

Известия

ISSN 0572-3299

Российской академии наук

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА



2023

4

СОДЕРЖАНИЕ

Особенности равновесия тела на шарнирных опорах и скользящей заделке <i>М. З. Досаев, В. А. Самсонов</i>	3
Определение диссипативных характеристик для решения задач динамического нагружения упругих конструкций с применением модального подхода <i>А. Ю. Бондаренко, А. И. Лиходед, В. В. Сидоров</i>	13
Решение задач теории упругости для многосвязных полуплоскости и полосы <i>С. А. Калоеров, Е. С. Глушанков, А. Б. Мироненко</i>	23
Пространственные колебания трубопровода с вибрирующими опорами <i>И. М. Утяшев, М. М. Шакирьянов</i>	38
Наноиндентирование пленок AlGaIn, сформированных на подложках SiC/Si, выращенных методом согласованного замещения атомов <i>А. С. Гращенко, С. А. Кукушкин, А. В. Осипов, Ш. Ш. Шарофидинов</i>	53
Расчет ресурсных характеристик конструкционных сплавов при взаимном влиянии усталости и длительной прочности материала <i>И. А. Волков, Л. А. Игумнов, А. И. Волков, А. И. Юдинцева</i>	64
Механическая система, демонстрирующая “катастрофическое поведение” <i>А. И. Мошинский</i>	83
Один подход к плоской задаче удара оболочек типа С.П. Тимошенко об упругое полупространство <i>В. Р. Богданов</i>	97
Анализ динамики и управление при разворачивании кольцевой тросовой группировки космических аппаратов <i>Ю. М. Заболотнов, А. А. Назарова, Чанцин Ван</i>	110
О задаче поддержания контакта исследовательского зонда малой массы с астероидом <i>Э. К. Лавровский</i>	125
Оптимизация процессов затухания поперечных движений прицепа, следующего за тягачом <i>А. С. Смирнов, А. С. Муравьев</i>	138
Численное моделирование напряженно-деформированного состояния подводного морского газопровода с учетом разжижения грунта и параметров эксплуатации <i>Р. М. Зарипов, Р. Б. Масалимов</i>	152
Оптимизация структуры продольно движущегося слоистого полотна на основе многокритериального подхода <i>Н. В. Баничук, С. Ю. Иванова, В. С. Афанасьев</i>	167
К 110-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского	178
К 90-летию со дня рождения Д.М. Климова	179
К 80-летию со дня рождения В.Ф. Журавлева	180

УДК 531.36

ОСОБЕННОСТИ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛА НА ШАРНИРНЫХ ОПОРАХ И СКОЛЬЗЯЩЕЙ ЗАДЕЛКЕ

© 2023 г. М. З. Досаев^{a,*}, В. А. Самсонов^a

^aНИИ механики МГУ, Москва, Россия

*e-mail: dosayev@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 10.06.2022 г.

После доработки 26.07.2022 г.

Принята к публикации 31.07.2022 г.

Рассмотрено равновесие тела, опирающегося жесткими и телескопическими опорами на неподвижные шарниры. Показано, что добавление потенциально скользящего сочленения может не придать подвижности в конструкцию, как и добавление поворотного сочленения. Для скользящей опоры обнаружен парадокс: не выполняются уравнения, казалось бы, очевидного равновесия. Для регуляризации задачи вводятся отклонения. Внутренние реакции остаются статически неопределимыми, при этом величина этих реакций может оказаться значительной. Показано, что внешние реакции стремятся к бесконечности при уменьшении введенных отклонений. Это дает объяснение несовместности уравнений равновесия: пара бесконечных сил с нулевым плечом, вообще говоря, не эквивалентна нулевой силе, а может создать любой момент, в том числе уравновешивающий момент силы тяжести. Можно предположить, что часть крупных аварий со строительными конструкциями связана с указанными особенностями.

Ключевые слова: равновесие, скользящее сочленение, скользящая заделка, реакции связи, бесконечная реакция

DOI: 10.31857/S0572329922600402, EDN: JLAQVT

1. Введение. Известно (например, [1]), что задача о равновесии плоского твердого тела (рис. 1,а), опирающегося на два цилиндрических шарнира, является статически неопределимой. В таких задачах (рис. 1) кроме силы тяжести $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ ($\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения) рассматриваются реакции в шарнирах, которые традиционно раскладывают на нормальные $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ и тангенциальные $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$. При практической реализации подобных объектов возникают трудности из-за довольно больших значений неопределимых тангенциальных реакций. Подобные проблемы, в частности, могут быть связаны с предварительными напряжениями при сборке конструкции или с неодинаковыми температурными сжатиями/расширениями материалов. В технической практике для борьбы с этими трудностями используют дополнительный (потенциально подвижный) элемент сочленения, например, такой же шарнир в точке B (рис. 1,б), превращающий задачу в статически определимую (см., например, Задание С3, стр. 23 в [2]). Кроме того, для регулировки внутренних (например, реакции стержня $\mathbf{R}_B$ на тело в точке B) и внешних нагрузок такую потенциальную опору можно повернуть на некоторый угол φ к вертикали. Реакция стержня $\mathbf{R}_B$ на рис. 1,б и далее на других рисунках внутренние реакции показаны пунктирной стрелкой. Три потенциально по-

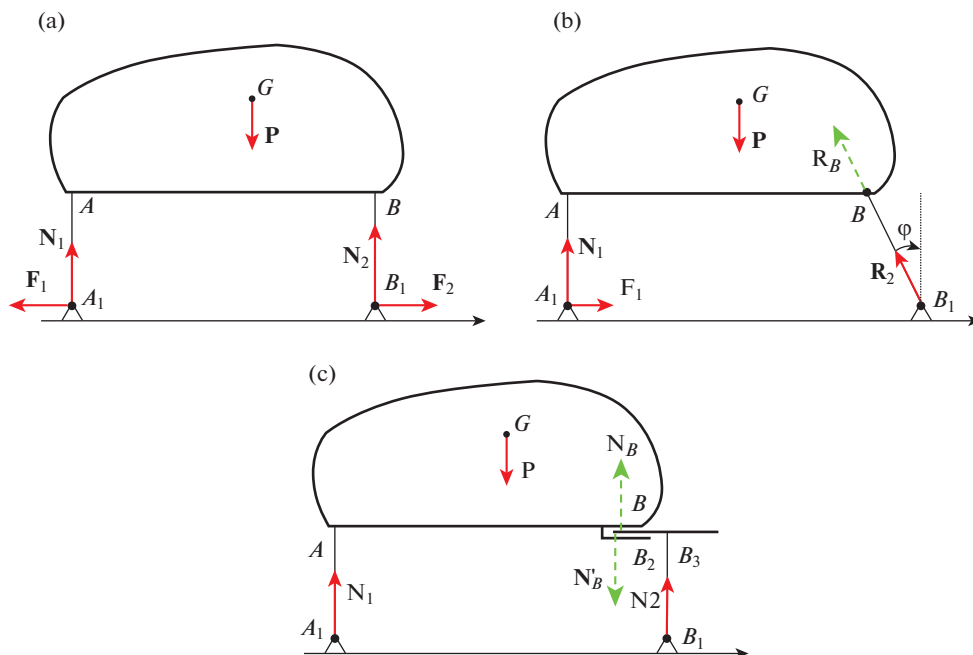


Рис. 1. Плоское тело на шарнирных опорах: (а) два цилиндрических шарнира; (б) дополнительный третий шарнир; (с) т-образная скользящая подставка.

движных сочленения позволяют избежать не только предварительных напряжений, но и температурных!

Однако, кроме поворотных сочленений, на практике применяются еще и скользящие заделки (например, типа телескопических), исследованию которых посвящен ряд работ в строительной научной литературе.

Плоские скользящие сочленения, используемые в сборных сегментных колоннах мостов для смягчения пагубных последствий землетрясений рассмотрены в [3]. В частности, экспериментально исследованы трибологические характеристики, производительность и долговечность стыков переставных скользящих соединений с использованием 3D-печатных форм и технологии компьютерного томографического сканирования.

Экспериментальные и аналитические исследования проведены в [4] для выбора предпочтительных параметров применения скользящего соединения в зданиях из каменной кладки.

В [5] проведено динамическое моделирование колонн с регулируемыми скользящими соединениями. Показано, что такие колонны являются эффективным инструментом для реализации общей сейсмической изоляции между настилом и трясущимся грунтом.

В железобетонных многоэтажных зданиях важная роль сейсмического взаимодействия каркасов конструкций с кладочными заполнениями была выявлена несколькими землетрясениями и исследована многими авторами. Одно из решений состоит в разделении каменной кладки на несколько подпанелей, относительно скользящих по определенным швам. В [6] исследуется сейсмическая оценка этого технологического решения в рамках проектирования землетрясений на основе известных данных.

Новая сейсмостойкая система, разработанная с целью контроля повреждений кладки и снижения пагубных последствий взаимодействия панели с рамой за счет комбинированного использования скользящих соединений, вставленных в кладку, предложена в [7].

Контактные задачи для круглой плиты со скользящей заделкой по торцу рассмотрены в [8]. Приведены примеры расчета взаимодействия плиты с плоским штампом.

В патенте [9] предложена составная конструкция с телескопическими стержнями и возможностью перемещения опор. Конструкция нацелена на учебно-исследовательскую работу студентов по выявлению зависимостей величин реакций связей и сил взаимодействия частей конструкции от размеров стержней.

Несомненно, оценка возможностей таких скользящих соединений представляет практический интерес.

Заменим шарнир в точке B скользящей телескопической опорой (рис. 1,с). Левая опора AA_1 остается жесткой, а вместо правой опоры BB_1 будем использовать невесомую подставку — т-образный стержень B_2B_3 . Тело $ABCD$, в принципе, может скользить по площадке B_2B_3 без трения, оно могло бы повернуться вокруг шарнира A_1 против часовой стрелки, но этому мешает ограничитель поворота площадки. После введения такой подставки вертикальное равновесие системы сохраняется, обе внешние реакции N_1 и N_2 определяются. Эта система представляет собой, практически, одно твердое тело! При потенциально, казалось бы, подвижном скользящем соединении связь полностью исключает любое перемещение тела и подставки, также как и в случае описанных выше трех цилиндрических шарниров. Однако внутренние реакции N_B и N'_B остаются статически неопределимыми, как и внутренние реакции всякого твердого тела.

2. Парадокс телескопической опоры. Ситуация кардинально меняется, когда мы повернем ограничитель и площадку на 90° , сделаем их вертикальными и превратим, таким образом, опору в телескопическую (рис. 2).

2.1. Постановка задачи о скользящей опоре. Рассмотрим плоскую механическую систему, состоящую из тяжелого тела A_1CDB массой m (рис. 2,а) и невесомого стержня B_2B_1 . С одной стороны тело A_1CDB опирается на неподвижный цилиндрический шарнир A_1 . В точке B к телу жестко прикреплена направляющая параллельно прямой AA_1 , по которой может скользить без трения стержень B_2B_1 . Стержень B_2B_1 , в свою очередь, опирается на цилиндрический шарнир B_1 . Прямая A_1B_1 , соединяющая шарниры, горизонтальна. Для определенности введем геометрические размеры: b — расстояние между центром масс G тела и прямой AB , a — расстояние между G и прямой AA_1 , l — длина опоры AA_1 , $c = DC$ — расстояние между опорами.

На механическую систему действуют следующие внешние силы: сила тяжести $P = mg$ (g — ускорение свободного падения) и реакции в шарнирах A_1 и B_1 , которые мы разложим на нормальные N_1 , N_2 и тангенциальные F_1 , F_2 соответственно. Отметим, что поскольку в направляющей нет трения, между стержнем и телом возникают усилия, ортогональные этой направляющей. Здесь и в дальнейшем представим эти усилия в виде двух сил F_B , F'_B , которые действуют со стороны стержня на тело и являются внутренними для рассматриваемой системы. Точки приложения этих сил неизвестны, обозначим расстояния от точек приложения этих сил до шарнира B_1 через l_B , l'_B соответственно.

Рассмотрим положение тела, при котором опоры вертикальны. Оказывается, что, несмотря на появившуюся потенциальную возможность опоры скользить по направляющей, реализовать эту возможность она не может. Вся конструкция не может повернуться вокруг шарнира A_1 . Из-за того, что опоры параллельны, любой поворот тела

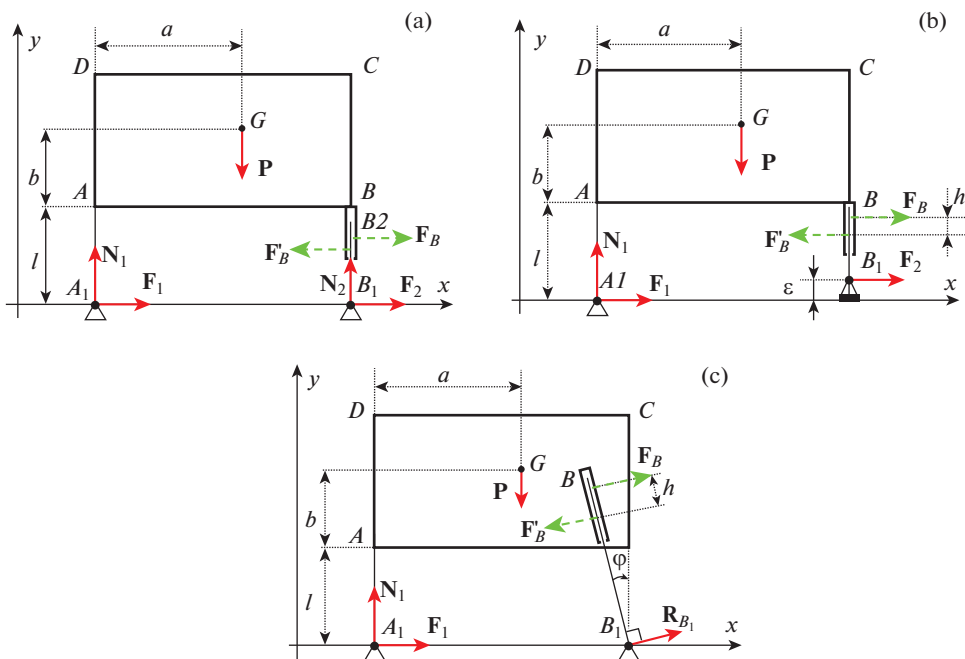


Рис. 2. Тело на телескопической опоре: (а) плоская постановка с потенциально подвижной опорой; (б) подставка под подвижную опору; (с) поворот подвижной опоры.

приведет к изменению расстояния между точками A_1 и B_1 . Таким образом, система не может сдвинуться из такого вертикального положения. Получаем, что это положение является положением равновесия. При этом уравнения равновесия не выполняются!

Из равновесия стержня получим:

$$\begin{aligned} N_2 &= 0 \\ F_2 - F_B + F'_B &= 0 \\ F_B l'_B - F'_B l''_B &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Учитывая (2.1), выпишем условия равновесия элементов системы:

$$\begin{aligned} mg &= N_1 \\ F_1 + F_2 &= 0 \\ amg &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Отметим, что третье уравнение (2.2), полученное из условия равенства моментов внешних сил относительно точки A_1 приводит к парадоксальному результату: $amg = 0$. Момент силы тяжести равен нулю! Этот парадокс аналогичен парадоксу, описанному в [10].

3. Отклонения в плоской постановке со скользящей опорой. Внесем изменения в постановку задачи с потенциально скользящей опорой, введя в рассмотрение дополнительные элементы так, чтобы механическая система стала статически определимой.

3.1. Изменение высоты шарнира скользящей опоры. Сначала изменим высоту правого шарнира (рис. 2,б), приподняв его на высоту ε . Все внешние реакции становятся определенными.

Выпишем уравнения вертикального равновесия.

$$\begin{aligned} mg &= N_1 \\ F_1 + F_2 &= 0 \\ amg + \varepsilon F_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из уравнений (3.1) легко определить величины горизонтальных реакций: $F_1 = amg/\varepsilon$, $F_2 = -amg/\varepsilon$. Обе горизонтальные реакции стремятся к бесконечности при стремлении ε к нулю. Более того, мы можем вместо того, чтобы поднять правую опору, наоборот опустить ее на величину ε . Тогда значения реакций F_1 , F_2 поменяют знак. И, например, сила F_1 при стремлении ε к нулю уже будет стремиться к минус бесконечности! Какая же реакция должна быть для твердых элементов при $\varepsilon = 0$? Вопрос, конечно, интересен, но, очевидно, что на практике произойдет, в лучшем случае, деформация каких-то элементов конструкции, а, в худшем, их разрушение. Изучение таких ситуаций следует проводить методами деформируемого твердого тела.

Однако, даже при ε не равном нулю задача определения внутренних реакций $\mathbf{F}_B$, $\mathbf{F}'_B$ статически неопределима. Они могут оказаться достаточно большими, если контакт стержня с направляющей реализуется на малой площадке, и плечо между этими силами окажется малой величиной.

3.2. Поворот скользящей опоры. Теперь изменим задачу другим способом: повернем правую опору на некоторый угол φ (рис. 2,с). Реакция опоры R_{B_1} в точке B_1 перпендикулярна направлению BB_1 . Уравнения равновесия принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} mg &= N_1 + R_{B_1} \sin \varphi \\ F_1 + R_{B_1} \cos \varphi &= 0 \\ amg - cR_{B_1} \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Получим из (3.2) величины реакций:

$$\begin{aligned} R_{B_1} &= amg/(c \sin \varphi) \\ F_1 &= -amg \cos \varphi/(c \sin \varphi) \\ N_1 &= mg(1 - a/c) \end{aligned}$$

Если устремить величину угла φ к нулю, тангенциальная реакция левой опоры F_1 и реакция правой опоры R_{B_1} стремятся к бесконечности. Эти две силы образуют пару сил, которая даже с нулевым плечом может создать любой необходимый момент, в том числе, уравновешивающий момент силы тяжести.

Разрешение обнаруженного парадокса, как и в [10], состоит в том, что включение в систему потенциально скользящего сочленения приводит к острому конфликту с теми связями, которые остались “твердыми” и вызывает их бесконечно большие реакции. Иначе говоря, приводит к поломке конструкции.

4. Пространственный случай. Рассмотрим тяжелое тело $ABCK$ массой m (рис. 3,а), опирающееся тремя жесткими параллельными опорами AA_1 , BB_1 и CC_1 на сферические шарниры.

Плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ перпендикулярны направлению опор, которые, в свою очередь, направлены по вертикали. Точка K – проекция центра масс тела G на плоскость ABC . Расстояние от точки K до прямых AB , BC и AC обозначим соответственно d_1 , d_2 и d_3 ; h_1 , h_2 и h_3 – длины высот треугольника ABC , проведенных соответственно к этим же сторонам, $AB = c$, d_4 – расстояние от точки K до прямой Az , $b + l$ – расстояние от центра масс до плоскости шарниров. Введем систему координат $Oxyz$: ось Ox направим по A_1B_1 , ось Oy – вертикальна, ось Oz дополняет систему до правой. Реак-

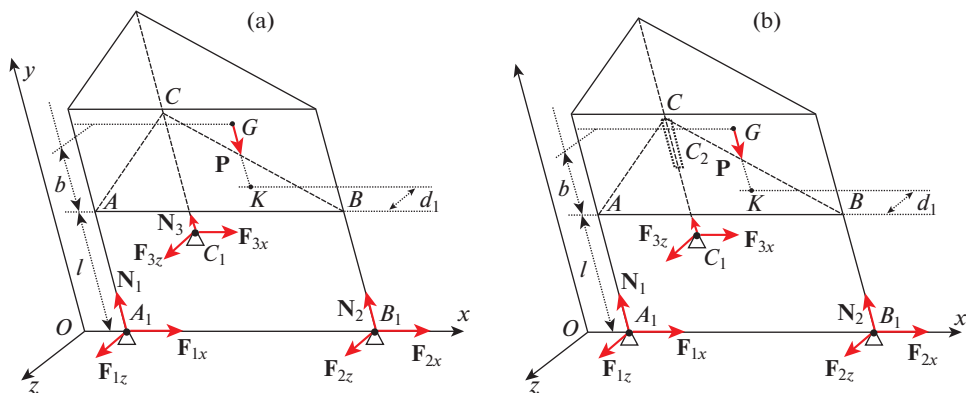


Рис. 3. Пространственное тело на трех сферических шарнирах: (а) три жесткие опоры; (б) две жестких и одна скользящая опоры.

ции в шарнирах разложим на составляющие, направленные по осям координат: нормальные N_1, N_2, N_3 , направленные по Oy , и тангенциальные $F_{1x}, F_{2x}, F_{3x}, F_{1z}, F_{2z}, F_{3z}$, лежащие в плоскости шарниров.

Задача статически неопределимая. Рассмотрим уравнения равенства моментов сил относительно прямых, содержащих стороны треугольника ABC :

$$d_1 mg = h_1 N_3$$

$$d_2 mg = h_2 N_1$$

$$d_3 mg = h_3 N_2$$

Откуда возможно определить все три нормальные компоненты реакций. Подставив эти зависимости в уравнение для проекций сил на ось Oy , получим, в частности, следующее соотношение, справедливое для произвольного треугольника ABC и произвольно выбранной точки K :

$$d_1/h_1 + d_2/h_2 + d_3/h_3 = 1 \quad (4.1)$$

Соотношение (4.1) получено с помощью теоретико-механического подхода, но может быть доказано и чисто геометрически.

