью датчиков давления, закрепляемых на границе раздела лед–вода, изучались колебания ледяного покрова, вызванные движущейся нагрузкой [24]. На льду озера Дифенбейкер при помощи датчиков вертикальных перемещений проведена серия экспериментов по записи профилей взволнованной поверхности льда толщиной от 0.50 до 0.73 м от движения транспортных средств [25]. В работе [26] опубликованы экспериментальные данные, полученные с помощью 1200 тензодатчиков. Они были установлены на расстоянии 1 км от взлетно-посадочной полосы, расположенной на морском льду пролива Макмердо. На озере Сарома (Хоккайдо, Япония) были проведены экспериментальные исследования по изучению деформаций ледяного покрова при движении по нему нагрузки. Автором с высокой точностью были записаны профили взволнованной поверхности льда [27]. В работе [28] исследовались режимы движения нагрузки по льду. Испытания проходили на озерах Канады при различных глубинах и толщинах льда от 0.4 до 0.6 м. Была установлена зависимость резонансной скорости движения нагрузки от ледовых условий. Также на озере Сарома были проведены дополнительные полевые испытания при наличии снежного покрова. В результате исследований были выявлены пять режимов деформирования ледяного покрова [29–31]. Эксперименты по определению динамических деформаций льда от ветровой и движущейся нагрузок, были проведены с использованием тензометрических датчиков. В качестве движущейся нагрузки использовалось автотранспортное средство. В результате было определено значение резонансной скорости движения. Отмечено, что при этой скорости прогибы льда возрастали в 2.2 раза по сравнению со статически приложенной нагрузкой [32, 33]. Также была проведена крупная серия полевых испытаний на морском льду для определения параметров возбуждаемых ИГВ. Глубина акватории составляла от 350 до 450 м. Молодой ледяной покров толщиной 1.6 м имел ровную, гладкую поверхность с одинаковыми физико-механическими свойствами. В качестве транспортных средств использовались грузовой автомобиль массой 2100 кг и самолет LC-130 Hercules массой около 50000 кг [34]. Эксперименты с использованием грузового автомобиля проводились вдоль ледяной дороги протяженностью 6 км. В процессе их выполнения исследованы вопросы поведения морского и озерного льда при действии на него движущихся нагрузок. Авторами выполнена серия экспериментов на антарктической станции McMurdo Sound, в которых сделаны записи деформаций ледяного покрова на различных расстояниях от ледовой трассы [35]. Для имитации воздействия самолета на естественный ледяной покров при его взлете и посадке была произведена серия полунатурных экспериментов с использованием двухместного мотодельтаплана [36].

3. Обзор теоретических исследований по деформированию ледяного покрова ИГВ. К одному из первых исследований колебаний ледяного покрова можно отнести работу [37], в которой была установлена зависимость фазовой скорости поверхностных волн в плавающей тонкой однородной упругой пластине от волнового числа.

В период Великой Отечественной войны интерес к исследованиям динамики ледяного покрова повысился в связи с эксплуатацией ледовой трассы “Дорога жизни” на льду Ладожского озера. Теоретические исследования влияния волновых движений жидкости на НДС ледяного покрова от приложенной ко льду подвижной и импульсной нагрузок опубликованы в работе [38]. Автором также были описаны физические процессы, сопровождающие распространение ИГВ. В работе [39] рассмотрено распространение упругих волн в плавающем ледяном слое конечной толщины и получено характеристическое уравнение, связывающее волновое число с частотой. Влияние сжимаемости воды на распространение упругих волн во льду оценено в работе [40]. Сопоставляя результаты теоретических исследований с экспериментальными данными, авторы пришли к выводу, что при длинных волнах, для которых справедлива теория слабого изгиба тонких пластин, влияние сжимаемости воды пренебрежимо мало. Вопросы динамики ледяного покрова наиболее полно и глубоко были проработаны в работе [41]. Автор разработал математическую теорию волновых процессов в плавающем на воде ледяном покрове, им решен ряд нестационарных задач динамики ледяного покрова в случае бассейна неограниченной глубины. Рассмотрел влияние неупругих свойств льда на характер изгиба в зависимости от режима нагружения. Исследования влияния ледяного покрова и вязкости жидкости на длинные волны, вызываемые периодическими давлениями, отражены в работе [42]. Вынужденные колебания бесконечной упругой пластины на упругом основании винклеровского типа под действием гармонически изменяющейся во времени сосредоточенной силы рассмотрены в работе [43]. На примере плоских установившихся волн, возникающих в ледяном покрове от действия движущейся области поверхностных давлений, исследовано влияние неоднородностей ледяного покрова и жидкости на развитие волновых движений [44]. Вопросами влияния слоя снега на характеристики ледяного покрова посвящена работа [45]. Автор статьи [46] предложил использовать введение в дифференциальные уравнения колебаний ледяного покрова нелинейных членов, что позволило избежать неограниченный рост амплитуды волны при резонансных скоростях движения нагрузки. Зависимости для расчета НДС ледяного покрова в случае движения по нему нагрузки при разных граничных условиях на контуре ледяного поля и законах ее движения получены в работе [47]. В работах [49, 50] рассмотрены вопросы дифракции поверхностных волн краем плавающей упругой полубесконечной пластины для конечной и бесконечной глубины жидкости. Авторы работ [51, 52] исследовали стационарное и нестационарное движение нагрузок по ледяному покрову. Решения ряд прикладных задач динамики ледяного покрова приведены в работе [53]. Авторы [54] рассмотрели ряд задач динамики ледяного и снежного покровов. Решение распространения волн в прямоугольном канале конечной и малой глубины для ледяного покрова, прикрепленного к его стенкам, получено в работе [55]. Влияние физико-механических характеристик ледяной пластины, режимов взлета и посадки самолета на НДС ледяного покрова установлено в работе [56]. Авторами [57] исследована задача о распространении ИГВ в покрытом льдом канале прямоугольного сечения. В работе [58] исследовано влияние гидростатического и гидродинамического давлений на колебания ледяного покрова в канале под действием движущейся нагрузки. В рамках линейной теории исследовались установившиеся колебания ледяного покрова и жидкости, вызванные локальной областью периодического по времени давления [59]. В работах [60–62] решены задачи о взаимодействии поверхностных волн и ИГВ с вертикальной преградой, о поведении полубесконечного ледяного покрова на поверхности жидкости конечной глубины под действием нагрузки, движущейся с постоянной скоростью вдоль кромки покрова и по свободной поверхности жидкости. Автором [63, 64] получено решение линейной гидроупругой задачи об установившихся вынужденных колебаниях полубесконечного ледяного покрова под действием локализованной внешней нагрузки. Исследовано поведение ледяного покрова в зависимости от частоты

ты внешней нагрузки и граничных условий на краю пластины. В работе [65] изучено влияние снежного покрова на распространение ИГВ, генерируемых в сплошном ледяном поле под действием периодической перемещающейся системы давлений и начальных деформаций. Исследованы неустановившиеся колебания сплошного ледяного покрова, возникающие под действием атмосферных возмущений в условиях ледового сжатия и скорости дрейфа льда и многие другие вопросы. Изучению влияние битого льда на образование гравитационных волн, вызванных движением внешней нагрузки вдоль канала, решению нестационарной задачи об ИГВ на поверхности замороженного ледового канала, вызванных движением внешней нагрузки, исследованию реакции ледяного покрова на нагрузку, движущуюся по замерзшему каналу, посвящены работы [66–68].

4. Цель работы. Выполненный обзор экспериментальных работ по деформированию ледяного покрова движущимися нагрузками и теоретических исследований по возбуждению ИГВ в ледяном покрове говорит о глубокой изученности и все возрастающем интересе к этим вопросам. Уже более 100 лет решаются различные теоретические и прикладные задачи в этих направлениях. Связано это с тем, что проблемы освоения регионов с суровыми климатическими условиями и богатыми природными ресурсами были и остаются актуальными. Однако, несмотря на большой объем выполненных экспериментально-теоретических исследований известные решения не могут быть использованы для достижения цели, поставленной в работе: исследовать закономерности разрушения ледяного покрова резонансным методом. Объясняется это тем, что все они получены для случаев деформирования ледяного покрова, когда не происходит его полного разрушения. Под полным разрушением далее будем понимать такую стадию нагружения ледяного покрова, когда его деформации приводят не только к изгибным напряжениям, превышающим его предел прочности, но и к раскрытию образовавшихся вследствие этого трещин.

В работе поставлена задача разработать зависимости для определения толщины ледяного покрова, который способен разрушить резонансным методом существующие (построенные), спроектированные СВП или выбрать параметры СВП, предназначенных для разрушения резонансным методом ледяного покрова заданной толщины.

5. Выполненные экспериментальные исследования разрушения ледяного покрова резонансным методом. Теория волновых колебаний ледяного покрова пока еще не разработана настолько, чтобы дать ответы на все практические вопросы разрушения льда ИГВ. Для этого необходимо установить зависимость параметров нагрузки от толщины разрушаемого ледяного покрова.

Натурные исследования поведения ледяного покрова под действием движущихся нагрузок весьма трудоемки. Нестабильность во времени и многообразие свойств ледяного покрова, зависимость их от погодных условий и влияние на них различных факторов создают дополнительные трудности в получении достоверных результатов. Уменьшение их затрат достигалось с помощью модельных экспериментов. Они проводились в ледовом бассейне (рис. 1), в котором для намораживания льда использовались естественные низкие температуры [69].

Когда размеры имеющегося бассейна оказывались недостаточными для имитации бесконечного ледяного поля (при увеличении толщины намораживаемого льда его площадь значительно возрастает), то опыты проводились в полевых условиях на льду открытых водоемов рек и озер. В таких случаях в их толстом ледяном покрове при помощи ледорезного инструмента приготавливались каналы необходимых размеров, т.е. для проведения экспериментов создавались своеобразные ледовые “бассейны”. Ледяной слой необходимой толщины намораживался на их поверхности за счет естественного холода (рис. 2).

Трудности, связанные с получением естественного бесконечного ледяного поля, т.е. необходимость в бассейнах больших размеров (для уменьшения влияния отражен-



Рис. 1. Буксировка модели СВП в ледовом бассейне.



Рис. 2. Ледовый “бассейн” размерами $8.0 \times 3.0 \times 2.5$ м, созданный в ледяном покрове озера толщиной 0.8 м.

ных волн, граничных условий и возможности получения установившегося режима движения), а также желание уменьшить влияние масштабного эффекта обусловили целесообразность проведения экспериментов с крупномасштабными моделями СВП на замерзающих акваториях (рис. 3). Следует отметить, что для этих целей студентами Комсомольского-на-Амуре политехнического института была построена модель СВП “КНАПИ”.

Исследования ледоразрушающих свойств возбуждаемых ИГВ также проводились с использованием катеров на воздушной подушке (рис. 4) и СВП береговой охраны (рис. 5).

Особой трудоемкостью отличались эксперименты с натурными СВП (рис. 6), т.к. кроме испытуемых объектов для технического обеспечения экспериментов приходилось привлекать водоизмещающие суда (для очистки акватории от битого льда после

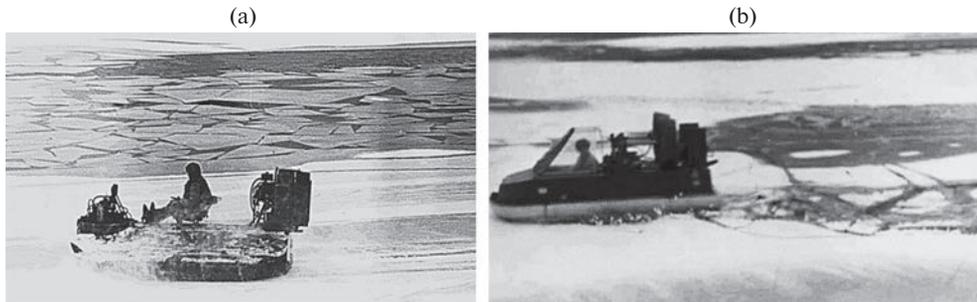


Рис. 3. Разрушение ледяного покрова крупномасштабными моделями СВП: (a) – “КНАПИ”; (b) – “Косатка”.



Рис. 4. Разрушение ледяного покрова катерами на воздушной подушке: (a) – “Тайфун – 1”; (b) – “Тайфун – 2”.



Рис. 5. Разрушение ледяного покрова СВП береговой охраны “Гепард”.

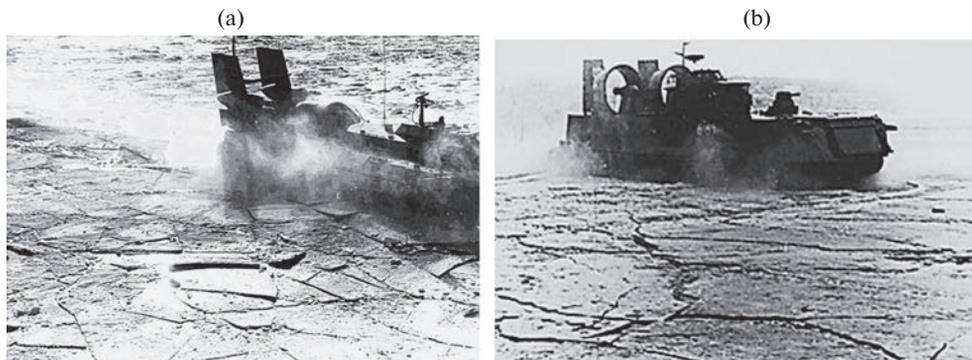


Рис. 6. Разрушение ледяного покрова: (а) – СВП “Скат” (съемка с вертолета); (б) – СВП “Мурена”.

проведения экспериментов с целью намораживания очередного ледяного поля) и вертолет МИ-8 (для получения пространственной картины разрушения ледяного покрова).

Цель выполненных экспериментов заключалась в определении минимальных нагрузок, движущихся по льду с резонансной скоростью и приводящих к полному разрушению ледяного покрова. Под полным разрушением далее будем понимать такую стадию нагружения ледяного покрова, когда его деформации приводят не только к изгибным напряжениям, превышающим его предел прочности, но и к раскрытию образовавшихся вследствие этого трещин. При этом технологии экспериментов отличались в зависимости от условий их проведения. Так, в ледовых бассейнах вначале намораживался лед определенной толщины. После этого неоднократно начинали с резонансной скоростью буксировать модель с увеличивающейся массой. Если при очередном проходе модели начиналось полное разрушение льда, то опыты прекращали. В результате определялась минимальная масса нагрузки при известной площади ее распределения (интенсивности), достаточная для полного разрушения ледяного покрова заданной толщины и прочности. При проведении опытов в натуральных условиях, когда параметры СВП заранее были известны, вначале проходы СВП с резонансной скоростью начинали на тонком льду с последующим ростом его толщины. Эксперименты прекращали, когда после очередного прохода непрерывного и полного разрушения льда не происходило. Результаты экспериментов по определению минимальной толщины разрушаемого льда, а также данные испытаний СВП “Voyageur” [1] приведены в табл. 1.

6. Теоретические зависимости для расчета напряженно-деформированного состояния ледяного покрова от движущихся нагрузок. При решении ледотехнических задач лед обычно рассматривается как упругий изотропный материал, а для изучения его НДС привлекается аппарат теории изгиба упругих пластин. В действительности, ледяная пластина обладает анизотропией вследствие градиента температуры по толщине, различного химического состава, ориентации кристаллов по слоям, наличия примесей, истории ледостава и др. В вопросах волновых колебаний ледяного слоя эти факторы учитываются путем рассмотрения трансверсально-изотропной модели льда с последующим переходом к изотропной, но с приведенным модулем упругости.

Соотношения между напряжениями и деформациями во льду носят вязко-упругий характер и зависят от режима нагружения. Учет этих свойств в условиях изгибно-гравитационного резонанса (ИГР) позволит избавиться от неопределенности в теоретических решениях и получить реальную картину НДС ледяного покрова в месте приложения нагрузки.

Известные исследования показывают, что для описания волновых колебаний льда при ИГР можно принять закон деформирования упруго-запаздывающей среды Кельвина–Фойгта [41]. Тогда дифференциальное уравнения вязко-упругих колебаний ледяного покрова при установившемся движении сосредоточенной силы P с постоянной скоростью v будет иметь вид:

$$\frac{Gh^3}{3} \left(1 + \tau_\Phi \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^4 w + (\rho_L h + \rho_c h_c) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \eta_c h_c \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w + \rho_V g w + \rho_V \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} = P \delta(x - vt, y - 0) \quad (6.1)$$

где: G – модуль упругости льда при сдвиге; h – толщина ледяного покрова; ∇ – дифференциальный оператор набла; τ_Φ – время релаксации деформаций; w – прогиб льда; ρ_L, ρ_V – плотность воды и льда; g – ускорение силы тяжести; Φ – потенциал движения жидкости, удовлетворяющий уравнению Лапласа во всем объеме воды и условиям непроницаемости на дне бассейна; δ – дельта-функция Дирака; o, x, y, z – неподвижная система координат.

Для бесконечной области дельта-функции Дирака в этом случае может быть представлена двойным интегралом Фурье:

$$\delta(x - vt, y - 0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i[\lambda(x - vt) + \eta y]\} d\lambda d\eta \quad (6.2)$$

Тогда прогиб льда w и потенциал движения жидкости Φ будем искать в виде:

$$w(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_{\lambda\eta} \exp\{-i[\lambda(x - vt) + \eta y]\} d\lambda d\eta, \quad (6.3)$$

Окончательное выражение для w получено в виде:

$$w = \frac{p}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{-i[\lambda(x - vt) + \eta y]\} d\lambda d\eta}{F(\lambda, \eta)}$$

где

$$F(\lambda, \eta) = \frac{Gh^3}{3} (\lambda^2 + \eta^2)^2 - \lambda^2 v^2 \rho_L h + \rho_V g - \frac{\rho_V \lambda^2 v^2}{\text{th}(H\sqrt{\lambda^2 + \eta^2})\sqrt{\lambda^2 + \eta^2}} + i \frac{Gh^3}{3} \tau_\Phi \lambda v (\lambda^2 + \eta^2)^2 \quad (6.4)$$

Линейная постановка задачи позволяет с помощью принципа суперпозиций перейти от полученного решения для сосредоточенной силы к случаю движения по льду ограниченной в плане нагрузки, распределенной по площади прямоугольника со сторонами $2a, 2b$. Тогда прогиб ледяного покрова определится после интегрирования по переменным ξ, ζ :

$$w = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\xi, \zeta) \exp\{-i[\lambda(x - \xi - vt) + \eta(y - \zeta)]\} d\lambda d\mu d\xi d\zeta}{F(\lambda, \eta)} \quad (6.5)$$

При равномерном распределении нагрузки по площади прямоугольника получим:

$$w = \frac{q}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda a \sin \eta b \exp\{-i[\lambda(x - vt) + \eta y]\} d\lambda d\eta}{\lambda \eta F(\lambda, \eta)} \quad (6.6)$$

где $q = P/4ab$

Введем обозначения:

$$A = \lambda\eta \left[\frac{Gh^3}{3} (\lambda^2 + \eta^2)^2 - \lambda^2 v^2 (\rho_L h + \rho_C h) + \rho_V g - \frac{\rho_V \lambda^2 v^2}{\text{th}(H\sqrt{\lambda^2 + \eta^2})\sqrt{\lambda^2 + \eta^2}} \right]$$

$$B = i \left[\frac{Gh^3}{3} \tau_\Phi \lambda v (\lambda^2 + \eta^2) - \eta_C h_C \lambda v (\lambda^2 + \eta^2) \right], \quad C = \sin \lambda a \sin \eta b, \quad \varphi = \lambda(x - vt) + \eta y$$

Выделяя действительную часть выражения (7), получим:

$$w = \frac{q}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C[A \cos \varphi - B \sin \varphi] d\lambda d\eta}{A^2 + B^2} \quad (6.7)$$

Выражения изгибающих моментов запишутся так:

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{Gh^3}{3} \left(1 - \tau_\Phi \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -\frac{Gh^3}{3} \left(1 - \tau_\Phi \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= \frac{Gh^3 (1 - \mu)}{3} \left(1 + \tau_\Phi \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (6.8)$$

После взятия производных выражения для изгибающих моментов окончательно перепишутся в виде:

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{Gh^3}{3} [D_1 + \mu D_2 + \tau_\Phi (D_4 + \mu D_5)] \\ M_y &= -\frac{Gh^3}{3} [D_2 + \mu D_1 + \tau_\Phi (D_5 + \mu D_4)] \\ M_{xy} &= \frac{Gh^3 (1 - \mu)}{3} (D_3 + \tau_\Phi D_6) \end{aligned} \quad (6.9)$$

где:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{q}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 C (-A \cos \varphi + B \sin \varphi) d\lambda d\eta}{A^2 + B^2} \\ D_2 &= \frac{q}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta^2 C (-A \cos \varphi + B \sin \varphi) d\lambda d\eta}{A^2 + B^2} \\ D_3 &= \frac{q}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda \eta C (-A \cos \varphi + B \sin \varphi) d\lambda d\eta}{A^2 + B^2} \\ D_4 &= \frac{q}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^3 v C (-A \sin \varphi - B \cos \varphi) d\lambda d\eta}{A^2 + B^2} \\ D_5 &= \frac{q}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda \eta^2 v C (-A \sin \varphi - B \cos \varphi) d\lambda d\eta}{A^2 + B^2} \\ D_6 &= \frac{q}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 \eta v C (-A \sin \varphi - B \cos \varphi) d\lambda d\eta}{A^2 + B^2} \end{aligned}$$

Максимальные погонные (отнесенные к единице длины) напряжения определяются из зависимостей:

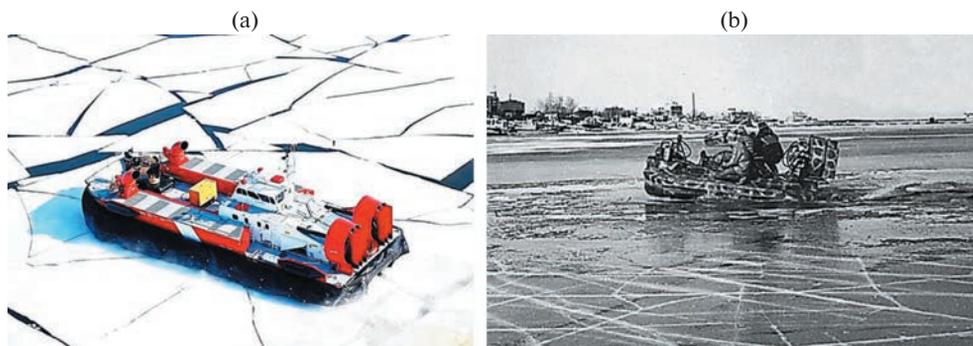


Рис. 7. Стадии разрушения ледяного покрова ИГВ: (а) – полное разрушение; (б) – достижение предела прочности льда на изгиб.

$$\sigma_x = \frac{6M_x}{h^2}; \quad \sigma_y = \frac{6M_y}{h^2}; \quad \tau_{xy} = \frac{6M_{xy}}{h^2} \quad (6.10)$$

7. Критерий для оценки ледоразрушающей способности ИГВ. В большинстве известных расчетов предельных нагрузок, разрушающих ледяной покров при их движении, используется уровень напряжений. При этом ледяной покров считается разрушенным, если напряжения превышают соответствующий предел прочности. Такой подход можно считать приемлемым, когда для безопасного использования ледяного покрова в качестве ледяных переправ необходим запас его несущей способности, а его разрушение считают нежелательным. При решении поставленных в работе задач такой подход не приемлем. Это объясняется тем, что возникновение в сплошном ледяном покрове предельных напряжений, т.е. появление во льду сквозных трещин и даже их раскрытие не приводит к полной утрате его несущей способности. В опытах с катерами на воздушной подушке, натурными СВП и их изготовленными крупномасштабными моделями установлено, что нагрузка, гарантирующая его полное разрушение (рис. 7,а), может в несколько раз превышать нагрузку, вызывающую появление трещин (рис. 7,б).

Причиной сохранения несущей способности ледяного покрова, разделенного трещинами на отдельные куски в области возникновения ИГВ наибольшей амплитуды, являются контактные напряжения на берегах трещин. Несмотря на нарушение сплошности ледяной пластины, кинематическая и силовая связь растрескавшейся области с кромками сплошного ледяного поля (своеобразный арочный эффект) не позволяет распасться растрескавшемуся льду на отдельные куски. Несущая способность ледяного покрова будет полностью исчерпана, когда произойдет разрушение образовавшейся блочной конструкции и она не сможет нести нагрузку, превышающую силу плавучести ее обломков, т.е. Архимедовых сил (такая стадия разрушения представлена на рис. 7,а).

Процесс нагружения ледяного покрова ИГВ приводит к трещинообразованию с одновременным частичным “самозалечиванием” трещин (вода, попадая в переохлажденный лед полностью не раскрытых трещин, сразу замерзает, т.е. трещина исчезает) или последующим их раскрытию при достижении определенных амплитуд ИГВ. Раскрытие трещин в ледяном покрове связано с несколькими механизмами и с различной энергетикой. Это не только растяжение, но и сжатие с потерей устойчивости и надвижением блоков льда друг на друга. Все это влияет и на удельную энергетiku в це-

лом. Кроме этого, происходит смятие и скол острых кромок, а часть энергии ИГВ затрачивается на поворачивание обломков льда. Колебания ледяного покрова сопровождаются диссипацией энергии в воде, ледяной пластине и снежном покрове. Энергия ИГВ также рассеивается в присоединенных массах воды, колеблющихся вместе со льдом, при частичном отражении и преломлении волн в трещинах, в виде акустического излучения, вследствие дифракции, интерференции, трансформации параметров ИГВ и др. Из-за сложной геометрии разлома, густоты сетки не раскрытых трещин затруднительно определить энергию даже на образование во льду свободных поверхностей. Относительно строгому анализу поддается лишь определение условий для их спонтанного роста (критерий Гриффитса).

Учет влияния вышеперечисленных процессов на предельное деформирование ледяного покрова практически не возможно. Поэтому для оценки ледоразрушающей способности ИГВ была принята такая интегральная характеристика, как энергия изгибно-гравитационных колебаний ледяного покрова. Ее величина равна сумме потенциальной энергии изгиба ледяной пластины, кинетической энергии ее изгибных колебаний и сопутствующих им гравитационных волн в воде. Очевидно, что две последних составляющих в общем балансе энергии при предельных деформациях ледяного покрова ИГВ малы по сравнению с первой. Поэтому определение энергии ИГВ, полностью разрушающих ледяной покров, производилось по потенциальной энергии изгиба ледяной пластины. Таким образом, в качестве критерия ледоразрушающей способности ИГВ была принята теоретическая плотность потенциальной энергии изгиба U , достижение которой приводит к началу непрерывного (полного) разрушения льда. Величина U определялась по теоретическим напряжениям, соответствующим этой стадии разрушения ледяного покрова.

Для пластины бесконечных размеров потенциальная энергия изгиба определяется выражением [70]:

$$U = \frac{h}{4G(1 + \mu)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y + 2(1 + \mu)\tau_{xy}^2] dx dy \quad (7.1)$$

Нормальные σ_x , σ_y и касательные напряжения τ_{xy} находились по зависимостям (6.10).

Разрушение льда ИГВ от движущихся нагрузок носит локальный характер и происходит в месте ее приложения, т.е. в области возникновения максимальных деформаций. Поэтому рассчитывалась погонная потенциальная энергия, приходящаяся на длину фронта волны, равную h , и на длину волны максимальных напряжений λ_G (необходимость в таком подходе была связана с желанием найти единообразный параметр для оценки ледоразрушающей способности ИГВ, возбуждаемых в различных ледовых условиях). Тогда плотность потенциальной энергии изгиба ледяной пластины определится выражением:

$$U = \frac{1}{4G\lambda_G(1 + \mu)} \int_0^{\lambda_G} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y + 2(1 + \mu)\tau_{xy}^2] dx \quad (7.2)$$

Результаты расчетов U для толщин ледяного покрова, разрушаемого минимальными нагрузками при их движении с резонансной скоростью, показали относительно стабильные ее значения (см. табл. 1). Для этих расчетов необходимые параметры выбирались из базы данных экспериментов, полученных: в ледовых бассейнах; с использованием крупномасштабных моделей СВП в полевых условиях; катеров и натуральных судов на воздушной подушке. Следует отметить, что на параметры ИГВ, т.е. их ледоразрушающую способность, безусловно влияли: наличие подледного течения; темпе-

Таблица 1. Результаты расчетов U

Вид нагрузки	Длина, м	Ширина, м	Масса, кг	Толщина льда, см	U, Дж/м ³
Модель СВП	0.23	0.19	2.85	0.42	690
			1.20	0.27	560
			2.10	0.34	750
			2.35	0.44	560
			4.80	0.56	770
СВП “КНАПИ”	3.7	2.1	340	2.5	690
“Косатка”	5.1	2.6	400	2.8	670
“Тайфун-1”	7.4	3.6	2100	6.0	670
“Тайфун-2”	10.2	4.6	5200	8.2	550
“Гепард”	6.9	3.2	18000	7.5	570
“Скат”	17.0	7.4	20500	26.0	700
“Мурена”	30.0	13.0	120000	60.0	660
“Voyageur”	20.0	8.0	40800	38.0	640
Среднее значение плотности потенциальной энергии изгиба					650

Работа выполнена в рамках государственного задания Института машиноведения и металлургии Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН.

ратура воздуха; глубина водоема и ее изменение; близость берега к месту проведения экспериментов; структура льда и наличие в нем примесей; скорость нагружения льда движущимися нагрузками; масштабный фактор (зависимость прочностных свойств льда от его толщины); наличие на льду снежного покрова (правда, при проведении экспериментов снежный покров практически отсутствовал); внутренняя напряженность льда; история ледостава и др. Однако, в условиях изгибно-гравитационного резонанса, когда происходит резкое (резонансное) увеличение изгибных напряжений, влияние ранее перечисленных и этих факторов при полном разрушении льда оказалось незначительным. Это подтверждается результатами расчетов U в различных ледовых условиях. Их устойчивость позволила в качестве критерия ледоразрушающей способности ИГВ, возбуждаемых распределенными движущимися с резонансной скоростью нагрузками, принять относительную теоретическую плотность потенциальной энергии изгиба ледяной пластины. Ее значение, соответствующее стадии полного разрушения льда по результатам проделанных опытов (при ее вычислении предполагалось, что ледяной покров сохраняет свою целостность), оказалось равным примерно 650 Дж/м³. Из этого следует заключение, что, если теоретическая плотность относительной потенциальной энергии изгиба ледяного покрова ИГВ окажется равной или большего найденного значения, то за нагрузкой, возбуждающей такие волны, будет происходить полное разрушение ледяного покрова.

Следует отметить, что при расчетах ледовой ходкости судов, ледовых нагрузок на гидротехнические сооружения при ледоходах или подвижках льда, при определении несущей способности ледяных переправ или грузонесущих платформ и решении других ледотехнических задач влияние вышеперечисленных различных факторов на разрушающую лед нагрузку, безусловно, следует учитывать [5, 10].

8. Результаты расчетов основных параметров СВП, достаточных для разрушения ледяного покрова резонансным методом. Основными параметрами, определяющими способность СВП разрушать лед резонансным методом, как показали экспериментально-

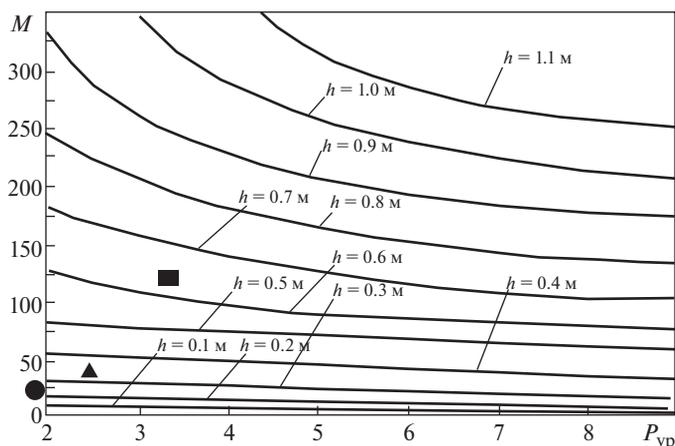


Рис. 8. Зависимость массы СВП и давления в воздушной подушке от толщины разрушаемого ледяного покрова (Т/кПа).

теоретические исследования, являются нагрузка на лед от силы тяжести судна, т.е. его масса M , и ее интенсивность, т.е. давление в воздушной подушке $P_{вп}$. Форма и соотношение размеров воздушной подушки в плане, используемые у существующих судов, существенного влияния на их ледоразрушающую способность не оказывают [2]. В качестве исходных данных для получения этих зависимостей от толщины ледяного покрова, полностью разрушаемого резонансным методом, были взяты результаты выполненных экспериментов. Зависимость $M = f(h, P_{вп})$ для параметров построенных и перспективных СВП, охватывающая весь диапазон интересующих значений h , определялась с помощью предложенного выше критерия оценки ледоразрушающей способности ИГВ. Принимая во внимание теоретическое значение предельной плотности потенциальной энергии изгиба ледяной пластины ИГВ ($U = 650 \text{ Дж/м}^3$) и выполняя численные расчеты по зависимостям (10, 12) для интересующих нас диапазонов изменения массы СВП M и давления в воздушной подушке $P_{вп}$ была получена их зависимость от толщины разрушаемого льда. Следует заметить, что полученная зависимость $M = f(h, P_{вп})$ позволяет определить минимально достаточную для разрушения льда величину M при заданном $P_{вп}$. Результаты этих расчетов для чистого от снега ледяного покрова (эксперименты проводились при его отсутствии и среднесуточной температуре $- (10-15)^\circ\text{C}$), при резонансной скорости движения нагрузки для наиболее вероятных физико-механических характеристик пресноводного льда в различных ледовых условиях [71] и с учетом влияния масштабного эффекта [72] представлены на рис. 8.

Работоспособность этих зависимостей подтверждается нанесенными на график символами, соответствующими параметрам использованным в экспериментах натуральных СВП с указанием максимальных толщин ледяного покрова, разрушаемого ими резонансным методом (● — «Скат» ($M = 20.5 \text{ т}$; $P_{вп} = 1.8 \text{ кПа}$; $h = 26 \text{ см}$); ▲ — «Voyager» ($M = 38.0 \text{ т}$; $P_{вп} = 2.4 \text{ кПа}$; $h = 38 \text{ см}$); ■ — «Мурена» ($M = 120.0 \text{ т}$; $P_{вп} = 3.3 \text{ кПа}$; $h = 60 \text{ см}$).

9. Заключение. Основным результатом работы является определение взаимосвязи между толщиной разрушаемого льда и параметрами СВП, как основным средством реализации резонансного метода разрушения ледяного покрова. Она установлена на основании обработки результатов экспериментальных исследований, выполненных в

условиях модельного, полунатурного и натурального экспериментов и соответствующих теоретических исследований. Полученные результаты позволяют определить ледоразрушающую способность СВП при их использовании в качестве ледокольных средств при решении различных ледотехнических задач. Это делает возможным в ряде случаев возникновения ледовых осложнений решать задачи по разрушению льда СВП, когда использование традиционных ледокольных технологий и средств затруднительно или вообще невозможно. С помощью полученных результатов также можно оценивать целесообразность использования СВП для разрушения ледяного покрова резонансным методом, т.е. его энергоэффективность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dufild D.O., Dickins D.E.* Icebreakers trials with Bell Acrospace Voyager ACV // *Can. Aeronaut. Space J.* 1974. V. 20. № 10. P. 471–474.
2. *Козин В.М., Земляк В.Л.* Физические основы разрушения ледяного покрова резонансным методом. Комсомольск-на-Амуре: ИМиМ ДВО РАН, ПГУ им. Шолом-Алейхема, АмГПГУ, 2013. 250 с.
3. *Седов Г.Н.* Перевозки по льду предметов большого веса // *Водный транспорт.* 1926. № 3/4. С. 146.
4. *Сергеев Б.Н.* К вопросу о величине нагрузки речного льда // *Водный транспорт.* 1926. № 8/9. С. 300–301.
5. *Бернштейн С.А.* Ледяная железнодорожная переправа (работа, теория и расчет ледяного слоя). Сборник Народного комиссариата путей сообщения. Вып. 18. М.: Транспечать, 1929. 42 с.
6. *Кашкин Н.Н.* Исследование работы ледяных аэродромов под нагрузкой от самолета. М.; Л.: ОНТИ НКТП, 1935. 48 с.
7. *Зубов Н.Н.* Основы устройства дорог на ледяном покрове. М.: Гидрометеиздат, 1942. 74 с.
8. *Зубов Н.Н.* Льды Арктики. М.: Изд-во Главсевморпути, 1945. 360 с.
9. *Брегман Г.Р., Проскуряков Б.В.* Ледяные переправы. Свердловск: Гидрометеиздат, 1943. 151 с.
10. *Песчанский И.С.* Ледоведение и ледотехника. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 467 с.
11. *Press F., Crary A., Oliver J., Katz S.* Aircoupled flexural waves in floating ice // *Trans. Amer. Geoph. Union.* 1951. V. 32. № 2. P. 166–172.
12. *Crary A., Cotell R., Oliver J.* Geophysical studies in the Beaufort Sea, 1951 // *Trans. Amer. Geoph. Union.* 1952. V. 33. P. 211–216.
13. *Crary A.* Seismic Studies on Fletcher's Ice Island-T-3 // *Trans. Amer. Geoph. Union.* 1954. V. 35. № 2. P. 293–300.
14. *Anderson D.L.* Preliminary results and review of sea ice elasticity and related studies // *Trans. Eng. Inst. Can.* 1958. V. 2. № 3. P. 2–8.
15. *Hunkins K.* Seismic studies of sea ice // *J. Geophys. Res.* 1960. V. 65. № 10. P. 3459–3472. <https://doi.org/10.1029/JZ065i010p03459>
16. *Hunkins K.* Waves in the Arctic Ocean // *J. Geophys. Res.* 1962. V. 67. № 6. P. 2477–2489. <https://doi.org/10.1029/JZ067i006p02477>
17. *Sunberg-Falkenmark M.* Om Isbärighet Resultat av belastningsförsök på is, utförda av Samarbetsgruppen för isbärighetsförsök 1959–61. Notiser Och Prelimiinira Rapporten, Serie Hydrologi 1. Stockholm: Sveriges Meteorologiska och Hydrologiska Institut, 1963. 318 p.
18. *Robin G., De Q.* Wave Propagation Through Fields of Pack Ice // *Phil. Trans. Roy. Soc. A.* 1963. V. 225. № 1057. P. 313–339. <https://doi.org/10.1098/rsta.1963.0006>
19. *Сытинский А.Д., Трипольников В.П.* Некоторые результаты исследований естественных колебаний ледяных полей Центральной Арктики // *Изв. АН СССР. Сер. геофизическая.* 1964. № 4. С. 615–621.
20. *Leschack L., Haubrich R.* Observations of Waves on an Ice-Covered Ocean // *J. Geophys. Res.* 1964. V. 69. № 18. P. 3815–3821. <https://doi.org/10.1029/JZ069i018p03815>

21. *Gold L.W.* Use of ice covers for transportation // *Can. Geotech. J.* 1971. V. 4. P. 170–181.
<https://doi.org/10.1139/t71-018>
22. *Смирнов В.Н.* Некоторые вопросы натурного исследования деформаций и напряжений в ледяном покрове // *Тр. ААНИИ.* Т. 331. Л.: Гидрометеиздат, 1976. С. 133–140.
23. *Смирнов В.Н.* Упругие изгибные волны в ледяном покрове // *Тр. ААНИИ.* Т. 331. Л.: Гидрометеиздат, 1976. С. 117–123.
24. *Gold L.* Bearing capacity of ice covers // *Nat Res. Counc. Can. Techn. Mem.* 1977. № 121. P. 63–65.
<https://doi.org/10.1139/176-028>
25. *Eyre D.* The flexural motion of a floating ice sheet induced by moving vehicles // *J. Glaciology.* 1977. V. 19. P. 555–570.
<https://doi.org/10.3189/S0022143000215475>
26. *Goodman D., Holdsworth R.* Continuous surface strain measurements on sea ice and on Erebus Glacier Tongue, McMurdo Sound, Antarctica // *Antarctic J. US.* 1978. V. 13. P. 67–70.
27. *Takizawa T.* Field studies on response of a floating sea ice sheet to a steadily moving load // *Contrib. Inst. Low Temp. Sci.* 1987. V. 36. P. 31–76.
28. *Beltaos S.* Field studies on the response of floating ice sheets to moving loads // *Can. J. Civil Eng.* 1981. V. 8. P. 1–8.
<https://doi.org/10.1139/181-001>
29. *Takizawa T.* Deflection of a floating sea ice sheet induced by a moving load // *Cold Regions Sci. Techn.* 1985. V. 11. P. 171–180.
30. *Takizawa T.* Field studies on response of a floating sea ice sheet to a steadily moving load // *Contrib. Inst. Low Temp. Sci.* 1987. V. 36. P. 31–76.
31. *Takizawa T.* Response of a floating sea ice sheet to a steadily moving load // *J. Geophys. Res.* 1988. V. 93. P. 5100–5112.
32. *Squire V.A., Robinson W.H., Haskell T.G. and Moore S.C.* Dynamic strain response of lake and sea ice to moving loads // *Cold Reg. Sci. Technol.* 1985. V. 11. P. 123–139.
33. *Squire V.A., Langhorne P.J., Robinson W.H. and Heine A.J.* *Kiwi 131: an Antarctic field experiment to study strains and acoustic emission generated by loads moving over sea ice.* Report prepared for the Royal Society of London. L.: RSL, 1986.
34. *Squire V.A., Robinson W.H., Langhorne P.J. and Haskell T.G.* Vehicles and aircraft on floating ice // *Nature.* 1988. V. 333. P. 159–161.
35. *Squire V., Hosking R., Kerr A., Langhorne P.* *Moving Loads on Ice Plates.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. P. 86–94.
36. *Козин В.М., Жесткая В.Д., Погорелова А.В., Чижюмов С.Д., Джабраилов М.Р., Морозов В.С., Кустов А.Н.* Прикладные задачи динамики ледяного покрова. М.: Издательство “Академия естествознания”, 2008. 329 с.
37. *Greenhild Cg.* Scattering on the thin ice // *The Lond. Ebinb. Dubl. Phil. Mag. J. Sci.* 1916. V. 31. № 181.
<https://doi.org/10.1080/14786440108635465>
38. *Голушкевич С.С.* О некоторых задачах теории изгиба ледяного покрова. Л.: Воениздат, 1947. 231 с.
39. *Press F., Ewing M.* Propagation of elastic waves in a floating ice sheet // *Trans. Amer. Geoph. Union.* 1951. V. 32. № 5. P. 673–678.
40. *Crary A., Cotell R., Oliver J.* Geophysical studies in the Beaufort Sea, 1951 // *Trans. Am. Geoph. Uni.* 1952. V. 33. P. 211–216. [doi.org/https://doi.org/10.1029/TR033i002p00211](https://doi.org/10.1029/TR033i002p00211)
41. *Хейсин Д.Е.* Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 216 с.
42. *Черкесов Л.В.* О влиянии ледяного покрова и вязкости жидкости на длинные волны // *Морские гидрофизические исследования.* 1970. № 3 (49). С. 50–56.
43. *Jen D.H., Tang S.C.* On the vibration of an elastic plate on an elastic foundation // *J. Sound Vib.* 1971. V. 14. № 1. P. 81–89. [doi.org/https://doi.org/10.1121/1.2144176](https://doi.org/10.1121/1.2144176)

44. Доценко С.Ф. О влиянии неоднородности жидкости и ледяного покрова на волны, генерируемые движущейся областью давлений // Морские гидрофизические исследования. 1974. № 4 (67). С. 82–89.
45. Богородский В.В., Гаврило В.П. Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 384 с.
46. Марченко А.В. Изгибно-гравитационные волны // Динамика волн на поверхности жидкости. М.: Наука, 1999. С. 65–111.
47. Жесткая В.Д., Козин В.М. Исследования возможностей разрушения ледяного покрова амфибийными судами на воздушной подушке резонансным методом. Владивосток: Дальнаука, 2003. 161 с.
48. Ткачева Л.А. Дифракция поверхностных волн на плавающей упругой пластине // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2001. № 5. С. 121–134.
49. Ткачева Л.А. Плоская задача о дифракции поверхностных волн на упругой плавающей пластине // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 3. С. 131–149.
50. Ткачева Л.А. Поведение плавающей упругой пластины при колебаниях участка дна // Прикл. мех. техн. физ. 2005. Т. 46. № 2. С. 98–108.
51. Milinazzo F., Shinbrot M., Evans N.W. A mathematical analysis of the steady response of floating ice to the uniform motion of a rectangular load // J. Fluid Mech. 1995. V. 287. P. 287–295. <https://doi.org/10.1017/S0022112095000917>
52. Wang K., Hosking R., Milinazzo F. Time-dependent response of a floating viscoelastic plate to an impulsively started moving load // J. Fluid Mech. 2004. V. 521. P. 295–317. <https://doi.org/10.1017/S002211200400179X>
53. Козин В.М., Погорелова А.В., Жесткая В.Д., Чижимов С.Д., Джабраилов М.Р., Морозов В.С., Кустов А.Н. Прикладные задачи динамики ледяного покрова. М.: Академия естествознания, 2008. 329 с.
54. Коробкин А.А., Папин А.А., Хабахпашева Т.И. Математические модели снежно-ледового покрова. Барнаул: Алтайский гос. унив., 2013. 116 с.
55. Korobkin A., Khabakhpasheva T., Papin A. Waves propagating along a channel with ice cover // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2014. V. 47. P. 166–175.
56. Погорелова А.В., Козин В.М., Матюшина А.А. Исследование напряженно-деформированного состояния ледяного покрова при взлете и посадке на него самолета // Прикл. мех. техн. физ. 2015. Т. 56. № 5. С. 214–221.
57. Батяев Е.А., Хабахпашева Т.И. Гидроупругие волны в канале со свободным ледовым покровом // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 6. С. 71–88.
58. Шишмарев К.А., Хабахпашева Т.И., Коробкин А.А. Влияние гидростатического и гидродинамического давлений на колебания ледового покрова // МАК-2015: “Математики – Алтайскому краю”. Сборник трудов всероссийской конференции по математике. Барнаул: Алтайский гос. унив., 2015. С. 87–91.
59. Стурова И.В., Ткачева Л.А. Колебания ограниченного ледяного покрова при локальном динамическом воздействии // Полярная механика. 2016. № 3. С. 997–1007.
60. Ткачева Л.А. Взаимодействие поверхностных и изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове с вертикальной стенкой // Прикл. мех. техн. физ. 2013. Т. 54. № 4. С. 158–170.
61. Ткачева Л.А. Поведение полубесконечного ледяного покрова при равномерном движении нагрузки // Прикл. мех. техн. физ. 2018. Т. 59. № 2. С. 82–98.
62. Ткачева Л.А. Волновые явления, возникающие при движении нагрузки по свободной поверхности жидкости вдоль кромки ледяного покрова // Прикл. мех. техн. физ. 2019. № 3. 2019. С. 73–84.
63. Стурова И.В. Действие периодического поверхностного давления на ледяной покров в окрестности вертикальной стенки // Прикл. мех. техн. физ. 2017. Т. 58. № 1. С. 92–101.
64. Стурова И.В. Движение внешней нагрузки по полубесконечному ледяному покрову в докритическом режиме // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2018. № 1. С. 51–60.
65. Букатов А.Е. Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: ФГБУН МГИ, 2017. 360 с.
66. Завьялова К.Н., Шишмарев К.А., Хабахпашева Т.И. Движение внешней нагрузки по битому льду в канале // Изв. Алтайского гос. ун-та. 2018. № 4 (102). С. 73–78.

-
67. *Шишмарев К.А., Хабахпасшева Т.И.* Нестационарные колебания ледового покрова в замороженном канале под действием движущегося внешнего давления // Выч. технол. 2019. Т. 24. № 2. С. 111–128.
 68. *Khabakhpasheva T., Shishmarev K., Korobkin A.* Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Appl. Ocean Res. 2019. V. 86. P. 154–165. doi.org/<https://doi.org/10.1016/j.apor.2019.01.020>
 69. *Земляк В.Л., Баурин Н.О., Курбацкий Д.А.* Лаборатория “Ледотехника” // Вестник Приамурского гос. ун-та им. Шолом-Алейхема. 2013. № 1 (12). С. 68–77.
 70. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Изд. физ.-мат. литературы, 1963. 653 с.
 71. *Петров И.Г.* Выбор наиболее вероятных значений механических характеристик льда // Труды ААНИИ. 1976. Т. 331. С. 4–41.
 72. *Бутягин И.П.* Прочность льда и ледяного покрова. Новосибирск: Наука, 1966. 153 с.

УДК 539.42

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ АНИЗОТРОПИИ НА ОРИЕНТАЦИЮ ВЫВАЛОВ В СКВАЖИНАХ

© 2023 г. К. Б. Устинов^а, В. И. Карев^а, Ю. Ф. Коваленко^{а,*},
С. О. Барков^а, В. В. Химуля^а, Н. И. Шевцов^а

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: perfolinkgeo@yandex.ru

Поступила в редакцию 07.09.2022 г.

После доработки 28.09.2022 г.

Принята к публикации 29.09.2022 г.

На образцах породы, отобранных из сеноманского горизонта пласта ПК1 газового и газоконденсатного месторождений Арктического шельфа России, проведено прямое физическое моделирование образования под действием равнокомпонентных напряжений вывалов в скважинах, направленных по нормали и вдоль залегания. В первом случае форма вывалов была цилиндрической, а во втором – в виде двух каверн. Подобная форма вывалов при интерпретации геофизических исследований скважин, как правило, предполагается вызванной неравнокомпонентным полем напряжений, что, очевидно, не соответствует результатам проведенных экспериментов. Также проведены независимые эксперименты по определению анизотропии упругих и прочностных свойств исследуемой породы. Обнаружено, что исследуемая порода обладает прочностной анизотропией специфического вида, не связанной непосредственно с ослаблением вдоль залегания. Показано, что данный вид прочностной анизотропии может приводить к формированию вывалов наблюдаемой формы. Основная цель статьи – привлечь внимание к тому факту, что анизотропия напряжений не обязательно является основной или единственной причиной наблюдаемых вывалов в скважинах. Результаты могут быть использованы при проектировании и разработке углеводородных месторождений и подземных хранилищ газа, а также при интерпретации данных скважинных измерений для определения естественного поля напряжений в Земной коре.

Ключевые слова: истинные трехосные испытания, анизотропия прочности, упругая анизотропия, интерпретация данных каротажа, вывалы в скважинах, измерения напряжений в массиве пород

DOI: 10.31857/S0572329922600384, EDN: FRYKBE

1. Введение. При бурении и эксплуатации скважин подземных хранилищ газа (ПХГ), созданных в пластах с неустойчивыми коллекторами, на первый план выходят вопросы обеспечения устойчивости стенок скважин и снижения пескопроявлений. Известно, что основной причиной выноса песка в скважину является потеря устойчивости стенки скважины под действием напряжений в околоскважинной области, превышающих предел прочности породы. Одним из основных типов потери устойчивости являются вывалы породы на стенках скважин [1–3].

Поэтому, чтобы минимизировать риск пескопроявлений и их интенсивность, необходимо понимать причины появления вывалов и выявить основные факторы, влияющие на их возникновение и интенсивность.



Рис. 1. Образец В5 с отверстием, соосным оси керна.

Помимо этого, исследование форм вывалов наряду с методами микрогидроразрыва считается надежным инструментом для определения напряжений в массиве горных пород [4, 5]. Это явно подразумевает, что неравенство компонент тензора напряжений, действующих в плоскости, перпендикулярной стволу скважины, является основной и едва ли не единственной причиной формирования форм вывалов, отличных от цилиндрических, наблюдаемых в скважинах. М. Зобак рассмотрел влияние других факторов, таких как анизотропия прочности и наличие структуры, на формирование вывалов [4]. Однако чаще другие факторы, в лучшем случае, лишь упоминаются [5, 6]. В настоящее время объяснение наблюдаемых форм вывалов в скважинах исключительно неравнокомпонентностью действующих напряжений стало основой интерпретации каротажных измерений.

В вертикальных скважинах, пробуренных в массивах горных пород либо изотропных, либо анизотропных с плоскостью изотропии, перпендикулярной оси скважины, в условиях равнокомпонентного сжатия наблюдаются кольцевые вывалы [4, 5], Рис. 1. При неравнокомпонентном исходном напряженном состоянии из-за концентрации сжимающих напряжений [7] вывалы развиваются от контура скважины по ее диаметру в направлении минимального горизонтального напряжения. Формы таких вывалов характеризуются как чешуйчатые отколы (системы изогнутых трещин, распространяющихся параллельно контуру скважины), “собачьи уши” (широкие вывалы), “червоточины” (узкие разрезоподобные вывалы) [5]. Вышеуказанные формы можно назвать однолопастными, в отличие от двухлопастных вывалов [6], характерных для скважин, ориентированных в плоскостях напластования, появившихся из-за анизотропии прочности, вызванной ослаблением вдоль залегания [4, 8, 9]. Термины одно- и двухлопастные вывалы являются общепринятыми [4], количество “лопастей”-вывалов относится к половине контура скважины.

Однако однолопастные вывалы наблюдались и в образцах с моделирующими скважину круговыми отверстиями, находящихся в равнокомпонентном напряженном состоянии [10, 11]. Так, в работе [11] было проведено прямое физическое моделирование вывалов скважин для пород-коллекторов четырех нефтяных и газоконденсатных месторождений. Было продемонстрировано, что для двух из четырех испытанных пород

в большинстве образцов наблюдались некруглые вывалы вокруг отверстий, просверленных в образцах перпендикулярно залеганию, хотя в этих условиях из-за предполагаемой изотропии упругих и прочностных свойств в плоскости залегания ожидалось образование кольцевых вывалов. Также при испытании образца с отверстием, просверленным в плоскости залегания, наблюдался однолопастный вывал, а не кольцевой или двухлопастный, как ожидалось в соответствии с общепринятыми представлениями [4, 8]. Ранее также сообщалось о формировании подобных однолопастных вывалов, хотя они и не назывались таковыми, в образцах угля с цилиндрическими отверстиями [10]. Для объяснения наблюдаемого явления было предложено несколько гипотез [11]:

– Комбинированное влияние прочностной и упругой анизотропии определенного типа.

– Нестабильность круглой формы вывалов из-за случайного изменения свойств породы и подавления образования вторичных вывалов после инициирования первичных.

– Особый тип анизотропии прочности, проявляющийся в виде монотонного изменения прочности от угла приложения нагрузки с максимумом, соответствующим сжатию, нормальному к плоскости залегания, и минимуму, соответствующему сжатию, параллельному плоскости залегания.

Однако имевшихся экспериментальных данных об упругих и прочностных свойствах исследованных пород, таких как модули Юнга, коэффициенты Пуассона и прочностные свойства в двух направлениях (нормальном и вдоль плоскости залегания), было недостаточно для проверки данных гипотез.

Чтобы заполнить пробел в понимании процессов, приводящих к образованию однолопастных вывалов, на испытательной системе трехосного независимого нагружения (ИСТНН) были проведены новые аналогичные эксперименты на образцах породы из кернового материала, отобранного из сеноманского горизонта пласта ПК1 газового и газоконденсатного месторождений Арктического шельфа России, а также эксперименты по определению упругих и прочностных свойств исследуемой породы, необходимых для проверки предложенных гипотез.

2. Эксперименты: приборы, материалы, измерения. Эксперименты проводились на Испытательной системе трехосного независимого нагружения (ИСТНН), созданной в Институте проблем механики Российской академии наук и предназначенной для исследования деформационных, прочностных и фильтрационных свойств горных пород гидрокарбонатных и угольных месторождений [12–15] в условиях истинного трехосного нагружения. Испытания проводятся на кубических образцах с ребром 40 мм. Узел нагружения благодаря используемой кинематике с перекрывающимися нагружающими плитами позволяет передавать напряжения на всю поверхность образцов, не создавая препятствий друг другу. Для уменьшения трения между каждой гранью образца и нагружающими плитами вставлялись тонкие фторопластовые прокладки. В прокладках, закрывающих поверхности с отверстиями, вырезались центральные отверстия диаметром 10 мм.

Образцы были изготовлены из кернового материала, отобранного из трех интервалов, около 10 м каждый. Керновый материал был представлен высокопористым высокопроницаемым сеноманским песчаником со слабо выраженной структурой напластования. В пределах каждого интервала свойства материала были однородными, причем различия свойств породы между различными интервалами были также относительно невелики. Чтобы уменьшить влияние побочных эффектов для каждой серии экспериментов, образцы по возможности вырезали из одного куска керна.

Образцы были изготовлены с использованием камнерезных и шлифовальных станков с высокой точностью, непараллельность граней составляла не более 20 мкм. Боль-

шинство из образцов были вырезаны параллельно оси керна, но отдельные образцы были вырезаны под углами 30° , 45° и 60° к оси керна.

Для образцов применена следующая маркировка. Первая буква А, В или С соответствует одному из трех интервалов. Затем следует число, соответствующее номеру куска породы, из которого был вырезан образец. Последнее число (если таковое имеется) соответствует номеру образца, вырезанного из данного куска керна.

Перед нагружением в каждом образце были измерены продольные скорости акустических волн в трех направлениях.

Было проведено три типа испытаний. В испытаниях первого типа осуществлялось прямое моделирование вывалов в скважинах. В этом типе экспериментов в центре каждого образца, параллельно его грани, просверливалось сквозное отверстие диаметром 10 мм. Образцы с центральными сквозными отверстиями помещались в нагружающий узел установки с двумя (из шести) противоположными нагружающими плитами, имеющими центральные каналы для подачи и отбора воздуха. Было использовано три варианта нагружения. В первом варианте (далее – испытания “полый цилиндр”) нагрузка, одинаковая по всем трем осям, прикладывалась с постоянной скоростью (31.25 кПа/с). Второй вариант (далее – испытания “полый цилиндр-2”) состоял в воспроизведении условий, близких к условиям плоской деформации: образцы нагружали, как в предыдущем варианте, до напряжений, приблизительно соответствующих действующим в глубине пласта в грунтовом скелете (15 МПа), затем нагружение вдоль сторон, параллельных оси отверстия, продолжалось с той же скоростью, в то время как на гранях, перпендикулярных оси отверстия, сохранялись постоянные напряжения. Третий вариант (далее – испытания “полый цилиндр-0”), соответствовал условию плоского напряженного состояния: к боковым граням кубического образца прикладывалась двухосная нагрузка; грань с отверстием оставалась свободной, что позволяло осуществлять видеозапись процесса образования вывала. Поток воздуха в образец в этом случае не подавался.

Большинство испытаний данного типа проводились на образцах с отверстиями, ориентированными вдоль залегания, моделирующими горизонтальные скважины; некоторые испытания проводились с отверстиями, нормальными к залеганию, а также ориентированными под углами 30° и 60° к нормали к залеганию, моделирующими вертикальные и наклонные скважины (далее испытания полый цилиндр- ν , полый цилиндр-2- ν , полый цилиндр- 30° и полый цилиндр- 60° соответственно). Во всех вариантах образцы разгружались одновременно по всем осям (чтобы избежать возникновения касательных напряжений, способных привести к изменению конфигурации вывалов).

Вторым типом испытаний были трехосные испытания. В данном типе экспериментов на первом этапе к образцу прикладывалась гидростатическая (одинаковая по всем граням) нагрузка (давление обжима). Затем нагрузка по двум осям образца поддерживалась постоянной, а нагрузка по третьей оси S_3 увеличивалась, причем управление нагружением образца по данной оси на этом участке осуществлялось по перемещению, а не по нагрузке. Нагружение по данной оси доводилось до уровня начала неупругого деформирования S_3^* , а затем осуществлялась разгрузка образца по данной оси до исходного уровня напряжений. Далее нагрузка по всем осям увеличивалась до следующего значения, и цикл нагружения по третьей оси (той же что и в предыдущем цикле) повторялся. Далее аналогичным образом осуществлялось нагружение на третьем цикле. Затем образец разгружался. Таким образом, каждый опыт состоял из трех циклов, отвечающих трем значениям всестороннего обжима образца. Первоначально напряжение обжима по циклам для части образцов составляло 2 МПа, 10 МПа и 20 МПа, но затем, в связи с малой прочностью исследуемых пород, оно было уменьшено до 1 МПа, 5 МПа и 10 МПа.

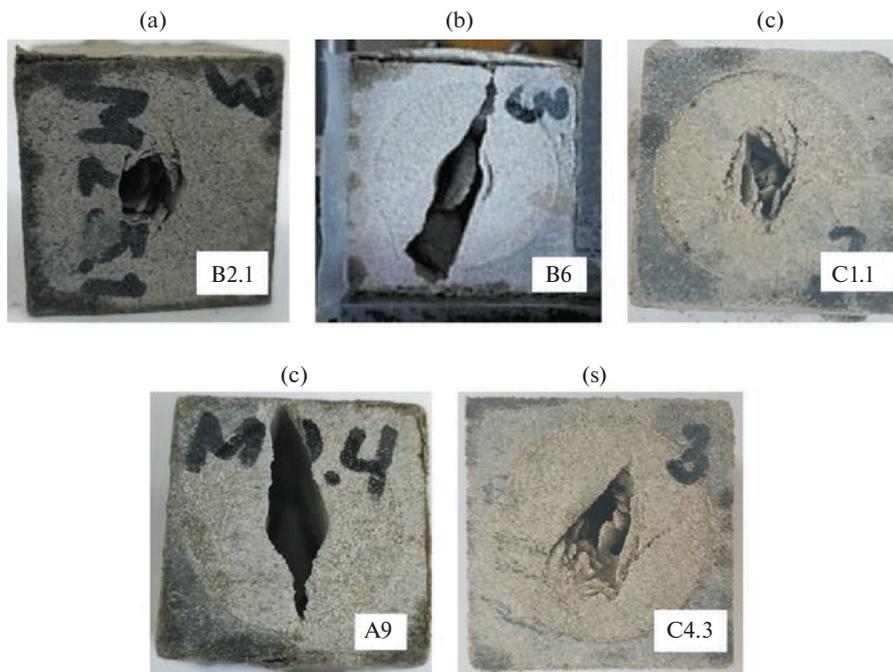


Рис. 2. Отверстия с вывалами после испытания образцов из месторождения № 1 в образцах с отверстиями, перпендикулярными оси керна; образцы вырезаны соосно оси керна (ось керна вертикальна на рисунках), а–d; образец вырезан наклонно к оси керна (ось керна наклонена на 30° от вертикали), e.

Опыты второго типа проводились для трех направлений действия максимального сжимающего напряжения S_3 относительно плоскости залегания – вдоль нее, по нормали и под углом 45° к ней. Целью таких экспериментов было выяснение характера изменения прочности породы в зависимости от угла приложения максимальной нагрузки по отношению к залеганию. При реализации механизма прочностной анизотропии, связанного с наличием плоскостей ослабления вдоль залегания, прочность породы при приложении нагрузки под углом к залеганию должна быть меньше, чем при приложении нагрузки параллельно или по нормали к залеганию. Дополнительной целью данных экспериментов было получение упругих характеристик породы, в частности упругих модулей по различным направлениям.

Испытания такого типа будут называться “трехосными”, за которыми следует значение (в градусах) угла между максимальными сжимающими напряжениями и направлением залегания.

Третий тип экспериментов заключался в прямом моделировании напряженно-деформированных состояний, возникающих в различных точках контура горизонтальной скважины при понижении давления на ее забое, и изучении процесса разрушения породы в этих точках под действием создаваемых напряжений. В ходе опытов моделировались напряженно-деформированные состояния в точках, отстоящих от вертикальной оси на 0°, 30°, 45° и 90°, в которых постоянное по величине максимальное окружное сжимающее напряжение, действующее вдоль данного контура отверстия, по-разному наклонено к плоскости залегания. Еще одной целью данных экспериментов, как и “трехосных” опытов, было получение дополнительных данных о характере обнаруженной прочностной анизотропии исследуемых пород.

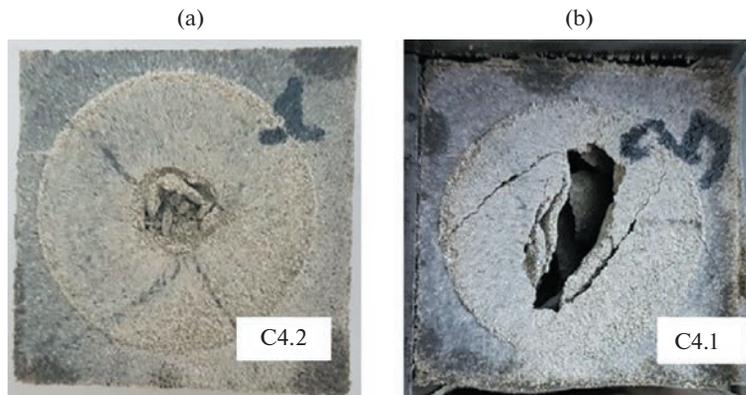


Рис. 3. Отверстия с вывалами после испытания образцов из месторождения № 1 в образцах с отверстиями, наклоненными к оси керны; на 30° а); на 60° б).

Помимо моделирования напряженно-деформированного состояния на контуре горизонтальной скважины, был выполнен один эксперимент по моделированию состояния на контуре вертикальной скважины. В данном случае, поскольку скважина перпендикулярна плоскости залегания, все точки на контуре скважины находятся в равных условиях.

Испытания такого типа будут называться “скважиной”, за которыми следует значение (в градусах) угла между максимальными сжимающими напряжениями и направлением залегания. Таким образом, “скважина 0° ” соответствует образцам, моделирующим верхнюю (нижнюю) точку горизонтальной скважины, “скважина- 90° ” соответствует образцам, моделирующим левую (правую) точку горизонтальной скважины, “скважина- 30° ” и “скважина- 45° ” соответствуют образцам, моделирующим точки горизонтальной скважины, расположенные под углом 30° и 45° от вертикали, соответственно. Опыт, моделирующий напряженное состояние, возникающее на контуре вертикальной скважины, будет называться “скважина- v ”.

Подробное описание программы испытаний образцов в ходе выполнения опытов “скважина” представлено ниже в Приложении.

3. Результаты экспериментов и обсуждение. Всего было испытано 48 образцов: 15 образцов в соответствии с программой “полый цилиндр”, 21 образец в соответствии с программой, моделирующей напряженное состояние, возникающее в различных точках вдоль контура скважины (“скважина”), трехосные испытания (“трехосные”) были выполнены на 12 образцах. Информация об испытаниях и некоторые результаты обобщены в таблице 1. Столбец “Результаты” для образцов, подвергнутых трехосным испытаниям, разделен на три подколоники, в которых представлены напряжения сжатия, приложенные к боковым граням, предельные напряжения, приложенные к третьей грани, и касательный (дифференциальный) модуль Юнга в направлении максимальной нагрузки для каждого из трех циклов соответственно. Для испытаний “скважина”, моделирующих напряженное состояние в определенных точках контура скважины, в столбце “Результаты” указано максимальное сжимающее напряжение, соответствующее окружному напряжению в этой точке. Для испытаний типа “полый цилиндр” в колонке “Результаты” указаны формы вывалов и приведены ссылки на соответствующие рисунки.

Первая серия испытаний была проведена на образцах, вырезанных соосно оси керны (отверстия также были выполнены соосно) при равнокомпонентной нагрузке.

Таблица 1.

N	Образец	Вид испытания. Угол максимального сжатия к залеганию		Результат				
				цикл	$s_1 = s_2$ МПа	s_3 МПа	$E \times 10^{-3}$ МПа	
1	A2.3	скважина-0	0°	$s_2 = 23.0$ МПа				
2	A2.2	скважина-90	90°	$s_2 = 27.6$ МПа				
3	A3.1	трехосный-0	0°	цикл	$s_1 = s_2$ МПа	s_3 МПа	$E \times 10^{-3}$ МПа	
				1	2	14.6	1.1	
				2	10	29.5	1.8	
				3	20	49.0	3.2	
4	A4	трехосный-90	90°	1	2	19.6	1.48	
				2	10	35.4	3.42	
				3	20	46.5	4.8	
5	A7	полый цилиндр-2-v	0°	Цилиндрический вывал				
6	A9	полый цилиндр-2		Однолопастные вывалы (рис. 2, d)				
7	B.1.1	скважина-0		$s_2 = 27.0$ МПа				
8	B1.2	скважина-90		$s_2 = 31.2$ МПа				
9	B2.1	полый цилиндр-2		Однолопастные вывалы (рис. 2, a)				
10	B2.2	полый цилиндр-2-v		Цилиндрический вывал				
11	B5	полый цилиндр-2-v		Цилиндрический вывал (рис. 1)				
12	B6	полый цилиндр-2		Однолопастные вывалы (рис. 2, b)				
13	B9.2	трехосный-0		0°	цикл	$s_1 = s_2$ МПа	s_3 МПа	$E \times 10^{-3}$ МПа
					1	1	12.0	1.26
					2	5	22.0	2.9
					3	10	32.0	3.34
14	B9.1	трехосный-90	90°	1	1	21.6	1.96	
				2	5	35.4	3.39	
				3	10	46.5	3.93	
15	B 10.2	скважина -0	0°	$s_2 = 26.5$ МПа				
16	B 10.1	скважина 1-90	90°	$s_2 = 29.9$ МПа				
17	C1.3	трехосный-0	0°	цикл	$s_1 = s_2$ МПа	s_3 МПа	$E \times 10^{-3}$ МПа	
				1	1	12.1	1.35	
				2	5	22.8	3.4	
				3	10	33	3.5	
18	C1.4	трехосный-45	45°	1	1	16	1.9	
				2	5	29	3.2	
				3	10	40	4.8	
19	C1.1	полый цилиндр	0°	Однолопастные вывалы (рис. 2, c)				
20	C1.2	полый цилиндр-v		Цилиндрический вывал				
21	C1.6	скважина-0		$s_2 = 29.6$ МПа				
22	C1.5	скважина-90		$s_2 = 37.5$ МПа				
23	C3.1	полый цилиндр-0		Однолопастные вывалы (видео)				
24	C3.2	полый цилиндр-0		Однолопастные вывалы (видео)				

Таблица 1. Окончание

N	Образец	Вид испытания. Угол максимального сжатия к залеганию		Результат					
				цикл	$s_1 = s_2$ МПа	s_3 МПа	$E \times 10^{-3}$ МПа		
25	C4.1	полый цилиндр- v		Однолопастные вывалы (рис. 3, b)					
26	C4.2			Цилиндрический вывал (рис. 3, a)					
27	C4.3			Однолопастные вывалы (рис. 2, e)					
28	C4.5	скважина-0	0°	$s_2 = 29.6$ МПа					
29	C4.4	скважина-90	90°	$s_2 = 36.1$ МПа					
30	C2.4	трехосный-0	0°	цикл	$s_1 = s_2$ МПа	s_3 МПа	$E \times 10^{-3}$ МПа		
	1			1	14	1.6			
	2			5	26	2.7			
	3			10	36	4.0			
31	C2.3			трехосный-90	90°	1	1	22	2.4
	2					5	34	4.0	
	3	10	45			4.4			
32	C2.5	трехосный-45	45°	1	1	23	2.3		
	2			5	33	3.8			
	3			10	44	4.3			
33	C2.1	скважина-0	0°	$s_2 = 29.5$ МПа					
34	C2.6	скважина-30	30°	$s_2 = 34.2$ МПа					
35	C2.5	скважина-45	45°	$s_2 = 34.7$ МПа					
36	C2.2	скважина-90	90°	$s_2 = 40.1$ МПа					
37	C5.1	скважина-0	0°	$s_2 = 29.5$ МПа					
38	C5.2	скважина-90	90°	$s_2 = 39.5$ МПа					
39	C5.3	скважина-90	90°	$s_2 = 37.0$ МПа					
40	C5.4	скважина-0	0°	$s_2 = 30.6$ МПа					
41	C6.3	трехосный-0	0°	цикл	$s_1 = s_2$ МПа	s_3 МПа	$E \times 10^{-3}$ МПа		
	1			1	18.2	1.9			
	2			5	29	3.3			
	3			10	38.2	4.1			
42	C6.1			трехосный-90	90°	1	1	20	2.1
	2					5	30	4.1	
	3	10	42			5.4			
43	C6.4	трехосный-45	45°	1	1	24	2.4		
	2			5	38	4.1			
	3			10	49	5.3			
44	C6.5	полый цилиндр-0		Однолопастные вывалы (видео)					
45	C6.6	полый цилиндр-0		Однолопастные вывалы (видео)					
46	C7.1	скважина- v	0°	$s_2 = 33.4$ МПа					
47	C7.4	скважина-0	0°	$s_2 = 29.5$ МПа					
48	C7.3	скважина-90	90°	$s_2 = 34.3$ МПа					

Во всех трех случаях наблюдалось образование цилиндрических вывалов осесимметрично по всему контуру отверстия. Фотография образца В5 после проведения испытания представлена на рис. 1.

Вторая серия испытаний проводилась на образцах с отверстиями, направленными перпендикулярно оси керна (вдоль залегания). Четыре образца были вырезаны соосно оси керна. Чтобы гарантировать, что образование и ориентация вывалов вызваны структурой образца, а не артефактами, возможно, связанными с нагружающим устройством или формами образцов, пятый образец был вырезан под углом 30° к оси керна, при этом отверстие было сделано также вдоль залегания. Фотографии отверстий с вывалами представлены на рис. 2, а-е. На фотографиях видно, что во всех образцах вывалы ориентированы вдоль оси керна (перпендикулярно залеганию), включая случай, когда грани образца наклонены к плоскости залегания, рис. 2, е. Подобные виды вывалов обычно предполагаются вызванными неравнокомпонентным напряженным состоянием: случаи (а, с, d) выглядят как отколы чешуек, хотя нижнюю часть вывала в случае (е) можно рассматривать и как двухлопастную; случаи (b, d) близки к “собачьему уху” или даже к вывалам типа “червоточин” [5]. Однако в нашем случае нагрузка была гидростатической. Максимальное отклонение от вертикальной оси (около 15°) наблюдается для образца на рис. 1, b; причина этого отклонения может быть связана с тем, что залегание не обязательно всегда перпендикулярно оси керна, или из-за статистического разброса прочностных свойств.

Эксперименты не выявили отличия в форме вывалов в случае всестороннего трехосного сжатия и двухосного нагружения в условиях плоской деформации.

Результаты экспериментов в условиях плоского напряженного состояния с одной из граней, свободной от нагрузки, продемонстрировали, как и следовало ожидать, образование вывалов при более низких значениях напряжений, а также некоторое изменение характера разрушения, а именно: наряду с однолопастными вывалами, наблюдаемыми в других испытаниях, появление сквозных трещин, параллельных свободной грани. Результаты видеосъемки доступны в [16]. Кроме того, отсутствие подачи воздуха через образец в данных экспериментах исключило воздушный поток из числа гипотетических причин формирования наблюдаемых форм вывалов.

Третья серия испытаний была проведена на образцах с отверстиями, наклоненными к оси керна под углами 30° и 60° . В первом случае вывал был осесимметричным, аналогично случаю отверстия, совпадающего с осью керна, во втором случае вывал распространяется нормально к проекции плоскости залегания, как в случае отверстия, лежащего в плоскости залегания.

Основные результаты испытаний, моделирующих напряженное состояние, возникающее в различных точках вдоль контура скважины при понижении давления на ее забое, а также трехосных испытаний обобщены в таблице 1.

Для каждой пары образцов А2.3, А2.2; В1.1, В1.2; В10.2, В10.1; С1.6, С1.5; С4.5, С4.4, моделирующих напряженное состояние в верхней (нижней) и левой (правой) точках контура горизонтальной скважины соответственно, предельные напряжения всегда были выше в последнем случае. То же самое наблюдалось для четырех образцов С5.1, С5.4, С5.2, С5.3. Для образцов С2.1, С2.6, С2.5, С2.2, соответствующих точкам вдоль контура горизонтальной скважины, расположенным на расстоянии 0° , 30° , 45° и 90° от вертикали соответственно, предельное напряжение монотонно возрастало с увеличением угла. Серия испытаний на образцах С7.1, С7.4, С7.3 демонстрирует, что предельное напряжение для образца, моделирующего состояние на контуре вертикальной скважины, находится между предельными напряжениями, соответствующими верхней (нижней) и левой (правой) точкам на контуре горизонтальных скважин.

Полученный результат, состоящий в изменении прочности породы вдоль контура горизонтальной скважины (минимум прочности в верхней точке, максимум в боковой точке), достаточно удивителен, поскольку, согласно общепринятой точке зрения [4,

8], наименьшая прочность должна соответствовать точкам, где преобладают напряжения сдвига вдоль горизонтальных плоскостей ослабления, соответствующим, в зависимости от коэффициента внутреннего трения, углам около 30° .

Результаты трехосных испытаний, проведенных для пар и троек образцов А3.1, А4; В9.2, В9.1; С1.3, С.4; С2.4, С2.5, С2.3, выявили более низкую прочность исследуемых пород при приложении максимального напряжения сжатия в направлении залегания по сравнению со случаем, когда максимальное сжимающее напряжение прикладывалось в направлении, перпендикулярном залеганию. В случае нагружения, когда основное сжимающее напряжение прикладывалось наклонно к залеганию, прочность имела промежуточное значение.

Рассмотрим возможные причины развития наблюдаемых форм вывалов и проверим гипотезы, предложенные в [11]. Так, на основе анализа [17] решения для распределения напряжений на контуре кругового отверстия в анизотропном теле [18], было продемонстрировано, что сочетание определенных типов упругой и прочностной анизотропии может приводить к появлению однолопастных вывалов на контуре отверстия в телах, подвергаемых действию равнокомпонентной нагрузки. Необходимым условием для формирования подобного типа вывалов согласно указанному механизму является:

$$2E_{(45)}^{-1} > E_{11}^{-1} + E_{33}^{-1} \quad (3.1)$$

где E_{11} , E_{33} , $E_{(45)}$ – модули Юнга, измеренные в направлении двух главных осей и под углом 45° к ним; для рассматриваемого случая они соответствуют модулям в плоскости залегания, нормально и под углом 45° к ней. Выполнение условия (3.1) приводит к появлению концентраций напряжений на контуре скважины при вышеуказанных условиях в точках, расположенных вдоль главных осей тензора упругости, соответствующих левым/правым и верхним/нижним точкам на контуре горизонтальной скважины, пробуренной вдоль горизонтального залегания. Изменение знака неравенства в (3.1) на противоположный приводит к уменьшению напряжений в этих точках и концентрации напряжений в точках под некоторыми углами (близкими к 45°) к главной оси, знак равенства в (3.1) соответствует равномерному кольцевому напряжению вдоль контура. Развитие однолопастных вывалов из-за концентрации напряжений требует, кроме выполнения условия (3.1), наличия анизотропии прочности для подавления появления вывалов в левой/правой точках горизонтальных скважин. Однако, как видно из результатов, представленных в таблице 1, неравенство (3.1) для исследуемых пород не выполняется. Поэтому приведенный выше сценарий не может объяснить появление наблюдаемых форм вывалов в исследованных породах.

Отметим, что измеренные значения модулей приводят к относительно небольшому нарушению условия (3.1), что предполагает незначительное изменение концентрации кольцевых напряжений вдоль контура и, следовательно, оправдывает использование программ нагружения, соответствующих равномерной концентрации окружных напряжений, для моделирования напряженного состояния на контуре скважины (тесты “скважина”).

Две независимые серии экспериментов, а именно моделирование напряженного состояния в различных точках контура скважины и трехосные испытания, продемонстрировали наличие анизотропии прочности исследуемых пород. Наблюдаемая анизотропия прочности проявлялась в монотонном изменении предельных напряжений при изменении угла приложения сжатия с боковым поджатием (трехосные испытания или испытания типа фон Кармана) с максимальным предельным напряжением, соответствующим максимальному напряжению сжатия, приложенному по нормали к залеганию, и минимальному напряжению сжатия, приложенному вдоль залегания (без “провала” между данными направлениями, соответствующего сдвиговому разрушению

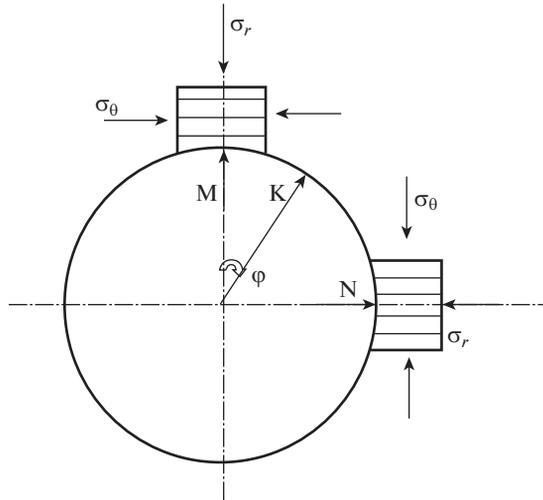


Рис. 4. Окружное и радиальное напряжения σ_θ, σ_r , действующие в окрестности горизонтальной скважины в верхней и боковой точках M и N .

вдоль плоскостей залегания). Это именно тот вид анизотропии прочности, который объясняет появление однолопастных вывалов вокруг круглых отверстий, направленных по нормали к залеганию, наблюдаемых при прямом моделировании без привлечения дополнительных допущений и моделей, таких как подавление инициирования вторичных вывалов [11].

Другие гипотезы, предложенные в [11], хотя и не получили подтверждения для исследуемых пород, тем не менее могут объяснять формирование необычных форм вывалов в других случаях.

4. Программа нагружения для моделирования состояния породы на контуре скважины. На рис. 4 схематично показано вертикальное сечение горизонтальной скважины и действующие в ее окрестности радиальное σ_r и кольцевое σ_θ напряжения в двух точках M и N . Сжимающие напряжения считаются отрицательными.

Будем считать, что под действием природного горного давления пласт находится в состоянии равнокомпонентного всестороннего сжатия напряжением $q = -\gamma H$, где H – глубина залегания пласта, γ – средний удельный вес вышележащих пород, обычно принимают $\gamma = 2.3 \text{ г/см}^3$. Тогда для изотропной по упругим свойствам среды распределение полных напряжений, обусловленных действием горного давления, в окрестности необсаженной скважины определяется известным решением задачи Ламе [7]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -(q + p_c)(R_c/r)^2 + q \\ \sigma_\theta &= (q + p_c)(R_c/r)^2 + q \\ \sigma_z &= q \end{aligned} \tag{4.1}$$

где R_c – радиус скважины; r – расстояние от оси скважины, p_c – давление на забое скважины, σ_z – напряжение, действующие в окрестности скважины в направлении ее оси.

Напряжения, действующие в грунтовом скелете, равны:

$$s_i = \sigma_i + p(1 - \delta) \tag{4.2}$$

где σ_i – полные напряжения, обусловленные действием горного давления ($\sigma_i, s_i \leq 0$), p – давление флюида ($p \geq 0$), δ – доля площадок контактов относительно всей поверхности зерна грунтового скелета.

Значения напряжений, действующих в грунтовом скелете в окрестности скважины, тогда определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} s_r &= -(q + p_c) \left(\frac{R_c}{r} \right)^2 + q + p(r)(1 - \delta) \\ s_\theta &= (q + p_c) \left(\frac{R_c}{r} \right)^2 + q + p(r)(1 - \delta) \\ s_z &= q + p(r)(1 - \delta) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из (4.3) и (4.2) следует, что на стенке скважины, т.е. при $r = R_c$, напряжения равны:

$$\begin{aligned} s_r &= -\delta p_c \\ s_\theta &= 2(q + p_c) - \delta p_c \\ s_z &= q + (1 - \delta) p_c \\ \tau &= q + p_c \end{aligned} \quad (4.4)$$

Тогда для величины депрессии на забое скважины $\Delta p = p_0 - p_c$, где p_0 – начальное пластовое давление, из (4.4) имеем:

$$\Delta p_c = p_0 - (s_\theta - 2q) / (2 - \delta) \quad (4.5)$$

Если площади соприкосновения между зёрнами грунта малы ($\delta \approx 0$), что характерно для прочных пород-коллекторов, давление, сжимающее грунтовой скелет, равно полному горному давлению на данной глубине минус пластовое давление. Для пород с малопрочными пластичными зёрнами площадь контакта между зёрнами может быть велика, и часть горного давления будет непосредственно передаваться через грунтовой скелет. Наиболее характерные значения δ для горных пород-коллекторов находятся в интервале от 0–0.2. Прочностные характеристики исследуемых пород, как показали результаты трехосных испытаний, оказались достаточно низкими. Поэтому при составлении программ физического моделирования принималось значение $\delta = 0.2$.

На рис. 5 показана программа нагружения образца породы из исследуемого месторождения, отвечающая моделированию деформационных процессов на контуре горизонтальной скважины при понижении давления на ее забое. Представлены зависимости от времени напряжений s_1, s_2, s_3 , прикладываемых в ходе опыта к граням образца по осям 1, 2, 3 в нагружающем узле установки ИСТНН, соответствующих напряжениям $|s_z|, |s_\theta|, |s_r|$, действующим на контуре горизонтальной скважины. Точки на программе нагружения отвечают напряжениям, действующим на контуре скважины в следующие моменты: точка А – напряжениям, действовавшим в грунтовом скелете до пробуривания скважины, т.е. в точке А: $s_1 = s_2 = s_3 = |q - p_0|$; точка В – скважина пробурена; отрезки ВС – понижение давления на забое скважины; точка С – “осушение” скважины.

Отличие при испытании образцов, соответствующих разным точкам контура скважины, состояло в направлении прикладывания максимального s_2 и минимального s_3 сжимающих напряжений к граням образца. Так, при моделировании точки М, рис. 4, образец в нагружающем узле установки ИСТНН располагался таким образом, что напряжение s_2 , отвечающее кольцевому напряжению σ_θ , действовало вдоль залегания, а напряжение s_3 , отвечающее радиальному напряжению σ_r – по нормали к нему. При

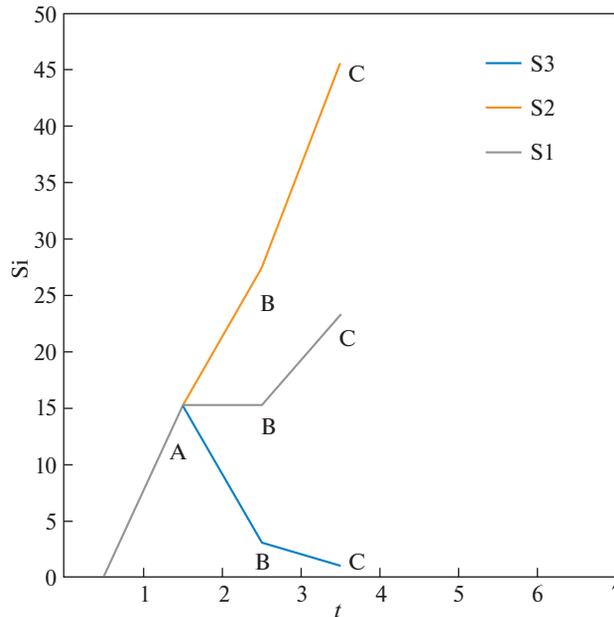


Рис. 5. Программа нагружения образца породы, моделирующая понижение давления на забое горизонтальной скважины: зависимость напряжений S_i , МПа от времени t , сек.

моделировании же точки N образец располагался таким образом, что напряжение s_2 было перпендикулярно залеганию, а напряжение s_3 действовало вдоль него.

5. Заключение. Исследовано влияние анизотропии упругих и, главным образом, прочностных свойств на конфигурацию вывалов, образующихся при равнокомпонентных напряжениях. На образцах песчаника, отобранных из сеноманских отложений, выполнено прямое физическое моделирование процесса образования вывалов при равномерном всестороннем сжатии образцов с отверстиями, моделирующими скважины, пробуренные в плоскости залегания и по нормали к ней. Эксперименты продемонстрировали образование кольцевых вывалов во втором случае и однолопастных вывалов, направленных перпендикулярно залеганию, в первом случае, для которого обычно ожидается образование двухлопастных вывалов, связанных со сдвиговым разрушением вдоль ослабленных плоскостей залегания [8, 4]. Подобные формы вывалов наблюдались и ранее в аналогичных условиях в образцах угля [10] и в песчанике [11].

В [11] было предложено несколько гипотез для объяснения такого необычного поведения, в частности: совместное влияние упругой анизотропии специального вида и прочностной анизотропии; наличие прочностной анизотропии специального вида, непосредственно не связанной с сдвиговым разрушением вдоль плоскостей залегания; разброс прочностных свойств, вызывающих возможную неустойчивость круговой формы вывалов.

Был проведен ряд экспериментов для определения упругих и прочностных свойств, ответственных за механизмы, лежащие в основе первых двух гипотез. Проведенные эксперименты продемонстрировали, что для исследуемых горных пород сочетание упругих характеристик не соответствует типу, обеспечивающему активацию разрушения в соответствии с первой гипотезой, в то время как анизотропия прочности отно-

сится именно к типу, приводящему к образованию наблюдаемых однолопастных вывалов.

Также проведена дополнительная серия экспериментов, в ходе которых моделировалось напряженное состояние в различных точках контура скважины. Испытания показали, что образцы, соответствующие точкам скважины, в которых максимальные напряжения действовали вдоль залегания (верхняя и нижняя точки горизонтальных скважин) и в которых возникли наблюдаемые вывалы, разрушались при меньших напряжениях по сравнению с образцами, отвечающими точкам на контуре скважины, в которых максимальные напряжения действовали под некоторыми углами к залеганию. Последние, в свою очередь, разрушались при меньших напряжениях по сравнению с образцами, отвечающими точкам на контуре скважины, в которых максимальные напряжения действовали по нормали к залеганию.

Таким образом, выполненные эксперименты по программам “трехосные” и “скважина” продемонстрировали наличие прочностной анизотропии исследованных пород, отличной от общеизвестной, связываемой с наличием поверхностей ослабления. Если при наличии последней зависимость прочности породы от угла на контуре горизонтальной скважины имеет четыре минимума и четыре максимума, то в нашем случае имеют место два минимума (в верхней и нижней точках контура скважины) и два максимума (в левой и правой точках контура).

Результаты исследований показали, что причиной образования направленных вывалов может быть не только разница в напряжениях, действующих в плоскости, перпендикулярной стволу скважины, но и влияние анизотропии прочности. Результаты представляются полезными для интерпретации данных исследований скважин для определения начального напряженного состояния в Земной коре, а также при проектировании и разработке углеводородных месторождений и подземных хранилищ газа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ проект № 22-11-00273.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башкатов А.Д. Предупреждение пескования скважин. М.: Недра, 1981. 176 с.
2. Врачев В.В., Шафаренко В.П., Шустров В.П. Пескопроявление при эксплуатации ПХГ // Газовая промышленность. 1999. № 11. С. 62.
3. Басниев К.С., Будзуляк Б.В., Зиновьев В.В. Повышение надежности и безопасности эксплуатации подземных хранилищ газа. М.: ООО “Недра-Бизнесцентр”. 2005. 391 с.
4. Zoback M.D. Reservoir Geomechanics. California: Cambridge University Press, 2007. 443 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511586477>.
5. Zang A., Stephansson O. Stress field of the earth's crust. Dordrecht: Springer, 2010. 322 p..
6. Ljunggren C., Chang Y., Janson T., Christiansson R. An overview of rock stress measurement methods // Int. J. Rock Mech. Min Sci 2003. № 40. P. 975–989.
7. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of Elasticity. NY: McGraw-Hill Book Company Inc., 1953. 471 p.
8. Germanovich L.N., Galybin A.N., Dyskin A.V., Mokhel A.N., Dunayevsky V. Borehole stability in laminated rock. In G. Barla (Ed.) // Pred. Perform. Rock Mech. Rock Eng., Torino. CRC Press/Balkema, 1996. V. 2, P. 767–776.
9. Vernik L., Zoback M.D. Strength anisotropy of crystalline rock: Implications for assessment of in situ stresses from wellbore breakouts // Rock Mech. Contrib. Challenges. Proceedings of the 31st US Symposium on Rock Mech. Balkema, Rotterdam, 1990. ARMA-90-0841. <https://doi.org/10.1201/9781003078944>
10. Kaiser P.K., Guenot A., Morgenstern N.R. Deformation of small tunnels. IV. Behaviour during failure // Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr. 1985. V. 22. P. 141–152. <https://doi.org/10.1201/9781003078944>
11. Коваленко Ю.Ф., Устинов К.Б., Карев В.И. Геомеханический анализ образования вывалов на стенках скважин // Известия РАН МТТ. 2022. № 6. С. 157–172.

12. *Karev V.I., Kovalenko Yu.F.* Triaxial loading system as a tool for solving geotechnical problems of oil and gas production. True Triaxial Testing of Rocks. Leiden, CRC Press. Balkema. 2013. P. 301–310.
13. *Karev V.I., Kovalenko Yu.F., Ustinov K.B.* Modeling deformation and failure of anisotropic rocks nearby a horizontal well // J. Min. Sci. 2017. V. 53. № 3. P. 425–433.
<https://doi.org/10.1134/S1062739117032319>
14. *Klimov D.M., Karev V.I., Kovalenko Yu.F., Ustinov K.B.* Mechanical-mathematical and experimental modeling of well stability in anisotropic media // Mech. Solids. 2013. V. 48. P. 357–363.
<https://doi.org/10.3103/S0025654413040018>
15. *Karev V.I., Kovalenko Y.F., Ustinov K.B.* Geomechanics of Oil and Gas Wells. Advances in Oil and Gas Exploration and Production. Springer International Publishing Cham: Switzerland. 2020. 166 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-26608-0>
16. Экспериментальное исследование влияния анизотропии на ориентацию вывалов в скважинах. (Видео) URL: <https://ipmnet.ru/labs/geo/breakouts2022> (дата обращения: 21.09.2022).
17. *Zhuravlev A.B., Ustinov K.B.* On values characterizing the degree of elastic anisotropy of transversely isotropic rocks. Role of Shear Modulus. // Mech. Solids. 2019. Vol. 54. № 6. P. 958–967.
<https://doi.org/10.3103/S0025654419060104>
18. *Lekhnitskii S.G.* Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body. Holden-Day, San Francisco, 1963. 404 p.

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ ДЛЯ СИЛЬНО ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

© 2023 г. С. В. Шешенин^{a,*}, Р. Р. Мурадханов^{a,**}

^aМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*e-mail: sergey.sheshenin@mail.ru

**e-mail: mrdhmv@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.02.2022 г.

После доработки 28.07.2022 г.

Принята к публикации 31.07.2022 г.

Методика асимптотического осреднения была развита для трехмерных уравнений в частных производных с быстро осциллирующими коэффициентами. Например, для уравнений теории упругости. Затем была модифицирована и применялась к тонким телам в виде пластин (однородных или неоднородных, с ровными лицевыми поверхностями или нет), описываемых трехмерной теорией упругости. В этих случаях асимптотические решения строились относительно одного малого параметра, обычно являющегося отношением толщины пластины к характерному размеру в плане. Методика осреднения в таком случае также понижает размерности задачи, т.е. сводит трехмерную краевую задачу к некоторой двумерной.

В данной работе приводится обоснование применения метода к задаче с двумя малыми параметрами в случае однородной тонкой сильно ортотропной пластины, изгибаемой поверхностной нагрузкой без учета массовых сил. Вторым малым параметром является отношение поперечных модулей упругости к модулям в плане пластины. Показано, что сильная ортотропия эквивалентна увеличению толщины эквивалентной пластины.

Описана процедура получения распределения напряжений по толщине пластины для трех приближений. Первое приближение дает классическую теорию Кирхгофа, называемую также теорией Кирхгофа–Лява, а третье приближение совпадает с теорией Амбарцумяна и позволяет находить поперечные сдвиговые и нормальное напряжения. Рассмотрение цилиндрического изгиба дает возможность найти решения в рамках классических теорий пластин в виде формул, так же как и три приближения асимптотической теории, что упрощает сравнение. Рассмотрены примеры, когда осредненные ортотропные модули взяты для однослойного волокнистого композита.

Ключевые слова: асимптотическое осреднение, теория Рейсснера, теория Амбарцумяна, сильно ортотропный материал, однонаправленный резинокордный слой, полидисперсная модель композита

DOI: 10.31857/S0572329922600608, EDN: FTLVUA

1. Введение. Известно, что сильно ортотропные пластины не описываются теорией Кирхгофа (К). Например, в [1] это показано численными расчетами. В данной работе проводится асимптотическое исследование частного случая сильной ортотропии.

Методика асимптотического осреднения (метод многих масштабов) была первоначально создана для случая трехмерной периодической среды (см. [2, 3] и др.) и, в част-

ности, для теории упругости [4, 5]. Затем она была модифицирована [6] и применялась к тонким телам в виде неоднородных гофрированных пластин, описываемых трехмерной теорией упругости, как в математической литературе [7, 8] так и в работах по механике [9–13]. Обзор литературы можно найти в [7]. В [14] метод применен в первом приближении для анализа пластического деформирования пластины. В [9] достаточно детально проанализированы первые три приближения в случае упругости. В данной работе приводится обоснование применения метода в задаче упругости с двумя малыми параметрами в случае однородной тонкой сильно ортотропной пластины, и также анализируются три первых приближения. Малыми параметрами являются отношение толщины пластины к характерному размеру в плане и отношение поперечных модулей упругости к модулям в плане пластины. Метод осреднения в таком случае состоит в понижении размерности задачи, также как и все теории пластин и оболочек [15]. Это делается чисто математически и приводит к последовательности двумерных задач в области пластины и одномерных задач в поперечном направлении. Показано, что сильно ортотропная пластина эквивалентна пластине увеличенной толщины с измененными жесткостями.

Отметим, что в приведенной литературе рассматривается обычная линейная теория упругости. Понижение размерности для моментной теории упругости предложено в [16].

Необходимо отметить, что независимо от работ этого направления асимптотический подход применялся к однородным плоским пластинам в первом приближении в ранней работе [17] и ряде последующих работ [18, 19], а также в работах процитированных в [19]. Техника асимптотического исследования, используемая в этих разных циклах работ, разная, но результаты, касающиеся первого приближения и наличия пограничного слоя одинаковы. Применяемый нами асимптотический метод позволяет получить уравнения в области в трех первых приближениях, но не дает граничные условия с тем же асимптотическим приближением. Его достоинство состоит в том, что он дает распределение перемещений и напряжений в поперечном направлении, которое можно использовать при построении конечных элементов не только для однородных пластин, но и для неоднородных, например, слоистых. Три асимптотических приближения не заменяют классические теории пластин, но сравнение представляется интересным, особенно для сильно ортотропных пластин. В частности, сравнение распределения напряжений в поперечном направлении.

Асимптотический метод, конечно, не заменяет другие подходы построения теорий пластин и оболочек, что поясняется в работах В.В. Васильева [20–23] и других авторов, в которых весьма интересно и поучительно описаны история развития теорий пластин, их сравнение и современное состояние.

Если вернуться к данной работе, то следует начать с краткого описания, к чему приводит асимптотический метод. Первое приближение дает классическую теорию Кирхгофа (Кирхгофа–Лява) и приводит к существенной погрешности в случае сильной ортотропии. Второе приближение позволяет находить поперечные сдвиговые деформации и напряжения, а третье – и поперечное нормальное напряжение. Третье приближение аналогично теории третьего порядка [24]. Второе приближение относительно распределения напряжений в поперечном направлении похоже на теории Тимошенко [25] и Рейсснера [26].

В качестве задачи сравнения рассматривается цилиндрический изгиб сильно ортотропной пластины постоянной толщины под действием равномерно-распределенной или сосредоточенной нагрузки. Использование цилиндрического изгиба для сравнения вызвано стремлением найти решения для указанных теорий в виде формул, также как и в трех приближениях асимптотической теории. Результаты численных решений будут получены позже.

Для сравнения рассмотрены примеры, когда модули осредненного материала пластины получены для однослойного волокнистого композита. Дается сравнение реше-

ний по рассмотренным теориям между собой и с конечно-элементным решением трехмерной задачи на мелкой сетке.

2. Применения асимптотического метода в задаче с двумя малыми параметрами. Рассмотрим дифференциальные уравнения равновесия трехмерной теории упругости для ортотропного материала, первые две оси ортотропии которого параллельны первым двум декартовым осям:

$$\begin{aligned} C_{IJKL}u_{K,LJ} + C_{I3K3}u_{K,33} + C_{IJ33}u_{3,3J} &= 0 \\ C_{3J3L}u_{3,JL} + C_{33KL}u_{K,3L} + C_{3333}u_{3,33} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь и далее малые индексы i, j, k, l принимают значения 1, 2, 3, а большие I, J, K, L – значения 1, 2. Все величины предполагаются безразмерными, если не оговорено обратное. Поскольку мы рассматриваем случай сильно ортотропной пластины, то упругие модули в плоскости пластины существенно превышают упругие модули в поперечном направлении. Введем малый параметр δ – параметр, задающий сильную ортотропию. Пусть \tilde{C}_{ijkl} – безразмерные модули одного порядка. Тогда для упругих модулей исходной задачи можно записать:

$$C_{IJKL} = \frac{1}{\delta} \tilde{C}_{IJKL}, \quad C_{I3J3} = \tilde{C}_{I3J3}, \quad C_{IJ33} = \tilde{C}_{IJ33}, \quad C_{3333} = \tilde{C}_{3333}$$

Сделаем замену: $x_I = \tilde{x}_I, x_3 = \sqrt{\delta} \cdot \tilde{x}_3; u_I = \tilde{u}_I, u_3 = \tilde{u}_3/\sqrt{\delta}$. Пусть также все $C_{ijkl}^* = \tilde{C}_{ijkl}$ за исключением $C_{3333}^* = \tilde{C}_{3333}/\delta$. После подстановки в систему (2.1) и тождественных преобразований получим систему в координатах \tilde{x}_i :

$$\begin{aligned} C_{IJKL}^* \tilde{u}_{K,LJ} + C_{I3K3}^* \tilde{u}_{K,33} + C_{IJ33}^* \tilde{u}_{3,3J} &= 0 \\ C_{3J3L}^* \tilde{u}_{3,JL} + C_{33KL}^* \tilde{u}_{K,3L} + C_{3333}^* \tilde{u}_{3,33} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Поскольку $x_I \in [0, 1], x_3 \in [-h/2, h/2]$ и в рамках задачи $\varepsilon = h/l$ (рассматривается пластина длины $l = 1$), следовательно в соответствии со сделанной ранее заменой $\tilde{x}_I \in [0, 1]$ и $\tilde{x}_3 \in [-\tilde{\varepsilon}/2, \tilde{\varepsilon}/2]$, где $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/\sqrt{\delta}$. Таким образом, систему (2.2), записанную в координатах \tilde{x}_i , можно рассматривать как уравнения для пластины большей приведенной толщины $\tilde{\varepsilon}$ с модулями C_{ijkl}^* одного порядка за исключением модуля $C_{3333}^* = \tilde{C}_{3333}/\delta$.

Представляется, что решение системы (2.2) слабо зависит от модуля C_{3333}^* : при значительном изменении данного модуля решение изменяется незначительно. Это приводит к идее применить асимптотический метод к системе (2.2) с модулем C_{3333}^* и выяснить поведение асимптотического решения при $\delta \rightarrow 0$.

3. Асимптотическое разложение. В этой секции мы проверим, применимо ли стандартное асимптотическое разложение перемещений к (2.2) при стремлении второго параметра δ к нулю. При этом для упрощения письма опустим знаки тильды и звездочки, помня, что речь идет о системе (2.2), содержащей малый параметр δ . Как обычно, введем быструю координату $\xi_3 = x_3/\varepsilon$. Далее запятой обозначается производная как по координатам x_i , так и по координате ξ_3 в зависимости от контекста. Решение задачи в перемещениях ищется в виде:

$$\begin{aligned} u_I &= -x_3 w_{,I} + \sum_{m=2}^M \varepsilon^m N_I^{PQ_0 \dots Q_{m-2}} w_{,PQ_0 \dots Q_{m-2}} \\ u_3 &= w + \sum_{m=2}^M \varepsilon^m N_3^{PQ_0 \dots Q_{m-2}} w_{,PQ_0 \dots Q_{m-2}} \end{aligned}$$

Здесь $N_i^{PQ_0 \dots Q_k} = N_i^{PQ_0 \dots Q_k}(\xi_3)$ – функции жесткости, $w = w(x_1, x_2)$ – гладкая составляющая прогиба приведенной пластины, u_i – компоненты перемещений приведенной пластины. Введем функции:

$$P_{ij}^{PQ_0}(\xi_3) = -C_{ijPQ_0}\xi_3 + C_{ijk3}(N_k^{PQ_0})',$$

$$P_{ij}^{PQ_0 \dots Q_{m-1}}(\xi_3) = C_{ijkQ_{m-1}}N_k^{PQ_0 \dots Q_{m-2}} + C_{ijk3}(N_k^{PQ_0 \dots Q_{m-1}})',$$

Все формулы написаны в декартовой системе координат, поэтому индексы написаны вверху или внизу только для удобства различения их смысла. Штрих означает производную по ξ_3 . Подставив общую формулу для трех компонент перемещений в закон Гука, получим:

$$\sigma_{ij} = \sum_{m=1}^M \varepsilon^m P_{ij}^{PQ_0 \dots Q_{m-1}} w_{,PQ_0 \dots Q_{m-1}}$$

Далее подставим полученное выражение в уравнение равновесия (2.2), тогда получим:

$$(P_{i3}^{PQ_0})_{w_{,PQ_0}} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^m [P_{iQ_m}^{PQ_0 \dots Q_{m-1}} + (P_{i3}^{PQ_0 \dots Q_{m-1}Q_m})]_{w_{,PQ_0 \dots Q_{m-1}Q_m}} = 0 \quad (3.1)$$

Чтобы удовлетворить уравнение (3.1), учитывая разный порядок членов относительно ε , приравняем члены при производных прогиба к нулю. Получим задачи для нахождения локальных функций P и N . В первом приближении имеем:

$$(P_{i3}^{PQ_0})' = 0, \quad \xi_3 \in [-0.5, 0.5]$$

$$P_{ij}^{PQ_0} n_j = 0; \quad \xi_3 = -0.5, 0.5 \quad (3.2)$$

Решая систему (3.2), получим ненулевые функции [10, 12]:

$$N_3^{PQ_0}(\xi_3) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\xi_3} \frac{C_{33PQ_0}}{C_{3333}} \xi d\xi$$

Ключевым моментом здесь является стремление $N_3^{PQ_0}$ к конечному пределу, а именно – к нулю при стремлении δ к нулю. Производная имеет вид $(N_3^{PQ_0})' = C_{33PQ_0}\xi_3/C_{3333}$. Поэтому $P_{ij}^{PQ_0}(\xi_3) \rightarrow -C_{ijPQ_0}\xi_3$ при $\delta \rightarrow 0$. С учетом того, что локальная функция $N_3^{PQ_0}$ найдена, можно найти функции $P_{ij}^{PQ_0}$. Решение этой задачи позволяет получить выражения для нахождения компонент σ_{11} , σ_{12} и σ_{22} .

Во втором приближении имеем:

$$P_{iQ_1}^{PQ_0} + (P_{i3}^{PQ_0Q_1})' = 0, \quad \xi_3 \in [-0.5, 0.5]$$

$$P_{ij}^{PQ_0Q_1} n_j = 0; \quad \xi_3 = -0.5, 0.5 \quad (3.3)$$

Решая систему (3.3), получим:

$$N_I^{PQ_0Q_1}(\xi_3) = -\frac{1}{C_{I3I3}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\xi_3} \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\zeta} P_{I Q_1}^{PQ_0}(\eta) d\eta + C_{I33Q_0} N_3^{PQ_0}(\zeta) \right] d\zeta + C$$

Константа C находится из соотношения $\langle N_I^{PQ_0Q_1} \rangle = 0$, где $\langle \Phi(\xi) \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Phi(\xi) d\xi$. Таким об-

разом, через функцию $N_I^{PQ_0Q_1}$ можно найти функции $P_{ij}^{PQ_0Q_1}$, которые позволяют получить выражения для компонент σ_{13} и σ_{23} . Из предыдущей формулы видно, что для локальных функций второго приближения существуют конечные пределы при стремлении δ к нулю. Интересно заметить, что во втором приближении основные напряжения σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} сохраняют линейное распределение, свойственное теории Рейсснера.

Аналогично можно рассмотреть третье приближение:

$$\begin{aligned} P_{iQ_2}^{PQ_0Q_1} + (P_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2}) &= 0, \quad \xi_3 \in [-0.5, 0.5] \\ P_{ij}^{PQ_0Q_1Q_2} n_j &= 0, \quad \xi_3 = -0.5 \\ P_{ij}^{PQ_0Q_1Q_2} n_j &= D_{PQ_0Q_1Q_2} / \varepsilon^3; \quad \xi_3 = 0.5 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Решая систему (3.4), получим:

$$N_3^{PQ_0Q_1Q_2}(\xi_3) = -\frac{1}{C_{3333}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\xi_3} \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\zeta} P_{3Q_2}^{PQ_0Q_1}(\eta) d\eta + C_{33/Q_2} N_I^{PQ_0Q_1}(\zeta) \right] d\zeta + C$$

Константа C снова находится из условия $\langle N_I^{PQ_0Q_1Q_2} \rangle = 0$, означающее что w является средним по толщине прогибом. Так же как в первом приближении функция $N_3^{PQ_0Q_1Q_2}$ стремится к нулю при стремлении к нулю параметра δ . Через функцию $N_I^{PQ_0Q_1Q_2}$ можно найти функции $P_{ij}^{PQ_0Q_1Q_2}$, которые позволят получить выражения для компоненты σ_{33} , а также уточнения компонент σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} . Таким образом, в третьем приближении основные напряжения распределены в поперечном направлении нелинейно, так же как в теории [24].

Так что же меняется для сильно ортотропной пластине при $\delta \rightarrow 0$? Кроме увеличения толщины пластины согласно $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/\sqrt{\delta}$ изменяются модули, входящие в изгибные жесткости D_{II}^{PQ} . Вместо модулей $E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21})$, $E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21})$, $E_2\nu_{12}/(1 - \nu_{12}\nu_{21})$, входящих в закон Гука для плоского напряженного состояния, в пределе при $\delta \rightarrow 0$ получаем модули C_{1111} , C_{2222} , C_{1122} , входящие в двумерный закон Гука при плоском деформированном состоянии. Таким образом, сильно ортотропная пластина эквивалентна более толстой пластине с измененными жесткостями.

4. Моменты и перерезывающие силы. В предыдущей секции с помощью асимптотического разложения удалось удовлетворить уравнениям равновесия с точностью до $O(\varepsilon^3)$. Разрешающее уравнение для прогиба w можно получить из граничного условия на верхней поверхности пластины, где приложена поперечная нагрузка [11]. Однако можно рассмотреть интегральные уравнения равновесия (см., например, [9, 10]) от-

$$\text{носительно поперечных сил } Q_I = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{I3} dx_3 \text{ и моментов } M_{II} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{II} x_3 dx_3:$$

$$M_{II,J} - Q_I = 0 \quad Q_{I,I} + q(x_1, x_2) = 0 \quad (4.1)$$

Представим прогиб в n -м приближении в виде: $w = w^0 + \varepsilon w^1 + \varepsilon^2 w^2 + \dots + \varepsilon^n w^n$.
 В первом приближении получаем $\sigma_{IJ} = \varepsilon P_{IJ}^{PQ} w_{,PQ}^0$. Домножив на x_3 и проинтегрировав по толщине пластины, получим:

$$M_{IJ} = \varepsilon^3 \langle \xi_3 P_{IJ}^{PQ} \rangle w_{,PQ}^0$$

Обозначим $D_{IJ}^{PQ_0 \dots Q_m} = \langle \xi_3 \cdot P_{IJ}^{PQ_0 \dots Q_m} \rangle$ – тензор изгибных жесткостей. Тогда:

$$D_{IJ}^{PQ} w_{,IJPQ}^0 = \frac{1}{\varepsilon^3} M_{IJ,JI} = -\frac{q}{\varepsilon^3} \quad (4.2)$$

Поэтому в дальнейшем нагрузку q заменим на $p\varepsilon^3$.

Во втором приближении имеем:

$$\sigma_{IJ} = \varepsilon P_{IJ}^{PQ} (w^0 + \varepsilon w^1)_{,PQ} + \varepsilon^2 P_{IJ}^{PQQ_1} (w^0 + \varepsilon w^1)_{,PQQ_1}$$

Домножив на x_3 и проинтегрировав по толщине пластины, получим:

$$M_{IJ} = \varepsilon^3 D_{IJ}^{PQ} (w_{,PQ}^0 + \varepsilon w_{,PQ}^1) + \varepsilon^4 D_{IJ}^{PQQ_1} (w_{,PQQ_1}^0 + \varepsilon w_{,PQQ_1}^1)$$

Откуда с учетом уравнения, полученного в первом приближении, получим

$$D_{IJ}^{PQ} w_{,IJPQ}^1 + D_{IJ}^{PQQ_1} w_{,IJPQQ_1}^0 = 0 \quad (4.3)$$

Аналогично, в третьем приближении получаем разложение:

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ} = & \varepsilon P_{IJ}^{PQ} (w^0 + \varepsilon w^1 + \varepsilon^2 w^2)_{,PQ} + \varepsilon^2 P_{IJ}^{PQQ_1} (w^0 + \varepsilon w^1 + \varepsilon^2 w^2)_{,PQQ_1} + \\ & + \varepsilon^3 P_{IJ}^{PQQ_1 Q_2} (w^0 + \varepsilon w^1 + \varepsilon^2 w^2)_{,PQQ_1 Q_2} \end{aligned}$$

Домножив на x_3 и проинтегрировав по толщине пластины, получим:

$$\begin{aligned} M_{IJ} = & \varepsilon^3 D_{IJ}^{PQ} (w_{,PQ}^0 + \varepsilon w_{,PQ}^1 + \varepsilon^2 w_{,PQ}^2) + \varepsilon^4 D_{IJ}^{PQQ_1} (w_{,PQQ_1}^0 + \varepsilon w_{,PQQ_1}^1 + \varepsilon^2 w_{,PQQ_1}^2) + \\ & + \varepsilon^5 D_{IJ}^{PQQ_1 Q_2} (w_{,PQQ_1 Q_2}^0 + \varepsilon w_{,PQQ_1 Q_2}^1 + \varepsilon^2 w_{,PQQ_1 Q_2}^2) \end{aligned}$$

Отсюда с учетом уравнений, полученных в первых двух приближениях, получим:

$$D_{IJ}^{PQ} w_{,IJPQ}^2 + D_{IJ}^{PQQ_1} w_{,IJPQQ_1}^1 + D_{IJ}^{PQQ_1 Q_2} w_{,IJPQQ_1 Q_2}^0 = 0 \quad (4.4)$$

Таким образом прогиб пластины в третьем приближении ищется в виде $w = w^0 = \varepsilon w^1 + \varepsilon^2 w^2$, где функции w^i в соответствии с (4.2), (4.3), (4.4) удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$D_{IJ}^{PQ} w_{,IJPQ}^0 = -p$$

$$D_{IJ}^{PQ} w_{,IJPQ}^1 + D_{IJ}^{PQQ_1} w_{,IJPQQ_1}^0 = 0$$

$$D_{IJ}^{PQ} w_{,IJPQ}^2 + D_{IJ}^{PQQ_1} w_{,IJPQQ_1}^1 + D_{IJ}^{PQQ_1 Q_2} w_{,IJPQQ_1 Q_2}^0 = 0$$

5. Классические теории изгиба пластины. Классическая теория пластин и оболочек, называемая теорией Кирхгофа (К) или Кирхгофа–Лява, соответствует первому приближению асимптотического разложения. Далее для упрощения записи принято: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. На основании предположений поле перемещений в рамках данной теории представляется в виде $u_1 = -z \frac{\partial w}{\partial x}$, $u_2 = -z \frac{\partial w}{\partial y}$, $u_3 = w(x, y)$. Используется закон Гука для плоско-напряженного состояния:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} [E_1 \varepsilon_{11} + E_2 \nu_{12} \varepsilon_{22}] \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} [E_2 \varepsilon_{22} + E_1 \nu_{21} \varepsilon_{11}] \\ \sigma_{12} &= G_{12} \gamma_{12}\end{aligned}\quad (5.1)$$

В результате получается окончательное уравнение

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_3 + 2D_{12}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (5.2)$$

Здесь использованы обозначения:

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \quad D_3 = \frac{E_2 \nu_{12} h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \quad D_{12} = \frac{G_{12} h^3}{12}$$

Асимптотическое исследование, приведенное выше, показывает, что сильная ортотропия пластины эквивалентна увеличению ее толщины. Поэтому теория К-Л не обеспечивает достаточную точность расчетов и целесообразно использовать теории более высокого порядка точности относительно параметра ε . Более точной теорией является теория Рейсснера. Уравнения данной теории построены на менее “жестком” предположении о поведении нормали, которая не остается нормальной к деформированной срединной поверхности, а поворачивается на некоторый угол: $u_1 = -z\varphi_1$, $u_2 = -z\varphi_2$, $u_3 = w(x, y)$. Распределение напряжений σ_{IJ} по толщине пластины остается линейным: $\sigma_{IJ} = \alpha \cdot z$, где $\alpha = M_{IJ}/h^3$. Это предположение позволяет в явном виде выписать выражения для компонент напряжений σ_{i3} . Из уравнений равновесия $\sigma_{IJ,J} + \sigma_{I3,3} = 0$, $\sigma_{I3,I} + \sigma_{33,3} = 0$ следует:

$$\sigma_{I3} = \frac{3Q_I}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right], \quad \sigma_{33} = \frac{3q}{4} \left[\frac{2}{3} + \frac{2z}{h} - \frac{1}{3} \left(\frac{2z}{h} \right)^3 \right] \quad (5.3)$$

В рамках теории Рейсснера вводится сдвиговой корректирующий коэффициент κ :

$$Q_1 = \kappa G_{13} h \left(-\varphi_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad Q_2 = \kappa G_{23} h \left(-\varphi_2 + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (5.4)$$

Сдвиговой коэффициент зависит от формы поперечного сечения и коэффициента Пуассона. Было предложено множество инвариантов для выражения данного коэффициента. В статье [27] приводится обзор результатов расчета сдвигового коэффициента для балок с прямоугольным и круглым поперечным сечением различных авторов, который частично приведен в табл. 1. В статье [28], в которой рассматривается третье приближение, приводится следующий результат для сдвигового коэффициента, исходя из асимптотического разложения: $\kappa = \frac{5}{6} + \frac{29}{6} \frac{\nu}{12 - 7\nu}$. В данной работе используется значение $\kappa = 5/6$, типичное для оригинальных работ Тимошенко, Рейсснера.

Для получения дифференциального уравнения изгиба пластины можно использовать закон Гука как для плоско-напряженного, так и для трехмерного состояния. Используя закон Гука для плоско-напряженного состояния (5.1), получим: $M_{11} =$

$$\begin{aligned}&= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} \cdot z dz = -D_1 \varphi_{1,1} - D_3 \varphi_{2,2}, \quad M_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22} \cdot z dz = -D_2 \varphi_{2,2} - D_3 \varphi_{1,1}, \quad M_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12} \cdot z dz = \\ &= -D_{12} (\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1}).\end{aligned}$$

На основании (4.1) и (5.4) выражения для моментов имеют вид:

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= -D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{6}{5h} \left[\frac{D_1}{G_{13}} - \frac{D_3}{G_{23}} \right] Q_{1,1} - \frac{6D_3}{5G_{23}h} q \\
 M_{22} &= -D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{6}{5h} \left[\frac{D_2}{G_{23}} - \frac{D_3}{G_{13}} \right] Q_{2,2} - \frac{6D_3}{5G_{13}h} q \\
 M_{12} &= -2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{6D_{12}}{5h} \left(\frac{1}{G_{13}} Q_{1,2} + \frac{1}{G_{23}} Q_{2,1} \right)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Как следует из уравнений (4.1):

$$M_{IJ,JI} = -q \tag{5.6}$$

Подставив в данное уравнение (5.6) выражения для моментов системы (5.5), запишем дифференциальное уравнение изгиба ортотропной пластины относительно прогиба и перерезывающих сил в рамках теории Рейсснера (приняв гипотезу плоско-напряженного состояния):

$$\begin{aligned}
 &-D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2(D_3 + 2D_{12}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \\
 &+ \frac{6}{5h} \left[\frac{D_1}{G_{13}} - \frac{D_3}{G_{23}} \right] Q_{1,111} + \frac{6}{5h} \left[\frac{D_2}{G_{23}} - \frac{D_3}{G_{13}} \right] Q_{2,222} + \frac{12D_{12}}{5h} \left[\frac{1}{G_{13}} Q_{1,212} + \frac{1}{G_{23}} Q_{2,112} \right] - \\
 &- \frac{6D_3}{5h} \left[\frac{q_{,11}}{G_{23}} + \frac{q_{,22}}{G_{13}} \right] = -q
 \end{aligned}$$

Теперь используем закон Гука для трехмерного состояния: $\varepsilon_{11} = (\sigma_{11} - \nu_{12}\sigma_{22} - \nu_{13}\sigma_{33})/E_1$, $\varepsilon_{22} = (\sigma_{22} - \nu_{23}\sigma_{33} - \nu_{21}\sigma_{11})/E_2$, $\gamma_{12} = \sigma_{12}/G_{12}$. Поскольку распределение компонент напряжений σ_{i3} по толщине пластины известно, то выразим из записанных выше соотношений компоненты σ_{11} , σ_{12} и σ_{22} через ε_{11} , ε_{22} , γ_{12} и σ_{33} :

$$\sigma_{11} = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} [E_1\varepsilon_{11} + E_2\nu_{12}\varepsilon_{22} + (\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})\sigma_{33}]$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} [E_2\varepsilon_{22} + E_1\nu_{21}\varepsilon_{11} + (\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21})\sigma_{33}]$$

$$\sigma_{12} = G_{12}\gamma_{12}$$

Домножим каждое уравнение на z и проинтегрируем по толщине пластины:

$$M_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} \cdot z \, dz = -\frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \cdot \varphi_{1,1} - \frac{E_2 \nu_{12} h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \cdot \varphi_{2,2} + \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \cdot \frac{qh^2}{10}$$

$$M_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22} \cdot z \, dz = -\frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \cdot \varphi_{2,2} - \frac{E_1 \nu_{21} h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \cdot \varphi_{1,1} + \frac{\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \cdot \frac{qh^2}{10}$$

$$M_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12} \cdot z \, dz = -\frac{G_{12} h^3}{12} (\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1})$$

Далее используем уравнения (5.4), связывающие функции φ_I и w_I . Выражая из них φ_I через w_I , с использованием первой группы уравнений (4.1) получим соотношения относительно прогиба и перерезывающих сил:

$$\begin{aligned} M_{11} &= -D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{6}{5h} \left[\frac{D_1}{G_{13}} - \frac{D_3}{G_{23}} \right] Q_{1,1} + \left[\frac{h^2 (v_{13} + v_{12}v_{23})}{10(1 - v_{12}v_{21})} - \frac{6D_3}{5G_{23}h} \right] q \\ M_{22} &= -D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{6}{5h} \left[\frac{D_2}{G_{23}} - \frac{D_3}{G_{13}} \right] Q_{2,2} + \left[\frac{h^2 (v_{23} + v_{13}v_{21})}{10(1 - v_{12}v_{21})} - \frac{6D_3}{5G_{13}h} \right] q \\ M_{12} &= -2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{6D_{12}}{5h} \left(\frac{1}{G_{13}} Q_{1,2} + \frac{1}{G_{23}} Q_{2,1} \right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Теперь подставив в уравнение (5.6) выражения для моментов системы (5.7), получим дифференциальное уравнение изгиба пластины относительно прогиба и перерезывающих сил в рамках теории Рейсснера с использованием закона Гука для трехмерного состояния:

$$\begin{aligned} & -D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2(D_3 + 2D_{12}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \\ & + \frac{6}{5h} \left[\frac{D_1}{G_{13}} - \frac{D_3}{G_{23}} \right] Q_{1,111} + \frac{6}{5h} \left[\frac{D_2}{G_{23}} - \frac{D_3}{G_{13}} \right] Q_{2,222} + \frac{12D_{12}}{5h} \left[\frac{1}{G_{13}} Q_{1,212} + \frac{1}{G_{23}} Q_{2,112} \right] + \\ & + \frac{6}{5h} \left[\frac{h^3 (v_{13} + v_{12}v_{23})}{12(1 - v_{12}v_{21})} - \frac{D_3}{G_{23}} \right] q_{,11} + \frac{6}{5h} \left[\frac{h^3 (v_{23} + v_{13}v_{21})}{12(1 - v_{12}v_{21})} - \frac{D_3}{G_{13}} \right] q_{,22} = -q \end{aligned}$$

Поскольку выполняется $Q_{1,111} + Q_{2,222} + Q_{1,212} + Q_{2,112} = \Delta(Q_{1,1} + Q_{2,2}) = -\Delta q$, то в рамках изотропного случая $D_1 = D_2 = D_3 + 2D_{12} = D$, следовательно:

$$-D\Delta\Delta w + \frac{h^2}{5}\Delta q - \frac{h^2}{10} \frac{v}{1-v}\Delta q = -q \quad \text{или} \quad D\Delta\Delta w = q - \frac{h^2}{10} \frac{2-v}{1-v}\Delta q$$

Конечно, последнее уравнение имеет смысл, если распределение поверхностной нагрузки достаточно гладкое.

В теории Рейсснера распределение напряжений σ_{IJ} по толщине пластины полагается линейным. Однако с ростом ортотропии линейность нарушается. Теории третьего порядка, в частности, описывают это. В соответствии [24], в рамках данной теории поле перемещений представляется в виде: $u_1 = -z\varphi_1 - \frac{4z^3}{3h^2} \left(-\varphi_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$, $u_2 = -z\varphi_2 - \frac{4z^3}{3h^2} \left(-\varphi_2 + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$, $u_3 = w(x, y)$.

Как и в теории Рейсснера, при получении дифференциального уравнения изгиба пластины в рамках теории третьего порядка можно использовать закон Гука как для плоско-напряженного состояния, так и для трехмерного. Компоненты ε_{IJ} записываются следующим образом:

$$\varepsilon_{11} = -z\varphi_{1,1} - \frac{4z^3}{3h^2} (-\varphi_{1,1} + w_{,11})$$

$$\varepsilon_{22} = -z\varphi_{2,2} - \frac{4z^3}{3h^2} (-\varphi_{2,2} + w_{,22})$$

$$\gamma_{12} = -z(\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1}) - \frac{4z^3}{3h^2}(-\varphi_{1,2} - \varphi_{2,1} + 2w_{,12})$$

Сначала используем закон Гука для плоско-напряженного состояния (5.1), получим соотношения:

$$\begin{aligned} M_{11} &= -\frac{4}{5}(D_1\varphi_{1,1} + D_3\varphi_{2,2}) - \frac{1}{5}(D_1w_{,11} + D_3w_{,22}) \\ M_{22} &= -\frac{4}{5}(D_2\varphi_{2,2} + D_3\varphi_{1,1}) - \frac{1}{5}(D_2w_{,22} + D_3w_{,11}) \\ M_{12} &= -\frac{2D_{12}}{5}(2(\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1}) + w_{,12}) \end{aligned}$$

Далее необходимо получить уравнения, связывающие функции φ_I и $w_{,I}$.

$$Q_I = G_{I3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma_{I3} dz = G_{I3} (-\varphi_I + w_{,I}) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[1 - \frac{4z^2}{h^2} \right] dz = \frac{2G_{I3}h}{3} (-\varphi_I + w_{,I}) \quad (5.8)$$

Выражая из (5.8) функции φ_I через $w_{,I}$ и подставляя в систему, с использованием первой группы уравнений (4.1) получим выражения моментов через прогиб и перерезывающие силы:

$$\begin{aligned} M_{11} &= -D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{6}{5h} \left[\frac{D_1}{G_{13}} - \frac{D_3}{G_{23}} \right] Q_{1,1} - \frac{6D_3}{5G_{23}h} q \\ M_{22} &= -D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{6}{5h} \left[\frac{D_2}{G_{23}} - \frac{D_3}{G_{13}} \right] Q_{2,2} - \frac{6D_3}{5G_{13}h} q \\ M_{12} &= -2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{6D_{12}}{5h} \left(\frac{1}{G_{13}} Q_{1,2} + \frac{1}{G_{23}} Q_{2,1} \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Подставив в уравнение (5.6) выражения для моментов системы (5.9), получим дифференциальное уравнение изгиба пластины, записанное относительно прогиба и перерезывающих сил, в рамках теории третьего порядка для плоско-напряженного состояния:

$$\begin{aligned} & -D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2(D_3 + 2D_{12}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \\ & + \frac{6}{5h} \left[\frac{D_1}{G_{13}} - \frac{D_3}{G_{23}} \right] Q_{1,111} + \frac{6}{5h} \left[\frac{D_2}{G_{23}} - \frac{D_3}{G_{13}} \right] Q_{2,222} + \frac{12D_{12}}{5h} \left[\frac{1}{G_{13}} Q_{1,212} + \frac{1}{G_{23}} Q_{2,112} \right] - \\ & - \frac{6D_3}{5h} \left[\frac{q_{,11}}{G_{23}} + \frac{q_{,22}}{G_{13}} \right] = -q \end{aligned}$$

Видно, что уравнение получается таким же, как и для теории Рейсснера (для плоско-напряженного состояния).

Теперь будем использовать закон Гука для трехмерного состояния. Использование распределения (5.3) для компоненты σ_{33} для теорий Рейсснера и теории третьего порядка обосновано сравнением с конечно-элементным решением. На рис. 1 сравниваются графики σ_{33} . Видно хорошее совпадение. Для всех рассматриваемых примеров

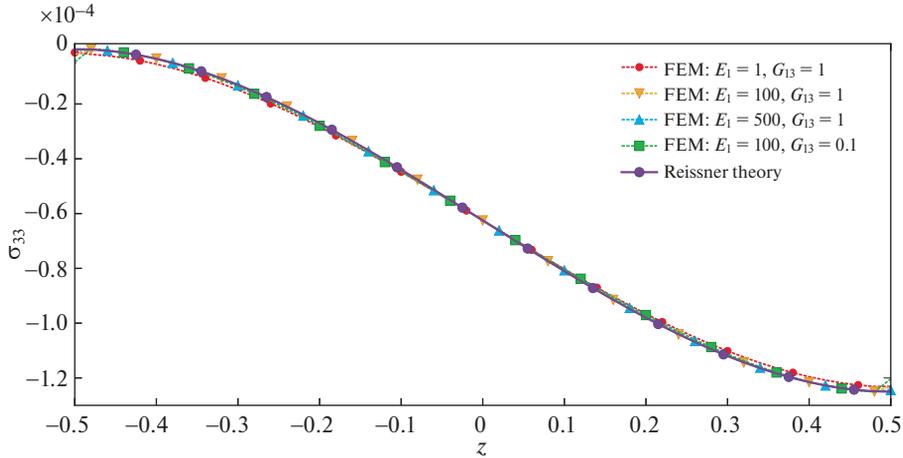


Рис. 1. Распределение компоненты σ_{33} по толщине пластины в сечении $x_1 = 0.5$.

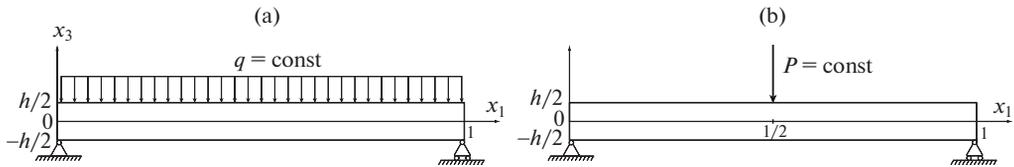


Рис. 2. Виды рассматриваемых нагрузок: (a) равномерно-распределенная; (b) сосредоточенная.

$E_2 = E_3 = 1$ ГПа, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 1/4$, $G_{12} = G_{23} = 1$ ГПа. Поскольку расчеты в рамках МКЭ производились на мелкой сетке, то это решение можно считать точным.

Используя распределение компоненты σ_{33} по толщине пластины, выразим из закона Гука компоненты σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} через ε_{11} , ε_{22} , γ_{12} и σ_{33} и далее получим выражения для моментов:

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= -D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{6}{5h} \left[\frac{D_1}{G_{13}} - \frac{D_3}{G_{23}} \right] Q_{1,1} + \left[\frac{h^2 (\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})}{10(1 - \nu_{12}\nu_{21})} - \frac{6D_3}{5G_{23}h} \right] q \\
 M_{22} &= -D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{6}{5h} \left[\frac{D_2}{G_{23}} - \frac{D_3}{G_{13}} \right] Q_{2,2} + \left[\frac{h^2 (\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21})}{10(1 - \nu_{12}\nu_{21})} - \frac{6D_3}{5G_{13}h} \right] q \\
 M_{12} &= -2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{6D_{12}}{5h} \left(\frac{1}{G_{13}} Q_{1,2} + \frac{1}{G_{23}} Q_{2,1} \right)
 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Подставив в уравнение (5.6) выражения для моментов системы (5.10), получим дифференциальное уравнение изгиба пластины в рамках теории третьего порядка, совпадающее с аналогичным уравнением в теории Рейсснера.

6. Вычислительные примеры. Цилиндрический изгиб пластины В декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ рассматривается цилиндрический изгиб ортотропной пластины постоянной толщины h , закрепленной шарнирно. На верхней поверхности пластины

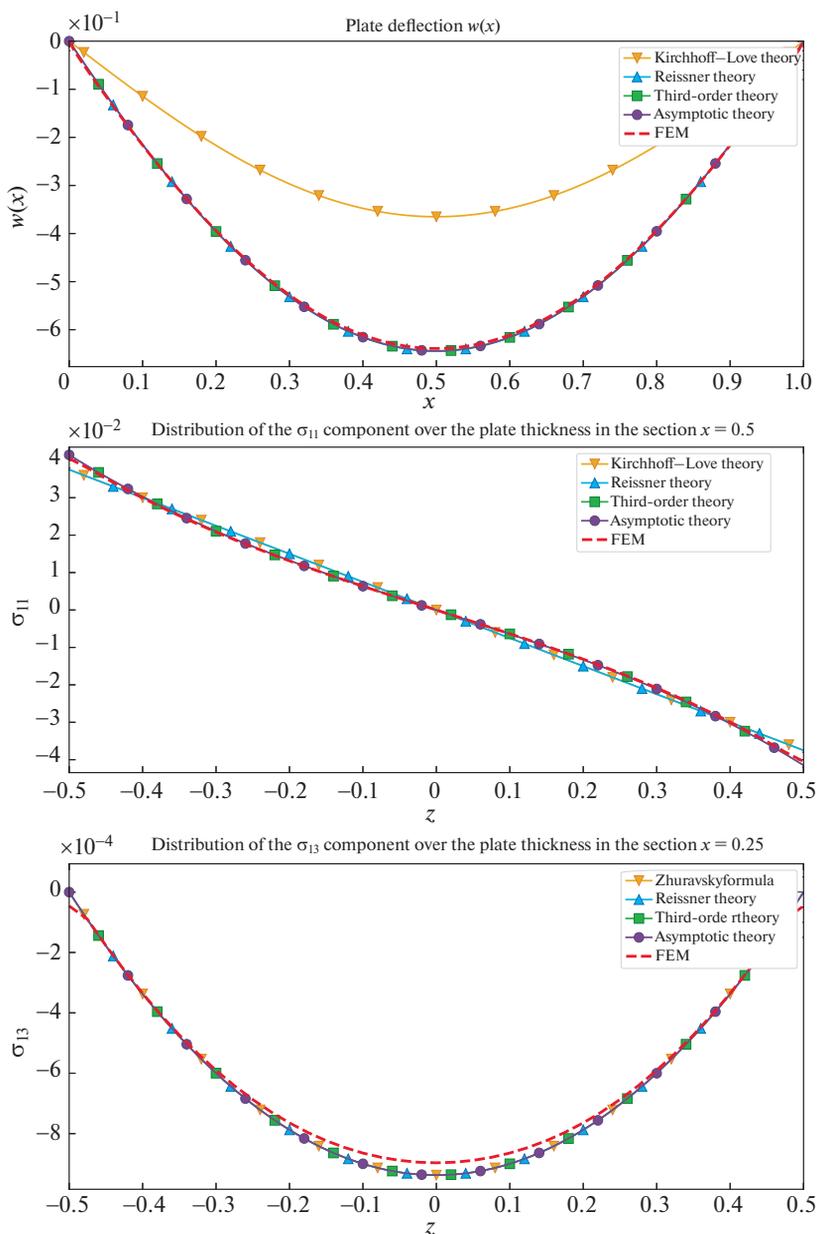


Рис. 3. Равномерно-распределенная нагрузка, материал корда: текстильный корд.

$x_3 = h/2$ действует нагрузка $q(x_1)$ (рис. 2). Размеры задачи представлены безразмерными, поэтому h фактически есть h/l_1 . Рассмотренные задачи являются статически определенными.

Равномерно-распределенная нагрузка. Для $q(x) = -ph^3 = \text{const}$, из уравнений равновесия имеем:

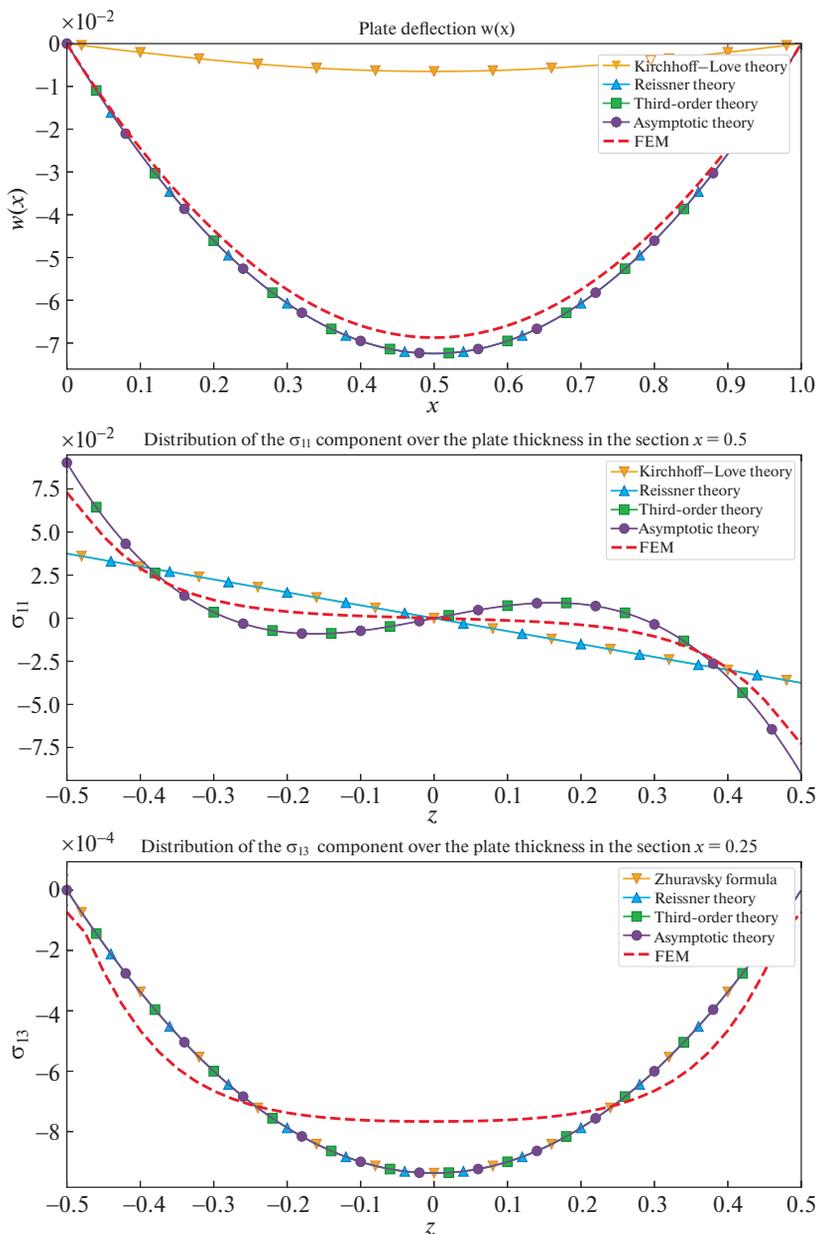


Рис. 4. Равномерно-распределенная нагрузка, материал корда: сталь.

$$Q_1 = Q = ph^3 \left(x - \frac{1}{2} \right), \quad M_{11} = M = \frac{ph^3}{2} x(x-1)$$

Рассматриваемые примеры есть статически определимые, что при нахождении прогиба позволяет использовать распределение поперечной силы и момента. Безусловно, это ограничивает общность рассмотрения.

Рассматривая последовательно первые три приближения и решая уравнения (4.2), (4.3), (4.4), получим прогиб пластины под действием равномерно-распределенной нагрузки в рамках асимптотической теории в третьем приближении:

$$w(x) = \frac{p}{24D_{11}^{11}}(x^4 - 2x^3 + x) + \frac{ph^2 D_{11}^{1111}}{2(D_{11}^{11})^2}(x^2 - x)$$

Прогибы в рамках классических теорий выражаются следующими формулами.

По теории К:

$$w(x) = -\frac{p(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{2E_1}(x^4 - 2x^3 + x)$$

По теории Рейсснера и теории третьего порядка в плоско-напряженном состоянии:

$$w(x) = -\frac{p(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{2E_1}(x^4 - 2x^3 + x) + \frac{3ph^2}{5G_{13}}(x^2 - x)$$

По теориям Рейсснера и теории третьего порядка в трехмерном состоянии:

$$w(x) = -\frac{p(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{2E_1}(x^4 - 2x^3 + x) + \left[\frac{3ph^2}{5G_{13}} - \frac{3ph^2(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})}{5E_1} \right] (x^2 - x)$$

Сосредоточенная нагрузка. Рассмотрим сосредоточенную нагрузку $q(x_1) = Ph^3\delta(x_1 - 1/2)$, где в качестве $\delta(x_1 - 1/2)$ обозначена дельта-функция. Из условия равновесия получаем перерезывающую силу и изгибающий момент:

$$Q_1 = Q = \begin{cases} -\frac{Ph^3}{2}, & x \in [0; 0.5] \\ \frac{Ph^3}{2}, & x \in [0.5; 1] \end{cases} \quad M_{11} = M \begin{cases} -\frac{Ph^3}{2} \cdot x, & x \in [0; 0.5] \\ \frac{Ph^3}{2} \cdot (x - 1), & x \in [0.5; 1] \end{cases}$$

Обозначим за w^- – прогиб пластины $w(x)$ на отрезке $x \in [0; 0.5]$, w^+ – прогиб пластины $w(x)$ на отрезке $x \in [0.5; 1]$. Решая уравнения (4.2), (4.3), (4.4), получим прогиб пластины под действием сосредоточенной нагрузки в рамках асимптотической теории в третьем приближении:

$$w^-(x) = \frac{P}{48D_{11}^{11}}(-4x^3 + 3x) + \frac{Ph^2 D_{11}^{1111}}{2(D_{11}^{11})^2}x$$

$$w^+(x) = \frac{P}{48D_{11}^{11}}(4x^3 - 12x^2 + 9x - 1) + \frac{Ph^2 D_{11}^{1111}}{2(D_{11}^{11})^2}(1 - x)$$

Прогиб по теории К–Л имеет вид:

$$w^-(x) = -\frac{P(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{4E_1}(-4x^3 + 3x)$$

$$w^+(x) = -\frac{P(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{4E_1}(4x^3 - 12x^2 + 9x - 1)$$

В рамках теории Рейсснера при гипотезе плоско-напряженного состояния следует последовательно найти сначала функцию ϕ_1 , а затем и прогиб $w(x)$. Таким образом, получаем

$$w^-(x) = -\frac{P(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{4E_1}(-4x^3 + 3x) - \frac{3Ph^2}{5G_{13}}x$$

$$w^+(x) = -\frac{P(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{4E_1}(4x^3 - 12x^2 + 9x - 1) - \frac{3Ph^2}{5G_{13}}(1 - x)$$

Аналогично рассматривается трехмерное состояние. Оказывается, что функции $\varphi_1(x)$ для плоско-напряженного и трехмерного состояния совпадают, откуда следует совпадение прогиба пластины в рамках теории Рейсснера для трехмерного и плоско-напряженного состояний. А поскольку дифференциальное уравнение в рамках теории Рейсснера идентично теории третьего порядка, то решение в плоско-напряженном и трехмерном состоянии в рамках теории третьего порядка записывается аналогичным образом.