Помимо этого, возможно выписать следующие соотношения для величин тангенциальных реакций: $F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0, F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} = 0$.

Таким образом, как и в плоском случае известна только сумма соответствующих тангенциальных реакций.

Теперь заменим одну жесткую опору на скользящее сочленение (рис. 3,б). Пусть опора CC_1 содержит направляющую, по которой может скользить без трения невесомый стержень C_1C_2 . Аналогично плоскому случаю, уравнение равенства моментов сил относительно прямой A_1B_1 , дает следующее противоречивое тождество: $d_1 mg = 0$. К такому же результату приведет и случай двух скользящих опор.

5. Отклонения в пространственной постановке со скользящей опорой. По аналогии с плоским случаем введем малые отклонения в постановку задачи о скользящей опоре.

5.1. Изменение высоты шарнира скользящей опоры. Приподнимем шарнир C_1 (рис. 4,а) на высоту ϵ над плоскостью шарниров. Задача по-прежнему является статически неопределимой, поскольку на 6 уравнений равновесия в задаче 8 неизвестных компонент реакций. Выпишем уравнения вертикального равновесия: проекции уравнения

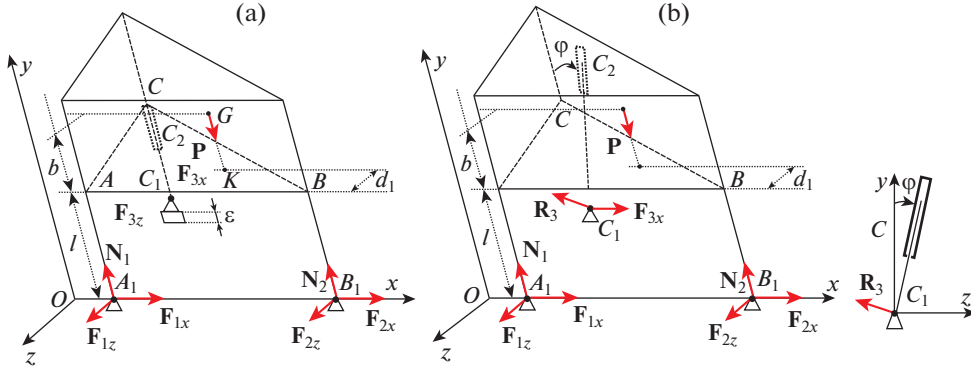


Рис. 4. Введение отклонений в пространственную постановку с потенциально подвижной опорой: (а) подставка под подвижную опору; (б) поворот подвижной опоры.

равновесия сил на оси координат, равенство моментов сил относительно прямой AB , равенство моментов сил относительно прямой A_1z , равенство моментов сил относительно прямой B_1z .

$$\begin{aligned}
 mg &= N_1 + N_2 \\
 F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} &= 0 \\
 F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} &= 0 \\
 d_1 mg + \varepsilon F_{3z} &= 0 \\
 d_4 mg + \varepsilon F_{3x} - c N_2 &= 0 \\
 (c - d_4) mg + \varepsilon F_{3x} - c N_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Из уравнений (5.1) мы можем определить 4 компонента реакций: $F_{3x} = 0$, $F_{3z} = d_1 mg / \varepsilon$, $N_1 = (c - d_4) mg / c$, $N_2 = d_4 mg / c$; а также два соотношения на другие 4 компонента: $F_{1x} + F_{2x} = 0$, $F_{1z} + F_{2z} = -d_1 mg / \varepsilon$. Если мы устремим ε к нулю, $F_{3z} \rightarrow \infty$ и $F_{1z} + F_{2z} \rightarrow \infty$.

5.2. Поворот скользящей опоры. Повернем скользящую опору C_1C_2 (рис. 4,б) относительно тела в плоскости C_1yz на угол φ . Пусть CE – высота треугольника ABC , проведенная к стороне AB . Выпишем уравнения равновесия: проекции уравнения равновесия сил на оси координат, равенство моментов сил относительно прямой AB , равенство моментов сил относительно прямой A_1z , равенство моментов сил относительно прямой A_1y .

$$\begin{aligned}
 mg &= N_1 + N_2 + R_3 \sin \varphi \\
 F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} &= 0 \\
 F_{1z} + F_{2z} + R_3 \cos \varphi &= 0 \\
 d_1 mg - h_1 R_3 \sin \varphi &= 0 \\
 d_4 mg - AE \sin \varphi R_3 - c N_2 &= 0 \\
 AE \cos \varphi R_3 - h_1 F_{3x} - c F_{2z} &= 0
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Из уравнений (5.2) мы можем определить 3 компонента реакций: $R_3 = d_1 mg / (h_1 \sin \varphi)$, $N_2 = (d_4 - AEd_1/h_1) mg / c$, $N_1 = (c - d_4 - BE d_1/h_1) mg / c$; а также 3 соотношения на другие компоненты: $F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0$, $F_{1z} + F_{2z} = -R_3 \cos \varphi$ и $h_1 F_{3x} + c F_{2z} = AE \cos \varphi R_3$.

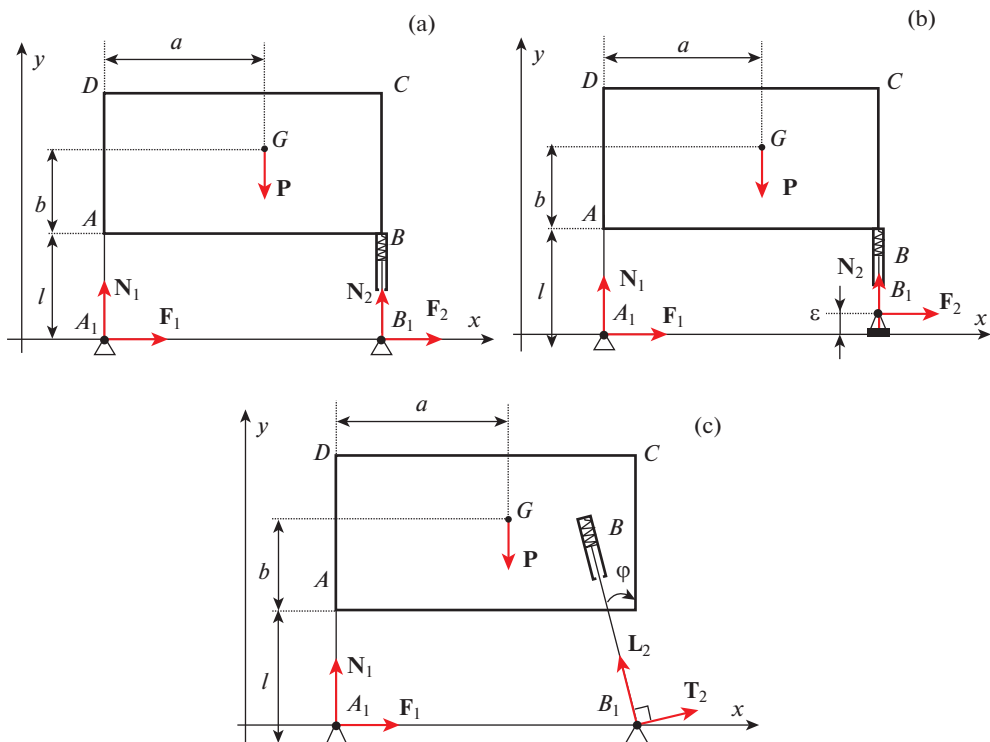


Рис. 5. Упругость правой скользящей опоры в плоском случае: (а) плоская постановка с потенциально подвижной упругой опорой; (б) подставка под подвижную упругую опору; (с) поворот подвижной упругой опоры.

Рассмотрим предельный переход $\varphi \rightarrow 0$, получим, что реакция $R_3 \rightarrow \infty$. Вместе с ней устремляется в бесконечность, по крайней мере, одна из тангенциальных реакций.

В случае обоих предельных переходов получаем неограниченность реакций опор. Эта неограниченность объясняет парадокс с силой тяжести, описанный выше.

6. Упругая опора. Попробуем выяснить, можно ли снять остроту проблемы, если ввести в опоры упругие элементы. Вернемся к плоской задаче. Добавим в плоской задаче о скользящей опоре между телом и стержнем BB_1 пружину некоторой жесткости k (рис. 5,а), при $BB_1 = l_0$ пружина не деформирована. Нормальная реакция правой опоры равна усилию сжатой пружины: $N_2 = F_{el2} = k\Delta l$, где $\Delta l = l - l_0$.

Выпишем условия вертикального равновесия:

$$\begin{aligned} mg &= N_1 + N_2 \\ F_1 + F_2 &= 0 \\ amg - cN_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Условия (6.1) выполняются только для единственного значения жесткости: $k = amg/(c\Delta l)$, когда упругость пружины обеспечит необходимую величину N_2 реакции опоры B_1 . При этом определить величины тангенциальных реакций невозможно.

6.1. Изменение высоты шарнира упругой опоры. Внесем в задачу об упругой скользящей опоре отклонение: изменим высоту правого шарнира (рис. 5,б). Нормальная ре-

акция правой опоры по-прежнему равна усилию сжатой пружины: $N_2 = F_{el2} = k\Delta l$, но удлинение пружины изменилось $\Delta l = l - \varepsilon - l_0$. Выпишем уравнения вертикального равновесия.

$$\begin{aligned} mg &= N_1 + N_2 \\ F_1 + F_2 &= 0 \\ amg - cN_2 + F_2\varepsilon &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Из уравнений (6.2) определим компоненты реакций опор:

$$\begin{aligned} N_1 &= mg - k\Delta l \\ F_2 &= (mga - k\Delta lc)/\varepsilon \\ F_1 &= (k\Delta lc - mga)/\varepsilon \end{aligned}$$

Обе тангенциальные реакции стремятся к бесконечности при стремлении ε к нулю.

6.2. Поворот упругой опоры. Повернем правую упругую опору на некоторый угол φ (рис. 5,с). Реакцию правой опоры разложим на продольную L_2 ($L_2 = k\Delta l$) и поперечную T_2 составляющие. Выпишем условия равновесия:

$$\begin{aligned} mg &= N_1 + L_2 \cos \varphi + T_2 \sin \varphi \\ F_{fr1} - L_2 \sin \varphi + T_2 \cos \varphi &= 0 \\ amg - c(L_2 \cos \varphi + T_2 \sin \varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Из (6.3) получим неизвестные реакции опор:

$$\begin{aligned} N_1 &= mg(1 - a/c) \\ T_2 &= (cL_2 \cos \varphi - amg)/(c \sin \varphi) \\ F_1 &= L_2 \sin \varphi - (cL_2 \cos \varphi - amg) \cos \varphi / (c \sin \varphi) \end{aligned}$$

Реакции T_2, F_1 стремятся к бесконечности при $\varphi \rightarrow 0$.

7. Заключение. Показано, что наличие потенциально скользящего сочленения может не добавить подвижности конструкции, как и наличие поворотной. Для скользящей опоры обнаружен парадокс: уравнения равновесия не выполняются.

При этом величина реакций связи может оказаться значительной, даже принимать бесконечные значения. Дано объяснение парадокса, указанного выше: две бесконечные силы могут создать любой необходимый момент, в том числе уравновешивающий момент силы тяжести.

Мы показали, что несколько абсолютно твердых тел можно соединить идеальными (без трения) связями (шарниры, скользящая заделка), таким образом, что, с одной стороны, эти связанные тела образуют неизменяемую конфигурацию, то есть как бы превращаются в абсолютно твердое тело, с другой стороны, реакции наложенных связей могут принимать бесконечно большие значения. Поэтому такая конструкция не может быть реализована с помощью обычных материалов. Какие-то звенья вынуждены будут деформироваться или даже сломаться.

Предъявленная конструкция похожа на обычные типовые строительные конструкции. Подобные особенности равновесия конструкций с податливыми опорами должны быть известны в строительной механике, хотя авторы не смогли их найти в литературе. Это позволяет предположить, что часть крупных аварий со строительными конструкциями связана именно с особенностями, указанными в настоящей статье и в [10].

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 22-21-00303.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березкин Е.Н.* Лекции по теоретической механике. Часть 1. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1967. 313 с.
2. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. *А.А. Яблонского*. Изд. 5, испр. М.: “ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС”, 1998. 382 с.
3. *Liu Y.Q., Liang F., Au Francis T.K.* Experimental study of durable low-friction concrete contacts for precast segmental columns with resettable sliding joints // *Constr. Build. Mater.* 2022. V. 318. P. 126192. doi.org/.
<https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.126192>
4. *Jiang Yu.-F., Guo Z.-X., Basha S.H., Chai Z.-L.* Sliding bed joint for seismic response control of ashlar stone masonry structures // *Eng. Struct.* 2021. V. 244. P. 112734. doi.org/.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112734>
5. *Liu Y.Q., Liang F., Au Francis T.K.* Precast segmental bridge columns with resettable sliding-joints – An inspiration from ancient Chinese pagodas // *Struct.* 2021. V. 33. P. 615–626. doi.org/.
<https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.03.120>
6. *Di Trapani F., Bolis V., Basone F., Cavaleri L., Preti M.* Traditional vs. sliding-joint masonry infilled frames: Seismic reliability and EAL // *Proc. Struct. Integr.* 2020. V. 26. P. 383–392. doi.org/.
<https://doi.org/10.1016/j.prostr.2020.06.049>
7. *Morandi P., Milanesi R.R., Magenes G.* Innovative solution for seismic-resistant masonry infills with sliding joints: in-plane experimental performance // *Eng. Struct.* 2018. V. 176. P. 719–733. doi.org/.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.09.018>
8. *Базаренко Н.А.* Контактные задачи для круглой плиты со скользящей заделкой по торцу // *Изв. РАН. МТТ.* 2014. № 3. С. 93–106.
9. *Маркин Ю.С., Маркин О.Ю., Рахматуллин Р.Р., Каркаев Р.Б., Штыкова Е.В., Хабибуллин Б.М.* Составная конструкция устройства с жесткой заделкой, шарнирно-подвижной опорой, невесомым стержнем и скользящим соединением. Патент на полезную модель: RU 124798 U1. 2013.
10. *Досаев М.З., Самсонов В.А.* Особенности динамики систем с упругими элементами и сухим трением // *Прикл. мат. мех.* 2021. Т. 85. № 4. С. 426–435.

УДК 629.784

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ МОДАЛЬНОГО ПОДХОДА

© 2023 г. А. Ю. Бондаренко^{a,b,*}, А. И. Лиходед^{a,b,**}, В. В. Сидоров^{a,b}

^aЦентральный научно-исследовательский институт машиностроения,
г.о. Королев, Россия

^bМосковский физико-технический институт (государственный университет),
Долгопрудный, Россия

*e-mail: andrei.bondarenko@phystech.edu

**e-mail: Likhoded@tsniimash.ru

Поступила в редакцию 14.06.2022 г.

После доработки 07.07.2022 г.

Принята к публикации 08.07.2022 г.

Предложен способ решения нестационарных динамических задач с комплексными модулями упругости или матрицами жесткостей, позволяющий учитывать локальные диссипативные свойства элементов конструкций. Показано, что в синтезированных конструкциях даже с существенно различными диссипативными свойствами динамическое поведение и параметры нагружения на резонансных частотах определяются едиными интегральными логарифмическими декрементами, получаемыми путем массово-энергетического осреднения диссипативных свойств конструкций.

Предложены две концепции оценки интегральных добротностей и логарифмических декрементов колебаний конструкций с различными диссипативными свойствами, одна из которых базируется на физических особенностях резонансных явлений в механических системах, а вторая на анализе поведения затухающих фундаментальных решений соответствующих однородных уравнений.

Совпадение интегральных логарифмических декрементов, полученных на основе различных концепций, позволяет решать нестационарные задачи для конструкций с различными диссипативными свойствами методом разложения кинематических параметров по собственным формам колебаний (модальным методом). Результаты расчетов динамического поведения конструкций с различными диссипативными свойствами продемонстрированы на модельных задачах.

Ключевые слова: нестационарная задача, комплексные жесткости, декременты колебаний, диссипативные свойства, модальный метод, частоты и формы колебаний, инерционные силы, фундаментальные решения

DOI: 10.31857/S0572329922600426, EDN: JLCTJN

1. Введение. Известно, что использование комплексных модулей упругости эффективно применяется для решения стационарных задач, в частности определения амплитудно-частотных характеристик механических систем, однако прямое решение нестационарных задач с комплексными модулями невозможно из-за появления бесконечно возрастающих фундаментальных решений соответствующих однородных уравнений [1]. Вместе с тем существует потребность в оценке влияния различий в диссипативных свойствах отдельных частей конструкций на динамические процессы при

переходных нестационарных внешних воздействиях. Для решения этой задачи предложено воспользоваться методом разложения решения по собственным тонам колебаний, причем каждый тон включается в решение со своим интегральным логарифмическим декрементом, полученным путем массово-энергетического осреднения диссипации по конструкции. Представлены различные концепции определения интегральных логарифмических декрементов для систем с неоднородными диссипативными свойствами.

Запишем конечноэлементную [2] систему уравнений с комплексной матрицей жесткости:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}^* \mathbf{X} = \mathbf{F}(t, x) \quad (1.1)$$

здесь $\mathbf{M}$ и $\mathbf{K}^*$ — матрицы масс и жесткостей, $\mathbf{X}$ — вектор обобщенных координат, $\mathbf{F}(t, x)$ — вектор внешних сил.

В общем случае матрица жесткости $\mathbf{K}^*$ состоит из действительной и мнимой частей:

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}^{(1)} + j \cdot \mathbf{K}^{(2)} \quad (1.2)$$

При этом матрица $\mathbf{K}^{(1)}$ является традиционной (упругой) матрицей жесткости с элементами $k_{\mu\nu}^{(1)}$, элементы матрицы $\mathbf{K}^{(2)}$, характеризующие диссипативные свойства различных частей конструкции, имеют структуру, аналогичную [3], и могут быть представлены в следующем общем виде:

$$k_{\mu\nu}^{(2)} = k_{\mu\nu}^{(1)} \cdot \frac{\delta_{\mu\nu}}{\pi} \quad (1.3)$$

где $\delta_{\mu\nu}$ — локальные логарифмические декременты.

Внешнюю силу зададим в виде произведения вектора $\mathbf{P}(x)$, характеризующего распределение внешних сил по поверхности конструкции, и функции времени $q(t)$

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{P}(x) \cdot q(t) \quad (1.4)$$

Предварительно проанализируем решение стационарной задачи в случае различных диссипативных свойств конструкции.

В случае стационарной задачи правая часть (внешняя сила) в (1.1) задается в виде

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{P}(x) \cdot e^{j\omega t} \quad (1.5)$$

Тогда решение уравнения (1.1) ищется в аналогичном (1.5) виде

$$\mathbf{X}(t) = \tilde{\mathbf{X}}_a \cdot e^{j\omega t} \quad (1.6)$$

где $\tilde{\mathbf{X}}_a$ — искомый вектор обобщенных координат (амплитудных значений), который будет зависеть от частоты ω .

С учетом (1.5), (1.6) алгебраическая система уравнений для определения неизвестного вектора $\tilde{\mathbf{X}}_a$ при стационарных колебаниях примет вид:

$$(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}^*)\tilde{\mathbf{X}}_a = \mathbf{P}(x) \quad (1.7)$$

2. Использование резонансных явлений для оценки интегральных логарифмических декрементов. Первая концепция для оценки интегральных логарифмических декрементов конструкций с различными диссипативными свойствами базируется на физических особенностях резонансных явлений в механических системах.

С этой целью будем возбуждать конечноэлементную модель (1.1) внешней силой так, чтобы частота внешней силы совпадала с собственной частотой ω_j , а распределе-

ние внешней силы по конструкции совпадало с инерционными силами, возникающими при колебаниях конструкции по соответствующему тону колебаний φ_i

$$\ddot{\mathbf{P}}_i(x) = \omega_i^2 \mathbf{M} \varphi_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.1)$$

здесь N – количество собственных тонов колебаний модели, для которых будут определяться интегральные логарифмические декременты.

После определения амплитудных значений кинематических параметров системы $\tilde{X}_{ai}$ из (1.7) определяются амплитуды инерционных сил $\mathbf{P}_i^{(1)}$, действующих по степеням свободы КЭ модели по i -му тону колебаний.

Так как поле кинематических параметров $\tilde{X}_{ai}$ в общем случае (при произвольной частоте ω) является комплексным ($\tilde{X}_{ai} = \tilde{\xi}_{ai} + j\tilde{\zeta}_{ai}$), то и поле инерционных сил также является комплексным

$$\mathbf{P}_{ai}^{(1)} = -\omega_i^2 \mathbf{M} \tilde{\xi}_{ai} - j \omega_i^2 \mathbf{M} \tilde{\zeta}_{ai} \quad (2.2)$$

Поле кинематических параметров при использовании модального метода [4] определяется равенством

$$\mathbf{Y}(t, x) = \sum_i \mathbf{T}_i(t) \varphi_i(x) \quad (2.3)$$

Здесь $\varphi_i(x)$ – собственные формы колебаний, нормированные по единичной массе $\{\mathbf{M} \varphi_i, \varphi_i\} = 1$. Функции $\mathbf{T}_i(t)$ в случае стационарной задачи определяются из следующих уравнений для обобщенных координат:

$$\ddot{\mathbf{T}}_i + \frac{\delta_i \omega_i}{\pi} \dot{\mathbf{T}}_i + \omega_i^2 \mathbf{T}_i = \{\mathbf{P}(x), \varphi_i\} e^{j\omega t} \quad (2.4)$$

где δ_i , ω_i – соответственно собственные частоты и логарифмические декременты колебаний, фигурными скобками $\{\dots\}$ обозначено обобщенное скалярное произведение.