7. Сравнение теорий на примере однослойного волокнистого композита. Рассмотрим однонаправленный волокнистый резинокордный композит [29]. Простейшие формулы для эффективных свойств взяты из [30]:

$$E_1 = E_c\gamma_c + E_r\gamma_r \quad \frac{1}{E_2} = \frac{\gamma_c}{E_c} + \frac{\gamma_r}{E_r} - \gamma_c\gamma_r \frac{\left(\frac{\nu_r}{E_r} - \frac{\nu_c}{E_c}\right)^2}{\frac{\gamma_c}{E_r} + \frac{\gamma_r}{E_c}}$$

$$\nu_{12} = \nu_c\gamma_c + \nu_r\gamma_r \quad \frac{1}{G_{12}} = \frac{\gamma_r}{G_r} + \frac{\gamma_c}{G_c} = \frac{2\gamma_c(1 + \nu_c)}{E_c} + \frac{2\gamma_r(1 + \nu_r)}{E_r}$$

В соответствии с [30], принято, что $G_{13} = G_{12}$. Далее приводятся результаты расчетов для пластины толщины $h = 1/20$ под действием равномерно-распределенной нагрузки плотностью $q = -h^3$ и сосредоточенной нагрузки $P = h^3$. Материалом матрицы является резина с модулями $E_r = 0.015$ ГПа, $\nu_r = 0.499$, в качестве корда используется текстильный корд или сталь. Для резинокордного слоя приведенные выше формулы признаются достаточными по точности. Эффективные свойства волокнистого композита для данных материалов корда представлены в табл. 2.

Поскольку в рамках теории Кирхгофа поиск касательного напряжения σ_{13} не представляется возможным, то используется формула Журавского.

Расчеты, показанные на рис. 3, 4 показывают, что решение по теории третьего порядка совпадает с асимптотическим решением. Прогиб по теории Рейсснера также совпадает с прогибом по отмеченным теориям.

Материал резинокорда с текстильным кордом обладает умеренно большой ортотропией. Он используется в качестве каркаса радиальной шины. Как видно теории высшего порядка дают хорошее приближение. Однако прогиб по теории Кирхгофа получается совсем неточным. Зато изгибающее напряжение совпадает с напряжением по теории Рейсснера.

Однако картина распределения напряжений меняется при переходе к резинокордному материалу со стальным кордом, используемым в качестве брекера. Из рис. 4 видно, что прогибы, полученные по теориям 2-го и 3-го порядка близки друг к другу и к точному решению. Прогиб по теории Кирхгофа совершенно неточен. Но больший интерес вызывает распределение в поперечном направлении нормального изгибающего напряжения. Распределение по теориям Кирхгофа и Рейсснера совпадают и, конечно, линейные. Они сильно отличаются от распределения по теории третьего порядка и асимптотической теории. Последние совпадают между собой, но отличаются от точного решения. Более того, обе теории демонстрируют нефизичные перегибы графика. Распределение поперечного касательного напряжения одинаково для всех

теорий высшего порядка и снова существенно отличается от точного распределения, полученного МКЭ.

Таким образом, можно сделать вывод, что для пластины из сильно ортотропного материала, такой как резинкорд брекера, точное решение целесообразно находить МКЭ, используя кусочно-линейную аппроксимацию в поперечном направлении.

Граница применимости теории. Как видно из продемонстрированных расчетов, при сильно выраженной ортотропии, когда отношение модулей E_1 и G_{13} велико, теории могут проявлять нефизичное поведение компоненты напряжений σ_{11} . Также неприемлемым оказывается асимптотическое приближение. Для цилиндрического изгиба выясним, когда наступает подобный эффект. Для этого запишем явное выражение для компоненты σ_{11} в рамках, например, теории третьего порядка.

Рассматривается цилиндрический изгиб пластины в рамках плоско-напряженного состояния, поэтому $w = w(x)$.

$$\sigma_{11} = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} [E_1 \varepsilon_{11} + E_2 \nu_{12} \varepsilon_{22}] = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left(-z \varphi_{1,1} - \frac{4z^3}{3h^2} (-\varphi_{1,1} + w_{,11}) \right)$$

В соответствии с формулами (5.8), $-\varphi_1 + w_{,1} = 3Q_1/(2G_{13}h)$, откуда

$$-\varphi_{1,1} + w_{,11} = \frac{3Q_{1,1}}{2G_{13}h} = -\frac{3q}{2G_{13}h}$$

Также из системы (5.9) следует:

$$M_{11} = -D_1 \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{6D_1}{5G_{13}h} q$$

В таком случае:

$$-\varphi_{1,1} = -w_{,11} - \frac{3q}{2G_{13}h} = \frac{M_{11}}{D_1} + \frac{6q}{5G_{13}h} - \frac{3q}{2G_{13}h} = \frac{M_{11}}{D_1} - \frac{3q}{10G_{13}h}$$

$$\sigma_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left[z \cdot \left(\frac{M_{11}}{D_1} - \frac{3q}{10G_{13}h} \right) - \frac{4z^3}{3h^2} \cdot \left(-\frac{3q}{2G_{13}h} \right) \right]$$

Поскольку $E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) = 12D_1/h^3$, то:

$$\frac{h^3}{12D_1} \sigma_{11} = \left(\frac{M_{11}}{D_1} - \frac{3q}{10G_{13}h} \right) z + \frac{2q}{G_{13}h^3} z^3$$

Таким образом компонента σ_{11} как функция от z имеет вид: $f(z) = az + bz^3$, где:

$$f = \frac{h^3}{12D_1} \sigma_{11} \quad a = \frac{M_{11}}{D_1} - \frac{3q}{10G_{13}h} \quad b = \frac{2q}{G_{13}h^3}$$

Для того, чтобы функция $f(z) = az + bz^3$ была монотонной и не имела перегибов, необходимо выполнение условия: $a/b > 0$. Действительно, поскольку $f'(z) = a + 3bz^2$ и $f''(z) = 6bz$, то если существует точка, отличная от нуля, в которой производная функции $f(z)$ принимает значение 0, то это точка локального минимума/максимума. А та-

кие точки существуют, когда подкоренное выражение при решении уравнения $f'(z) = 0$ положительно, т.е. $-a/3b > 0$. Таким образом получаем:

$$\left(\frac{M_{11}}{D_1} - \frac{3q}{10G_{13}h} \right) \frac{G_{13}h^3}{2q} > 0 \Rightarrow \frac{G_{13}(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{E_1} > \frac{qh^2}{40M_{11}}$$

Поскольку $\nu_{21} = E_2\nu_{12}/E_1$, тогда окончательно:

$$\frac{G_{13}(E_1 - \nu_{12}^2 E_2)}{E_1^2} > \frac{qh^2}{40M_{11}}$$

В большинстве рассматриваемых случаев $E_1 \gg E_2$, поэтому последнее неравенство принимает вид:

$$\frac{E_1}{G_{13}} < \frac{40M_{11}}{qh^2} \quad (7.1)$$

Таким образом, как показывает условие (7.1) отношение продольного модуля Юнга к поперечному модулю сдвига должно быть ограничено сверху, чтобы не возникло нефизичного распределения изгибающего напряжения.

8. Пример полимерно-волоконистого композита. Рассмотрим еще один пример ортотропного материала, эффективные свойства которого соответствуют однонаправленному полимерно-волоконистому композиту (ПВК), волокна которого направлены вдоль оси 1. Эффективные свойства возьмем по формулам из [31]:

$$E_{11} = \gamma_F E_F + \gamma_M E_M + \frac{4\gamma_F \gamma_M (\nu_F - \nu_M)^2 G_M}{\gamma_M G_M / (k_F + G_F/3) + \gamma_F G_M / (k_M + G_M/3) + 1}$$

$$\nu_{12} = \gamma_M \nu_M + \gamma_F \nu_F + \frac{\gamma_F \gamma_M (\nu_F - \nu_M) [G_M / (k_M + G_M/3) - G_M / (k_F + G_F/3)]}{\gamma_M G_M / (k_F + G_F/3) + \gamma_F G_M / (k_M + G_M/3) + 1}$$

$$K_{23} = k_M + \frac{G_M}{3} + \frac{\gamma_F}{1/[k_F - k_M + 4/3(G_F - G_M)] + \gamma_M / (k_M + 4/3G_M)}$$

$$G_{23} = G_M + \frac{\gamma_F}{1/(G_F - G_M) + \gamma_M (k_M + G_M/3 + 2G_M) / 2G_M (k_M + G_M/3 + G_M)}$$

$$G_{12} = G_M \frac{G_F(1 + \gamma_F) + \gamma_M G_M}{\gamma_M G_F + G_M(1 + \gamma_F)} \quad E_{22} = \frac{4G_{23}K_{23}}{K_{23} + G_{23} + 4\nu_{12}^2 G_{23}K_{23}/E_{11}}$$

$$\nu_{23} = \frac{K_{23} - G_{23} - 4\nu_{12}^2 G_{23}K_{23}/E_{11}}{K_{23} + G_{23} + 4\nu_{12}^2 G_{23}K_{23}/E_{11}}$$

Рассмотрим композит с матрицей в виде эпоксидной смолы и углеродными волокнами. В табл. 3 в соответствии с [30] приводятся упругие модули, используемые при расчете эффективных свойств полидисперсной среды. Эффективные модули ПВК в соответствии с ранее определенными формулами приведены в табл. 4. Далее приводятся результаты расчетов для равномерно-распределенной нагрузки плотностью $q = -\rho h^3$

Таблица 1. Сдвиговой коэффициент κ

Автор	Год	Прямоугольное сечение	Круглое сечение
Timoshenko	1921	2/3	–
Timoshenko	1922	$(5 + 5\nu)/(6 + 5\nu)$	$(6 + 12\nu + 6\nu^2)/(7 + 12\nu + 4\nu^2)$
Goens	1931	5/6	9/10
Olsson	1934	$(20 + 20\nu)/(24 + 15\nu)$	–
Cowper	1966	$(10 + 10\nu)/(12 + 11\nu)$	$(6 + 6\nu)/(7 + 6\nu)$
Tanji et al	1972	$\approx (6 + 12\nu + 6\nu^2)/(7 + 12\nu + 4\nu^2)$	$\approx (6 + 12\nu + 6\nu^2)/(7 + 12\nu + 4\nu^2)$

Таблица 2. Эффективные свойства волокнистого композита для различных материалов корда

Материал корда	γ_c	E_c (GPa)	ν_c	G_c (GPa)	E_1	E_2	ν_{12}	G_{12}
Текстиль	0.25	1.7	0	0.85	0.43	0.0053	0.37	0.0013
Сталь	0.12	200	0.25	80	24.0	0.023	0.47	0.0057

и сосредоточенной нагрузки $q(x_1) = Ph^3\delta(x_1 - 1/2)$, где в качестве $\delta(x_1 - 1/2)$ обозначена дельта-функция.

9. Заключение. Предложено развитие асимптотической теории пластин до третьего порядка точности на случай сильно ортотропного материала. В этом случае в задаче имеется два малых параметра. В частном случае зависимости между параметрами исходную задачу с сильной ортотропией удалось свести к задаче для более толстой пластины, для которой метод асимптотического разложения применим в стандартном виде.

Асимптотическая теория сравнивается с классическими теориями Кирхгофа, Рейсснера и теорией третьего порядка. Показано, что для теории Рейсснера при сдвиговом коэффициенте $\kappa = 5/6$ и теории третьего порядка дифференциальные уравнения прогиба пластины принимают одинаковый вид. Следует отметить, что для однородной пластины используемое асимптотическое представление в первом приближении приводит к дифференциальным уравнениям, аналогичным теории Кирхгофа, а в третьем – теории третьего порядка Амбарцумяна. Теория Рейсснера находится как бы между ними, поскольку использует другое распределение основных напряжений по толщине пластины, чем третье приближение асимптотической теории и теории третьего порядка. Именно, распределение компонент σ_{IJ} по толщине пластины для теории Рейсснера являются линейными, а для асимптотической теории и теории третьего порядка изменяются по кубическому закону.

Таблица 3. Механические свойства матрицы и включений

Материал	γ	E (GPa)	ν	K (GPa)	G (GPa)
Эпоксидная смола	0.5	2.4	0.35	2.7	0.9
Углерод	0.5	850	0.27	616	330.0

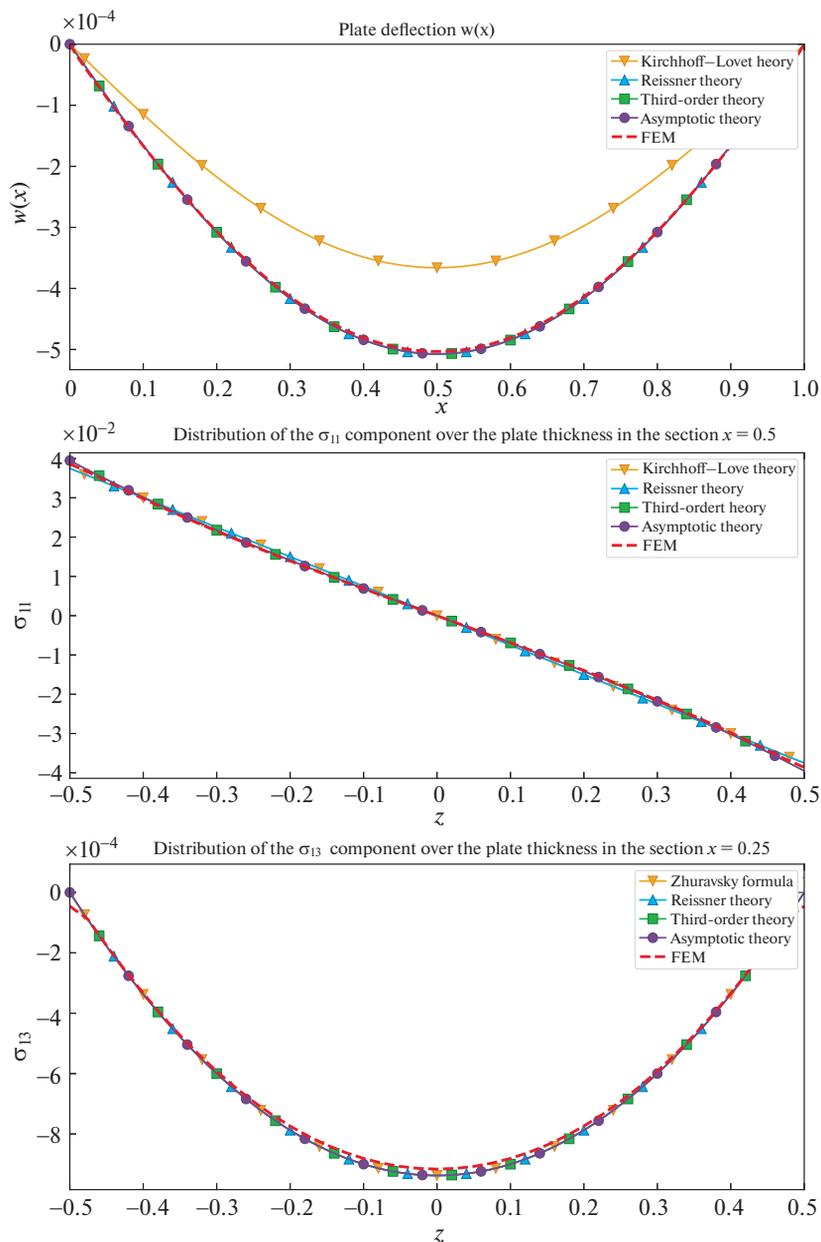


Рис. 5. Полимерно-волоконный композит: равномерно-распределенная нагрузка.

Сравнение теорий проводилось для задачи цилиндрического изгиба для пластины под действием равномерно-распределенной или сосредоточенной нагрузок. Для верификации расчетов использовалось конечно-элементное решение на мелкой сетке.

Показано, что для резинокордного слоя брекера все рассмотренные теории не обеспечивают достаточной точности. При этом теория третьего порядка и асимптотиче-

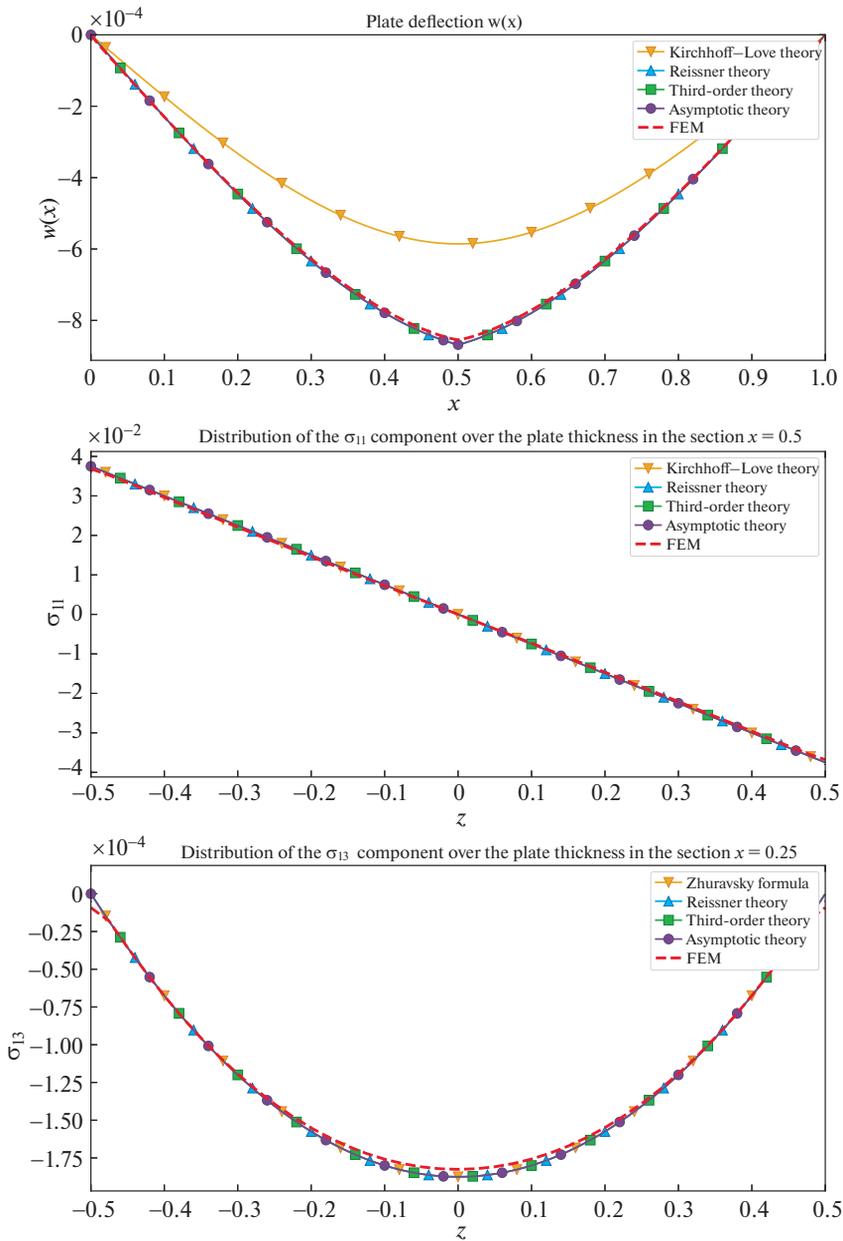


Рис. 6. Полимерно-волоконный композит: сосредоточенная нагрузка.

Таблица 4. Эффективные свойства полидисперсной среды с цилиндрическими включениями

E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	ν_{12}	ν_{23}	G_{12} (GPa)	G_{23} (GPa)
430.0	6.9	0.30	0.49	2.65	2.32

ская теория приводят к нефизическому результату. Таким образом, существует граница применения данных теорий. Для столь сильно ортотропного материала целесообразно использовать кусочно-линейную аппроксимацию перемещений и основных напряжений в поперечном направлении.

Работа выполнена при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Фундаментальные и прикладные исследования космоса”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Янковский А.П. Применения явного по времени метода центральных разностей для численного моделирования динамического поведения упругопластически деформируемых гибких армированных пластин // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9. № 3. С. 279–297.
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.3.24>
2. Sanchez-Palencia E. Non-homogeneous media and vibration theory. Berlin: Springer Berlin Heidelberg. 1980. 398 p.
<https://doi.org/10.1007/3-540-10000-8>
3. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука. 1984. 352 с.
4. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1984. 336 с.
5. Аннин Б.Д., Каламкаров А.Л., Колпаков А.Г., Партон В.З. Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций. Новосибирск: Наука: Сиб. издат. 1993. 256 с.
6. Kohn R.V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness // Int. J. Solids Struct. 1984. V. 20. № 4. P. 333–350.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(84\)90044-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(84)90044-1)
7. Levinski T., Telega J.J. Plates, laminates and shells. New York: World Scientific. 2000.
<https://doi.org/10.1142/3539>
8. Панасенко Г.П., Резцов М.В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. № 5. С. 1061–1065.
9. Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 71–79.
10. Шешенин С.В. Применение метода осреднения к пластинам, периодическим в плане // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2006. С. 47–51.
11. Шешенин С.В., Скопцов К.А. Теория пластин, основанная на методе асимптотических разложений. // Мат. модел. числ. мет. 2014. № 2. С. 49–61.
12. Скопцов К.А., Шешенин С.В. Асимптотический анализ слоистых пластин и пологих оболочек // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 1. С. 161–171.
13. Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости // Инженерный журнал: наука и инноваций. 2013. Т. 7. № 19. С. 17.
<https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-7-899>
14. Шешенин С.В., Савенкова М.И. Осреднение нелинейных задач в механике композитов // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2012. № 5. С. 58–61.
15. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких упругих оболочек. М.: Наука. 1976. 512 с.
16. Назаров А.А. Основы теории и методы расчета пологих оболочек. М.: Стройиздат. 1966. 304 с.
17. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластины методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. № 4. С. 668–686.
18. Гольденвейзер А.Л. О приближенных методах расчета тонких упругих оболочек и пластин // Изв. АН. МТТ. 1997. № 3. С. 134–149.
19. Гольденвейзер А.Л. Замечания о статье В.В. Васильева “Об асимптотическом методе обоснования теории пластин” // Изв. АН. МТТ. 1997. № 4. С. 150–157.
20. Васильев В.В. О теории тонких пластин // Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 26–47.

21. *Васильев В.В.* К дискуссии по классической теории пластин // Изв. АН. МТТ. 1995. № 4. С. 140–149.
22. *Васильев В.В.* Об асимптотическом методе обоснования теории пластин // Изв. АН. МТТ. 1997. № 3. С. 150–155.
23. *Васильев В.В.* Классическая теория пластин – история и современный анализ // Изв. АН. МТТ. 1998. № 3. С. 46–58.
24. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1974. 448 р.
25. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Наука. 1966. 636 с.
26. *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech. 1945. V. 12. № 2. P. A69–A77.
<https://doi.org/10.1115/1.4009435>
27. *Kaneko T.* On Timoshenko's correction for shear in vibrating beams // J. Phys. D: Appl. Phys. 1975. V. 8. № 16. P. 1927–1936.
<https://doi.org/10.1088/0022-3727/8/16/003>
28. *Шешенин С.В.* Модуль механики композитов для пакета FYDESIS // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18. № 3. С. 506–523.
<https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-3-506-523>
29. *Sheshenin S.V., Du Y.* Homogenization of rubber-cord layers at moderately large deformations // Mech. Compos. Mater. 2021. V. 57. 3. P. 275–286.
<https://doi.org/10.1007/s11029-021-09953-2>
30. *Vasiliev V.V., Morozov E.V.* Mechanics and analysis of composite materials. Oxford: Elsevier Science Techn. 2001. 424 p.
31. *Кристенсен Р.М.* Введение в механику композитов. М.: Мир. 1982. 336 с.

УДК 538.911

НОВЫЙ МЕТОД РЕЛАКСАЦИИ УПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ РОСТЕ ГЕТЕРОЭПИТАКСИАЛЬНЫХ ПЛЕНОК

© 2023 г. А. А. Корякин^a, С. А. Кукушкин^{b,*}, А. В. Осипов^a,
Ш. Ш. Шарофидинов^c, М. П. Щеглов^c

^aСанкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

^bИнститут проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

^cФизико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: sergey.a.kukushkin@gmail.com

Поступила в редакцию 02.10.2022 г.

После доработки 10.11.2022 г.

Принята к публикации 11.11.2022 г.

В работе на примере роста нитрида алюминия (AlN) на кремнии (Si) ориентации (110) с буферным слоем карбида кремния (SiC) разработан метод выращивания нового типа подложек, позволяющий получать механически ненапряженные полупроводниковые гетероструктуры. Особенность синтеза данного рода подложек заключается в том, что используемые для роста пленок AlN слои SiC синтезированы методом согласованного замещения атомов. При использовании данного метода роста в подложке Si происходит замещение части атомов Si на атомы углерода. В результате замещения атомов первоначально гладкая поверхность Si(110) превращается в поверхность SiC, покрытую призмоподобными фигурами роста, одна из сторон которых является гранью (111), а другая гранью $(11\bar{1})$. Эти грани являются “подложками” для дальнейшего роста полуполярного AlN. Структура и морфология пленок AlN исследована методами рентгеновской дифракции, электронной микроскопии и методом рамановской спектроскопии. Обнаружено, что слой AlN образован сросшимися гексагональными микрокристаллами, рост которых происходит в двух направлениях, причем для обеих ориентаций кристаллов приблизительно выполняется следующее соотношение: $\text{AlN}(10\bar{1}3) \parallel \text{Si}(110)$. Показано, что полуширина рентгеновской кривой качания (FWHM) для дифракционного пика $(10\bar{1}3)$ от микрокристаллов AlN, усредненная по площади образца, составляет 20 угловых минут. Исследования методами рамановской спектроскопии и рентгеновской дифракции показали практически полное отсутствие механических напряжений в слое AlN. Построена теоретическая модель, объясняющая наличие двух ориентаций пленки AlN на SiC/Si(110), обнаруженных в эксперименте, и предложен метод управления их ориентацией. Показано, что данная морфология пленки AlN позволяет использовать ее в качестве буферного слоя для роста гетероструктур на основе нитрида галлия и нитрида алюминия.

Ключевые слова: полуполярный нитрид алюминия, релаксация механических напряжений в наноструктурах, наноструктуры, соединения AlB₅, карбид кремния на кремнии, метод HVPE

DOI: 10.31857/S0572329922600785, EDN: FTEPIC

1. Введение. Исследование механизмов роста эпитаксиальных пленок AlN является важной задачей с нескольких точек зрения. Во-первых, нитрид алюминия, обладающий вюрцитной структурой, является прямозонным полупроводником с большой шириной запрещенной зоны (6.2 эВ). Данное свойство AlN определяет перспективность его использования в качестве материала для изготовления оптоэлектронных приборов, работающих в ультрафиолетовом диапазоне. Во-вторых, тонкие слои AlN используются в качестве буферного слоя при росте GaN [1]. Использование AlN в качестве буферного слоя, например при росте слоев GaN на монокристаллах 6H-SiC, позволяет реализовать послойный рост этих пленок с большей вероятностью, чем островковый рост. Gallium в процессе осаждения на Si может химически с ним взаимодействовать. В результате качество слоя значительно снижается. Предварительно осажденные слои AlN на кремнии предотвращают этот процесс. Нитрид галлия лучше растет на подложке, покрытой слоем AlN, поскольку подложка, предварительно покрытая слоем AlN обладает лучшей адгезией для последующего роста GaN. В процессе роста пленок AlN или GaN на Si возникают большие упругие деформации, вызванные различием в параметрах решеток подложек III-нитридов и Si (более 20%), и различием их коэффициентов термических напряжений. Согласно данным, приведенным в [2] при температуре 950°C–1050°C коэффициент термического расширения гексагонального AlN вдоль *a*-оси $5.41 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, а коэффициент термического расширения Si равен $3.9 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. В результате при охлаждении пластины Si со слоем AlN от температуры роста до комнатной температуры, в слое AlN образуются трещины, что делает полупроводниковую пленку AlN не пригодной для дальнейшего использования. Поэтому одной из главных проблем над решением которой бьются исследователи, занимающиеся ростом AlN на Si является проблема создания технологии роста AlN, при которой бы полностью отсутствовали упругие деформации в растущем слое пленки. Однако, до сих пор эту задачу не удалось решить. Одним из возможных путей решения данной проблемы является создание промежуточного буферного слоя между Si и пленкой AlN. Как было показано в работах [3, 4] хорошим буферным слоем для роста AlN на Si является слой SiC. Кристаллы SiC обладают параметрами решетки близкими к параметрам решеток таких материалов, как GaN и AlN. Между SiC и Si разница в параметрах решеток достигает 19%, а коэффициент термического расширения кубического SiC равен $4.5 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ [2]. Таким образом, не удается полностью сформировать слой AlN на подложке Si даже со слоем SiC.

В последнее время разработаны различные способы, позволяющие нивелировать разницу в параметрах решеток пленки и подложки [5, 6]. Основная идея этих методов – внедрение пор в приповерхностный слой подложки. Действительно, с одной стороны, поры могут играть роль “демпфера” напряжений возникающих, из-за разницы в коэффициентах термических расширений пленки и подложки, поскольку уменьшается площадь контакта пленки с кристаллической поверхностью подложки. С другой стороны, поры являются интенсивным стоком материала пленки, поскольку, согласно термодинамике, энергетически выгодно зарождение новой фазы на разного рода дефектах. Делая ставку на подобные методы роста, исследователи, однако, сталкиваются со следующей проблемой. Для получения совершенных по структуре слоев необходимо с одной стороны, чтобы пленки были ориентированными, а с другой стороны не напряженными. При обычном способе роста очень сложно удовлетворить этим двум условиям. Ориентацию пленки задает кристаллическая структура подложки. Чем больше отличается кристаллическая структура и симметрия пленки от структуры и симметрии подложки, тем более напряженной и более дефектной вырастает пленка. Даже в том случае, если структуры пленки и подложки близки, но поверхность подложки неоднородна и содержит различного рода дефекты, царапины, ямки травления и т.п., качество растущего слоя пленки резко ухудшается. Поэтому внедрение пор в

поверхностный слой подложки, несмотря на возможность релаксации механических напряжений, резко снижает ориентационные свойства поверхности подложки. Сложность получения упорядоченного слоя пленки заложена в самой природе фазового превращения первого рода, в результате которого получаются пленки. Процесс фазового превращения – случайный процесс. При гомогенном превращении одной фазы в другую по всему объему старой фазы возникают маленькие зародыши новой фазы. Каждый из них имеет свои размеры. Сливаясь друг с другом, они образуют поликристаллический материал. Именно для уменьшения случайности процесса зарождения при выращивании монокристаллов используют, так называемые затравки – маленькие, специальным образом приготовленные кристаллы, на которые осаждается материал материнской фазы. При росте гомогенных кристаллов, условия осаждения подбирают таким образом, чтобы материнская фаза осаждалась только на затравке, а в окружающем пространстве новая фаза не зарождалась. При гетероэпитаксиальном росте пленок на кристаллических подложках роль затравки играет подложка. Кристаллическая структура подложки отличается от структуры пленки. Площадь поверхности подложки, как правило, большая. Поскольку подложки обладают большой площадью поверхности, то процесс зарождения новой фазы, протекает также случайным образом. При наличии подложки зарождение происходит не во всем объеме старой фазы, а на поверхности подложки. Таким образом, поры, находящиеся на поверхности подложки только увеличивают случайность зарождения и часто ухудшают ориентацию слоев. Таким образом, создание пор в приповерхностных слоях подложки кардинально не решает проблемы получения совершенных по структуре слоев широкозонных полупроводников и, в частности, слоев AlN.

Отметим, что в отличие от искусственно созданных пор, при росте слоя SiC на Si методом разработанным в [3, 4] между слоем SiC и подложкой Si образуются поры сразу в процессе роста пленки SiC и они полностью покрыты слоем SiC, поэтому они не оказывают негативного влияния на структуру SiC. Благодаря наличию пор под слоем SiC, подложка Si со слоем SiC является податливой, эластичной системой, легко подстраивающейся под кристаллические решетки чужеродных материалов. Более того, поскольку слой SiC лежит над поверхностью пор, то часть границы поверхности пленки SiC “не закреплено” механически с подложкой и находится в свободном состоянии. На практике можно вырастить слои SiC, 90% площади которых, будут механически “не закреплены” с подложкой. Это приведет к тому, что в формулах расчета упругих термических деформаций необходимо вместо табличных значений коэффициентов линейного термического расширения ставить их модифицированные значения с учетом площади контакта пленки SiC с подложкой Si. Этот вопрос подробно обсуждался в обзоре [7]. Однако, это не приводит к полной релаксации термических напряжений. Для решения этой проблемы может быть применен следующий подход. Поскольку AlN является гексагональным кристаллом с пространственной группой симметрии $R\bar{6}_3mc$, а пленки SiC, выращенные на Si – кубические (3C–SiC), то рост эпитаксиальных слоев AlN необходимо осуществлять на плоскости SiC(111), иначе будет образовываться поликристаллическая структура. При этом, однако, будут расти полярные пленки AlN, гексагональная c -ось которых будет направлена перпендикулярно плоскости структуры SiC/Si(111), т.е. параллельно плоскости SiC(111) будет формироваться плоскость AlN (0001), и никакой релаксации термических напряжений получить для такой структуры невозможно. Однако, если сформировать кристаллы AlN, c -ось которых наклонена по отношению к плоскости подложки SiC/Si(111) таким образом, чтобы практически из одной точки поверхности подложки росла пара кристаллов AlN, имеющая противоположный к друг к другу наклон, то в этом случае упругие напряжения будут в основном концентрироваться в области “соединения” пленки с подложкой, и они должны быть незначительны, поскольку кристаллы AlN направлены под углом к подложке и, лишь, незначительно в некоторых “точках” со-

прикасаются с подложкой. Если, теперь на поверхности этих наклонных кристаллов вырастить, например, слой GaN, который расположен параллельно подложке SiC/Si, подобно мосту на наклонных сваях, то данная конструкция позволит значительно снизить упругие напряжения в слое GaN. В этом случае слой GaN, может служить хорошей основой для создания различного рода приборных структур на Si.

Синтез кристаллов AlN эпитаксиального качества, *c*-ось которых наклонена по отношению к нормали к подложке, важен также по следующей причине. Хорошо известно, что большинство исследований эпитаксиального роста пленок III-нитридов посвящено изучению роста полярных слоев [8], т.е. росту таких слоев у которых полярная, гексагональная *c*-ось направлена перпендикулярно плоскости подложки. В этом случае, как известно, возникает пьезоэлектрический эффект Штарка [9]. Этот эффект приводит к возникновению зарядов на поверхностях AlN и GaN и их спонтанной поляризации, что не позволяет в полной мере реализовать все потенциальные возможности этих материалов. В связи с этим перспективным направлением исследований представляется создание оптоэлектронных приборов на основе полуполярных слоев III-нитридов. Было установлено [9], что интенсивность эффектов поляризации сильно зависит от кристаллографической ориентации пленки и может быть существенно уменьшена путем синтеза неполярных и полуполярных слоев III-нитридов. Работ, посвященных исследованию начальных стадий роста полуполярных слоев AlN немного, поскольку технология синтеза полуполярных слоев AlN трудоемка. Для роста полуполярных слоев необходимо специальным образом подготовить подложку, чтобы на ее поверхности могли расти полуполярные слои AlN эпитаксиального качества. Подробно описание технологии подготовки подложек к росту полуполярных пленок AlN и GaN, можно найти в обзоре [10]. Полуполярные слои AlN были получены с использованием методов МОС-гидридной эпитаксии (МОСVD) [11–13], хлорид-гидридной газофазной эпитаксии (HVPE) [6, 7, 14], молекулярно-пучковой эпитаксии с плазменной активацией азота (РА МВЕ) [15] и импульсного лазерного напыления [16]. Рост полуполярного AlN был продемонстрирован на подложках $\text{Al}_2\text{O}_3(10\bar{1}0)$ [12, 13, 15, 17], темплейтах SiC/Si(100) [11, 18] и ZnO(1 $\bar{1}$ 02) [16]. В работах [7, 14] и обзоре [14] для роста полуполярных слоев AlN и GaN использовалась гибридная подложка, состоящая из эпитаксиального слоя 3C–SiC, синтезированного на вицинальной поверхности Si, отклоненной от сингулярной плоскости Si(100) на 4–7°. Синтез эпитаксиального слоя 3C–SiC осуществлялся методом согласованного замещения атомов. Данный метод осуществляется при помощи химической обработки поверхности Si в атмосфере газа CO. Подробное описание метода можно найти в обзорах [3, 19].

Рассмотрим преимущества использования гибридных подложек SiC/Si, выращенных методом согласованного замещения атомов для роста полуполярных слоев AlN. Обычно, для роста полуполярных слоев на подложках различного типа при помощи специальных методов травления необходимо сформировать клинообразные фасетки определенной ориентации, на которых могли бы зарождаться кристаллы AlN полуполярной ориентации. Выше было отмечено, что подготовка подложки для роста полуполярных слоев III-нитридов является сложной и дорогостоящей операцией, особенно это относится к подготовке подложек из сапфира и монокристаллического SiC. При использовании метода согласованного замещения атомов [10, 19] формирование продольного клинообразного выступа SiC происходит естественным образом. Для формирования поверхности Si со слоем SiC, полученным методом замещения атомов не используются маскирующие поверхность подложки и химические травящие вещества. В процессе синтеза SiC вицинальные ступени на плоскости Si (100) превращаются в массив параллельных ступеней SiC, представляющих собой треугольные призмы (боковые грани пирамидок), ограниченные плоскостями (111) [10]. Поскольку симметрия подобных призм характерна как для кубических кристаллов, так и гексагональных

кристаллов, то на их поверхностях могут расти кристаллы как с кубической симметрией, так и с гексагональной. И зависеть это будет не от ориентации подложки, что весьма важно, а только от условий роста. Это открывает совершенно новые перспективы для выращивания гексагональных полуполярных кристаллов.

Согласно теоретическим выводам, описанным в работах [10, 20] поверхность Si(110) трансформируется в поверхность SiC, покрытую призмоподобными фигурами роста, одна из сторон которых является гранью (111), а другая гранью (11 $\bar{1}$). Эти фигуры роста сливаются друг с другом, образуют подобие протяженных “горных хребтов”. Остальные плоскости семейства плоскостей (111) перпендикулярны плоскостям (110). Плоскость, расположенная между “горными хребтами”, является гранью (110). Поскольку призмоподобные фигуры покрыты гранью (111) и гранью (11 $\bar{1}$), то зарождение AlN должно происходить на обеих этих гранях. В результате на поверхности подложки SiC/Si(110) будут расти развернутые относительно друг друга кристаллы AlN. Зарождение AlN на части призматической поверхности SiC(110) будет происходить с меньшей вероятностью и, только при больших значениях пересыщенный. В данной работе, будут экспериментально обоснованы сформулированные выше предположения о механизме роста слоя AlN на гибридных подложках SiC/Si(110), а также будет проведен количественный анализ начальных стадий зарождения AlN на поверхности подложки SiC/Si(110) при росте полуполярных слоев AlN методом HVPE и сделаны выводы по управлению их ростом. Подобное рассмотрение позволит решить две упомянутые выше проблемы, а именно: создать новый тип подложки для роста ненапряженных слоев обычной (полярной) ориентации и создать слой AlN полуполярной ориентации для дальнейшего его использования в приборных структурах.

2. Методика эксперимента. Буферный слой был сформирован методом согласованного замещения атомов [10, 19] в атмосфере CO и SiH₄ на подложках Si(110) p-типа с удельным сопротивлением 50 Ом · см. В процессе синтеза SiC происходит химическая реакция между Si и CO



Синтез SiC проводился при температуре 1250°C в течение 15 минут. Расход газов CO и SiH₄ составил 12×10^{-3} л/мин и 0.25×10^{-3} л/мин, соответственно, при давлении CO 2 торр. Перед синтезом кремниевые подложки очищались от оксидов и проходили пассивацию атомами водорода по методике, развитой в работе [21]. После формирования слоя SiC на поверхности подложек Si(110) осуществлялся рост слоя AlN методом HVPE. Формирование AlN при HVPE происходит в результате химической реакции (2.2), протекающей в зоне роста [10]



Рост осуществлялся при температуре 1080°C. Время роста составило 5 минут при потоке NH₃ 1 л/мин, потоке HCl – 0.3 л/мин, который проходил над лодочкой с жидким алюминием и потоке газа-носителя Ar 4 л/мин. Перед ростом слоя AlN подложка SiC/Si(110) выдерживалась в потоке HCl в течение 3 минут при потоке 0.1 л/мин для очистки от загрязнений.

3. Результаты. На рис. 1 представлены типичные РЭМ (растровая электронная микроскопия) изображения поверхности и торцевого скола подложки SiC/Si(110). Видно, что поверхность SiC состоит из протяженных призмоподобных “холмиков” со средним латеральным размером 100 нм и высотой 20 нм. Под слоем SiC толщиной ~70 нм в результате топохимической реакции сформированы поры. Внутренняя поверхность пор покрыта слоем SiC. На рис. 2 приведена электронограмма, полученная от поверхностного слоя пленки SiC электронографом ЭМР-100 с энергией электронов 50 кэВ.

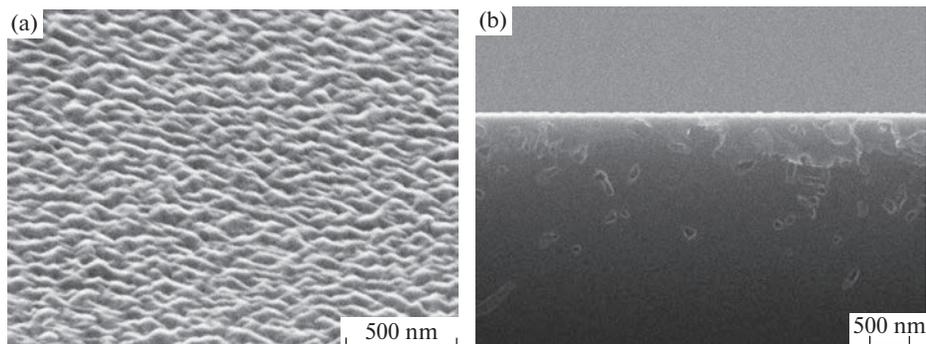


Рис. 1. РЭМ-изображения поверхности (а) и скола (б) подложки SiC/Si(110).

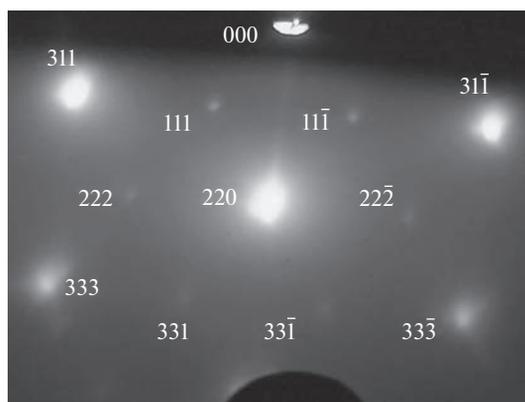


Рис. 2. Электронограмма структуры SiC/Si(110).

При такой энергии электронов глубина их проникновения в образец не превышает ~ 100 нм, поэтому данная картина дифракции соответствует только верхнему слою эпитаксиального SiC. Картины, соответствующие поликристаллической или аморфной структуре, полностью отсутствуют. Таким образом, в результате замещения атомов на поверхности Si формируется монокристаллическая пленка карбида кремния политипа 3C-SiC.

Слой AlN исследовался методами электронной микроскопии и рентгеновской дифрактометрии (XRD). На основе данных исследований можно сделать следующие выводы о структуре слоя AlN. РЭМ-изображения пленки AlN на SiC/Si(110) (рис. 3) показывают, что слой AlN представляет собой сросшиеся гексагональные кристаллы высотой ~ 12 мкм.

Данные рентгеноструктурного анализа, проведенного в режиме $\theta-2\theta$, показали наличие двух симметрично расположенных пиков, соответствующих плоскостям AlN $\{10\bar{1}3\}$. Обнаружено, что выстраивание гексагональных кристаллов AlN на подложке SiC/Si(110) происходит за счет поворота c -оси на $\sim 30^\circ$ относительно нормали к подложке. При этом количество гексагональных кристаллов, развернутых в одну сторону в два раза больше, чем в другую (по интенсивностям пиков отражения). Для отра-

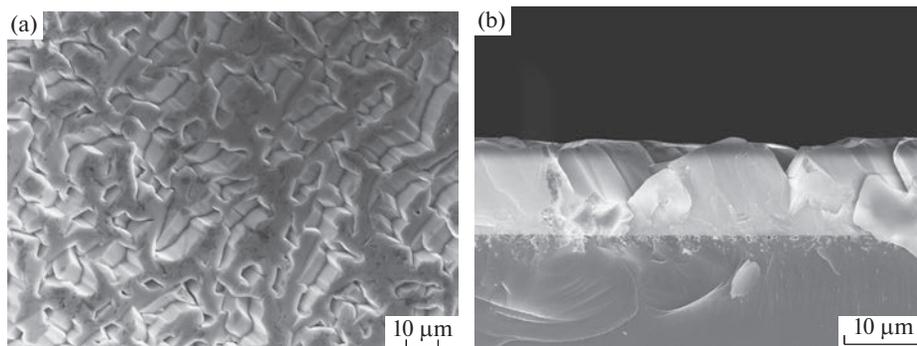


Рис. 3. РЭМ-изображения поверхности структуры AlN/SiC/Si(110) (а) и скола (б).

жающих плоскостей AlN $\{10\bar{1}3\}$ разнонаправленных гексагональных кристаллов отмечена разориентация относительно друг друга на 7° в направлении поворота кристаллов AlN и не более 0.5° в перпендикулярном направлении. Полуширина рентгеновских кривых качания (FWHM) для рефлекса AlN $(10\bar{1}3)$, усредненная по площади образца, составляет 20 и 30 угловых минут для гексагональных кристаллов повернутых в разные стороны. Рентгеновский рефлекс AlN $(10\bar{1}3)$ от структуры AlN/SiC/Si(110) также анализировался методом трехкристальной рентгеновской дифрактометрии (рис. 4, а). Из картины контуров равной интенсивности по характеру асимметрии можно заключить, что в слое AlN присутствуют остаточные напряжения. Величина остаточных деформаций в слое AlN определялась на основе измерения положения рентгеновских пиков AlN(0002) ($\theta = 18^\circ 00' 52''$) и AlN $(10\bar{1}3)$ ($\theta = 33^\circ 01' 45''$) от одного из семейств разнонаправленных кристаллов (рис. 4, б). Были найдены следующие значения параметров кристаллической решетки AlN: $c = 0.49815$ нм и $a = 0.31078$ нм. Это означает, что решетка AlN сжата вдоль направления c -оси и a -оси, причем деформация составляет -1×10^{-4} и -1.3×10^{-3} соответственно. Параметры кристаллической решетки недеформированного кристалла AlN были определены на основе справочных данных [22].

На рис. 5 представлены результаты исследования структуры AlN/SiC/Si(110) методом рамановского рассеяния. Исследования были выполнены с использованием микрорамановского микроскопа Wites Alpha 300R с латеральным разрешением при сканировании ~ 0.5 мкм. Было обнаружено, что пик $E_1(\text{TO})$ четко отделен от основного пика $E_2(\text{high})$, что свидетельствует о высоком кристаллическом совершенстве отдельных кристаллитов, составляющих пленку.

Таким образом, проведенные нами эксперименты указывают на то, что, как и предполагалось, поверхность SiC/Si(110) состоит из призмоподобных “холмиков” ограниченных гранями (111) и $(11\bar{1})$. Наименьшее рассогласование решеток между AlN и SiC, которое, как хорошо известно, приблизительно составляет 1% выполняется для граней AlN(0001) и грани $3\text{C-SiC}\{111\}$. Естественно, поэтому предположить, что зарождение и рост островков AlN будет, в основном, происходить на гранях SiC(111) и SiC $(11\bar{1})$. Именно в этом случае, рассогласование решеток между кристаллами будет минимальным. Отметим, что если зародыш AlN образуется вблизи линии пересечения грани (111) или $(11\bar{1})$ с другой низкоиндексной гранью, например (110), то первый монослой островка формируется также когерентно с данной гранью. Таким образом, на поверхности подложки можно выделить следующие возможные места зарождения

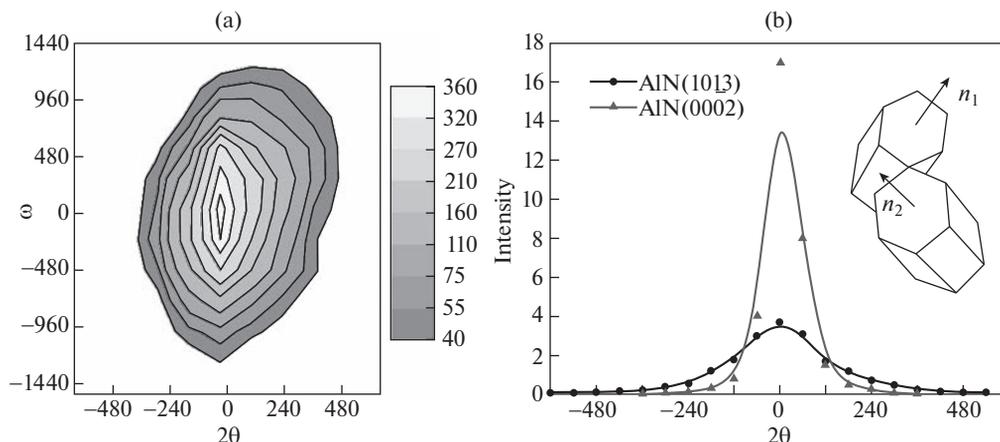


Рис. 4. (а) Карта распределения контуров равной интенсивности для симметричного рефлекса $\text{AlN}(10\bar{1}3)$. Полуширина кривой качения для данного рефлекса равна 21 угловой секунде. 2θ и ω в угловых секундах. (б) Относительная интенсивность рентгеновских пиков $\text{AlN}(0002)$ и $\text{AlN}(10\bar{1}3)$, полученных для одного из двух семейств разнонаправленных гексагональных кристаллов AlN в режиме сканирования $\theta-2\theta$. Интенсивность в относительных единицах, 2θ в угловых секундах. Схематический рисунок на вставке показывает ориентацию осей гексагональных кристаллов: $n_1 n_2 \sim 60^\circ$.

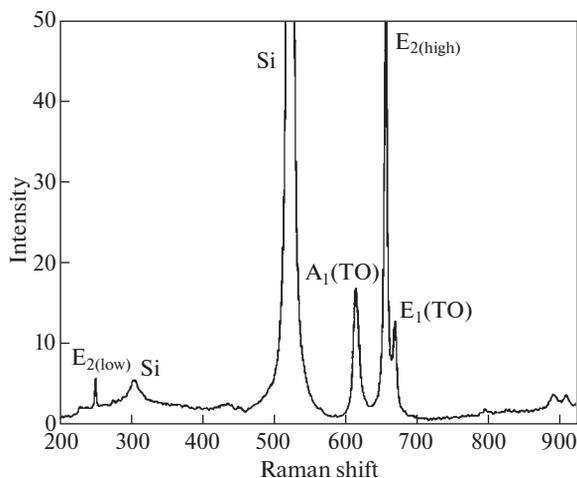


Рис. 5. Типичный спектр рамановского рассеяния для структуры $\text{AlN}/\text{SiC}/\text{Si}(110)$. Интенсивность в относительных единицах, Raman shift, выражен в волновых числах с размерностью в см^{-1} .

островка AlN : на грани (111) , на грани $(11\bar{1})$, а также в углу, образованном гранью (111) или $(11\bar{1})$ и другими низкоиндексными гранями.

Рассмотрим зарождение островка AlN в форме призмы с боковыми гранями $\{1\bar{1}00\}$ на гранях $\text{SiC}(111)$ и $\text{SiC}(11\bar{1})$. Данная форма кристаллов III-нитридов является рав-

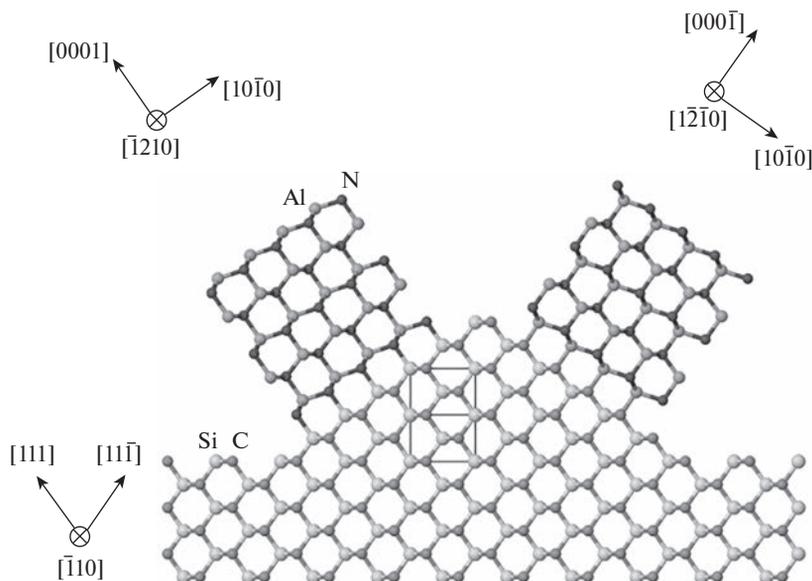


Рис. 6. Модель зарождения AlN на SiC. Показаны два зародыша AlN, растущие в направлении $[0001]$ и $[000\bar{1}]$, также отмечены соответствующие им кристаллографические направления (вверху слева и справа).

новесной [23], причем наличие контакта с поверхностью SiC приводит к изменению высоты кристалла равновесной формы [24]. Атомарная модель островков с двумя возможными вариантами сопряжения решеток AlN и SiC, соответствующими минимальной энергии границы раздела кристаллов с идеальной структурой, приведена на рис. 6. Как было показано в [25], наличие примесных атомов замещения в решетке AlN или в решетке SiC на границе раздела может дополнительно уменьшить ее энергию (например, замещение части атомов Si атомами Al или части атомов C на атомы N). На рис. 6 также изображены идеальные поверхности AlN(0001) и AlN(000 $\bar{1}$) для двух островков, ограниченные атомами Al и N соответственно. Таким образом, кристаллографическая ориентация островков относительно подложки задается следующими соотношениями: AlN $[0001] \parallel \text{SiC}[111]$ и AlN $[\bar{1}210] \parallel \text{SiC}[\bar{1}10]$. Теоретически рассчитанный угол между плоскостями кристаллов AlN(0001) и AlN(000 $\bar{1}$) и плоскостью SiC(110) равен 35.3°. Угол между плоскостью AlN $\{10\bar{1}3\}$ гексагональных кристаллов и плоскостью AlN(0001)/(000 $\bar{1}$) составляет 31.6°. В результате находим, что плоскости AlN $\{10\bar{1}3\}$ отклоняются от плоскости SiC(110) на 3.7°. Это согласуется с экспериментальными данными по измерению угла между плоскостями AlN $\{10\bar{1}3\}$ кристаллов, растущих в двух направлениях (7°).

Как известно [26], интенсивность нуклеации зародышей определяется Больцмановским распределением $I \sim \exp(-\Delta G^*/(kT))$, где ΔG^* – энергия Гиббса образования зародыша новой фазы критического размера. Таким образом, для прогнозирования вероятности зарождения зародыша той или иной формы на гранях SiC(111) и SiC(11 $\bar{1}$), прежде всего, необходимо определить энергию Гиббса образования зародыша AlN. Энергия Гиббса образования трехмерного островка AlN определяется по формуле:

$$\Delta G(m, n) = -3m^2 n \Delta \mu + 3^{3/2} / 2m^2 a^2 \Delta \gamma + 3mnc\gamma_s \quad (3.1)$$

где m и n – радиус основания и высота островка, выраженные через число атомов; $\Delta \mu$ – разность химических потенциалов в расчете на пару атомов AlN; $\Delta \gamma = \gamma_{\text{AlN}} + \gamma_i - \gamma_{\text{SiC}}$, где γ_{AlN} , γ_{SiC} и γ_i – поверхностная энергия верхней грани островка AlN (0001)/(000 $\bar{1}$), грани SiC (111)/(11 $\bar{1}$) и межфазная энергия границы раздела AlN/SiC(111) и AlN/SiC(11 $\bar{1}$); γ_s – поверхностная энергия грани AlN {1 $\bar{1}$ 00}. Барьер нуклеации трехмерного островка AlN равен

$$\Delta G^* = \frac{3^{3/2} a^4 c^2 \gamma_s^2 \Delta \gamma}{2\Delta \mu^2} \quad (3.2)$$

Из формулы (3.2) следует, что режим роста пленки зависит от значения разницы поверхностных энергий $\Delta \gamma$, в которую входят только энергии γ_{AlN} , γ_i и γ_{SiC} (энергия боковых граней островка γ_s не входит) [24]. Если $\Delta \gamma > 0$ трехмерный рост пленки энергетически выгоден, если $\Delta \gamma < 0$, то формируется двумерный слой, т.к. пленка будет смачивать подложку. Приведем также выражения для энергии Гиббса и барьера нуклеации при двумерном зарождении островка AlN:

$$\Delta G(m) = -3m^2 \Delta \mu + 3^{3/2} / 2m^2 a^2 \Delta \gamma + 3mac\gamma_s \quad (3.3)$$

$$\Delta G^* = \frac{3/4 a^2 c^2 \gamma_s^2}{\Delta \mu - 3^{1/2} a^2 \Delta \gamma / 2} \quad (3.4)$$

В формулах (3.3) и (3.4) было использовано приближенное значение межфазной энергии на единицу длины периметра островка, равное $\gamma_s c / 2$. Приравнявая формулы (3.2) и (3.4) для барьеров нуклеации при трехмерном и двумерном зарождении находим, что барьеры нуклеации равны, если $\Delta \mu = 3^{1/2} a^2 \Delta \gamma$ при условии, что $\Delta \gamma > 0$ [24].

Пренебрегая разностью в скоростях роста зародышей, отношение вероятностей зарождения трехмерных зародышей AlN на гранях (111) и (11 $\bar{1}$) равно:

$$\frac{P_{(111)}}{P_{(11\bar{1})}} \approx \frac{\exp(-\Delta G_{(111)}^* / (k_B T))}{\exp(-\Delta G_{(11\bar{1})}^* / (k_B T))} = \exp\left(-\frac{3^{3/2} a^4 c^2 \gamma_s^2 (\Delta \gamma_{(111)} - \Delta \gamma_{(11\bar{1})})}{2\Delta \mu^2 k_B T}\right) \quad (3.5)$$

$\Delta G_{(111)}^*$ и $\Delta G_{(11\bar{1})}^*$ – барьер нуклеации островка AlN на гранях SiC(111) и SiC(11 $\bar{1}$), $\Delta \gamma_{(111)}$ и $\Delta \gamma_{(11\bar{1})}$ – разницы поверхностных энергий при нуклеации на SiC(111) и SiC(11 $\bar{1}$). Из формулы (3.5) следует, что интенсивности зарождения на данных двух гранях равны при условии, что $\Delta \gamma_{(111)} = \Delta \gamma_{(11\bar{1})}$. Если $\Delta \gamma_{(111)} > \Delta \gamma_{(11\bar{1})}$, то скорость зарождения выше на грани SiC(11 $\bar{1}$) и наоборот, если $\Delta \gamma_{(111)} < \Delta \gamma_{(11\bar{1})}$, то скорость зарождения выше на грани SiC(111). Отметим, что в разность $\Delta \gamma_{(111)} - \Delta \gamma_{(11\bar{1})}$ основной вклад дают разности поверхностных энергий AlN и SiC, $\Delta \gamma_{\text{AlN}}$ и $\Delta \gamma_{\text{SiC}}$, разность же энергий границы раздела AlN/SiC, $\Delta \gamma_i$, относительно мала.

Определение поверхностных энергий границ раздела AlN/SiC является сложной задачей. Как правило, расчеты этих значений осуществляются с использованием методами теории функционала плотности (DFT). Следует, однако, учитывать, что эти значения являются приближенными. В работах [25, 27] методом DFT были рассчитаны зна-

чения поверхностных энергий полярных граней $\text{AlN}(0001)$ и $\text{AlN}(000\bar{1})$, а также энергия границы раздела $\text{AlN}/\text{SiC}(111)$ и $\text{AlN}/\text{SiC}(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ (эквивалентной $\text{AlN}/\text{SiC}(11\bar{1})$). Эти значения были получены как функции разности $\mu_{\text{Al}} - \mu_{\text{Al}}^{\text{bulk}}$ (в эВ), где μ_{Al} – химический потенциал алюминия μ_{Al} на поверхности AlN , а $\mu_{\text{Al}}^{\text{bulk}}$ – химический потенциал чистого Al в объемном кристалле. Причем значения разности $\mu_{\text{Al}} - \mu_{\text{Al}}^{\text{bulk}}$ принадлежат интервалу от E_{AlN} до 0, где $E_{\text{AlN}} = -2.8$ эВ – энтальпия формирования AlN (на пару атомов). Таким образом в [25, 27], вычисляется разность между химическим потенциалом атомов верхнего слоя алюминия на поверхности AlN и чистым кристаллическим алюминием, т.е. за начало отсчета принимается химический потенциал чистого алюминия. Поверхностные энергии идеальных поверхностей $\text{SiC}(111)$ (ограниченной атомами Si) и $\text{SiC}(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ (ограниченной атомами C) были вычислены методом DFT в работе [28]: 2.856 Дж/м² и 3.065 Дж/м² для нерелаксированных поверхностей и 1.830 Дж/м² и 2.720 Дж/м² для релаксированных поверхностей. Значения поверхностных энергий $\text{SiC}(111)$ и $\text{SiC}(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ вычислены при условии избытка атомов Si и C на поверхностях. На основании этих данных нами были рассчитаны значения величин $\Delta\gamma$, которые определяют механизм зарождения островков AlN на SiC . Эти данные приведены на рис. 7, как функции разности величин химических потенциалов $\mu_{\text{Al}} - \mu_{\text{Al}}^{\text{bulk}}$.

График на рис. 7 позволяет определить условия, при которых островки AlN будут зарождаться на гранях $\text{SiC}(111)$ и $(11\bar{1})$ либо с одинаковой скоростью, либо их скорости нуклеации будут иметь различные значения. Например условие $\Delta\gamma_{(111)} = \Delta\gamma_{(11\bar{1})}$ будет выполнено, если $\mu_{\text{Al}} - \mu_{\text{Al}}^{\text{bulk}} < -1.4$ эВ (или $\mu_{\text{Al}} - \mu_{\text{Al}}^{\text{bulk}} < -1$ эВ для нерелаксированной поверхности SiC). Таким образом, скорости зарождения трехмерных островков AlN на гранях $\text{SiC}(111)$ и $\text{SiC}(11\bar{1})$ будут равны друг другу, если в процессе роста AlN значения химического потенциала μ_{Al} на поверхности AlN сравнимо с химическим потенциалом μ_{N} на поверхности AlN , выполняется условие $\mu_{\text{Al}} - \mu_{\text{Al}}^{\text{bulk}} \approx \mu_{\text{N}} - \mu_{\text{N}}^{\text{bulk}}$. Из графиков рис. 7 также следует, что если на поверхности $\text{SiC}/\text{Si}(110)$ в процессе роста AlN создать избыток Al , то значение величины $\Delta\gamma_{(11\bar{1})}$ может стать отрицательным т.е. $\Delta\gamma_{(11\bar{1})} < 0$. При таком значении величины $\Delta\gamma_{(11\bar{1})}$, как следует из уравнений (3.2) и (3.4) энергетически выгодным становится двумерный рост слоя AlN .

4. Обсуждение. Важно отметить, что данный анализ проведен без учета влияния примесных адсорбированных частиц на поверхностях SiC и AlN . Если, например, рост AlN осуществляется в атмосфере H_2 , являющимся газом-носителем вместо Ar , то в этом случае на поверхности может быть создан избыток H . Наличие избытка водорода меняет значение поверхностных энергий граней $\text{SiC}(111)$ и $\text{SiC}(11\bar{1})$, так что их разница становится малой [29]. При наличии адсорбированного водорода поверхностная энергия граней AlN также меняется и, согласно расчетам [27], поверхностная энергия $\text{AlN}(000\bar{1})$ становится меньше поверхностной энергии грани $\text{AlN}(0001)$ во всем интервале значений химического потенциала алюминия (азота). Следовательно, в данном случае скорость роста AlN на поверхности $\text{SiC}(11\bar{1})$ будет выше, чем на поверхности $\text{SiC}(111)$. Из проведенного выше анализа (без учета реконструкций поверхностей с H) следует, что в наблюдаемом экспериментально росте AlN на $\text{SiC}/\text{Si}(110)$ на поверхности $\text{SiC}(111)$ и $\text{SiC}(11\bar{1})$ приближенно выполняется условие $\mu_{\text{Al}} - \mu_{\text{Al}}^{\text{bulk}} \approx \mu_{\text{N}} - \mu_{\text{N}}^{\text{bulk}}$, так как количества гексагональных кристаллов, повернутых в одну и в другую стороны, отличаются только в два раза (т.е. являются сравнимыми величинами). Нужно отме-

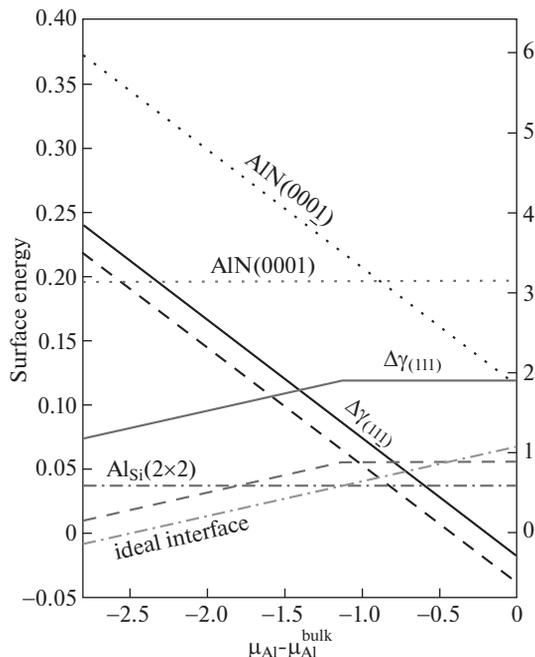


Рис. 7. Зависимости разности поверхностных энергий $\Delta\gamma$ от химического потенциала алюминия при росте AlN на SiC(111) и SiC(11 $\bar{1}$). Показан результат расчета $\Delta\gamma$ с использованием значений поверхностных энергий SiC(111) и SiC(11 $\bar{1}$), соответствующих релаксированным поверхностям (сплошные линии) и нерелаксированным поверхностям (пунктирные линии). Также показаны зависимости поверхностных энергий AlN и энергий границы раздела AlN/SiC (для идеальной границы раздела и при замещении в ячейке 2 × 2 границы раздела одного атома Si на атом Al (Al_{Si}(2 × 2)) [25, 27]. Графики зависимости энергии границы раздела AlN/SiC(11 $\bar{1}$)(Al_{Si}(2 × 2)) и энергии границы раздела AlN/SiC(111) (Al_{Si}(2 × 2)) неразличимы в выбранном масштабе. Значения поверхностных энергий в эВ/Å² (ось слева) и в Дж/м² (ось справа), разность химических потенциалов в эВ.

тить, что на данное отношение также влияет площадь поверхности граней SiC(111) и SiC(11 $\bar{1}$) перед ростом пленки AlN. Без учета реконструкции поверхности находим, что из-за большей энергии граней SiC(11 $\bar{1}$) [28, 29] их площадь должна быть меньше. Однако, с учетом реконструкции поверхности с H, расчеты показывают [29], что поверхностные энергии данных граней имеют близкие значения и, следовательно, их площади также должны быть близкими по величине. Таким образом, замена газа-носителя Ag на H₂ может привести к изменениям в механизме роста полуполярных слоев AlN на гибридной подложке SiC/Si(110) и, в частности, к изменению химической реакции образования AlN [10]. Более того, в присутствии примесных атомов на поверхностях SiC и AlN, может стать энергетически выгодным зарождение кристаллов AlN одной полярности. Таким образом, построенная модель показывает, что изменение отношения потоков компонентов V/III в газовой фазе приводит к изменению данного отношения на поверхности SiC. Путем изменения отношения V/III на подложке мож-

но изменять относительное число гексагональных кристаллов, растущих в различных направлениях.

5. Заключение. В работе исследована структура и морфологическое строение поверхности эпитаксиального слоя SiC, выращенного методом согласованного замещения атомов на поверхности подложки Si(110). Показано, что гибридные подложки SiC/Si(110) могут служить темплейтом для роста методом HVPE механически ненапряженных слоев AlN ориентации $(10\bar{1}3)$. На основе исследования структуры и морфологии слоя AlN, выращенного методом HVPE, предложена кристаллографическая модель, объясняющая наличие двух ориентаций пленки AlN на SiC/Si(110), обнаруженных в эксперименте. Показано, что путем изменения отношения V/III в газовой фазе можно изменять отношение числа кристаллов, растущих в двух данных направлениях. В рамках этой модели объяснено экспериментально установленное соотношение между ориентациями кристаллических решеток AlN и SiC. Полученные структуры AlN/SiC/Si(110) могут использоваться как материал для микроэлектроники, в частности, как темплейты для дальнейшего роста таких соединений как AlGaIn и GaN.