С учетом (2.4) поле кинематических параметров конечноэлементной модели на резонансной частоте ω_i при распределении внешних сил по конструкции (2.1), представляется мнимой частью решения и имеет следующий вид

$$\mathbf{Y}_i = -j Q_i \varphi_i e^{j\omega t}, \quad \left(Q_i = \frac{\pi}{\delta_i} \right) \quad (2.5)$$

Здесь Q_i – добротность для каждого тона колебаний ω_i . При этом действительная часть решения на резонансной частоте равна нулю.

Поле амплитудных значений инерционных сил $\mathbf{P}_i^{(2)}$ с учетом (2.5) для i -го тона колебаний примет вид

$$\mathbf{P}_i^{(2)} = j \omega_i^2 Q_i \mathbf{M} \varphi_i \quad (2.6)$$

Приравнявая поле амплитуд инерционных сил, полученных методом разложения по собственным формам колебаний (2.6), полю амплитуд мнимой части инерционных сил (2.2), полученных из решения задачи (1.7) с правой частью (2.1), будем иметь

$$\omega_i^2 Q_i \mathbf{M} \varphi_i = -\omega_i^2 \mathbf{M} \tilde{\zeta}_i \quad (2.7)$$

Умножая обе части равенства (2.7) скалярно на φ_i , приходим к следующим значениям для интегральных добротностей Q_i и логарифмических декрементов δ_i :

$$Q_i = -\{\mathbf{M} \tilde{\zeta}_i, \varphi_i\}, \quad \delta_i = \frac{\pi}{Q_i} \quad (2.8)$$

По существу этой формулой осуществляется массово-энергетическое осреднение различных диссипативных свойств конструкций при колебаниях на резонансных частотах.

Другой подход базируется на минимизации невязки между амплитудными значениями Y_i (2.5) и мнимой частью ξ_i решения $\tilde{X}_{ai}$ (1.7), что обеспечивается функционалом:

$$\Pi_i = \sum_{n=1}^{N_{dof}} (Q_i \Phi_{ni} - \xi_{ni})^2, \quad i = 1 \dots N \quad (2.9)$$

где N_{dof} — число степеней свободы конструкции, N — количество рассматриваемых тонов колебаний (2.9).

Следует отметить, что для решения практических задач в большинстве случаев нет необходимости использовать полный спектр собственных тонов колебаний. Количество потребных тонов колебаний N оценивается по характеру сходимости кинематических и силовых факторов в конструкциях.

С использованием функционала (2.9), минимизирующего невязку по амплитудам узловых кинематических параметров, определяются осредненные добротности Q_i и соответствующие интегральные логарифмические декременты колебаний δ_i для конструкций с различными диссипативными свойствами по каждому тону колебаний ω_i :

$$Q_i = \sum_{n=1}^{N_{dof}} \zeta_{ni} \Phi_{ni} / \sum_{n=1}^{N_{dof}} (\Phi_{ni})^2, \quad \delta_i = \frac{\pi}{Q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.10)$$

3. Использование затухающих фундаментальных решений однородного уравнения для определения интегральных логарифмических декрементов. Вторая концепция определения интегральных декрементов по тонам колебаний базируется на анализе поведения фундаментальных решений $\tilde{X}(t)$ однородного уравнения, соответствующего (1.1)

$$\mathbf{M}\ddot{\tilde{X}} + (\mathbf{K}^{(1)} + j \cdot \mathbf{K}^{(2)})\tilde{X} = 0 \quad (3.1)$$

Если решение уравнения (3.1) отыскивать в виде

$$\tilde{X}(t) = \tilde{X}_0 \cdot e^{j\omega t} \quad (3.2)$$

то соответствующее (3.1) характеристическое уравнение запишется так:

$$\Pi(\lambda, \kappa_{\mu\nu}, \delta_{\mu\nu}) = \left| -\mathbf{M}\lambda + \mathbf{K}^{(1)} + j \cdot \mathbf{K}^{(2)} \right| = 0, \quad (\lambda = \omega^2) \quad (3.3)$$

Очевидно, что выражение $\Pi(\lambda, \kappa_{\mu\nu}, \delta_{\mu\nu})$ из (3.3) непрерывным образом зависит от параметров $\delta_{\mu\nu}$ и при малых значениях $\delta_{\mu\nu}$ корни характеристического уравнения (3.3) λ_i будут близки на комплексной плоскости λ к квадратам собственных частот ω_i^2 . При наличии диссипации, учтенной в виде комплексных жесткостей (1.2), (1.3), нули характеристического уравнения λ_i в общем случае будут комплексными

$$\lambda_i = a_i + jb_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.4)$$

При этом действительные части корней λ_i будут отражать параметры собственных частот ω_i^2 , а мнимые — интегральные диссипативные свойства конструкций, соответствующие различным тонам колебаний.



Рис. 1 – Модель балки. Показана нумерация узлов модели.

Из (3.3), (3.4) следует, что каждому значению λ_i соответствуют два корня характеристического уравнения

$$\omega_i^{(1)} = \sqrt{a_i + jb_i}; \quad \omega_i^{(2)} = -\sqrt{a_i + jb_i} \quad (3.5)$$

и, соответственно, два фундаментальных решения однородного уравнения (3.1)

$$\tilde{X}_i^{(1)}(t) = \tilde{X}_{i0}^{(1)} \cdot e^{j\omega_i^{(1)}t}; \quad \tilde{X}_i^{(2)}(t) = \tilde{X}_{i0}^{(2)} \cdot e^{j\omega_i^{(2)}t} \quad (3.6)$$

При малых диссипативных свойствах конструкций корни $\omega_i^{(1)}$ и $\omega_i^{(2)}$ (3.5), соответствующие λ_i , могут быть в первом приближении представлены в виде:

$$\omega_i^{(1)} = \sqrt{a_i} \left(1 + j \frac{b_i}{2a_i} \right); \quad \omega_i^{(2)} = -\sqrt{a_i} \left(1 + j \frac{b_i}{2a_i} \right) \quad (3.7)$$

Таким образом, однородное уравнение (3.1) будет иметь часть фундаментальных решений, стремящихся с ростом времени к бесконечности, и часть фундаментальных решений, стремящихся к нулю. Этим объясняется невозможность прямого решения нестационарных задач с использованием комплексного модуля.

В связи с этим возникает альтернативный подход, заключающийся в следующем.

Из всех фундаментальных решений (для каждого λ_i) выбираются решения, имеющие физический смысл, то есть решения, затухающие на бесконечности (как это принято при решении задач уравнений математической физики).

Действительные части затухающих фундаментальных решений по существу моделируют процесс, характерный для типового динамического эксперимента по определению диссипативных свойств конструкций путем сброса статических сил, приложенных к конструкциям.

Очевидно, что при положительных значениях b_i (3.4) действительная часть затухающего решения $\tilde{X}_i^{(1)}(t)$ (3.6) имеет вид:

$$\text{Re } \tilde{X}_i^{(1)}(t) = \tilde{X}_{i0}^{(1)} e^{-\frac{b_i}{2\sqrt{a_i}}t} \cos \sqrt{a_i}t \quad (3.8)$$

При отрицательных значениях b_i аналогичная ситуация имеет место для второго решения $\tilde{X}_i^{(2)}(t)$ из (3.6).

Из равенства (3.8) следует выражение для интегрального логарифмического декремента конструкции с различными локальными диссипативными свойствами

Таблица 1. Свойства осцилляторов, использованных в модельной задаче

№	№ узла подвески	масса, кг	жесткость, Н/м	Диссипативные свойства δ	ось
1	11	2.0	1400	0.094	Y
2	8	1.0	10000	0.942	Y
3	7	0.4	9900	0.157	Y
4	5	0.4	17200	0.031	Y
5	9	1.0	63000	0.471	X

Во второй задаче (“балка № 2”) к консольной балке в некоторых узлах присоединены одноступенные осцилляторы массой 5–20% от массы конструкции. В механике такие осцилляторы часто используются в качестве механических аналогов для учета динамических свойств подконструкций [5–7]. Свойства осцилляторов приведены в табл. 1.

Расчеты проводились как на закрепленных расчетных моделях, так и на моделях со свободными краями при силовом и кинематическом возбуждении.

Комплексные корни характеристического уравнения (3.3) определялись с помощью программного комплекса MSC.Nastran [8] методом Ланцоша [9].

В табл. 2 приведено сравнение результатов расчетов модальных логарифмических декрементов балки № 1 (без осцилляторов) с использованием различных методов. Граничные условия соответствовали консольной заделке левого конца балки (с меньшей диссипацией).

В табл. 3 приведено сравнение результатов расчетов модальных логарифмических декрементов балки № 2 (с одноступенными осцилляторами) с использованием различных методов. Граничные условия были аналогичными.

Таблица 2. Сравнение результатов расчетов модальных логарифмических декрементов балки № 1 (без осцилляторов) с использованием различных методов

№ тона	Частота, Гц	Интегральные модальные логарифмические декременты δ для модельной задачи, определенные в соответствии с формулами		
		(2.8)	(2.10)	(3.9)
1	0.9927	0.1137	0.1137	0.1134
2	6.1465	0.2639	0.2639	0.2620
3	17.015	0.2871	0.2875	0.2865
4	32.924	0.2906	0.2906	0.2893
5	53.658	0.2843	0.2846	0.2843
6	78.746	0.2890	0.2893	0.2887
7	107.20	0.2821	0.2824	0.2837
8*	127.16	0.1615	0.1615	0.1608
9	136.89	0.2749	0.2755	0.2774
10	163.87	0.2727	0.2711	0.2809

*Продольный тон колебаний

$$\tilde{\delta}_i = \ln \left(\frac{e^{-\frac{b_i t}{2\sqrt{a_i}}}}{e^{-\frac{b_i}{2\sqrt{a_i}} \left(t + \frac{2\pi}{\sqrt{a_i}} \right)}} \right) = \frac{b_i \pi}{a_i} \quad (3.9)$$

Здесь учтено, что период колебаний T_i по i -му тону с учетом (3.8) определяется соотношением

Таблица 3. Сравнение результатов расчетов модальных логарифмических декрементов балки № 2 (с одностепенными осцилляторами) с использованием различных методов

№ тона	Частота, Гц	Интегральные модальные логарифмические декременты δ для модельной задачи, определенные в соответствии с формулами		
		(2.8)	(2.10)	(3.9)
1	0.67	0.1219	0.1219	0.1217
2	3.87	0.2416	0.2419	0.2402
3	7.88	0.1360	0.1360	0.1357
4	14.22	0.4722	0.4869	0.4763
5	19.70	0.5674	0.5806	0.5909
6	27.06	0.2736	0.2746	0.2782
7	32.28	0.1389	0.1401	0.1410
8	36.41	0.1800	0.1810	0.1857
9*	39.56	0.4646	0.4646	0.4620
10	56.07	0.2648	0.2642	0.2645
11	79.43	0.2900	0.2897	0.2900
12	108.15	0.2856	0.2853	0.2867
13*	128.84	0.1678	0.1678	0.1672
14	137.52	0.2721	0.2717	0.2742
15	165.06	0.2708	0.2724	0.2807
16	182.73	0.2441	0.2485	0.2588

*Продольный тон колебаний

$$T_i = \frac{2\pi}{\sqrt{a_i}} \quad (3.10)$$

Необходимо отметить, что собственные частоты колебаний конструкций при учете диссипативных свойств $\sqrt{a_i}$ несколько снижаются по сравнению с частотами недемпфированной конструкции ω_i .

4. Применение полученных результатов при решении модельных задач. Для иллюстрации полученных соотношений приводятся результаты оценки интегральных логарифмических декрементов колебаний, полученных с использованием различных концепций, по двум модельным задачам.

В первой задаче (“балка № 1”) рассматривается консольно заделанная одним концом однородная алюминиевая балка длиной 10 м трубчатого сечения диаметром 100 мм и толщиной 1 мм. Балка разбита на 10 одинаковых конечных элементов. Модель балки показана на рис. 1. Балка может совершать поперечные колебания только в плоскости XOY.

Диссипативные характеристики конечных элементов задаются в виде конструкционного демпфирования (пропорционально матрице жесткости элемента). Первые 5 элементов (показаны серым цветом) имеют диссипативные характеристики, соответствующие логарифмическому декременту $\delta = 0.0942$ ($0.03 \cdot \pi$). Оставшиеся 5 элементов имеют диссипативные характеристики в 5 раз больше – $\delta = 0.4712$ ($0.15 \cdot \pi$).

Во второй задаче (“балка № 2”) к консольной балке в некоторых узлах присоединены одностепенные осцилляторы массой 5–20% от массы конструкции. В механике такие осцилляторы часто используются в качестве механических аналогов для учета ди-

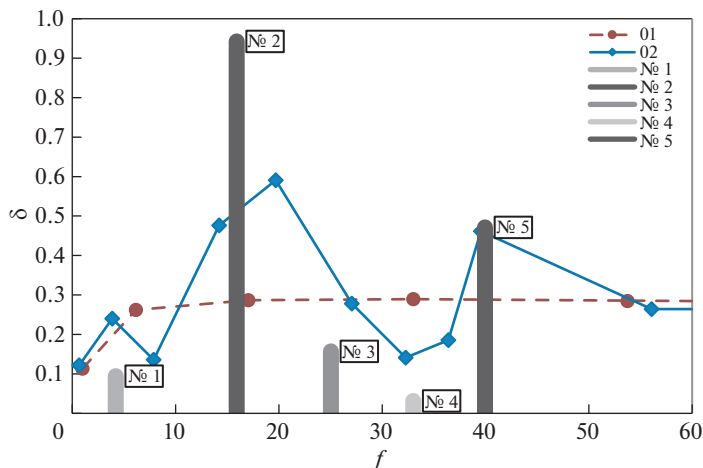


Рис. 2. Интегральные модальные логарифмические декременты δ двух моделей (пунктирная линия (01) – модель без осцилляторов, сплошная линия (02) – модель с осцилляторами) в зависимости от частоты f (Гц), а также частоты и декременты отдельных осцилляторов (№ 1–5).

намических свойств подконструкций [5–7]. Свойства осцилляторов приведены в табл. 1.

Расчеты проводились как на закрепленных расчетных моделях, так и на моделях со свободными краями при силовом и кинематическом возбуждении.

Комплексные корни характеристического уравнения (3.3) определялись с помощью программного комплекса MSC.Nastran [8] методом Ланцоша [9].

В табл. 2 приведено сравнение результатов расчетов модальных логарифмических декрементов балки № 1 (без осцилляторов) с использованием различных методов. Граничные условия соответствовали консольной заделке левого конца балки (с меньшей диссипацией).

В табл. 3 приведено сравнение результатов расчетов модальных логарифмических декрементов балки № 2 (с одностепенными осцилляторами) с использованием различных методов. Граничные условия были аналогичными.

Проведенная серия расчетов для конструкций с различными диссипативными характеристиками показала хорошее совпадение интегральных логарифмических декрементов, полученных из соотношений (2.8), (2.10) и (3.9), соответствующих различным методическим концепциям.

Массово-энергетическое осреднение различных диссипативных свойств конструкций при колебаниях на резонансных частотах иллюстрируется на рис. 2.

На этом рисунке нанесены модальные логарифмические декременты консольной балки с осцилляторами и без них, определенные по методу (3.9). Вертикальными линиями (“столбиками”) показаны логарифмические декременты колебаний отдельных осцилляторов. Видно, что внесение в конструкцию осцилляторов с пониженным/повышенным демпфированием ведет к соответствующим изменениям в интегральных диссипативных свойствах конструкции в целом.

Стоит отметить, что балка № 2 (с осцилляторами) является в некотором смысле “предельным” случаем для динамических систем по степени разнородности диссипативных характеристик ее составных частей. Интересно показать, что даже для такой системы использование осредненных интегральных модальных добротностей позволяет добиться практически полного совпадения по откликам на резонансных частотах.

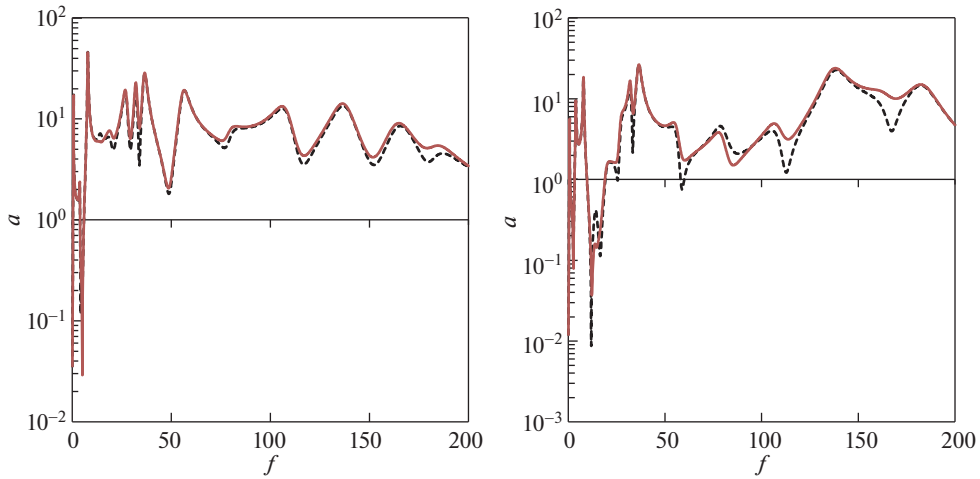


Рис. 3. Сравнение зависимостей амплитуды ускорений a (м/с^2) от частоты f (Гц), определенных двумя методами (сплошная линия — при использовании эквивалентного модального демпфирования, пунктирная линия — при решении стационарной задачи с комплексными жесткостями), на свободном краю (слева) и посередине (справа) балки № 2.

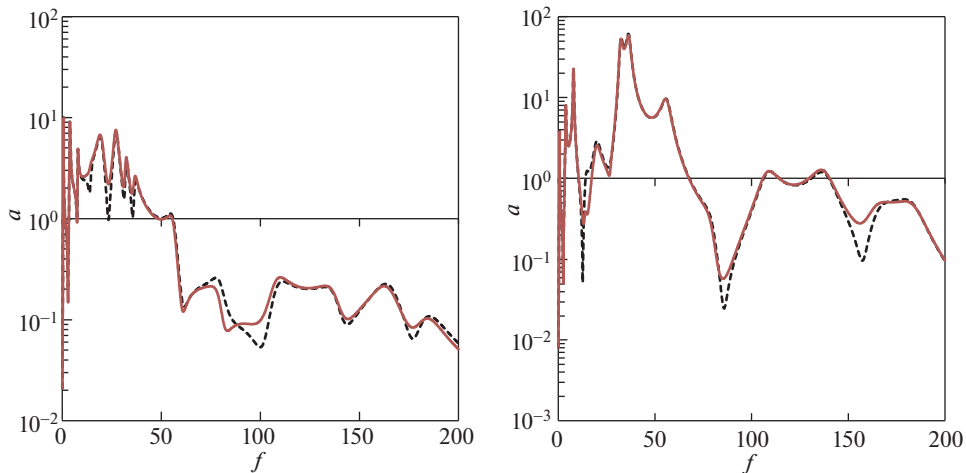


Рис. 4. Сравнение зависимостей амплитуды ускорений a (м/с^2) от частоты f (Гц), определенных двумя методами (сплошная линия — при использовании эквивалентного модального демпфирования, пунктирная линия — при решении стационарной задачи с комплексными жесткостями), на осцилляторе № 2 (слева) и осцилляторе № 4 (справа) балки № 2.

На рис. 3, 4 приведено сравнение АЧХ ускорений, полученных по решению стационарной задачи с комплексными жесткостями (1.1) и при использовании эквивалентного модального демпфирования (2.3), (2.4). В качестве внешнего воздействия задава-

лась поперечная сила с постоянной амплитудой, приложенная недалеко от свободного края балки.

5. Заключение. Совпадение интегральных добротностей и логарифмических декрементов, полученных с использованием различных концепций (моделирующих методы получения диссипативных характеристик в инженерной практике), одна из которых базируется на физических особенностях резонансных явлений (определение АЧХ), а вторая — на особенностях дифференциальных уравнений движения и их фундаментальных решений (при сбросе статических сил), подтверждает правомерность использования интегральных диссипативных свойств конструкций для решения стационарных и нестационарных задач путем разложения решения по тонам колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Изд. 11, испр. М.: URSS, 2016. 512 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
3. Сорокин Е.С. К вопросу неупругого сопротивления строительных материалов при колебаниях. Научное сообщение ЦНИИПС № 15. М.: Гос. изд-во лит. по стр-ву и архитектуре, 1954. 73 с.
4. Лиходед А.И. Динамика конструкций и определение нагрузок. Учебное пособие. Королев: Изд. АО ЦНИИмаш, 2020. 239 с.
5. Лиходед А.И., Малинин А.А. Колебания подкрепленных оболочек вращения с сосредоточенными массами и осцилляторами // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 1. С. 42–47.
6. Бондаренко А.Ю., Лиходед А.И., Сидоров В.В. Построение механических аналогов подконструкций с учетом действующих на них активных сил // Мат. модел. 2020. Т. 32. № 8. С. 106–118.
<https://doi.org/10.20948/mm-2020-08-07>
7. Craig Jr. R.R., Bampton M.C.C. Coupling of substructures for dynamic analysis // AIAA J. 1968. V. 6. № 7. P. 1313–1319.
8. Nastran MD Dynamic Analysis User's Guide. Version 2010 (Revision 0, June 25, 2010) / Ed. by D. M. McLean. (Santa Ana, CA: MSC Software Corp., 2010. 556 p.
9. Lanczos C. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators // J. Res. Nat. Bureau Stand. V. 45. 1950. C. 255–282.