Финансирование работы. А.А. Корякин и А.В. Осипов выполняли свою часть работы при поддержке гранта СПбГУ № 75746688 (теоретическое исследование, исследования методами растровой электронной микроскопии). С.А. Кукушкин выполнял свою часть работы при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания по контракту № FFNF-2021-0001 (рост наноструктур, исследования методами рентгеновской дифракции и рамановской спектроскопии). Исследования проводились с использованием оборудования УНУ “Физика, химия и механика кристаллов тонких пленок” ИПМаш РАН, Санкт-Петербург.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kukushkin S.A., Osipov A.V., Bessolov V.N., Medvedev B.K., Nevolin V.K., Tcarik K.A.* Substrates for epitaxy of gallium nitride: new materials and techniques // *Rev. Adv. Mater. Sci.* 2008. V. 17. P. 1–32.
2. *Barghout K., Chaudhuri J.* Calculation of residual thermal stress in GaN epitaxial layers grown on technologically important substrates // *J. Mater. Sci.* 2004. V. 39. P. 5817–5823.
<https://doi.org/10.1023/B:JMSE.000040094.33095.6f>
3. *Kukushkin S.A., Osipov A.V.* Theory and practice of SiC growth on Si and its applications to wide-gap semiconductor films // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2014. V. 47. P. 313001.
<https://doi.org/10.1088/0022-3727/47/31/313001>
4. *Кукушкин С.А., Осипов А.В., Феоктистов Н.А.* Синтез эпитаксиальных пленок карбида кремния методом замещения атомов в кристаллической решетке кремния // *ФТТ.* 2014. Т. 56. С. 1457–1498.
<https://doi.org/10.1134/S1063783414080137>
5. *Zytkiewicz Z.* Laterally overgrown structures as substrates for lattice mismatched epitaxy // *Thin Solid Films.* 2002. V. 412. P. 64–75.
[https://doi.org/10.1016/S0040-6090\(02\)00315-2](https://doi.org/10.1016/S0040-6090(02)00315-2)
6. *Bessolov V.N., Karpov D.V., Konenkova E.V., Lipovskii A.A., Osipov A.V., Redkov A.V., Soshnikov I.P., Kukushkin S.A.* Pendeo-epitaxy of stress-free AlN layer on a profiled SiC/Si substrate // *Thin Solid Films.* 2016. V. 606. P. 74–79.
<https://doi.org/10.1016/j.tsf.2016.03.034>
7. *Кукушкин С.А.* Эпитаксиальный карбид кремния на кремнии. Метод согласованного замещения атомов (Обзор) // *Журнал общей химии.* 2022. Т. 92.
<https://doi.org/10.31857/S0044460X22040023>
8. *Masui H., Nakamura S., DenBaars S.P., Mishra U.K.* Nonpolar and Semipolar III-Nitride Light-Emitting Diodes: Achievements and Challenges // *IEEE Trans. Electron. Devices.* 2010. V. 57. P. 88–100.
<https://doi.org/10.1109/TED.2009.2033773>

9. *Takeuchi T., Amano H., Akasaki I.* Theoretical Study of Orientation Dependence of Piezoelectric Effects in Wurtzite Strained GaInN/GaN Heterostructures and Quantum Wells // *Jpn. J. Appl. Phys.* 2000. V. 39. P. 413–416.
<https://doi.org/10.1143/JJAP.39.413>
10. *Bessolov V.N., Konenkova E.V., Kukushkin S.A., Osipov A.V., Rodin S.N.* Semipolar gallium nitride on silicon: technology and properties // *Rev. Adv. Mater. Sci.* 2014. V. 38. P. 75–93.
11. *Abe Y., Komiyama J., Isshiki T., Suzuki S., Yoshida A., Ohishi H., Nakanishi H.* Semipolar Nitrides Grown on Si(001) Offcut Substrates with 3C-SiC Buffer Layers // *Mater. Sci. Forum.* 2008. V. 600–603. P. 1281–1284.
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.600-603.1281>
12. *Jo M., Hirayama H.* Effects of Ga Supply on the Growth of (11-22) AlN on m-Plane (10-10) Sapphire Substrates // *PSS (b)*. 2018. V. 255. P. 1700418.
<https://doi.org/10.1002/pssb.201700418>
13. *Shen X.-Q., Kojima K., Okumura H.* Single-phase high-quality semipolar (10–13) AlN epilayers on m-plane (10–10) sapphire substrates // *Appl. Phys. Express.* 2020. V. 13. P. 035502.
<https://doi.org/10.35848/1882-0786/ab7486>
14. *Bessolov V., Kalmykov A., Konenkova E., Kukushkin S., Myasoedov A., Poletaev N., Rodin S.* Semipolar AlN and GaN on Si(100): HVPE technology and layer properties // *J. Cryst. Growth.* 2017. V. 457. P. 202–206.
<https://doi.org/10.1016/j.jcrysgro.2016.05.025>
15. *Lahourcade L., Bellet-Amalric E., Monroy E., Abouzaid M., Ruterana P.* Plasma-assisted molecular-beam epitaxy of AlN(112-2) on m sapphire // *Appl. Phys. Lett.* 2007. V. 90. P. 131909.
<https://doi.org/10.1063/1.2716375>
16. *Ueno K., Kobayashi A., Ohta J., Fujioka H., Amanai H., Nagao S., Horie H.* Room temperature growth of semipolar AlN (1–102) films on ZnO (1–102) substrates by pulsed laser deposition // *PSS (RRL)* 2009. V. 3. P. 58–60.
<https://doi.org/10.1002/pssr.200802263>
17. *Li X., Zhao J., Liu T., Lu Y., Zhang J.* Growth of Semi-Polar (101⁻³) AlN Film on M-Plane Sapphire with High-Temperature Nitridation by HVPE // *Materials.* 2021. V. 14. P. 1722.
<https://doi.org/10.3390/ma14071722>
18. *Bessolov V., Kalmykov A., Konenkov S., Konenkova E., Kukushkin S., Myasoedov A., Osipov A., Pantelev V.* Semipolar AlN on Si(100): Technology and properties // *Microelectron. Eng.* 2017. V. 178. P. 34–37.
<https://doi.org/10.1016/j.mee.2017.04.047>
19. *Kukushkin S.A., Osipov A.V.* Nanoscale Single-Crystal Silicon Carbide on Silicon and Unique Properties of This Material // *Inorganic Materials.* 2021. V. 57. P. 1319–1339.
<https://doi.org/10.1134/S0020168521130021>
20. *Kukushkin S.A., Osipov A.V., Soshnikov I.P.* Growth of epitaxial SiC layer on Si (100) surface of n- and p- type of conductivity by the atoms substitution method // *Rev. Adv. Mater. Sci.* 2017. V. 52. P. 29–42.
21. *Kalinkin I.P., Kukushkin S.A., Osipov A.V.* Effect of Chemical Treatment of a Silicon Surface on the Quality and Structure of Silicon-Carbide Epitaxial Films Synthesized by Atom Substitution // *Semiconductors.* 2018. V. 52. P. 802–808.
<https://doi.org/10.1134/S1063782618060118>
22. *Goldberg Y.* Properties of Advanced Semiconductor Materials: GaN, AlN, InN, BN, SiC, SiGe / Y. Goldberg, Eds. *M.E. Levinshtein, S.L. Rumyantsev, M.S. Shur.* New York: John Wiley & Sons, 2001. 216 P.
23. *Jindal V., Shahedipour-Sandvik F.* Theoretical prediction of GaN nanostructure equilibrium and nonequilibrium shapes // *J. Appl. Phys.* 2009. V. 106. P. 083115.
<https://doi.org/10.1063/1.3253575>
24. *Markov I.V.* Crystal Growth for Beginners. Singapore: Scientific, 2003. 546 p.
25. *Akiyama T., Nakane H., Nakamura K., Ito T.* Effective approach for accurately calculating individual energy of polar heterojunction interfaces // *Phys. Rev. B.* 2016. V. 94. P. 115302.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.94.115302>

-
26. *Kukushkin S.* New phase formation on solid surfaces and thin film condensation // *Prog. Surf. Sci.* 1996. V. 51. P. 1–107.
[https://doi.org/10.1016/0079-6816\(96\)82931-5](https://doi.org/10.1016/0079-6816(96)82931-5)
 27. *Akiyama T., Nakane H., Uchino M., Nakamura K., Ito T.* Structures and Polarity of III-Nitrides: Phase Diagram Calculations Using Absolute Surface and Interface Energies // *PSS (b)*. 2018. V. 255. P. 1700329.
<https://doi.org/10.1002/pssb.201700329>
 28. *Abavare E.K.K., Iwata J.-I., Yaya A., Oshiyama A.* Surface energy of Si(110)- and 3C-SiC(111)-terminated surfaces // *PSS (b)*. 2014. V. 251. P. 1408–1415.
<https://doi.org/10.1002/pssb.201350335>
 29. *Sambonsuge S., Nikitina L.N., Hervieu Y.Y., Suemitsu M., Filimonov S.N.* Silicon Carbide on Silicon (110): Surface Structure and Mechanisms of Epitaxial Growth // *Russ. Phys. J.* 2014. V. 56. P. 1439–1444.
<https://doi.org/10.1007/s11182-014-0197-7>

УДК 535.374

**ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ
ИНВАРИАНТОВ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ
В МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ**

© 2023 г. В. Ю. Марина^{a,*}

^aТехнический университет Молдовы, Кишинев, Молдова

*e-mail: vasilemarina21@yahoo.com.

Поступила в редакцию 22.02.2022 г.

После доработки 19.07.2022 г.

Принята к публикации 25.09.2022 г.

С использованием нелинейных уравнений связи макро- и микросостояний исследуются закономерности изменения предельных значений инвариантов напряжений и деформаций в микронеоднородных средах. Показано, что крайние относительные значения модулей девиаторов тензоров напряжений в поликристаллах с кубической решеткой инвариантны относительно внешних условий обратимого воздействия и зависят только от фактора анизотропии кристалла. В необратимой области деформирования получены аналитические соотношения для объемных и растягивающих нормальных напряжений. Установлен эффект циклического изменения объемных и растягивающих напряжений в части подэлементов при внешнем монотонном нагружении. Показано, что на основе нелинейных уравнений связи сложная картина разрушения материалов может быть описана, применяя на локальном уровне теорию максимальных нормальных напряжений.

Ключевые слова: структура, напряжение, деформация, разрушение, упрочнение, энергия, микронеоднородность, состояние, подэлемент

DOI: 10.31857/S0572329922700015, EDN: FTHSGC

Введение. Успехи, достигнутые при описании сложных явлений протекающих при деформировании микронеоднородных материалов, демонстрируют, что к наиболее плодотворным принципиальным концепциям относится идея, согласно которой представительный объем макроскопически однородного тела представляется в виде бесконечного числа связанных между собой подэлементов имеющих различные термомеханические свойства. Модели предложенные различными авторами отличаются друг от друга принятыми соотношениями между локальными тензорами напряжений \bar{t}_{ij} , деформаций \bar{d}_{ij} и макроскопическими напряжениями t_{ij} , деформациями d_{ij} . Большинство авторов ограничиваются допущением об однородном деформированном состоянии подэлементов $\bar{d}_{ij} = d_{ij}$ или об однородном напряженном состоянии $\bar{t}_{ij} = t_{ij}$. Первая многоэлементная модель среды принадлежит Мазингу [1], в которой процесс деформирования элемента тела имитируется как деформация конечного числа стержней одинаковой жесткости, обладающих свойствами идеальной пластичности с различными пределами текучести и имеющих одинаковую деформацию, что позволило довольно хорошо описать эффект Баушингера. Предполагая постоянство деформации внутри поликристаллического тела Фойгта [2] вычислил макроскопические константы упругости на основе констант упругости кристаллов. Рейсс [3] получил формулы

для расчета константы упругости поликристалла, исходя из предположения о постоянстве напряжений. Распространение модели $\bar{d}_{ij} = d_{ij}$ на вязкопластические процессы деформирования первоначально изотропного материала, обнаруживающего анизотропию деформационного упрочнения, последействия и вторичную ползучесть содержится в [4]. Обычно, для этого направления исследования используется название—структурные модели [5–9]. Для анализа поведения материалов при термомеханических воздействиях используются и модели основанных на ведение внутренних переменных [10]. Исследование пластического течения поликристаллов, выведенного из поведения монокристаллов, проводили Сакс (1928) и Тейлор (1938). И те, и другие подтвердили важные прогнозы поведения поликристаллов. Но из-за очень простых базовых предположений большинство их результатов являются качественными и допускают лишь довольно слабую согласованность с экспериментальными данными.

Кренера [11] открыл новый путь с формулировкой так называемой ”самосогласованной схемы”, относящийся к проблеме включения в бесконечную матрицу. Согласно его схеме каждое зерно поликристалла последовательно рассматривается как включение в ”матрицы” всех других зерен. Поведение поликристалла затем рассчитывается с помощью некоторого адекватного осреднения по всем зернам. В результате установлен следующий линейный закон взаимодействия

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{ij} - t_{ij} &= B_{ijnm}(d_{nm} - \tilde{d}_{nm}), & B_{ijnm} &= B_0\delta_{ij}\delta_{nm} + BI_{ijnm} \\ B &= 2G \frac{7-5\nu}{8-10\nu}, & B_0 &= 2G \frac{3-5\nu}{8-10\nu} \end{aligned}$$

где G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона. Модель Кренера удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными в упругой области деформирования, однако в необратимой области приводит к завышенным внутренним напряжениям.

Для учета естественной тенденции материала к снижению флуктуаций напряжений внутри представительного объема ΔV_0 Бервейе и Заул [12] ввели в анализ так называемую ”пластическую функцию accommodations”. Такой подход возможен только при ограничении изотропного упругопластического взаимодействия между включением и матрицей. В этой модели параметр B уменьшается с ростом пластической деформации почти на два порядка при испытании на одноосное растяжение однофазных поликристаллических материалов. Дальнейшее развитие многоэлементных моделей в рамках линейных соотношений между флуктуациями тензоров напряжений и деформаций связано с разработкой различных способов определения параметров B и B_0 [12, 13 и др.]. Слабым местом исследований данного направления является несогласованность линейных уравнений связи макро- и микросостояний с первым законом термодинамики¹

$$\left\langle \int_0^t \tilde{t}_{ij} \dot{\tilde{d}}_{ij} dt \right\rangle < \int_0^t \langle \tilde{t}_{ij} \rangle \langle \dot{\tilde{d}}_{ij} \rangle dt$$

для любых вариантов изменения параметров B и B_0 , за исключением предельных: $B = B_0 = 0$ или $B = B_0 = \infty$. Модели, основанные на линейных уравнениях связи проблематично использовать для описания процессов разрушения или взаимодействия тепловых и механических полей в рамках связанной теории. Отсутствие взаимосвязи между девиаторными и шаровыми величинами приводит, в частности, к предсказанию о невозможности разрушения при чистом сжатии, что не согласуется с опытом. Обсуждение различных теорий, основанных на линейных уравнениях связи макро- и микросостояний, находится вне сферы этой статьи.

¹ *Марина В.Ю.* Многоэлементная модель среды, описывающая переменные сложные неизотермические процессы нагружения. Дисс. ...д-ра. физ.-мат. наук. Киев, 1991. — 361 с.

В условиях невозможности детального учета взаимодействий материальных частиц в представительном объеме, целесообразно построить уравнения связи макро- и микросостояний, которые бы согласовались с законами термодинамики, учитывали явление самосогласования локальных процессов необратимого деформирования и отвечали условию единственности решения задачи представления материала в модели [8]. В силу того, что линейность взаимосвязи локальных и макроскопических параметров вытекает из формулировки проблемы включения в бесконечную матрицу в [7, 8, 14, 15] был предложен иной подход к построению уравнений связи макро- и микросостояний. В качестве первичного элемента структуры выбирается подэлемент, который отождествляется со множеством материальных частиц внутри представительного объема, имеющих одинаковый тензор необратимой деформации. Частицы одного и того же подэлемента могут иметь различные ориентации и положения в пространстве конгломерата. Количество частиц в каждом подэлементе определяет их вес и не меняется в процессе деформирования. Из данного определения понятия подэлемента следуют более комплексные взаимодействия материальных частиц в представительном объеме чем взаимодействие включения с матрицей. Напряжения и обратимые деформации в подэлементе соответствуют средним значениям напряжений и деформаций возникающих во подмножестве материальных частиц с одинаковыми тензорами необратимых деформаций. В силу этого постулируется: взаимодействия между подэлементами формируются под влиянием лишь одних осредненных связей. При этом предполагается, что условие непрерывности среды обеспечивается путем действия пяти независимых систем скольжения. Экспериментально установленное небазисное скольжение позволяет описать скалярные и тензорные свойства материалов в необратимой области деформирования в обычных для Механики деформируемого твердого тела терминах. Предложенная в работах [7, 8, 14–16] модель базируется на принципах: осредненных связей, ортогональности тензоров флуктуаций напряжений и деформаций, экстремума несоответствия макроскопических мер с подходящими средними значениями микроскопических аналогов. Построенная замкнутая система уравнений удовлетворяет законам термодинамики, учитывает явление самосогласования локальных процессов необратимого деформирования и отвечает требованию единственности решения задачи представления реального материала в модели. Подробное исследование системы, содержащее и правило дискретной механической памяти материала о совокупности характерных моментов предыстории деформирования и нагрева, при циклическом пропорциональном неизотермическом деформировании нестабильных материалов проводилось в [16]. Общие закономерности поведения материалов чувствительных к скорости деформирования исследовалось в [14–16 и др.].

В перечисленных работах [7–9, 14–16] исследовались только процессы деформирования без учета процессов возникновения и накопления микротрещин, которые приводят к разрушению элемента тела. В данной работе наряду с условием текучести рассмотрим и условие разрушения подэлементов. Необратимые деформации, приводят к увеличению дефектов кристаллической решетки, росту уровня напряжений и подготавливают металл к разрушению, а нормальные напряжения растяжения приводят к разрушению. Поэтому для совместного рассмотрения процессов деформирования и разрушения необходимо исследовать закономерность изменения предельных значений трех инвариантов напряжений/деформаций во множестве подэлементов.

1. Принципы перехода от микронапряжений и деформаций к макронапряжениям и деформациям. Для описания поведения неупорядоченной среды фундаментальные понятия тензоров напряжения и деформации вводятся на двух уровнях: материальных частиц, которые обозначаются через $-\tilde{t}_{ij}, \tilde{d}_{ij}$ и на макроскопическом уровне $-t_{ij}, d_{ij}$. На основе геометрических уравнений Коши и уравнения равновесия,

$$\tilde{d}_{ij} = 0.5(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}), \quad \tilde{t}_{ij,j} + \rho b_i = 0$$

а также граничных условий на поверхности ΔS_0 элемента объема ΔV_0

$$\tilde{u}_i / \Delta S_0 = u_i = d_{ij} x_j, \quad d_{ij} = \text{const}, \quad p_i^{(n)} = t_{ij} n_j, \quad t_{ij} = \text{const}$$

Р. Хилла [17] установил следующие уравнения связи микро- и макросостояний

$$t_{ij} = \langle \tilde{t}_{ij} \rangle = \frac{1}{\Delta V_0} \int_{\Delta V_0} \tilde{t}_{ij} dV, \quad d_{ij} = \langle \tilde{d}_{ij} \rangle \quad (1.1)$$

$$\langle \tilde{t}_{ij} \tilde{d}_{ij} \rangle = \langle \tilde{t}_{ij} \rangle \langle \tilde{d}_{ij} \rangle \quad (1.2)$$

где $\langle \cdot \rangle$ – знак осреднения по объему ΔV_0 . Уравнения (1.1), (1.2) необходимы, но недостаточны для построения системы определяющих уравнений на макроскопическом уровне на основе физических соотношений на микроскопическом уровне.

Три уравнения Хилла (1.1), (1.2) можно представить в виде одного выражения [5, 7]

$$\langle (\tilde{t}_{ij} - t_{ij})(\tilde{d}_{ij} - d_{ij}) \rangle = 0 \quad (1.3)$$

Из (1.3) видно, что среднее значение скалярного произведения флуктуаций тензоров напряжений и деформаций в представительном объеме аннулируется. Из опыта известно, что механизмы деформирования в поликристаллических материалах приводят к процессу самосогласования (когерентности) процессов деформирования и нагружения. Для учета явления самосогласования процессов деформирования в работах [8] предложен принцип осредненных связей: взаимодействия между подэлементами в конгломерате формируются под влиянием лишь одних осредненных связей. Исходя из этого положения в [9, 14], был принят постулат об ортогональности тензоров флуктуаций напряжений и деформаций в каждом подэлементе

$$(\tilde{t}_{ij} - t_{ij})(\tilde{d}_{ij} - d_{ij}) = 0 \quad (1.4)$$

Разложив в (1.4) тензоры напряжений и деформаций на девиаторные и шаровые составляющие $\tilde{t}_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} + \tilde{\sigma}_0 \delta_{ij}$, $\tilde{d}_{ij} = \tilde{\epsilon}_{ij} + \tilde{\epsilon}_0 \delta_{ij}$, установим первый тип уравнений связи макро- и микросостояний

$$(\tilde{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij})(\epsilon_{ij} - \tilde{\epsilon}_{ij}) = 3(\tilde{\sigma}_0 - \sigma_0)(\tilde{\epsilon}_0 - \epsilon_0) \quad (1.5)$$

Для флуктуаций девиаторных составляющих примем соотношение

$$\tilde{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij} = B(\epsilon_{ij} - \tilde{\epsilon}_{ij}) \quad (1.6)$$

где B – внутренний параметр, содержащий информацию о микроскопических характеристиках подэлементов.

Из уравнений (1.1), (1.2) видно, что усреднение по объему напряжений, деформаций и их произведений зависит единственным образом от данных на поверхности представительного объема. Однако не все микроскопические переменные обладают этим специфическим свойством. В частности, в [8] показано, что естественные макромеры энергии изменения объема и формы отличаются от усреднения по объему своих микромер. Для конкретизации параметра B в [14–16] предложен принцип экстремума несоответствия макроскопических мер с подходящими средними значениями микроскопических аналогов. В частности

$$\Delta = \langle \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\epsilon}_{ij} \rangle - \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle \langle \tilde{\epsilon}_{ij} \rangle = \text{Extr} \quad (1.7)$$

Выражения (1.1), (1.5)–(1.7), представляют замкнутую систему уравнений взаимосвязи микро- и макро- термомеханических состояний. Они не содержат ссылки на свойства материалов и поэтому действительны как для обратимых, так и необратимых процессов деформирования. На их основе удастся построить систему определяющих уравнений на макроскопическом уровне если известны физические соотношения на микроскопическом уровне.

2. Анализ модели в обратимой области деформирования. В уравнениях связи микро- и макросостояний (1.1), (1.5)–(1.7) фигурируют напряжения и деформации на локальном $(\tilde{t}_{ij}, \tilde{d}_{ij})$ и макроскопическом уровне (t_{ij}, d_{ij}) . При этом, в обратимой области под $\tilde{t}_{ij}, \tilde{d}_{ij}$ подразумеваются средние значения напряжений и деформаций в подмножестве частиц с одинаковой ориентацией кристаллографических осей, относительно глобальной системы координат. В рамках данной формализации на основе локального физического закона

$$\tilde{t}_{ij}^1 = C_{ijnm} \tilde{d}_{nm}^1 \quad (2.1)$$

и соотношений (1.1), (1.5)–(1.7) установим взаимосвязь $t_{ij} \sim d_{ij}$. Здесь C_{ijnm} – тензор упругих констант в кристаллографической системе координат x'_i , $\tilde{t}_{ij}^1, \tilde{d}_{ij}^1$ – компоненты соответствующих тензоров в кристаллографической системе координат. Для однофазных поликристаллических материалов с кубической решеткой из (2.1) и (1.6) находим

$$\tilde{\sigma}_{ij}^1 = \begin{cases} (C_{11} - C_{12}) \tilde{\varepsilon}_{ij}^1, & i = j \\ 2C_{44} \tilde{\varepsilon}_{ij}^1, & i \neq j \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{11}^1 = \frac{(B + 2G) \tilde{r}_{in} \tilde{r}_{im} \varepsilon_{nm}}{C_{11} - C_{12} + B}, \dots, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij}^1 = \frac{(B + 2G) \tilde{r}_{in} \tilde{r}_{jm} \varepsilon_{nm}}{2C_{44} + B}, \quad i \neq j \quad \tilde{r}_{ij} = \cos(x'_i, x_j) \quad (2.3)$$

Принимая во внимание эти значения в глобальной системе координат x_i : $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \tilde{r}_{nj} \tilde{r}_{mi} \tilde{\varepsilon}_{nm}^1$ и заменив в (1.1), (1.7) интегрирование по объему интегрированием по фактору ориентации кристаллической решетки: $\langle \cdot \rangle_V = \langle \cdot \rangle_\Omega$ в [15] установлена следующая система:

$$\frac{5}{2G + B} = \frac{2}{C_{11} - C_{12} + B} + \frac{3}{2C_{44} + B} \quad (2.4)$$

$$-\frac{B}{5G} \left[2 \left(\frac{B + 2G}{C_{11} - C_{12} + B} \right)^2 + 3 \left(\frac{B + 2G}{2C_{44} + B} \right)^2 - 5 \right] \sigma_{nm} \varepsilon_{nm} = \text{Extr} \quad (2.5)$$

Из (2.4) и (2.5), при условии $\sigma_{nm} \varepsilon_{nm} = \text{const}$, следуют формулы для B и G [15]:

$$B = 2C_{44} \sqrt{\frac{2A + 3}{A(3A + 2)}}, \quad A = \frac{2C_{44}}{C_{11} - C_{12}} \quad (2.6)$$

$$G = C_{44} \sqrt{\frac{3A + 2}{A(2A + 3)}} = \sqrt{G_V G_R}, \quad G_V = \frac{3C_{44} + C_{11} - C_{12}}{5}, \quad G_R = \frac{5C_{44} (C_{11} - C_{12})}{4C_{44} + 3(C_{11} - C_{12})}, \quad (2.7)$$

где A – фактор анизотропии монокристалла; G_V – модуль сдвига, полученный Войтом в 1928 году в рамках приближения $\tilde{d}_{ij} = d_{ij}$; G_R – модуль сдвига, полученный Рейсом в 1929 году в рамках приближения $\tilde{t}_{ij} = t_{ij}$. Таким образом, из принципа (1.7) вытекает, что макроскопический модуль сдвига G равен среднегеометрическому значению модулей сдвига, полученных в двух предельных вариантах: однородное напряженное и однородное деформированное состояние.

Важно отметить, что удивительно простая формула (2.7) хорошо согласуется с экспериментом. При использовании “самосогласованной схемы” Кренера, модуль сдвига находится из кубического уравнения [11]

$$G_K^3 + \frac{1}{8}(5C_{11} + 4C_{12})G_K^2 - \frac{C_{44}}{8}(7C_{11} - 4C_{12})G_K - \frac{1}{8}(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})C_{44} = 0 \quad (2.8)$$

В работе [9] проводилось сопоставление значений модулей сдвига, полученных в рамках модели Кренера (2.8) (G_K) и Марина (2.7) (G_M). В результате было установлено следующее фундаментальное неравенство

$$G_K \geq G_M \quad (2.9)$$

Хотя для определения параметра B в модель Кренера используется решение задачи о включении, полученной Эшелби (1957), а в модели Марина – принцип экстремума несоответствия мер (1.7), тем не менее в некоторых случаях удается установить качественные соотношения. Сравнение теоретических и экспериментальных значений G_M и G_K для 23 поликристаллических материалов с кубической решеткой проведенное в [9], показало, что исследуемые модели хорошо согласуются с экспериментальными данными, при этом G_M ближе к G_{exp} , чем G_K .

В рамках исследованной модели, удается описать явления, которые не охватываются многоэлементными моделями основанные на линейных уравнениях связи макро- и микросостояний и в обратимой области деформирования; в частности, эффекты, которые обычно объединяют общим термином “внутреннее трение”. Подобные эффекты обусловлены разнообразными процессами тепловой диссипации энергии, связанных с большими флуктуациями объемных деформаций на микроскопическом уровне.

Флуктуации объемных напряжений и деформаций, возникающих в представительном объеме поликристалла, определяются на основе (1.5), (1.6), (2.6), (2.7)

$$|\bar{\sigma}_0 - \sigma_0| = \sqrt{\frac{1 + \nu}{3} \frac{2 + 3A}{(1 - 2\nu)(3 + 2A)} (\bar{\sigma}'_{ij} - \sigma'_{ij})(\bar{\sigma}'_{ij} - \sigma'_{ij})} \quad (2.10)$$

Из (2.10) следует, что флуктуации объемных напряжений в кристаллах определяются только с точностью до знака. Согласно (2.10) неоднородное поле изменения формы материальных частиц всегда порождает неоднородное поле объемных деформаций

$$\bar{\varepsilon}_0 - \varepsilon_0 = (\bar{\sigma}_0 - \sigma_0)/K, \quad K = \sigma_0/\varepsilon_0 = C_{11} + 2C_{12} \quad (2.11)$$

Следует отметить, что в линейном приближении для флуктуаций шаровых величин применяется соотношение $\bar{\sigma}_0 - \sigma_0 = D(\bar{\varepsilon}_0 - \varepsilon_0)$, которое согласуется с физическим соотношением (2.11) при условии $\bar{\sigma}_0 = \sigma_0$, $\bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0$. Следовательно, линейные уравнения связи микро- и макросостояний для шаровых величин приводят к тем же следствиям, как и предельные варианты – однородное напряженное состояние или однородное деформированное состояние.

Компоненты девиатора тензора напряжений $\bar{\sigma}'_{ij}$ определим на основе выражений (2.2), (2.3), (2.6) и (2.7) [18]

$$\sigma'_{ij}(\psi, \theta, \varphi, A, \sigma_n) = \begin{cases} M_\sigma(A) \sum_{n=1}^3 \tilde{r}_{in}(\psi, \theta, \varphi) \tilde{r}_{jn}(\psi, \theta, \varphi) \sigma_n, & i = j \\ N_\sigma(A) \sum_{n=1}^3 \tilde{r}_{in}(\psi, \theta, \varphi) \tilde{r}_{jn}(\psi, \theta, \varphi) \sigma_n, & i \neq j \end{cases} \quad (2.12)$$

$$M_\sigma(A) = \frac{5(1 + A)}{2 + 3A + \sqrt{A(2 + 3A)(3 + 2A)}}, \quad (2.13)$$

$$N_\sigma(A) = \frac{5(1 + A)\sqrt{A}}{(2 + 3A)\sqrt{A} + \sqrt{(2 + 3A)(3 + 2A)}},$$

где ψ, θ, φ – углы Эйлера (задают ориентацию кристаллической решетки относительно глобальной системы координат), $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные значения девиатора тензора макроскопических напряжений. Для упрощения анализа главные оси тензора t_{ij} выбраны

в качестве глобальной системы координат. Из (2.12), (2.13) следует, что на $\tilde{\sigma}'_{ij}$ влияют только два фактора: коэффициент анизотропии кристалла A и ориентация кристаллической решетки $-(\psi, \theta, \varphi)$. Для изотропных кристаллов $M_\sigma(1) = N_\sigma(1) = 1$, $\tilde{\sigma}'_{ij}(\psi, \theta, \varphi, 1, \sigma_n) = \sigma'_{ij}$.

Для компонент девиатора тензора деформации $\tilde{\varepsilon}'_{ij}$ получаем схожие по виду соотношения [19]

$$\tilde{\varepsilon}'_{ij}(\psi, \theta, \varphi, A, \varepsilon_n) = \begin{cases} M_\varepsilon(A) \sum_{n=1}^3 \tilde{r}'_{in}(\psi, \theta, \varphi) \tilde{r}'_{jn}(\psi, \theta, \varphi) \varepsilon_n, & i = j \\ N_\varepsilon(A) \sum_{n=1}^3 \tilde{r}'_{in}(\psi, \theta, \varphi) \tilde{r}'_{jn}(\psi, \theta, \varphi) \varepsilon_n, & i \neq j \end{cases} \quad (2.14)$$

$$M_\varepsilon(A) = \frac{5(1+A)\sqrt{A}}{(3+2A)\sqrt{A} + \sqrt{(2+3A)(3+2A)}}, \quad N_\varepsilon(A) = \frac{5(1+A)}{(3+2A) + \sqrt{A(2+3A)(3+2A)}} \quad (2.15)$$

На основе (2.12)–(2.15) устанавливаем закономерность изменения компонент девиаторов тензоров напряжений и деформации в зависимости от коэффициента/фактора анизотропии A и ориентации кристаллографической системы кристалла $\Omega \rightarrow \varphi, \theta, \psi$. В практических и теоретических приложениях наибольший интерес представляют исследования закономерностей изменения инвариантных величин: модули девиаторов

тензоров напряжений $\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{\sigma}'_{ij} \tilde{\sigma}'_{ij}} = \sqrt{\tilde{\sigma}'_{11} \tilde{\sigma}'_{11} + \tilde{\sigma}'_{22} \tilde{\sigma}'_{22} + \tilde{\sigma}'_{33} \tilde{\sigma}'_{33} + 2(\tilde{\sigma}'_{12} \tilde{\sigma}'_{12} + \tilde{\sigma}'_{13} \tilde{\sigma}'_{13} + \tilde{\sigma}'_{23} \tilde{\sigma}'_{23})}$, деформации $\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}'_{ij} \tilde{\varepsilon}'_{ij}} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}'_{11} \tilde{\varepsilon}'_{11} + \tilde{\varepsilon}'_{22} \tilde{\varepsilon}'_{22} + \tilde{\varepsilon}'_{33} \tilde{\varepsilon}'_{33} + 2(\tilde{\varepsilon}'_{12} \tilde{\varepsilon}'_{12} + \tilde{\varepsilon}'_{13} \tilde{\varepsilon}'_{13} + \tilde{\varepsilon}'_{23} \tilde{\varepsilon}'_{23})}$, объемные напряжения $\tilde{\sigma}_0$ и деформации $\tilde{\varepsilon}_0$. Из анализа выражения для модуля девиатора тензора напряжений/деформаций

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{\sigma}'_{ij} \tilde{\sigma}'_{ij}} = \sqrt{\tilde{\sigma}'_{11}{}^2 + \tilde{\sigma}'_{22}{}^2 + \tilde{\sigma}'_{33}{}^2 + 2(\tilde{\sigma}'_{12}{}^2 + \tilde{\sigma}'_{13}{}^2 + \tilde{\sigma}'_{23}{}^2)} \quad (2.16)$$

с учетом равенств $\tilde{\sigma}'_{33} = -\tilde{\sigma}'_{11} - \tilde{\sigma}'_{22}$ выявлены следующие свойства. Среди множества ориентаций систем координат существуют и системы, в которых

$$\tilde{\sigma}'_{ij} = \sum_{n=1}^3 \tilde{r}'_{in}(\psi', \theta', \varphi') \tilde{r}'_{jn}(\psi', \theta', \varphi') \sigma_n = 0, \quad i = j \quad (2.17)$$

$$\tilde{\sigma}'_{ij} = \sum_{n=1}^3 \tilde{r}'_{in}(\psi', \theta', \varphi') \tilde{r}'_{jn}(\psi', \theta', \varphi') \sigma_n = 0, \quad i \neq j \quad (2.18)$$

Из системы (2.17) находим направления систем координат $\psi = \psi'$, $\theta = \theta'$, $\varphi = \varphi'$, в которых диагональные компоненты девиатора тензора напряжений равны нулю, а из (2.18) – направления систем координат $\psi = \psi''$, $\theta = \theta''$, $\varphi = \varphi''$, в которых недиагональные компоненты девиатора тензора напряжений равны нулю. Следовательно, наряду с главной системой координат, в которой модуль девиатора тензора напряжений выражается только через диагональные компоненты, существует и система координат, в которой модуль девиатора выражается только через недиагональные компоненты.

Влияние вида девиатора тензора напряжения на решениях систем (2.17) и (2.18) можно выразить через параметр

$$k = \sigma_3/\sigma_1, \quad |\sigma_1| \geq |\sigma_2| \geq |\sigma_3|, \quad -0.5 \leq k \leq 0 \quad (2.19)$$

Индексы при координатах x_i выбираются в соответствии с неравенством (2.19). В этом случае система (2.17) принимает следующий вид

$$\begin{aligned} & (\cos \varphi \cos \psi \cos \theta - \sin \varphi \sin \psi)^2 - \\ & - (1+k)(\cos \psi \sin \varphi + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi)^2 + k(\cos \varphi \sin \theta)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \cos \theta)^2 - \\
& - (1+k)(\cos \psi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi)^2 + k(\sin \varphi \sin \theta)^2 = 0 \\
& (\cos \psi \sin \theta^2 - (1+k)(\sin \psi \sin \theta)^2 + k \cos \theta^2 = 0
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Отметим, что между введенным параметром k и параметром ω характеризующим отношение инвариантов девиатора тензора напряжений существует однозначная связь

$$\omega = \frac{\sqrt[3]{\det |\sigma_{ij}|}}{\sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}} = \text{sign}\sigma_1 \frac{\sqrt[3]{-k(k+1)}}{\sqrt{2(k^2+k+1)}}$$

Решения системы (2.20) получаются в виде зависимостей $\psi = \psi(k)$, $\theta = \theta(k)$, $\varphi = \varphi(k)$, в частности:

$$\psi(k) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1+k}{2+k}}\right), \pi \mp \arcsin\left(\sqrt{\frac{1+k}{2+k}}\right), \dots; \theta = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{2} \tag{2.21}$$

$$\psi(k) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1+k}{2+k}}\right), \pi \mp \arccos\left(\sqrt{\frac{1+k}{2+k}}\right), \dots; \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{\pi}{4} \tag{2.22}$$

На основе (2.21) или (2.22) определяется положение системы координат относительно главной системы, в которой диагональные компоненты девиатора аннулируются. Недиagonальные компоненты в системе координат (2.21) принимают значения

$$\sigma'_{23} = \sigma_3, \quad \sigma'_{12} = \sigma'_{13} = \sqrt{-\sigma_1\sigma_2/2}, \quad \sigma = \sqrt{2(\sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2)} \tag{2.23}$$

а в системе (2.22)

$$\sigma'_{12} = -\sigma_3, \quad \sigma'_{13} = \sigma'_{23} = -\sqrt{-\sigma_1\sigma_2/2}, \quad \sigma = \sqrt{2(\sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2)} \tag{2.24}$$

Таким образом, между компонентами девиатора любого симметричного тензора в системах координат с нулевыми диагональными компонентами и нулевыми недиагональными компонентами существуют простые зависимости. Отметим, что системы координат (2.21) и (2.22) эквивалентны, поэтому в исследованиях следует пользоваться только одной из них.

Учитывая в (2.21), (2.22) область изменения параметра k ($-0.5 \leq k \leq 0$), установим влияние вида девиатора тензора напряжений на пределы изменения ориентаций систем координат, в которых диагональные компоненты девиатора (любого симметричного тензора) равны нулю:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} - 0.17 \leq \psi(k) \leq \frac{\pi}{4}, \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{или} \\
\frac{\pi}{4} \leq \psi(k) \leq \frac{\pi}{4} + 0.17, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Факт существования не только системы координат, в которой недиагональные компоненты девиатора равны нулю, но и системы в которой диагональные компоненты аннулируются, позволяет сформулировать на основе выражений (2.12), (2.14), (2.21)–(2.24) теорему:

Теорема 1. Крайние относительные значения модулей девиаторов тензоров напряжений $\text{extr} \bar{\sigma}/\sigma$ и деформаций $\text{extr} \bar{\epsilon}/\epsilon$ во множестве зерен, входящих в представительном объеме поликристалла с кубической решеткой, инвариантны относительно внешних условий обратимого воздействия и зависят только от фактора анизотропии кристалла A в виде зависимостей:

$$\frac{\max \tilde{\sigma}}{\sigma} = \begin{cases} M_{\sigma}(A), & A \leq 1 \\ N_{\sigma}(A), & A > 1 \end{cases}, \quad \frac{\min \tilde{\sigma}}{\sigma} = \begin{cases} N_{\sigma}(A), & A \leq 1 \\ M_{\sigma}(A), & A > 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\frac{\max \tilde{\varepsilon}}{\varepsilon} = \begin{cases} M_{\varepsilon}(A), & A \leq 1 \\ N_{\varepsilon}(A), & A > 1 \end{cases}, \quad \frac{\min \tilde{\varepsilon}}{\varepsilon} = \begin{cases} N_{\varepsilon}(A), & A \leq 1 \\ M_{\varepsilon}(A), & A > 1 \end{cases} \quad (2.26)$$

Теорема 2. Вид девиатора тензора напряжений/деформаций в кристаллах с экстремальными значениями модулей девиаторов тензоров напряжений/деформаций совпадает с макроскопическим видом, т.е.:

$$\frac{\sqrt[3]{\det |\tilde{\sigma}_{ij}(\psi', \theta', \varphi', k)|}}{\sqrt{\tilde{\sigma}_{ij}(\psi', \theta', \varphi', k) \tilde{\sigma}_{ij}(\psi', \theta', \varphi', k)}} = \frac{\sqrt[3]{\det |\sigma_{ij}|}}{\sqrt{\sigma_{ij} \sigma_{ij}}}$$

Сформулированные теоремы справедливы для любых процессов обратимого деформирования однофазных поликристаллических материалов с кубической решеткой. Отметим, что при коэффициенте анизотропии $A \geq 1$ в зернах, у которых кристаллографические системы координат параллельны с глобальной системой координат, модуль девиатора тензора напряжений принимает наименьшее значение, а в зернах, у которых ориентация кристаллографических осей определяется соотношением (2.21) – наибольшее значение. Таким образом, модули девиаторов тензоров напряжений и деформаций в зависимости от ориентации кристаллографической системы координат изменяются в пределах

$$M_{\sigma}(A)\sigma \leq \tilde{\sigma}(\psi, \theta, \varphi, \sigma_n) \leq N_{\sigma}(A)\sigma, \quad M_{\varepsilon}(A)\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}(\psi, \theta, \varphi, \varepsilon_n) \leq N_{\varepsilon}(A)\varepsilon \quad (2.27)$$

если коэффициент анизотропии $A \leq 1$, и

$$N_{\sigma}(A)\sigma \leq \tilde{\sigma}(\psi, \theta, \varphi, \sigma_n) \leq M_{\sigma}(A)\sigma, \quad N_{\varepsilon}(A)\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}(\psi, \theta, \varphi, \varepsilon_n) \leq M_{\varepsilon}(A)\varepsilon \quad (2.28)$$

если коэффициент анизотропии $A > 1$.

Численный анализ проведем для меди [20]: $A = 3.209$, $C_{11} = 16.84 \times 10^4$, $C_{12} = 12.14 \times 10^4$, $C_{44} = 7.54 \times 10^4$ МПа. На рис. 1, для $\varphi = \theta$, представлена зависимость $\sigma'(\theta, \psi) = \sigma'(\theta, \theta, \psi, 0.5)$ при макроскопическом растяжении: $\sigma_1 = 100$, $\sigma_2 = -50$, $\sigma_3 = -50$ МПа. Горизонтальные плоскости устанавливают верхний и нижний пределы изменения модуля девиатора напряжений во множестве кристаллов согласно неравенству (2.28): $0.693\sigma \leq \tilde{\sigma}(\psi, \theta, \varphi, \sigma_n) \leq 1.205\sigma$.

Закономерность изменения объемных напряжений в представительном элементе поликристалла исследовалась в [18]. Рассмотрим пределы изменения флуктуаций объемных напряжений и деформаций. На основе (2.10), (2.12) получим следующее выражение для флуктуаций величины $(\tilde{\sigma}'_{ij} - \sigma'_{ij})$

$$\tilde{\sigma}'_{ij}(\psi, \theta, \varphi, A, \sigma_n) - \sigma'_{ij}(\psi, \theta, \varphi, \sigma_n) = \begin{cases} (M_{\sigma}(A) - 1) \sum_{n=1}^3 \tilde{r}_{in}(\psi, \theta, \varphi) \tilde{r}_{jn}(\psi, \theta, \varphi) \sigma_n, & i = j \\ (N_{\sigma}(A) - 1) \sum_{n=1}^3 \tilde{r}_{in}(\psi, \theta, \varphi) \tilde{r}_{jn}(\psi, \theta, \varphi) \sigma_n, & i \neq j \end{cases} \quad (2.29)$$

Подставляя (2.29) в (2.10) и применяя к полученному выражению сформулированную теорему, установим пределы изменения объемных напряжений и деформаций

$$\max |\tilde{\sigma}_0 - \sigma_0| = \begin{cases} T |M_{\sigma}(A) - 1| \sigma, & A \leq 1 \\ T |N_{\sigma}(A) - 1| \sigma, & A > 1 \end{cases}, \quad \min |\tilde{\sigma}_0 - \sigma_0| = \begin{cases} T |N_{\sigma}(A) - 1| \sigma, & A \leq 1 \\ T |M_{\sigma}(A) - 1| \sigma, & A > 1 \end{cases} \quad (2.30)$$

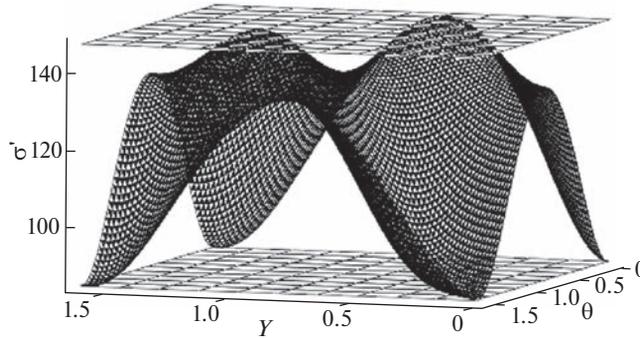


Рис. 1. Зависимость локального модуля девиатора напряжений от ориентации кристаллографической системы координат при растяжении.

$$\max |\tilde{\varepsilon}_0 - \varepsilon_0| = \begin{cases} D |M_\varepsilon(A) - 1| \varepsilon, & A \leq 1 \\ D |N_\varepsilon(A) - 1| \varepsilon, & A > 1 \end{cases}, \quad \min |\tilde{\varepsilon}_0 - \varepsilon_0| = \begin{cases} D |N_\varepsilon(A) - 1| \varepsilon, & A \leq 1 \\ D |M_\varepsilon(A) - 1| \varepsilon, & A > 1 \end{cases} \quad (2.31)$$

$$T = \sqrt{\frac{1+\nu}{3(1-2\nu)} \frac{2+3A}{3+2A}}, \quad D = \frac{1}{3T} \quad (2.32)$$

Основная сложность при исследовании флуктуаций объемных напряжений и деформаций связана с определением знака в полученных соотношениях. Заслуживает внимания вариант ($M_\sigma \Rightarrow M_\sigma(A), N_\sigma \Rightarrow N_\sigma(A)$)

$$T(M_\sigma - 1)\sigma \leq \tilde{\sigma}_0 - \sigma_0 \leq T(1 - N_\sigma)\sigma, \quad T(1 - N_\sigma)\sigma \leq \tilde{\sigma}_0 - \sigma_0 \leq T(M_\sigma - 1)\sigma \quad (2.33)$$

если коэффициент анизотропии $A \leq 1$, и

$$T(N_\sigma - 1)\sigma \leq \tilde{\sigma}_0 - \sigma_0 \leq T(1 - M_\sigma)\sigma, \quad T(1 - M_\sigma)\sigma \leq \tilde{\sigma}_0 - \sigma_0 \leq T(N_\sigma - 1)\sigma \quad (2.34)$$

если коэффициент анизотропии $A > 1$. Отметим, что выражения (2.27), (2.28), (2.33) и (2.34) справедливы для любого напряженного состояния. Переход в (2.33) и (2.34) от напряжений к деформациям можно осуществить, используя соотношения: $\sigma = 2G\varepsilon, \sigma_0 = K\varepsilon_0$. Для меди $A = 3.209$ из (2.33) с учетом (2.13), (2.32) установим следующие пределы изменения объемных напряжений в зернах поликристалла

$$0.275\sigma \leq \tilde{\sigma}_0(\psi, \theta, \varphi, \sigma_n) - \sigma_0 \leq 0.413\sigma, \quad -0.413\sigma \leq \tilde{\sigma}_0(\psi, \theta, \varphi, \sigma_n) - \sigma_0 \leq -0.275\sigma \quad (2.35)$$

Согласно (2.35), при испытании на сдвиг/кручение образцов из меди, в некоторых зернах возникают объемные напряжения, которые достигают значения $\sigma_0 = \pm 0.67t_{12}$ от касательных напряжений $t_{12} = \sigma_{12}$. Этот эффект значительно меньше для материалов с небольшим коэффициентом анизотропии. В частности, для алюминия [20]: $A = 1.215, C_{11} = 10.82 \times 10^4, C_{12} = 6.13 \times 10^4, C_{44} = 2.85 \times 10^4$ МПа, на основе (2.31), (2.32) установим следующее неравенство

$$0.047\sigma \leq \tilde{\sigma}_0(\psi, \theta, \varphi, \sigma_n) - \sigma_0 \leq 0.071\sigma, \quad -0.071\sigma \leq \tilde{\sigma}_0(\psi, \theta, \varphi, \sigma_n) - \sigma_0 \leq -0.047\sigma \quad (2.36)$$

Сравнивая (2.35) с (2.36) обнаружим, что флуктуации объемных напряжений в поликристаллах из алюминия в 5.82 раза меньше чем в поликристаллах из меди.

3. Определяющие уравнения модели при необратимом деформировании. Большинство теорий применяемых для описания поведения поликристаллических материалов в необратимой области деформирования базируются на допущении об упругой изотропии кристаллов. Согласно принятому определению, подэлемент отождествляется не с

кристаллом, а со множеством материальных частиц внутри представительного объема, имеющих одинаковый тензор необратимой деформации. В силу того, что частицы одного и того же подэлемента могут иметь различные ориентации и положения в пространстве конгломерата, возникает состояние, по характеру подобное макросостоянию в квазиизотропном теле. Акты деформации в отдельных частицах подэлемента навязаны им механическим состоянием в представительном объеме и вследствие этого происходит частичная потеря индивидуальности данной материальной частицы. Подобная схема разделения макро- и микрообластей согласуется с принципом соответствия и положения термодинамики необратимых процессов согласно которой существует локальная энтропия с такой же функциональной зависимостью от термодинамических параметров, как у глобальной энтропии. Из данного определения понятия подэлемента следуют более комплексные взаимодействия материальных частиц в представительном объеме, чем взаимодействие включения с матрицей. Допущение об упругой изотропии подэлемента не столь грубо как допущение об упругой изотропии кристалла. При нагружении в необратимой области компоненты девиаторов тензоров деформаций подэлементов \bar{e}_{ij} и элемента тела e_{ij} представляются в виде суммы обратимых \bar{e}_{ij}, e_{ij} и необратимых компонент $-\bar{p}_{ij}, p_{ij}$

$$\bar{e}_{ij} = \bar{e}_{ij} + \bar{p}_{ij}, \quad e_{ij} = e_{ij} + p_{ij} \quad (3.1)$$

Хотя в опытах можно измерять только общую деформацию, ее разделение на две составляющие не противоречит постулату макроскопической определенности А.А. Ильюшина [21] и концепции построения теории, на величинах, поддающихся наблюдению. В работе [14] показано, что в построенной на основе модели системе макроскопических уравнений фигурирует только общая деформация. При этом, в [8–10, 14–16] устанавливается локальная связь не между напряжениями и необратимыми деформациями, а между упругими и необратимыми деформациями. Согласно закону центрального приращения предложенного в [16], предельные упругие деформации подэлементов можно представить в виде суммы двух независимых частей

$$\bar{e}_{ij} = \bar{\tau}_{ij} + \bar{s}_{ij} \quad (3.2)$$

Здесь $\bar{\tau}_{ij}$ – компоненты девиатора предельных упругих деформаций подэлементов в структурно стабильном состоянии; \bar{s}_{ij} – приращение компонент девиатора предельных упругих деформаций подэлементов в результате изменения структуры при необратимом деформировании. Величины $\bar{\tau}_{ij}$ отражают термовязкопластические свойства подэлемента без учета изменения структуры материала, а \bar{s}_{ij} – в результате ее изменения.

Переход подэлементов в отожденном состоянии материала ($\bar{s}_{ij} = 0$) из обратимого состояния в необратимое, определяется критерием: $\bar{e}_{ij}\bar{e}_{ij} - \tau^2 = 0$, $\tau^2 = \tau_{ij}\tau_{ij}$, откуда видно, что τ является исходным пределом упругости подэлемента, который предполагается зависящим от температуры T и осредненной скорости необратимых деформаций γ

$$\gamma = \frac{1}{\psi'} \int_0^\psi \sqrt{\bar{p}_{ij}\dot{\bar{p}}_{ij}} d\psi \quad (3.3)$$

где точкой сверху обозначена производная по времени необратимой деформации, ψ' – текущий вес необратимо деформируемых подэлементов. Тогда

$$\tau = \tau(\psi, \gamma, T), \quad 0 \leq \psi \leq 1 \quad (3.4)$$

Согласно принципам соответствия, осредненных связей и условию единственности решения задачи представления реального материала в модели, локальные пределы упругости предполагаются зависящими не от локальных значений параметров состоя-

ния, а от осредненных. Здесь в качестве параметра, определяющего принадлежность предела текучести к определенному подэлементу, выбирается вес подэлементов в момент его перехода из обратимого состояния в необратимое при первоначальном нагружении.

Упрочнение $\bar{\sigma}_{ij}$ подэлемента складывается из изотропной части $\bar{\sigma}$ и кинематического уппрочнения \bar{r}_{ij}

$$\dot{\bar{\sigma}} = \begin{cases} a_0 \dot{\bar{\lambda}}, & \bar{\sigma} < x(\psi, \gamma, T) \\ \dot{x}(\psi, \gamma, T), & \bar{\sigma} = x(\psi, \gamma, T) \end{cases}, \quad \bar{r}_{ij} = a_r \bar{p}_{ij}$$

где a_0 – коэффициент изотропного уппрочнения, a_r – кинематическое уппрочнение.

Как отмечалось, подэлементы в конгломерате деформируются согласованным образом. Явление самосогласования при сложном нагружении представляется в виде двух соотношений [22]:

– условия работы подэлементов за пределами упругости (условие текучести)

$$\bar{\sigma}_{ij} \frac{d\bar{p}_{ij}}{d\bar{\lambda}} = 2G [\tau(\psi, \gamma, T) + \langle \bar{\sigma} \rangle + \bar{r} \cos \bar{\varphi}], \quad \cos \bar{\varphi} = \frac{\bar{p}_{ij}}{\bar{p}} \frac{d\bar{p}_{ij}}{d\bar{\lambda}}$$

– закона об общей направленности процессов необратимого течения в подэлементах:

$$\frac{d\bar{p}_{ij}}{d\bar{\lambda}} = \frac{dp_{ij}}{d\lambda}, \quad d\bar{\lambda} = \sqrt{d\bar{p}_{ij} d\bar{p}_{ij}}, \quad d\lambda = \sqrt{dp_{ij} dp_{ij}}$$

Необходимость видоизменения условия текучести и формулировка закона об общей направленности процессов необратимого течения в подэлементах, связаны с результатами опытов на циклическое нагружение по криволинейным траекториям деформирования. В работе [23] установлено, что уппрочнение при циклическом сложном нагружении больше (а не меньше, как предсказывают модели основанные на концепции поверхности текучести), чем по прямолинейным траекториям [23]. Оказалось, что для описания эффекта более интенсивного уппрочнения по криволинейным траекториям деформирования, чем по прямолинейным не требуется проведения опытов при сложном нагружении, достаточно видоизменить условие текучести и учитывать эффект направленности процессов необратимого течения в подэлементах.

В рамках допущения об упругой изотропии подэлементов, уравнения связей (1.6) для однофазных поликристаллов можно представить в виде

$$\bar{e}_{ij} - e_{ij} = b(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij}) = m(p_{ij} - \bar{p}_{ij}), \quad b = \frac{B}{2G} = \frac{m}{1-m} \quad (3.5)$$

Идентификация модели проводится на основе опытов при пропорциональном нагружении

$$\frac{\bar{\sigma}_{ij}}{\bar{\sigma}} = \frac{\bar{\varepsilon}_{ij}}{\bar{\varepsilon}} = \frac{\bar{e}_{ij}}{\bar{e}} = \frac{\bar{p}_{ij}}{\bar{p}} = \text{const}, \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{ij}}, \quad \bar{\varepsilon} = \sqrt{\bar{\varepsilon}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij}}$$

При этом виде нагружения, уравнения связей микро- и макросостояний (3.5) приводятся к одному скалярному уравнению

$$\bar{e} - e = b(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) = m(p - \bar{p}), \quad m = b/(1+b), \quad \bar{e} = \bar{\sigma}/2G, e = \sigma/2G \quad (3.6)$$

На участке линейного уппрочнения, для подэлементов работающих за пределами упругости $\tau \leq \bar{e}$ имеем

$$\bar{e} = \tau + a\bar{p} + a_0 p \quad (3.7)$$

При записи (3.7) предполагалось, что в процессе необратимого деформирования имеют место два типа уппрочнения подэлементов: индивидуальное – $a\bar{p}$ и скрытое – $a_0 p$,

одинаковое для всего множества подэлементов. В подэлементах с $\tau > \bar{e} - a_0 p$, $\bar{p} = 0$ и из (3.6), (3.7) определим значение предела текучести τ' в граничащем подэлементе

$$\tau' = e + (m - a_0)p \quad (3.8)$$

На основе (3.6)–(3.8) получим следующие формулы для модулей обратимых и необратимых деформаций

$$\bar{e}(\tau, \tau', m) = \frac{\bar{\sigma}(\tau, \tau', m)}{2G} = \begin{cases} \frac{m\tau + a\tau'}{m+a} + a_0 p, & \tau \leq \tau' \\ \tau' + a_0 p, & \tau > \tau' \end{cases}, \quad \bar{p}(\tau, \tau', m) = \begin{cases} \frac{\tau' - \tau}{m+a}, & \tau \leq \tau' \\ 0, & \tau > \tau' \end{cases} \quad (3.9)$$

Отметим, что в многоэлементных моделях осреднение производится не по объему, а по множеству реализаций, т.е. считается правомерным пользование эргодической гипотезой.

Принимая τ за единственный случайный параметр задачи, в этом случае имеем

$$\langle \bar{e}_{ij} \rangle = \int_0^1 \bar{e}_{ij}(\psi) d\psi = \int_{\tau_0}^{\tau_{\max}} \bar{e}_{ij}(\tau) y(\tau) d\tau, \quad \langle \bar{p}_{ij} \rangle = \int_0^1 \bar{p}_{ij}(\psi) d\psi = \int_{\tau_0}^{\tau_{\max}} \bar{p}_{ij}(\tau) y(\tau) d\tau \quad (3.10)$$

где $\psi(\tau)$ – интегральная функция распределения начальных предельных упругих деформаций, τ_{\max} , τ_0 – наибольший и наименьший пределы упругости подэлементов.

Подставляя (3.9) в (3.10) и интегрируя полученное выражение по параметру разброса τ , найдем

$$p = \frac{1}{m+a} \int_{\tau_0}^{\tau'} (\tau' - \tau) y(\tau) d\tau = \frac{1}{m+a} \Phi(\tau'), \quad \Phi(\tau') = \int_{\tau_0}^{\tau'} (\tau' - \tau) y(\tau) d\tau \quad (3.11)$$

Задача представления реального материала в модели решена в работах [14, 16]. Основные результаты (в предположении $m = \text{const}$) сводятся к установлению следующих зависимостей

$$p = F(e, \gamma, T), \quad e = \sigma/2G \geq \tau_0(\gamma, T) \quad (3.12)$$

$$\psi' = \frac{m+a}{1+(m-a_0)F_e} F_{e,e}, \quad \tau(\psi', \gamma, T) = e + (m-a_0)F(e, \gamma, T) \quad (3.13)$$

$$\gamma = \frac{1}{\psi'} \int_0^{\psi'} \sqrt{\dot{p}_{ij} \dot{p}_{ij}} d\psi = \frac{\dot{p}}{\psi'} = \frac{1+(m-a_0)F_{e,e}}{m+a} \left(\dot{e} + \frac{F_{e,\gamma}}{F_e} \dot{\gamma} + \frac{F_{e,T}}{F_e} \dot{T} \right) \quad (3.14)$$

Здесь ψ' – текущий вес необратимо деформированных подэлементов; $\tau_0(\gamma, T)$ – микроскопический предел упругости (совпадает с минимальным пределом упругости в системе подэлементов). Функция $F = F(\sigma/2G, \gamma, T)$ определяется на основе диаграмм деформирования $\varepsilon = F(\sigma/2G, \gamma, T) + \sigma/2G$ материала, полученных при различных постоянных значениях параметров состояния γ, T . Оказалось, что в опытах на пропорциональное нагружение трубчатых образцов растягивающей силой и внутренним давлением при различных фиксированных значениях температуры и скорости продольной деформации (перемещения захвата) $\dot{d}_{zz} = \text{const}$, осредненная скорость необратимой деформации (3.3) не меняется в процессе нагружения $-\dot{\gamma} = \text{const}$. При этом ориентация прямолинейной траектории нагружения в координатах осевого t_{zz} и окружного $t_{\phi\phi}$ напряжений и значение параметра состояния γ определяются выражениями:

$$t_{\phi\phi} = \frac{2K-B}{K+B} t_{zz} \quad \gamma = \frac{1-\chi}{B+2G\chi} \sqrt{2(K^2 + B^2 - KB)} \left| \dot{d}_{zz} \right| \quad (3.15)$$

где K – объемный модуль упругости, $\chi = a / (1 + a)$, a – коэффициент индивидуально-го упрочнения подэлементов (на стадии множественного скольжения $a \sim 0.002$).

Следовательно, для определения ориентации траектории нагружения в пространстве осевых и окружных напряжений и значения осредненной скорости необратимых деформаций подэлементов, достаточно знать объемный модуль упругости K , модуль сдвига G , коэффициент индивидуального упрочнения подэлементов a и параметра кинематической схемы взаимодействия между подэлементами B (соотношения (1.6), (3.5)).

Параметр B определяется на основе принципа экстремума несоответствия мер (1.7), который с учетом (3.5) принимает вид

$$\Delta = 2Gm(1 - m)[\langle \bar{p} \rangle^2 - \langle \bar{p}^2 \rangle] = \text{Extr}, \quad \bar{p}^2 = \bar{p}_{ij} \bar{p}_{ij} \quad (3.16)$$

Если предположить, что в процессе необратимого деформирования параметр $m = \text{const}$, то из (3.16) с учетом (3.9) получим соотношение

$$\Delta = -2 \frac{m(1 - m)}{m + a} \left(\int p d\sigma - Gap^2 \right) = \text{Extr} \quad (3.17)$$

Из условия экстремума (3.17) следует формула полученная в [8]

$$m = -a + \sqrt{a + a^2}, \quad b = \sqrt{a/(1 + a)} = \sqrt{\chi} \quad (3.18)$$

Согласно (2.6) и (2.7) для изотропных кристаллов ($A = 1$) в упругую область деформирования $b = B/2G = 1$. Так как коэффициент $\chi \leq 1$, то из (3.18) следует что в необратимой области деформирования параметр $b < 1$. Таким образом в предельном случае $\chi = 1$ результаты, полученные на основе формул (2.6), (2.7) и (3.18) совпадают. Хотя многие многоэлементные модели базируются на уравнении связи $b = \infty$ (однородное деформированное состояние) из приведенных результатов вытекает, что вариант $b = 1$ соответствует верхней оценке изменения параметра b и при учете упругой анизотропии. В случае поликристаллов с кубической решеткой из (2.6), (2.7) следует $b = B/2G = (2A + 3)/(3A + 2) \leq 1$ при любом значении коэффициента анизотропии $A \geq 1$.

Найденные параметры B, m и функция $F(e, \gamma, T)$ полностью характеризуют поведение модели на линейном участке упрочнения подэлементов. На основе (3.14) и (3.18) описываются термовязкоупругопластические процессы деформирования элемента тела если задана история изменения напряжений и температур. Перейдя в (3.14) от упругой деформации к напряжению σ , после несложных преобразований получим

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{a + m}{1 + (m - a_0)F_{,e}} \gamma - \frac{\dot{\sigma}}{2G} \right) \frac{F_{,e}}{F_{,\gamma}} - \left(F_{,T} - F_{,e} \frac{\sigma G_{,T}}{2G^2} \right) \frac{\dot{T}}{F_{,\gamma}}, \quad \gamma/t = 0 = \frac{\dot{e} - \tau_0(\gamma, T)_{,T} \dot{T}}{a + m} \quad (3.19)$$

Следовательно, если законы изменения модуля девиатора тензора напряжений и температуры известны, то интегрируя нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка (3.19) при указанном начальном условии, найдем историю изменения параметра состояния $\gamma = \gamma(t)$. Затем по формуле

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{2G} + F\left(\frac{\sigma(t)}{2G}, \gamma(t), T(t)\right) \quad (3.20)$$

определим модуль девиатора тензора деформации $\varepsilon = \varepsilon(t)$, а из равенства $\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \varepsilon / \sigma$ – его компоненты. Соотношения (3.19), (3.20) описывают процессы необратимого деформирования, когда внешнее воздействие приводит к активному нагружению во всем подмножестве необратимо деформированных подэлементов. Это условие выполняется, когда [14]

$$\dot{\epsilon} > -(F_{,\gamma} \dot{\gamma} + F_{,T} \dot{T})/F_{,e}, \quad e = \sigma/2G$$

если пределы упругости подэлементов растут в данном процессе, и

$$\dot{\epsilon} > [(\tau_{0,\gamma} - F_{,\gamma}) + (\tau_{0,T} - F_{,T})\dot{T}] / (1 + mF_{,e})$$

когда уменьшаются. Когда в данном процессе влиянием реологических эффектов можно пренебречь эти неравенства определяют условия неизотермического нагружения по термомеханической поверхности $-\epsilon = \sigma/2G + F(\sigma/2G, T)$, полученные при различных постоянных температурах. Определяющие уравнения для более сложных условий внешнего воздействия приводятся в [14].

В методологическом плане важно обратить внимание на следующий аспект. Из (3.19) следует, что осредненная скорость необратимой деформации (3.3) в момент наступления микротекучности пропорциональна обшей скорости деформации $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}$. Коэффициент пропорциональности $P = 1/(a + m)$ зависит от параметра взаимодействия между подэлементами m и коэффициента упрочнения a . Согласно (3.6) для всех возможных схем взаимодействия между подэлементами $0 \leq m \leq 1$, поэтому коэффициент P изменяется в пределах $1/(a + 1) \leq P \leq 1/a$. Следовательно, значение P найденное на основе принципа экстремума несоответствия мер (3.18) соответствует среднему геометрическому значению предельных вариантов. Подобное следствие принципа обнаруживали и при определении макроскопических констант упругости (формула (2.7)).

Хотя соотношение (1.5) было установлено еще в работе [9] детальный анализ закономерностей изменения объемных напряжений и деформаций не проводился. Исследования ограничивались изучением определяющих уравнений без учета процессов связанных с разрушением. При переходе к вопросам связанных с разрушением постулат об ортогональности тензоров флуктуаций напряжений и деформаций играет важнейшую роль. Рассмотрим выражение (1.5) для однофазных поликристаллов

$$(\bar{\sigma}_0 - \sigma_0)^2 + K(\bar{\sigma}_0 - \sigma_0)(\bar{p}_0 - p_0) = \frac{K}{3B}(\bar{\sigma} - \sigma)^2, \quad \bar{\epsilon}_0 = \frac{\bar{\sigma}_0}{K} + \bar{p}_0, \quad \epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{K} + p_0 \quad (3.21)$$

где через \bar{p}_0, p_0 обозначены необратимые изменения объемов в подэлементах и элементе тела соответственно. В первом приближении примем что необратимое изменение объема в данном подэлементе пропорционально длине траектории необратимой деформации $\bar{p}_0 = k_0 \bar{\lambda}$, $d\bar{\lambda} = \sqrt{d\bar{p}_{ij} d\bar{p}_{ij}}$, k_0 – коэффициент, характеризующий влияние дефектов структуры, возникающих в процессе необратимого деформирования, на необратимое изменение объема, одинаковый для всех подэлементов [24]. При пропорциональном нагружении

$$\bar{p}_0 = k_0 \bar{p}, \quad p_0 = \langle \bar{p}_0 \rangle = k_0 p$$

Подставляя эти значения в (3.21) и учитывая в полученном равенстве соотношение (3.6), найдем

$$(\bar{\sigma}_0 - \sigma_0)^2 + \frac{Kk_0}{2Gm}(\bar{\sigma}_0 - \sigma_0)(\bar{\sigma} - \sigma) - \frac{K(1-m)}{6Gm}(\bar{\sigma} - \sigma)^2 = 0 \quad (3.22)$$

Из (3.22) следуют два допустимых с физической точки зрения решения

$$\bar{\sigma}_0 - \sigma_0 = M(\bar{\sigma} - \sigma) \quad (3.23)$$

$$M = \frac{1 + \nu}{2m(1 - 2\nu)} \left(-k_0 \pm \sqrt{k_0^2 + \frac{4(1 - 2\nu)(1 - m)m}{3(1 + \nu)}} \right) \quad (3.24)$$

где ν – коэффициент Пуассона. Выбор знака в (3.24) имеет принципиальное значение. При знаке “+” подэлементы с малыми значениями пределов текучести необратимо деформируются в условиях действия высоких растягивающих объемных напряже-

ний, а подэлементы с большими значениями пределов текучести подвергаются действиям сжимающих объемных напряжений. При отрицательном знаке в (3.24) наблюдается обратная картина.

Отметим, что постулат об ортогональности тензоров флуктуаций напряжений и деформаций (1.5) соответствует условию равенства как механической работы системы подэлементов и элемента тела

$$L = \left\langle \int (\bar{\sigma}_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij} + 3\bar{\sigma}_0 d\bar{\varepsilon}_0) \right\rangle = \int (\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + 3\sigma_0 d\varepsilon_0) \quad (3.25)$$

так и дополнительных работ

$$L_a = \left\langle \int (\bar{\varepsilon}_{ij} d\bar{\sigma}_{ij} + 3\bar{\varepsilon}_0 d\bar{\sigma}_0) \right\rangle = \int (\varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} + 3\varepsilon_0 d\sigma_0) \quad (3.26)$$

Согласно (3.25) макроскопическая работа деформирования представительного объема равна сумме работ деформирования подэлементов, а из (3.26) следует – макроскопическая дополнительная работа равна сумме дополнительных работ подэлементов. Если считать, что упрочнение вызывается внутренними упругими силами, сопротивляющимися необратимой деформации, тогда согласно [9], дополнительная работа представляет ту часть работы деформирования, которая не рассеивается в виде тепла. В этом случае и некомпенсированное тепло Q не зависит от характеристик уравнений связи макро- и микросостояний

$$Q = \int (\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} + 3\sigma_0 d\varepsilon_0 - 3\varepsilon_0 d\sigma_0) \quad (3.27)$$

Если L, Q выражаются непосредственно через макроскопические тензоры напряжений и деформаций, тогда на основе первого и второго законов термодинамики

$$dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + 3\sigma_0 d\varepsilon_0 + \delta Q, \quad TdS = \delta Q + \delta Q' \quad (3.28)$$

установим, что и другие термодинамические функции системы подэлементов (свободную энергию $F = U - TS$ или энтальпию $H = U - t_{ij} d_{ij}$) можно выразить через макроскопические величины: t_{ij}, d_{ij}, T . Здесь U – плотности внутренней энергии, S – энтропии элемента тела, Q' – внешний приток тепла, T – температура. Таким образом в рассматриваемом подходе осредненные микроскопические меры фундаментальных термодинамических величин совпадают с макроскопическими мерами. Тем самым обеспечивается выполнение постулата: энтропия S – аддитивная функция множеств.

4. Численное термодинамическое сопоставление многоэлементных моделей основанных на линейных и нелинейных уравнениях связи. Рассмотрим в качестве примера гипотетический поликристаллический материал, для которого интегральная функция распределения пределов упругости задается выражением

$$\psi(z, \Theta) = \int_0^z y(z, \Theta) dz = 1 - (1 + \Theta z) e^{-\Theta z}, \quad y(z, \Theta) = \Theta^2 z e^{-\Theta z} \quad (4.1)$$

$$z = \tau' - \tau_0 = e - \tau_0 + mp, \quad e = \sigma/2G, \quad \Theta = \Theta(\gamma, T) \quad (4.2)$$

Подставляя (4.1) с учетом (3.9) в (3.10), получим взаимосвязь $\sigma \sim p$ в следующем параметрическом виде

$$p(\tau', m, \Theta, a) = \frac{1}{\Theta(m+a)} [\Theta(\tau' - \tau_0) - 2 + (\Theta(\tau' - \tau_0) + 2)e^{-\Theta(\tau' - \tau_0)}] \quad (4.3)$$

$$\sigma(\tau', m, \Theta, a) = \frac{2Gm}{\Theta(m+a)} \left[\Theta\tau_0 + \frac{a\Theta\tau'}{m} + 2 - [2 + \Theta(\tau' - \tau_0)]e^{-\Theta(\tau' - \tau_0)} \right] \quad (4.4)$$

Для осредненных значений энергий изменения формы и объема получены зависимости

$$\langle L_s(\tau', m) \rangle = 2G \int_{\tau_0}^{\tau'} \left[\tau \bar{p}(\tau, \tau', m) + \frac{a}{2} \bar{p}(\tau, \tau', m)^2 + \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}(\tau, \tau', m)^2 \right] y(\tau) d\tau + G(1 - \psi(\tau'))(\tau')^2 \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \langle L_0(\tau', m, c) \rangle &= \frac{3}{2} \int_{\tau_0}^{\tau'} \left[\frac{c\sigma(\tau', m)}{\sqrt{K}} + \sqrt{\frac{1-m}{6Gm}} (2G\bar{\varepsilon}(\tau, \tau', m) - \sigma(\tau', m)) \right]^2 y(\tau, \Theta) d\tau + \\ &+ \frac{3}{2} \left[\frac{c\sigma(\tau', m)}{\sqrt{K}} + \sqrt{\frac{1-m}{6Gm}} (2G\tau' - \sigma(\tau', m)) \right]^2 (1 - \psi(\tau', \Theta)), \quad c = \frac{\sigma_0}{\sigma} \end{aligned} \quad (4.6)$$

При записи (4.6) не учитывалось неупругое изменение объема. Работу деформирования представительного объема определим на основе равенства

$$L = \int (\sigma d\varepsilon + 3\sigma_0 d\varepsilon_0) = \int \sigma dp + \frac{1}{4G} \sigma^2 + \frac{3}{2K} \sigma_0^2$$

Учитывая, что зависимость $\sigma \sim p$ задана в параметрическом виде – (4.4), (4.3), величину dp на основе (4.3) выразим через $d\tau'$. В результате получим

$$L(\tau', m, c) = \int_{\tau_0}^{\tau'} \sigma(\tau, m) [1 - (1 + \Theta(\tau - \tau_0)) e^{-\Theta(\tau - \tau_0)}] d\tau + \frac{\sigma(\tau', m)^2}{4G} + \frac{3(c\sigma(\tau', m))^2}{2K} \quad (4.7)$$

Для $L(\tau', m)$ должно выполняться следующее соотношение

$$L(\tau', m, c) = \langle L_s(\tau', m) \rangle + \langle L_0(\tau', m, c) \rangle = L_s + L_0, \quad L_s = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad L_0 = 3 \int \sigma_0 d\varepsilon_0 \quad (4.8)$$

Рассмотрим выполнимость условия равенства работ системы подэлементов и элемента тела (4.8), для линейных и нелинейных уравнений связи локальных и макроскопических состояний. Численные исследования проведем при чистом макроскопическом сдвиге для материала со следующими механическими характеристиками: $\Theta = 1000$, $\tau_0 = 0.0006$, $G = 8.11 \times 10^4$, $K = \sigma_0/\varepsilon_0 = 4.69 \times 10^5$ МПа, $a = 0.001$. Проанализируем соотношение

$$\delta(\tau', m, c) = \frac{L(\tau', m, c) - \langle L_s(\tau', m) \rangle - \langle L_0(\tau', m, c) \rangle}{L(\tau', m, c)} \quad (4.9)$$

Величины $\delta(\tau', m, c)$ для линейных уравнений связи обозначим через $\delta(\tau') = \delta(\tau', 0)$ и $\delta'(\tau') = \delta(\tau', 1)$; для нелинейных уравнений $\delta(\tau', c) = 0$. Отметим, что в случае линейных уравнений связи: $\bar{\sigma}_0 = \sigma_0$, $\bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0$, осредненная энергия изменения объема вычисляется по формуле

$$\langle L_0(\tau', m, c) \rangle = 1.5c^2 \sigma(\tau', m)^2 / K$$

Результаты расчетов $\delta(\tau')$ и $\delta'(\tau')$ для двух видов напряженных состояний $\sigma_0/\sigma = 0, 1$ представлены на рис. 2. Из представленных на рис. 2 диаграмм видно, что $\delta(\tau', c)$, принимает наибольшее отклонение при чистом сдвиге. При этом, более детальные численные исследования показывают, что наибольшее отклонение увеличивается с уменьшением числовых значений параметров – τ_0, Θ . Для принятых значений механических характеристик материала $\max \delta(\tau', 0) = 0.164$ при необратимой деформации $p(\tau', m, k, a) \sim p(\tau') = 0.016$. Следовательно, для моделей, основанных на линейных

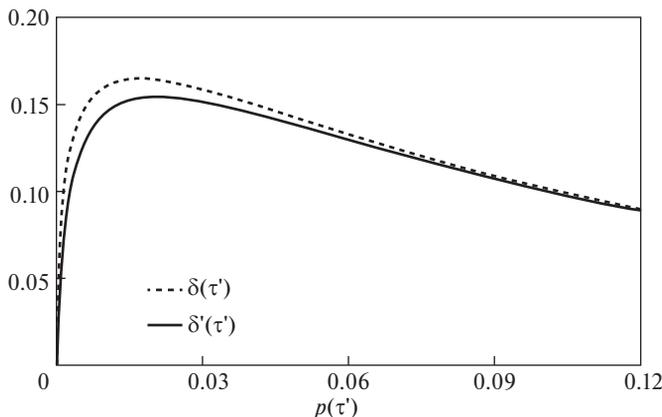


Рис. 2. Относительное отклонение работы деформирования системы подэлементов от работы элемента тела.