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ПОЛУПЛОСКОСТИ И ПОЛОСЫ

© 2023 г. С. А. Калоеров^{а,*}, Е. С. Глушанков^{а,**}, А. Б. Мироненко^{а,***}

^а Донецкий национальный университет, Донецк, Россия

*e-mail: kaloerov@mail.ru

**e-mail: evgenij.glushankov@gmail.com

***e-mail: a.mironenko@donnu.ru

Поступила в редакцию 16.06.2022 г.

После доработки 21.08.2022 г.

Принята к публикации 22.08.2022 г.

Приведено общее решение задач теории упругости для анизотропных полуплоскости и полосы с произвольными отверстиями и трещинами, использующее комплексные потенциалы плоской задачи теории упругости анизотропного тела, конформные отображения, представления голоморфных функций рядами Лорана и удовлетворение граничным условиям обобщенным методом наименьших квадратов. Задачи сведены к переопределенным системам линейных алгебраических уравнений, решаемых методом сингулярных разложений. Описаны результаты численных исследований для полосы с круговым отверстием при ее растяжении или действии равномерного давления по отрезку прямолинейной границы, а также для растяжения полосы с круговым отверстием и трещиной в перемычке, в том числе выходящей на границу полосы или на контур отверстия. Изотропные полуплоскость и полоса с отверстиями и трещинами рассматриваются как частные случаи общей задачи. Изучено влияние на значения и распределение напряжений геометрических характеристик отверстий и трещин, физико-механических свойств материала полосы.

Ключевые слова: полуплоскость, полоса, отверстия и трещины, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов

DOI: 10.31857/S0572329922600438, EDN: JLIYSC

Введение. Многие элементы конструкций современной науки и техники изготавливаются из анизотропных материалов. Под действием различных внешних сил в таких элементах могут возникать высокие концентрации напряжений, что нужно учитывать при проектировании конструкций. В связи с этим и до сих пор продолжается начатый еще в первой половине XX века процесс изучения различных свойств анизотропных материалов и их применений, о чем свидетельствует и многочисленные публикации в последние годы, в том числе в виде монографий [1–4].

Наибольшее распространение в качестве элементов конструкций получили анизотропные пластинки с отверстиями и трещинами. При исследовании напряженно-деформированного состояния анизотропных пластин наиболее надежные результаты дает использование комплексных потенциалов Лехницкого С.Г., широко используемых как для односвязных [5], так и для многосвязных областей [6]. Однако, если отверстия располагаются вблизи бесконечного прямолинейного контура, то при удовлетворении граничным условиям на нем обычными методами возникают определенные трудности. В работах [7, 8] при решении задачи для полуплоскости с отверстиями к

граничным условиям на прямолинейной границе были применены методы вычисления интегралов типа Коши, что обеспечило точное удовлетворение этим условиям. Но граничные условия на контурах отверстий были удовлетворены методом рядов, что не обеспечивало высокой точности удовлетворения этим условиям: хотя была установлена квазирегулярность получаемых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов рядов, обеспечивающая единственность и сходимость решения, для достаточно близких расстояний между контурами не удавалось достичь высокой точности удовлетворения граничным условиям на контурах отверстий. Позже в наших работах для более точного удовлетворения граничным условиям на контурах отверстий был введен дискретный метод наименьших квадратов, но он оказался громоздким при численных реализациях. Как показывают результаты наших исследований, при решении различных задач для многосвязных сред, наиболее точное удовлетворение граничным условиям на контурах отверстий обеспечивает использование обобщенного метода наименьших квадратов (ОМНК) [9, 10], который, к тому же, прост для численной реализации.

В данной статье с использованием ОМНК дано общее решение задач для полуплоскости и полосы с произвольными отверстиями и трещинами при действии различных внешних сил. Для полосы с круговым отверстием, с круговым отверстием и трещиной описаны результаты численных исследований с установлением влияния геометрических характеристик отверстия и трещины, а также упругих свойств материала полосы на значения напряжений и коэффициентов интенсивности напряжений (КИН).

1. Постановка и метод решения задачи для полуплоскости. Рассмотрим сначала анизотропную пластинку в виде нижней полуплоскости с произвольными отверстиями и трещинами, находящуюся под действием различных внешних сил. При решении задачи теории упругости криволинейные контуры отверстий можно аппроксимировать дугами эллипсов и берегами прямолинейных разрезов, которые также рассматриваются как эллипсы, одна из полуосей которых равна нулю. В связи с этим рассмотрим нижнюю полуплоскость, занимающую многосвязную область S (рис. 1), ограниченную прямолинейной границей L^+ и контурами произвольно расположенных относительно друг друга и границы полуплоскости эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полуосями a_l , b_l . Отнесем полуплоскость к прямоугольной системе координат Oxy с началом в произвольной точке полуплоскости на расстоянии h^+ от прямолинейной границы и направлением оси Ox вдоль направления прямолинейной границы полуплоскости. Кроме того, выберем локальные системы координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов L_l и направлениями осей $O_l x_l$ вдоль полуосей a_l . Тогда параметрические уравнения эллипсов L_l в локальных системах имеют вид

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta \quad (1.1)$$

а в основной системе координат будут такими:

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l \quad (1.2)$$

При этом θ — параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π ; x_{0l} , y_{0l} — координаты начала локальной системы координат $O_l x_l y_l$ в основной системе координат Oxy ; φ_l — угол между направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от Ox против часовой стрелки.

Пусть на конечном отрезке $[\alpha^+, \beta^+]$ прямолинейной границы L^+ действуют непрерывные распределенные внешние усилия, остальная ее часть свободна от усилий; контуры отверстий L_l загружены распределенными усилиями или жестко подкреплены. На бесконечности полуплоскость не загружена или находится под действием рас-

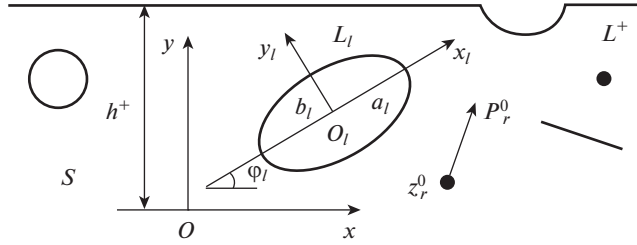


Рис. 1. Схема задачи для многосвязной полуплоскости.

тягивающих усилий интенсивности p , и, следовательно, в силу незагруженности прямолинейной границы, на бесконечности $\sigma_x^\infty = p$, а остальные напряжения и угол поворота равны нулю ($\sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = \omega_3^\infty = 0$). Кроме того, во внутренних точках полуплоскости $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ ($r = \overline{1, R}$) действуют сосредоточенные силы $P_r^0(X_r^0, Y_r^0)$.

Если исследования напряженно-деформированного состояния анизотропной пластинки проводить с использованием комплексных потенциалов теории упругости анизотропного тела [5], то они сводятся к нахождению из соответствующих граничных условий функций $\Phi_k(z_k)$ ($k = 1, 2$) обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y \quad (1.3)$$

где μ_k — корни характеристического уравнения 4-го порядка

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (1.4)$$

a_{ij} — коэффициенты деформации материала пластинки. При этом комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в многосвязных областях S_k , ограниченных контурами L_{kl} ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$), соответствующими контурам L_l области S при аффинных преобразованиях (1.3), и в общем случае бесконечной многосвязной пластинки имеют вид [11]

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + N_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \Phi_{kl}(z_k) \quad (1.5)$$

в котором

$$N_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^R A_{kr}^0 \ln(z_k - z_{kr}^0)$$

$\Gamma_k, A_{kl}, A_{kr}^0$ — постоянные, определяемые из решения следующих систем линейных алгебраических уравнений:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_k = \left(0, 0, \sigma_x^\infty, \frac{a_{16}}{2a_{22}} \sigma_x^\infty \right) \quad (1.6)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kl} = \left(\frac{Y_l}{2\pi}, -\frac{X_l}{2\pi}, -\frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{Y_l}{2\pi} - \frac{a_{16}}{a_{11}} \frac{X_l}{2\pi}, \frac{a_{26}}{a_{22}} \frac{Y_l}{2\pi} + \frac{a_{12}}{a_{22}} \frac{X_l}{2\pi} \right) \quad (1.7)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kr}^0 = \left(\frac{Y_r^0}{2\pi}, -\frac{X_r^0}{2\pi}, -\frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{Y_r^0}{2\pi} - \frac{a_{16}}{a_{11}} \frac{X_r^0}{2\pi}, \frac{a_{26}}{a_{22}} \frac{Y_r^0}{2\pi} + \frac{a_{12}}{a_{22}} \frac{X_r^0}{2\pi} \right) \quad (1.8)$$

X_l, Y_l — компоненты главного вектора приложенных по контуру отверстия L_l внешних усилий; $z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l}$ и $z_{kr}^0 = x_r^0 + \mu_k y_r^0$ — точки в областях S_k , соответствующие при аффинных преобразованиях (1.3) точкам $z_{0l}(x_{0l}, y_{0l})$ и $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$; $\Phi_{kl}(z_k)$ — функции, голоморфные вне контуров L_{kl} . Для построения последних функций используем методы конформных отображений.

Учитывая параметрические уравнения (1.1) эллипсов L_l и известные равенства $\cos \theta = \frac{1}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right)$, $\sin \theta = -\frac{i}{2} \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right)$, $\sigma = e^{i\theta}$, на основе формул (1.2) и (1.3) получим связи между граничными значениями σ и $t_k = x + \mu_k y$. Заменяя эти граничные значения на их значения ζ_{kl} и z_k в областях, найдем конформные отображения внешностей единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллиптических контуров L_{kl} в виде

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right) \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l} \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2} \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}} \end{aligned}$$

Тогда функции $\Phi_{kl}(z_k)$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$), голоморфные вне контуров L_{kl} , включая бесконечно удаленную точку, после конформных отображений (1.9) будут голоморфными вне единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ и их можно разложить в ряды Лорана вида $\Phi_{kl}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}$ с неизвестными коэффициентами a_{kln} . Окончательно для комплексных потенциалов (1.5) получаем выражения

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + N_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k) \quad (1.10)$$

где $\varphi_{kln}(z_k) = 1/\zeta_{kl}^n$. Входящие в (1.10) неизвестные постоянные a_{kln} определяются из граничных условий на контурах отверстий. Для многосвязных областей этим условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме, получаемой из известных [5лех] их дифференцированием по дуге контура L_l и имеющей вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{ikl} \delta_{ks} \Phi'_k(t_k) = f'_{il}(t) \quad (i = \overline{1, 2}) \quad (1.11)$$

в котором $\delta_{ks} = dz_k/ds$;

$$g_{1kl} = 1, \quad g_{2kl} = -\mu_k, \quad f'_{1l}(t) = \mp Y_n, \quad f'_{2l}(t) = \mp X_n \quad (1.12)$$

в случае задания на контуре компонент внешних усилий X_n, Y_n ,

$$g_{1kl} = p_k, \quad g_{2kl} = q_k, \quad f'_{1l}(t) = du^*/ds, \quad f'_{2l}(t) = dv^*/ds$$

если на контуре заданы перемещения u^*, v^* ;

$$p_k = a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k, \quad q_k = a_{12}\mu_k + \frac{a_{22}}{\mu_k} - a_{26}$$

Верхние знаки в равенствах (1.12) соответствуют положительному обходу области, нижние – отрицательному обходу.

Если контуры отверстий полностью лежат внутри полуплоскости, то при удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе лучше всего использовать методы вычисления интегралов типа Коши. Тогда на основе (1.10) для производных комплексных потенциалов, точно удовлетворяющих граничным условиям на прямолинейной границе, получаются выражения [8, 10, 12]

$$\begin{aligned} \Phi'_k(z_k) = & \Gamma_k + N'_k(z_k) + F_k^{r+}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Phi'_{kln}(z_k) a_{kln} - \right. \\ & \left. - \bar{r}_{1k} \Phi_{kln}^+(z_k) \bar{a}_{kln} - \bar{r}_{2,k+1} \Phi_{k+1ln}^+(z_k) \bar{a}_{k+1ln} \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

в которых

$$F_k^{r+}(z_k) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{f_k^{r+}(t) dt}{t - z_k} - \bar{r}_{1k} N_k^{r+}(z_k) - \bar{r}_{2,k+1} N_{k+1}^{r+}(z_k) \quad (1.14)$$

$$f_k^{r+}(t) = \begin{cases} -\frac{X_n^+ + \mu_{k+1} Y_n^+}{\mu_k - \mu_{k+1}} & \text{на отрезке } [\alpha^+, \beta^+] \\ 0 & \text{вне отрезка } [\alpha^+, \beta^+] \end{cases} \quad (1.15)$$

X_n^+, Y_n^+ – проекции на оси основной системы координат действующих на отрезке $[\alpha^+, \beta^+]$ прямолинейной границы L^+ внешних усилий;

$$\begin{aligned} N'_k(z_k) &= \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \frac{A_{kl}}{z_k - z_{kl}} + \sum_{r=1}^R \frac{A_{kr}^0}{z_k - z_{kr}^0} \\ N_{k+j}^{r+}(z_k) &= \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \frac{\overline{A_{k+jl}}}{z_k + (\mu_{k+j} - \mu_k)h^+ - z_{kl}} + \sum_{r=1}^R \frac{\overline{A_{k+jr}^0}}{z_k + (\mu_{k+j} - \mu_k)h^+ - z_{kr}^0} \quad (j = 0, 1) \\ \bar{r}_{1k} &= \frac{\bar{\mu}_k - \mu_{k+1}}{\mu_k - \mu_{k+1}}, \quad \bar{r}_{2,k+1} = \frac{\bar{\mu}_{k+1} - \mu_{k+1}}{\mu_k - \mu_{k+1}} \end{aligned} \quad (1.16)$$

k – индекс, принимающий значения 1, 2, причем значение индекса $k + 1$ при $k = 2$ формально полагается равным 1;

$$\begin{aligned} \Phi'_{kln}(z_k) &= -\frac{n}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \\ \Phi_{k+jln}^{r+}(z_k) &= -\frac{n}{R_{kl} (\zeta_{k+jl}^+)^{n-1} ((\zeta_{k+jl}^+)^2 - \bar{m}_{kl})} \quad (j = 0, 1) \end{aligned}$$

ζ_{k+jl}^+ – переменные, определяемые из построенных по аналогии с (1.9) конформных отображений внешностей единичных окружностей $|\zeta_{k+jl}^+| \geq 1$ на внешности воображаемых контуров L_{k+jl}^+ верхней полуплоскости по формулам

$$z_k = -(\bar{\mu}_{k+j} - \zeta_{kl})h^+ + \bar{z}_{k+jl} + \bar{R}_{k+jl} \left(\zeta_{k+jl}^+ + \frac{\bar{m}_{k+jl}}{\zeta_{k+jl}^+} \right) \quad (j = 0, 1) \quad (1.17)$$

a_{kln} — неизвестные коэффициенты разложений функций в ряды Лорана, которые будем определять из граничных условий (1.11) на контурах отверстий ОМНК [9, 10]. Заметим, что соотношения (1.17) получаются на основе конформных отображений (1.9). Для их нахождения нужно соотношения (1.9) рассматривать на границе полуплоскости, взять от них сопряжения и выразить контурные значения переменных их значениями в областях, в частности, t_k и t_{k+1} переменной z_k [10].

Но методы вычисления интегралов типа Коши применимы, а следовательно, и получение вида функций (1.13) возможно, если контуры отверстий не имеют общих точек с прямолинейной границей.

Рассмотрим теперь случай, когда контуры отверстий могут пересекать прямолинейную границу. В этом случае некоторые из входящих в выражения (1.13) функций в точках прямолинейной границы будут иметь особенность, и вычислять соответствующие интегралы типа Коши не удастся. В этих случаях ОМНК можно использовать и при удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе. Но в таком, общем случае коэффициенты рядов (1.13) в функциях, голоморфных вне воображаемых отверстий верхних полуплоскостей не равны $\bar{a}_{kln}$, а их нужно определять из граничных условий. Обозначив их через $\bar{b}_{kln}$, функции (1.13) запишем в виде

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + N'_k(z_k) + F_k^{*+}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Phi'_{kln}(z_k) a_{kln} - \bar{r}_{1k} \Phi_{kln}^{*+}(z_k) \bar{b}_{kln} - \bar{r}_{2,k+1} \Phi_{k+1ln}^{*+}(z_k) \bar{b}_{k+1ln} \right] \quad (1.18)$$

Теперь для нахождения неизвестных коэффициентов a_{kln} , $\bar{b}_{kln}$ рядов Лорана ОМНК удовлетворим граничным условиям на всех контурах, включая и прямолинейную границу. Для этого на L_p ($p = \overline{1, \mathcal{L}}$) и на L^+ используем ОМНК [9, 10, 12–14]. Выберем на каждом из контуров L_p области S систему точек $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$ ($p = \overline{1, \mathcal{L}+1}$, $m = \overline{1, M_p}$) (при этом под $L_{\mathcal{L}+1}$ понимается контур L^+), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (1.18). Тогда для определения неизвестных постоянных a_{kln} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{k,s} [\Phi'_{kln}(t_{kpm}) a_{kln} - \bar{r}_{1k} \Phi_{kln}^{*+}(t_{kpm}) \bar{b}_{kln} - \bar{r}_{2,k+1} \Phi_{k+1ln}^{*+}(t_{kpm}) \bar{b}_{k+1ln}] = \\ = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \delta_{k,s} [\Gamma_k + N'_k(t_{kpm}) + F_k^{*+}(t_{kpm})] \quad (i = 1, 2; p = \overline{1, \mathcal{L}+1}; m = \overline{1, M_p}) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Систему (1.19) будем решать с использованием сингулярных разложений [15, 16]. После нахождения псевдорешения системы (1.19) постоянные a_{kln} и $\bar{b}_{kln}$, а следовательно, и комплексные потенциалы (1.18), будут известными и по ним можно найти в любой точке полуплоскости основные напряжения [5, 17]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k) \quad (1.20)$$

а по ним также нормальные и касательные напряжения σ_n , σ_s , τ_{ns} на произвольных площадках с нормалью n и касательной s . При этом, если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейный разрез (трещину или жесткое линейное включение), то в его концах производные комплексных потенциалов (1.18) и напряжения будут иметь син-

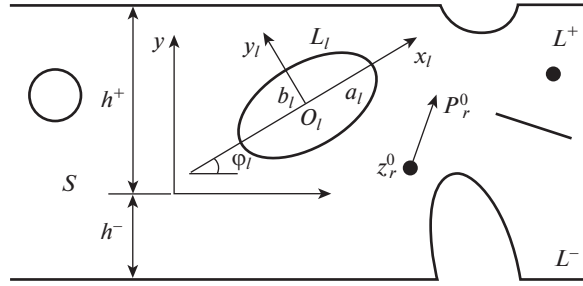


Рис. 2. Схема задачи для многосвязной полосы.

гулярность, и можно определить для этих концов коэффициенты интенсивности напряжений (КИН), используя известные формулы [10]

$$\begin{aligned}
 k_1^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 [\mu_k^2 \sin^2 \varphi_l + \cos^2 \varphi_l + 2\mu_k \sin \varphi_l \cos \varphi_l] M_{kl} \\
 k_2^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 [(1 - \mu_k^2) \cos \varphi_l \sin \varphi_l - \mu_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l)] M_{kl} \\
 M_{kl} &= -\frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln}
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Здесь верхний знак соответствует правому концу разреза в локальной системе координат $O_l x_l y_l$, нижний — к его левому концу.

2. Решение задачи для многосвязной полосы. Рассмотрим теперь анизотропную пластинку в виде полосы, занимающую многосвязную область S (рис. 2), ограниченную прямолинейными границами L^+ , L^- и контурами произвольно расположенных относительно друг друга и прямолинейных границ эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полуосями a_l , b_l . Отнесем полосу к прямоугольной системе координат Oxy с началом в произвольной точке полосы на расстояниях h^+ , h^- от прямолинейных границ L^+ , L^- и направлением оси Ox вдоль направления прямолинейных границ. Как и выше, выберем локальные системы координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов L_l и направлениями осей $O_l x_l$ вдоль полуосей эллипсов a_l . Как и в предыдущем случае, внешние силы действуют на бесконечности, на контурах отверстий, во внутренних точках, а также на конечных отрезках $[\alpha^+, \beta^+]$, $[\alpha^-, \beta^-]$ соответствующих прямолинейных границ L^+ , L^- .