уравнениях, обнаруживаются существенные отклонения от условия равенства механических работ системы подэлементов и элемента тела.

Важной энергетической характеристикой при деформации металлов является скрытая энергия, которая остается в материале после разгрузки. Скрытая энергия U_l связана с микронапряжениями и дефектами кристаллической решетки (дислокациями, вакансиями, границами двойников и др.), возникающими в процессе необратимого деформирования. Если предполагать, что затраченная энергия на упрочнение подэлементов не рассеивается, тогда из модели следует: скрытая энергия деформирования равна дополнительной работе (3.19) с вычетом потенциальной энергии, возвращаемая при разгрузке

$$U_l = L_a - \frac{\sigma^2}{4G} - \frac{3\sigma_0^2}{2K} = \int (pd\sigma + 3p_0d\sigma_0) \quad (4.10)$$

Учитывая (4.3), (4.4) в (4.10) при допущении об упругом изменении объема ($p_0 = 0$) получим

$$U_l(\tau', m, \Theta, a) = \frac{2Gm}{m+a} \int_{\tau_0}^{\tau'} p(\tau, m, \Theta, a) \left[\frac{a}{m} + (1 + \Theta(\tau - \tau_0)) e^{-\Theta(\tau - \tau_0)} \right] d\tau \quad (4.11)$$

В рамках этого предположения рассеянная часть энергии деформирования вычисляется на основе выражения (3.20), которое при упругом изменении объема может быть представлено в виде

$$Q(\tau', m, \Theta, a) = \int (\sigma dp - p d\sigma) = \frac{2G}{a+m} \int_{\tau_0}^{\tau'} \tau(\tau' - \tau) \gamma(\tau, \Theta) d\tau \quad (4.12)$$

Формулы для расчета скрытой (4.11) и рассеянной части (4.12) энергий деформирования следует рассматривать как предельные (наибольшее и наименьшие значения соответственно), так как они базируются на допущении, что упрочнение есть эффект обратимый, т.е. дополнительная работа подэлемента $\int \bar{p} d\bar{\sigma}$ не рассеивается в процессе упрочнения (модель упрочнения А.Ю. Ишлинского). Вероятно, часть дополнительной работы каждого подэлемента $-(1-r) \int \bar{p} d\bar{\sigma}$ ($0 \leq r \leq 1$) рассеивается в процессе упрочнения. Исходя из подобного предположения, в выражение (4.12) следует доба-

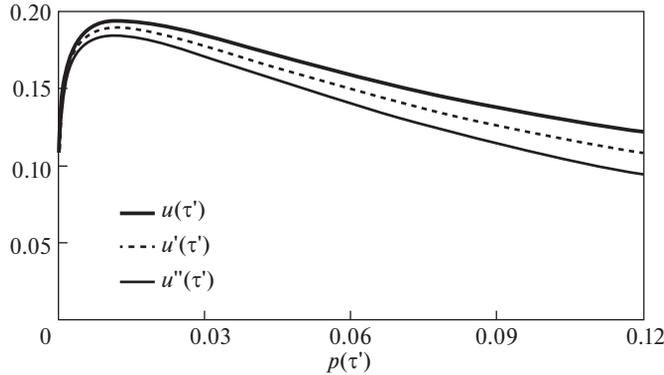


Рис. 3. Зависимость удельной скрытой энергии от необратимой деформации, для трех значений параметра r .

вить слагаемое $(1-r) \int \bar{p} d\bar{\sigma}$ (в линейном приближении $-d\bar{\sigma} = a d\bar{p}$). Тогда с учетом (3.9) формулы для скрытой (4.11) и рассеянной (4.12) энергий деформирования примут вид

$$U_l(\tau', m, \Theta, a, r) = \frac{2Gm}{m+a} \int_{\tau_0}^{\tau'} p(\tau, m, \Theta, a) \left[\frac{ra}{m} + (1 + \Theta(\tau - \tau_0)) e^{-\Theta(\tau - \tau_0)} \right] d\tau \quad (4.13)$$

$$Q(\tau', m, \Theta, a, r) = \frac{2G}{a+m} \int_{\tau_0}^{\tau'} \left[\tau(\tau' - \tau) + \frac{(1-r)a}{a+m} (\tau' - \tau)^2 \right] y(\tau, \Theta) d\tau \quad (4.14)$$

На рис. 3 представлены результаты численных исследований зависимости $u(\tau', r) \sim p(\tau')$,

$$u(\tau', r) = \frac{U_l(\tau', r)}{L(\tau') - \sigma(\tau')^2 / 4G}$$

$$p(\tau') = \frac{1}{\Theta(m+a)} [\Theta(\tau' - \tau_0) - 2 + (\Theta(\tau' - \tau_0) + 2)e^{-\Theta(\tau' - \tau_0)}]$$

при чистом макроскопическом сдвиге. Расчеты проводились при следующих значениях механических характеристик: $\Theta = 1000$, $\tau_0 = 0.0006$, $G = 8.11 \times 10^4$ МПа, $a = 0.001$, для трех значений коэффициента $r = 1, 0.5, 0$; параметр m определялся по формуле (3.27). На рис. 3 приняты обозначения: $u(\tau') = u(\tau', 1)$, $u'(\tau') = u(\tau', 0.5)$, $u''(\tau') = u(\tau', 0)$. Из представленных на рис. 3 диаграмм видно, что значение коэффициента r оказывает существенное влияние на величину скрытой энергии деформирования. С ростом необратимой деформации разность между предельными значениями $\delta u(\tau') = u(\tau', 1) - u(\tau', 0)$ увеличивается.

5. Критерий разрушения. Из опыта известно, что способность материала к необратимой деформации существенно зависит от условий нагружения, определяемых видом напряженного состояния, температурой, скоростью деформирования и другими факторами. Наступление предельного состояния обусловлено способностью материала оказывать сопротивление касательным и нормальным напряжениям и, следовательно, определяется двумя причинами: возникновением трещин (некоторой функцией модуля девиатора тензора напряжений) и их распространением (максимальным нормальным растягивающим напряжением). Теория максимальных нормальных напря-

жений, ведущая свое начало от Г. Галилея, формально была обоснована в работах Г. Ламе, А. Клебша, а позднее В. Ренкина, но из-за слабой согласованности с опытом не получила широкого распространения. Однако картина существенно меняется при ее применении в рамках исследуемой модели. Из модели вытекает что в системе подэлементов, даже при чистом макроскопическом сжатии, существуют подэлементы, в которых главное нормальное напряжение $\bar{\tau}_1$ не просто положительно $\bar{\tau}_1 > 0$, но по абсолютному значению больше действующего макроскопического напряжения. Более того, в части подэлементов меняется знак напряжения $\bar{\tau}_1$ в условиях монотонного внешнего воздействия, т. е. наблюдается циклическое нагружение.

Рассмотрим общее выражение для объемной деформации подэлемента. Соотношение (3.23) с учетом (3.24) и обозначения (4.6) и предположения об упругом изменении объема при пропорциональном нагружении ($\sigma_0 = c\sigma(\tau')$) можно представить в виде

$$\bar{\sigma}_0(\tau', \tau, c) = c\sigma(\tau') + M[\bar{\sigma}(\tau, \tau') - \sigma(\tau')], \quad M = \pm \sqrt{\frac{(1+\nu)(1-m)}{3(1-2\nu)m}} \quad (5.1)$$

С учетом (3.6) флуктуации объемных напряжений можно выразить и через флуктуации необратимых деформаций

$$\bar{\sigma}_0(\tau', \tau, c) = c\sigma(\tau') \pm \sqrt{\frac{2}{3}KGm(1-m)}[p(\tau') - \bar{p}(\tau', \tau)] \quad (5.2)$$

Из (5.2) следует, что объемное напряжение в упруго деформированных подэлементах ($\bar{p}(\tau', \tau) = 0$) линейно зависят от макроскопической необратимой деформации $p = p(\tau')$. Коэффициент пропорциональности $\sqrt{2KGm(1-m)}/3$ аннулируется в предельных вариантах $m = 1$ (однородное деформированное состояние), $m = 0$ (однородное напряженное состояние) и принимает наибольшее значение при $m = 0.5$. Как следует из соотношений (2.6), (2.7) и (3.18) значение $m = 0.5$ соответствует чисто упругому поведению изотропного тела. Если параметр m определяется по формуле (3.18), тогда коэффициент пропорциональности в (5.2) примерно в три раза меньше, чем возможное максимальное значение.

Для упрощения записей аргументы, которые не меняются в процессе нагружения, не будут указаны. Тогда, зависимость (4.4) $-\sigma = \sigma(\tau', m, \Theta, a)$ можно представить в виде функции одной переменной $\sigma = \sigma(\tau')$. Модули девиаторов напряжений подэлементов $\bar{\sigma}(\tau', \tau)$ определяются на основе формулы (3.9). Главные значения $\bar{\sigma}_1$ в подэлементах можно выразить через модуль $\bar{\sigma}$ и параметром k

$$\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}/\sqrt{2(1+k+k^2)}, \quad k = \bar{\sigma}_3/\bar{\sigma}_1 = \sigma_3/\sigma_1 \quad (5.3)$$

Отметим, что виды девиаторов в подэлементах и элементе тела совпадают, поэтому параметр k принимает одинаковые значения для всего множества подэлементов и выражается через макроскопические величины. На основе (5.1)–(5.3) составим общее выражение для максимальных нормальных напряжений $\bar{\tau}_1$ в системе подэлементов

$$\bar{\tau}_1(\tau', \tau, c, k) = (c - M)\sigma(\tau') + \left(\frac{1}{\sqrt{2(1+k+k^2)}} + M \right) \bar{\sigma}(\tau', \tau) \quad (5.4)$$

С помощью простой формулы (5.4) удастся описать сложную картину изменений главных напряжений $\bar{\tau}_1$ в системе подэлементов при произвольном напряженном состоянии (пропорциональное нагружение), характеризуемом параметрами $k = \sigma_3/\sigma_1$ и $c = \sigma_0/\sigma$. Проанализируем закономерность изменения максимального напряжения $\bar{\tau}_1$

в системе подэлементов при макроскопическом растяжении и сжатии. При растяжении $c = 1/\sqrt{6}$, $k = -0.5$ формула (5.4) принимает вид

$$tr(\tau', \tau) = \bar{\tau}_1(\tau', \tau, c, k) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - M\right)\sigma(\tau') + \left(\frac{2}{\sqrt{6}} + M\right)\bar{\sigma}(\tau', \tau) \quad (5.5)$$

а при сжатии: $c = -1/\sqrt{6}$, $k = -2$

$$tc(\tau', \tau) = \bar{\tau}_1(\tau', \tau, c, k) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + M\right)[\bar{\sigma}(\tau', \tau) - \sigma(\tau')] \quad (5.6)$$

На основе (5.5), (5.6) проводились детальные численные исследования закономерностей изменения главных напряжений $\bar{\tau}_1$ в множестве подэлементов в зависимости от величины накопленной необратимой деформации при растяжении и сжатии. Расчеты проводились для двух корней уравнения (3.22). В качестве примера на рис. 4 приведены предельные диаграммы изменения $\bar{\tau}_1$ при одноосном растяжении и сжатии. Сплошные диаграммы соответствуют опыту на растяжение, а прерывистые кривые – на сжатие. При $M > 0$ наибольшее значение $\bar{\tau}_1$ возникает в граничащем подэлементе $\tau = \tau'$ (разделяющий текущую зону необратимо деформированных подэлементов от обратимой зоны). Если в качестве решения уравнения (3.22) принимается отрицательный корень $M < 0$, тогда из анализа модели следует, что наибольшее значение $\bar{\tau}_1$ возникает в подэлементе с наименьшим пределом упругости $\tau = \tau_0$. Для сокращения надписей на рис. 4 приняты обозначения: $tr(\tau') = tr(\tau', \tau')$, $tr'(\tau') = tr'(\tau', \tau_0)$, $tc(\tau') = tc(\tau', \tau')$, $tc'(\tau') = tc'(\tau', \tau_0)$. Данные свойства проявляются при любом виде напряженного состояния. Из представленных на рис. 4 диаграмм видно, что в случае когда $M < 0$ $\max \bar{\tau}_1$ возрастает с увеличением степени деформации вначале интенсивно, а затем замедляется, стремясь к насыщению. В подэлементах с $\tau > \tau_0$ напряжение $\bar{\tau}_1$ уменьшается до момента наступления текучести, а затем растет. В случае $M > 0$, $\tau = \tau'$ из (5.6) и (3.6) следует линейная зависимость $\max \bar{\tau}_1 \sim p$. В каждом подэлементе наибольшее нормальное напряжение возникает в момент наступления текучести, затем наблюдается уменьшение $\max \bar{\tau}_1$ с ростом необратимой деформации. Таким образом, в момент наступления текучести напряжение $\bar{\tau}_1$ в подэлементе принимает наименьшее значение если $M < 0$ и наибольшее при $M > 0$. В этом заключаются качественные различия взаимодействия между подэлементами с $M < 0$ от взаимодействия с $M > 0$. Если в качестве локального критерия прочности принимается критерий наибольшего нормального напряжения, при $M > 0$ опасность разрушения подэлемента минует после его перехода из обратимого в необратимое состояние. В этом варианте разрушение в подэлементах происходит до наступления текучести. Если предполагать, что пределы прочности одинаковы для всего множества подэлементов, тогда предельное состояние достигается не в одном подэлементе, а в конечном числе подэлементов, вес которых определяется из (4.1). В этом случае, в зависимости от значения τ' , при котором достигается предельное состояние, в обратимо деформированных подэлементах возможно как внезапное разрушение, так и различные варианты смешанного хрупкого и пластического разрушения. Другая картина наблюдается при $M < 0$. Напряжение $\bar{\tau}_1$ в подэлементе увеличивается с ростом необратимой деформации. Причем наибольшее значение напряжения $\bar{\tau}_1$ всегда возникает в подэлементе с наименьшим пределом текучести. При $M < 0$ разрушение развивается во времени как процесс последовательного разрушения подэлементов (с бесконечно малым весом), накопления веса разрушенных подэлементов (накопления микротрещин), слияния микротрещин, который завершается образованием макротрещины.

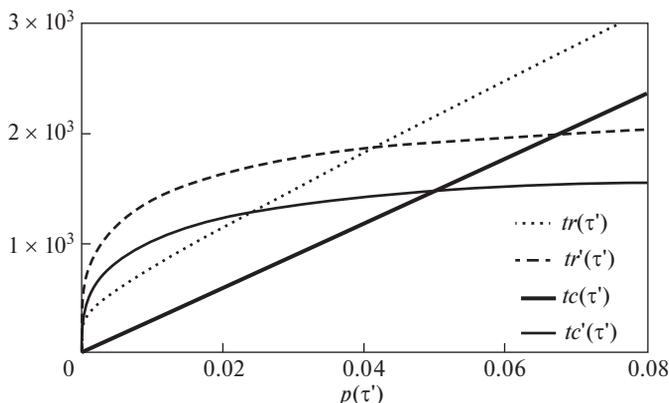


Рис. 4. Зависимость предельных значений напряжения $\bar{\eta}$ от необратимой деформации в опытах на растяжение и сжатие.

Таким образом факт существования двух физически правомерных корней решения уравнения ортогональности тензоров флуктуаций напряжений и деформаций (3.22) значительно расширяет возможности модели. При этом большое многообразие эффектов необратимого деформирования и разрушения удается с единых позиций описать даже при ограничении: предел прочности одинаков для всего множества подэлементов. Более реалистичен подход, в котором предполагается, что предельные значения $\bar{\eta}$ в подэлементах зависят от пределов текучести. В линейном приближении условие прочности можно представить в виде

$$\bar{\eta}(\tau) < c + n\tau \quad (5.7)$$

где c и n константы одинаковые для всех подэлементов.

Отметим, что широкое многообразие эффектов и явлений поведения реальных материалов наблюдаемых в области необратимых деформаций и разрушения описывается с помощью минимального количества механических характеристик: коэффициента упрочнения a , микроскопического пределом текучести $\tau_0 = \tau_0(\gamma, T)$, параметром интегральной функции распределения предела текучести $\Theta = \Theta(\gamma, T)$, и двух констант c , n , фигурирующих в критерии прочности подэлементов (5.7). Все эти характеристики могут быть расшифрованы на основе диаграмм деформирования, полученных в опытах на пропорциональное нагружение трубчатых образцов растягивающей силой и внутренним давлением при различных фиксированных значениях температуры и скорости продольной деформации (перемещения захвата) $\dot{d}_{zz} = \text{const}$. В этих опытах осредненная скорость необратимой деформации (3.3) не меняется в процессе нагружения $-\dot{\gamma} = \text{const}$. При этом ориентация прямолинейной траектории нагружения в координатах осевого t_{zz} и окружного $t_{\varphi\varphi}$ напряжений и значение параметр состояния γ определяются выражениями (3.15). Если влияние реологических эффектов в исследуемом процессе можно пренебречь, тогда неизвестные параметры можно найти на основе изотермических диаграмм деформирования в опытах на растяжение или сжатие.

Следует обратить внимание на очень важный эффект, который не охвачен в рамках других теорий: циклическое нагружение происходящее в части подэлементов при монотонном растяжении или сжатии. Данный эффект вытекает из анализа (5.5), (5.6). На рис. 5 представлены диаграммы изменения $\bar{\eta} \sim p$ при растяжении (прерывистые кривые)

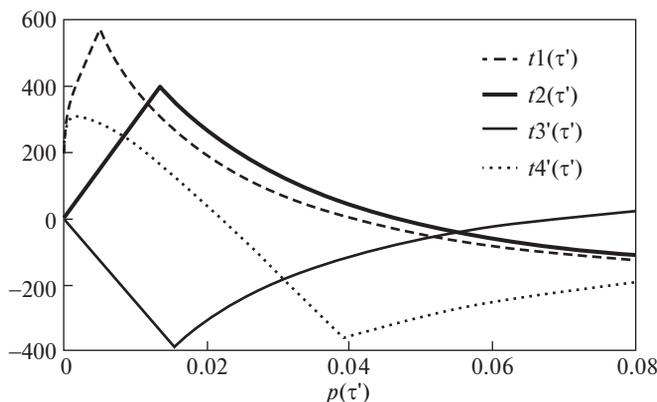


Рис. 5. Эффект циклического нагружения, происходящий в части подэлементов при монотонном растяжении/сжатии.

и сжатия (сплошные кривые) для четырех подэлементов. Диаграммы изменения $\bar{\tau}_1$ при растяжении обозначены через $t1(\tau') = tr(\tau', \tau_1)$ при $M > 0$ и через $t4(\tau') = tr'(\tau', \tau_4)$ при $M < 0$ ($\tau_1 = 2.2\tau_0$, $\tau_4 = 4\tau_0$) а при сжатии — через $t2(\tau') = tc(\tau', \tau_2)$ для $M > 0$; $t3(\tau') = tc'(\tau', \tau_3) - M < 0$ ($\tau_2 = 2.8\tau_0$, $\tau_3 = 2.9\tau_0$). На основе представленных на рис. 5 диаграмм нагружения можно оценить степень сложности взаимодействий подэлементов в представительном объеме. При этом глубина проникновения в эту сложную картину взаимодействий идет рядом с простотой принципов необходимых для их описания

Согласно рис.4 на начальном этапе наступления текучести наблюдается более быстрый рост $\max \bar{\tau}_1$ при $M < 0$ чем в случае $M > 0$. Однако с ростом необратимой деформации наблюдается обратная картина изменения $\max \bar{\tau}_1$. Смена преобладания $\max \bar{\tau}_1$ от подэлемента $\tau = \tau_0$ к подэлементу $\tau = \tau'$ порождает важные следствия. На рис.6 представлены диаграммы деформирования при растяжении и сжатии для материала со следующими механическими характеристиками: $k = 1000$, $\tau_0 = 0.001$, $G = 8.11 \times 10^4$, $K = \sigma_0/\varepsilon_0 = 4.69 \times 10^5$ МПа, $a = 0.001$. Диаграммы построены в координатах $t = t_{zz}$ и $d = d_{zz}$

$$t(p) = \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma(p), \quad d(p) = \sqrt{\frac{2}{3}}p + \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{K}\right)\frac{t(p)}{3}$$

Точками на рис. 6 отмечены состояния для двух значений $\max \bar{\tau}_1 = 1000$ и 1500 МПа. Квадратиками отмечены состояния, соответствующие корню $M > 0$ (t'_i, d'_i), а кружочками — корню $M < 0$ (t''_i, d''_i), как при растяжении так и сжатии. В обоих вариантах ($M > 0$ и $M < 0$) смещение точки определяющей состояние с заданным значением $\max \bar{\tau}_1$ (увеличивается с ростом p), от начала координат, больше при сжатии чем при растяжении. Однако наблюдаются существенные различия. В случае $M < 0$ заданное значение $\max \bar{\tau}_1$ при растяжении достигается раньше, чем в случае $M > 0$. Подобная закономерность отсутствует в опытах на сжатие. Из рис. 6 видно, что состояние $\max \bar{\tau}_1 = 1000$ достигается раньше, как при растяжении, так и сжатии, чем в случае $M < 0$. Другая картина наблюдается при $\max \bar{\tau}_1 = 1500$. При растяжении состояние $\max \bar{\tau}_1 = 1500$ достигается раньше если $M < 0$ и позже при сжатии, чем в случае $M > 0$.

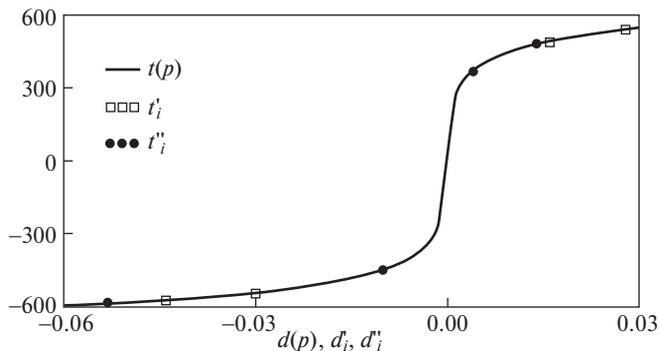


Рис. 6. Состояния с одинаковыми значениями наибольшего растягивающего напряжения при растяжении и сжатии.

Если модуль девиатора необратимых деформаций достигает значения $p \sim 0.2$, то $\max \bar{\epsilon}_i \sim 6000$ МПа. Установленные закономерности показывают, что вариант $M < 0$ характеризует вязкое разрушение, а вариант $M > 0$ — смешанный тип разрушения. В зависимости от значений пределов упругости материальных частиц один и тот же металл может быть хрупким или пластичным. Из опыта известно, что хрупкое разрушение возникнет в случае резкого увеличения предела упругости при понижении температуры (в этом же направлении действует и увеличение скорости нагружения). При этом, для резкого изменения пластичности не требуется заметных изменений каких-либо иных физических свойств материала.

Заключение. Показано, что крайние относительные значения модулей девиаторов тензоров напряжений и деформаций во множестве зерен, входящих в представительном объеме поликристалла с кубической решеткой, инварианты относительно внешних условий обратимого воздействия и зависят только от фактора анизотропии кристалла.

Установлено: вид девиатора тензора напряжений/деформаций в кристаллах с экстремальными значениями модулей девиаторов тензоров напряжений/деформаций совпадает с макроскопическим видом девиатора напряжений/деформаций.

Исследованы закономерности изменения объемных напряжений в представительном элементе поликристалла. Установлены пределы изменения флуктуаций объемных напряжений и деформаций в поликристаллах с кубической решеткой.

Исследованы общие закономерности изменения предельных значений модулей девиаторов тензоров напряжений и объемных напряжений в системе подэлементов в необратимую область деформирования.

Получена формула для расчета наибольшего нормального напряжения возникающего в системе подэлементов при произвольном виде напряженного состояния на макроскопическом уровне. Проанализированы количественные и качественные различия закономерностей изменения наибольшего нормального напряжения для двух, физически допустимых, корней уравнения ортогональности флуктуации тензоров напряжений и деформаций.

Проведены детальные численные исследования закономерностей изменения растягивающих напряжений во множестве подэлементов в зависимости от величины накопленной необратимой деформации. Установлено, что в зависимости от знака корня возможны два варианта: наибольшее растягивающее напряжение возникает в граничащем подэлементе, разделяющем текущую зону необратимо деформированных под-

элементов от обратимой зоны ($M > 0$) или в подэлементе с наименьшим пределом упругости ($M < 0$). Показано, что в случае $M > 0$ в каждом подэлементе наибольшее нормальное напряжение возникает в момент наступления текучести, затем наблюдается уменьшение с ростом необратимой деформации. В данном варианте опасность разрушения подэлемента уменьшается после наступления текучести. В зависимости от прочностных характеристик подэлементов при $M > 0$ возможны все варианты разрушения. Если $M < 0$ возможно только вязкое разрушение.

Установлен эффект циклического изменения наибольшего нормального напряжения в части подэлементов при монотонном макроскопическом нагружении. При этом смена знака нормального напряжения в подэлементе в процессе монотонного внешнего воздействия обнаруживается для обоих вариантов корня уравнения ортогональности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Masing G.* Berechnung von Dehnungs und Strauchungslinien auf Grund von Inneren Spannungen // Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens Konzern. 1926. № 5. P. 135–141.
2. *Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig und Berlin: Teubner, 1928. 978 s.
3. *Reuss A.* Berechnung der Fliesgrenze von Misch-Kristallen auf Grund der Plastizitäts-Bedingung für Einkristalle // ZAMM. 1929. V. 9. № 1. P. 49–58.
4. *Besseling J.F.* Theory of elastic, plastic and creep deformations of an initially isotropic material showing anisotropic strain-hardening, creep recovery and secondary creep // J. Appl. Mech. 1958. № 4. P. 529–536.
5. *Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И.* Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение, 1990. 223 с.
6. *Гохфельд Д.А., Комков К.Ф.* Структурная модель среды при неизотермическом процессе нагружения // Прикл. мех. 1976. № 12. С. 19–27.
7. *Марина В.Ю.* Нелокальный подход к проблеме необратимого деформирования неоднородного тела // Численные исследования в механике сплошных сред. Кишинев: ШТИИЦа, 1987. С. 47–53
8. *Марина В.Ю.* Единый подход к описанию реологических свойств стабильных и нестабильных материалов // Численные методы решения задач волновой динамики. Кишинев: ШТИИЦа, 1990. С. 76–85.
9. *Marina V.Yu., Marina V.I.* Single approach to the description of the relation between micro-and macrostates in reversible and irreversible deformation of polycrystals // Int. Appl. Mech. 2021. V. 57. № 6. P. 707–719.
<https://doi.org/10.1007/s10778-022-01120-x>
10. *Трусов П.В.* Классические и многоуровневые конститутивные модели для описания поведения металлов и сплавов: проблемы и перспективы (в порядке обсуждения) // Изв. АНР. МГТ. 2021. № 1. С. 69–82.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921010128>
11. *Kroner E.* On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics Gauge theory with dislocations // Int. J. Eng. Sci. 1963. V. 1. P. 261–278.
[https://doi.org/10.1016/0020-7225\(63\)90037-5](https://doi.org/10.1016/0020-7225(63)90037-5)
12. *Berveiller M., Zaoui A.* An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals // J. Mech. Phys. Solids. 1979. V. 26. P. 325–344.
13. *Flipona B., Kellera C., Queyb R., Barbea F.* A full-field crystal – plasticity analysis of bimodal polycrystals // Int. J. Solids Struct. 2020. V. 184. P. 178–192.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.02.005>
14. *Марина В.Ю.* Уравнения упругопластического тела при пропорциональном неизотермическом нагружении // Прикл. механика. 1997. № 6. С. 9–17.
15. *Марина В.Ю.* Принципы перехода от микро- к макро- напряженно-деформированному состоянию // Изв. АН Молдовы. Серия математика. 1998. № 2. С. 16–24.
16. *Марина В.Ю.* Определяющие уравнения при циклическом пропорциональном деформировании нестабильных материалов // Прикладная механика. 1986. № 6. С. 92–99.

17. Hill R. The elastic behavior of a crystalline aggregate // Proc. Soc. 1952. A 65. № 389. P. 349–354.
18. Марина В.Ю., Марина В.И. Исследование влияния фактора анизотропии на закономерность изменения объема в элементах микроструктуры // Металлофиз. Новейшие технологии. 2017. Т. 39. № 3. С. 387–399.
<https://doi.org/10.15407/mfint.39.03.0387>
19. Марина В.Ю., Марина В.И. Анализ соотношений между локальными и общими механическими параметрами, применяемыми для описания поведения поликристаллических материалов // Металлофиз. Новейшие технологии. 2020. Т. 42. № 3. С. 415–431.
<https://doi.org/10.15407/mfint.42.03>
20. Шермогор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
21. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
22. Марина В.Ю. Определяющие уравнения микронеоднородной среды при сложном монотонном нагружении // Изв. АН Молдовы. Серия математика. 1997. № 2. С. 26–36.
23. Tanaka E., Murakami S., Ooka M. Effects of strain path shapes on nonproportional cyclic plasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1985. V. 33. № 6. P. 559–575.
24. Комков К.Ф. О методике определения модуля объемной упругости и параметров, учитывающих разрыхление и изменение упругости композитов, основанной на тензорно нелинейных уравнениях // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 1. С. 50–62.
<https://doi.org/10.1134/S0572329919010057>

УДК 531.36

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАВНОВЕСИЯХ ТЯЖЕЛОЙ БУСИНКИ НА РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ШЕРОХОВАТОЙ СПИЦЕ

© 2023 г. А. А. Буров^{а,*}, В. И. Никонов^{а,**}

^аФедеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук,
Москва, Россия

*e-mail: jtm@narod.ru

**e-mail: nikon_v@list.ru

Поступила в редакцию 21.04.2022 г.

После доработки 29.06.2022 г.

Принята к публикации 30.06.2022 г.

Рассматривается движение тяжелой бусинки, нанизанной на шероховатую спицу, равномерно вращающуюся вокруг вертикальной оси. В предположении о том, что спица и ось вращения скрещиваются, изучаются существование множеств неизолированных относительных равновесий бусинки и их зависимость от параметров. Задача представляет собой естественное обобщение хорошо известной задачи Зоммерфельда, в рамках которой предполагается, что спица и ось вращения пересекаются.

Ключевые слова: относительные равновесия, сухое трение, равномерно вращающаяся система отсчета, шероховатая спица, тяжелая бусинка

DOI: 10.31857/S0572329922600220, EDN: JNNCBZ

1. Постановка задачи. Пусть шероховатая прямолинейная спица ℓ совершает равномерное вращение с постоянной угловой скоростью $\omega > 0$ вокруг вертикальной оси, отстоящей от спицы на расстоянии a . Предположим, что на спицу нанизана тяжелая бусинка P . Требуется найти положения равновесия бусинки относительно спицы в предположении о том, что коэффициент сухого трения равен $\mu = \operatorname{tg}\alpha$, где $0 \leq \alpha < \pi/2$ – угол трения. Ускорение силы тяжести считается равным g . Предполагается, что спица образует с восходящей вертикалью угол $0 \leq \theta \leq \pi/2$, см. рис. 1.

2. Общие условия существования относительных равновесий. В равномерно вращающейся вместе со спицей системе отсчета бусинка будет находиться в равновесии под действием (рис. 1) силы тяжести mg , центробежной силы $F_c = mg_c$, а также реакции связи, состоящей из нормальной компоненты \mathbf{N} (не изображена на рисунке) и силы трения $\mathbf{T} = T\mathbf{e}$, где \mathbf{e} – единичный вектор, направленный вверх вдоль спицы. Пусть масса бусинки принята за единицу. Тогда, если $\mathbf{f} = \mathbf{g}_c + \mathbf{g}$, то условие равновесия запишется в виде

$$\mathbf{f} + \mathbf{N} + \mathbf{T} = 0 \quad (2.1)$$

Согласно закону Кулона–Амонтона величины нормальной реакции и силы трения стеснены неравенством

$$|\mathbf{T}| \leq \mu|\mathbf{N}| \Leftrightarrow |\mathbf{T}| - \mu|\mathbf{N}| \leq 0$$

Домножая левую и правую части последнего неравенства на неотрицательную¹ величину $|\mathbf{T}| + \mu|\mathbf{N}|$, получим

¹ Положительную в интересующем нас случае.

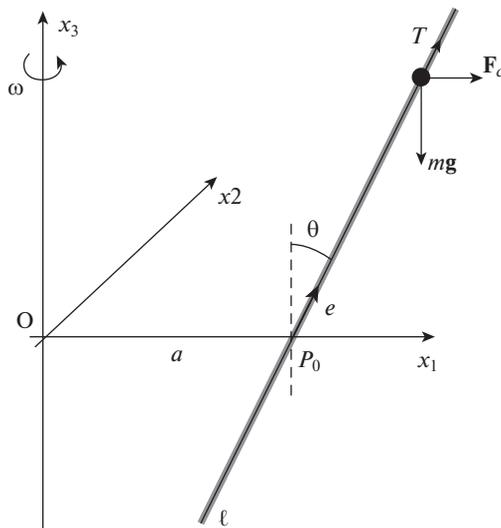


Рис. 1. Механическая система: вращающаяся шероховатая спица ℓ с нанизанной на ней бусинкой.

$$|\mathbf{T}|^2 - \mu^2 |\mathbf{N}|^2 \leq 0 \Leftrightarrow (\mathbf{T}, \mathbf{T}) - \mu^2 (\mathbf{N}, \mathbf{N}) \leq 0$$

Здесь и далее (\cdot, \cdot) – скалярное произведение. Принимая во внимание ортогональность векторов \mathbf{T} и \mathbf{N} , последнее из неравенств запишем в виде

$$(\mathbf{T} + \mathbf{N}, \mathbf{T} + \mathbf{N}) - (1 + \mu^2)(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \leq 0 \quad (2.2)$$

Из уравнения (2.1) находим

$$\mathbf{T} + \mathbf{N} = -\mathbf{f}$$

и неравенство (2.2) может быть записано как

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f}) - (1 + \mu^2)(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \leq 0 \quad (2.3)$$

Далее, путем скалярного умножения левой и правой частей уравнения (2.1) на \mathbf{e} и дальнейших преобразований, находим величину T :

$$(\mathbf{e}, \mathbf{f}) + (\mathbf{e}, \mathbf{T}) = (\mathbf{e}, \mathbf{f}) + T = 0 \Rightarrow T = -(\mathbf{e}, \mathbf{f})$$

Так как

$$\mathbf{N} = -\mathbf{T} - \mathbf{f} = (\mathbf{e}, \mathbf{f})\mathbf{e} - \mathbf{f}$$

то

$$(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = (\mathbf{f}, \mathbf{f}) - (\mathbf{f}, \mathbf{e})^2$$

и неравенство (2.3) приобретает вид

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f}) - (1 + \mu^2)((\mathbf{f}, \mathbf{f}) - (\mathbf{f}, \mathbf{e})^2) \leq 0 \Leftrightarrow (1 + \mu^2)(\mathbf{f}, \mathbf{e})^2 - \mu^2 (\mathbf{f}, \mathbf{f}) \leq 0 \quad (2.4)$$

Это неравенство составляет основной предмет дальнейших исследований.

3. Зависимость относительных равновесий от параметров. Пусть OP_0 – общий перпендикуляр к оси вращения и спице, причем точка O принадлежит оси вращения, а точка P_0 – спице. Введем вращающуюся вместе со спицей систему отсчета $Ox_1x_2x_3$, ось

Ox_3 которой направлена вдоль оси вращения, ось Ox_1 – вдоль общего перпендикуляра, а ось Ox_2 дополняет их до правой тройки. При этом $\overline{OP}_0 = (a, 0, 0)^T$, $\mathbf{e} = (0, \sin\theta, \cos\theta)^T$, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)^T$. Вводя параметр $p \in \mathbf{R}$, отвечающий за удаление бусинки P от точки P_0 на прямой, зададим ее положение вектором

$$\overline{OP} = (x_1, x_2, x_3)^T = \overline{OP}_0 + p\mathbf{e} = (a, p \sin \theta, p \cos \theta)^T$$

Тогда $\mathbf{g}_c = \omega^2(a, p \sin \theta, 0)^T$, $\mathbf{f} = (\omega^2 a, \omega^2 p \sin \theta, -g)^T$,

$$(\mathbf{f}, \mathbf{e}) = \omega^2 p \sin^2 \theta - g \cos \theta, \quad (\mathbf{f}, \mathbf{f}) = \omega^4(a^2 + p^2 \sin^2 \theta) + g^2$$

и неравенство (2.4) сводится к неравенству

$$(1 + \mu^2)(\omega^2 p \sin^2 \theta - g \cos \theta)^2 - \mu^2(\omega^4(a^2 + p^2 \sin^2 \theta) + g^2) \leq 0$$

приводимому к виду

$$\begin{aligned} & \omega^4 \sin^2 \theta (\cos^2 \alpha - \cos^2 \theta) p^2 - 2\omega^2 g \cos \theta \sin^2 \theta p + \\ & + g^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \theta) - a^2 \omega^4 \sin^2 \alpha \leq 0 \end{aligned}$$

Введение безразмерной координаты p' : $p = ap'$ и дальнейшее отбрасывание штриха позволяют представить это неравенство в виде

$$Ap^2 + Bp + C \leq 0$$

$$A = \omega^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \alpha - \cos^2 \theta), \quad B = -2\omega g \cos \theta \sin^2 \theta \quad (3.1)$$

$$C = \cos^2 \theta - (1 + \omega^2) \sin^2 \alpha, \quad \omega = \frac{a\omega^2}{g} \geq 0$$

Решения неравенства (3.1) относительно p определяют на спице ℓ области, заполненные относительными равновесиями (ОЗОР). Зависимость этих областей от безразмерного параметра ω и от углов α и θ составляет предмет дальнейших исследований.

а) Если $A = 0$ при $\omega = 0$, т.е. спица не вращается или пересекается с осью вращения, то неравенство (3.1) записывается как

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \alpha \leq 0 \quad (3.2)$$

Неравенство выполнено при $\pi/2 - \theta \leq \alpha$ и не выполнено в противном случае. Это классический результат, иллюстрирующий смысл угла трения α [1] (см. также [2]).

б) Если $A = 0$ при $\theta = 0$, т.е. спица вертикальна, то неравенство (3.1) приводится к виду

$$\cos^2 \alpha - \omega^2 \sin^2 \alpha \leq 0 \quad (3.3)$$

которое выполнено при $0 \leq \operatorname{tg} \alpha \leq \omega^{-1}$.

в) Если $A = 0$ при $\cos^2 \alpha - \cos^2 \theta = 0$, то неравенство (3.1) приводится к виду

$$-2\omega g \cos \theta \sin^2 \theta p + \cos^2 \theta - (1 + \omega^2) \sin^2 \theta \leq 0 \quad (3.4)$$

Тогда, так как $0 \leq \alpha < \pi/2$, то и $0 \leq \theta < \pi/2$, и $\cos \theta \neq 0$. Случай $\theta = 0$ разобран выше, поэтому решение неравенства (3.4) имеет вид

$$p \geq p_*, \quad p_* = \frac{s^2 - \sin^2 \theta}{2\alpha s^2 \sin^2 \theta \cos \theta}, \quad s = \frac{1}{\sqrt{2 + \alpha^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Граничная точка P_* , определяемая значением $p = p_*$,

- совпадает с точкой P_0 при $\sin \theta = s$,
- располагается выше точки P_0 при $\sin \theta \in (0; s)$,
- располагается ниже точки P_0 при $\sin \theta \in (s, 1]$.

г) Если $A < 0$, т.е. $\cos^2 \alpha - \cos^2 \theta < 0$, то в левой части неравенства (3.1) стоит квадратный трехчлен относительно p , дискриминант которого имеет вид

$$D = \cos^2 \alpha + \alpha^2 (\cos^2 \alpha - \cos^2 \theta)$$

Неравенство (3.1) при этом приводится к виду

$$(p - p_-)(p - p_+) \geq 0, \quad p_{\pm} = \frac{\sin \theta \cos \theta \pm \sin \alpha \sqrt{D}}{\alpha \sin \theta (\cos^2 \alpha - \cos^2 \theta)}$$

Величины p_{\pm} вещественны если

$$D \geq 0 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha < \cos^2 \theta \leq \cos^2 \alpha \left(\frac{1}{\alpha^2} + 1 \right) = K$$

Если $K \geq 1$, то угол $\theta < \alpha$, если $K < 1$, то используя обозначение $\beta = \arccos K$, имеем

$$\cos^2 \alpha < \cos^2 \theta \leq \cos^2 \beta \Leftrightarrow \beta \leq \theta < \alpha$$

В этом случае относительные равновесия занимают область, отвечающую значениям параметра

$$p: -\infty < p \leq p_- \cup p_+ \leq p < +\infty$$

т.е. располагаются вне интервала $(p_-; p_+)$.

При $D < 0$ вещественных корней нет, а с учетом $A < 0$, неравенство (3.1) выполнено при любых значениях p , т.е. ОЗОР – все точки спицы.

д) При выполнении условия $A > 0$, т.е. $\cos^2 \alpha - \cos^2 \theta > 0$, неравенство (3.1) имеет вид

$$(p - p_-)(p - p_+) \leq 0$$

Относительные равновесия занимают область, отвечающую значениям параметра

$$p: p_- \leq p \leq p_+$$

Поскольку $\cos^2 \alpha - \cos^2 \theta > 0$, то $D \geq 0$ и величины p_{\pm} вещественны.

4. Графическое представление зависимости относительных равновесий от параметров.

Для иллюстрации различных случаев расположения ОЗОР на плоскости (θ, α) изобразим три кривые. Кривая Γ_1 : $D = 0$ отделяющую область, в которой изучаемый квадратный трехчлен имеет два вещественных корня, от области, в которой вещественных корней нет. Γ_2 : $C = 0$, разделяет области, где эти корни одного или разных знаков и, наконец, Γ_3 : $A = 0$, разделяет области, где ветви изображающей трехчлен параболы направлены вниз или вверх. Кривые Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 разбивают квадрат $S = \{0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \alpha \leq \pi/2\}$ на пять областей $I-V$. При этом

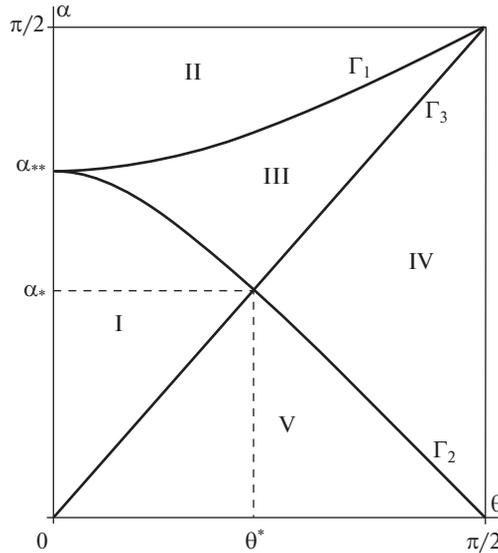


Рис. 2. Области I–V. на плоскости (θ, α) , отвечающие различным расположениям ОЗОР, при $\varepsilon = 1/2$.

$$\alpha_* = \Theta_* = \arccos \sqrt{\frac{1 + \varepsilon^2}{2 + \varepsilon^2}}, \quad \alpha_{**} = \arctan \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\alpha_*|_{\varepsilon=0} = \pi/4, \quad \alpha_*|_{\varepsilon \rightarrow +\infty} = 0$$

Для $\varepsilon = 1/2$ эти области изображены на рис. 2.

При неограниченном увеличении параметра ε , области I, III и V (см. рис. 2) уменьшаются, исчезая в пределе. При этом кривая Γ_2 сливается с граничным отрезком $\alpha = 0$, а кривая Γ_1 приближается к диагонали $\alpha = \theta$. В предельном случае, оставшиеся области II и IV разбивают квадрат S на равные треугольники с общим основанием на диагонали квадрата S , соответствующей кривой Γ_3 .

При неограниченном уменьшении параметра ε до нуля область II уменьшается и сливается с граничным отрезком $\alpha = \pi/2$. При этом кривая Γ_2 приближается к диагонали $\alpha = \pi/2 - \theta$. В пределе, при $\varepsilon = 0$, т.е. в случае а), области I, III, IV и V разбивают квадрат S на равные треугольники с общей вершиной и основаниями, противоположными этой вершине, на сторонах квадрата S . При этих условиях неравенство (3.2) выполнено в точках диагонали $\alpha = \pi/2 - \theta$.

В случае б) неравенство (3.3) выполнено в точках отрезка $\theta = 0, \alpha \in [0, \alpha_{**}]$.

В случае в) неравенство (3.4) выполнено в точках кривой Γ_3 .

Случаю г) отвечают области I–III.

На рис. 3 серым закрашены области, где существуют ОЗОР. Области построены для случае $\varepsilon = 0.5$, на рисунках схематично изображена спица ℓ , что позволяет проиллюстрировать области ОЗОР. Пунктирной линией отмечены точки границы при $p_-(\varepsilon) = 0$, штриховой линией отмечены точки границы при $p_+(\varepsilon) = 0$. Точки $(\varepsilon_i, p_i), i = I, II, III$ отвечают случаям, когда $p_-(\varepsilon) = p_+(\varepsilon)$. Для области I ОЗОР представляется в виде объединения двух лучей, направленных вверх и вниз по спице, при этом начало верх-

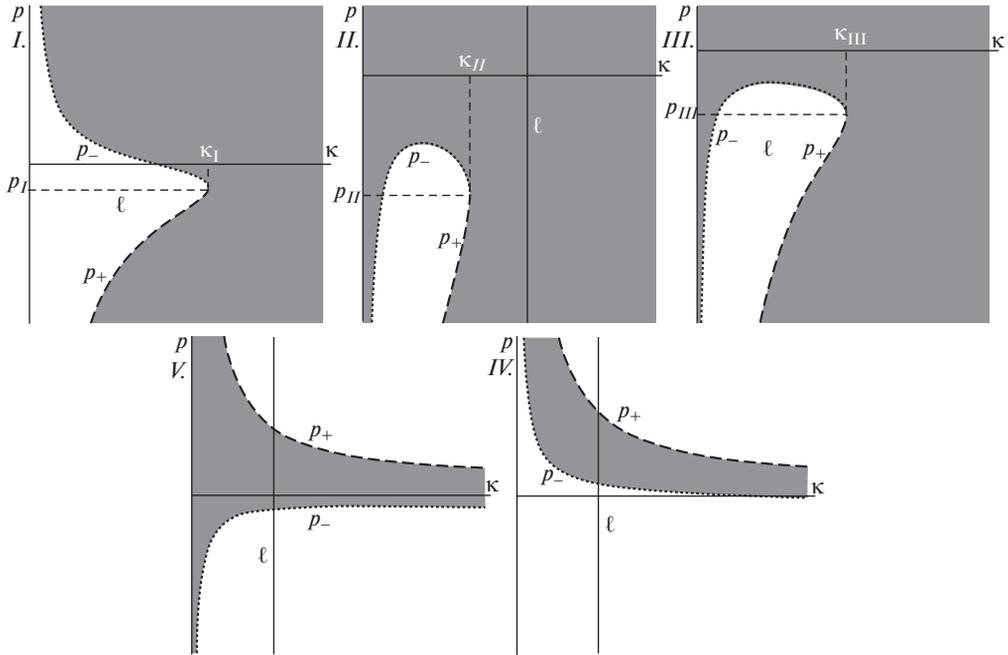


Рис. 3. Серым закрашена область, где существуют ОЗОР. ℓ – спица. Параметры (θ, α) приняты следующими: *I.*: $(\pi/8, \pi/4)$, *II.*: $(\pi/8, 4\pi/10)$, *III.*: $(\pi/4, \pi/3)$, *IV.*: $(3\pi/8, \pi/4)$, *V.*: $(\pi/4, \pi/8)$. Точки срашивания корней на рисунках *I.* – *III.*: $\alpha_I = 1.189207115$, $p_I = -2.197368226$; $\alpha_{II} = 0.3549196403$, $p_{II} = -3.433844707$; $\alpha_{III} = 1$, $p_{III} = -2.828427124$.

него луча лежит выше точки P_0 , начало нижнего луча лежит ниже точки P_0 . Для области *II.* вся спица заполнена ОЗОР. Для области *III.* ОЗОР опять представляется в виде объединения двух лучей, направленных вверх и вниз по спице, но при этом начала обоих лучей лежат ниже точки P_0 , т.е. сама точка P_0 принадлежит ОЗОР.

Случаю д) отвечают области *IV.* и *V.*, см. рис. 3. Для области *IV.* ОЗОР представляется в виде отрезка, концы которого лежат по разные стороны от точки P_0 , и точка P_0 принадлежит ОЗОР. Для области *V.*, ОЗОР также является отрезком, но целиком лежащим выше точки P_0 .

5. Выводы. Рассмотренная в учебнике А. Зоммерфельда ([1], стр. 73) задача о тяжелой бусинке на вращающейся спице представляет собой замечательный пример системы, в которой при прохождении параметра, например, коэффициента трения, через определенное значение, множество неизолированных относительных равновесий, заполняющее целую прямую, исчезает². Как показало настоящее исследование, выполненное в продолжение ряда исследований по существованию, устойчивости и бифуркациям равновесий в системах с трением (см., например, [4–13]), в рамках несложного обобщения задачи А. Зоммерфельда обнаруживается достаточно богатая (с точки зрения динамических эффектов) картина бифуркаций относительных равновесий.

² Уточнение результата А. Зоммерфельда дано в монографии [2]. В отсутствие силы тяжести явное решение найдено П. Пенлевэ [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sommerfeld A.* Vorlesungen über Theoretische Physik, Band 1: Mechanik. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft. 1943.
2. *Розенблат Г.М.* Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела. М.: URSS. 2011. 208 с.
3. *Painlevé P.* Leçons sur le frottement. Paris: Hermann. 1895. 111 p.
4. *Leine R.I., van Campen D.H.* Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // *Europ. J. Mechanics – A/Solids*. 2006. V. 25. P. 595–616.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.04.004>
5. *Leine R.I.* Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2006. V. 223. № 1. P. 121–137.
<https://doi.org/10.1016/j.physd.2006.08.021>
6. *Иванов А.П.* Об устойчивости равновесия в системах с трением // *Прикладная математика и механика*. 2007. Т. 71. № 3. С. 427–438.
7. *Иванов А.П.* Бифуркации в системах с трением: основные модели и методы // *Нелинейная динамика*. 2009. Т. 5. № 4. С. 479–498.
8. *Буров А.А.* On bifurcations of relative equilibria of a heavy bead sliding with dry friction on a rotating circle // *Acta Mechanica*. 2010. V. 212. № 3–4. P. 349–354.
<https://doi.org/10.1007/s00707-009-0265-1>
9. *Иванов А.П.* Основы теории систем с трением. Ижевск: РХД. 2011. 302 с.
10. *Иванов А.П.* О равновесии систем с сухим трением // *Прикладная математика и механика*. 2015. Т. 79. № 3. С. 317–333.
11. *Шалимова Е.С.* О движении тяжелой точки по сфере, вращающейся вокруг не проходящей через ее центр вертикальной оси, при наличии сухого трения // *Нелинейная динамика*. 2016. Т. 12. № 3. С. 369–383.
<https://doi.org/10.20537/nd1603006>
12. *Буров А.А., Косенко И.И., Шалимова Е.С.* Об относительных равновесиях массивной точки на равномерно вращающемся астероиде // *Доклады Академии наук*. 2017. Т. 475. № 3. С. 269–272.
<https://doi.org/10.7868/S0869565217210071>
13. *Буров А.А., Никонов В.И., Шалимова Е.С.* Движение массивной точки по поверхности однородного шара со сферической полостью // *Прикладная математика и механика*. 2021. Т. 85. № 4. С. 528–543.
<https://doi.org/10.31857/S0032823521040032>

УДК 534.11

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ПЛОСКОЙ БАЛОЧНОЙ КОНСТРУКЦИИ ПОСРЕДСТВОМ ВЫБОРА ЗАКРЕПЛЕНИЙ

© 2023 г. И. В. Кудрявцев^{a,*}, В. А. Иванов^b, Н. В. Суходоева^a,
О. И. Рабецкая^{a,c}, А. Е. Митяев^a

^aСибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

^bОбщество с ограниченной ответственностью “Борус“, Красноярск, Россия

^cСибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева,
Красноярск, Россия

*e-mail: ikudryavcev@sfu-kras.ru

Поступила в редакцию 08.07.2022 г.

После доработки 18.08.2022 г.

Принята к публикации 24.08.2022 г.

В данной работе предлагается методика обоснованного выбора схемы закрепления, вида опор и их жесткости для плоских балочных конструкций осесимметричного поперечного сечения с целью обеспечения заданных значений первой частоты собственных изгибных колебаний и первой критической нагрузки с учетом действия продольных сил и изменения температуры. Методика основана на известных положениях теории колебаний балок, теории устойчивости по Эйлера и использует в качестве критерия выбора схемы закрепления коэффициенты опор, которые предварительно нормируются для достижения сопоставимых значений. Выбранная схема обеспечивает заданное значение первой собственной частоты колебаний, величину первой критической температуры или одновременно оба условия работоспособности. Согласно разработанной методике выполнены сравнительные расчеты плоской стержневой конструкции методом конечных элементов, которые показали хорошую сходимость результатов по всем контролируемым параметрам. Предложенный подход может быть использован при проектировании опорного закрепления плоских балочных конструкций различного назначения для обеспечения их динамического поведения.

Ключевые слова: балка, опора, жесткость, колебания, частота, продольная сила, устойчивость, коэффициент опор

DOI: 10.31857/S0572329922600529, EDN: JLKONE

Введение. Динамическое поведение балочных конструкций, во многом определяет спектр их собственных частот изгибных колебаний, в котором наиболее опасной обычно является первая собственная частота. Изменение температуры балки приводит к появлению продольных сил, которые смещают спектр собственных частот изгибных колебаний в сторону меньших значений, и они могут достигать опасной резонансной области вплоть до потери устойчивости конструкции.

Существующие аналитические методы расчета свободных колебаний [1–17] и устойчивости [18–22] балочных конструкций обычно ограничиваются рассмотрением отдельных балок с уже заданными условиями закрепления и нагружения. В этом случае задача сводится к дифференциальным уравнениям в частных производных с заданными граничными условиями. Решение такой математической задачи хорошо из-

вестно и сводится к поиску собственных векторов и собственных значений для некоторой, полученной после ряда математических преобразований, системы линейных алгебраических уравнений. Получить решение такой задачи обычно возможно только на основе численных методов на ЭВМ. Сложность получения решения таких задач привела к разработке прикладных методов расчета и различных справочников по колебаниям и устойчивости, которые позволяют инженерам-проектировщикам рассчитывать наиболее распространенные модели элементов конструкций при простых условиях закреплений без необходимости составления дифференциальных уравнений и их решения [23–27]. При этом практически вся литература по колебаниям и устойчивости многоопорных балок также основана на проверочном подходе с оценкой динамических параметров плоских балочных конструкций с заданными опорами, без возможности их проектного расчета и обоснования требований к закреплениям.

Однако перед инженером-проектировщиком обычно стоит именно обратная задача: для заданной протяженной конструкции необходимо определить, какие опоры, с какой жесткостью и с каким шагом необходимо установить, чтобы получить требуемые значения собственных частот колебаний и величин критических нагрузок. Для выхода из ситуации в работе предлагается использовать готовые известные решения задач колебаний и устойчивости в виде справочных коэффициентов опор при различных условиях закрепления многоопорной балочной конструкции.

Нормирование значений коэффициентов опор позволило получить единый критерий выбора схемы расстановки опор, а аппроксимация коэффициентов квадратичными функциями позволило учесть жесткость опор. В результате, в данной работе на основе известных аналитических зависимостей теории колебаний и теории устойчивости балок предложена методика, позволяющая выполнять с достаточной для инженерных расчетов точностью обоснованный выбор схемы закрепления плоских многоопорных балочных конструкций, которая обеспечит требуемые значения первой частоты собственных колебаний и первой критической силы или температуры.

1. Динамическое состояние плоских балочных конструкций. Существует огромное многообразие протяженных балочных конструкций и способов их закрепления, что затрудняет обоснованный выбор их закреплений. В данной работе рассматриваются балочные конструкции, состоящие из отдельных протяженных прямых и криволинейных участков с осесимметричной формой поперечного сечения, лежащих в одной плоскости. Предполагается, что все участки имеют идентичную продольную и изгибную жесткость, жесткости всех промежуточных опор равны, расстояния между ними одинаковы, что распространено на практике, поскольку соответствует критериям рациональной конструкции. Геометрия участков соответствует общим требованиям теории изгиба стержней, а в случае тонкостенного поперечного сечения толщина стенки считается достаточной для исключения локальной потери устойчивости формы поперечного сечения, что выполняется при условии [28]:

$$l/D \geq 10, \quad D/t \geq 10 \quad (1.1)$$

где l – длина участка; D – наружный диаметр; t – толщина стенки.

Из всего спектра собственных частот и критических нагрузок протяженной балочной конструкции наиболее опасными обычно являются первая собственная частота изгибных колебаний f_1 , и первая критическая сила P_{cr1} (или температура ΔT_{cr1}). В этом случае условие работоспособности конструкции примем в виде:

$$f_1 \geq [f_1], \quad P_{cr1} \geq [P_{cr1}] \quad \text{или} \quad \Delta T_{cr1} \geq [\Delta T_{cr1}] \quad (1.2)$$

где $[f_1]$ – допустимое значение первой собственной частоты; $[P_{cr1}]$ – допустимая величина критической силы; $[\Delta T_{cr1}]$ – допустимое изменение критической температуры.

Принятые ограничения на геометрию конструкции (1.1) приводят к тому, что форма колебаний на первой собственной частоте и первая форма потери устойчивости бу-

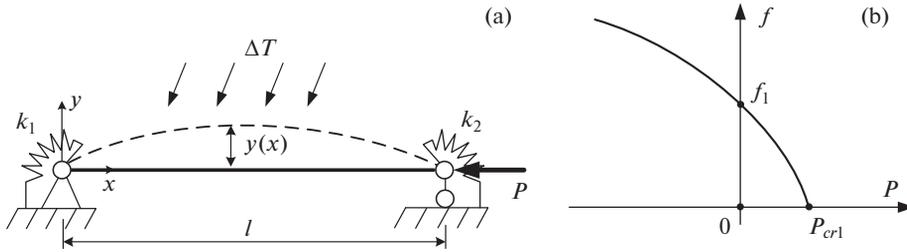


Рис. 1. Расчетная схема прямого участка.

дуг соответствовать поперечному изгибу балки в направлении наименьшей жесткости. В соответствии с этим, рассмотрим уравнения динамического состояния для прямых и изогнутых участков плоской балочной конструкции с учетом действия продольной силы.

1.1. Прямые участки. Свободные колебания прямого участка балки с упругим шарнирным закреплением и при действии продольной силы P (рис. 1,а) описываются уравнением [1–6]:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1.3)$$

где $y = y(x, t)$ – функция прогиба; E – модуль Юнга; J – момент инерции сечения; m – удельная масса, $m = \rho S$, где ρ – плотность; S – площадь поперечного сечения; P – продольная сила.

Решение уравнения (1.3) для первой частоты собственных колебаний при отсутствии продольной силы имеет вид:

$$f_1 = \frac{\alpha^2}{2\pi l^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (1.4)$$

где $\alpha = \alpha(k_1, k_2)$ – коэффициент опор при колебаниях, учитывающий способ закрепления участка.

Влияние сжимающей продольной силы P на значение первой частоты собственных колебаний определяется по формуле Галефа [29–32]:

$$f_{1(P < 0)} = f_{1(P=0)} \cdot \sqrt{1 - \frac{P}{P_{cr1}}} \quad (1.5)$$

где $f_{1(P < 0)}$ – первая частота свободных колебаний при действии продольной силы P ; $f_{1(P=0)}$ – первая частота свободных колебаний при отсутствии продольной силы P ; P_{cr1} – первая критическая сила.

Выражение для первой критической силы найдем из решения уравнения устойчивости для этого же прямого участка с идентичными граничными условиями (рис. 1,а):

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (1.6)$$

Решение задачи устойчивости (1.6) для первой критической нагрузки имеет вид:

$$P_{cr1} = \frac{\pi^2 EJ}{\mu^2 \cdot l^2} \quad (1.7)$$

где $\mu = \mu(k_1, k_2)$ – коэффициент опор при потере устойчивости.

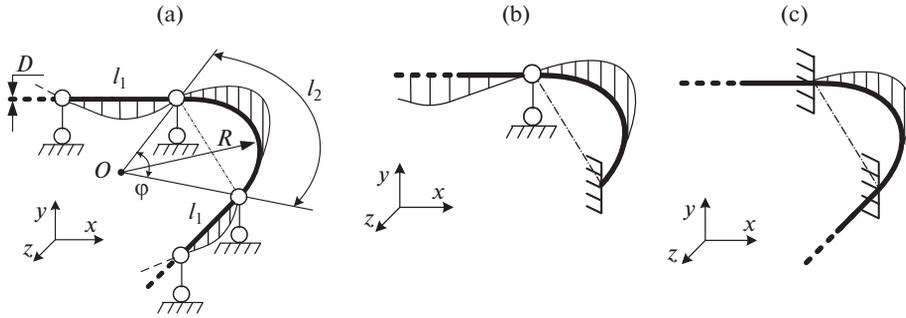


Рис. 2. Изгибные колебания криволинейного участка.

По принципу суперпозиции разложим продольную силу P на две компоненты:

$$P = P_{\Delta T} + P_F = \alpha_t \cdot \Delta T \cdot ES + P_F \quad (1.8)$$

где $P_{\Delta T}$ – температурное усилие; P_F – сила; α_t – коэффициент температурного расширения.

Подставим выражения (1.4, 1.7 и 1.8) в уравнение (1.5) и получим зависимость первой частоты собственных колебаний прямого участка от температурного, силового воздействия, а также способа закрепления в виде общего условия работоспособности:

$$f_1 = \left(\frac{\alpha}{\pi l}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4m} [\pi^2 EJ_z - \mu^2 \cdot l^2 \cdot (\alpha_t \cdot \Delta T \cdot ES + P_F)]} \geq [f_1] \quad (1.9)$$

При возрастании нагрузки (1.8), первая собственная частота колебаний прямого участка будет снижаться вплоть до нуля, что соответствует динамическому критерию потери устойчивости (рис.1,б). Таким образом, условие (1.10) соответствует одновременному выполнению обоих критериев работоспособности (1.2): обеспечение минимального значения первой собственной частоты колебаний и устойчивости участка.

1.2. Криволинейные участки. Расчет криволинейных участков сложнее из-за широкой вариативности геометрии и ее нелинейного влияния на получаемое решение [33–36]. Другой особенностью динамики криволинейных участков является их склонность к образованию, совместно со смежными участками, сложных изгибно-крутильных мод колебаний на более низких частотах, чем у соседних прямых участков. Упростить данную задачу возможно путем установки промежуточных опор по границам криволинейных участков и принятия ряда ограничений на их геометрию. Будем рассматривать криволинейные участки, изогнутые по дуге окружности с углом охвата до 180° , у которых главные оси лежат в плоскости дуги. Соотношения размеров криволинейных участков соответствует условиям (1.1), к которым добавляется условие на отношение поперечного размера сечения участка к радиусу его изгиба (рис. 2,а):

$$R/D \geq 10 \quad (1.10)$$

где D – поперечный размер; R – радиус дуги.

Принятые ограничения упрощают решение за счет разделения мод колебаний и создают условия для изгибной формы колебаний криволинейного участка на первой собственной частоте. В научной литературе предлагаются сложные зависимости [24, 26, 33–36] для расчета криволинейных участков, которые непригодны для предлагаемой методики. Поэтому нами была проведена серия расчетов криволинейных участков осесимметричного поперечного сечения с соотношениями размеров:

$$R/D = 10 \dots 100, \quad l_2/D = 10 \dots 100 \quad (1.11)$$

с целью упрощения указанных зависимостей и контролем роста погрешности не более 5...7%. В результате были получены упрощенные выражения (1.12), которые определяют первую собственную частоту изгибных колебаний криволинейных участков для углов дуги до 180° при различных условиях закрепления (рис. 2).

$$f_{1a} = \left(1 - \frac{R^3 \varphi^3}{4.86 l_1^3}\right)^2 \cdot \frac{1.57}{l_1^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad f_{1b} = \frac{2.45 - 0.32 \cdot \varphi}{\varphi^2 \cdot R^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (1.12)$$

$$f_{1c} = \frac{3.6 - 0.2 \cdot \varphi}{\varphi^2 \cdot R^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

Шарнирно опертый криволинейный участок, в отличие от других способов закреплений на рис. 2, обладает возможностью движения как жесткого целого, вращаясь в шарнирных опорах. В составе протяженной многоопорной конструкции такой участок неподвижен за счет его присоединения к смежным прямым участкам, для которых он становится дополнительной нагрузкой, понижающей исходное значение их первой собственной частоты. Поэтому выражение для f_{1a} (1.12) фактически определяет первую собственную частоту прямых участков, соединенных с криволинейным (рис. 2,а). Значение же изгибной собственной частоты колебаний криволинейного участка при принятых допущениях и ограничениях на длину всегда будет не ниже, чем для прямых участков.

Одним из принятых в методике допущений является условие равновесности всех участков, которое выразим через длину прямых и криволинейных участков. Приравняв выражения для первых собственных частот колебаний прямого (1.4) и криволинейного (1.12) участков для случаев закреплений с заделкой (рис. 2,б,с) получаем следующие соотношения:

$$l_{2b} = l_{1b} \sqrt{1 - 0.056 \cdot \varphi}, \quad l_{2c} = l_{1c} \sqrt{1 - 0.13 \cdot \varphi} \quad (1.13)$$

Криволинейный участок с шарнирными опорами всегда будет локально понижать значение первой собственной частоты смежных прямых участков. Ограничивая это понижение частоты допустимой величиной, например, 5...10%, и также приравнявая выражения для первых собственных частот колебаний прямого и криволинейного участков, получаем условие на длину дуги в виде:

$$l_{2a} = (0.5...0.6) l_{1a} \quad (1.14)$$

Зная длину криволинейного участка и угол его дуги, можно найти требуемый радиус кривизны, при котором будет обеспечено условие равновесности:

$$R = l_2 / \varphi \quad (1.15)$$

Выполнение вышеуказанных условий (1.13–1.15) обеспечивает равную жесткость и частоту колебаний прямых и криволинейных участков. Если же выбрать меньшую длину дуги или ее радиус, то жесткость криволинейного участка будет выше, чем у прямых участков и его можно исключить из рассмотрения в составе плоской балочной многоопорной конструкции, так как такая геометрия заведомо обеспечивает выполнение условий работоспособности (1.2).

Устойчивость криволинейных участков не рассматривается, поскольку при действии продольной силы изогнутая геометрия позволяет им весьма свободно деформироваться в широком диапазоне и условие устойчивости для них теряет смысл.

Далее используем полученные решения применительно к созданию методики обоснованного выбора многоопорного закрепления составных плоских балочных конструкций.

2. Методика выбора схемы закрепления. Расчет собственных частот колебаний и критической нагрузки связан с коэффициентами опор α и μ в выражениях (1.4, 1.7),

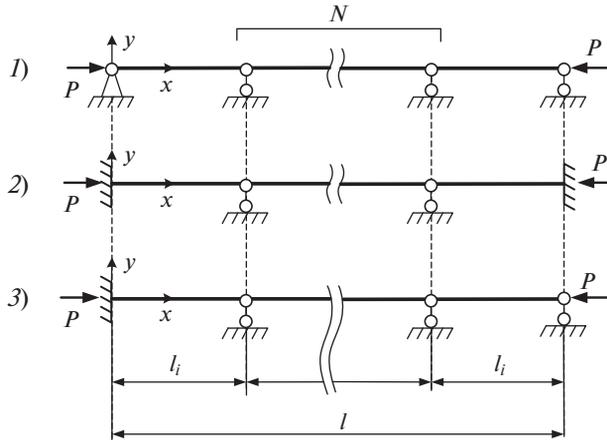


Рис. 3. Базовые схемы закрепления многоопорной балочной конструкции.

которые определяются только условиями закрепления и обычно используются для проверочных расчетов путем их выбора из справочников для конструкции с заданными закреплениями. Рассмотрим постановку и решение обратной задачи: управление первой собственной частотой колебаний и первой критической нагрузкой многоопорной конструкции с помощью обоснованного выбора требуемой схемы закрепления через коэффициенты опор.

2.1. Выбор базовых схем расстановки опор. С учетом принятых ранее допущений рассмотрим три базовые схемы закрепления плоских балочных конструкций (рис. 3). Считаем, что жесткость криволинейных участков в этих схемах эквивалентна прямым участкам и отдельно их не рассматриваем.

Длина каждого пролета равна:

$$l_i = l / (N + 1)$$

где l – длина всей конструкции; l_i – длина пролета; N – число промежуточных опор.

Значения коэффициентов опор α и μ для первых собственных частот колебаний и первых критических сил для каждой схемы взяты из справочников [23–27] и приведены в табл. 1.

Набор базовых схем можно изменять в соответствии со спецификой исследуемых конструкций, а значения коэффициентов опор для них рассчитать или взять из справочников.

2.2. Критерий выбора схемы закреплений. Условия работоспособности (1.2) плоской балочной конструкции основывается на выражении (1.9), в которое входят два неравнозначных коэффициента опор α и μ , что затрудняет однозначный выбор требуемой схемы закрепления. Для получения единого критерия выбора схемы закрепления выполним нормирование исходных значений коэффициентов опор (табл. 1) по отношению к коэффициентам опор абсолютно свободной прямолинейной балки:

$$\alpha' = \left(\frac{\alpha \cdot (N + 1)}{\pi} \right)^2, \quad \mu' = \left(\frac{N + 1}{\mu} \right)^2 \quad (2.1)$$

Полученные значения нормированных коэффициентов опор сведены в табл. 2.

Значения нормированных коэффициентов опор окажутся очень близкими друг к другу в пределах каждого варианта закрепления (табл. 2). Принимая условие их равен-

Таблица 1. Исходные значения коэффициентов опор

№ схемы	Коэф- фициент	Число промежуточных опор N										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	α	π										
	μ	1										
2	α	4.730	3.927	3.557	3.393	3.310	3.260	3.230	3.210	3.196	3.186	3.180
	μ	0.5	0.699	0.814	0.879	0.917	0.939	0.954	0.964	0.971	0.977	0.978
3	α	3.927	3.393	3.261	3.210	3.186	3.173	3.164	3.159	3.156	3.153	3.151
	μ	0.7	0.879	0.939	0.964	0.977	0.983	0.988	0.99	0.992	0.994	0.996

Таблица 2. Нормированные значения коэффициентов опор

№ схемы	Коэф- фициент	Число промежуточных опор N										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	α'	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
	μ'	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
2	α'	2.267	6.250	11.54	18.66	27.75	38.77	51.80	66.82	83.83	102.8	124.0
	μ'	4	8.187	13.58	20.71	29.73	40.83	53.84	68.87	85.91	104.8	126.5
3	α'	1.563	4.666	9.697	16.71	25.72	36.72	49.70	64.71	81.75	100.7	121.7
	μ'	2.041	5.177	10.21	17.22	26.19	37.26	50.20	65.30	82.31	101.2	122.0

ства, получаем критерий выбора схемы закрепления в виде минимально допустимого значения коэффициента опор:

$$\alpha_{\min} = \alpha' = \mu' \quad (2.2)$$

Подставив равенство (2.2) в условие работоспособности (1.9), получаем квадратное уравнение, решение которого дает требуемое значение критерия выбора схемы закреплений:

$$\min(\alpha', \mu') \geq \alpha_{\min} = C_P + \sqrt{C_P^2 + \frac{4m[f_1]^2 l^4}{\pi^2 EJ}} \quad (2.3)$$

где C_P – коэффициент учета влияния продольной силы P , определяется как:

$$C_P = \frac{l^2}{2\pi^2 EJ} (\alpha_l \cdot \Delta T \cdot ES + P_F) \quad (2.4)$$

Получаем, что для обоснованного выбора схемы закрепления необходимо из табл. 2 выбрать такую базовую схему и число промежуточных опор, для которых значения коэффициентов опор α' и μ' будут не меньше, чем рассчитанное значение по формуле (2.3).