Поступая таким же образом, как это было сделано при решении задачи для многосвязной полуплоскости, в случае полосы с эллиптическими отверстиями для комплексных потенциалов получаем выражения

$$\begin{aligned}
 \Phi'_k(z_k) &= \Gamma_k + N'_k(z_k) + F_k^{r+}(z_k) + F_k^{r-}(z_k) + \\
 &+ \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Phi'_{kln}(z_k) a_{kln} - \bar{r}_{lk} \Phi_{kln}^+(z_k) \bar{b}_{kln} - \bar{r}_{2,k+1} \Phi_{k+1ln}^+(z_k) \bar{b}_{k+1ln} - \right. \\
 &\quad \left. - \bar{r}_{lk} \Phi_{kln}^-(z_k) \bar{c}_{kln} - \bar{r}_{2,k+1} \Phi_{k+1ln}^-(z_k) \bar{c}_{k+1ln} \right]
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где Γ_k , $N'_k(z_k)$, $F_k^+(z_k)$ – постоянные и функции, определенные на основе формул (1.6), (1.14), (1.16);

$$F_k^-(z_k) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{f_k^-(t)dt}{t - z_k} - \bar{r}_{1k} N_k^-(z_k) - \bar{r}_{2k+1} N_{k+1}^-(z_k)$$

$$N_{k+j}^-(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \frac{\overline{A_{k+jl}}}{z_k + (\mu_{k+j} - \mu_k)h^- - z_{kl}} + \sum_{r=1}^R \frac{\overline{A_{k+jr}^0}}{z_k + (\mu_{k+j} - \mu_k)h^- - z_{kr}^0} \quad (j = 0, 1)$$

$$\Phi_{k+jln}^-(z_k) = -\frac{n}{R_{kl}(\zeta_{k+jl}^-)^{n-1}((\zeta_{k+jl}^+)^2 - \bar{m}_{kl})} \quad (j = 0, 1)$$

ζ_{k+jl}^- – переменные, определяемые по аналогии с величинами (1.17) из конформных отображений внешностей единичных окружностей $|\zeta_{k+jl}^-| \geq 1$ на внешности контуров L_{k+jl}^- нижней полуплоскости с границей L_k^- по формулам [10]

$$z_k = -(\bar{\mu}_{k+j} - \mu_k)h^- + \bar{z}_{k+jl} + \bar{R}_{k+jl} \left(\zeta_{k+jl}^- + \frac{\bar{m}_{k+jl}}{\zeta_{k+jl}^-} \right) \quad (j = 0, 1)$$

a_{kln} , $\bar{b}_{kln}$, $\bar{c}_{kln}$ – неизвестные коэффициенты разложений функций в ряды Лорана, которые определим из граничных условий (1.11) ОМНК [9, 10, 12–14], выбрав “коллокационные точки” на всех конурах, включая и прямолинейные границы полосы. Получаем следующую систему:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{k,s} \left[\Phi_{kln}^-(t_{kpm}) a_{kln} - \bar{r}_{1k} \Phi_{kln}^+(t_{kpm}) \bar{b}_{kln} - \right. \\ \left. - \bar{r}_{2,k+1} \Phi_{k+1ln}^+(z_k) \bar{b}_{k+1ln} - \bar{r}_{1k} \Phi_{kln}^-(z_k) \bar{c}_{kln} - \bar{r}_{2,k+1} \Phi_{k+1ln}^-(z_k) \bar{c}_{k+1ln} \right] = \\ = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \delta_{k,s} [\Gamma_k + N'_k(t_{kpm}) + F_k^+(t_{kpm}) + F_k^-(t_{kpm})] \\ (i = 1, 2; p = 1, \mathcal{L} + 2; m = 1, M_p)$$

При этом под $L_{\mathcal{L}+1}$ и $L_{\mathcal{L}+2}$ понимаются прямолинейные границы L^+ и L^- и для $f_k^-(t)$ по аналогии с выражением (1.15) выражение

$$f_k^-(t) = \begin{cases} -\frac{X_n^- + \mu_{k+1} Y_n^-}{\mu_k - \mu_{k+1}} & \text{на отрезке } [\alpha^-, \beta^-] \\ 0 & \text{вне отрезка } [\alpha^-, \beta^-] \end{cases}$$

X_n^- , Y_n^- – проекции на оси основной системы координат действующих на отрезке $[\alpha^-, \beta^-]$ прямолинейной границы L^- внешних усилий.

Система (2.2), как и (1.19), решается с использованием сингулярных разложений [15, 16] и после ее решения напряжения и КИН находятся по формулам (1.20), (1.21).

Как частные случаи из приведенного решения следуют решения задач для многосвязных изотропных полуплоскости и полосы. В последнем случае при численной реализации алгоритмов один из коэффициентов деформации a_{ij} нужно брать несколько отличным от реального, например, a_{11} и a_{22} брать отличающимися друг от друга 5–6-й

значашей цифрой в конце. В этом случае корни характеристического уравнения (1.4) будут близки к мнимой единице i , но несколько отличаться друг от друга (слабая анизотропия) и общая программа позволит получать значения напряжений и деформаций, практически совпадающие с данными, получаемыми при решении задачи теории упругости изотропного тела с использованием комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили [17].

3. Решение некоторых частных задач. Приведенный подход решения задачи с помощью ОМНК был использован для решения различных частных задач. Исследования проводились для полуплоскости и полосы из следующих материалов:

– изотропного материала алюминий (материал М1) с техническими постоянными [18]

$$E_1 = 71000 \text{ МПа}, \quad E_2 = 71000.5 \text{ МПа}, \quad G_{12} = 28400 \text{ МПа}, \quad \nu_{21} = 0.25$$

– сильно анизотропного материала (“степень анизотропии” материала характеризуется степенью отличия отношения a_{11}/a_{22} от единицы) углепластик HMS/DX209 [19] с жесткими волокнами вдоль оси Ox (материал М2) с постоянными

$$E_1 = 188800 \text{ МПа}, \quad E_2 = 6000 \text{ МПа}, \quad G_{12} = 2700 \text{ МПа}, \quad \nu_{21} = 0.3$$

– этого же материала углепластик HMS/DX209 [19] с жесткими волокнами вдоль оси Oy (материал М22) с постоянными

$$E_1 = 6000 \text{ МПа}, \quad E_2 = 188800 \text{ МПа}, \quad G_{12} = 2700 \text{ МПа}, \quad \nu_{21} = 0.0095$$

Заметим, что по техническим постоянным коэффициенты деформации вычисляются по известным формулам

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_1} = -\frac{\nu_{12}}{E_2}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

Также отметим, что для изотропного материала М1 постоянная E_2 принята несколько отличной от истинного значения, чтобы изотропную пластинку рассматривать как анизотропную и использовать приведенное выше решение, иначе при $E_2 = E_1$ корни μ_k характеристического уравнения (1.4) были бы равны i и это не давало бы возможность проводить ряд вычислений, например, определители систем линейных уравнений (1.6)–(1.8) были бы равны нулю.

Численные исследования были проведены для растяжения полуплоскости и полосы усилиями на бесконечности и для случая когда по отрезку верхней линии действует постоянное нормальное давление. Для этих случаев в приведенных выше формулах нужно положить

– в случае растяжения

$$F_k^{r+}(z_k) = F_k^{r-}(z_k) = 0, \quad N_k'(z_k) = N_{k+j}^{r+}(z_k) = 0 \quad (j = 0, 1)$$

Γ_k – постоянные, вычисляемые по формулам (1.6);

– в случае давления на отрезке $[\alpha^+, \beta^+] = [-a_1, a_1]$

$$\Gamma_k = F_k^{r-}(z_k) = N_k'(z_k) = N_{k+j}^{r+}(z_k) = 0 \quad (j = 0, 1)$$

$$F_k^{r+}(z_k) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\mu_{k+1}q}{\mu_k - \mu_{k+1}} \int_{-a_1 + \mu_k h^+}^{a_1 + \mu_k h^+} \frac{dt}{t - z_k} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\mu_{k+1}q}{\mu_k - \mu_{k+1}} \ln \frac{z_k - a_1 - \mu_k h^+}{z_k + a_1 - \mu_k h^+}$$

При проведении численных исследований количество членов в бесконечных рядах (1.18) и (2.1) для каждого из контуров L_p ($p = \overline{1, \mathcal{L} + 2}$) и “коллокационных точек” M_p на этом контуре, для которых составлялись уравнения (1.19) и (2.2), увеличивалось до

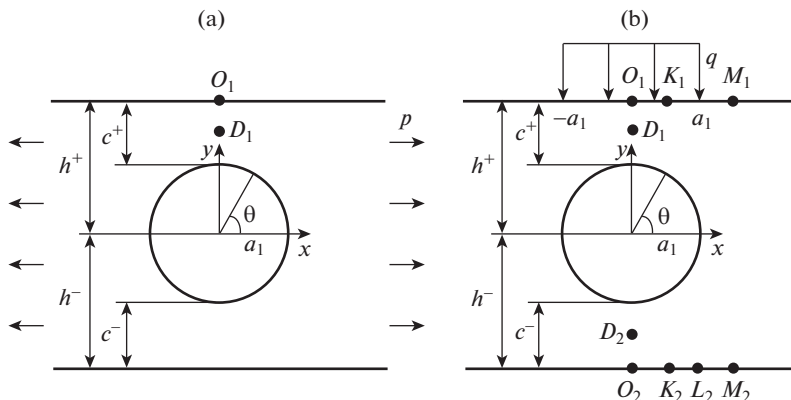


Рис. 3. Схема задачи для полосы с круговым отверстием.

тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (пока значения напряжений на площадках, касательных к контурам, не были менее 10^{-3}). В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указанных рядах оставлять от 10 до 150 членов, и на каждом из контуров брать от 50 до 500 “коллокационных точек”. При выборе “коллокационных точек” для каждого контура отверстия L_p ($p = 1, \mathcal{L}$) отрезок $[0, 2\pi]$ изменения параметра θ параметрического задания (1.1) делился на количество M_p для данного контура и “коллокационными точками” выбирались середины подотрезков, т.е. точки располагались “равномерно” по контуру отверстия. На прямолинейных границах L^+, L^- “коллокационные точки” выбирались на отрезках, где наблюдалось значительное влияние отверстий на значения напряжений, с равномерно удаленным друг от друга расположением “коллокационных точек”. Эти отрезки были длины 5 диаметров отверстий. Ниже описаны некоторые из полученных результатов для полосы с центральным круговым отверстием или отверстием и трещиной, в том числе выходящей на контур отверстия или на прямолинейную границу.

В табл. 1, 2 и 3 для полосы с одним центральным круговым отверстием радиуса a_1 ($h^- = h^+, c^- = c^+, b_1 = a_1$) (рис. 3) в зависимости от c^+/a_1 , где c^+ – ширина перемычек, и центрального угла отверстия θ , отсчитываемого от направления оси Ox (направления прямолинейных границ) против часовой стрелки, с точностью до интенсивности приложенной нагрузки приведены значения нормальных напряжений σ_z вблизи контура отверстия на площадках, перпендикулярных к нему, и напряжений σ_x в некоторых характерных точках полосы для случаев растяжения полосы усилиями p (рис. 3,a) и равномерного давления интенсивности q по отрезку $[-a_1; a_1]$ верхней прямолинейной границы полосы (рис. 3,b). При этом в качестве характерных рассматривались точки $D_1(0; a_1 + c^+/2)$, $O_1(0; h^+)$, $K_1(a_1/2; h^+)$, $M_1(3a_1/2; h^+)$, $D_2(0; -a_1 - c^+/2)$, $O_2(0; -h^-)$, $K_2(a_1/2; -h^-)$, $M_2(3a_1/2; -h^-)$.

Из данных табл. 1–3 следует, что при растяжении полосы с центральным круговым отверстием взаимовлияние отверстия и прямолинейных границ значительно, начиная с ширины перемычек, равных радиусу отверстия. При этом с уменьшением ширины полосы значения напряжений около контура отверстия резко возрастают. Если шири-

Таблица 1. Значения напряжений σ_s/p по контуру отверстия и σ_x/p в некоторых точках полосы при растяжении усилиями p

Материал	c/a	θ , рад							Точки	
		0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$	D_1	O_1
		σ_s/p							σ_x/p	
M1	5	−1.08	−0.80	−0.04	1.00	2.04	2.81	3.09	1.07	0.96
	2	−1.29	−1.00	−0.20	0.95	2.15	3.08	3.43	1.30	0.84
	1	−1.57	−1.30	−0.52	0.72	2.25	3.65	4.23	1.76	0.69
	0.5	−1.86	−1.67	−1.08	0.09	2.10	4.65	5.96	2.66	0.53
M2	5	−0.18	−0.15	−0.06	0.08	0.38	1.63	9.76	1.02	0.94
	2	−0.19	−0.16	−0.07	0.06	0.35	1.56	9.44	1.10	0.78
	1	−0.22	−0.19	−0.11	0.03	0.33	1.64	10.17	1.39	0.65
	0.5	−0.23	−0.20	−0.14	−0.04	0.23	1.54	10.32	1.73	0.42
M22	5	−7.81	−0.35	0.93	1.47	1.98	2.48	2.71	1.09	0.90
	2	−10.98	−1.03	0.66	1.34	2.04	2.76	3.10	1.34	0.83
	1	−14.11	−1.85	0.17	1.04	2.09	3.29	3.89	1.79	0.79
	0.5	−17.22	−2.90	−0.66	0.35	1.94	4.23	5.54	2.63	0.75

Таблица 2. Значения напряжений σ_s/q по контуру отверстия в полосе при действии на границе давления интенсивности q

θ , рад.	Значения c/a								
	5	1	0.5	5	1	0.5	5	1	0.5
	Материал M1			Материал M2			Материал M22		
$-\pi/2$	0.42	2.21	5.16	7.41	−13.83	−11.32	0.15	1.09	2.72
$-5\pi/12$	0.36	1.82	3.84	1.23	−1.72	−1.32	0.14	0.87	1.94
$-\pi/3$	0.20	0.92	1.32	0.25	0.09	0.17	0.11	0.45	0.60
$-\pi/4$	−0.01	−0.01	−0.57	−0.02	0.38	0.42	0.08	0.10	−0.28
$-\pi/6$	−0.22	−0.68	−1.47	−0.19	0.24	0.26	0.01	−0.16	−0.76
$-\pi/12$	−0.38	−1.09	−1.75	−0.36	−0.28	−0.34	−0.43	−1.08	−2.01
0	−0.48	−1.36	−1.86	−0.49	−1.08	−1.32	−4.95	−11.76	−15.89
$\pi/12$	−0.50	−1.60	−2.13	−0.51	−1.77	−2.25	−1.30	−3.96	−5.65
$\pi/6$	−0.42	−1.80	−2.65	−0.43	−2.03	−2.80	−0.46	−2.00	−3.39
$\pi/4$	−0.28	−1.71	−2.98	−0.25	−1.80	−2.87	−0.17	−1.28	−2.70
$\pi/3$	−0.09	−1.10	−2.48	0.15	−0.56	−1.87	0.03	−0.58	−1.74
$5\pi/12$	0.08	−0.24	−1.47	1.78	5.76	4.89	0.19	0.23	−0.11
$\pi/2$	0.15	0.17	−0.94	12.36	47.97	52.34	0.26	0.64	0.90

Таблица 3. Значения напряжений σ_x/q в некоторых точках полосы при действии на границе давления интенсивности q

θ , рад.	Значения c/a								
	10	1	0.5	10	1	0.5	10	1	0.5
	Материал М1			Материал М2			Материал М22		
D_1	-0.40	-1.57	-3.20	2.89	9.07	7.77	-0.06	-0.64	-1.46
O_1	-1.72	-3.21	-5.57	-1.24	0.43	-8.15	-0.45	-2.01	-3.86
K_1	-1.71	-2.85	-3.99	-1.23	2.09	-1.95	-0.41	-1.35	-1.78
M_1	-0.70	-0.90	-1.07	4.44	11.49	11.56	-0.10	-0.22	-0.26
D_2	0.46	1.44	2.97	-1.04	-5.46	-3.37	0.11	0.73	1.52
O_2	0.83	1.40	1.80	-2.36	-6.19	-2.81	0.22	0.66	0.80
K_2	0.82	1.62	2.96	-2.36	-6.33	-3.35	0.24	0.83	1.57
L_2	0.82	1.89	3.61	-2.35	-6.31	-3.23	0.26	1.21	2.21
M_2	0.82	1.88	3.09	-2.35	-6.16	-2.78	0.26	0.85	1.22

на одной из перемычек больше диаметра отверстия ($c^+/a_l \geq 2$ либо $c^-/a_l \geq 2$), то взаимовлияние отверстия и соответствующей прямолинейной границы незначительно, им можно пренебречь и рассматривать полосу как полуплоскость с отверстием [12], а если ширина обеих перемычек превышает диаметр отверстия, то полосу можно рассматривать как бесконечную пластинку с отверстием. В случае сильно анизотропной полосы концентрация напряжений около контура отверстия значительно выше, чем в случае изотропной и возникает в различных зонах, в зависимости от направления жестких (мягких) волокон материала — для полосы из М2 наблюдаются большие растягивающие напряжения, для полосы из М22 — большие сжимающие напряжения, причем она возникает в разных зонах.

В случае давления на прямолинейной границе взаимовлияние прямолинейных границ и контура отверстия для материалов М1 и М22 такое же, как при растяжении полосы, а для М2 это влияние начинается гораздо раньше и распределение напряжений имеет свои особенности. При этом значения напряжений особенно велики для сильно анизотропного материала полосы. При этом в точках перемычек напряжения всегда отрицательны (сжимающие), кроме небольшой окрестности точек контура отверстия, где они положительны (узкая полоса растяжения вблизи контура отверстия). В случае полуплоскости из сильно анизотропного материала М22 с мягкими волокнами вдоль направления границы полуплоскости весьма большие сжимающие напряжения наблюдаются и вблизи горизонтального диаметра отверстия (при $\theta = 0$ рад. и $\theta = \pi$ рад.). В противоположной от перемычки зоне значения напряжений значительно ниже, меньше и влияние анизотропии материала полосы.

Исследования распределения напряжений проводились и для полосы с эллиптическим отверстием, с помощью которых, в частности, установлено, что в случае эллиптического отверстия с большой полуосью a_l и малой полуосью b_l при уменьшении отношения b_l/a_l значения нормальных напряжений σ_s в окрестности концов большой оси эллипса бесконечно растут и при $b_l/a_l \leq 10^{-3}$ эллипс можно рассматривать как трещину и для ее концов по формулам (1.21) вычислять КИН. Исследования проводи-

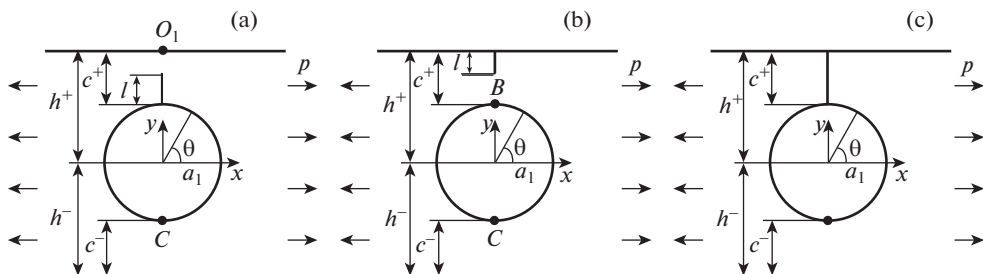
Таблица 4. Значения некоторых величин для полосы с круговым отверстием и краевой трещиной в зависимости от l/a_1

Величина	Значения l/a_1				
	0.1	0.3	0.5	0.7	0.8
Трещина из контура отверстия (рис. 4,а)					
КИН k_1	1.22	1.67	1.93	2.33	2.78
σ_x/p в точке O_1	0.56	0.19	-0.08	-0.21	-0.20
σ_x/p в точке C	4.24	4.50	4.84	5.29	5.61
Трещина из прямолинейной границы (рис. 4,б)					
КИН k_1	0.28	0.74	1.29	2.13	2.71
σ_x/p в точке B	4.15	4.07	3.96	3.84	3.69
σ_x/p в точке C	4.17	4.17	4.18	4.18	4.20

лись и для случаев, когда контуры отверстий и трещин в полосе пересекались друг с другом, образуя отверстия сложной конфигурации, а также пересекали прямолинейные границы полосы. Опишем лишь некоторые из полученных результатов.

В табл. 4 для растяжения полосы с центральным круговым отверстием радиуса a_1 ($h^- = h^+$, $c^- = c^+$, $b_1 = a_1$) из материала М1 и выходящей на контур отверстия или на прямолинейную границу краевой трещиной в верхней перемычке длины l , перпендикулярной прямолинейной границе (рис. 4), при ширине перемычки $c^+ = a_1$, в зависимости от l/a_1 приведены значения напряжений и КИН k_1 для конца трещины, а на рис. 5 изображены графики распределения напряжений σ_s/p по контуру отверстия в полосе с круговым отверстием (сплошная линия), с круговым отверстием и трещиной длины $l = a_1/2$ из контура отверстия (рис. 4,а) (штриховая линия), с круговым отверстием и трещиной прямолинейной границы (штрихпунктирная линия), с круговым отверстием и трещиной длины $l = a_1/2$ из прямолинейной границы (рис. 4,б) (штрихпунктирная линия), круговым отверстием и щелью длины $l = a_1$ между верхней границей полосы и контуром отверстия (рис. 4,с) (пунктирная линия).

Из данных табл. 4 и рис. 5 следует, что с увеличением длины краевой трещины из контура отверстия или границы полосы значения напряжений около контура отвер-

**Рис. 4.** Схема задачи для полосы с круговым отверстием и трещиной.

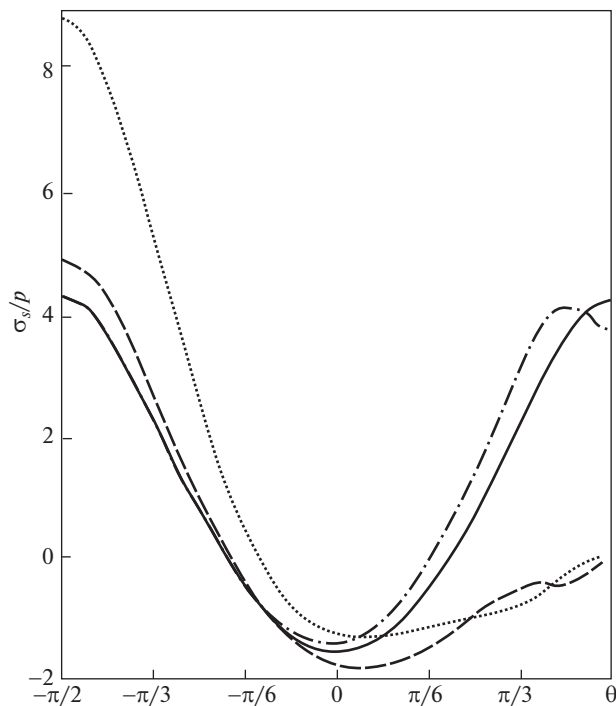


Рис. 5. Графики распределения напряжений σ_s/p по контуру отверстия в полосе с круговым отверстием (сплошная линия), с круговым отверстием и трещиной длины $l = a_1/2$ из контура отверстия (рис. 4,a) (штриховая линия), с круговым отверстием и трещиной прямолинейной границы (штрихпунктирная линия), с круговым отверстием и трещиной длины $l = a_1/2$ из прямолинейной границы (рис. 4,b) (штрихпунктирная линия), круговым отверстием и щелью длины $l = a_1$ между верхней границей полосы и контуром отверстия (рис. 4,c) (пунктирная линия).

ствия и КИН для конца трещины растут. Наиболее высокая концентрация напряжений около контура отверстия наблюдается в случае сквозной щели между контуром отверстия и границей полосы в области перемычки, расположенной противоположно щели. В этом случае и в случае, когда трещина выходит на контур отверстия, значения напряжений около контура отверстия в перемычке с этими дефектами незначительны.

Заключение. Таким образом, с использованием комплексных потенциалов теории упругости анизотропного тела и удовлетворением граничным условиям на прямолинейной границе и на контурах отверстий и трещин обобщенным методом наименьших квадратов решение задач теории упругости для многосвязных анизотропных полуплоскости и полосы с отверстиями и трещинами при действии произвольных внешних сил и произвольном расположении отверстий и трещин, в том числе в случае их взаимопересечений, приведены к переопределенным системам линейных алгебраических уравнений, решаемых методом сингулярного разложения. Описаны результаты численных исследований для полосы с круговым отверстием при ее растяжении или действии равномерного давления по отрезку прямолинейной границы, а также для растяжения полосы с круговым отверстием и трещиной в перемычке, в том числе выходящей на границу полосы или на контур отверстия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Structural Nanocomposites: Perspectives for Future Applications / Ed. by *J. Njuguna*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. VIII, 269 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-40322-4>.
2. Mechanics of Anisotropic Materials / Ed. by *J.J. Skrzypek, A.W. Ganczarski*. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2015. XXIII, 311 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-17160-9>
3. *Halpin J.C., Finlayson K.M.* Mechanics of Anisotropic Materials. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2017. XIII, 227 p.
<https://doi.org/10.1201/9780203742235>.
4. Advances in Machining of Composite Materials: Conventional and Non-conventional Processes / Ed. by *I. Shyha, D. Huo*. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2021. VI, 552 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-71438-3>
5. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
6. *Космодамианский А.С.* Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. К., Донецк: Вища шк., 1976. 200 с.
7. *Космодамианский А.С.* Упругое равновесие анизотропной полуплоскости, ослабленной эллиптическим отверстием // Тр. Тбилис. политех. ин-та. 1963. Т. 8 (93). С. 179–183.
8. *Калоеров С.А.* Напряженное состояние анизотропной полуплоскости с конечным числом эллиптических отверстий // Прикладная механика. 1966. Т. 2. № 10. С. 75–82.
9. *Калоеров С.А., Паришкова О.А.* Термовязкоупругое многосвязной анизотропной пластинки // Прикладная механика. 2012. Т. 48. № 3. С. 103–116.
10. *Калоеров С.А.* Общие решения задач для многосвязных анизотропных полуплоскости и полосы // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. 2018. № 2. С. 22–35.
11. *Калоеров С.А.* Комплексные потенциалы плоской задачи теории упругости для многосвязного тела с трещинами // Теорет. прикл. механика. 1990. Вып. 21. С. 24–34.
12. *Калоеров С.А., Глушанков Е.С., Мироненко А.Б.* Общее решение задачи теории упругости для многосвязной полуплоскости и его приложение к решению частных задач // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. 2022. № 1. С. 41–52.
13. *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977. 304 с.
14. *Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B.* Computer methods for mathematical computations. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1977. 259 p. = *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.
15. *Drmač Z., Veselič K.* New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. I // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2008. V. 29. № 4. P. 1322–1342.
<https://doi.org/10.1137/050639193>
16. *Drmač Z., Veselič K.* New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. II // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2008. V. 29. № 4. P. 1343–1362.
<https://doi.org/10.1137/05063920X>
17. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
18. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 888 с.
19. *Васильев В.В., Протасов В.Д., Болотин В.В. и др.* Композиционные материалы: Справочник / Под общ. ред. *В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского*. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.

УДК 534.1, 539.3

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА С ВИБРИРУЮЩИМИ ОПОРАМИ

© 2023 г. И. М. Утяшев^{a,*}, М. М. Шакирьянов^{a,**}

^aИнститут механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия

*e-mail: utyashev@mail.ru

**e-mail: shakmar9@mail.ru

Поступила в редакцию 30.03.2022 г.

После доработки 26.07.2022 г.

Принята к публикации 31.07.2022 г.

Исследованы пространственные колебания участка трубопровода с заключенной в нем жидкостью при поступательных вибрационных движениях опор. Колебания обеих опор происходят с равными амплитудами, частотами и фазами. Деформации трубы, связанные с выходом ее оси из плоскости изгиба, предполагаются малыми. Учитываются взаимодействия внутреннего постоянного давления и изменений кривизны осевой линии, продольной и окружной деформаций трубы. Ее изгибно-вращательные колебания описываются системой двух нелинейных дифференциальных уравнений. Применением метода Бубнова–Галеркина эта система сводится к задаче Коши, которая далее решается численно методом Рунге–Кутты. В случае малых изгибных и угловых движений трубы дается сравнение аналитического и численного решений. Дан анализ периодических и непериодических колебаний стальной, титановой и композитной труб, для чего построены, в частности, спектры частот и отобращения Пуанкаре.

Ключевые слова: трубопровод, пространственные колебания, внутреннее давление, вибрации опор, линейные и нелинейные колебания

DOI: 10.31857/S057232992260058X, EDN: JLLDYA

Введение. Композитные и металлические трубопроводы широко применяются в нефтегазовой промышленности, энергетике, авиационной и ракетно-космической технике для транспортировки жидких и газообразных продуктов. Их транспортировка осуществляется работой насосных станций, которые создают в трубопроводе постоянное и переменное давление. Колебательные движения при этом может совершать также основание, с которым связаны опоры трубопровода. В результате указанных воздействий трубопровод может совершать пространственные колебания.

Теоретическому и экспериментальному изучению динамического поведения трубопроводных систем, транспортирующих жидкость или газ, посвящено большое количество работ. Обзор литературы по указанной обширной проблеме можно найти, например, в [1–5]. В данной работе ограничимся кратким обзором исследований по пространственным колебаниям трубопровода с транспортируемым продуктом. Эта часть динамики трубопроводных систем относительно мало изучена. Так как влияние внутреннего давления на колебательные движения трубы имеет место как в пространстве, так и в одной плоскости, то в обзор включены также исследования, посвященные изучению плоских изгибных колебаний.

Трехмерная нелинейная динамика консольных труб, транспортирующих жидкость, исследовалась в [6–9]. Экспериментальное изучение влияния внутреннего давления на частоту свободных колебаний приведено в [10]. Показано качественное и количественное согласие результатов теории с экспериментальными данными. Поперечные колебания трубы в вертикальной плоскости под действием бегущих волн давления рассмотрены в [11]. Исследование изгибных колебаний композитного (трехслойного) трубопровода для транспортировки газа приведено в [12]. Сейсмические колебания трубопровода с жидкостью в грунтовой среде изучены в [13, 14]. Влияние пульсаций давления в транспортируемой жидкости на трехмерные нелинейные колебания гибкой трубы исследованы в [15]. Пространственные колебания трубопровода в сплошной среде при действии внутреннего давления, изменяющегося по гармоническому закону, рассмотрены в [16, 17]. Действие внутреннего ударного давления на пространственные движения трубы со смещающейся опорой изучено в [18–20]. В [21] проведено экспериментальное исследование пространственного распределения энергии вибрации при взрыве газопровода. Динамика трубопровода, транспортирующего жидкость, на вращающемся основании рассмотрена в [22]. Влияние нелинейных колебаний на усталостную прочность многослойного композиционного трубопровода с жидкостью исследовалось в [23]. Демпфирование изгибных колебаний труб при транспортировке жидкости с помощью нелинейных поглотителей кручения на опорах изучено в [24]. В [25] определены положения динамического равновесия изогнутого трубопровода с вибрирующими опорами. Кроме указанных работ большое количество исследований посвящено изучению свободных колебаний и устойчивости пролета трубопровода с движущейся жидкостью. К последним работам можно отнести статьи [26–28].

В настоящей работе исследуются пространственные колебания трубопровода при горизонтальных вибрационных движениях его опор.

1. Постановка задачи. Рассматриваются пространственные колебания пролета трубопровода между опорами и заключенной в нем жидкости под действием подвижного основания. Трубопровод имеет сферическое шарнирное крепление к опорам (рис. 1). Левая опора неподвижна относительно поступательно движущегося основания, а правая опора, связанная с ним линейно-упругими элементами, может скользить параллельно оси x . Начало правой системы осей координат $x\eta z$ (рис. 1, а) совмещено с левой опорой. Труба, изогнутая собственным весом, весом и постоянным давлением заключенной в ней жидкости, находится в покое. В момент времени t основание начинает совершать горизонтальные движения $s = s(t)$, направленные перпендикулярно оси x . Учитываются взаимодействия внутреннего давления и изменений кривизны осевой линии, продольной и окружной деформаций трубы. Деформации трубопровода, связанные с выходом его оси из плоскости изгиба, предполагаются малыми. Поэтому исследование проводится по модели изгибно-вращательных движений трубопровода. Согласно этой модели пространственные движения трубы рассматриваются как совокупность относительных изгибных колебаний $W(x, t)$ в одной плоскости, переносных вращений $\theta(t)$ этой плоскости вокруг оси x и переносных поступательных перемещений $s(t)$ подвижного основания. Длина, внутренний радиус, толщина стенки и плотность материала трубы соответственно равны L , R , h и ρ . Плотность несжимаемой жидкости – ρ_0 . Скоростной напор $\rho_0 V^2/2$ также считается малым по сравнению с давлением p_0 , где V – скорость движения среды в трубе.

На рис. 1, а символ W' представляет проекцию прогиба ($W' = W \cos \theta$) элемента трубы длиной dx на координатную плоскость xz . Ускорения элемента массой $dm = m_1 dx$ и силы, действующие на него изображены на рис. 1, б, в. Здесь $\mathbf{g}$, $\mathbf{a}_v$, $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_t$ и $\mathbf{a}_n$, $m_1 = \pi \{ \rho_0 R^2 + \rho [(R + h)^2 - R^2] \}$ – гравитационное, вибрационное, кориолисово, относительное, переносные касательное и нормальное ускорения, масса элемента единичной

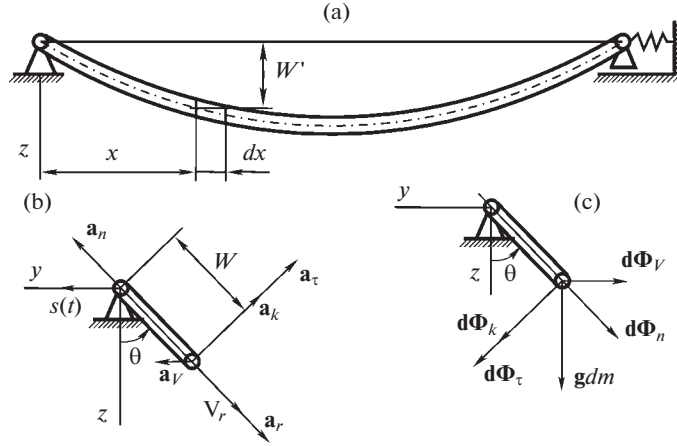


Рис. 1. Расчетная схема: виды на трубопровод соответственно с положительного конца оси y (а) и со стороны правой опоры (б, в).

длины; gdm — сила тяжести, $d\Phi_V$, $d\Phi_r$, $d\Phi_\tau$, $d\Phi_n$ и $d\Phi_k$ — вибрационная, относительная, касательная, нормальная и кориолисова силы инерции.

Выражения для ускорений выделенного элемента, а также сил, приложенных к нему, при неподвижном основании следующие [16]:

$$\begin{aligned} a_r = \dot{W}, \quad a_\tau = W\ddot{\theta}, \quad a_n = W\dot{\theta}^2, \quad a_k = 2\dot{\theta}\dot{W}, \quad d\Phi_V = a_V dm \\ d\Phi_r = a_r dm, \quad d\Phi_\tau = a_\tau dm, \quad d\Phi_n = a_n dm, \quad d\Phi_k = a_k dm \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь и далее точка над буквой обозначает производную по времени.

Дифференциальное уравнение вращательного движения трубопровода относительно оси x имеет вид

$$\begin{aligned} - \int_{(m)} W \sin \theta g dm - M_u - \int_{(m)} W d\Phi_\tau - \int_{(m)} W d\Phi_c + \int_{(m)} W \sin \theta d\Phi_V = 0 \\ M_u = J_p \ddot{\theta}, \quad J_p = 2\rho LJ, \quad 4J = \pi[(R+h)^4 - R^4] \end{aligned} \quad (1.2)$$

Дифференциальное уравнение изгибных колебаний, учитывающее взаимодействия внутреннего давления и изменений кривизны осевой линии, продольной и окружной деформаций трубы, следующее [18]

$$\begin{aligned} \ddot{W} dm = -EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} dx - \left[Fp_0(1 - \chi) - \alpha \int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx + g \cos \theta dm + \\ + d\Phi_n + d\Phi_V \cos \theta, \quad F = \pi R^2, \quad \chi = \frac{2\nu}{1 + \lambda}, \quad \lambda = \frac{Eh}{CL}, \quad \alpha = \frac{\pi EhR}{(1 + \lambda)L} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь E — модуль Юнга материала трубы, C — коэффициент продольной упругости единичной дуги элементов крепления скользящей опоры к основанию.

Горизонтальное перемещение основания задается в виде

$$s = s_0 \sin t, \quad \Omega = 2\pi f \quad (1.4)$$

где s_0 , f — амплитуда и частота колебаний основания.

Функция прогиба, удовлетворяющая условиям шарнирного крепления трубопровода к опорам, принимается по первой гармонике

$$W = [W_0 + w(t)] \sin \beta x, \quad \beta = \pi/L \quad (1.5)$$

Здесь W_0 и $w(t)$ — амплитуды статической и динамической составляющих прогиба средней точки пролета. Первая часть прогиба зависит от сил гравитации и внутреннего давления в трубе, а вторая — от амплитуды и частоты колебаний опор.

Подставляя (1.4), (1.5) в (1.2), (1.3) и применяя в последнем вариационный принцип Бубнова–Галеркина, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} \left[(W_0 + w)^2 + \frac{4\rho J}{m_1} \right] + 2 \left[\frac{2}{\pi} (g \sin \theta + s_0 \Omega^2 \sin \Omega t \cos \theta) + \dot{\theta} \dot{w} \right] (W_0 + w) = 0 \\ \ddot{w} + \frac{\beta^4 EJ}{m_1} (W_0 + w) = \frac{4}{\pi} (g \cos \theta - s_0 \Omega^2 \sin \Omega t \sin \theta) + (W_0 + w) \dot{\theta}^2 + \\ + \frac{\beta^2}{m_1} \left[F(1 - \chi) p_0 - \frac{\alpha \beta^2 L}{2} (W_0 + w)^2 \right] (W_0 + w) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Начальные условия для системы дифференциальных уравнений (1.6) нулевые

$$\theta = 0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad w = 0, \quad \dot{w} = 0 \quad (t=0) \quad (1.7)$$

Полагая во втором уравнении (1.6) $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $w = 0$, $\dot{w} = 0$, $s_0 = 0$, получаем уравнение для определения статической составляющей прогиба

$$W_0^3 + \frac{2F(p_* - p_0)(1 - \chi)}{\alpha \beta^2 L} W_0 - \frac{8m_1 g}{\pi \alpha \beta^4 L} = 0, \quad p_* = \frac{\beta^2 EJ}{F(1 - \chi)} \quad (1.8)$$

Значение внутреннего давления p_* является критическим. При $p_* = p_0$ решение линейного уравнения неограниченно возрастает. Для решения кубического уравнения (1.8) можно воспользоваться формулами Кардано или численным методом. При преобладающем влиянии на изгиб трубы сил внутреннего давления над силами гравитации возможно также применение приближенного аналитического способа [25]. В настоящей работе решение (1.8) находилось численно.

Решение нелинейной задачи Коши (1.6), (1.7) определяется численным методом Рунге–Кутты, представленным в программном математическом пакете Maple. Далее это решение подвергается дискретному преобразованию Фурье и отображению Пуанкаре.

2. Сравнение значений собственных частот угловых и изгибных колебаний приближенного аналитического решения и численного моделирования. В случае малых колебаний из (1.6) имеем линеаризованные уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + k_2^2 \theta = -\frac{s_0 \Omega^2 k_2^2}{g} \sin \Omega t, \quad \ddot{w} + k_1^2 w = -\frac{4s_0 \Omega^2}{\pi} \theta \sin \Omega t, \\ k_1^2 = \frac{\beta^4}{m_1} \left[EJ(1 - p) + 3 \frac{\alpha L}{2} W_0^2 \right], \quad k_2^2 = \frac{4gW_0}{\pi(W_0^2 + 4\rho J/m_1)}, \quad p = \frac{p_0}{p_*} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где k_1 , k_2 — циклические частоты собственных изгибных и угловых колебаний трубы, p — безразмерный параметр внутреннего давления.

Из (2.1) следует, что вынужденные угловые перемещения изогнутого трубопровода при нулевых начальных условиях (1.7) определяются только колебательными движениями опор. Кроме того видно, что в данном случае вынужденные изгибные перемещения находятся в прямой зависимости как от вращательных движений трубы, так и от колебаний ее опор. Нерезонансное решение (2.1) с учетом условий (1.7) запишется

$$\theta(t) = \delta \left(\frac{\Omega}{k_2} \sin k_2 t - \sin \Omega t \right), \quad w(t) = \frac{2\delta s_0 \Omega^2}{\pi} \left\{ \frac{1 - \cos k_1 t}{k_1^2} + \frac{\cos k_1 t - \cos 2\Omega t}{k_1^2 - 4\Omega^2} + \right. \\ \left. + \frac{\Omega}{k_2} \left[\frac{\cos(\Omega + k_2)t - \cos k_1 t}{k_1^2 - (\Omega + k_2)^2} - \frac{\cos(\Omega - k_2)t - \cos k_1 t}{k_1^2 - (\Omega - k_2)^2} \right] \right\} \quad (2.2)$$

$$\delta = \frac{s_0 \Omega^2 k_2^2}{g(k_2^2 - \Omega^2)}, \quad k_2 \neq \Omega, \quad k_1 \neq 2\Omega, \quad k_1 \neq \Omega + k_2, \quad k_1 \neq \Omega - k_2$$

Решение (2.2) позволяет сделать вывод о том, что малые вращательные и изгибные движения трубы складываются из собственных и вынужденных колебаний соответственно с частотами $f_2 = k_2/(2\pi)$ и f , $f_1 = k_1/(2\pi)$ и $2f$, $f_3 = f - f_2$, $f_4 = f + f_2$. При этом происхождение вынужденных изгибных колебаний с частотами $2f, f_3, f_4$ обусловлено взаимодействием вращательных колебаний трубопровода и вибрационных движений опор.