Нормирование коэффициентов опор по зависимостям (2.1) теперь устанавливает удобную прямую зависимость для первой собственной частоты колебаний, критической силы и критической температуры от новых значений коэффициентов опор, которые принимаю вид:

$$f_1(P) = \frac{\alpha'}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{4m} \left(\pi^2 EJ - \frac{l^2}{\mu'} \cdot (\alpha_t \cdot \Delta T \cdot ES + P_F) \right)} \geq [f_1] \quad (2.5)$$

$$P_{cr1}(P) = \frac{\mu' E}{l^2} \cdot \left(\pi^2 J - \frac{4l^4 [f_1]^2 m}{\alpha'^2 E} \right) + P_F \quad (2.6)$$

$$\Delta T_{cr1} = \frac{1}{\alpha_t \cdot ES} \cdot \left[\mu' \cdot \left(\frac{\pi^2 EJ}{l^2} - \frac{4ml^2 [f_1]^2}{\alpha'^2} \right) - P_F \right] \quad (2.7)$$

Выбранная, согласно критерию (2.3), схема закрепления будет обеспечивать одновременное выполнение всех условий работоспособности (1.2) плоской многоопорной балочной конструкции, в чем можно убедиться, проверив их фактические значения по зависимостям (2.5–2.7).

2.3. Жесткость промежуточных опор. Изложенный выше метод выбора закреплений имеет недостаток, заключающийся в дискретности значений коэффициентов опор, что не позволяет, например, точно настроить конструкцию на требуемую первую собственную частоту колебаний или первую критическую нагрузку. Одним из способов решения этой проблемы является введение во все опоры такой жесткости, чтобы коэффициенты опор приняли требуемые значения и согласно уравнению (2.5) обеспечили необходимое значение первой собственной частоты колебаний. Существующие методы учета жесткости опор [37–43] неприемлемы для инженерных расчетов многоопорной конструкции из-за своей сложности и необходимости численного решения. Поэтому используем другой подход, основанный на аппроксимации зависимостей коэффициентов опор от жесткости и аналитического решения разрешающего уравнения.

2.3.1. Учет жесткости опор. Нахождение требуемой жесткости опор необходимо начинать с определения по формуле (2.3) требуемого значения критерия α_{min} и выбора такой базовой схемы и числа промежуточных опор, для которых значения коэффициентов опор α' и μ' будут несколько меньше, чем требуется по этому условию. Недостаточное значение коэффициентов опор будет скомпенсировано жесткостью опор, в качестве которой примем относительную величину C , определяемую как отношение жесткости опоры к изгибной жесткости единицы длины балки (рис. 1, а):

$$C = k \frac{l_i}{EJ}$$

где k – абсолютная жесткость опоры (Н*м).

Появление жесткости в опорах приводит к нарушению условия (2.2), поскольку при увеличении жесткости значения нормированных коэффициентов опор $\alpha'(C)$ и $\mu'(C)$ будут нелинейно и не равнозначно увеличиваться (рис. 4). Следовательно, подход, основанный на выражениях (2.2–2.4) в этом случае неприемлем. Кривые $\alpha'(C)$ и $\mu'(C)$ на рис. 4 построены по зависимостям (2.1) на основе аппроксимирующих функций для коэффициентов опор $\alpha(C)$ и $\mu(C)$, получение которых изложено в работе [44].

Применяя такую же квадратичную аппроксимацию и разделение диапазона жесткости опор на зоны, получим аппроксимирующие функции для нормированных коэффициентов опор в виде:

$$\alpha'(C) = a_1 \cdot C^2 + a_2 \cdot C + a_3; \quad \mu'(C) = b_1 \cdot C^2 + b_2 \cdot C + b_3 \quad (2.8)$$

Коэффициенты аппроксимирующих функций (2.8) определялись методом наименьших квадратов [45] и приведены в табл. 3, погрешность составляет менее 4.8%.

2.3.2. Разрешающее уравнение по определению жесткости опор. Преобразуем условие работоспособности (2.5) к виду:

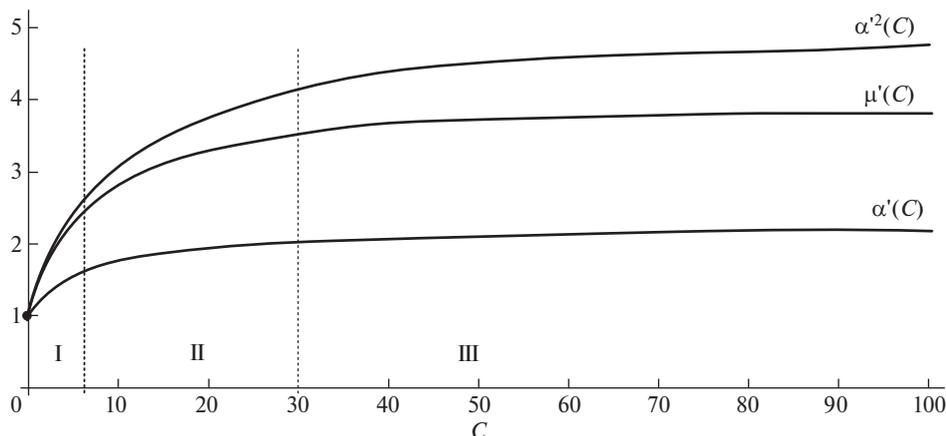


Рис. 4. Зависимости нормированных значений коэффициентов опор от жесткости.

$$\frac{l^2}{\mu'} \cdot (\alpha_t \cdot \Delta T \cdot ES + P_F) = \pi^2 EJ - \frac{4ml^4 f_1^2}{\alpha'^2} \quad (2.9)$$

где f_1 – требуемое значение первой собственной частоты колебаний.

Для сокращения записи введем коэффициенты:

$$a = l^2 \cdot (\alpha_t \cdot \Delta T \cdot ES + P_F), \quad b = \pi^2 EJ, \quad c = 4ml^4 f_1^2 \quad (2.10)$$

и уравнение (2.9) примет вид:

$$\frac{1}{\mu'(C)} = \frac{b}{a} - \frac{1}{\alpha'^2(C)} \cdot \frac{a}{c} \quad (2.11)$$

Дальнейшее решение разрешающего уравнения (2.11) требует наличия аналитических зависимостей для функций $\alpha'^2(C)$, $\mu'(C)$, в качестве которых выберем квадратичные функции вида (2.8). Вследствие высокой нелинейности этих функций, особенно функции $\alpha'^2(C)$, аппроксимировать их с теми же диапазонами, что и ранее (табл. 3) затруднительно из-за недопустимого роста погрешности. Для ограничения погрешности аппроксимации диапазон жесткостей опор был разбит на четыре новые зоны: I: 0...7; II: 7...30; III: 30...300; IV: 300...∞ (рис. 4). Результаты приведены в табл. 4, погрешность аппроксимации до 3.5%.

Решение задачи различается в зависимости от номера зоны. Определить требуемую зону можно, рассчитав для граничных значений коэффициентов опор (табл. 4) максимальные значения первой собственной частоты колебаний (2.5), которые обеспечива-

Таблица 3. Коэффициенты аппроксимирующих функций

Зона	C	Коэффициенты функции $\alpha'(C)$			Коэффициенты функции $\mu'(C)$		
		a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
I	0...10	-0.00746	0.1496	1	-0.0162	0.346	1
II	10...100	-1E-4	0.0158	1.602	-2.4E-4	0.0372	2.49
III	100...1000	-2E-07	3.04E-4	2.154	-3.8E-7	5.68E-4	3.752

Таблица 4. Коэффициенты аппроксимирующих функций

Зона	C	Коэффициенты функции $\alpha^2(C)$			Коэффициенты функции $\mu'(C)$		
		a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
I	0...7	-0.0182	0.3694	1	-0.0212	0.371	1
II	7...30	-0.00234	0.14786	1.774	-0.002	0.11516	1.851
III	30...300	-2.6E-5	0.01192	3.768	-1.18E-5	0.005368	3.355
IV	300...∞	0	0	5.134	0	0	4

ет каждая зона. Если полученное максимальное значение первой собственной частоты колебаний для IV-й зоны меньше, чем требуемое значение, то это означает, что жесткость опор не сможет обеспечить требуемые условия работоспособности (1.2) и необходимо использовать другие методы: поменять базовую схему, увеличить число промежуточных опор, изменить геометрию, материал и т.д.

2.3.3. *Решение разрешающего уравнения.* Подставим квадратичные зависимости для $\alpha^2(C)$ и $\mu'(C)$ в уравнение (2.11), где искомую жесткость обозначим как x во избежание путаницы с одноименными коэффициентами:

$$\frac{1}{b_1 \cdot x^2 + b_2 \cdot x + b_3} = \frac{b}{a} - \frac{c}{a \cdot (a_1 x^2 + a_2 x + a_3)}$$

Преобразуем это выражение к уравнению 4-й степени:

$$A \cdot x^4 + B \cdot x^3 + C \cdot x^2 + D \cdot x + E = 0 \quad (2.12)$$

где

$$A = 1, \quad B = \frac{b_2}{b_1} + \frac{a_2}{a_1}, \quad C = \frac{b_3}{b_1} + \frac{a_2 b_2}{a_1 b_1} + \frac{a_3}{a_1} - \frac{a}{b b_1} - \frac{c}{b a_1}$$

$$D = \frac{a_2 b_3 + a_3 b_2}{a_1 b_1} - \frac{a a_2 + c b_2}{b a_1 b_1}, \quad E = \frac{a_3 (b b_3 - a) - c b_3}{b a_1 b_1}$$

Существуют различные подходы для аналитического решения уравнения (2.12), здесь используется подход, предложенный Ю.А. Несмеевым в работах [46, 47]. Дальнейшее решение представлено согласно его методу, с учетом значений коэффициентов (табл. 4) и того, что искомый корень будет первым положительным корнем уравнения 4-го порядка. Вначале определяются коэффициенты вспомогательного кубического уравнения:

$$a_B = 1, \quad b_B = -C, \quad c_B = B D - 4E, \quad d_B = -D^2 - B^2 E + 4CE$$

Для решения кубического уравнения находим коэффициенты:

$$p = \frac{3a_B c_B - b_B^2}{9a^2}, \quad q = \frac{(a_B b_B)^3}{27} - \frac{b_B c_B}{6a_B^2} + \frac{d_B}{2a_B}$$

Далее находим характерный угол φ :

$$\varphi = \arctg \left(\sqrt{\frac{p^3}{q^2} - 1} \right)$$

Из трех корней кубического уравнения выбираем первое значение:

$$u_1 = 2r \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{3} \right) - \frac{a_B b_B}{3}$$

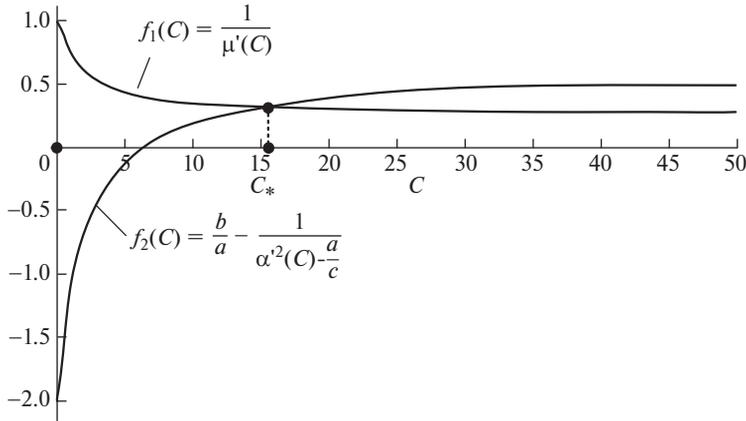


Рис. 5. Графическая интерпретация решения.

Теперь расчет сводится к решению двух квадратных уравнений, из которых требуются коэффициенты первого уравнения:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = \frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} + u_1 - C}, \quad k_3 = \frac{u_1}{2} - \sqrt{\frac{u_1^2}{4} - E}. \quad (2.13)$$

Искомая жесткость опор будет равна первому положительному корню:

$$C_* = x_1 = \frac{1}{2} \left(-k_2 + \sqrt{k_2^2 - 4k_3} \right), \quad k_* = C_* \cdot \frac{EJ}{l} \quad (2.14)$$

Графически, решение уравнения (2.11) можно представить в виде двух кривых, точка пересечения которых и определяет требуемое значение жесткости опор C_* (рис. 5).

Кривая $f_1(C)$ здесь фиксированная, поскольку определяется только функцией $\mu'(C)$, а кривая $f_2(C)$ перемещается относительно нее в зависимости от исходных данных задачи (2.10) и определяет искомое решение в виде точки их пересечения с координатой C_* .

При жесткости опор $C > 300$ (IV-я зона) решение можно построить по изложенной выше схеме, однако увеличение жесткости опор с $C = 300$ до $C = \infty$ приведет к росту первой собственной частоты всего на 1.3%, а критическая сила возрастет на 2.4%. Данные изменения находятся в пределах погрешностей остальных зон, поэтому будем рассматривать вариант $C > 300$ как жесткая заделка и использовать фиксированные значения для коэффициентов опор (табл. 4).

Проверить корректность полученного значения жесткости опор C_* для любой зоны можно, если подставить эту величину в аппроксимирующие функции $\alpha'(C_*)$ и $\mu'(C_*)$ и по формуле (2.5) определить фактическое значение первой собственной частоты f_1 .

Для верификации разработанной методики и оценки точности получаемых результатов выполним сравнительные расчеты плоской протяженной балочной конструкции.

3. Примеры расчета. В качестве примера расчета рассмотрим две плоские протяженные конструкции круглого тонкостенного поперечного сечения: прямой и криволинейный трубопроводы. Исходное закрепление в обоих примерах выполнено в виде жесткой заделки на обоих краях трубопровода, промежуточных опор нет. Основные параметры трубопровода: круглое поперечное сечение наружным диаметром $D = 15$ мм; толщина стенки $t = 1$ мм; материал: сталь $E = 2 \times 10^5$ МПа, плотностью $\rho = 7800$ кг/м³, КТР $\alpha_t = 1.2 \times 10^{-5}$ 1/°С.

Таблица 5. Сравнение результатов расчета для прямого трубопровода

Параметр	f_1 , Гц		
	Предлагаемая методика	МКЭ	Отклонение, %
$\Delta T = 90^\circ\text{C}$, $C_* = 0$ и $N = 6$	227.6	230	1
$\Delta T = 90^\circ\text{C}$, $C_* = 0$ и $N = 5$	138.4	139.6	0.87
$\Delta T = 90^\circ\text{C}$, $C_* = 0.58$ и $N = 5$	150	155.8	3.9
$\Delta T = 90^\circ\text{C}$, $C_* = 12$ и $N = 5$	350	335.4	4.2
$\Delta T = 90^\circ\text{C}$, $C_* = 101$ и $N = 5$	440	430.9	2.1

Для обеих конструкций требуется выбрать такой способ закрепления, который обеспечит значение $[f_1] = 150$ Гц при температуре $\Delta T = 90^\circ\text{C}$. Выполним решение по разработанной методике, а полученные результаты расчетов верифицируем методом конечных элементов в программе Ansys для балочной модели с использованием конечных элементов BEAM189 и COMBIN14.

3.1. Прямой трубопровод. Длина трубопровода $l_1 = 2.5$ м. Согласно заданным условиям работоспособности, рассчитаем минимальное значение коэффициента опор по формуле (2.3), получаем: $C_p = 13.9$ и $\alpha_{\min} = 41.4$. Из табл. 2 выбираем базовую схему 2 при $N = 6$ и $l_i = 0.357$ м, для которой $\alpha'(C) = 51.8$ и $\mu'(C) = 53.83$, что с запасом обеспечивает условия работоспособности (1.2). Для проверки, рассчитаем фактические значения параметров по формулам (2.5, 2.7), получим: $f_1 = 227.6$ Гц и $\Delta T_{\text{кр}1} = 137.8^\circ\text{C}$.

Далее выполним уточненный расчет для достижения значения первой собственной частоты $f_1 = 150$ Гц при заданной температуре. Для этого уменьшаем число промежуточных опор ($N = 5$ и $l_i = 0.417$ м) и получаем значения коэффициентов опор $\alpha'(C) = 38.76$ и $\mu'(C) = 40.83$, которые дают меньшие значения требуемых параметров: $f_1 = 138.4$ Гц и $\Delta T_{\text{кр}1} = 82.6^\circ\text{C}$. Проверка диапазона жесткости показывает, что решение находится в I-й зоне, которая может обеспечить $f_{1\text{max}} = 311$ Гц. Подставляя исходные данные в уравнение (2.11), получаем решение $C_* = 0.58$ и $k = 300$ Н · м.

С целью проверки остальных зон, повысим требования к условиям работоспособности трубопровода. Пусть, например, необходимо обеспечить значение $[f_1] = 350$ Гц при той же температуре, это соответствует II-й зоне и после решения разрешающего уравнения (2.11) получаем $C_* = 12$ и $k_* = 6238$ Н · м. Аналогично для III-й зоны при $[f_1] = 440$ Гц получаем $C_* = 101$, $k = 52527$ Н · м.

Проверка всех полученных решений выполнена в программе Ansys, на рис. 6 показаны некоторые графические результаты расчетов, а в табл. 5 приведены числовые данные.

Полученные результаты свидетельствуют о хорошей сходимости результатов, максимальное отклонение составляет 4.2%.

3.2. Криволинейный трубопровод. Конструкция криволинейного трубопровода (рис. 7,а) состоит из прямых и криволинейных участков углом 90° размерами $R_1 = 0.29$ м, $R_2 = 0.16$ м, $l_2 = 2.5$ м, $l_4 = 0.5$ м. Геометрия криволинейных участков удовлетворяет условиям равновесности, следовательно, их можно рассматривать как прямые участки такой же длины. Рассчитаем требуемое минимальное значение коэффициента опор: $C_p = 35.55$ и $\alpha_{\min} = 105.98$. Выбираем закрепление по базовой схеме 2, $N = 10$ и

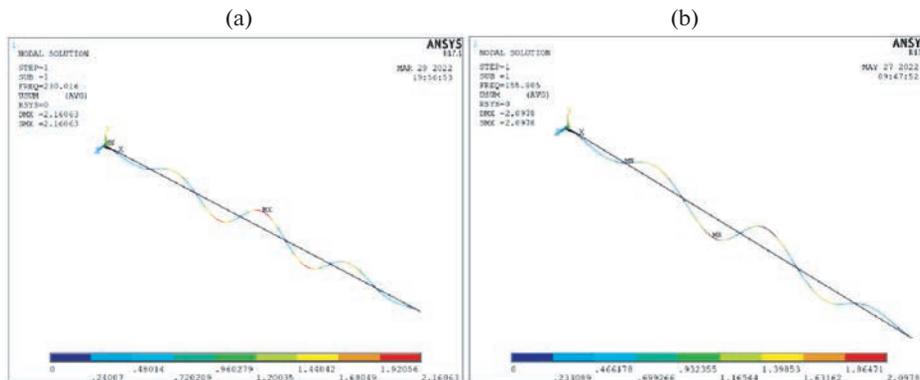


Рис. 6. Прямой трубопровод (а) $\Delta T = 90^\circ\text{C}$, $\Delta C = 0$ и $N = 6$; (б) $\Delta T = 90^\circ\text{C}$, $\Delta C = 0.58$ и $N = 5$.

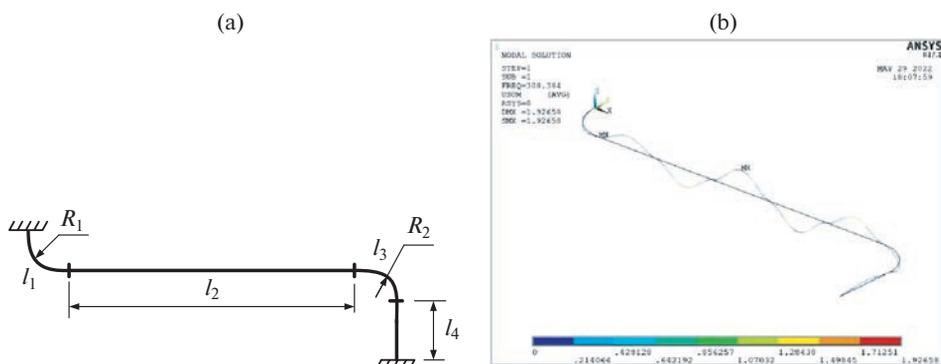


Рис. 7. Криволинейный трубопровод (а) исходная схема; (б) решение при $\Delta E = 90^\circ\text{C}$, $C_* = 146$, $N = 7$.

$l_i = 0.364$ м, для которой $\alpha'(C) = 123.98$ и $\mu'(C) = 126.5$, что с запасом обеспечивает условия работоспособности: $[f_j] = 202$ Гц и $\Delta T = 121.6^\circ\text{C}$.

Обеспечим более точное значение первой собственной частоты колебаний трубопровода, для этого выбираем вариант $N = 7$, $l_i = 0.5$ м. Решение уравнения (2.11) в этом случае показывает, что условие работоспособности будет выполнено при $C_* = 3.33$ и $k = 1444$ Н · м. Также проверим остальные зоны: зададим $[f_j] = 250$ Гц при той же температуре (II-я зона) и после расчета получаем $C_* = 19.4$ и $k_* = 8401$ Н · м. Задавая $[f_j] = 300$ Гц для III-й зоны получаем $C_* = 146$, $k = 63519$ Н · м.

Результаты сравнительных расчетов на рис. 7 и в табл. 6 показали хорошую сходимость результатов по контролируемым параметрам.

Сравнение результатов расчета по предложенной методике с численными решениями по методу конечных элементов показывает максимальное различие в результатах около 6.7%.

4. Обсуждение. Задача расчета собственных частот колебаний и критических нагрузок, особенно с учетом жесткости опор, действия продольной силы и температуры даже по отдельности представляют собой сложные математические задачи, решение ко-

Таблица 6. Сравнение результатов расчета для криволинейного трубопровода

Параметр	f_1 , Гц		
	Предлагаемая методика	МКЭ	Отклонение, %
$\Delta T = 0^\circ\text{C}$ и $C_* = 0$, $N = 7$	164.8	170.7	3.58
$\Delta T = 90^\circ\text{C}$ и $C_* = 3.33$, $N = 7$	150	159.89	6.7
$\Delta T = 90^\circ\text{C}$ и $C_* = 1444$, $N = 7$	250	243.84	2.46
$\Delta T = 90^\circ\text{C}$ и $C_* = 63518$, $N = 7$	300	308.38	2.48

торых обычно требует применения численных методов. Аппроксимация зависимостей коэффициентов опор при колебаниях и потери устойчивости с помощью аналитических функций позволила получить весьма простое решение, на основе которого разработан проектный подход по выбору схемы закрепления, видов и жесткости опор, обеспечивающий заданные значения первой собственной частоты колебаний и первой критической нагрузки для плоской балочной конструкции. Предложенная здесь методика выбора закреплений основана на известных положениях теории колебаний и теории устойчивости балок с учетом действия продольных сил и поэтому полученные результаты хорошо согласуются с известными зависимостями, которые становятся частными случаями предложенного метода.

Принятые ограничения на размерность конструкции, форму и размеры поперечного сечения позволили получить весьма простую и гибкую аналитическую формулировку методики, которая может быть легко модифицирована для решения сопутствующих задач: обоснование геометрической формы и размеров сечения, материала и др. Указанные ограничения на геометрию рассчитываемой конструкции (1.1, 1.10–1.14) на практике не являются строгими границами, а только определяют области, где решение будет иметь минимальную погрешность. Например, в работе [48] по предложенной методике получено решение для протяженной конструкции волноводов, имеющей несимметричное тонкостенное поперечное сечение, при этом максимальное отклонение для балочной модели составило всего 2.5% и 6.39% для оболочечной модели.

Аппроксимация нелинейных зависимостей значений коэффициентов опор от жесткости в виде квадратичных функций с разделением области изменения жесткости на зоны позволило получить приемлемую погрешность аппроксимации и получить разрешающее уравнение задачи 4-й степени (2.12). Данная степень является наивысшей степенью алгебраического уравнения, для которого существует аналитическое решение, что накладывает ограничения на степени аппроксимирующих функций. Значения коэффициентов аппроксимирующих функций (табл. 4) определялись методом наименьших квадратов из условия максимально точного равенства на границах зон для их плавного сопряжения и равномерного распределения погрешностей по знакам в пределах каждой зоны. Если первое условие исключить, то это позволит снизить максимальную погрешность по зонам, однако переход между зонами будет сопровождаться некоторой разрывностью решений.

Вследствие отсутствия известных решений подобных задач аналитическими методами для сравнения использовалось численное решение методом конечных элементов, реализованным в программе Ansys, которая позволяет проводить расчеты собственных частот колебаний и критической нагрузки с учетом жесткости опор и температуры. Сравнение результатов расчета показывает хорошую сходимость результатов

и различие в результатах около 3–5%, что вполне достаточно для инженерных прикладных расчетов балочных моделей конструкций.

Предложенный в работе подход позволяет проводить обоснованный выбор способа закреплений плоских балочных конструкций различного назначения для обеспечения их первой собственной частоты колебаний и первой критической нагрузки, которые имеют изгибную форму деформации. Возможными направлениями следующих исследований являются учет второй и последующих собственных частот, критических нагрузок, а также рассмотрение других видов форм колебаний и потери устойчивости: крутильные, продольные и др.

Заключение. Разработана методика управления динамическим поведением протяженных балок посредством обоснованного выбора схемы закрепления, обеспечивающая их работоспособность при заданных требованиях по частоте собственных колебаний и критической силе (или температуре). Предложенный метод имеет простую аналитическую формулировку, что позволяет инженеру-проектировщику оперативно и обоснованно проводить многофакторное исследование или проектирование любых протяженных многоопорных конструкций для обеспечения ими заданных значений первой собственной частоты колебаний и устойчивости с учетом температуры.

Методика верифицирована сравнительным расчетом прямолинейного участка трубопровода методом конечных элементов в программе Ansys для балочной и оболочечной моделей и показала хорошую сходимость по всем исследуемым параметрам.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края и Красноярского краевого фонда науки в рамках научного проекта № 20-48-242922.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн М.Г. Вибрационная теория многоопорных балок // Вестник инженеров и техников. 1933. № 4. С. 142–145.
2. Miles L.W. Vibration of beams on many supports // ASCE J. Eng. Mech. 1956. V. 82. P. 1–9.
3. Zhu L., Elisacoff I., Lin Y.K. Free and forced vibrations of periodic multispan beams // Shock Vibr. 1994. V. 1. № 3. P. 217–232.
4. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
5. Доев В.С. Поперечные колебания балок. М.: КНОРУС, 2016. 412 с.
6. Banakh L.Y. Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure. Berlin: Springer, 2010. 262 p.
7. Benaroya H., Nagurka M., Han S. Mechanical Vibration. Boca Raton, Florida: Taylor and Francis, 2017. 602 p.
8. Bottega W.J. Engineering Vibrations. N. Y.: CRC Press, 2006. 750 p.
9. Clough R.E. Dynamics of Structures. 3th ed. McGraw-Hill Education, 1995. 752 p.
10. Geradin M., Rixen D.J. Mechanical Vibrations: Theory and Application to Structural Dynamics. 3rd Ed. L.: Wiley and Sons, 2015. 617 p.
11. Hagedorn P., Dasgupta A. Vibrations and Waves in Continuous Mechanical Systems. John Wiley & Sons, 2007. 388 p.
12. Hartog J.P. Mechanical Vibrations. N.Y.: Dover Publications, 1985. 449 p.
13. Inman D.J. Engineering Vibration. Prentice Hall, 2014. 720 p.
14. Kelly S.G. Advanced Vibration Analysis. Boca Raton: CRC Press, 2006. 650 p.
15. Gupta S.G. Natural flexural waves and the normal modes of periodically-supported beams and plates // JSV. 1970. V. 13. № 1. P. 89–101.
[https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(70\)80082-7](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(70)80082-7)
16. Zhao Z., Wen S., Li F., Zhang C. Free vibration analysis of multi-span Timoshenko beams using the assumed mode method // Arch. Appl. Mech. 2018. V. 88. № 7. P. 1213–1228.
<https://doi.org/10.1007/s00419-018-1368-8>
17. Zhu L., Elishakoff, I., Lin Y.K. Free and forced vibrations of periodic multispan beams // Shock Vib. 1994. V. 1. № 3. P. 217–232.
<https://doi.org/10.3233/SAV-1994-1302>

18. *Thomsen J.J.* Vibrations and Stability: Advanced Theory, Analysis, and Tools. 2nd Ed. N.Y.: Springer, 2003. 404 p.
19. *Timoshenko S.P., Gere J.M.* Theory of Elastic Stability. N. Y.: Courier Corporation, 2009. 541 p.
20. *Алфутов Н.А., Колесников К.С.* Устойчивость движения и равновесия. Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 256 с.
21. *Thomsen J.J.* Vibrations and Stability. Advanced Theory, Analysis, and Tools. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin, Heidelberg, 2003. 420 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-10793-5>
22. *Trahair N.S.* Buckling analysis design of steel frames // *J. Constr. Steel Res.* 2009. V. 65. № 7. P. 1459–1463.
<https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2009.03.012>
23. *Биргер И.А., Пановко Я.Г.* Прочность, устойчивость, колебания. Т. 3. М.: Машиностроение, 1988. 567 с.
24. *Уманский А.А.* Справочник проектировщика. Т. 2. М.: Стройиздат, 1973. 415 с.
25. *Корнев Б.Г.* Справочник по динамике сооружений. М.: Стройиздат, 1972. 511 с.
26. *Blevins R.D.* Formulas for Dynamics, Acoustics and Vibration. L.: John Wiley & Sons, 2016. 464 p.
27. *Wang C.M., Wang C.Y.* Exact Solutions for Buckling of Structural Members. Boca Raton: CRC Press, 2005. 224 p.
28. *Mityaev A.E., Kudryavtsev I.V., Khomutov M.P., Brungardt M.V., Kolotov A.V.* Estimation of the minimum beam length for the static, dynamic, and stability problems // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2021. V. 1155. P. 012101.
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/1155/1/012101>
29. *Galef A.E.* Bending frequencies of compressed beams // *J. Acoust. Soc. Am.* 1968. V. 44. № 2. P. 643.
<https://doi.org/10.1121/1.1911144>
30. *Bokaian A.* Natural frequencies of beams under compressive axial loads // *JSV.* 1988. V. 126. № 1. P. 49–65.
[https://doi.org/10.1016/0022-460X\(88\)90397-5](https://doi.org/10.1016/0022-460X(88)90397-5)
31. *Bokaian A.* Natural frequencies of beams under tensile axial loads // *JSV.* 1990. V. 142. № 3. P. 481–498.
[https://doi.org/10.1016/0022-460X\(90\)90663-K](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90663-K)
32. *Stephen N.G.* Beam vibration under compressive axial load-upper and lower bound approximation // *JSV.* 1989. V. 131. № 2. P. 345–350.
[https://doi.org/10.1016/0022-460X\(89\)90498-7](https://doi.org/10.1016/0022-460X(89)90498-7)
33. *Грудев И.Д.* Колебания криволинейных стержней. М.: МИК, 2007. 254 с.
34. *Auciello N.M., De Rosa M.A.* Free vibrations of circular arches: a review // *JSV.* V. 176. № 4. 1994. P. 433–458.
<https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1388>
35. *Chidamparam P., Leissa A.W.* Vibrations of planar curved beams, rings, and arches // *ASME. Appl. Mech. Rev.* 1993. V. 46. № 9. P. 467–483.
<https://doi.org/10.1115/1.3120374>
36. *Markuš Š., Tibor N.* Vibration of Curved Beams // *Shock Vibr. Dig.* 1981. V. 13. P. 3–14.
37. *West H.H., Mafi M.* Eigenvalues for beam-columns on elastic supports // *J Struct Eng (US).* 1984. V. 2110. № 6. P. 1305–1320.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1984\)110:6\(1305\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1984)110:6(1305))
38. *Lin Y.K.* Free Vibration of a continuous beam on elastic supports // *IJMS.* 1962. V. 4. P. 409–423.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(62\)80027-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(62)80027-7)
39. *Naguleswaran S.* Transverse vibration of an Euler-Bernoulli uniform beam on up to five resilient supports including ends // *JSV.* 2003. V. 261. № 2. P. 372–384.
[https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01238-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01238-5)
40. *Lin H., Chang S.C.* Free vibration analysis of multi-span beams with intermediate flexible constraints // *JSV.* 2005. V. 281. № 1–2. P. 155–169.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.01.010>
41. *Maurizi M.J., Bambill D.V., Bellés P.M., De Rosa M.A., Grossi R.O., Marcelo A.C., Zannier L.* Free vibrations of Bernoulli-Euler beams with intermediate elastic support: a concise thematic recension // *JSV.*

2005. V. 281. № 3–5. P. 1238–1239.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.06.014>
42. Luo J., Zhu S., Zhai W. Exact closed-form solution for free vibration of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams with intermediate elastic supports // IJMS. 2022. V. 213. P. 106842.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106842>
43. Chonan S., Sasaki M. Vibration and stability of elastically supported multi-span beams under conservative and non-conservative loads // JSV. 1985. V. 99. № 4. P. 545–556.
[https://doi.org/10.1016/0022-460X\(85\)90539-5](https://doi.org/10.1016/0022-460X(85)90539-5)
44. Кудрявцев И.В., Рабецкая О.И., Митяев А.Е. Аппроксимация значений коэффициентов опор балки при колебаниях и потери устойчивости // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. № 3. С. 461–474.
<https://doi.org/10.31772/2712-8970-2022-23-3-461-474>
45. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. М.: Вильямс, 2016. 912 с.
46. Несмеев Ю.А. Об одном подходе к решению алгебраических уравнений 3-й и 4-й степеней // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2011. № 1 (13). С. 26–30.
47. Несмеев Ю.А. Развитие одного подхода к решению алгебраического уравнения 4-й степени // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2013. № 4 (24). С. 29–38.
48. Кудрявцев И.В. Обеспечение динамического состояния прямолинейных волноводных трактов при нагреве с помощью расстановки опор // Вестник МАИ. 2021. № 4 (28). С. 76–89.
<https://doi.org/10.34759/vst-2021-4-92-105>

УДК 531.38; 531.39

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ПРЕЦЕССИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ
ТОЧКОЙ В ТРЕХ ОДНОРОДНЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ.
ПРЕЦЕССИОННО-ИЗОКОНИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА**

© 2023 г. Г. В. Горр^{a,*}

^aГосударственное бюджетное учреждение “Институт прикладной математики и механики”,
Донецк, Россия

*e-mail: gvgorr@gmail.com

Поступила в редакцию 11.08.2022 г.

После доработки 30.08.2022 г.

Принята к публикации 31.08.2022 г.

В статье рассмотрена постановка задачи о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, в силовом поле, которое является суперпозицией трех однородных полей. Получено новое решение уравнений движения, описывающее прецессионно-изоконическое движение относительно вертикали.

Ключевые слова: твердое тело, суперпозиция трех однородных силовых полей, прецессии, прецессионно-изоконические движения

DOI: 10.31857/S0572329922600633, EDN: JLSSOK

1. Введение. Прецессионные движения твердого тела, имеющего неподвижную точку, в частности, регулярные прецессии, применяются в моделировании технических объектов [1]. В динамике тяжелого твердого тела и ее обобщениях на случай сложных силовых полей они изучались Д. Гриоли [2], Ф. Кляйном и А. Зоммерфельдом [3], А. Брессаном [4], автором данной статьи [5] и другими [6–8]. Прецессионные движения характеризуются свойством постоянства угла между двумя осями l_1 , l_2 , проходящими через неподвижную точку, одна из которых (l_1) связана с телом-носителем, а другая (l_2) неподвижна в пространстве. В случае, когда одна из осей подвижной системы координат содержит ось l_1 , то целесообразно такую систему координат называть прецессионной системой координат. Согласно [2–4], прецессионные движения подразделяются на классы: если скорости прецессии и собственного вращения постоянны, то прецессия называется регулярной; если только скорость прецессии постоянна, то прецессия называется полурегулярной прецессией первого типа; если только скорость собственного вращения постоянна, то прецессию называют полурегулярной прецессией второго типа; в других случаях прецессия называется прецессией общего типа. Наибольшее количество прецессионных движений гиростата установлено для классов регулярных и полурегулярных прецессий первого типа. Следует отметить, что уникальными случаями прецессий тяжелого твердого тела, описываемых уравнениями Эйлера–Пуассона, являются случай регулярной прецессии Д. Гриоли [2], относительно наклонной оси, случай А.И. Докшевича [9], для которого постоянно произведение скоростей прецессии и собственного вращения, прецессия А. Брессана [4] в решении В. Гесса. Полурегулярные прецессии второго типа твердого тела и гиростата относятся к меньшему числу найденных прецессий. Например, в [4] доказано, что в

классической задаче полурегулярные прецессии второго типа динамически невозможны. Несмотря на это, в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом получены некоторые решения, имеющие такое свойство [8].

Отметим, что прецессии несимметричного твердого тела с жидким заполнением изучались В.Ю. Ольшанским [10–13], а регулярные прецессии тяжелого твердого тела в жидкости – В.Н. Рубановским [14]. В задаче о движении системы связанных твердых тел также установлен нетривиальный класс прецессий [15].

Анализ литературы, посвященной изучению задачи о движении гиростата в двух однородных силовых полях, показывает, что большинство статей посвящено качественным проблемам интегрируемости уравнений движения [16–19] с использованием аналогии [20]. Однако, существуют и некоторые исследования, в которых рассматриваются регулярные прецессии гиростата [21–23] в указанной задаче.

В данной статье дана постановка задачи о прецессиях твердого тела с неподвижной точкой в трех однородных силовых полях. Записаны уравнения движения, описывающие прецессионные движения твердого тела, в качестве подвижной системы координат принята прецессионная система координат [24] (одна из осей подвижной системы координат направлена по оси l_1). Редуцированные уравнения движения получены в независимом базисе $\mathbf{a} \in l_1$, $\boldsymbol{\gamma} \in l_2$ и $\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma}$. Их интегрирование рассмотрено в случае, когда совпадают скорости прецессии и собственного вращения. Данное свойство характеризует изоконическое движение твердого тела (подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости симметричны друг другу относительно касательной плоскости к соответствующим аксоидам). Таким образом, по терминологии [6] в данной статье рассматриваются условия существования прецессионно-изоконических движений твердого тела в трех однородных силовых полях. Следует отметить, что аналогами этих движений являются движение гироскопа Лагранжа с равными скоростями прецессии и собственного вращения, а также движение гироскопа Гриоли. Для случая, когда эллипсоид инерции тела является сферой, в статье показано, что угол нутации равен $\pi/3$.

2. Постановка задачи. Рассмотрим движение твердого тела, имеющего неподвижную точку, в силовом поле, которое является суперпозицией трех однородных и постоянных силовых полей. Обозначим через $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}^{(1)}, \boldsymbol{\gamma}^{(2)}$ единичные векторы, характеризующие направления сил $\mathbf{P}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ каждого из полей; C, C_1, C_2 – центры приведения сил; $\mathbf{s} = \mathbf{P}OC$, $\mathbf{r} = \mathbf{P}_1OC_1$, $\mathbf{p} = \mathbf{P}_2OC_2$; $Oxyz$ – подвижная система координат, O – неподвижная точка. Пусть тензор инерции тела в системе $Oxyz$ имеет значение $A = (A_{ij})$ ($i, j = \overline{1,3}$). Тело вращается вокруг точки O с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3)$ ($\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – единичные векторы системы $Oxyz$). Для векторов $\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{p}$ запишем соотношения

$$\mathbf{s} = s_1\mathbf{i}_1 + s_2\mathbf{i}_2 + s_3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{r} = r_1\mathbf{i}_1 + r_2\mathbf{i}_2 + r_3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{p} = p_1\mathbf{i}_1 + p_2\mathbf{i}_2 + p_3\mathbf{i}_3 \quad (2.1)$$

Тогда уравнения движения тела представим в виде [21]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}^{(1)} + \mathbf{p} \times \boldsymbol{\gamma}^{(2)} \quad (2.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(1)} = \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)} = \boldsymbol{\gamma}^{(2)} \times \boldsymbol{\omega} \quad (2.3)$$

где точка над переменными $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}^{(1)}, \boldsymbol{\gamma}^{(2)}$ обозначает дифференцирование по времени t . В формулах (2.2), (2.3) полагаем

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(1)} = 0, \quad \boldsymbol{\gamma}^{(2)} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}^{(1)}, \quad |\boldsymbol{\gamma}| = 1, \quad |\boldsymbol{\gamma}^{(1)}| = 1 \quad (2.4)$$

то есть направления силовых полей будут характеризоваться тройкой $\gamma, \gamma^{(i)}$ ($i = 1, 2$). Тогда очевидны равенства $\mathbf{P} = P \gamma, \mathbf{P}_i = P_i \gamma^{(i)}$ ($i = 1, 2$).

Рассмотрим прецессии тела относительно вектора γ . Они характеризуются инвариантным соотношением (ИС) [6, 7]

$$\mathbf{a} \cdot \gamma = a_0 \quad (a_0 = \cos \theta_0) \quad (2.5)$$

где θ_0 – угол между векторами \mathbf{a} и γ ($\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}, |\mathbf{a}| = 1$). Вектор угловой скорости тела на ИС (2.5) представим так [7]:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{a} + \dot{\psi} \gamma \quad (2.6)$$

Переменные ϕ, ψ и постоянную θ_0 можно трактовать, как углы Эйлера. Используя метод [7], запишем значение вектора $\gamma^{(1)}$:

$$\gamma^{(1)} = b_0 [a_0 \gamma \sin(\psi + \psi_0) - \mathbf{a} \sin(\psi + \psi_0) + (\mathbf{a} \times \gamma) \cos(\psi + \psi_0)] \quad (2.7)$$

где $b_0 = 1/a'_0$ ($a'_0 = \sin \theta_0$), ψ_0 – постоянная.

Значение вектора $\gamma^{(2)}$ найдем по второй формуле системы (2.4)

$$\gamma^{(2)} = b_0 [\mathbf{a} \cos(\psi + \psi_0) - a_0 \gamma \cos(\psi + \psi_0) + (\mathbf{a} \times \gamma) \sin(\psi + \psi_0)] \quad (2.8)$$

Таким образом, при получении (2.7), (2.8) полагалось, что $\mathbf{a} \times \gamma \neq \mathbf{0}$, то есть случай равномерных вращений тела исключаем из рассмотрения. Подвижную систему координат выберем следующим образом: направим вектор \mathbf{i}_3 по вектору \mathbf{a} . Тогда на основании ИС (2.5), первого уравнения из (2.3) имеем [6, 7]

$$\gamma = a'_0 \sin \phi \cdot \mathbf{i}_1 + a'_0 \cos \phi \cdot \mathbf{i}_2 + a_0 \mathbf{i}_3 \quad (\mathbf{i}_3 = \mathbf{a}) \quad (2.9)$$

На основании (2.6), (2.9) запишем компоненты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ вектора $\boldsymbol{\omega}$:

$$\omega_1 = a'_0 \dot{\psi} \sin \phi, \quad \omega_2 = a'_0 \dot{\psi} \cos \phi, \quad \omega_3 = \dot{\phi} + a_0 \dot{\psi} \quad (2.10)$$

На рис. 1 приведена геометрическая трактовка прецессий тела относительно вектора γ ($O\xi\eta\zeta$ – неподвижная система координат).

Замечание 1. При описании кинематических свойств в виде соотношений (2.5)–(2.10) использован метод [7], который отличается от методов, применяемых в [10–13, 21–23].

Замечание 2. Уравнения (2.2), (2.3) имеют интеграл энергии

$$A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\mathbf{s} \cdot \gamma + \mathbf{r} \cdot \gamma^{(1)} + \mathbf{p} \cdot \gamma^{(2)}) = 2E \quad (2.11)$$

где E – постоянная. Как показано в [6, 7], нахождение условий существования прецессий в задачах динамики твердого тела на основании (2.11) значительно упрощается.

3. Преобразование уравнения (2.2) на ИС (2.5). Внесем в уравнение (2.2) значение $\boldsymbol{\omega}$ из (2.6) и рассмотрим полученное уравнение в базисе $\mathbf{a}, \gamma, \mathbf{a} \times \gamma$ с учетом (2.7), (2.8):

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi}(\mathbf{Aa} \cdot \mathbf{a}) + \ddot{\psi}(\mathbf{Aa} \cdot \gamma) - \dot{\psi}^2 [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{A}\gamma \times \gamma)] - [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{s} \times \gamma)] - \\ & - b_0 \sin(\psi + \psi_0) \cdot \{a_0 [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \gamma) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}] + \mathbf{p} \cdot \gamma\} - \\ & - b_0 \cos(\psi + \psi_0) \cdot \{\mathbf{r} \cdot \gamma - a_0 [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{p} \times \gamma)]\} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi}(\mathbf{Aa} \cdot \gamma) + \ddot{\psi}(\mathbf{A}\gamma \cdot \gamma) + 2\dot{\phi}\dot{\psi}[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{A}\gamma \times \gamma)] + \dot{\phi}^2 [\gamma \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{Aa})] - \\ & - b_0 \sin(\psi + \psi_0) \cdot \{a_0 (\mathbf{p} \cdot \gamma) + [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \gamma) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p})]\} - \\ & - b_0 \cos(\psi + \psi_0) \cdot \{a_0 (\mathbf{r} \cdot \gamma) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) + [\mathbf{a} \cdot (\gamma \times \mathbf{p})]\} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

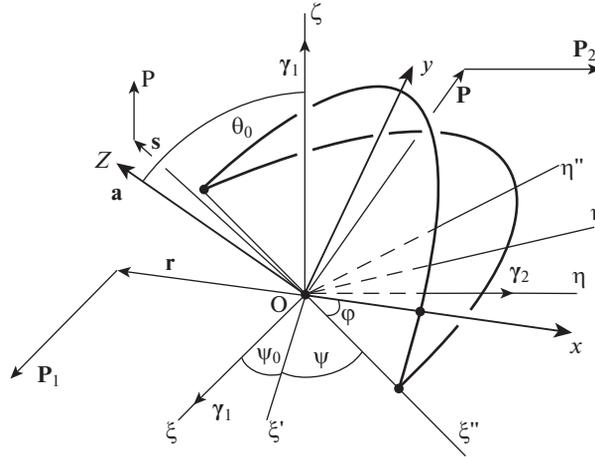


Рис. 1. Геометрическая трактовка прецессий твердого тела.

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi}[A\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a})] + \ddot{\psi}[A\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma})] + \dot{\phi}\dot{\psi}[2(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - a_0^2 \text{Sp}(A) - 2a_0(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma})] + \\ & + \dot{\phi}^2[(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - a_0(A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})] + \dot{\psi}^2[a_0(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - (A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma})] - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{s}) + a_0(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - \\ & - a_0'[(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \cos(\psi + \psi_0) - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \sin(\psi + \psi_0)] = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\text{Sp}(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ — след матрицы A .

По аналогии с (3.1)–(3.3) распишем интеграл (2.11) на ИС (2.5), (2.6):

$$\begin{aligned} & (A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\dot{\phi}^2 + 2(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma})\dot{\phi}\dot{\psi} + (A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma})\dot{\psi}^2 - 2\{(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \\ & + b_0[\sin(\psi + \psi_0) \cdot (a_0(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a})) + \\ & + \cos(\psi + \psi_0) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} - a_0(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma}))]\} = 2E \end{aligned} \quad (3.4)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} f_0(\varphi) &= a_0'(s_1 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi) + a_0 s_3 \\ \tilde{f}_0(\varphi) &= a_0'(s_2 \sin \varphi - s_1 \cos \varphi) \\ f_1(\varphi) &= a_0'[(a_0 r_1 + p_2) \sin \varphi + (a_0 r_2 - p_1) \cos \varphi - a_0' r_3] \\ f_2(\varphi) &= a_0'[(r_2 - a_0 p_1) \sin \varphi - (a_0 p_2 + r_1) \cos \varphi + a_0' p_3] \\ f_3(\varphi) &= a_0'[(p_1 - a_0 r_2) \sin \varphi + (p_2 + a_0 r_1) \cos \varphi] \\ f_4(\varphi) &= a_0'[(r_1 + a_0 p_2) \sin \varphi + (r_2 - a_0 p_1) \cos \varphi] \\ f_5(\varphi) &= a_0'[a_0(s_1 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi) - a_0' s_3] \\ f_6(\varphi) &= -a_0'[a_0'(r_1 \sin \varphi + r_2 \cos \varphi) + a_0 r_3] \\ f_7(\varphi) &= a_0'[a_0'(p_1 \sin \varphi + p_2 \cos \varphi) + a_0 p_3] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Сначала запишем интеграл (3.4), в силу (3.5):

$$\begin{aligned} & (A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\dot{\varphi}^2 + 2(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma})\dot{\varphi}\dot{\psi} + (A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma})\dot{\psi}^2 - \\ & - 2[f_0(\varphi) + b_0(f_1(\varphi)\sin(\psi + \psi_0) + f_2(\varphi)\cos(\psi + \psi_0))] = 2E \end{aligned} \quad (3.6)$$

Затем обратимся к уравнениям (3.1)–(3.3). На основании (3.5) имеем

$$\begin{aligned} & \ddot{\varphi}(A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) + \ddot{\psi}(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - \dot{\psi}^2[\mathbf{a} \cdot (A\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma})] + \ddot{f}_0(\varphi) - \\ & - b_0[f_3(\varphi)\sin(\psi + \psi_0) + f_4(\varphi)\cos(\psi + \psi_0)] = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\varphi}(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \ddot{\psi}(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - 2\dot{\varphi}\dot{\psi}[\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times A\boldsymbol{\gamma})] - \dot{\varphi}^2[\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times A\mathbf{a})] - \\ & - b_0[f_1(\varphi)\cos(\psi + \psi_0) - f_2(\varphi)\sin(\psi + \psi_0)] = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\varphi}[\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times A\mathbf{a})] + \ddot{\psi}[\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times A\boldsymbol{\gamma})] + \dot{\varphi}\dot{\psi}[2(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - a_0^2\text{Sp}(A) - 2a_0(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma})] + \\ & + \dot{\varphi}^2[(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - a_0(A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})] + \dot{\psi}^2[a_0(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - (A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma})] + f_5(\varphi) + \\ & + f_6(\varphi)\sin(\psi + \psi_0) + f_7(\varphi)\cos(\psi + \psi_0) = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Представление соотношений (3.1)–(3.4) в виде (3.6)–(3.9) связано с решением задачи о замене одного из уравнений (3.7)–(3.9) интегралом (3.6). Вычислим производную по времени от левой части уравнения (3.6), используя соотношения

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{\varphi}(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a}), \quad \dot{f}_0 = -\dot{\varphi}\tilde{f}_0(\varphi), \quad \dot{f}_1(\varphi) = \dot{\varphi}f_3(\varphi), \quad \dot{f}_2(\varphi) = \dot{\varphi}f_4(\varphi)$$

Если учесть в полученном уравнении соотношения (3.7), (3.8), то имеем тождество. То есть интеграл энергии можно рассматривать только вместо одного из уравнений (3.7), (3.8). Отметим, что данное свойство выполняется, если ни одно из уравнений (3.7), (3.8) не становится тождеством.

4. О регулярных прецессиях тела. Изучим случай регулярной прецессии тела: $\dot{\varphi} = n$, $\dot{\psi} = m$, где $\varphi = n$ и m – постоянные. Он рассмотрен частично в [21–23], но методом, который отличается от предложенного в данной статье. Запишем уравнения (3.6), (3.8) в виде

$$\begin{aligned} & f_1(\varphi)\sin(\psi + \psi_0) + f_2(\varphi)\cos(\psi + \psi_0) = a_0^2 m^2 H_2(\varphi) \\ & f_2(\varphi)\sin(\psi + \psi_0) - f_1(\varphi)\cos(\psi + \psi_0) = 2nma_0' G_2(\varphi) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} & H_2(\varphi) = \frac{1}{2}(A_{11} - A_{22})\cos 2\varphi + A_{12}\sin 2\varphi + \dots, \\ & G_2(\varphi) = \frac{1}{2}(A_{11} - A_{22})\sin 2\varphi - A_{12}\cos 2\varphi + \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

В (4.1) не произведена замена ψ на mt , поскольку данный прием может быть использован и в других случаях прецессий. Очевидно, что в силу (3.5) $f_1^2(\varphi) + f_2^2(\varphi) \neq 0$. Найдем из (4.1) $\sin(\psi + \psi_0)$, $\cos(\psi + \psi_0)$ и подставим их в равенство $\sin^2(\psi + \psi_0) + \cos^2(\psi + \psi_0) = 1$. Требуя, чтобы полученное уравнение было тождеством по φ , получим

$$(m^2 - 4n^2)[(A_{11} - A_{22})^2 + 4A_{12}^2] = 0, \quad (m^2 - 4n^2)A_{12}(A_{11} - A_{22}) = 0 \quad (4.3)$$

Далее будем изучать только случай $m = 2n$, так как другие варианты исследованы в [21, 22]. Обратимся к уравнению (3.7), полагая $\psi = 2nt$, $\varphi = nt$. Функция $(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma})$ при значении вектора $\boldsymbol{\gamma}$ из (2.7) имеет в общем случае вид

$$\begin{aligned} & (A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2}a_0^2(A_{22} - A_{11})\cos 2\varphi + a_0^2 A_{12}\sin 2\varphi + \\ & + 2a_0' A_{13}\sin \varphi + A_{23}\cos \varphi + \frac{1}{2}[a_0^2(A_{11} + A_{22}) + 2A_{33}a_0^2] \end{aligned} \quad (4.4)$$

То есть функция (4.4) содержит тригонометрические функции $\cos 2\varphi$, $\sin 2\varphi$, $\cos \varphi$, $\sin \varphi$. Очевидно, что функция $f_1(\varphi) \sin(2\varphi + \psi_0) + f_2(\varphi) \cos(2\varphi + \psi_0)$ не должна содержать слагаемые, содержащие $\sin 3\varphi$, $\cos 3\varphi$. Для того, чтобы указанная функция не содержала $\sin 3\varphi$, $\cos 3\varphi$, должны, в силу (3.5), выполняться условия

$$p_1 = r_2, \quad p_2 = -r_1 \quad (4.5)$$

Запишем функции $f_1(\varphi)$, $f_2(\varphi)$ из (3.5) при условиях (4.5)

$$f_1(\varphi) = (1 - a_0)[-a_0'(r_1 \sin \varphi + r_2 \cos \varphi) - (1 + a_0)r_3] \quad (4.6)$$

$$f_2(\varphi) = (1 - a_0)[a_0'(r_2 \sin \varphi - r_1 \cos \varphi) + (1 + a_0)p_3]$$

Подставим функции (4.4), (4.6) в уравнения (3.6) и учтем равенства $\psi = 2\varphi$, (4.6). Для того, чтобы полученное уравнение было тождеством по φ , необходимо положить

$$A_{12} = 0, \quad A_{22} = A_{11}, \quad p_3 = 0, \quad r_3 = 0 \quad (4.7)$$

Таким образом, в силу (4.5), (4.7) для векторов \mathbf{p} и \mathbf{r} имеем векторные соотношения

$$\mathbf{p} = (r_2, -r_1, 0), \quad \mathbf{r} = (r_1, r_2, 0) \quad (4.8)$$

то есть в силу (4.8) $\mathbf{p} \perp \mathbf{r}$, $\mathbf{p} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{r} \perp \mathbf{a}$ — ортогональные вектора \mathbf{p} и \mathbf{r} лежат в плоскости Oxy . Запишем дополнительные условия, при выполнении которых уравнение (3.6) становится тождеством по φ :

$$2a_0'n^2 A_{13}(1 + 2a_0) - a_0's_1 - (1 - a_0)(r_1 \sin \psi_0 - r_2 \cos \psi_0) = 0 \quad (4.9)$$

$$2a_0'n^2 A_{23}(1 + 2a_0) - a_0's_2 + (1 - a_0)(r_1 \cos \psi_0 + r_2 \sin \psi_0) = 0$$

На основании условий (4.5)–(4.7) уравнение (3.8) будет тождеством по t , если имеют место равенства

$$a_0'n^2 A_{13}(4a_0 + 1) - (1 - a_0)(r_1 \sin \psi_0 - r_2 \cos \psi_0) = 0 \quad (4.10)$$

$$a_0'n^2 A_{23}(4a_0 + 1) + (1 - a_0)(r_1 \cos \psi_0 + r_2 \sin \psi_0) = 0$$

Учитывая в уравнениях (4.9) равенства (4.10), получим

$$s_1 = n^2 A_{13}, \quad s_2 = n^2 A_{23} \quad (4.11)$$

Рассмотрим уравнение (3.9). Потребуем, чтобы оно было тождеством по t при условиях (4.5), (4.7), (4.10), (4.11). Тогда получим

$$a_0 = \frac{1}{6}, \quad s_3 = \frac{2n^2}{3}[3A_{22} + 5(A_{33} - A_{11})] \quad (4.12)$$

Итак, условием существования регулярных прецессий ($\psi = 2nt$, $\varphi = nt$) тела относительно вектора γ являются равенства (4.5), (4.7), (4.10)–(4.12). Первые два условия из (4.7) означают, что вектор \mathbf{a} перпендикулярен круговому сечению эллипсоида инерции тела. Уравнения (4.10) служат для определения постоянной ψ_0 :

$$\psi_0 = \arcsin \frac{a_0'n^2(4a_0 + 1)(r_1 A_{13} - r_2 A_{23})}{(1 - a_0)(r_1^2 + r_2^2)} \quad (4.13)$$

а также постоянной n :

$$n^4 = \frac{(1 - a_0)(r_1^2 + r_2^2)}{(1 + a_0)(1 + 4a_0)^2(A_{13}^2 + A_{23}^2)} \quad (4.14)$$

В соотношениях (4.13), (4.14) необходимо учесть значение $a_0 = 1/6$.

5. Прецессионно-изоконические движения. Данные движения можно описать инвариантным соотношением [6]

$$\psi = \varphi \quad (5.1)$$

В силу (5.1) запишем подвижный и неподвижный годографы в виде

$$\omega_M = \dot{\varphi}[a_0' \sin \varphi \cdot \mathbf{i}_1 + a_0' \cos \varphi \cdot \mathbf{i}_2 + (1 + a_0) \cdot \mathbf{i}_3] \quad (5.2)$$

$$\omega_F = \dot{\varphi}[a_0' \sin(\varphi + \psi_0) \cdot \gamma_1 - a_0' \cos(\varphi + \psi_0) \cdot \gamma_2 + (1 + a_0) \cdot \gamma] \quad (5.3)$$

Из векторных равенств (5.2), (5.3) следует, что годографы (5.2), (5.3) симметричны друг другу относительно касательной плоскости к соответствующим аксоидам. То есть движение тела характеризуется не только прецессией относительно γ , но и изоконичностью годографов.

Исследование прецессионно-изоконических движений проведен в случае, когда эллипсоид инерции является сферой:

$$A = \text{diag}(A_1, A_1, A_1) \quad (5.4)$$

На основании условия (5.4) систему уравнений (3.6), (3.7), (3.9) представим так

$$A_1(1 + a_0)\dot{\varphi}^2 = E + f_0(\varphi) + b_0[f_1(\varphi)\sin(\varphi + \psi_0) + f_2(\varphi)\cos(\varphi + \psi_0)] \quad (5.5)$$

$$A_1(1 + a_0)\ddot{\varphi} = -\tilde{f}_0(\varphi) + b_0[f_3(\varphi)\sin(\varphi + \psi_0) + f_4(\varphi)\cos(\varphi + \psi_0)] \quad (5.6)$$

$$A_1 a_0'^2 \dot{\varphi}^2 + f_5(\varphi) + f_6(\varphi)\sin(\varphi + \psi_0) + f_7(\varphi)\cos(\varphi + \psi_0) = 0 \quad (5.7)$$

Продифференцируем левую и правую части уравнения (5.5) по t и подставим в полученное уравнение $\ddot{\varphi}$ из (5.6), $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ из (3.5). Так как это уравнение должно быть тождеством по φ , то находим следующие условия на параметры задачи:

$$s_1 = -r_3 \cos \psi_0 - p_3 \sin \psi_0, \quad s_2 = -r_3 \sin \psi_0 + p_3 \cos \psi_0 \quad (5.8)$$

$$p_1 = r_2, \quad p_2 = -r_1, \quad r_2 \cos \psi_0 - r_1 \sin \psi_0 = 0 \quad (5.9)$$

Исключим из уравнений (5.5), (5.7) величину $\dot{\varphi}^2$. В результате получим уравнение, из которого следуют равенства

$$(2a_0 - 1)(s_1 - r_3 \cos \psi_0 - p_3 \sin \psi_0) = 0, \quad (5.10)$$

$$(2a_0 - 1)(s_2 - r_3 \sin \psi_0 + p_3 \cos \psi_0) = 0$$

$$(1 + a_0)E + (1 - a_0)(1 + 2a_0)s_3 - 2a_0(1 - a_0)(r_1 \cos \psi_0 + r_2 \sin \psi_0) = 0 \quad (5.11)$$

Если в уравнениях (5.10) положить $2a_0 - 1 \neq 0$, то получим два равенства

$$s_1 = r_3 \cos \psi_0 + p_3 \sin \psi_0, \quad s_2 = r_3 \sin \psi_0 - p_3 \cos \psi_0 \quad (5.12)$$

Приравняем величины s_1 и s_2 ; используя (5.8), (5.12), имеем нулевые значения для p_3 , r_3 , а также для s_1 , s_2 . На основании уравнения (5.5) и функций (4.6) находим, что $\dot{\varphi} = \text{const}$. Данный вариант, в силу (5.1), характеризует регулярную прецессию, что исключено из рассмотрения. Поэтому в (5.10) необходимо положить

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad \left(\theta_0 = \frac{\pi}{3} \right) \quad (5.13)$$

Рассмотрим геометрическую интерпретацию условий (5.9). Введем вспомогательные векторы

$$\mathbf{p}_* = r_2 \mathbf{i}_1 - r_1 \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{r}_* = r_1 \mathbf{i}_1 + r_2 \mathbf{i}_2 \quad (5.14)$$

Тогда из (5.9), (5.14) следует, что имеют место соотношения

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \frac{r_2}{r_1}, \quad \mathbf{p}_* \cdot \mathbf{r}_* = 0 \quad (5.15)$$

Из равенств (5.8) в силу третьей формулы системы (5.9) получим

$$s_1 = -\frac{r_1 p_3 + r_1 r_3}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, \quad s_2 = -\frac{r_1 p_3 - r_1 r_3}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \quad (5.16)$$

Равенства (5.16) позволяют связать параметры s_1, s_2 и p_3, r_3 :

$$s_1^2 + s_2^2 = r_3^2 + p_3^2 \quad (5.17)$$

Преобразуем равенство (5.5) с учетом условий (5.8), (5.9), (5.16), (5.17) и значения $a_0 = 1/2$:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{h_0 + h_1 \cos(\varphi + \beta_0)} \quad (5.18)$$

$$h_0 = -\frac{1}{9A_1} (s_3 + 2\sqrt{r_1^2 + r_2^2}), \quad h_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3A_1} \sqrt{r_3^2 + p_3^2} \quad (5.19)$$

$$\sin \beta_0 = -\frac{s_1}{\sqrt{p_3^2 + r_3^2}}, \quad \cos \beta_0 = -\frac{s_2}{\sqrt{p_3^2 + r_3^2}} \quad (5.20)$$

Выполним в (5.18) замену $\varphi + \beta_0 = \tilde{\varphi}$. Тогда из (5.18) имеем

$$\dot{\tilde{\varphi}} = \sqrt{h_0 + h_1} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\tilde{\varphi}}{2}} \quad \left(k^2 = \frac{2h_1}{h_0 + h_1} \right) \quad (5.21)$$

Положим в (5.21) $\tilde{\varphi} = 2\varepsilon$:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sqrt{h_0 + h_1}}{2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varepsilon}$$

или

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varepsilon}} = \frac{\sqrt{h_0 + h_1}}{2} t = \tau \quad (5.22)$$

В силу выполненных преобразований параметры задачи должны удовлетворять условию $h_0 > 0$ ($h_1 > 0$ для всех значений r_3, p_3 , так как $A_1 > 0$), где h_0 имеет вид, указанный в (5.19). Параметр β_0 определим из (5.20):

$$\beta_0 = \operatorname{arctg} \frac{s_1}{s_2} \quad (5.23)$$

Из интегрального соотношения (5.22) имеем

$$\varepsilon(\tau) = \operatorname{am} \tau, \quad \sin \varepsilon(\tau) = \operatorname{sn} \tau \quad (5.24)$$

где $\operatorname{am} \tau, \operatorname{sn} \tau$ – эллиптические функции от τ . На основании указанных выше вычислений найдем

$$\varphi(\tau) = 2\varepsilon(\tau) - \beta_0, \quad \sin \varphi(\tau) = \sin 2\varepsilon(\tau) \cos \beta_0 - \cos 2\varepsilon(\tau) \sin \beta_0 \quad (5.25)$$

Учтем во второй формуле из (5.25) значения (5.23), (5.24). Тогда

$$\sin \varphi(\tau) = \frac{1}{s_1^2 + s_2^2} [s_1 (\operatorname{cn}^2 \tau - \operatorname{sn}^2 \tau) - 2s_2 \operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau] \quad (5.26)$$

где в силу (5.22) $\tau = \frac{h_2}{2} t$ ($h_2 = \sqrt{h_0 + h_1}$). Значение φ определим из (5.21), (5.22)

$$\dot{\varphi} = h_2 \operatorname{dn} \frac{h_2}{2} t \quad (5.27)$$

а для получения $\cos \varphi(\tau)$ необходимо использовать формулу (5.26), подставив в нее $\tau = \frac{h_2}{2} t$. Тогда функция $\cos \varphi(t) = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi(t)}$. Таким образом, решение уравнений движения сферического тела для случая прецессионно-изоконических движений построено: оно выражается формулами (2.7)–(2.10), в которых необходимо учесть условия (5.8), (5.9), (5.13), (5.27). Оно выражается через эллиптические функции $\operatorname{sn}(\tau)$, $\operatorname{cn}(\tau)$, $\operatorname{dn}(\tau)$, где $\tau = \frac{h_2}{2} t$. Представляет определенный интерес значение $\theta_0 = 60^\circ$, а также условие, которое выражается ортогональностью векторов \mathbf{r}^* , \mathbf{p}^* . Отметим, что в случае регулярных прецессионных движений (см. п. 4) $\theta_0 = \arccos(1/6)$.

6. Случай двух однородных силовых полей. Рассмотрим движение тела под действием двух однородных силовых полей: положим $\mathbf{p}^* = \mathbf{0}$ ($p_i = 0$, $i = \overline{1,3}$). Тогда из условий (5.8), (5.9) найдем

$$r_1 = r_2 = 0, \quad s_1 = -r_3 \cos \psi_0, \quad s_2 = -r_3 \sin \psi_0 \quad (6.1)$$

Значения $a_0 = 1/2$ из (5.13) не изменяется. В силу (6.1) $\mathbf{r} = r_3 \mathbf{a}$, то есть вектор \mathbf{r} коллинеарен вектору \mathbf{a} (центр приведения сил второго поля находится на оси, проходящей через \mathbf{a}). Из последних равенств (6.1) следует, что $s_1^2 + s_2^2 = r_3^2$ (формулы (5.16) не имеют места, так как они получены из последней формулы системы (5.9)). Выражение для h_0 из (5.19) упрощается: $h_0 = -\frac{s_3}{9A_1}$, а значения h_1 из (5.19) и $\sin \beta_0$, $\cos \beta_0$, в силу (6.1), принимают вид

$$h_1 = \frac{2r_3 \sqrt{3}}{3A_1}, \quad \sin \beta_0 = \cos \psi_0, \quad \cos \beta_0 = \sin \psi_0 \quad (6.2)$$

То есть и в случае (6.1), (6.2) $\varphi(t)$, $\sin \varphi(\tau)$, $\cos \varphi(\tau)$ являются эллиптическими функциями времени. Движение тела обладает свойством периодичности (см. формулы (5.2), (5.3), (5.25), (5.26)).

Замечание 3. Из полученных выше результатов (см. пп. 4, 6) в случае, когда на тело действует сила только одного однородного поля (уравнения движения становятся уравнениями Эйлера–Пуассона), прецессионно-изоконические движения тела имеют место только в решении Лагранжа для сферического гироскопа. Данный вывод согласуется с результатами [5–7]. Отметим, что в решении Лагранжа изоконические движения (без дополнительного свойства прецессионности) возможны только в случае несферического распределения масс.

7. Прецессионно-изоконические движения динамически симметричного твердого тела. Рассмотрим случай, когда твердое тело обладает свойством динамической симметрии относительно вектора \mathbf{a} . Запишем вначале уравнения (3.6), (3.7) при $A = \operatorname{diag}(A_1, A_1, A_3)$:

$$h_0(1 + a_0)\dot{\varphi}^2 = 2[E + f_0(\varphi) + b_0(f_1(\varphi)\sin(\varphi + \psi_0) + f_2(\varphi)\cos(\varphi + \psi_0))] \quad (7.1)$$

$$A_3(1 + a_0)\ddot{\varphi} = -\tilde{f}_0(\varphi) + b_0[f_3(\varphi)\sin(\varphi + \psi_0) + f_4(\varphi)\cos(\varphi + \psi_0)] \quad (7.2)$$

$$h_0 = (A_1 + A_3) + a_0(A_3 - A_1) \quad (7.3)$$

Метод изучения уравнений (7.1), (7.2) сохраним в прежнем виде (см. п. 5). Тогда получим следующие условия на параметры задачи: равенства (5.9) не изменяются, а вместо равенств (5.8) следует рассматривать уравнения

$$\mu_0 s_1 = p_3 \sin \psi_0 + r_3 \cos \psi_0, \quad \mu_0 s_2 = p_3 \cos \psi_0 - r_3 \sin \psi_0 \quad (7.4)$$

Здесь $\mu_0 = (A_3 - h_0)/A_3$, или, в силу (7.3), имеем следующее значение μ_0 через параметры задачи:

$$\mu_0 = -\frac{1}{A_3}[(1 - a_0)A_1 + a_0A_3] \quad (7.5)$$

Из (7.5) следует, что $\mu_0 \neq 1$, так как в противном случае $h_0 = 0$, что исключаем из рассмотрения на основании значения a_0 : $|a_0| > 1$, которое получаем из равенства $h_0 = 0$.

Запишем значения $\dot{\varphi}^2$ из (7.2), используя обозначения (3.5) и условия (5.9), (7.4):

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}^2 = & \frac{2}{h_0(1 + a_0)}[a'_0(1 - \mu_0)(s_1 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi) + \\ & + E + a_0 s_3 - (1 - a_0)(r_1 \cos \psi_0 + r_2 \sin \psi_0)] \end{aligned} \quad (7.6)$$

а также из уравнения (3.9) (полагаем $a_0(A_1 - A_3) - A_1 \neq 0$, так как в противном случае $s_1 = 0, s_2 = 0$):

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}^2 = & \frac{1}{a'_0[a_0(A_1 - A_3) - A_3]}[a_0(\mu_0 - 1)(s_1 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi) + \\ & + a'_0(s_3 + r_1 \cos \psi_0 + r_2 \sin \psi_0)] \end{aligned} \quad (7.7)$$

Приравнявая $\dot{\varphi}^2$ из уравнений (7.6), (7.7), найдем уравнение, которое должно быть тождеством по φ . Тогда получим

$$F(a) = a_0^2(A_3 - A_1) + a_0(3A_1 + A_3) - 2A_3 = 0 \quad (7.8)$$

Если $A_3 = A_1$, то из (7.8) следует $a_0 = 1/2$, что соответствует уже изученному варианту.

При $A_3 \neq A_1$ параметр a_0 имеет значение

$$a_0 = \frac{1}{A_1 - A_3}[3A_1 + A_3 \pm \sqrt{8(A_1^2 + A_3^2) + (A_1 - A_3)^2}] \quad (7.9)$$

Для исследования промежутка изменения параметра a_0 целесообразно не применять формулу (7.9), а использовать графо-аналитический метод исследования функции (7.8), обозначив через $y = A_1/A_3$, а a_0 — через x . Из неравенств треугольника на главные моменты инерции тела A_i ($i = 1, 3$) следует, что $y > 1/2$; из геометрического условия на параметр a_0 имеем неравенство $|x| < 1$. Таким образом, на основании (7.8) для функции y получим уравнение

$$y = \frac{x^2 + x - 2}{x(x - 3)}$$

Нули данной функции определены равенствами $x = 1$, $x = -2$; производная $y' < 0$ при $x \neq 0$, $x \neq 3$. Следовательно, функция $y > 1/2$, если $x \in (0, x_*)$, где

$$x_* = \frac{1}{2}(-5 + \sqrt{41})$$

Из полученных результатов следует, что $a_0 \in (0, x_*)$.

Значение параметра E , который находится из метода рассмотрения уравнений (7.6), (7.7), зависит от параметров задачи, так как E – постоянная первого интеграла. Следовательно, дано обобщение решения п. 5 на случай динамически симметричного гироскопа, которое также описывается эллиптическими функциями.

Заключение. В статье дана постановка задачи о прецессионных движениях тела под действием трех однородных силовых полей. На основе подхода, указанного в [6, 7], получены три дифференциальных уравнения на функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, где $\varphi(t)$ – угол собственного вращения, $\psi(t)$ – угол прецессии тела. Изучена проблема замены одного из уравнений интегралом энергии. Рассмотрены случаи регулярных прецессий ($\dot{\varphi} = n$, $\dot{\psi} = m$, n и m – постоянные, удовлетворяющие условию $m = 2n$) и прецессионно-изоконических движений ($\dot{\varphi} = \dot{\psi}$). Показано, что в первом варианте угол нутации равен $\arccos(1/6)$, а во втором он имеет значения 60° для сферических гироскопов и $a_0 \in (0, x_*)$ для динамически симметричного гироскопа относительно вектора \mathbf{a} . Рассмотрен вариант, когда движение тела происходит под действием сил двух однородных силовых полей. Получено сведение решения к эллиптическим функциям времени. В отличие от ранее использованных подходов, в данной статье применен векторный метод в описании прецессионных движений тела, что позволило установить решение уравнений движения в кратком виде. Редуцированные уравнения движения дают возможность изучить прецессии общего вида. Например, можно анонсировать результат о том, что исследование прецессионных движений тела в случае, когда скорость собственного вращения тела в два раза меньше его скорости прецессии, угол нутации равен $\arccos(1/4)$. В связи с этим представляет интерес сравнение указанных в данной статье результатов с аналогичными результатами в классической задаче, которая описывается уравнениями Эйлера–Пуассона, и в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается уравнениями класса Кирхгофа–Пуассона. В первой задаче известно решение Д. Гриоли [2], характеризующееся прецессией тела относительно наклонной оси. Для него выполняются свойства $\dot{\psi} = \dot{\varphi}$, $\theta_0 = 90^\circ$. Во второй задаче имеет место решение А.В. Мазнева [25], отвечающее прецессии гиростата относительно вертикали и обладающее свойствами $\dot{\psi} = \dot{\varphi}$, $\theta_0 = 120^\circ$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
2. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. Pura Appl. 1947. S. 4. V. 26. F. 3–4. P. 271–281.
3. *Klein F., Sommerfeld A.* Über die Theorie des Kreisels. N.Y.: Johnson reprint corp., 1965. 966 p.
4. *Bressan A.* Sulle precessioni d'un corpo rigido costituenti moti di Hess // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1957. V. 27. P. 276–283.
5. *Горп Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // Прикл. мат. мех. 2003. Т. 67. Вып. 4. С. 573–587.
6. *Горп Г.В., Мазнев А.В., Шетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. Донецк: ДонНУ, 2009. 222 с.

7. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. Донецк: Дон-НУ, 2010. 364 с.
8. Горр Г.В., Мазнев А.В., Котов Г.А. Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом. Донецк: ГУ "ИПММ", 2018. 250 с
9. Докшевич А.И. Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. Киев: Наук. думка, 1992. 168 с.
10. Ольшанский В.Ю. О регулярных прецессиях несимметричного твердого тела с жидким наполнением // Прикл. мат. мех. 2018. Т. 82. Вып. 5. С. 559–571.
11. Ol'shanskii V.Yu. New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2019. V. 131. № 12. P. 57. doi.org/
<https://doi.org/10.1007/s10569-019-9929-x>
12. Ol'shanskii V.Yu. Analysis of regular precession conditions for asymmetrical liquid-filled rigid body // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2020. V. 132. № 9. P. 46. doi.org/
<https://doi.org/10.1007/s10569-020-09984-2>
13. Ольшанский В.Ю. Полурегулярная прецессия несимметричного твердого тела с жидким наполнением // Прикл. мат. мех. 2021. Т. 85. Вып. 5. С. 547–564. doi.org/
<https://doi.org/10.31857/S0032823521040111>
14. Рубановский В.Н. Об одном новом частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости // Прикл. мат. мех. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 212–219.
15. Горр Г.В., Рубановский В.Н. Об одном новом классе движений системы тяжелых шарнирно связанных твердых тел // Прикл. мат. мех. 1988. Т. 50. Вып. 5. С. 707–712.
16. Харламов М.П. Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. 2004. Вып. 34. С. 47–58.
17. Харламов М.П. Особые периодические движения гиростата Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. 2007. Вып. 37. С. 85–96.
18. Рябов П.Е. Алгебраические кривые и бифуркационные диаграммы двух интегрируемых задач // Механика твердого тела. 2007. Вып. 37. С. 97–111.
19. Харламов М.П., Яхья Х.М. Разделение переменных в одном частном случае движения гиростата в двойном поле // Механика твердого тела. 2014. Вып. 44. С. 7–15.
20. Yehia H.M. Equivalent problems in rigid body dynamics –II // Celest. Mech. 1988. V. 41. P. 289–295. doi.org/ 01238765
<https://doi.org/10.1007/BF>
21. Yehia H.M. On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // Egypt. J. Bas. Appl. Sci. 2015. V. 2. № 3. P. 200–205. doi.org/
<https://doi.org/10.1016/j.ejbas.2015.03.002>
22. Yehia H.M. Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egypt. Math. Soc. 2017. V. 25. № 2. P. 216–219. doi.org/
<https://doi.org/10.1016/j.joems.2016.08.001>
23. Hessein A.M. Precessional motion of a rigid body acted upon by three irreducible fields // Russ.J. Nonlin. Dyn. 2019. V. 15. № 3. P. 285–292. doi.org/
<https://doi.org/10.20537/nd190307>
24. Горр Г.В., Балаклицкая Т.В. О движении главных осей твердого тела, имеющего неподвижную точку, в случае прецессий относительно вертикали // Механика твердого тела. 2019. Вып. 49. С. 57–66.
25. Мазнев А.В. Прецессионно-изоконические движения в одном решении уравнений Кирхгофа // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. 2001. Вып. 2. С. 12–16.

УДК 681.2-2

МОДЕЛЬ МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО МОДАЛЬНО-ЛОКАЛИЗОВАННОГО
АКСЕЛЕРОМЕТРА С ЧУВСТВИТЕЛЬНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ
В ВИДЕ БАЛКИ С НАЧАЛЬНОЙ ПОГИБЬЮ

© 2023 г. **Д. А. Индейцев^{a,b}, Н. В. Можгова^{b,*}, А. В. Лукин^{b,**}, И. А. Попов^{b,***}**

^a *Институт проблем машиноведения Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Россия*

^b *Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия*

^{*}*e-mail: nmojgova@yandex.ru*

^{**}*e-mail: lukin_av@spbstu.ru*

^{***}*e-mail: popov_ia@spbstu.ru*

Поступила в редакцию 19.08.2022 г.

После доработки 07.09.2022 г.

Принята к публикации 08.09.2022 г.

Настоящее исследование посвящено математическому моделированию предложенной новой архитектуры микроэлектромеханического модально-локализованного датчика ускорений (МЭМС-акселерометра/гравиметра) с чувствительным элементом в виде заземленной с двух концов микробалки с начальной погибью, выполненной по форме первой несимметричной моды свободных колебаний. В работе показано, что при несимметричной форме начальной погиби в области положительных осевых усилий существуют зоны близости частотных ветвей, соответствующих второй симметричной и первой несимметричной формам колебаний. При конструкционном обеспечении требуемого значения осевого растягивающего усилия в микробалке этот эффект может быть использован, в частности, для измерения осевой компоненты переносного ускорения по принципу амплитудной модальной локализации. Предусмотренная в компоновке датчика возможность нагрева чувствительного элемента с помощью протекающего по микробалке электрического тока позволяет управлять рабочей точкой режима колебаний и, таким образом, в весьма широких пределах варьировать диапазон измеряемых ускорений и степень чувствительности датчика. Предложенная в статье конфигурация электродов возбуждения колебаний и съема выходного сигнала позволяет, с помощью контура обратной связи, стабилизировать на требуемом уровне амплитуду колебаний по рабочей (третьей) симметричной форме и, при этом, измерять связанную с изменением величины измеряемой компоненты переносного ускорения амплитуду колебаний по несимметричной форме. Таким образом, в работе предложена и исследована математическая модель оригинального модально-локализованного акселерометра (гравиметра), содержащего единственный чувствительный микробалочный элемент и задействующего эффект обмена энергией между различными его формами колебаний.

Ключевые слова: МЭМС, балка с начальной погибью, бистабильность, акселерометр, модальная локализация колебаний, близость частот

DOI: 10.31857/S0572329922600645, EDN: JLSWBB

1. Введение. Все большее распространение в современной индустрии нано- микро- электромеханических систем (Н/МЭМС) находит использование существенно нели-

нейных характеристик проектируемых механических архитектур и принципов генерации колебаний, а также коллективных динамических свойств подвижных элементов устройств, что позволяет на порядки повысить точность и стабильность измерений для широкого класса датчиков физических величин [1]. Интенсивное развитие получают исследования и прикладные разработки в области применения особенностей модального взаимодействия в нелинейных и слабосвязанных колебательных системах с двумя и более степенями свободы.

Одной из приоритетных задач индустрии МЭМС является создание вибрационно и температурно устойчивых высокочувствительных элементов микромеханических систем инерциальной навигации (акселерометров, гравиметров, гироскопов). В части МЭМС-акселерометров и МЭМС-гравиметров, наряду с классическими амплитудно-модулированными схемами (см., например, [2]), интенсивно развивается направление разработки резонансных и модально-локализованных датчиков [3–6]. Основным принципом работы таких систем является влияние измеряемой компоненты ускорения подвижного объекта на рабочую частоту или вид собственной формы колебаний микромеханической архитектуры. В большом числе современных работ (см., к примеру, [7]) сообщается о том, что для модально-локализованных систем с контуром обратной связи по амплитуде может быть достигнута на порядки более высокая чувствительность, чем для датчиков с частотным выходом.

Значительный научный и практический интерес представляет изучение уникальных спектральных (модальных и резонансных) свойств микромеханических систем с проектируемыми возмущениями геометрии (начальной погибью балочных, пластинчатых и иных конструкций) и использование этих свойств для высокоточных измерений. Известен целый ряд работ, в которых демонстрируются возможности успешного практического использования подобных механических архитектур для задач высокоточных измерений: силы или переносного ускорения [8, 9], перемещений [10], скорости [11] и градиента скорости потока жидкости [12], газовых сенсоров [13, 14]. Известны также работы по использованию систем с начальной погибью в качестве актуаторов [15] и логических элементов перспективных вычислительных устройств [16]. На настоящий момент в большинстве созданных устройств в качестве чувствительного элемента применяется микробалка с начальной погибью, обладающая свойством бистабильности при действии постоянного электрического поля в межэлектродном зазоре.

Математическое моделирование и проектирование механических конструкций рассматриваемого класса требует использования весьма сложных геометрически и физически нелинейных моделей упругого деформирования континуальных систем. Этой группе вопросов посвящена обширная литература (см., к примеру, [17–29]). Отдельное интенсивно развивающееся направление исследований составляют задачи нелинейной статики и динамики микромеханических конструкций с проектируемыми возмущениями геометрии, действующих в электрических полях различных конфигураций. А именно, значительное число работ посвящено изучению вопросов ветвления, бифуркаций, нарушения симметрии положений равновесия и режимов переключения между ними для микробалок с начальной погибью [30–39]. Особенности спектральных и нелинейных динамических характеристик таких конструкций также являются предметом обширной группы исследований [40–53]. Известны работы, посвященные вопросам синтеза алгоритмов управления колебаниями подобных систем и обработки выходных сигналов [54–56]. Активно развивается направление проектирования микромеханических датчиков с проектируемыми возмущениями геометрии более сложной формы: мембран и пластинок [57–64].

Эффект локализации колебаний между симметричной и несимметричной формами колебаний микробалки с начальной погибью изучается в работе [52]. В работе рассматривается симметричная форма начальной погиби и несколько видов электроста-

тического нагружения, в том числе несимметричным полем, при котором наблюдается эффект локализации колебаний по указанным формам. В настоящей работе локализация колебаний возникает при возбуждении колебаний симметричным полем, но используется несимметричная форма начальной погиби микробалки.

Настоящее исследование посвящено математическому моделированию предложенной новой архитектуры микроэлектромеханического модально-локализованного датчика ускорений с чувствительным элементом в виде заземленной с двух концов микробалки с начальной погибью, выполненной по форме первой несимметричной моды свободных колебаний. Насколько известно авторам работы, микробалки с начальной погибью до настоящего момента не рассматривались как элементы перспективных резонансных (модально-локализованных) сенсоров переносных ускорений – акселерометров или гравиметров. В работе показано, что при определенных условиях в колебательной системе могут быть обеспечены условия для эффективного обмена энергией между симметричной и несимметричной формами колебаний чувствительного элемента. Данный эффект может быть положен в основу разработки нового подкласса высокоточных резонансных датчиков с амплитудным съемом выходного сигнала.

2. Предлагаемая модель акселерометра. Модель акселерометра, принцип действия которого основан на локализации колебаний, изображена на рис. 1. В качестве чувствительного элемента выступает начально изогнутая балка, заземленная с двух сторон, которая находится в поле действия одного неподвижного электрода возбуждения колебаний и двух неподвижных электродов съема колебаний. Электрическое напряжение, сообщенное концам балки, позволяет менять собственные частоты чувствительного элемента и настраиваться на рабочий режим. Подвижная масса M упруго прикреплена к микробалке с помощью системы подвесов. Внешнее ускорение приводит массу в движение и возникает распорное усилие N_m , действующее на микробалку. Рабочий режим возбуждается центральным электродом и представляет собой колебания по третьей (второй симметричной) собственной форме балки. При наличии внешнего ускорения распорное усилие изменяет значения собственных частот балки и при правильном выборе параметров системы наблюдается эффект близости частот между второй (первой несимметричной) и третьей (второй симметричной) формами колебаний чувствительного элемента. Происходит обмен энергией между указанными формами, и колебания по второй собственной форме детектируются боковыми электродами.

3. Математическая модель чувствительного элемента. Рассматривается изначально изогнутая микробалка длины L , заделанная с двух сторон и имеющая прямоугольное поперечное сечение с толщиной d и шириной b (рис. 2).

Балка изготовлена из однородного изотропного упругого материала с модулем Юнга E . Начальная форма балки описывается функцией $\hat{z}_0(\hat{x}) = \hat{h} \cdot w_0(\hat{x})$, где \hat{h} – начальное отклонение верхней точки балки от средней линии в неискривленном положении и $w_0(\hat{x})$ – безразмерная функция, для которой выполняется условие $\max_{\hat{x} \in [0, L]} |w_0(\hat{x})| = 1$. Балка находится в поле одного неподвижного электрода, находящегося на расстоянии g_0 . Предполагается, что $d \ll L$ и что прогиб умеренно велик по сравнению с толщиной балки, поэтому имеется необходимость учета растяжения средней плоскости.

Уравнение динамики системы имеет вид:

$$EI(\hat{z}'''' - \hat{z}_0'''') + \rho A \frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial t^2} + c \frac{\partial \hat{z}}{\partial t} = \left(N + \frac{EA}{2L} \int_0^L (\hat{z}'^2 - \hat{z}_0'^2) d\hat{x} \right) \hat{z}'' + F \quad (3.1)$$

где $\hat{z}(\hat{x})$ – функция прогиба, $I = bd^3/12$ – момент инерции сечения балки, ρ – плотность материала балки, c – коэффициент трения, N – распорное усилие, $A = bd$ –

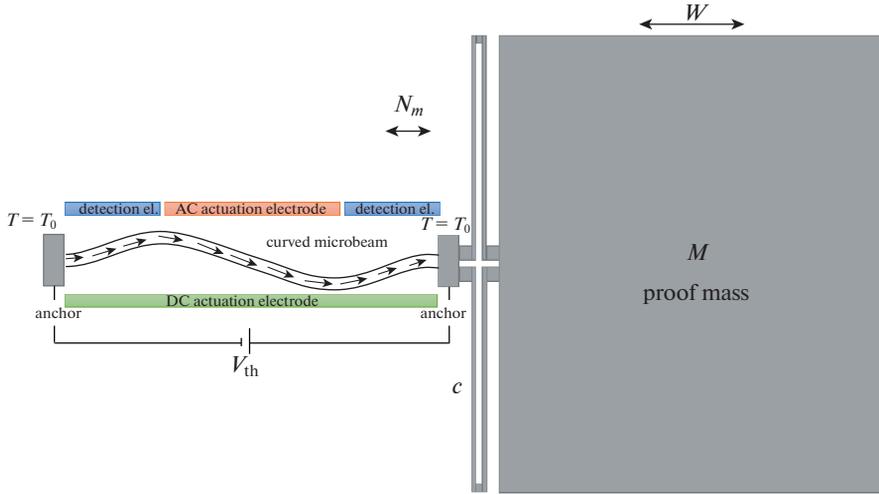


Рис. 1. Модель модально-локализованного акселерометра.

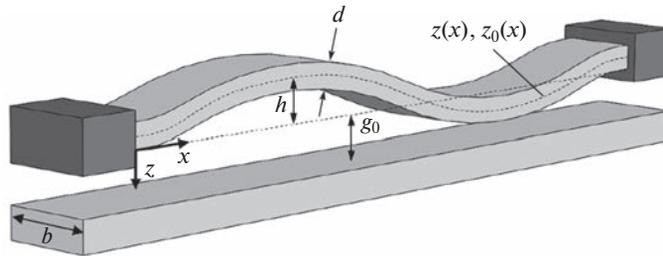


Рис. 2. Начально изогнутая микробалка в поле одного электрода.

площадь поперечного сечения балки, $()'$ – производная по координате $d/d\hat{x}$, F – электростатическая сила, которая описывается следующим выражением:

$$F = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon b V_{DC}^2}{(g_0 + \hat{z})^2} \quad (3.2)$$

где ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость среды в зазоре, b – ширина балки, V_{DC} – амплитуда постоянной компоненты напряжения.

Распорное усилие N вызвано тремя факторами:

1. (N_{th}) эффектом Джоуля, возникающим из-за протекающего тока вдоль балки,
2. (N_m) инерционной силой, вызванной ускорением внешней массы M ,
3. (N_0) механическим усилием, вызванным преднапряженным состоянием балки (может быть как растягивающим, так и сжимающим):

$$N = N_{th} + N_m + N_0 \quad (3.3)$$

Инерционная сила связана с ускорением массы следующим образом:

$$N_m = MW \quad (3.4)$$

где W – ускорение корпуса.

Уравнение теплопроводности в объеме балочного резонатора имеет вид:

$$-\frac{d}{d\hat{x}}\left(k\frac{dT}{d\hat{x}}\right) = J^2\rho_e \quad (3.5)$$

где k – коэффициент теплопроводности материала балки, J – плотность тока, ρ_e – удельное сопротивление материала балки. Предполагается, что свойства материала балки не зависят от температуры.

Плотность тока можно выразить через напряжение, прикладываемое на разные концы балки V_{th} :

$$J = \frac{V_{th}}{\rho_e L}$$

Тогда уравнение теплопроводности примет вид

$$-k\frac{d^2T}{d\hat{x}^2} = \frac{V_{th}^2}{\rho_e L^2} \quad (3.6)$$

Решением уравнения (3.6) является

$$T(\hat{x}) = -\frac{V_{th}^2}{k\rho_e L^2}(x^2 + C_1x + C_2) \quad (3.7)$$

где константы интегрирования C_1, C_2 определяются из граничных условий первого рода на торцах балки, там поддерживается температура окружающей среды T_0 :

$$T(0) = T_0, \quad T(L) = T_0 \quad (3.8)$$

откуда

$$C_1 = -L, \quad C_2 = -\frac{T_0 k \rho_e L^2}{V_{th}^2} \quad (3.9)$$

Таким образом, температура вдоль оси балки определяется выражением:

$$T(\hat{x}) = -\frac{V_{th}^2}{k\rho_e L^2}(x^2 - Lx) + T_0 \quad (3.10)$$

Распорное усилие, вызванное эффектом Джоуля, зависит от температуры следующим образом:

$$N_{th} = -\frac{EA}{L} \int_0^L \alpha(T[\hat{x}] - T_0) d\hat{x} = -\frac{EAV_{th}^2\alpha}{6k\rho_e} \quad (3.11)$$

где α – коэффициент температурного расширения материала балки, T_0 – начальная температура балки, знак – означает, что усилие сжимающее.

Таким образом, уравнение движения начально изогнутой балки в поле одного неподвижного электрода с протекающим по ней током имеет вид:

$$EI(\hat{z}'''' - \hat{z}_0'''') + \rho A \frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial \hat{t}^2} + c \frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{t}} = \left(N_{th} + N_m + N_0 + \frac{EA}{2L} \int_0^L (\hat{z}'^2 - \hat{z}_0'^2) d\hat{x} \right) \hat{z}'' - \frac{1}{2} \frac{\epsilon b V_{DC}^2}{(g_0 + \hat{z})^2} \quad (3.12)$$

После введения безразмерных параметров

$$z = \frac{\hat{z}}{g_0}, \quad x = \frac{\hat{x}}{L}, \quad t = \frac{\hat{t}}{T}$$

где $T = \sqrt{\rho b d L^4 / EI}$ – масштаб времени,

$$\alpha_1 = 6 \left(\frac{g_0}{d} \right)^2, \quad c_{non} = \frac{12cL^4}{ETbd^3}, \quad \alpha_2 = \frac{6\epsilon L^4}{Eg_0^3 d^3}, \quad \lambda = \alpha_2 V_{DC}^2$$

$$N_{non,th} = \frac{12L^2}{Ebd^3} N_{th}, \quad N_{non,m} = \frac{12L^2}{Ebd^3} N_m, \quad N_{non,0} = \frac{12L^2}{Ebd^3} N_0$$

может быть получено уравнение в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 z_0}{\partial x^4} + \ddot{z} + c_{non} \dot{z} = \\ & = \left[\alpha_1 \int_0^1 (z^{i2} - z_0^{i2}) dx + N_{non,th} + N_{non,m} + N_{non,0} \right] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\alpha_2 V_{DC}^2}{(1+z)^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $(\dot{})$ – производная по безразмерному времени d/dt .

В настоящей работе будет рассмотрена нелинейная задача о статическом равновесии, а также спектральная задача вблизи положений равновесия, найденных на первом этапе.

3.1. Уравнение статического равновесия системы. Уравнение статического равновесия в безразмерном виде:

$$z'''' - z_0'''' = \left[\alpha_1 \int_0^1 (z^{i2} - z_0^{i2}) dx + N_{non,th} + N_{non,m} + N_{non,0} \right] z'' - \frac{\alpha_2 V_{DC}^2}{(1+z)^2} \quad (3.14)$$

где $()'$ – производная по безразмерной координате d/dx .

Для получения модели пониженного порядка применяется метод Галеркина, то есть ищется приближенное решение уравнения (3.14) в виде:

$$z(x) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i \phi_i \quad (3.15)$$

где $\phi_0(x) = 0$, так как граничные условия задачи однородны.

Разложение (3.15) выполняется по ортогональным собственным формам прямой балки, удовлетворяющим уравнению (3.16):

$$\phi_i^4 = \omega_{non,i}^2 \phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.16)$$

где $\omega_{non,i}^2$ – квадрат безразмерной собственной частоты.

С учетом разложения в ряд по собственным формам и граничных условий, уравнение статического равновесия приобретает вид

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \phi_j \left(1 - \sum_{l=1}^n C_l \phi_l \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n C_i \omega_{non,i}^2 \phi_i \right) dx + \lambda \int_0^1 \phi_j dx - \\ & - \alpha_1 \int_0^1 \phi_j \left(1 - \sum_{l=1}^n C_l \phi_l \right)^2 \left[\sum_{i=1}^n C_i \phi_i'' \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n C_k \phi_k \right)^2 dx \right] dx = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

где ϕ_i и C_i – собственные формы и коэффициенты при них соответственно.

Полученное алгебраическое уравнение относительно коэффициентов C_i разложения функции прогиба по собственным формам решается с помощью методов теории бифуркаций в программном комплексе MATLAB MATCONT [65].

3.2. Уравнение малых колебаний в окрестности положения равновесия. Уравнение динамики системы имеет вид

$$z^{IV} - z_0^{IV} + \ddot{z} + c_{non}\dot{z} = \left[\alpha_1 \int_0^1 (z'^2 - z_0'^2) dx + N_{non,th} + N_{non,m} + N_{non,0} \right] z'' - \frac{\lambda}{(1+z)^2} \quad (3.18)$$

Безразмерную функцию прогиба $z(x, t)$ можно разложить на статическую часть z_s (найденную из уравнения статического равновесия (3.14)) и динамическую компоненту, зависящую от времени z_d :

$$z(x, t) = z_s(x) + z_d(x, t) \quad (3.19)$$

Подстановка данного разложения в уравнение динамики приводит к уравнению относительно динамической составляющей функции прогиба:

$$\begin{aligned} & z_s^{IV} + z_d^{IV} - z_0^{IV} + \ddot{z}_d + c_{non}\dot{z}_d = \\ & = \left[\alpha_1 \int_0^1 ((z_s' + z_d')^2 - z_0'^2) dx + N_{non,th} + N_{non,m} + N_{non,0} \right] \frac{\partial^2 (z_s + z_d)}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{(1 + z_s + z_d)^2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

После раскрытия скобок, разложения члена электростатической силы в ряд Тейлора по функции z_d и пренебрежения членами второго и более высоких порядков малости уравнение примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & z_s^{IV} + z_d^{IV} - z_0^{IV} + \ddot{z}_d + c_{non}\dot{z}_d = \alpha_1 \int_0^1 (z_s'^2 - z_0'^2) dx z_s'' + \alpha_1 \int_0^1 (z_s'^2 - z_0'^2) dx z_d'' + \\ & + 2\alpha_1 \int_0^1 z_s' z_d' dx z_s'' + (N_{non,th} + N_{non,m} + N_{non,0})(z_s'' + z_d'') - \frac{\lambda}{(1 + z_s)^2} + \frac{2\lambda z_d}{(1 + z_s)^3} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Часть слагаемых, составляющих уравнение статического равновесия, взаимно компенсируются. В предположении отсутствия диссипации $c_{non} = 0$ малые свободные колебания около статического равновесия определяются уравнением

$$\begin{aligned} & z_d^{IV} + \ddot{z}_d = \left[\alpha_1 \int_0^1 (z_s'^2 - z_0'^2) dx + N_{non,th} + N_{non,m} + N_{non,0} \right] z_d'' + \\ & + 2\alpha_1 \int_0^1 z_s' z_d' dx z_s'' + \frac{2\lambda z_d}{(1 + z_s)^3} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Аналогично уравнению статики, динамическая компонента функции прогиба также может быть разложена в ряд по собственным формам прямой балки:

$$z_d(x, t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \phi_i(x) \quad (3.23)$$

Далее разложение подставляется в уравнение (3.22), четвертая производная заменяется на соответствующее ей слагаемое согласно уравнению (3.16), а также все уравнение умножается на собственную форму ϕ_j и интегрируется от 0 до 1. В результате этих действий получена следующая система линейных ОДУ:

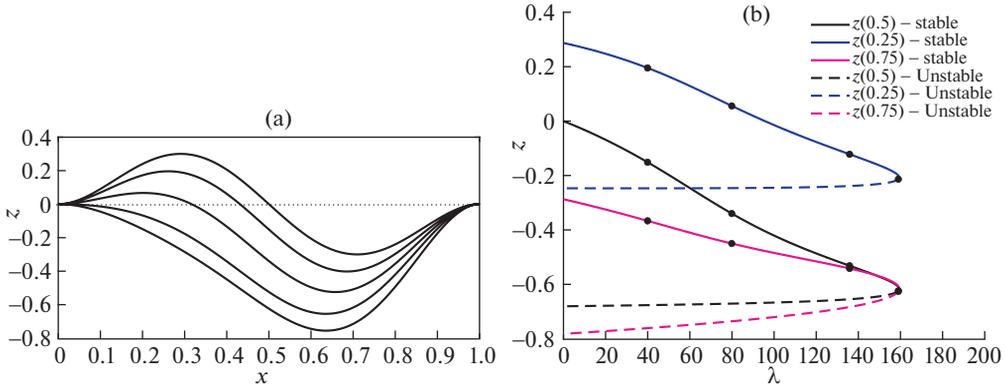


Рис. 3. Диаграмма статического равновесия и функция прогиба микробалки. (а) – эволюция функции прогиба при движении по бифуркационной диаграмме, (б) – диаграмма равновесия ($\alpha_1 = 150$, $h = 0.3$, $N_{non} = 0$).

$$\ddot{u}_j + \omega_{non,j}^2 u_j = \left[\alpha_1 \int_0^1 (z_s'^2 - z_0'^2) dx + N_{non,th} + N_{non,m} + N_{non,0} \right] \int_0^1 \phi_j \sum_{i=1}^n u_i \phi_i'' dx + 2\alpha_1 \int_0^1 \phi_j z_s'' \left(\int_0^1 z_s' \sum_{i=1}^n dx \right) dx + \int_0^1 \phi_j \frac{2\lambda}{(1+z_s)^3} \sum_{i=1}^n u_i \phi_i dx, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.24)$$

Уравнение (3.24) представляет собой систему линейно связанных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно модальных координат u_j . Решение задачи на собственные значения данной системы уравнений дает первые n собственных частот балки.

4. Диаграммы статического равновесия. В настоящем пункте приведены статические диаграммы положений равновесия, полученные путем продолжения по параметру постоянного электрического напряжения λ в уравнении (3.11).

Ниже на рисунке 3,б приведена зависимость прогиба в центре балки и в точках, соответствующих $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ длины балки от параметра статического напряжения. Маркерами отображены точки, в которых на рисунке 3,а изображены соответствующие им функции прогиба балки в процессе движения по бифуркационной диаграмме.

При несимметричной форме начальной погиби микробалка не обладает свойством бистабильности – существования двух различных устойчивых положений равновесия при одном значении электростатического напряжения.

5. Анализ малых колебаний в окрестности положения равновесия. Приведем результаты исследования частот и амплитуд малых колебаний вблизи положений равновесия, найденных ранее в п. 4. Ниже представлены результаты исследования зависимости собственных частот и форм изгибных колебаний балки при варьировании параметров электростатического напряжения λ и распорного усилия N . Следует отметить, что при решении задачи на собственные значения для каждого значения указанных параметров использовалась функция статического прогиба z_s , найденная из уравнения (3.14) при текущих значениях параметров. На рис. 4 изображены зависимости первых трех частот изгибных колебаний балки при увеличении параметра статического напряжения.

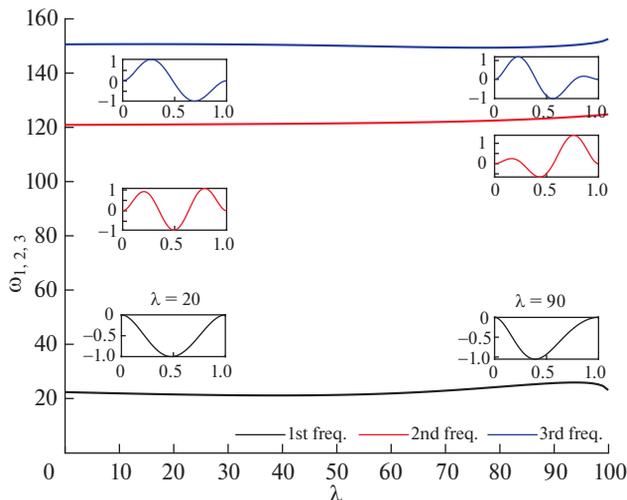


Рис. 4. Зависимость первых трех собственных частот микробалки от параметра статического напряжения λ , $N = 0$.

На рис. 5 изображены зависимости первых трех частот изгибных колебаний балки при варьировании параметра распорного усилия. Согласно уравнению (3.3), распорное усилие складывается из усилия механической природы, вызванного преднапряженным состоянием чувствительного элемента, нагрева вследствие эффекта Джоуля при протекании тока через балку, а также усилия, вызванного ускорением подвижной массы, что является полезным выходным сигналом прибора.

В положительной области по параметру N на рис. 5, то есть в области растяжения, наблюдается эффект близости частотных ветвей, соответствующих второй (первой несимметричной) и третьей (второй симметричной) собственным формам. Вид функции прогиба при значениях параметра N до и после области близости показывает, что частотные ветви также меняются местами после прохождения этой зоны. Аналогичный эффект близости указанных частотных ветвей наблюдается в работе [52] при возбуждении начально изогнутой микробалки несимметричным электростатическим полем.

Для обнаружения эффекта локализации колебаний в данной зоне была построена зависимость отношения амплитуд колебаний на указанных частотных ветвях от параметра N , изображенная на рис. 6. Анализ данного графика показывает, что в системе наблюдается эффект локализации колебаний и обмена энергией между второй и третьей формами изгибных колебаний. Однако, эффект наблюдается в области растяжения чувствительного элемента, а настройка на рабочий режим происходит путем приложения разности потенциалов к торцам балки, что приводит к сжатию. Таким образом, необходимое значение параметра N_0 , соответствующего начальному преднапряженному состоянию, равно примерно 110 безразмерных единиц.

Далее представлены зависимости частотных ветвей второй и третьей собственных форм в размерном виде и отношение амплитуд колебаний по данным формам относительно величины напряжения V_{th} с учетом преднапряженного состояния N_0 . Используемые числовые значения параметров системы приведены в таблице 1 (материал балки – изотропный кремний).

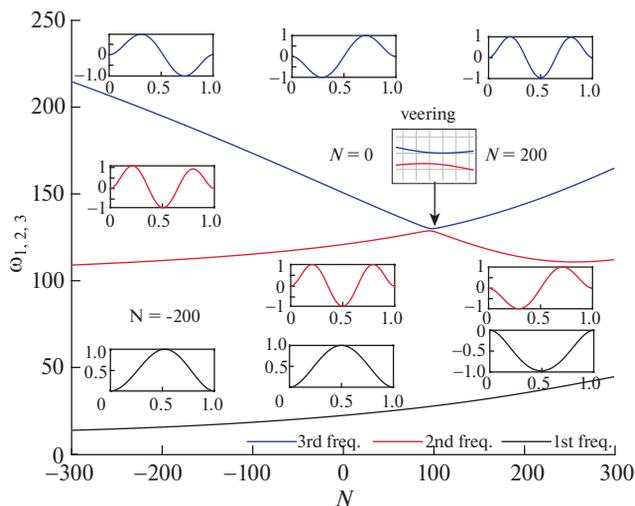


Рис. 5. Зависимость первых трех собственных частот микробалки от параметра распорного усилия N , $\lambda = 0$.

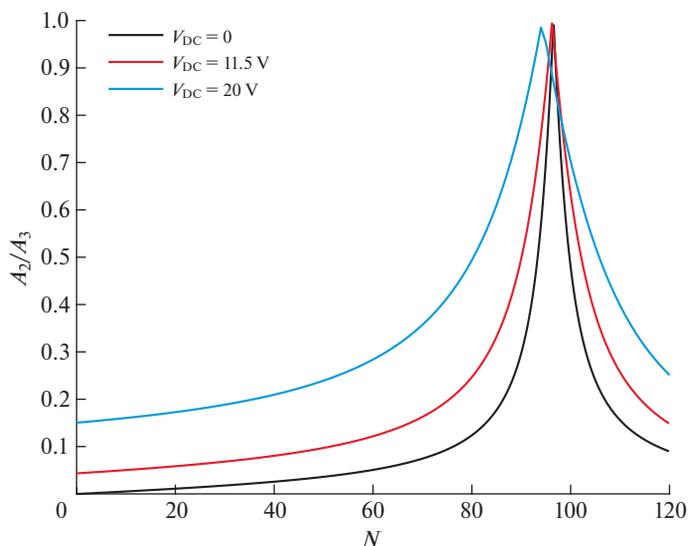


Рис. 6. Амплитудное отношение колебаний на второй и третьей собственных частотах.

Из рис. 7 можно сделать вывод, что для сдвига рабочей точки прибора в нужном диапазоне требуется относительно небольшое значение управляющего напряжения — меньше 1 В.

Заключительным этапом данной работы является анализ чувствительности акселерометра в зависимости от выбора рабочей точки и соотношения масс чувствительного элемента и подвижной массы. Результаты исследования представлены в таблице 2, а

Таблица 1. Числовые значения параметров системы

Величина	Значение	Величина	Значение
Длина балки	1000 мкм	Модуль Юнга кремния	170 ГПа
Толщина балки	2 мкм	Плотность кремния	2329 кг/м ³
Ширина балки	25 мкм	Коэффициент теплопроводности кремния	130 Вт/(м · К)
Межэлектродный зазор	8 мкм	Удельная теплоемкость кремния	700 Дж/(кг · К)
Амплитуда начальной погиби	2.6 мкм	КЛТР кремния	2.6 × 10 ⁻⁶ 1/К
Осевое усилие N_0	2.5 × 10 ⁻⁴ Н	Относительная диэлектрическая проницаемость воздуха	1

также на рис. 8 представлены зависимости отношения амплитуд от величины внешне-го измеряемого ускорения.

Исходя из результатов, представленных в таблице 2, можно сделать вывод о том, что при отношении массы подвижной части прибора к массе чувствительного элемента (балки) в диапазоне $M/m = [100, 1000]$ чувствительность амплитудного выхода модально-локализованного акселерометра, описанного в данной работе, достигает величин порядка 80000 ppm/g. Величина относительной чувствительности акселерометра с амплитудным выходом сопоставима с характеристиками известных модально-локализованных акселерометров [66–68].

Заключение. В настоящей работе выполнено параметрическое исследование нелинейных задач статики и динамики малых колебаний для изначально искривленной микробалки как перспективного чувствительного элемента высокоточных резонансных датчиков различных физических величин. Изучен фактор формы начальной погиби микробалки. Показано, что при несимметричной форме начальной погиби в области положительных осевых усилий существуют зоны близости частотных ветвей, соответствующих второй симметричной и первой несимметричной формам колебаний. При конструкционном обеспечении требуемого значения осевого растягиваю-

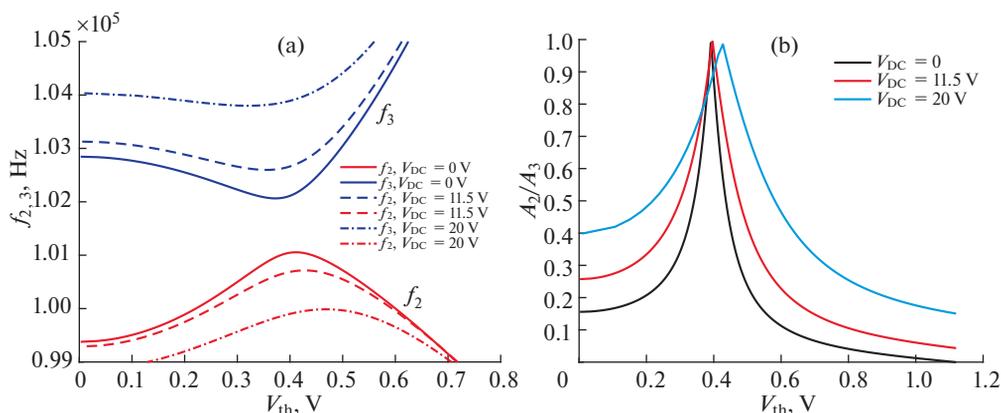
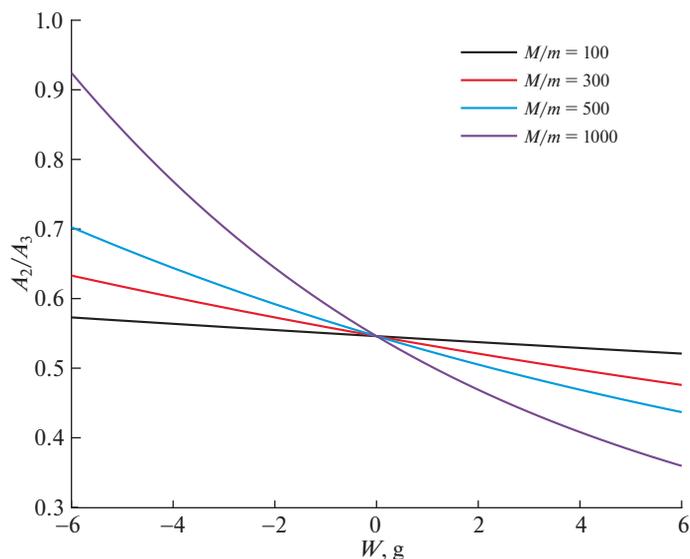


Рис. 7. Зависимость второй и третьей собственных частот и их амплитудного отношения от разности потенциалов на концах балки. (а) – зависимость частотных ветвей от V_{th} , (б) – зависимость отношения амплитуд от V_{th} .

Таблица 2. Сравнение выходных характеристик датчика при разных соотношениях масс и выборе рабочей точки

Отношение масс M/m	Рабочая точка, V	Частота f_3 , кГц	Чувствительность (A), млн ⁻¹ /g
100	$V_{th} = 0.4$	102.1	8107
	$V_{th} = 0.43$	102.3	4290
	$V_{th} = 0.46$	102.6	2227
300	$V_{th} = 0.4$	102.1	24321
	$V_{th} = 0.43$	102.3	12869
	$V_{th} = 0.46$	102.6	6682
500	$V_{th} = 0.4$	102.1	40535
	$V_{th} = 0.43$	102.3	21449
	$V_{th} = 0.46$	102.6	11137
1000	$V_{th} = 0.4$	102.1	81071
	$V_{th} = 0.43$	102.3	42898
	$V_{th} = 0.46$	102.6	22274

щего усилия в микробалке этот эффект может быть использован, в частности, для измерения осевой компоненты переносного ускорения по принципу амплитудной модальной локализации. Предусмотренная в компоновке датчика возможность нагрева чувствительного элемента с помощью протекающего по микробалке электрического

**Рис. 8.** Зависимость отношения амплитуд колебаний по второй и третьей собственным формам от величины внешнего ускорения, $V_{th} = 0.43V$.

тока позволяет управлять рабочей точкой режима колебаний и, таким образом, в весьма широких пределах варьировать диапазон измеряемых ускорений и степень чувствительности датчика. Предложенная в статье конфигурация электродов возбуждения колебаний и съема выходного сигнала позволяет, с помощью контура обратной связи, стабилизировать на требуемом уровне амплитуду колебаний по рабочей (третьей) симметричной форме и, при этом, измерять связанную с изменением величины измеряемой компоненты переносного ускорения амплитуду колебаний по несимметричной форме. Таким образом, в работе предложена и исследована математическая модель оригинального модально-локализованного акселерометра (гравиметра), содержащего единственный чувствительный микробалочный элемент и задействующего эффект обмена энергией между различными его формами колебаний.

Поддержка. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10009, <https://rscf.ru/project/21-71-10009/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hajjaj A.Z., Jaber N., Ilyas S. et al.* Linear and nonlinear dynamics of micro and nanoresonators: Review of recent advances // *Int. J. Non-Lin. Mech.* 2019. V. 119. P. 103328. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103328>
2. *Belyaev Ya.V., Belogurov A.A., Bocharov A.N. et al.* Design of a micromechanical accelerometer. // 25th Saint Petersburg Int. Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS). IEEE, 2018. P. 1–7. <https://doi.org/10.23919/ICINS.2018.8405921>
3. *Wang C., Chen F., Wang Y. et al.* Micromachined Accelerometers with Sub- $\mu\text{g}/\text{Hz}$ Noise Floor: A Review // *Sensors*. 2020. V. 20. P. 4054. <https://doi.org/10.3390/s20144054>
4. *Morozov N.F., Indeitsev D.A., Igumnova V.S. et al.* Nonlinear dynamics of mode-localized MEMS accelerometer with two electrostatically coupled microbeam sensing elements // *Int. J. Non-Lin. Mech.* 2022. V. 138. P. 103852. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103852>
5. *Morozov N.F., Indeitsev D.A., Igumnova V.S. et al.* A novel model of a mode-localized MEMS accelerometer // *Dokl. Phys.* 2020. V. 65. P. 371–375.
6. *Morozov N.F., Indeitsev D.A., Igumnova V.S. et al.* Effect of Nonlinearity on Mode Localization Phenomena in Dynamics of MEMS Resonant Sensor with Two Electrostatically Coupled Microbeams // *Vest. St. Petersburg Univ. Math.* 2021. V. 54. № 2. P. 135–144. <https://doi.org/10.1134/S1063454121020072>
7. *Yang J., Zhong J., Chang H.* A Closed-Loop Mode-Localized Accelerometer // *J. Microelectromech. Syst.* 2018. V. 27. № 2. P. 210–217. <https://doi.org/10.1109/JMEMS.2017.2787544>
8. *Benjamin E., Lullinsky S., Krylov S.* Bistable force/acceleration sensor based on pull-in voltage monitoring // 2016 IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems. IEEE, 2016. P. 109–112. <https://doi.org/10.1109/ISISS.2016.7435557>
9. *Benjamin E., Lullinsky S., Krylov S.* Design and Implementation of a Bistable Force/Acceleration Sensing Device Considering Fabrication Tolerances // *J. Microelectromech. Syst.* 2018. V. 27. No. 5. P. 854–865. <https://doi.org/10.1109/JMEMS.2018.2852621>
10. *Krakov N., Ilic B., Krylov S.* Displacement Sensing Based on Resonant Frequency Monitoring of Electrostatically Actuated Curved Micro Beams // *J. Micromech. Microeng.* 2016. V. 26. P. 115006. <https://doi.org/10.1088/0960-1317/26/11/115006>
11. *Kessler Y., Ilic B., Krylov S., Liberzon A.* Flow Sensor Based on the Snap-Through Detection of a Curved Micromechanical Beam // *J. Microelectromech. Syst.* 2018. V. 27. № 6. P. 945–947. <https://doi.org/10.1109/JMEMS.2018.2868776>

12. *Kessler Y., Liberzon A., Krylov S.* Flow Velocity Gradient Sensing Using a Single Curved Bistable Microbeam // *J. Microelectromech. Syst.* 2020. V. 29. № 5. P. 1020–1025.
<https://doi.org/10.1109/JMEMS.2020.3012690>
13. *Hajjaj A., Jaber N., Alcheikh N., Younis M.* A Resonant Gas Sensor Based on Multimode Excitation of a Buckled Microbeam // *IEEE Sensors J.* 2019. V. 20. № 4. P. 1778–1785.
<https://doi.org/10.1109/JSEN.2019.2950495>
14. *Najar F., Ghommem M., Abdel-Rahman E.* Arch microbeam bifurcation gas sensors // *Nonlin. Dyn.* 2021. V. 104. P. 923–940.
<https://doi.org/10.1007/s11071-021-06319-0>
15. *Zhu R., Wallrabe U., Woias P. et al.* Semi-rigid ring-shaped electrode dielectric electroactive polymer membrane as buckling actuator // *J. Micromech. Microeng.* 2019. V. 29. P. 055001.
<https://doi.org/10.1088/1361-6439/ab078d>
16. *Tella S., Younis M.I.* Toward cascaded MEMS logic device based on mode localization // *Sens. Actuators, A.* 2020. V. 315. P. 112367.
<https://doi.org/10.1016/j.sna.2020.112367>
17. *Rega G., Lacarbonara W., Nayfeh A.* Reduction Methods for Nonlinear Vibrations of Spatially Continuous Systems with Initial Curvature // *IUTAM Symposium on Recent Developments in Nonlinear Oscillations of Mechanical Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 77 / Ed. by N. Van Dao, E.J. Kreuzer Dordrecht: Springer, 2000. P. 235–246.*
https://doi.org/10.1007/978-94-011-4150-5_24
18. *Cao D.Q., Liu D., Wang C.* Nonlinear dynamic modelling for MEMS components via the Cosserat rod element approach // *J. Micromech. Microeng.* 2005. V. 15. P. 1334.
<https://doi.org/10.1088/0960-1317/15/6/027>
19. *Lacarbonara W., Yabuno H.* Refined models of elastic beams undergoing large in-plane motions: Theory and experiment // *Int. J. Solids Struct.* 2005. V. 43. № 17. P. 5066–5084.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.07.018>
20. *Srinil N., Rega G., Chucheepsakul S.* Two-to-one resonant multi-modal dynamics of horizontal/inclined cables. Part I: Theoretical formulation and model validation // *Nonlin. Dyn.* 2007. V. 48. P. 231–252.
<https://doi.org/10.1007/s11071-006-9086-0>
21. *Srinil N., Rega G.* Two-to-one resonant multi-modal dynamics of horizontal/inclined cables. Part II: Internal resonance activation, reduced-order models and nonlinear normal modes // *Nonlin. Dyn.* 2007. V. 48. P. 253–274.
<https://doi.org/10.1007/s11071-006-9087-z>
22. *Cao D.Q., Tucker R.* Nonlinear dynamics of elastic rods using the Cosserat theory: Modelling and simulation // *J. Solids Struct.* 2008. V. 45. P. 460–477.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.08.016>
23. *Luo A.C.J.* On a nonlinear theory of thin rods // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2010. V. 15. № 12. P. 4181–4197.
<https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.01.043>
24. *Vlajic N., Fitzgerald T., Nguyen V., Balachandran B.* Geometrically exact planar beams with initial pre-stress and large curvature: Static configurations, natural frequencies, and mode shapes // *Int. J. Solids Struct.* 2014. V. 51. P. 3361–3371.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.05.026>
25. *Lembo M.* Exact solutions for post-buckling deformations of nanorods // *Acta Mech.* 2017. V. 228. P. 2283–2298.
<https://doi.org/10.1007/s00707-017-1834-3>
26. *Zhou Y., Yi Z., Stanciulescu I.* Nonlinear Buckling and Postbuckling of Shallow Arches With Vertical Elastic Supports // *J. Appl. Mech.* 2019. V. 86. № 6. P. 0610011.
<https://doi.org/10.1115/1.4042572>
27. *Nicoletti R.* On the natural frequencies of simply supported beams curved in mode shapes // *J. Sound Vib.* 2020. V. 485. P. 115597.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115597>
28. *Pandurangi S., Elliott R., Healey T., Triantafyllidis N.* Stable Spatially Localized Configurations in a Simple Structure – A Global Symmetry-Breaking Approach // *J. Elasticity.* 2020. V. 142. P. 163–199.
<https://doi.org/10.1007/s10659-020-09794-5>

29. *Emam S., Lacarbonara W.* Buckling and postbuckling of extensible, shear-deformable beams: Some exact solutions and new insights // *Int. J. Non-Lin. Mech.* 2021. V. 129. P. 103667.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103667>
30. *Medina L., Gilat R., Krylov S.* Symmetry breaking in an initially curved micro beam loaded by a distributed electrostatic force // *Int. J. Solids Struct.* 2012. V. 49. P. 1864–1876.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.03.040>
31. *Medina L., Gilat R., Krylov S.* Symmetry breaking in an initially curved pre-stressed micro beam loaded by a distributed electrostatic force // *Int. J. Solids Struct.* 2014. V. 51. P. 2047.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.02.010>
32. *Shojaeian M., Beni T.Y., Ataei H.* Size-dependent snap-through and pull-in instabilities of initially curved pre-stressed electrostatic nano-bridges // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2016. V. 49. P. 295303.
<https://doi.org/10.1088/0022-3727/49/29/295303>
33. *Medina L., Gilat R., Krylov S.* Latching in bistable electrostatically actuated curved micro beams // *Int. J. Eng. Sci.* 2017. V. 110. P. 15–34.
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2016.10.001>
34. *Medina L., Gilat R., Krylov S.* Bow Actuator: Low Voltage Switching in Electrostatically Actuated Bistable Beams // *Proc. of the ASME 2018 Int. Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Volume 4: 23rd Design for Manufacturing and the Life Cycle Conference; 12th International Conference on Micro- and Nanosystems.* ASME, 2018. P.V004T08A009.
<https://doi.org/10.1115/DETC2018-85534>
35. *Sharma A., Godara R.K., Joglekar M.* Static and DC dynamic pull-in analysis of curled microcantilevers with a compliant support // *Microsyst. Technol.* 2019. V. 25. P. 965–975.
<https://doi.org/10.1007/s00542-018-4046-4>
36. *Medina L., Gilat R., Krylov S.* Dynamic release condition in latched curved micro beams // *Commun. Nonlin. Sci. Numeric. Simulat.* 2019. V. 73. P. 291–306.
<https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.01.022>
37. *Medina L., Seshia A.* Bistability and simultaneous mode actuation in electrostatically actuated initially curved coupled micro beams // *Int. J. Non-Lin. Mech.* 2020. V. 126. P. 103549.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103549>
38. *Medina L., Seshia A.* Tristable properties and limit point behaviour in electrostatically actuated initially curved coupled micro beams // *Int. J. Mech. Sci.* 2021. V. 204. P. 106543.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106543>
39. *Medina L., Gilat R., Ilic B., Krylov S.* Single Electrode Bidirectional Switching of Latchable Pre-stressed Bistable Micromechanical Beams // *IEEE Sens. J.* 2021. V. 21. № 19, P. 21349–21358.
<https://doi.org/10.1109/JSEN.2021.3103265>
40. *Lacarbonara W., Arafat H., Nayfeh A.* Non-linear interactions in imperfect beams at veering // *Int. J. Non-Lin. Mech.* 2005. V. 40. P. 987–1003.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2004.10.006>
41. *Alkharabsheh S., Younis M.* Statics and Dynamics of MEMS Arches Under Axial Forces // *J. Vibr. Acoust.* 2013. V. 135. P. 021007.
<https://doi.org/10.1115/1.4023055>
42. *Hajjaj A., Alcheikh N., Younis M.* The static and dynamic behavior of MEMS arch resonators near veering and the impact of initial shapes // *Int. J. Non-Lin. Mech.* 2017. V. 95. P. 277–286
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.07.002>
43. *Alqasimi E.J., Ouakad M.H.* Vibrational Response of Initially Deformed Bi-stable Microbeams Under the Combined Effect of Mechanical Shock Loads and Electrostatic Forces // *J. Vibr. Acoust.* 2017. V. 140. № 2. P. 021013.
<https://doi.org/10.1115/1.4038107>
44. *Ghayesh M., Farokhi H.* Bistable nonlinear response of MEMS resonators // *Nonlin. Dyn.* 2017. V. 90. P. 1627–1645.
<https://doi.org/10.1007/s11071-017-3753-1>
45. *Alfosail K.F., Hajjaj Z.A., Younis I.M.* Theoretical and Experimental Investigation of Two-to-One Internal Resonance in MEMS Arch Resonators // *J. Computat. Nonlin. Dyn.* 2018. V. 14. P. 011001.
<https://doi.org/10.1115/1.4041771>

46. *Tausiff M., Ouakad H.M., Alqahtani H., Alofi A.* Local nonlinear dynamics of MEMS arches actuated by fringing-field electrostatic actuation // *Nonlin. Dyn.* 2019. V. 95. P. 2907–2921.
<https://doi.org/10.1007/s11071-018-4731-y>
47. *Ouakad M.H., Najar F.* Nonlinear Dynamics of MEMS Arches Assuming Out-of-Plane Actuation Arrangement // *J. Vibr. Acoust.* 2019. V. 141. № 4. P. 041010.
<https://doi.org/10.1115/1.4043064>
48. *Hajjaj A., Alfosail F., Jaber N. et al.* Theoretical and experimental investigations of the crossover phenomenon in micromachined arch resonator: part I – linear problem // *Nonlin. Dyn.* 2020. V. 99, P. 393–405.
<https://doi.org/10.1007/s11071-019-05251-8>
49. *Hajjaj A., Alfosail F., Jaber N. et al.* Theoretical and experimental investigations of the crossover phenomenon in micromachined arch resonator: part II – simultaneous 1:1 and 2:1 internal resonances // *Nonlin. Dyn.* 2020. V. 99. P. 407–432.
<https://doi.org/10.1007/s11071-019-05242-9>
50. *Alneamy A.M., Khater M.E., Al-Ghamdi M.S. et al.* Large Oscillation of Electrostatically Actuated Curved Beams // *J. Micromech. Microeng.* 2020. V. 30. P. 095005.
<https://doi.org/10.1088/1361-6439/ab94d1>
51. *Alcheikh N., Ouakad H.M., Ben Mbarek S., Younis M.I.* Investigations Into the Linear Coupling Between Symmetric and Anti-Symmetric Modes of V-Shaped MEMS Resonators Under Electrostatic Perturbation. // *Proceedings of the ASME 2021 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Volume 7A: Dynamics, Vibration, and Control.* ASME, 2021. P. V07AT07A029.
<https://doi.org/10.1115/IMECE2021-73535>
52. *Alcheikh N., Ouakad H.M., Ben Mbarek S., Younis M.I.* Crossover/veering in V-Shaped MEMS Resonators // *J. Micromech. Syst.* 2021. V. 31. № 1. P. 74–86.
<https://doi.org/10.1109/JMEMS.2021.3126551>
53. *Rosenberg S., Shoshani O.* Zero-dispersion point in curved micro-mechanical beams // *Nonlin. Dyn.* 2022. V. 107. P. 1–14.
<https://doi.org/10.1007/s11071-021-07015-9>
54. *Medina L., Gilat R., Ilic R., Krylov S.* Open Loop, Self-Excitation in a Bistable Micromechanical Beam Actuated By a DC Electrostatic Load // *Proceedings of the ASME 2017 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Volume 4: 22nd Design for Manufacturing and the Life Cycle Conference; 11th International Conference on Micro- and Nanosystems.* ASME, 2017. P. V004T09A006.
<https://doi.org/10.1109/MEMSYS.2017.7863525>
55. *Rajaei A., Vahidi-Moghaddam A., Ayati M., Baghani M.* Integral sliding mode control for nonlinear damped model of arch microbeams // *Microsyst. Technol.* 2019. V. 25. P. 57–68.
<https://doi.org/10.1007/s00542-018-3931-1>
56. *Kessler Y., Liberzon A., Krylov S.* On Sampling Rate Limits in Bistable Microbeam Sensors // *J. Micromech. Syst.* 2021. V. 6. P. 980–989.
<https://doi.org/10.1109/JMEMS.2021.3117838>
57. *Medina L., Gilat R., Krylov S.* Bistable behavior of electrostatically actuated initially curved micro plate // *Sens. Actuat. A: Phys.* 2016. V. 248. P. 193–198.
<https://doi.org/10.1016/j.sna.2016.07.027>
58. *Saghir S., Bellaredj M.L., Ramini A., Younis M.I.* Initially curved microplates under electrostatic actuation: Theory and experiment // *J. Micromech. Microeng.* 2016. V. 26. P. 095004.
<https://doi.org/10.1088/0960-1317/26/9/095004>
59. *Medina L., Gilat R., Krylov S.* On The Usage of Berger’s Model for Electrostatically Actuated Circular Curved Micro Plates. // *Proceedings of the ASME 2017 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Volume 4: 22nd Design for Manufacturing and the Life Cycle Conference; 11th International Conference on Micro- and Nanosystems.* ASME, 2017. P.V004T09A006.
<https://doi.org/10.1115/DETC2017-67523>
60. *Medina L., Gilat R., Krylov S.* Bistability criterion for electrostatically actuated initially curved micro plates // *Int. J. Eng. Sci.* 2018. V. 130. P. 75–92.
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.05.006>

-
61. *Saghir S., Younis I.M.* An investigation of the mechanical behavior of initially curved microplates under electrostatic actuation // *Acta Mech.* 2018. V. 229. P. 2909–2922. V. 229. <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2141-3>
 62. *Ghayesh H.M., Farokhi H.* Nonlinear behaviour of electrically actuated microplate-based MEMS resonators // *Mech. Syst. Signal Proc.* 2018. V. 109. P. 220–234. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.11.043>
 63. *Dorfmeister M., Kossl B., Schneider M. et al.* Switching performance of bistable membranes activated with integrated piezoelectric thin film transducers // *J. Micromech. Microeng.* 2019. V. 29. P. 105008. <https://doi.org/10.1088/1361-6439/ab3185>
 64. *Asher A., Benjamin E., Medina L. et al.* Bistable Micro Caps Fabricated by Sheet Metal Forming // *J. Micromech. Microeng.* 2020. V. 30. P. 065002. <https://doi.org/10.1088/1361-6439/ab7f52>
 65. *Dhooge A., Govaerts W., Kuznetsov A. Y.* MATCONT: a MATLAB package for numerical bifurcation analysis of ODEs // *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*. 2003. V. 29. № 2. P. 141–164.
 66. *Guo X., Yang B., Li C., Liang Z.* Enhancing output linearity of weakly coupled resonators by simple algebraic operations // *Sens. Actuat. A: Phys.* 2021. V. 325. P. 112696.
 67. *Kang H., Yang J., Chang H.* A closed-loop accelerometer based on three degree-of-freedom weakly coupled resonator with self-elimination of feedthrough signal // *IEEE Sensors J.* 2018. V. 18. № 10. P. 3960–3967.
 68. *Zhang H.M., Yuan W.Z., Li B.Y. et al.* A novel resonant accelerometer based on mode localization of weakly coupled resonators // *Transducers-2015 18th International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (TRANSDUCERS)*. IEEE, 2015. P. 1073–1076.

УДК 539.3

ОБ ОЦЕНКЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

© 2023 г. А. О. Ватульян^{a,*}, В. О. Юров^{a,b,**}

^aЮжный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

^bЮжный математический институт – филиал ВЦ РАН, Владикавказ, Россия

*e-mail: aovatulyan@sfned.ru,

**e-mail: vitja.jurov@yandex.ru

Поступила в редакцию 26.11.2022 г.

После доработки 05.12.2022 г.

Принята к публикации 06.12.2022 г.

Рассмотрена задача об определении характеристик чувствительности неоднородных изотропных упругих тел по отношению к трем функциям, характеризующим неоднородность – коэффициентам Ламе и плотности. Сформулированы соответствующие краевые задачи, получены формулы для определения чувствительности. Представлен пример для цилиндрического стержня при анализе продольных и изгибных колебаний, проанализирована чувствительность к изменению модуля Юнга и плотности. При помощи итерационного алгоритма и метода регуляризации А.Н. Тихонова решен ряд обратных задач по определению этих характеристик для монотонных и немонотонных законов их изменения, представлены результаты вычислительных экспериментов. Проанализирована норма разности точного и восстановленного решений. Даны рекомендации по выбору частотного диапазона для зондирования, наиболее эффективного с точки зрения реконструкции.

Ключевые слова: чувствительность, неоднородность, цилиндр, стержень, обратная задача, слабая постановка, производные по Фреше

DOI: 10.31857/S0572329922600839, EDN: JMKQHR

Введение. В последние годы при решении многих задач механики деформируемого твердого тела, особенно при изучении идентификации параметров новых моделей интерес вызывает исследование чувствительности решений по отношению к параметрам модели – модулям упругости, параметрам вязкоупругих и пороупругих операторов, пьезомодулей, коэффициентам теплопроводности и другим характеристикам. Это связано с интенсивным исследованием по меньшей мере двух важных классов задач для однородных или неоднородных деформируемых тел.

Первый класс задач связан с нахождением некоторых оптимальных параметров или законов изменения характеристик, доставляющих экстремум некоторого функционала качества [1], характеризующего деформативность, минимум веса при сохранении прочности, армирование, критические значения в задачах устойчивости, резонансные частоты и др.

Второй класс связан с решением ряда обратных задач по реконструкции постоянных или переменных свойств тел при наличии дополнительной информации о решении в виде компонент граничных полей, амплитудно-частотных характеристик, резонансных частот [2–9]. При этом отметим, что наиболее адекватными постановками являются такие, когда дополнительная информация в обратной задаче задана на гра-

нице изучаемого тела, что при решении обратных задач приводит к изучению нелинейных операторных уравнений (или систем) с компактными операторами. Другая постановка, которая стала достаточно интенсивно изучаться в последнее время, опирается на дополнительную информацию, заданную в виде компонент полей смещений, заданных (измеренных) внутри тела. Эта постановка, опирающаяся на измерительные ресурсы эластографии, и реализующаяся для идентификации мягких тканей в биомеханике, приводит к линейным операторным уравнениям, которые стали предметом исследований относительно недавно [10–13].

Выявление параметров задачи, которые наиболее сильно (или слабо) влияют на исследуемые функции или функционалы, важные для дальнейшего анализа соответствующей проблемы, составляет суть анализа чувствительности.

В ряде случаев, когда изучаемые характеристики постоянны, такой анализ даже по отношению к целому комплексу характеристик осуществляется на базе стандартной схемы – при помощи вычисления частных производных измеряемой (заданной) функции или функционала по параметрам, относительно которых такой анализ осуществляется. Приравнивание их нулю приводит к базовой системе уравнений для определения параметров. Соответственно численная процедура анализа чувствительности производится следующим образом: фиксируются все параметры, кроме одного, и анализируются зависимости наблюдаемой характеристики от этого параметра. К сожалению, анализ чувствительности не может быть осуществлен в рамках такой схемы, если анализируемые параметры переменны, что часто встречается в последнее время при анализе и оптимизации свойств функционально-градиентных материалов, и требует более тонких подходов. Заметим, что при этом чувствительность определяется не только параметрами или функциями, характеризующими физические свойства объекта, но и способом нагружения.

Так, статья [6] посвящена некоторым статическим и динамическим обратным задачам, возникающим для моделей линейной упругости для трехмерных упругих сред и тонких упругих пластин, а именно идентификации распределений модулей упругости, параметров модели или скрытых объектов, таких как трещины. Представлены формулы для определения параметрической или геометрической чувствительности.

В [14] разработан анализ чувствительности первого и второго порядка задачи на собственные значения обобщенных несимметричных матриц с использованием теории возмущений. Затем эти результаты применяются для анализа чувствительности при изучении распространения волн в конструкциях. Введены характеристики чувствительности по отношению к системным параметрам волновых чисел и форм волновых мод. Приведены выражения для групповой скорости. Для демонстрации предлагаемого подхода используются численные результаты для тонкой балки и слоистой панели.

Наиболее простыми и подробно изученными являются задачи для функционально-градиентных стержней и слоистых балочных структур [9, 15, 16].

В качестве примера приведем задачу об идентификации законов изменения модуля упругости и плотности неоднородного изотропного цилиндрического стержня, один торец которого закреплен [16], при анализе продольных и изгибных колебаний. При этом можно возбуждать колебания различного типа под воздействием разного типа нагрузок (продольные, изгибные, крутильные). Отметим, что параметр Ляме λ не входит в задачу о крутильных колебаниях, соответственно чувствительность тангенциального смещения к этому параметру (функции) равна нулю. Возникает вопрос – каким образом необходимо нагружать объект (и выбирать частотный отрезок нагружения или несколько таких отрезков), чтобы соответствующий отклик был чувствителен к искомой характеристике и таким образом создавать процедуру идентификации, близкую к оптимальной.

Отметим, что имеются следующие возможности при анализе заданных (измеренных) характеристик смещений.

1. Для функций, которые параметризуются конечным набором числовых параметров (полиномы, тригонометрические полиномы, линейные комбинации экспонент) — это нахождение частных производных, либо, как описано выше, осуществление вычислительных экспериментов при фиксации всех параметров, исследование зависимости базового функционала от каждого параметра.

2. В случае, когда идентифицируемые характеристики переменны, возможно для оценочных прикидочных расчетов использовать верхние и нижние оценки для функций, которые часто известны.

3. Ввести соответствующие характеристики чувствительности средствами функционального анализа, используя производные соответствующих операторов по Фреше [17], составить и анализировать краевые задачи относительно таких производных.

Таким образом, целью настоящей работы является обсуждение и формулировка критериев чувствительности для неоднородных материалов и элементов конструкций из них. Отметим, что в ряде ситуаций возможно указать такие режимы нагружения объекта, при которых чувствительность объекта по отношению к какой-либо характеристике равна нулю. Например, помимо приведенного выше примера для крутильных колебаний, таковым является модуль сдвига при возбуждении в образце цилиндрической формы продольных или изгибных колебаний.

1. Постановка задачи, введение основных характеристик чувствительности для неоднородных упругих тел. Рассмотрим соответствующую проблему чувствительности для оператора теории упругости. Пусть краевая задача об установившихся колебаниях неоднородного упругого тела описывается в рамках следующей постановки.

Рассмотрим установившиеся колебания ограниченной области V с кусочно-гладкой границей $S = S_u \cup S_\sigma$, а n_j — компоненты единичного вектора внешней нормали к S . Сформулируем постановку коэффициентных обратных задач для определения зависящих от координат материальных характеристик материала в случае задания дополнительной информации на границе объекта.

Уравнения установившихся колебаний имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

Определяющие соотношения представляют собой закон Гука для анизотропного упругого тела

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l} \quad (1.2)$$

Соотношения (1.1), (1.2) позволяют записать систему дифференциальных уравнений второго порядка, которая наиболее часто используется для анализа колебаний однородных и неоднородных тел. Для формулировки краевой задачи необходимо задать граничные условия, будем считать, что в общей ситуации они представляют собой условия смешанного типа

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{S_\sigma} = p_i \quad (1.3)$$

Здесь c_{ijkl} — компоненты тензора упругих модулей, являющиеся кусочно-непрерывными функциями координат, которые удовлетворяют обычным условиям симметрии и положительной определенности, ρ — плотность среды.

Сформулируем задачу определения коэффициентов дифференциального оператора теории упругости по дополнительной информации

$$u_i|_{S_\sigma} = f_i(x, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (1.4)$$

Такая постановка соответствует измерению поля перемещений на части границы S_σ , на которой осуществляется нагружение, в некотором диапазоне частот. Отметим, что в такой общей постановке задача является нелинейной и построение решения осуществляется на основе построения некоторого итерационного процесса, который достаточно подробно описан в [9, 16, 17]. Приведем постановку в случае изотропного тела, для которого закон Гука (2) имеет вид

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.5)$$

где λ, μ – параметры Ляме, являющиеся положительными функциями координат.

Для упругих тел можно пользоваться обобщенным соотношением взаимности и полученным на его основе операторным соотношением [9]. При исследовании коэффициентных обратных задач, состоящих в определении функций, характеризующих неоднородность, для общих линейных моделей механики сплошной среды также можно опираться на слабую формулировку, которая весьма часто используется и для исследования прямых задач.

При формулировке слабой постановки спроектируем уравнение движения (1.1) на элемент v , представляющий собой вектор-функцию с дифференцируемыми компонентами и удовлетворяющую граничным условиям на S_u (далее будем считать, что $v \in H_0(V)$). Используя теорему Гаусса–Остроградского и учитывая граничные условия в (1.3), приведем это равенство к виду $A(a, u, v) = b(v)$, где $A(a, u, v)$ есть трилинейная форма (линейная по каждому аргументу) переменных a, u, v , $b(v)$ – линейная форма.

Так, слабая постановка для анизотропной теории упругости состоит в нахождении компонент вектора смещений, причем для трилинейной и линейной форм имеем соответственно

$$A(a, u, v) = \int_V 2L(u_i, v_i, C_{ijkl}, \rho) dV, \quad b(v) = \int_{S_\sigma} p_i v_i dS, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (1.6)$$

$$2L(u_i, v_i, C_{ijkl}, \rho) = C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} - \rho \omega^2 u_i v_i$$

Для решения обратной задачи по восстановлению трех переменных характеристик λ, μ, ρ используется несколько подходов, в основе которых лежит итерационный метод типа Ньютона [9–16] и его модификации. Сформулируем соответствующие операторные уравнения. Для нахождения трех характеристик будем использовать три режима зондирования, которые характеризуются как разными областями приложения нагрузки, так и способом ее приложения. Обозначим эти нагрузки через $p_i^{(m)}$, $m = 1, 2, 3$; соответствующие им поля смещений будем обозначать через $u_i^{(m)}$.