Вычисления были проведены для трех труб, изготовленных из легированной стали, титанового сплава и композитного материала. У всех труб — равные геометрические размеры: $L = 4.5$ м, $R = 0.05$ м, $h = 0.002$ м. Модули Юнга, коэффициенты Пуассона и плотности указанных материалов имеют следующие значения. Сталь: $E = 2 \times 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800$ кг/м³. Титановый сплав: $E = 1.18 \times 10^5$ МПа, $\nu = 0.35$, $\rho = 4500$ кг/м³. Композитный материал (эффективные характеристики): $E = 0.433 \times 10^5$ МПа, $\nu = 0.4$, $\rho = 2000$ кг/м³. Модуль упругости продольных элементов крепления подвижной опоры к основанию: $C = 32$ МПа. Гравитационное ускорение: $g = 9.81$ м/с². Частота и относительная амплитуда колебаний опор: $f = 7, 10$ Гц, $s_0/R = 0.02, 0.04, 0.06, 0.2$. Наполнение труб — жидкость с плотностью $\rho_0 = 900$ кг/м³. Внутреннее давление в трубах: $p_0 = 4, 8, 9, 16$ МПа.

Величины критических давлений по (2.1) рассматриваемых стальной, титановой и композитной труб равной геометрии соответственно составляют: $p_* = 12.3, 7.89, 4.48$ МПа. Результаты вычислений представлены на рис. 2–10 в виде графических зависимостей. Переменные на графиках измеряются: t — в секундах, линейная скорость $\dot{w}$ — в метрах в секунду, угол θ — в радианах, угловая скорость $\dot{\theta}$ — в радианах в секунду, частота f — в Герцах. Размерности модулей комплексных амплитуд Фурье спектров: F_1 — в метрах на секунду, F_2 — в радианах на секунду.

На рис. 2 приведены графики изменения собственных частот f_1 и f_2 малых изгибных и вращательных колебаний трубы в зависимости от безразмерного параметра p внутреннего давления. Сплошные, штриховые и штрихпунктирные линии соответственно относятся к трубам, изготовленным из стали, титанового сплава и композитного материала. Если на рис. 2, а данные линии в перечисленном порядке расположены одна под другой, то на рис. 2, б они имеют обратный порядок расположения. В первом случае такую закономерность можно объяснить различием в значениях изгибных жесткостей, а во втором — масс стальной, титановой и композитной труб. С увеличением отношения p собственные частоты f_1 изгибных колебаний всех труб уменьшаются, достигают минимальных значений, а далее, ввиду преобладания сил продольного натяжения над действиями сил гравитации и внутреннего давления, увеличиваются. При этом частоты f_2 вращательных колебаний труб сначала растут, достигают своего максимума, а затем уменьшаются. Последнее обстоятельство объясняется тем, что до достижения определенного значения статической составляющей прогиба трубопровод проявляет свойства физического маятника, а после достижения этого значения — свойства математического маятника. Точками в виде треугольников, прямоугольников и кружочков на графиках нанесены значения собственных частот угло-

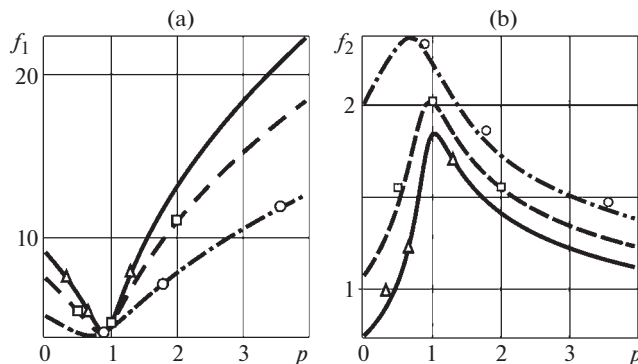


Рис. 2. Зависимости собственных частот изгибных f_1 (Гц) и вращательных f_2 (Гц) колебаний труб от безразмерного параметра p внутреннего давления.

вых и изгибных колебаний соответственно стальной, титановой и композитной труб, полученные численным интегрированием (1.6), (1.7) при $s_0/R = 0.02$, $f = 10$ Гц, $p_0 = 4, 8, 16$ МПа. Можно видеть, что указанные точки практически лежат на соответствующих кривых линиях.

3. Зависимость угловых и изгибных перемещений от внутреннего давления и вибраций опор. Графические зависимости угловых θ и относительных изгибных w/R перемещений от времени приведены на рис. 3–6. На них сверху буквами а, б и с обозначены столбцы графиков, сгруппированные соответственно для стальной, титановой и композитной труб. На графиках сплошными линиями нанесены результаты численного решения задачи (1.6), (1.7), а пунктирными – результаты вычислений по формулам (2.2) в отрезке времени $0 \leq t \leq 1.5$ с. Графики, расположенные сверху вниз соответственно на первой и второй строках, на рис. 3, 4 ($s_0/R = 0.02$, $f = 10$ Гц) относятся к двум величинам внутреннего давления p_0 : 4, 16 МПа, а на рис. 5, 6 ($p_0 = 9$ МПа, $f = 10$ Гц) – к двум значениям относительной амплитуды колебаний опор s_0/R : 0.04, 0.06. Численным решением кубического уравнения (1.8) при $p_0 = 4, 9, 16$ МПа для рассматриваемых труб были получены следующие значения отношения W_0/R . Стальная труба: 0.112, 0.274, 1.67; титановая труба: 0.128, 0.371, 1.83; композитная труба: 0.811, 1.96, 3.04. Сравнительный анализ обеих строк графиков рис. 3 и 4 позволяет сделать следующие выводы. При принятых входных данных увеличение внутреннего давления в трубе приводит к уменьшению разницы между результатами численного моделирования и приближенного аналитического решения как угловых, так и изгибных перемещений. Это уменьшение обусловлено тем, что с ростом давления p_0 происходит увеличение статической составляющей W_0 прогиба и, следовательно, уменьшение отношения w/W_0 . А на малости последнего, совместно с углом θ , основаны приближения (2.2). Наибольшее согласие в результатах вычислений по приближенным формулам и численному интегрированию при $p_0 = 16$ МПа можно отнести к трубе из композитного материала. Таким образом, в случае малых пространственных колебаний трубопровода сказанное выше подтверждает пригодность применения соотношений (2.1), (2.2).

Из сравнения первой и второй строк графиков рис. 5, 6 видно, что при принятых входных данных увеличение отношения s_0/R приводит как к росту амплитуд вращательных и изгибных колебаний, так и к значительным изменениям в относительных расположениях сплошных и пунктирных линий. Отсюда следует, что при достижении отношения s_0/R определенного значения формулы (2.2) могут также потерять свою

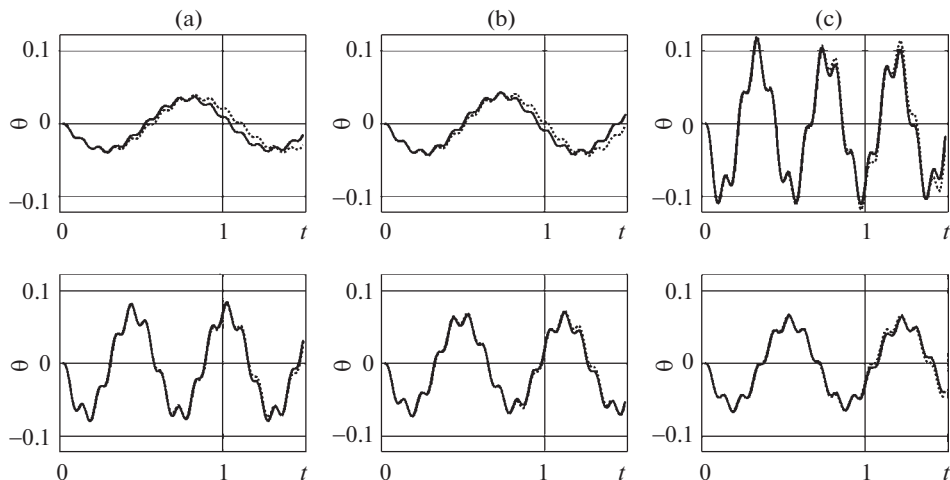


Рис. 3. Зависимости угла θ от времени t при $s_0/R = 0.02$, $f = 10$ Гц, $p_0 = 4, 16$ МПа.

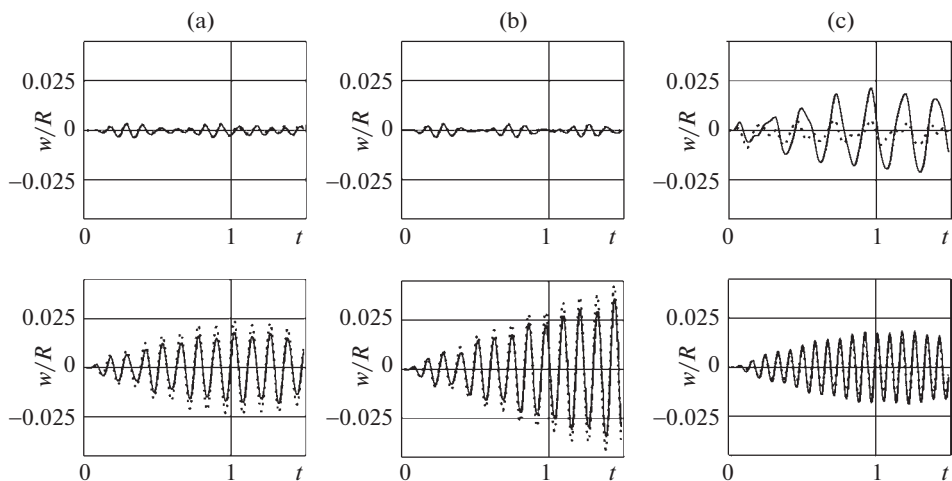


Рис. 4. Зависимости отношения w/R от времени t при $s_0/R = 0.02$, $f = 10$ Гц, $p_0 = 4, 16$ МПа.

применимость. Очевидно, что сказанное относится ко всем трубам, рассматриваемым в настоящей работе.

4. Периодические и неперидические режимы пространственных колебаний труб. Результаты численного решения задачи (1.6), (1.7), полученные при $p_0 = 9$ МПа, $f = 7$ Гц, изображены на рис. 7, 8 ($s_0/R = 0.02$) и 9, 10 ($s_0/R = 0.20$) в виде графических зависимостей. Для построения последних рассмотрены два отрезка времени: $0 \leq t \leq 5$ с (рис. 7, 8) и $5 \leq t \leq 10$ с (рис. 9, 10). Так же, как на рис. 3–6, графики столбцами а, б и с сгруппированы для стальной, титановой и композитной труб. Первыми строками сверху представлены графики зависимости угла θ поворота и отношения w/R от времени ($0 \leq t \leq 5$ с). На второй и последующих строках рисунков приведены фазовые траектории, отобра-

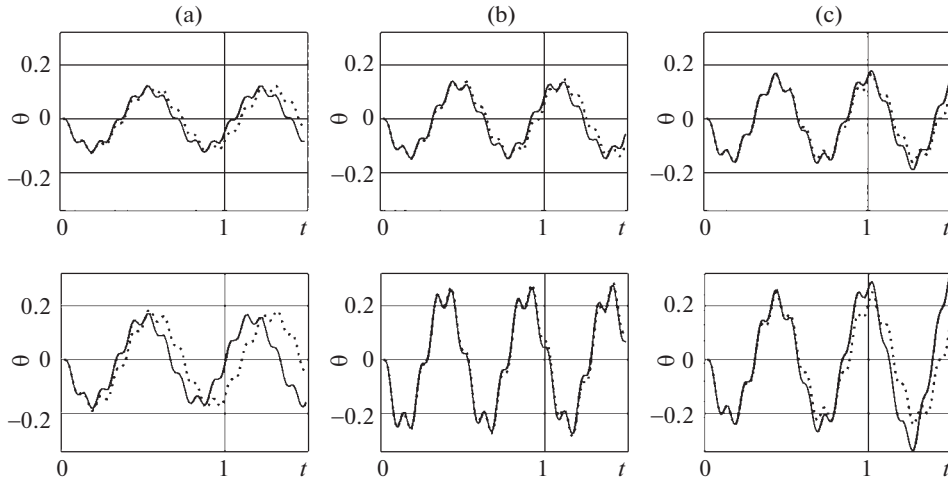


Рис. 5. Зависимости угла θ от времени t при $p_0 = 9$ МПа, $f = 10$ Гц, $s_0/R = 0.04, 0.06$.

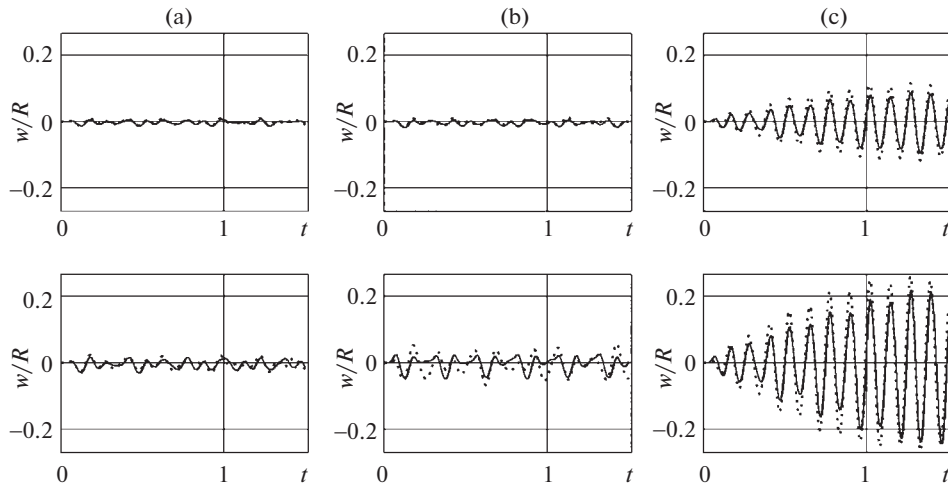


Рис. 6. Зависимости отношения w/R от времени t при $p_0 = 9$ МПа, $f = 10$ Гц, $s_0/R = 0.04, 0.06$.

жения Пуанкаре и зависимости модулей комплексных амплитуд F_1 , F_2 изгибных и вращательных колебаний от частоты f . Выборка фазовых точек для картин Пуанкаре проводилась с периодом, равным периоду $T = 1/f$ колебаний опор.

Из сравнения графиков первых строк рис. 7, 8 можно видеть, что при принятых входных данных наибольшие амплитуды угловых и изгибных колебаний имеет титановая труба, а наименьшие — стальная труба. При этом изгибные колебания совершаются в виде биений, частота которых у композитной трубы больше, чем у стальной и титановой.

Вторыми строками графиков приведены фазовые траектории угловых (рис. 7) и изгибных колебаний (рис. 8). При этом первые траектории имеют два центра притяже-

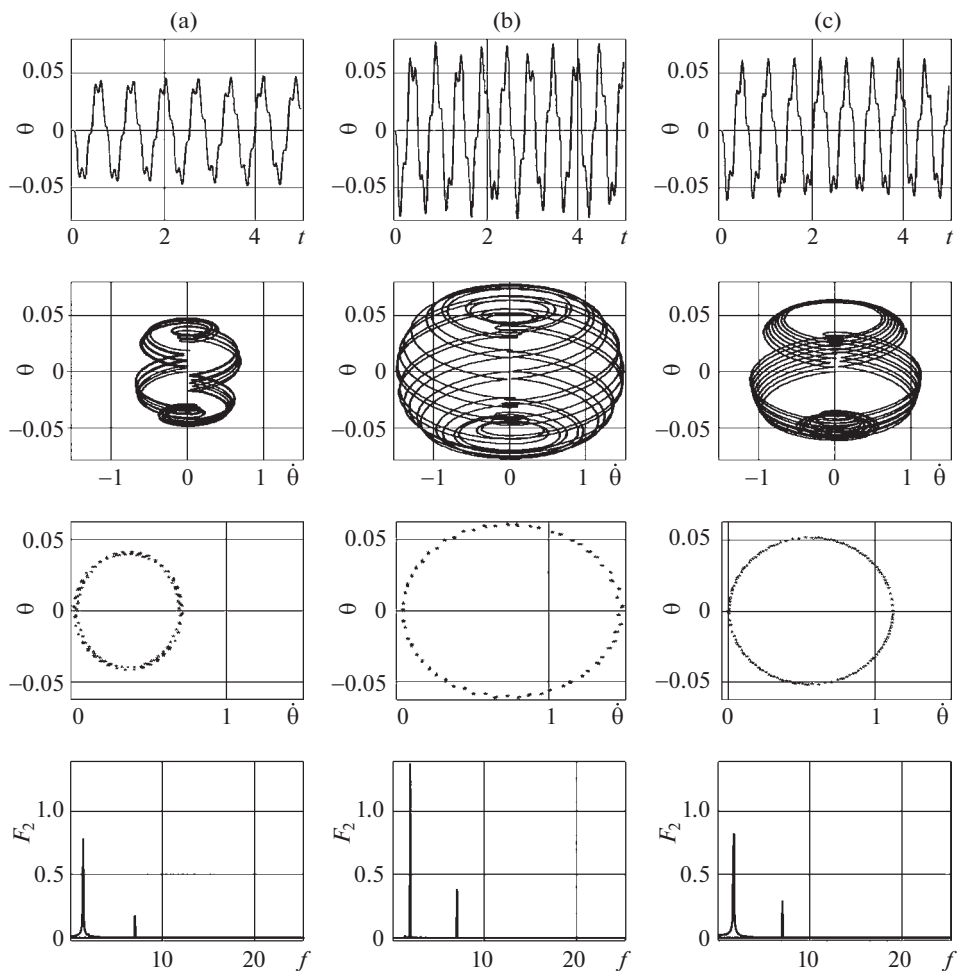


Рис. 7. Зависимости угла θ от времени t , фазовые траектории и отображения Пуанкаре $\theta, \dot{\theta}$, спектры частот F_2, f вращательных колебаний трубы при $s_0/R = 0.02$, $p_0 = 9$ МПа, $f = 7$ Гц.

ния, а последние — один центр притяжения. Общее для обоих колебательных движений состоит в том, что они являются периодическими.

Картинами Пуанкаре на рис. 7, 8 заняты третьи строки графиков. На картинах видно, что фазовые точки вращательных движений труб имеют форму эллипсов (рис. 7). При этом наибольшие размеры имеет эллипс отображений Пуанкаре титановой трубы, а наименьшие — стальной трубы. Множество фазовых точек изгибных колебаний труб на картинах Пуанкаре могут образовывать фигуры различных очертаний, которые характерны для каждой конкретной трубы (рис. 8).

На четвертых строках графиков рис. 7, 8 приведены спектры частот вращательных (рис. 7) и изгибных (рис. 8) колебаний. Из графиков видно, что дискретное преобразование Фурье у угловых движений выделяет колебания с частотами f_2, f , а у изгибных движений — колебания с частотами $2f_2, f_1, f_3, f_4, 2f$. Ранее при анализе приближенного аналитического решения (2.2) такие выводы, за исключением отсутствия в изгибных

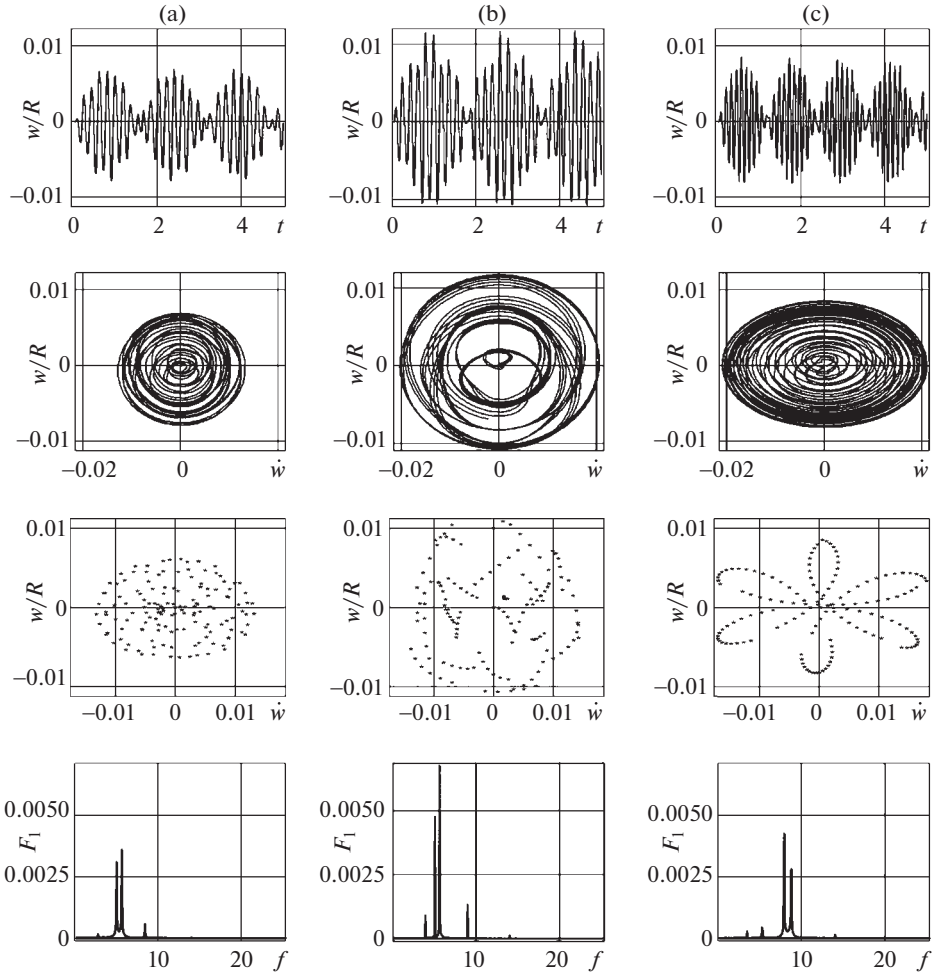


Рис. 8. Зависимости отношения w/R от времени t , фазовые траектории и отображения Пуанкаре w/R , $\dot{w}$, спектры частот F_1 , f изгибных колебаний трубы при $s_0/R = 0.02$, $p_0 = 9$ МПа, $f = 7$ Гц.