В изотропном случае для определяющих соотношений вида (5) из слабой постановки (1.6), полагая $v_i = u_i^{(m)}$, имеем следующую систему нелинейных интегральных уравнений типа Урысона

$$\int_V [\lambda (u_{k,k}^{(m)})^2 + \mu (u_{i,j}^{(m)} + u_{j,i}^{(m)}) (u_{i,j}^{(m)} + u_{j,i}^{(m)}) - \rho \omega^2 u_i^{(m)} u_i^{(m)}] dV = \int_{S_\sigma} p_i^{(m)} f_i^{(m)} dS \quad (1.7)$$

$$m = 1, 2, 3$$

Особенностью этой системы, состоящей из 3 нелинейных интегральных уравнений, является знакоопределенность ядер, зависящих от компонент смещений и их градиентов, при неизвестных функциях λ, μ, ρ . Возможное нарушение знакоопределенности в зависимости от компонент тензора деформаций имеется в случае использования модели несжимаемого материала, а также при таком виде нагружения, когда шаровая часть тензора деформаций обращается в ноль (что приводит к обращению в ноль ядра при λ , что отмечено выше). Заметим попутно, что ядра при μ и ρ в ноль не

обращаются. Обычно система нелинейных операторных уравнений вида (1.7) исследуется на основе операторного метода Ньютона, при этом требуется нахождение производных по Фреше от основного оператора и выбор начального приближения.

Начальное приближение для реализации итерационного процесса отыскивается обычно в некотором узком классе функций – постоянных, линейных или кусочно-линейных путем минимизации функционала невязки

$$J_0 = \sqrt{\int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{S_\sigma} (f - u^{(0)})^2 dS d\omega} \quad (1.8)$$

и на каждом шаге итерационного процесса необходимо формировать и решать линейную систему интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами, позволяющую находить поправки к некоторому приближению. Далее будем считать, что g_1 характеризует поправки для λ , g_2 характеризует поправки для параметра μ , а g_3 характеризует поправки для плотности, гладкие ядра в (1.7) K_{1m}, K_{2m} неотрицательны, K_{3m} – отрицательны. Решение таких интегральных уравнений и систем представляет собой некорректную задачу [2] и может быть построено лишь на основе сужения пространства поиска до компактного или конечномерного множества, причем регуляризованные решения строятся на базе метода А.Н. Тихонова. Особенностью ситуации, когда определяется несколько функций, является то обстоятельство, что ядра системы в силу различной чувствительности в равномерной норме могут различаться на порядок и более друг от друга, что приводит к сильному вырождению линейных систем при численной реализации. Это подтверждают результаты вычислительных экспериментов, осуществленные при решении обратных задач для цилиндрической области [17–20]. В вычислительных экспериментах по определению трех функций, зависящих от радиальной координаты, показано, что законы изменения μ и ρ находятся с приемлемой точностью, а λ – с весьма невысокой, что связано с разным порядком ядер в интегральных уравнениях типа (1.7).

Вернемся к операторному уравнению, в описание которого помимо полевых переменных входят коэффициенты, образующие вектор $a = \{a_1, a_2, a_3\} = \{\lambda, \mu, \rho\}$.

Для оценки чувствительности введем в рассмотрение следующие характеристики чувствительности относительно величин напряжений и смещений, где производные понимаются в смысле Фреше [21]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial a_k} = \xi_{ij}^{(k)}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial a_k} = \zeta_i^{(k)} \quad (1.9)$$

Осуществляя необходимые построения и формируя соответствующие краевые задачи для введенных производных, получим связанную систему краевых задач. При этом, используя соответствующие соотношения взаимности, для произвольной нагрузки для введенных характеристик получены следующие соотношения

$$\begin{aligned} \int_{S_\sigma} p_i \xi_i^{(1)} dS + \int_V (u_{i,i})^2 dV &= 0 \\ \int_{S_\sigma} p_i \xi_i^{(2)} dS + 1/2 \int_V (u_{i,j} + u_{j,i})(u_{i,j} + u_{j,i}) dV &= 0 \\ \int_{S_\sigma} p_i \xi_i^{(3)} dS - \omega^2 \int_V u_i u_i dV &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Отметим, что для оценки чувствительности в некоторой точке поверхности тела следует осуществить зондирование с помощью сосредоточенных нагрузок. При этом соотношения (1.10) дают

$$\begin{aligned}
 p_i^{(1)} \xi_i^{(1)}(x_{01}) + \int_V (u_{i,j})^2 dV &= 0 \\
 p_i^{(2)} \xi_i^{(2)}(x_{02}) + 1/2 \int_V (u_{i,j} + u_{j,i})(u_{i,j} + u_{j,i}) dV &= 0 \\
 p_i^{(3)} \xi_i^{(3)}(x_{03}) - \omega^2 \int_V u_i u_i dV &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

которые позволяют определять чувствительность тела по отношению к различным видам воздействий и сравнивать отклики для различных законов неоднородности.

2. Пример оценки чувствительности для цилиндрического стержня. В качестве примера оценки чувствительности рассмотрим частную обратную задачу об определении двух функций $g(x)$ и $r(x)$ соответственно безразмерного модуля Юнга и безразмерной плотности для консольно-закрепленного стержня, в котором возбуждаются а) продольные колебания за счет приложения продольной силы единичной амплитуды на конце, б) изгибные колебания за счет приложения единичного момента на конце. В качестве дополнительной информации в обратной задаче будем считать, что заданы амплитудно-частотные характеристики о смещении и угле поворота на конце в зависимости от частоты колебаний.

$$u(1, \tau) = f(\tau), \quad \tau \in [0, \tau_1] \tag{2.1}$$

$$w'(1, \tau) = \varphi(\tau), \quad \tau \in [0, \tau_2] \tag{2.2}$$

В работе [16] построены интегральные уравнения вида (1.7) для стержня, в котором возбуждаются продольные или изгибные колебания. Эти уравнения имеют вид

$$f(\tau) = \int_0^1 g(\xi) u^2(\xi, \tau) d\xi - \tau \int_0^1 r(\xi) u^2(\xi, \tau) d\xi, \quad \tau \in [0, \tau_1] \tag{2.3}$$

$$\varphi(\tau) = \int_0^1 g(\xi) w'^2(\xi, \tau) d\xi - \gamma \tau \int_0^1 r(\xi) w'^2(\xi, \tau) d\xi, \quad \tau \in [0, \tau_2] \tag{2.4}$$

соответственно ядра интегральных операторов обладают свойствами знакоопределенности, отмеченными выше. Здесь u и w – соответственно амплитуды продольных и изгибных перемещений стержня, которые, вообще говоря, являются нелинейными операторами от искомым функций $g(x)$ и $r(x)$; введены безразмерные параметры: $\tau = \kappa^2 = \rho_0 \omega^2 l^2 / E_0$, $\gamma = 4l^2 / a^2$ (для кругового стержня радиуса a), ρ_0, E_0 – характерные значения плотности и модуля Юнга.

Итерационный процесс, описанный выше, приводит на n -й итерации к последовательному решению задач для стержней с известными переменными характеристиками и нахождению поправок из системы интегральных уравнений вида [16]. Собственно чувствительность для этого объекта отражают операторные зависимости $f(\tau)$, $\varphi(\tau)$ от материальных характеристик стержня. Если ввести соответствующие производные, отражающие чувствительность $\frac{\partial u}{\partial g}(g, r, x)$, $\frac{\partial w}{\partial g}(g, r, x)$, $\frac{\partial u}{\partial r}(g, r, x)$, $\frac{\partial w}{\partial r}(g, r, x)$ и оператор

$$A: G \rightarrow F$$

$$G(g, r) = M[g_-, g_+] \times M[r_-, r_+], \quad F(f, \varphi) = C^\infty[\tau_-, \tau_+] \times C^\infty[\tau_-, \tau_+]$$

$$A = A(u, w, g, r) \rightarrow (f, \varphi)$$

$$\theta_1 = f_{,g} \quad \theta_2 = f_{,r} \quad \theta_3 = \varphi_{,g} \quad \theta_4 = \varphi_{,r}$$

то нетрудно построить операторные уравнения для этих функций, а также установить некоторые соотношения для расчетов и соответствующие неравенства

$$\frac{df}{dg} = -\int_0^1 (u')^2 dx < 0, \quad \frac{df}{dr} = \tau \int_0^1 u^2 dx > 0$$

$$\frac{d\varphi}{dg} = -\int_0^1 (w'')^2 dx < 0, \quad \frac{d\varphi}{dr} = \gamma \tau \int_0^1 w^2 dx > 0$$

Из этих неравенств следуют следующие выводы, которые аналогичны теоремам сравнения Штурма.

1. Увеличение модуля упругости для неоднородного стержня приводит к уменьшению амплитуды продольного смещения и угла поворота.

2. Увеличение плотности для неоднородного стержня приводит к увеличению амплитуды колебаний продольного смещения и угла поворота.

3. Характеристики чувствительности сильно возрастают при приближении к резонансным значениям для соответствующих операторов, частотный анализ позволит выделить области, наиболее благоприятные для реконструкции неоднородных характеристик.

Замечания. 1. Отметим, что эти выводы относятся к тем сравнениям характеристик, когда неравенства выполняются всюду в области, занятой стержнем.

2. Важным также является сравнительный анализ разнородных характеристик чувствительности и выявление частотных областей, в которых они имеют одинаковый порядок.

Исследования в рамках предлагаемого подхода могут быть использованы при анализе колебаний кругового цилиндра и волновода [20] и решении КОЗ при общих двумерных и трехмерных законах неоднородности, а также при анализе влияния компонент предварительных напряжений.

3. Вычислительный эксперимент. При помощи методов пристрелки вычислим чувствительности для балки, материальные свойства которой описываются функциями $g(x) = 1.33 - 2(1-x)x$, $r(x) = 0.67 + 2(1-x)x$, примем, что $\gamma = 100$.

На рис. 1 изображены зависимости функций $-\theta_1, \theta_2, -\theta_3, \theta_4$ от параметра κ . Они являются знакоопределенными. Структура этих функций такова. Они бесконечно дифференцируемы, имеются разрывы второго рода, соответствующие резонансам (изгибным $\kappa = \{0.34, 2.2, 7.84, \dots\}$ и продольным $\kappa = \{1.57, 4.71, \dots\}$) и антирезонансы (на них амплитуды соответствующих перемещений обращаются в ноль). Были проведены масштабные вычислительные эксперименты, приведем результаты некоторых из них.

Рассмотрим задачу по восстановлению функций $g(x) = 1.33 - 0.67x$, $r(x) = 0.67 + x^2$. Построим АЧХ задач продольных и изгибных колебаний $f(\tau), \varphi(\tau)$. Рассмотрим два набора частот.

1. Точки первого набора $\kappa = \{0.25, 0.4, 0.6, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 1.7\}$. В качестве точек первого набора выбраны такие точки, которые были бы близки к резонансным частотам и удалены от нуля и частот антирезонанса. Введем следующие характеристики

$$J_j^f = \sqrt{\sum_s (f(\kappa_s) - u^{(j)}(1, \kappa_s))^2 + \sum_s (\varphi(\kappa_s) - w^{(j)}(1, \kappa_s))^2} \quad (3.1)$$

$$J_j^g = \sqrt{\int_0^1 (g(x) - g_j(x))^2 dx}, \quad J_j^r = \sqrt{\int_0^1 (r(x) - r_j(x))^2 dx} \quad (3.2)$$

На основе точек первого набора вычисляется функционал невязки в соответствии с (3.1). Путем его минимизации найдено начальное приближение $g_0(x) = 0.97$, $r_0(x) = 0.67 + 0.58x$. На основе метода регуляризации А.Н. Тихонова с автоматическим вы-

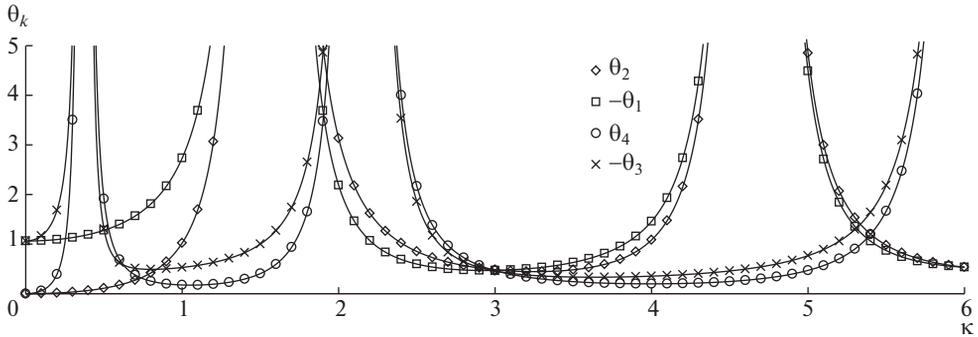


Рис. 1. Зависимость $|\theta_j|$, $j = 1, 2, 3, 4$ от параметра κ .

бором параметра регуляризации реализован итерационный процесс и найдены иско-
мые функции.

В табл. 1 сравнение АЧХ выполнено в евклидовой метрике (3.1) (так как в использу-
емом частотном диапазоне содержатся и резонансы), а сравнение точных функций
 $g(x)$, $r(x)$ с результатами реконструкции в метрике L_2 (3.2). Для использования невязки
(3.2) и перехода к следующей итерации используются кусочно-линейные аппроксима-
ции. Нулевая итерация соответствует начальному приближению. Заметим, что суще-
ственное снижение невязки в решении происходит уже при первой итерации.

2. Аналогичный вычислительный эксперимент выполним для второго набора ча-
стот $\kappa = \{0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.75, 1.85\}$. Путем минимизации функционала
невязки найдено начальное приближение $g_0(x) = 1.0$, $r_0(x) = 0.67 + 0.6x$.

В табл. 2 представлены невязки для второго диапазона частот. Отметим, что они
также значительно уменьшаются уже после первой итерации. При том, что невязка по
АЧХ оказалась меньше, чем в предыдущем случае, невязки в реконструкции функций
 $g(x)$ и $r(x)$ оказались выше. Таким образом, можно считать этот частотный набор ме-
нее удачным.

Рассмотрим также задачу по восстановлению немонотонных функций с одинако-
вым среднеинтегральным значением $g(x) = 1.33 - 2(1-x)x$, $r(x) = 0.67 + 2(1-x)x$.
Зададим третий частотный набор $\kappa = \{0.42, 0.52, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4\}$. Путем
минимизации функционала невязки найдено начальное приближение $g_0(x) = 0.8$,
 $r_0(x) = 0.67 + 0.1x$.

Из табл. 3 видно, что невязки, отвечающие начальному приближению достаточно
велики. Оказалось, что $g(x) > g_0(x)$ на всем интервале и $r(x) > r_0(x)$ при $x < 0.95$.
Наблюдение за решением на итерациях позволило выявить, что после 2 итерации не
происходит его существенных изменений.

Таблица 1. Сравнительный анализ невязок на итерациях

№ итерации	J_j^f	J_j^g	J_j^r
0	0.28	0.038	0.022
1	1.00	0.0064	0.0080
2	0.15	0.0070	0.0057
3	0.055	0.0069	0.0055

Таблица 2. Сравнительный анализ невязок на итерациях

№ итерации	J_j^f	J_j^g	J_j^r
0	0.185	0.038	0.021
1	0.098	0.0098	0.012
2	0.033	0.0082	0.011
3	0.030	0.0078	0.010

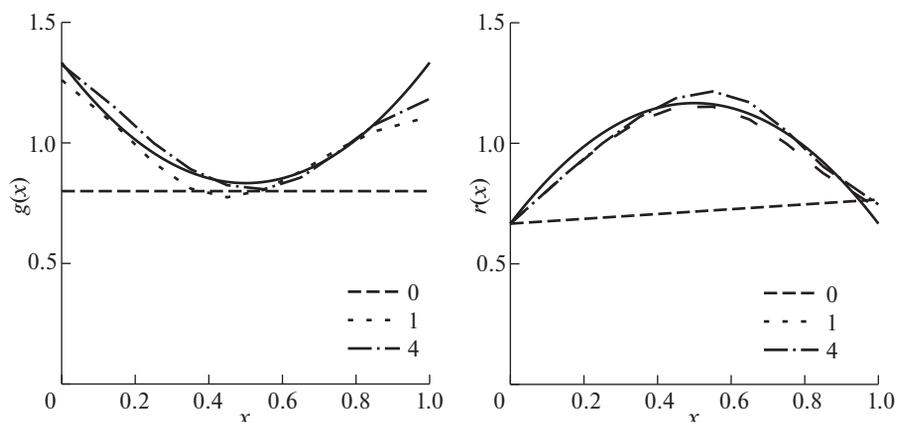
Таблица 3. Сравнительный анализ невязок на итерациях

№ итерации	J_j^f	J_j^g	J_j^r
0	0.905	0.062	0.103
1	0.661	0.0038	0.0013
2	0.125	0.0015	0.0013
3	0.063	0.0016	0.00095
4	0.050	0.0017	0.0012

На рис. 2 сплошными линиями изображены точные решения обратной задачи: $g(x)$ слева и $r(x)$ справа. Пунктирной линией (номер 0) изображено начальное приближение $g_0(x)$ и $r_0(x)$. Под номерами 1 и 4 изображены, соответственно, результаты реконструкции на первой и четвертой (последней) итерациях.

Результаты вычислительных экспериментов позволили сформулировать следующие рекомендации при решении коэффициентных ОЗ для стержневых структур при выборе частотного диапазона:

1. Не использовать узкий частотный диапазон для съема АЧХ.
2. Оптимально в качестве частотного диапазона использовать частоты в окрестности первого и второго резонанса, поскольку в окрестности нуля практически отсутствует чувствительность к изменению плотности, а после второго резонанса ядра интегральных уравнений начинают достаточно сильно осциллировать, обращаясь в ноль

**Рис. 2.** Результаты реконструкции на 1 и 4 итерациях.

в наборе точек, что негативно влияет на обусловленность матрицы получаемой алгебраической системы и в целом на процесс реконструкции.

3. Так как ядро при поправке к плотности обращается в нуль на закрепленном конце стержня, то для получения приемлемых результатов реконструкции нужно задать значение плотности в этой точке.

Заключение. Обсуждены некоторые аспекты исследования обратных задач по нахождению переменных характеристик для моделей теории упругости. На основе производных по Фреше введены характеристики чувствительности для модели неоднородной линейной теории упругости, построены общие соотношения, позволяющие вычислять характеристики чувствительности при установившихся воздействиях. Представлен пример для неоднородного стержня, найдены соответствующие характеристики чувствительности.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, Южный федеральный университет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баничук Н.В., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов М.: Машиностроение, 1988. 224 с.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 458 с.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
4. Vui H.D. Inverse Problems in the Mechanics of Materials: An Introduction. Boca Raton: CRC Press, 1994. 224 p.
5. Isakov V. Inverse problems for PDE. Springer-Verlag, 2005. 284 p.
6. Bonnet M., Constantinescu A. Inverse problems in elasticity // Inverse Probl. 2005. № 21. P. 1–50. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/2/R01>
7. Глэдвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. Институт компьютерных исследований, 2008. 608 с.
8. Neto F.D.M., Neto A.J.S. An Introduction to Inverse Problems with Applications. Berlin: Springer, 2013. 255 p.
9. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит, 2019. 272 с.
10. Sinkus R., Lorenzen J., Schrader D., Lorenzen M., Dargatz M., Holz D. High-resolution tensor MR elastography for breast tumour detection // Phys. Med. Biol. 2000. V. 45. P. 1649–1664. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/45/6/317>
11. Manduca A., Oliphant T.E., Dresner M.A., Mahowald J.L., Kruse S.A., Amromin E., Felmlee J.P., Greenleaf J.F., Ehman R.L. Magnetic resonance elastography: Non-invasive mapping of tissue elasticity // Medical Image Analysis. 2001. V. 5. № 4. P. 237–254. [https://doi.org/10.1016/S1361-8415\(00\)00039-6](https://doi.org/10.1016/S1361-8415(00)00039-6)
12. Сарвазян А.П., Руденко О.В., Свенсон С.Д., Фаулкс Ю.Б., Емельянов С.Ю. Упругая визуализация сдвиговых волн: новая ультразвуковая технология медицинской диагностики // УЗИ Мед. Биол. 1998. Т. 24. С. 1419–1435.
13. Arani A., Manduca A., Ehman R.L., Huston III.J. Harnessing brain waves: a review of brain magnetic resonance elastography for clinicians and scientists entering the field // Br. J. Radiol. 2021. V. 94. № 1119. P. 20200265. <https://doi.org/10.1259/bjr.20200265>
14. Cicarello A., Mace B.R., Kingan M.J., Yang Y. Sensitivity analysis of generalised eigenproblems and application to wave and finite element models // J. Sound Vibr. 2020. V. 478. P. 115345. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115345>
15. Perkowski Z., Czabak M. Description of behaviour of timber-concrete composite beams including interlayer slip, uplift, and long-term effects: Formulation of the model and coefficient inverse problem // Eng. Struct. 2019. 194. P. 230–250. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.05.058>

16. *Ватulyян А.О., Юров В.О.* Об определении механических характеристик стержневых элементов из функционально-градиентных материалов // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 4. С. 52–63. <https://doi.org/10.31857/S0572329921040139>
17. *Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M.* Identification of characteristics of a functionally graded isotropic cylinder // *Int. J. Mech. Mater.Des.* 2021. V. 17. № 2. P. 321–332. <https://doi.org/10.1007/s10999-020-09527-5>
18. *Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M., Nedin R.D.* Identification of the Lamé parameters of an inhomogeneous pipe based on the displacement field data // *Eur. J. Mech. A/Solids.* 2020. V. 81. P. 103939. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103939>
19. *Dudarev V.V., Vatulyan A.O., Mnukhin R.M., Nedin R.D.* Concerning an approach to identifying the Lamé parameters of an elastic functionally graded cylinder // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2020. V. 43. № 11. P. 6861–6870. <https://doi.org/10.1002/mma.6428>
20. *Vatulyan A.O., Yurov V.O.* On the reconstruction of material properties of a radially inhomogeneous cylindrical waveguide // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2021. V. 44. № 6. P. 4756–4769. <https://doi.org/10.1002/mma.7067>
21. *Хатсон В., Пим Дж.* Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983. 432 с.

УДК 539.4

**СВЯЗАННАЯ ТЕРМОУПРУГОСТЬ ГЕМИТРОПНЫХ СРЕД.
ПСЕВДОТЕНЗОРНАЯ ФОРМУЛИРОВКА**

© 2023 г. Е. В. Мурашкин^{a,*}, Ю. Н. Радаев^{a,**}

^aИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: evmurashkin@gmail.com

**e-mail: radayev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 15.01.2023 г.

После доработки 22.01.2023 г.

Принята к публикации 23.01.2023 г.

В статье рассматривается проблема вывода определяющих уравнений для микрополярного термоупругого континуума GN-I в специфике стандартного псевдотензорного формализма. Псевдотензорный подход в большинстве случаев оправдан при моделировании гемитропных микрополярных тел, термомеханические свойства которых чувствительны к зеркальным отражениям трехмерного пространства. Приводятся минимально необходимые для понимания сведения из теории псевдотензоров. Привлекаются общие термодинамические подходы, обсуждаются уравнения баланса энтропии и различные формы баланса внутренней и свободной энергии Гельмгольца. Устанавливаются веса основных термомеханических псевдотензоров. В линейном приближении выводятся определяющие уравнения гемитропного микрополярного термоупругого континуума (GN-I) первого типа. В линейном приближении получена связанная система дифференциальных уравнений теплопроводности и динамических уравнений микрополярного термоупругого континуума GN-I.

Ключевые слова: псевдотензор, термодинамический потенциал, связанная термоупругость, теплопроводность, микроповорот, перемещение, микрополярный гемитропный континуум

DOI: 10.31857/S0572329922600876, EDN: JMQVBJ

1. Введение. Изучение термомеханических свойств современных конструкционных материалов и метаматериалов [1–6] оказывается возможным в результате синтеза аппарата современной термодинамики [7–9] и микроструктурных представлений [10–12]. Большинство биоматериалов и метаматериалов с точки зрения их термомеханических свойств чувствительны к преобразованиям, изменяющим ориентацию пространства¹, например, зеркальным отражениям и инверсиям пространства². Однако, следует понимать, что определяющие тензоры и определяющие постоянные линейных изотропных микрополярных сред не проявляют чувствительность к указанным преобразованиям. Наиболее простой моделью, с определяющими псевдоскалярами, чувствительными к упомянутым преобразованиям пространства, оказывается гемитропная микрополярная среда, задающаяся девятью определяющими псевдоскалярами.

¹ Мы считаем, что ориентация трехмерного пространства задается с помощью знака фундаментального ориентирующего псевдоскаляра sgn . [13, 14].

² Под инверсией трехмерного пространства мы подразумеваем преобразование координатного репера, сопоставляющее координатам их противоположные значения.

Термодинамические процессы, протекающие в термодинамических системах, с точки зрения математической модели определяются эволюцией параметров состояния³, составляющих термодинамический базис. Термодинамические процессы можно условно разделить на равновесные и неравновесные. Равновесным называется такой термодинамический процесс, при котором все состояния, через которые последовательно эволюционирует система, с достаточной степенью точности являются равновесными состояниями, т.е. когда все термодинамические характеристики чрезвычайно близки к своим средним значениям⁴. К таким процессам можно отнести медленно протекающие процессы, когда время релаксации достаточно мало, по сравнению с характерным временем перехода между двумя соседними равновесными состояниями. В этом случае процессы чаще всего рассматриваются как квазистатические, поскольку для динамических процессов высказанные условия в большинстве случаев нарушаются.

Кроме того, термодинамические процессы, можно разделить на обратимые и необратимые. Обратимым называется такой термодинамический процесс, для любых двух состояний которого фактически реализуются термодинамические процессы как в прямом, так и в обратном направлениях. Поясним сказанное на двух простых примерах. Рассмотрим в качестве примера модель атермической деформации цилиндрического упругопластического образца до и за пределом упругости (см. рис. 1). При значениях силовой нагрузки, ниже предела упругости σ_E , что на рисунке соответствует точкам кривой между состояниями 1 и 2, термодинамический процесс будет обратимым и разгрузка образца вернет процесс к начальному состоянию 1 [17]. При нагружении образца выше предела текучести (состояния 3 и 4) образец начнет проявлять неупругие свойства и процесс разгрузки пойдет по пути 4–5, а не вернется в состояние 1 по траектории 4 – 3 – 2 – 1, что означает необратимость процесса 1–4. В термодинамически необратимых процессах наблюдается неконтролируемое (неуправляемое, самопроизвольное) производство энтропии (uncontrollable entropy production).

Для описания состояния термодинамической системы используются функции, функционально зависящие от базиса термодинамических переменных (параметров состояния: энтропия, деформация, температура), и термодинамические потенциалы состояния (внутренняя энергия, свободная энергия Гельмгольца и другие энергетические формы).

Термодинамический подход к исследованию процессов деформирования микрополярных материалов использовался, например, в работах [10–12] и работах авторов [6, 18, 19], где проводится построение определяющих уравнений для упругих микрополярных материалов в терминах абсолютных тензоров. Однако, построение определяющих уравнений и термодинамических потенциалов для гемитропных микрополярных термоупругих сред на корректной основе требует привлечения аппарата алгебры псевдотензоров (см., например, [14, 20, 21]).

В настоящей работе обсуждаются вопросы вывода определяющих соотношений для микрополярного термоупругого континуума GN-I в терминах псевдотензоров. Приводятся (правда, в минимальной степени) основные понятия алгебры и анализа псевдотензоров [22–28]. Обсуждаются уравнения баланса энтропии и различные формы баланса внутренней и свободной энергии Гельмгольца. Вычисляются веса основных термомеханических величин. В линейном приближении выводятся определяющие уравнения гемитропного микрополярного связанного термоупругого континуума GN-I.

2. Псевдотензоры в трехмерном евклидовом пространстве. Рассмотрим трехмерное евклидово пространство⁵. Выберем в пространстве криволинейную систему координат

³ В книге Л.И. Седова [15] упомянутые параметры обозначены через μ_j .

⁴ Данные представления характерны для курса “Теоретической физики” Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшица [16].

⁵ Трехмерность пространства существенна для всех дальнейших рассуждений.

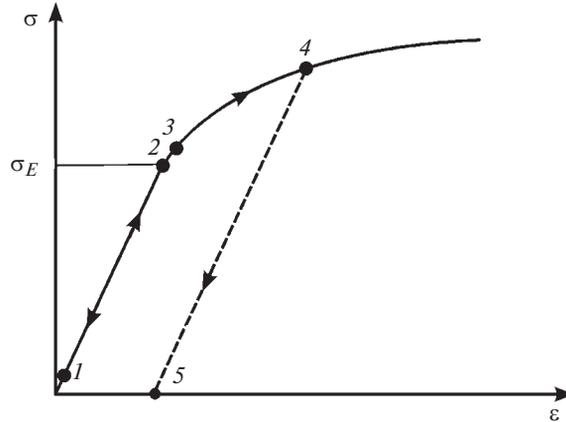


Рис. 1. Одноосное растяжение образца за предел текучести.

нат x^k ($k = 1, 2, 3$). Метрика пространства задается квадратом линейного элемента длины согласно

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{2.1}$$

где g_{ij} – компоненты метрического тензора. Компоненты фундаментального тензора g^{ij} связаны с метрическим тензором соотношением

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i \tag{2.2}$$

И метрический, и фундаментальный тензоры являются абсолютными (истинными) тензорами. То же самое относится к символу Кронекера δ_k^i .

Введем в рассмотрение локальные базисные триэдры, связанные с выбранной координатной системой в трехмерном пространстве: $\underset{a}{\mathfrak{z}}$ ($a = 1, 2, 3$) – локальный ковариантный базис;

$\underset{b}{\mathfrak{z}}$ ($b = 1, 2, 3$) – локальный контравариантный (взаимный) базис.

Базисные векторы и взаимные базисные векторы удовлетворяют следующему соотношению:

$$\underset{a}{\mathfrak{z}} \cdot \underset{b}{\mathfrak{z}} = \delta_a^b \quad (a = 1, 2, 3; b = 1, 2, 3)$$

Метаиндексы a и b (в отличие от тензорных индексов) записываются шрифтом “fraktur”.

С ориентацией локальных базисов связан фундаментальный объект псевдотензорной алгебры и многомерной геометрии – символы перестановок [23–25], которые не являются абсолютными тензорами и определяются согласно соотношениям:

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{для троек } (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1, & \text{для троек } (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3) \\ -0, & \text{во всех остальных случаях} \end{cases} \tag{2.3}$$

Заметим, что ϵ -символы нарушают основные правила тензорного формализма, что видно уже по (2.3). Символы перестановок ϵ_{ijk} и ϵ^{ijk} являются относительными ковариантными тензорами (псевдотензорами) веса -1 (w.g.t. = -1) и одновременно – от-

носительными контравариантными тензорами веса +1 (w.g.t. = +1), поэтому было бы корректно использовать для них следующие обозначения:

$$\begin{matrix} [-1] \\ \epsilon_{ijk}, \end{matrix} \quad \begin{matrix} [+1] \\ \epsilon^{ijk} \end{matrix}$$

Далее сверху корневого символа относительного тензора в квадратных скобках будем отмечать его вес. Нулевой вес, присущий абсолютным тензорам, не отражается нами в обозначениях.

Введем в рассмотрение ориентирующее трехмерное пространство псевдоскаляра (относительный скаляр веса +1 (w.g.t. = +1)), представляющий собой смешанное произведение базисных векторов:

$$e = e^{[+1]} = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 \quad (2.4)$$

и относительный скаляр отрицательного веса -1 (w.g.t. = -1):

$$\frac{1}{e} = e^{[-1]} = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 \quad (2.5)$$

Обратим внимание, что псевдоскаляр (2.4) с точностью до знака совпадает с объемом параллелепипеда, построенного на базисных векторах \mathbf{e}_i . Нетрудно показать, что в евклидовом пространстве справедливо равенство

$$e^2 = g > 0 \quad (2.6)$$

где g – детерминант метрического тензора. Условие $g = 1$ ($|e| = 1$) является фундаментальным для развития общей теории относительности [29] и, например, математической теории пластичности [30]. Важно отметить, что в этом случае абсолютные тензоры совпадают с псевдотензорами с точностью до знака, учитывая уравнение (2.8) получим

$$T_{\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots} = (\text{sgn } e)^{-g} T_{\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s \dots} \quad (2.7)$$

Откуда следует, что псевдотензоры меняют свой знак на противоположный при изменении ориентации координатного репера если их вес нечетный. Подчеркнем, что $e > 0$ для правоориентированной координатной системы, $e < 0$ для левоориентированной координатной системы.

Псевдотензор $T_{(n)}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s \dots}$ веса g ранга $n = s + r$ с помощью степеней фундаментального ориентирующего псевдоскаляра можно преобразовать к абсолютному тензору того же ранга согласно

$$T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots} = e^{-g} T_{(n)}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s \dots} \quad (2.8)$$

В дальнейшем изложении у фундаментальных символов, таких как e и g , указание на их вес будем опускать.

Ковариантная производная псевдотензорного поля $T_{(n)}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s \dots}$ была введена О. Вебленом [26, 27] и вычисляется согласно [14, 24]:

$$\begin{aligned} \nabla_p \overset{[g]}{T}_{(n)\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s} = & \partial_p \overset{[g]}{T}_{(n)\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s} + \Gamma_{qp}^{h_1} \overset{[g]}{T}_{(n)\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{q h_2 \dots h_s} + \dots + \Gamma_{qp}^{h_s} \overset{[g]}{T}_{(n)\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots q} - \\ & - \Gamma_{k_1 p}^q \overset{[g]}{T}_{(n)\dots q k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s} - \dots - \Gamma_{k_r p}^q \overset{[g]}{T}_{(n)\dots k_1 k_2 \dots q}^{h_1 h_2 \dots h_s} - g \overset{[g]}{T}_{(n)\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s} \Gamma_{qp}^q \end{aligned} \quad (2.9)$$

В частности, для псевдоскаляра ковариантная производная, независимо от веса g , примет вид

$$\nabla_p \overset{[g]}{T} = \partial_p \overset{[g]}{T} - g T \Gamma_{sp}^s \quad (2.10)$$

где

$$\Gamma_{sp}^s = \frac{\partial_p e}{e}$$

Учитывая свойства символов Кристоффеля Γ_{sp}^s и соотношение (2.6), получим выражение для ковариантной производной (2.10)

$$\nabla_p \overset{[g]}{T} = \partial_p \overset{[g]}{T} - e^{-1} g T \partial_p e \quad (2.11)$$

Однако, существуют альтернативные подходы реализации ковариантного дифференцирования псевдотензора. Определим ковариантную производную псевдотензора произвольного ранга и целого веса g с помощью соотношения:

$$\nabla_p \overset{[g]}{T}_{(n)\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s} = e^g \nabla_p (e^{-g} \overset{[g]}{T}_{(n)\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s}) \quad (2.12)$$

Кроме того, реализовать ковариантное дифференцирование псевдотензора с целым положительным весом ($g > 0$) можно с помощью символов перестановок согласно правилу⁶

$$\begin{aligned} \nabla_p \overset{[g]}{T}_{(n)\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s} = & (N!)^{-g} \underbrace{\epsilon^{[+1] k_{r+1} \dots k_{r+N}} \dots \epsilon^{[+1] k_{r+(g-1)N+1} \dots k_{r+Ng}}}_{g} \times \\ & \times \nabla_p \left(\overset{[g]}{T}_{(n)\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s} \underbrace{\epsilon^{[-1] k_{r+1} \dots k_{r+N}} \dots \epsilon^{[-1] k_{r+(g-1)N+1} \dots k_{r+Ng}}}_{g} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Все три вида реализации ковариантной производной (2.9), (2.12) и (2.13) являются эквивалентными, что было продемонстрировано в работе [31].

3. Термодинамические потенциалы состояния для гемитропных микрополярных термоупругих сред GN-I. Введем в рассмотрение внутреннюю энергию u в расчете на единицу массы. Понятие внутренней энергии, как физической величины, характеризующей элементарную термодинамическую систему, подробно обсуждается в классической монографии [16, С. 25–28]. Стандартное статистическое определение внутренней энергии элементарной термодинамической системы можно найти там же [16, с. 103–105]. В статистической физике во внутреннюю энергию системы включают энергию разных видов движения и взаимодействия входящих в систему частей: энергию поступательного, вращательного и колебательного движений атомов и молекул, энергию внутри- и межмолекулярного взаимодействия, энергию электронных оболочек атомов и др. В этом случае внутренняя энергия трактуется как физическая величина.

Помимо трактовки u как физической величины, связанной с элементарной термодинамической системой, в механике континуума ее приходится рассматривать как непрерывное физическое поле (physical field), поскольку континуум является объедине-

⁶ Антологичное правило справедливо, если целый вес отрицателен, т.е. $g < 0$.

нием элементарных термодинамических систем. В механике континуума значение u как физической величины не представляет интереса ни в теоретическом, ни в прикладном плане. Подлинный интерес представляет трактовка внутренней энергии как термодинамического потенциала состояния, т.е. как однозначной, непрерывной и ограниченной снизу функции базиса термодинамических переменных (параметров состояния). Чертой сверху будем в дальнейшем обозначать потенциалы состояния. Например \bar{u} означает, что внутренняя энергия u рассматривается как термодинамический потенциал состояния, зависящий от некоторого конечного набора базисных термодинамических переменных (параметров состояния). В термомеханике микрополярных континуумов имеем:

- s – энтропия в расчете на единицу массы (абсолютный скаляр);
- $\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - \epsilon_{ijk} \phi^{[+1]k}$ – асимметричный тензор деформации;
- $\kappa_{i.}^{[+1]j} = \nabla_i \phi^{[+1]j}$ – псевдотензор деформации изгиба–кручения.

Поворот ϕ^j может трактоваться двояко: либо как ковариантный псевдовектор отрицательного веса $\phi_{j}^{[-1]}$, либо как контравариантный псевдовектор положительного веса $\phi^{[+1]j}$. В настоящей работе в качестве псевдовектора поворота мы будем использовать контравариантный псевдовектор положительного веса $\phi^{[+1]j}$. Перечисленные выше переменные мы считаем образующими термодинамический базис в случае микрополярного термоупругого континуума GN-I.

Все сказанное выше можно выразить следующим уравнением:

$$u = \bar{u}(s, \epsilon_{ij}, \kappa_{i.}^{[+1]j}) \quad (3.1)$$

Фундаментальным утверждением (3.1) постулируется равенство физического значения внутренней энергии u (абсолютного скаляра, не зависящего от зеркальных отражений и инверсий трехмерного пространства) и значения функциональной зависимости \bar{u} .

Сопряженной к энтропии величиной в термодинамике выступает термодинамическая температура (абсолютная температура). Термодинамическая температура может вводиться статистически, как модуль канонического распределения Гиббса [16, с. 104–105]. В термомеханике континуума абсолютная температура θ (абсолютный скаляр) определяется как функция параметров термодинамического состояния и вычисляется как частная производная потенциальной функции (3.1) по энтропии s , т.е.

$$\theta = \frac{\partial \bar{u}(s, \epsilon_{ij}, \kappa_{i.}^{[+1]j})}{\partial s} \quad (3.2)$$

Формула (3.2) наглядно демонстрирует отличие u от \bar{u} . В работах некоторых авторов [8, 7] приоритет отдается обратной к температуре величине $\frac{1}{\theta}$ – холодности (coldness).

Уравнение баланса внутренней энергии для линейных микрополярных теорий, как хорошо известно, имеет следующий вид

$$\rho \partial_t u = \rho^{ij} \partial_i \epsilon_{ij} + \mu_{i.}^{[-1]k} \partial_k \kappa_{i.}^{[+1]j} + \rho q - \nabla_i h^i \quad (3.3)$$

Здесь ∂ – производная по времени при фиксированных координатах x^k , t^{ik} – тензор силовых напряжений, ρ – массовая плотность (абсолютный скаляр), $\mu_{\cdot k}^{[-1]i}$ – псевдо-тензор моментных напряжений, q – лучистое тепло (абсолютный скаляр), h^i – абсолютный вектор потока тепла. В приближении малых деформаций мы считаем $\dot{a} = \partial a$.

В конвенциональном виде уравнение баланса энтропии примем

$$\rho \dot{s} = -\nabla_j J^j + \rho \sigma + \rho \xi \quad (3.4)$$

где J^j – абсолютный вектор потока энтропии, ξ – неконтролируемое производство энтропии⁷ (в единицу времени в расчете на единицу массы), σ – контролируемое производство энтропии (в единицу времени в расчете на единицу массы). Отметим, что ξ и σ являются абсолютными скалярами.

В термомеханике широко используется еще один термодинамический потенциал – свободная энергия Гельмгольца. Минус статистический смысл свободной энергии, приписывая ей отрицательный знак, введем с помощью преобразования Лежандра внутренней энергии

$$-\bar{\psi}(\theta, \epsilon_{ij}, \kappa_{\cdot i}^{\cdot j}) = \theta s - \bar{u}(s, \epsilon_{ij}, \kappa_{\cdot i}^{\cdot j}), \quad \theta = \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \quad (3.5)$$

Преобразование Лежандра и его основные свойства подробно обсуждаются в монографии [30, с. 155–157].

На основании инволютивности преобразования Лежандра, получим

$$\bar{u}(s, \epsilon_{ij}, \kappa_{\cdot i}^{\cdot j}) = \theta s - (-\bar{\psi}(\theta, \epsilon_{ij}, \kappa_{\cdot i}^{\cdot j})), \quad s = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta} \quad (3.6)$$

откуда следует

$$s = \bar{s}(\theta, \epsilon_{ij}, \kappa_{\cdot i}^{\cdot j}), \quad \bar{s} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta} \quad (3.7)$$

4. Определяющие уравнения гемитропного микрополярного термоупругого континуума GN-I. Уравнение баланса свободной энергии можно получить подстановкой соотношений (3.4) и (3.5) в уравнение (3.3). В результате несложных преобразований получим

$$-\rho(\partial_t \psi + s \partial_t \theta) + t^{ij} \partial_{ij} + \mu_{\cdot k}^{[-1]i} \partial_{\cdot k} + \mu_{\cdot k}^{[+1]i} \partial_{\cdot k} - J^j \nabla_j \theta + \nabla_j (\theta J^j - h^j) + \rho(q - \sigma \theta) = \rho \xi \theta \quad (4.1)$$

В предположении

$$\theta J^j = h^j, \quad \sigma \theta = q \quad (4.2)$$

уравнение (4.1) преобразуется к одной из приведенных форм

$$-\rho(\partial_t \psi + s \partial_t \theta) + t^{ij} \partial_{ij} + \mu_{\cdot k}^{[-1]i} \partial_{\cdot k} + \mu_{\cdot k}^{[+1]i} \partial_{\cdot k} - \theta^{-1} h^j \nabla_j \theta = \rho \xi \theta \quad (4.3)$$

Для необратимых термодинамических процессов справедливо следующее фундаментальное неравенство:

$$C \partial_t \theta + A^{ij} \partial_{ij} + B_{\cdot k}^{[-1]i} \partial_{\cdot k} + B_{\cdot k}^{[+1]i} \partial_{\cdot k} + \theta^{-1} h^j \nabla_j \theta = -\rho \xi \theta \leq 0 \quad (4.4)$$

где

⁷ Например за счет лучистого тепла (radiant heat).

$$\begin{aligned}
C &= \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{s}} + \rho \bar{s} \\
A^{ij} &= \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \epsilon_{ij}} - t^{ij} \\
B^{[1]i.k} &= \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \kappa_i^{[+1].k}} - \mu^{[1]i.k}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Откуда следуют определяющие соотношения

$$\begin{aligned}
\bar{s} &= -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \\
t^{ij} &= \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \epsilon_{ij}} \\
\mu^{[1]i.k} &= \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \kappa_i^{[+1].k}}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$J^j = \bar{J}^j (\nabla_k \ln \theta)$$

Для неконтролируемого производства энтропии справедливо уравнение

$$\rho \xi = -\theta^{-2} h^j \nabla_j \theta = -\theta^{-1} J^j \nabla_j \theta = -\bar{J}^j (\nabla_k \ln \theta) \nabla_j \ln \theta, \quad \inf \theta > 0 \tag{4.7}$$

На основании уравнения баланса энтропии (3.4) при учете (4.6) получаем нелинейное уравнение теплопроводности

$$\rho \frac{\partial \bar{s}}{\partial \epsilon_{ij}} \partial_j \epsilon_{ij} + \rho \frac{\partial \bar{s}}{\partial \kappa_i^{[+1].k}} \partial_j \kappa_i^{[+1].k} + \rho \frac{\partial \bar{s}}{\partial \theta} \partial_j \theta = -\theta^{-1} \nabla_j h^j + \theta^{-1} \rho q \tag{4.8}$$

Линеаризованную по базисным термодинамическим переменным, свободную энергию для микрополярного термоупругого континуума GN-I можно принять в форме

$$2\rho \bar{\Psi} = H_1^{islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + H_2^{[-2]i.l.} \kappa_i^{[+1].s} \kappa_l^{[+1].m} + H_3^{[-1]isl.} \epsilon_{is} \kappa_l^{[+1].m} + G_1^{is} \epsilon_{is} \theta + G_2^{[-1]i.s} \kappa_i^{[+1].s} \theta + F \theta^2 \tag{4.9}$$

Здесь H_1^{islm} , $H_2^{[-2]i.l.}$, $H_3^{[-1]isl.}$, G_1^{is} , $G_2^{[-1]i.s}$, F — определяющие тензоры и псевдотензоры микрополярного термоупругого континуума GN-I, $\theta \rightarrow \theta - \theta_0$ — малый температурный инкремент (считается малой первого порядка), θ_0 — референциальная температура. Веса определяющих псевдотензоров сведены в таблицу 1. Отметим, что $H_3^{[-1]isl.}$ и $G_2^{[-1]i.s}$ являются определяющими псевдотензорами, чувствительными к преобразованиям зеркального отражения трехмерного пространства.

Для определяющих псевдотензоров H_1^{islm} , $H_2^{[-2]i.l.}$ справедливы условия симметрии

$$H_1^{islm} = H_1^{lmis}, \quad H_2^{[-2]i.l.} = H_2^{[-2]l.i.}$$

Воспользовавшись определяющими соотношениями (4.6), в итоге получим

$$\begin{aligned}
 t^{is} &= H_1^{islm} \epsilon_{lm} + \frac{1}{2} H_3^{[1]isl} \kappa_{l \cdot}^m + \frac{1}{2} G_1^{is} \theta \\
 \mu_{\cdot s}^{[1]i} &= H_2^{[2]i \cdot l} \kappa_{l \cdot}^m + \frac{1}{2} H_3^{[1]lmi} \epsilon_{lm} + \frac{1}{2} G_2^{[1]i} \cdot s \theta \\
 2\rho \bar{s} &= -G_1^{is} \epsilon_{is} - G_2^{[1]i \cdot s} \kappa_{i \cdot}^s - 2F\theta \\
 h^i &= -G_3^{is} \nabla_s \theta
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

5. **Линейный гемитропный микрополярный термоупругий континуум.** Полученная энергетическая форма (4.9) используется, как правило, при построении моделей гемитропных микрополярных упругих континуумов. Определяющие тензоры и псевдо-тензоры для линейного гемитропного микрополярного упругого континуума нечувствительны к поворотам координатного репера, поэтому для них будут справедливы следующие координатные представления⁸

$$\begin{aligned}
 H_1^{islm} &= a_1 g^{is} g^{lm} + b_1 g^{il} g^{sm} + c_1 g^{im} g^{sl} \\
 H_2^{[2]islm} &= a_2 g^{is} g^{lm} + b_2 g^{il} g^{sm} + c_2 g^{im} g^{sl} \\
 H_3^{[1]islm} &= a_3 g^{is} g^{lm} + b_3 g^{il} g^{sm} + c_3 g^{im} g^{sl} \\
 G_1^{is} &= g^{is} d_1, \quad G_2^{[1]is} = g^{is} d_2^{[1]}, \quad G_3^{is} = g^{is} d_3
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь a_a, b_a, c_a, d_a ($a = 1, 2, 3; g = 0, -1, -2$) – двенадцать определяющих псевдоскаляры гемитропного микрополярного термоупругого тела GN-I. Метаиндекс a – нумерует определяющие псевдоскаляры. С точки зрения тензорной алгебры a_a, b_a, c_a, d_a , как минимум, являются полуизотропными инвариантами.

Подставив координатные представления (5.1) в определяющие соотношения (4.10), получим

$$\begin{aligned}
 t^{is} &= (a_1 g^{is} g^{lm} + b_1 g^{il} g^{sm} + c_1 g^{im} g^{sl}) \epsilon_{lm} + \\
 &+ \frac{1}{2} (a_3 g^{is} g^{lm} + b_3 g^{il} g^{sm} + c_3 g^{im} g^{sl}) \kappa_{lm} + \frac{1}{2} d_1^{[1]} \theta g^{is} \\
 \mu_{\cdot s}^{[1]i} &= (a_2 g^{is} g^{lm} + b_2 g^{il} g^{sm} + c_2 g^{im} g^{sl}) \kappa_{lm} + \\
 &+ \frac{1}{2} (a_3 g^{is} g^{lm} + b_3 g^{il} g^{sm} + c_3 g^{im} g^{sl}) \epsilon_{lm} + \frac{1}{2} d_2^{[1]} \theta g^{is}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

⁸ Подразумевается использование произвольной координатной криволинейной сетки. Алгоритм представления тензоров с постоянными коэффициентами подробно описан в монографиях (см. [22, с. 167], [32, с. 70], [33, с. 445]) и работах [34, 35].

$$2\rho\bar{s} = -g^{is} d_1 \epsilon_{is} - g^{is} d_2 \kappa_{is} - 2F\theta$$

$$h_i = -d_3 \nabla_i \theta.$$

Вместо определяющих псевдоскаляров a , b , c , d можно перейти к конвенциональным определяющим псевдоскалярам, таким как: G – модуль сдвига; v – коэффициент Пуассона; L – характерная микродлина; $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ – не имеющие физической размерности псевдоскаляры; α – коэффициент линейного теплового рас-

ширения; β – коэффициент теплового изгиба–кручения; λ – коэффициент теплопроводности; c – теплоемкость на единицу массы при $\epsilon_{is} = 0$ (см. [36, 37]). В этом случае характерная микродлина L будет псевдоскаляром отрицательного веса -1 .

Сравнивая (5.2) с аналогичными формулами в [37, формулы (2.12)]:

$$A_1 = Gv(1 - 2v)^{-1}, \quad A_2 = G L L c_3, \quad A_3 = G$$

$$A_4 = G L L, \quad A_5 = 2G c_1, \quad A_6 = 2G L L c_2$$

$$A_7 = G L c_4, \quad A_8 = G L c_5, \quad A_9 = G L c_6$$
(5.3)

для безразмерных определяющих псевдоскаляров удобно ввести новые обозначения

$$c_1 = c_1, \quad c_2 = c_2, \quad c_3 = c_3$$

$$c_4 = 2c_6, \quad c_5 = 2c_4, \quad c_6 = -4c_5$$
(5.4)

Подставляя (5.4) в (5.3), получим

$$A_1 = Gv(1 - 2v)^{-1}, \quad A_2 = G L L c_3, \quad A_3 = G$$

$$A_4 = G L L, \quad A_5 = 2G c_1, \quad A_6 = G L L c_2$$

$$A_7 = 2G L c_6, \quad A_8 = 2G L c_4, \quad A_9 = -4G L c_5$$
(5.5)

откуда, учитывая определяющие уравнения (5.2), можно установить

$$a = 2A_1, \quad b + c = 2A_3, \quad b - c = e^2 A_5$$

$$a = 2A_2, \quad b + c = 2A_4, \quad b - c = e^{-2} A_6$$

$$a = 2A_3, \quad b + c = 2A_8, \quad b - c = -A_9$$
(5.6)

Подставляя (5.5) в (5.6) и выражая a , b , c , в итоге получим

$$a = 2Gv(1 - 2v)^{-1}, \quad b = G(1 + e^2 c_1), \quad c = G(1 - e^2 c_1)$$

Таблица 1. Веса определяющих тензоров и псевдотензоров связанной термоупругой гемитропной среды

Терминологическое обозначение	Символьное обозначение	Вес	Преобразование к абсолютному тензору
определяющий тензор i (first constitutive tensor)	H_1^{ism}	0	
определяющий псевдотензор ii (second constitutive pseudotensor)	$H_2^{i.l.s.m}$	-2	$H_2^{i.l.s.m} = e^2 H_2^{[-2]i.l.s.m}$
определяющий псевдотензор iii (third constitutive pseudotensor)	$H_3^{isl.m}$	-1	$H_3^{isl.m} = e H_3^{[-1]isl.m}$
определяющий тензор iv (firth constitutive tensor)	G_1^{is}	0	
определяющий псевдотензор v (fifth constitutive pseudotensor)	$G_2^{i.s}$	-1	$G_2^{i.s} = e G_2^{[-1]i.s}$
определяющий скаляр vi (sixth constitutive scalar)			

$$\begin{aligned}
 a_2^{[-2]} &= 2G L L c_3, & b_2^{[-1][-1]} &= G L L (1 + e^{-2} c_2^{[+2]}) \\
 c_2^{[-2]} &= G L L (1 - e^{-2} c_2^{[+2]}), & a_3^{[-1]} &= 4G L c_6 \\
 b_3^{[-1]} &= 2G L (c_4 - c_5), & c_3^{[-1]} &= 2G L (c_4 + c_5)
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$d_1 = -4G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha, \quad d_2^{[-1]} = -4G L L \beta, \quad d_3 = k, \quad F = -\frac{\rho c}{\theta_0}$$

Принимая обозначения для определяющих постоянных

$$c'_4 = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c'_5 = \frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c'_6 = -c_6 \tag{5.8}$$

или, с учетом (5.4)

$$c'_4 = 2c_6 + c_4 - c_5, \quad c'_5 = c_4 + c_5, \quad c'_6 = 4c_5 \tag{5.9}$$

уравнение теплопроводности и динамические уравнения можно представить в окончательной форме

$$\begin{aligned}
 &G[(1 + e^2 c_1^{[-2]}) \nabla^s \nabla_s u^i + (1 - e^2 c_1^{[-2]} + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1}) \nabla^i \nabla_k u^k + 2 c_1^{[-2]} \epsilon^{ikl} \nabla_k \phi_l + \\
 &+ L c_4^{[-1]} \nabla^i \nabla_k \phi^k + L c_5^{[-1]} \nabla^k \nabla_k \phi^i] - 2G \alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} \nabla_i \theta = -\rho(f^i - \partial_t u^i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& G \frac{[-1][-1]}{L L} \left[\left(1 + \frac{1}{e^2} c_2 \right) \nabla^s \nabla_s \phi_i + \left(1 - \frac{1}{e^2} c_2 + 2c_3 \right) \nabla_i \nabla_k \phi^k + \right. \\
& \left. + L^{-1} c_4' \nabla_i \nabla^k u_k + L^{-1} c_5' \nabla^k \nabla_k u_i + L^{-1} c_6' \epsilon_{isj} \nabla^s \phi^j \right] - \\
& - 2eG c_1 \frac{[-2]}{L} \phi_i - e^2 \epsilon_{ikl} g^{ks} \nabla_s u^l - 2G \frac{[-1][-1][+1]}{L L} \beta \nabla_i \theta = -\rho \frac{[-1]}{L} \frac{[-2]}{L} \frac{[+1]}{L} \phi_i \\
& \nabla_s \nabla^s \theta - \frac{cD}{\lambda} \partial_s \theta - 2G \alpha \frac{1+\nu}{*} \frac{\theta_0}{1-2\nu} \frac{\theta_0}{\lambda} \nabla_s \partial_s u^s - 2G \frac{[-1][-1][+1]}{L L} \beta \frac{\theta_0}{*} \frac{\theta_0}{\lambda} \nabla_s \partial_s \phi + \frac{\rho q}{\lambda} = 0
\end{aligned}$$

где f_i – вектор массовых сил, \mathfrak{S} – момент микроинерции, l_i – вектор массовых моментов.

Заключение. В настоящей статье рассмотрен сравнительно новый подход к математическому моделированию связанной термоупругой гемитропной среды.

1. Предложены новые подходы к построению энергетических форм и уравнений механики микрополярной термоупругости.

2. Получены уравнение теплопроводности и динамические уравнения гемитропного микрополярного термоупругого GN-I континуума в псевдотензорной формулировке.

3. Использовались общие термодинамические принципы неравновесной термодинамики.

4. Анизотропные определяющие псевдотензоры в представлении квадратичной энергетической формы включают: 3 псевдотензора четвертого ранга, 3 псевдотензора второго ранга и один абсолютный скаляр.

5. Анизотропная энергетическая форма редуцировалась к гемитропной с помощью специальных координатных представлений для определяющих псевдотензоров.

6. Рассмотрены различные варианты определяющих скаляров и псевдоскаляров, в том числе, конвенционально используемые материальные псевдоскаляры: модуль сдвига, коэффициент Пуассона, характерная микролина (являющаяся псевдоскаляром отрицательного веса, чувствительным к отражениям трехмерного пространства), коэффициент линейного теплового расширения; коэффициент теплового искажения, коэффициент теплопроводности, теплоемкость на единицу массы и псевдоскаляры, не имеющие физической размерности.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00262).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Turpin J.P., Bossard J.A., Morgan K.L. et al. Reconfigurable and tunable metamaterials: a review of the theory and applications // Int. J. Antennas Propag. 2014. V. 2014. P. 429837. <https://doi.org/10.1155/2014/429837>
2. Giorgio I., Hild F., Gerami E. et al. Experimental verification of 2D cosserat chirality with stretch-micro-rotation coupling in orthotropic metamaterials with granular motif // Mech. Res. Commun. 2022. P. 104020. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2022.104020>
3. Reasa D.R., Lakes R.S. Nonclassical Chiral Elasticity of the Gyroid Lattice // Phys. Rev. Lett. 2020. V. 125. P. 205502. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.205502>
4. Askari M., Hutchins D.A., Thomas P.J. et al. Additive manufacturing of metamaterials: A review // Addit. Manuf. 2020. V. 36. P. 101562. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2020.101562>
5. Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N. Metamaterial models of continuum multiphysics // Труды международной школы-конференции молодых ученых “Механика 2016”. Цахкад-

- зор, Армения, 03–07 октября 2016. Ереван: Национальный университет архитектуры и строительства Армении, 2016. С. 160–163.
6. Ковалев В.А., Мурашкин Е.В. О принципе термомеханической ортогональности в проблемах моделирования сложных сред и метаматериалов // Вестн. Чувашского гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер.: Мех. пред. сост. 2019. № 1(49). P. 20–31.
<https://doi.org/10.26293/chgpu.2019.39.1.003>
 7. Müller I., Ruggeri T. Rational extended thermodynamics. Berlin: Springer Science & Business Media, 2013. 411 p.
 8. Truesdell C. Rational thermodynamics: a course of lectures on selected topics. New York: McGraw-Hill, 1969. 208+ix p.
 9. Truesdell C., Toupin R. The classical field theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer, 1960. P. 226–858.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2
 10. Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums // Acta Mech. 1974. V. 20. № 1. P. 105–131.
<https://doi.org/10.1007/BF01374965>
 11. Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Springer, 1972. 286 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9>
 12. Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
 13. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 668 с.
 14. Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 4. С. 399–412.
<https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>
 15. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 592 с.
 16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. Часть 1. М.: Физматлит, 2001. 616 с.
 17. Радаев Ю.Н. Задачи и теоремы по курсу “Математическая теория пластичности”. Самара: Самарский гос. ун-т, 1996. 80 с.
 18. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.
 19. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: Физматлит, 2009. 156 с.
 20. Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a micropolar theory of growing solids // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 3. С. 424–444.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>
 21. Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 4. С. 752–761.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>
 22. Гуревич Г.Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с.
 23. Schouten J.A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p.
 24. Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc., 1964. 361 p.
 25. Synge J.L., Schild A. Tensor Calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. 334 p.
 26. Veblen O., Thomas T.Y. Extensions of relative tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. V. 26. P. 373–377.
 27. Veblen O. Invariants of Quadratic Differential Forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p.
 28. Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ: С приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 411 с.
 29. Копф А. Основы теории относительности Эйнштейна. М.: ГТТИ, 1933. 175 с.
 30. Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Самар. гос. ун-т, 2006. 340 p.
 31. Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестн. Чувашского гос. пед. ун-та

- им. И.Я. Яковлева. Сер.: Мех. пред. сост. 2022. № 1(51). Р. 17–26.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>
32. *Jeffreys H.* Cartesian Tensors. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.
33. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 p.
34. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестн. Чувашского гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер.: Мех. пред. сост. 2022. № 2(52). Р. 106–115.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>
35. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестн. Чувашского гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер.: Мех. пред. сост. 2022. № 2(52). Р. 118–127.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>
36. *Радаев Ю.Н.* Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2018. V. 22. № 3. Р. 504–517.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>
37. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2021. Т. 25. № 3. С. 457–474.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1870>

УДК: 531.1, 515.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЧАСТНЫМ ИНТЕГРАЛОМ ГОРЯЧЕВА–ЧАПЛЫГИНА

© 2023 г. М. А. Новиков^{a,*}

^aИнститут динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН,
Иркутск, Россия

*e-mail: nma@icc.ru

Поступила в редакцию 27.05.2022 г.

После доработки 28.07.2022 г.

Принята к публикации 19.08.2022 г.

В предыдущих статьях другими авторами установлены стационарные движения в механической системе в случае существования частного интеграла Горячева–Чаплыгина. Там же изучены некоторые инвариантные множества и их устойчивость, включая одно из стационарных движений. В этой статье окончательно исследована устойчивость оставшегося второго состояния покоя.

Ключевые слова: устойчивость движения, характеристическое уравнение, собственное значение, интеграл уравнений движения, связка из первых интегралов

DOI: 10.31857/S0572329923700022, EDN: JMVHAV

1. Введение. Рассматривается механическая нелинейная автономная консервативная система, в которой описывается движение твердого тела вокруг неподвижной точки [1–4]. Движение тела задается дифференциальными уравнениями [4]:

$$\begin{aligned} A\dot{p} &= (B - C)q\dot{r} + m(y_0\gamma_3 - z_0\gamma_2), & \dot{\gamma}_1 &= \gamma_2 - q\gamma_3 \\ B\dot{q} &= (C - A)r\dot{p} + m(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3), & \dot{\gamma}_2 &= p\gamma_3 - \gamma_1 \\ C\dot{r} &= (A - B)p\dot{q} + m(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1), & \dot{\gamma}_3 &= q\gamma_1 - p\gamma_2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где A, B, C ($A \neq C$) – моменты инерции твердого тела относительно главных осей Ox, Oy, Oz ; p, q, r – проекции мгновенной угловой скорости на подвижные оси; x_0, y_0, z_0 – координаты центра масс в подвижных осях; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – проекции ортов подвижных осей на неподвижную ось OZ , направленную вертикально вниз (углы Пуассона); $m = Mg$ – приведенная величина; M – масса тела; g – ускорение свободного падения.

В этой задаче существуют три общих интеграла [1–3]:

$$V_0 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2m(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) = c_0 = \text{const} \text{ (интеграл энергии)}$$

$$V_1 = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = c_1 = \text{const} \text{ (кинетического момента)}$$

$$V_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \text{ (интеграл Пуассона)}$$

В частном случае при $A = B = 4C, y_0 = 0 = z_0, c_1 = 0$ [3] существует дополнительно первый интеграл Горячева–Чаплыгина, который при обозначении $a = m x_0/C$ можно записать

$$V_3 = r(p^2 + q^2) + ap\gamma_3 = \text{const}$$

Параметр a очевидно допускает значения разных знаков. Соответственно система дифференциальных уравнений движения примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{3}{4}q\gamma, & \dot{\gamma}_1 &= \gamma\gamma_2 - q\gamma_3 \\ \dot{q} &= \frac{-(3p\gamma + a\gamma_3)}{4}, & \dot{\gamma}_2 &= p\gamma_3 - \gamma\gamma_1 \\ \dot{\gamma} &= a\gamma_2, & \dot{\gamma}_3 &= q\gamma_1 - p\gamma_2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

В статье [5] при изучении инвариантных множеств в системе с частным интегралом Горячева—Чаплыгина, в частности, выявлены стационарные движения:

$$p_0 = 0; \quad q_0 = 0; \quad r_0 = 0; \quad \gamma_{10} = +1; \quad \gamma_{20} = 0; \quad \gamma_{30} = 0 \quad (1.3)$$

$$p_0 = 0; \quad q_0 = 0; \quad r_0 = 0; \quad \gamma_{10} = -1; \quad \gamma_{20} = 0; \quad \gamma_{30} = 0 \quad (1.4)$$

Они могут быть получены как не зависящие от времени, предельные решения для инвариантных множеств. Там же установлена устойчивость положения покоя (1.4). Осталась неисследованной устойчивость другого положения покоя.

Такие же стационарные движения получены и в статье [6]. В последней статье устойчивость не просто определить по бифуркационному комплексу, особенно на границе областей устойчивости, если учесть, что это свойство зависит от знака x_0 . Поэтому проведем исследование устойчивости оставшегося стационарного движения традиционным способом.

2. Исследование устойчивости. Распространенным наиболее известным в настоящее время способом исследования устойчивости по Ляпунову стационарных движений является второй метод Ляпунова [7]. В автономных системах для проверки необходимых условий устойчивости вначале следует установить корни характеристического уравнения возмущенного движения. Для положения покоя (1.3) введем отклонения: $x_1 = p$; $x_2 = q$; $x_3 = \gamma$; $x_4 = \gamma_1 + 1$; $x_5 = \gamma_2$; $x_6 = \gamma_3$. Соответствующие уравнения возмущенного движения получаются следующими:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{3}{4}x_2x_3, & \dot{x}_4 &= x_3x_5 - x_2x_6 \\ \dot{x}_2 &= \frac{-(3x_1x_3 + ax_6)}{4}, & \dot{x}_5 &= x_1x_6 - x_3x_4 - x_3 \\ \dot{x}_3 &= ax_5, & \dot{x}_6 &= x_2x_4 - x_1x_5 + x_2 \end{aligned}$$

Матрица линейной правой части последней системы имеет вид

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-a}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение матрицы D_1 получается таким:

$$f_1(\lambda) = \det(D_1 - \lambda E) = \lambda^2(\lambda^2 + a)\left(\lambda^2 + \frac{a}{4}\right) = 0$$

Очевидно, при $a < 0$, когда $x_0 < 0$, последнее уравнение допускает отличные от нуля вещественные корни. Тогда для $x_0 < 0$ по теореме Ляпунова о неустойчивости [7] состояние покоя (1.3) неустойчиво по Ляпунову.

При исследовании достаточных условий устойчивости знакоопределенные функции Ляпунова будем строить способом Четаева [8] – связкой из интегралов возмущенного движения, которые в этом случае принимают вид

$$V_{01} = 4(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 - 2ax_4 = \text{const}$$

$$V_{11} = 4(x_1x_4 + x_2x_5) + x_3x_6 + 4x_1 = 0$$

$$V_{21} = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + 2x_4 = 0$$

$$V_{31} = x_3(x_1^2 + x_2^2) + ax_1x_6 = \text{const}$$

Связка из первых интегралов здесь запишется:

$$K_1(x, \alpha) = V_{01} - \alpha_1 V_{11} - \alpha_2 V_{21} - \alpha_3 V_{31}$$

Вещественные множители Лагранжа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ подбираются с целью обращения в нуль всех линейных слагаемых по переменным x_1, x_2, \dots, x_6 связки, которые здесь получаются как:

$$-2ax_4 - 4\alpha_1x_1 - 2\alpha_2x_4 = 0.$$

Такое условие выполняется при: $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = -a$; α_3 – произвольном.

Более упрощенный анализ, очевидно, происходит при $\alpha_3 = 0$. Тогда связка интегралов при подстановке числовых значений $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_0$ будет следующей:

$$K_1(x, \alpha_0) = 4(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 + a(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) \quad (2.1)$$

Формально при $a > 0$ полученная квадратичная форма положительно определена. Следовательно, при $x_0 > 0$ положение покоя (1.3) устойчиво по Ляпунову [7].

Вообще говоря, из существования равенств $V_{11} = 0, V_{21} = 0$ можно заключить о зависимости между переменными. Две связанные переменные в этом случае следует исключить из общего числа переменных x_1, x_2, \dots, x_6 . Конечно, исключение не всякой переменной может привести к ожидаемому результату. Из равенства $V_{21} = 0$ выразим $x_4 = -1 + \sqrt{1 - k}$, где $k = x_5^2 + x_6^2$, считая x_5, x_6 значительно малыми. Последнее выражение для анализа следует представить в аналитическом виде. С этой целью разложим его в сходящийся при $k < 1$ знакостоянный ряд

$$x_4 = -\frac{1}{2}k - \frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{16}k^3 - \frac{5}{128}k^4 - \dots \quad (2.2)$$

Здесь для бесконечно малых x_5, x_6 разложение (2.2) возможно в силу $x_5^2 + x_6^2 < 1$. Далее

из равенства $V_{11} = 0$ составим выражение $x_1 = \frac{-(4x_2x_5 + x_3x_6)}{4(1+x_4)}$. При значениях $k < 1$ и

достаточно малых по абсолютной величине $x_4 < 0$ последнее можно представить сходящимся знакочередующимся рядом

$$x_1 = \frac{-(4x_2x_5 + x_3x_6)}{4}(1 - x_4 + x_4^2 - \dots + (-1)^n x_4^n + \dots) \quad (2.3)$$

Подстановка составленных x_1, x_4 в выражение V_{01} получает аналитическую функцию от четырех переменных, в которой форма наименьшего порядка $4x_2^2 + x_3^2 + a(x_5^2 + x_6^2)$ получается положительно определенной при $a > 0$ по переменным x_2, x_3, x_5, x_6 . Тогда положение покоя (1.3) устойчиво по упомянутым переменным x_2, x_3, x_5, x_6 [9]. Ввиду

ограниченности, что в частности выполняется при: $-k < -1 + \sqrt{1-k}$, для достаточно малых x_5, x_6 , из (2.2) следует устойчивость и по x_4 [10]. При достаточно малых x_4 вследствие сходящегося ряда (2.3) так же [9] имеется устойчивость состояния покоя и по переменной x_1 . Следовательно, формальной знакоопределенности связки интегралов $K_1(x, \alpha_0)$ при связанных равенствами $V_{11} = 0, V_{21} = 0$ переменных вполне достаточно для устойчивости соответствующего стационарного движения (1.3).

Устойчивость положения покоя (1.4) можно проводить аналогично, но она уже исследована в [5] при $x_0 < 0$ (здесь $a = -\omega^2 < 0$).

Полученные результаты можно составить в единой форме. Легко видеть, что положения покоя устойчивы при $x_0\gamma_1 > 0$, и неустойчивы при $x_0\gamma_1 < 0$.

Следует отметить, что при установлении достаточных условий устойчивости обоих положений покоя знакоопределенные функции Ляпунова были составлены только с участием интегралов энергии и Пуассона возмущенного движения.

Заключение. В статье окончательно для $x_0 > 0$ завершено исследование устойчивости стационарных движений в системе с частным интегралом Горячева–Чаплыгина. Вторым методом Ляпунова установлены достаточные условия устойчивости найденных положений покоя. Они соответствуют известной теореме Лагранжа [1] об устойчивости при минимуме потенциальной энергии.

Для случая частного интеграла Горячева–Чаплыгина устойчивость стационарных движений устанавливается квадратичными слагаемыми отклонений от состояния покоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: ГИФМЛ, 1960. 487 с.
2. *Парс Л.А.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.
3. *Уиттекер Э.* Аналитическая динамика. Ижевск: Издательский дом “Удмурдский университет”, 1998. 584 с.
4. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 287 с.
5. *Карпетян А.В.* Инвариантные множества в задаче Горячева–Чаплыгина: существование, устойчивость и ветвление // Прикл. мат. мех. 2006. Т. 70. Вып. 2. С. 221–224.
6. *Болсинов А.В., Борисов А.В., Мамаев И.С.* Топология и устойчивость интегрируемых систем // Успехи мат. наук. 2010. Т. 65. Вып. 2 (392). С. 71–132.
7. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // *Ляпунов А.М.* Собрание сочинений. Т. 2. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7–263.
8. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
9. *Румянцев В.В.* Сравнение трех методов построения функций Ляпунова // Прикл. мат. мех. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 916–921.
10. *Озиранер А.С., Румянцев В.В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных // Прикл. мат. мех. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 364–383.