перемещениях колебаний с частотой $2f_2$, уже были сделаны. Данный пробел в решении (2.2) может быть восполнен, если при линейризации второго уравнения (2.1) в его правой части сохранить член $W_0\theta^2$ и принять приближение $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$. Из результатов числовых расчетов следует, что при принятых входных данных вращательные и изгибные движения труб суммируются в указанной выше последовательности из колебаний с частотами: 1.36, 7.0/10.0 и 2.72, 4.97, 5.64/8.64, 8.36/11.36, 14.0/20.0 Гц (стальная труба); 1.96, 7.0/10.0 и 3.92, 5.61, 5.04/8.04, 8.96/11.96, 14.0/20.0 Гц (титановая труба); 1.72, 7.0/10.0 и 3.44, 7.89, 5.28/8.28, 8.72/11.72, 14.0/20.0 Гц (композитная труба). Здесь косыми знаками дробей разделены значения частот составляющих колебаний, которые соответствуют принятым расчетным частотам 7.0 и 10.0 Гц вибраций основания. Можно констатировать, что в обоих случаях неравенства $f_1 \neq 2f, f_2 \neq f, f_1 \neq f_3, f_1 \neq f_4$, обуславливающие нерезонансные решения (2.2), соблюдаются.

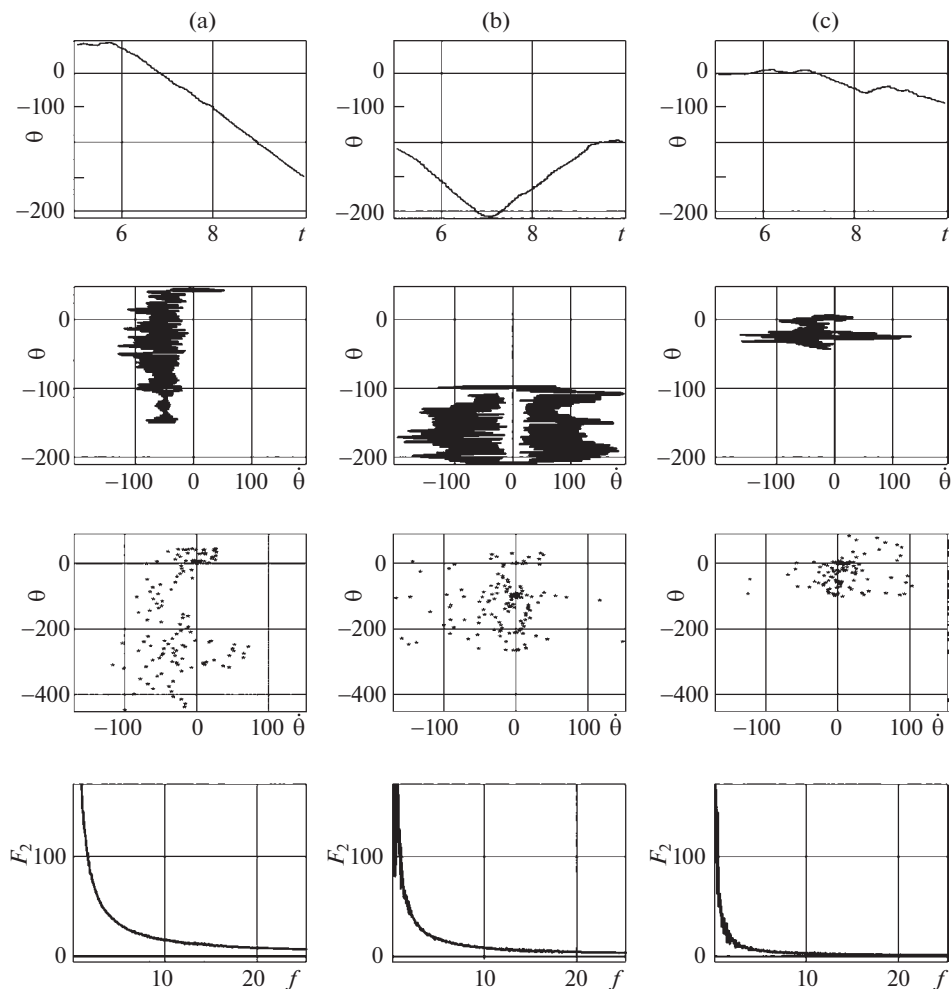


Рис. 9. Зависимости угла θ от времени t , фазовые траектории и отображения Пуанкаре $\theta, \dot{\theta}$, спектры частот F_2, f вращательных колебаний трубы при $s_0/R = 0.2$, $p_0 = 9$ МПа, $f = 7$ Гц.

Выше было отмечено, что с увеличением амплитуды перемещений опор происходит рост амплитуд как угловых, так и изгибных колебаний трубы. Графические зависимости рис. 9, 10, демонстрируют, что при определенных значениях параметров ($s_0/R = 0.2$) возможны хаотические колебания рассматриваемых трубопроводов.

Из первой строки графиков рис. 9 видно, что угловые колебания труб перешли в непрерывное вращение вокруг оси, проходящей через опоры. Если на фрагменте стальной трубы вращение происходит по часовой стрелке, то на фрагментах титановой и композитной труб режим этого вращения наблюдается с изменением направления. Это изменение идет в режиме нескольких колебаний около некоторого угла θ . Из первой строки графиков рис. 10 следует, что в хаотическом режиме амплитуды изгибных колебаний труб увеличиваются многократно. При этом наибольшая амплитуда отношения w/R наблюдается у композитной трубы.

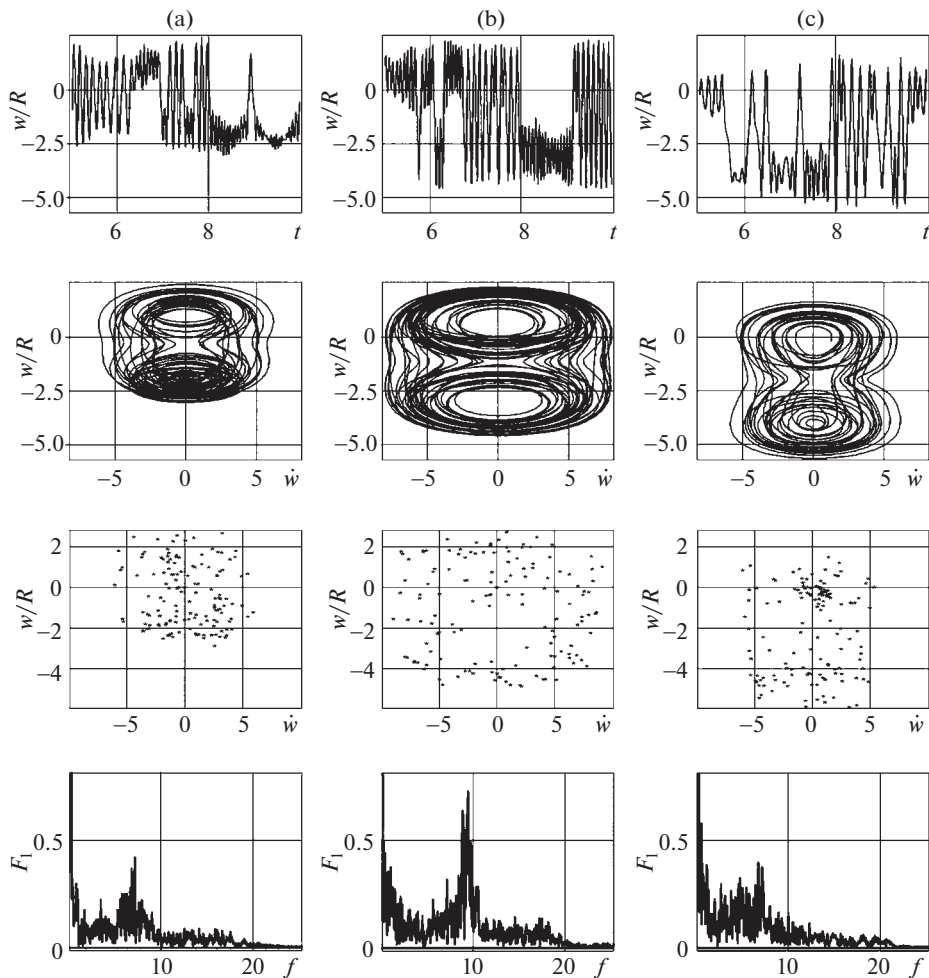


Рис. 10. Зависимости отношения w/R от времени t , фазовые траектории и отображения Пуанкаре $w, \dot{w}$, спектры частот F_1, f изгибных колебаний трубы при $s_0/R = 0.2, p_0 = 9$ МПа, $f = 7$ Гц.

Фазовые траектории колебаний изображены на вторых строках рис. 9, 10. Можно видеть, что в данном отрезке времени ($5 \leq t \leq 10$ с) изгибные колебания труб имеют по два центра притяжения. Они располагаются около $w/R \approx 0$ и $w/R \approx -2, -3, -4$. Таким образом, колебания совершаются вокруг статического положения каждого трубопровода (стального, титанового, композитного): $W_0/R = 0.274, 1.113, 1.964$ и $\theta \approx 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$. Кроме того из вторых строк графиков рис. 9, 10 видно, что наибольшие модули скоростей угловых и изгибных перемещений имеет титановая труба.

Фазовые точки на картинах Пуанкаре (рис. 9, 10, третьи строки графиков) распределены беспорядочно, без определенных мест скопления и занимают на графиках разные площади. Это объясняется тем, что в работе не учитываются эффекты затухания.

Последними строками графиков рис. 9, 10 соответственно представлены спектры частот вращательных и изгибных движений. Видно, что они имеют сплошной вид.

Из вышеизложенного следует, что при принятых данных в рассматриваемых трубах возбуждаются непериодические колебания.

Заключение. Задача о пространственных колебаниях изогнутого трубопровода на вибрирующих опорах представляется достаточно сложной. Ее решение может быть получено лишь на основе простейшей модели, например, изгибно-вращательных движений трубы. Модель предполагает, что отсутствуют деформации, связанные с выходом изогнутой оси трубопровода из плоскости изгиба (в частности, нет деформации кручения). Поэтому в каждый момент времени движения трубы рассматриваются как совокупность изгибных перемещений в одной плоскости, ее переносных вращений и поступательных вибраций опор. Вместе с тем модель учитывает взаимодействия внутреннего давления и изменений кривизны осевой линии, продольной и кольцевой деформаций трубы. Нелинейные уравнения изгибно-вращательных колебаний трубопровода решаются методами Бубнова–Галеркина и Рунге–Кутты. Результаты решения анализируются с помощью дискретных преобразований Фурье и отображений Пуанкаре.

Для случая малых угловых и изгибных колебаний трубопровода получено приближенное аналитическое решение системы линеаризованных уравнений. Сравнительный анализ результатов вычислений по формулам приближенного аналитического решения и численного моделирования позволил установить, что малые изгибно-вращательные движения стального, титанового и композитного трубопроводов складываются из колебаний с определенными частотами. Показано, что вращательные перемещения состоят из колебательных движений с двумя частотами, а изгибные — с пятью разными частотами. Кроме того, можно констатировать хорошее согласие в числовых значениях собственных частот угловых и изгибных колебаний, полученных по приближенному аналитическому и численному подходам. Установлено, что при относительно небольшой амплитуде перемещения опор с увеличением внутреннего давления в трубах их собственные частоты изгибных колебаний сначала уменьшаются, достигают минимума, а затем увеличиваются. При этом собственные частоты угловых колебаний сначала растут, принимают максимальные значения, а далее уменьшаются. Следует подчеркнуть, что собственные частоты изгибных и угловых колебаний труб принимают экстремальные значения при внутренних давлениях, равных их критическим значениям. Важно также отметить, что с увеличением внутреннего давления в трубах графические зависимости изгибных и угловых перемещений от времени, полученные приближенным аналитическим и численным решениями, сближаются.

Результатами вычислений также подтверждено, что увеличение амплитуды перемещений опор приводит к увеличению амплитуд как изгибных, так вращательных колебаний трубы. При этом также увеличиваются расхождения в результатах приближенного аналитического и численного методов.

Показано, что при определенной совокупности входных данных и небольшом значении относительной амплитуды перемещения опор изгибно-вращательные колебания труб происходят в периодическом режиме. Десятикратное увеличение относительной амплитуды перемещения опор (при сохранении тех же входных данных) приводит к непериодическим колебаниям труб.

Приведенный в настоящей статье анализ результатов числовых расчетов пространственных движений стальной, титановой и композитной труб дает возможность оценить их работоспособность по условиям прочности, жесткости и близости к резонансным и хаотическим режимам колебаний.

Авторы выражают благодарность М.А. Ильгамову за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 180 с.
2. Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
3. Ганиев Р.Ф., Низамов Х.Н., Дербуков Е.И. Волновая стабилизация и предупреждение аварий в трубопроводах. М.: Из-во МГТУ, 1996. 258 с.
4. Ibrahim R.A. Mechanics of pipes conveying fluids // ASME J. Pressure Vessel Technol. 2010. V. 132. P. 1–32.
<https://doi.org/10.1115/1.4001271>
5. Li S., Karney B. W., Liu G. FSI research in pipeline systems – A review of the literature // J. Fluids Struct. 2015. V. 57. P. 277–297.
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2015.06.020>
6. Ilgamov M.A., Tang D.M., Dowell E.H. Flutter and forced response of a cantilevered pipe: The influence of internal pressure and nozzle discharge // J. Fluids Struct. 1994. V. 8. P. 139–156.
7. Wadham-Gagnon M., Païdoussis M.P., Semler C. Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. Part 1: Nonlinear equations of three-dimensional motion // J. Fluids Struct. 2007. V. 23. P. 545–567.
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2006.10.006>
8. Païdoussis M.P., Semler C., Wadham-Gagnon M., Saaid S. Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. Part 2: Dynamics of the system with intermediate spring support // J. Fluids Struct. 2007. V. 23. P. 569–587.
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2006.10.009>
9. Modarres-Sadeghi Y., Semler C., Wadham-Gagnon M., Païdoussis M.P. Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. Part 3: Three-dimensional dynamics in the presence of an end-mass // J. Fluids Struct. 2007. V. 23. P. 589–603.
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2006.10.007>
10. Tang D.M., Ilgamov M.A., Dowell E.H. Buckling and post-buckling behavior of a pipe subjected to internal pressure // J. Appl. Mech. 1995. V. 62. № 3. P. 595–600.
11. Ильгамов М.А., Мишин В.Н. Поперечные колебания трубы под действием бегущих волн в жидкости // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 181–192.
12. Zou G.P., Cheraghi N., Taheri F. Fluid-induced vibration of composite gas pipelines // J. Solids Struct. 2005. V. 42. P. 1253–1268.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.07.001>
13. Ан Е.В., Рашидов Т.Р. Сейсמודинамика подземных трубопроводов, взаимодействующих с водонасыщенным мелкодисперсным грунтом // Изв. РАН МТТ. 2015. № 3. С. 89–104.
14. Исраилов М.Ш. Связанные сейсмические колебания трубопровода в бесконечной упругой среде // Изв. РАН МТТ. 2016. № 1. С. 57–66.
15. Łuczko J., Czerwiński A. Nonlinear three-dimensional dynamics of flexible pipes conveying fluids // J. Fluids Struct. 2017. V. 70. P. 235–260.
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2017.02.002>
16. Ганиев Р.Ф., Ильгамов М.А., Хакимов А.Г., Шакирьянов М.М. Пространственные колебания трубопровода в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С. 3–13.
17. Ганиев Р.Ф., Ильгамов М.А., Хакимов А.Г., Шакирьянов М.М. Пространственные неперiodические колебания трубопровода под действием переменного внутреннего давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 2. С. 3–12.
18. Ильгамов М.А. Динамика трубопровода при действии внутреннего ударного давления // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 6. С. 83–96.
19. Ганиев Р.Ф., Ильгамов М.А., Хакимов А.Г., Шакирьянов М.М. Пространственные колебания трубопровода с упруго-сдвигающейся опорой при действии внутреннего ударного давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 6. С. 3–12.
<https://doi.org/10.31857/S023571190002555-1>
20. Шакирьянов М.М. Пространственные нелинейные колебания трубопровода при действии внутреннего ударного давления // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 6. С. 76–84.
<https://doi.org/10.1134/S0572329919060114>

21. *Huayuan Ma, Long Y., Zhong M. et al.* Study on ground vibration mode of physical explosion of high pressure natural gas pipeline // *Acoust. Phys.* 2019. V. 65. С. 583–592.
<https://doi.org/10.1134/S1063771019050142>
22. *Limarchenko V.O., Limarchenko O.S., Sapon N.N.* Dynamics of a Pipeline with a Liquid on a Rotating Base // *Int. Appl. Mech.* 2020. V. 56. P. 351–357.
<https://doi.org/10.1007/s10778-020-01018-6>
23. *Lu Z.Q., Zhang K.K., Ding H., Chen L.Q.* Nonlinear vibration effects on the fatigue life of fluid-conveying pipes composed of axially functionally graded materials. *Nonlinear Dyn.* 2020. V. 100. № 2. P. 1091–1104.
<https://doi.org/10.1007/s11071-020-05577-8>
24. *Mao X., Ding H. & Chen L.* Bending vibration control of pipes conveying fluids by nonlinear torsional absorbers at the boundary // *Sci. China Technol. Sci.* 2021. V. 64. P. 1690–1704.
<https://doi.org/10.1007/s11431-020-1791-2>
25. *Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М.* Положения динамического равновесия изогнутого трубопровода с вибрирующими опорами // *Докл. РАН. Физ., тех. науки.* 2021. Т. 496. № 1. С. 55–59.
<https://doi.org/10.31857/S2686740021010053>
26. *Акуленко Л.Д., Иванов М.И., Коровина Л.И., Нестеров С.В.* Свободные колебания участка трубопровода // *Изв. РАН. МТТ.* 2011. № 1. С. 172–187.
27. *Акуленко Л.Д., Иванов М.И., Коровина Л.И., Нестеров С.В.* Основные свойства собственных колебаний протяженного участка трубопровода // *Изв. РАН. МТТ.* 2013. № 4. С. 119–134.
28. *Акуленко Л.Д., Гавриков А.А., Нестеров С.В.* Собственные колебания трубопровода на упругом основании, транспортирующего жидкость // *Изв. РАН. МТТ.* 2018. № 1. С. 123–133.

УДК 538.911

НАНОИНДЕНТИРОВАНИЕ ПЛЕНОК AlGaN, СФОРМИРОВАННЫХ НА ПОДЛОЖКАХ SiC/Si, ВЫРАЩЕННЫХ МЕТОДОМ СОГЛАСОВАННОГО ЗАМЕЩЕНИЯ АТОМОВ

© 2023 г. А. С. Гращенко^{a,*}, С. А. Кукушкин^{a,**},
А. В. Осипов^a, Ш. Ш. Шарофидинов^b

^aИнститут проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

^bФизико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: asgrashchenko@bk.ru,

**e-mail: sergey.a.kukushkin@gmail.com

Поступила в редакцию 14.10.2022 г.

После доработки 25.10.2022 г.

Принята к публикации 27.10.2022 г.

В работе, методом наноиндентирования, проведены исследования механических и деформационных характеристик эпитаксиальных пленок твердых растворов AlGa_xN, сформированных на подложках кремния кристаллографических ориентаций (001), (011) и (111) с буферным слоем карбида кремния (SiC/Si), синтезированным методом согласованного замещения атомов. Рост эпитаксиальных слоев AlGa_xN осуществлялся как непосредственно на гибридной подложке SiC/Si, так и на подложке SiC/Si дополнительно покрытой буферным слоем AlN. Морфология и структура поверхности слоев была исследована методом атомно-силовой микроскопии. Измерены структурные характеристики гибридных подложек и пленок AlGa_xN, выращенных с использованием буферного слоя нитрида алюминия и без него. Установлена однозначная связь между механическими свойствами (модуль упругости и твердость) и структурой поверхности пленок AlGa_xN. Обнаружено, что буферный слой AlN оказывает существенное влияние на механические и деформационные свойства пленок AlGa_xN в начальный момент вдавливания, когда происходит преимущественно упругая деформация слоя. Определена шероховатость и охарактеризована морфология поверхности пленок AlGa_xN. Впервые экспериментально, при помощи метода наноиндентирования, проведены измерения параметров твердости и приведенного модуля упругости эпитаксиальных AlGa_xN, выращенных на гибридных подложках SiC/Si и AlN/SiC/Si.

Ключевые слова: наноиндентирование, модуль упругости, тонкие пленки, AlGa_xN, AlN, GaN, SiC на Si, гетероструктуры, твердость, приведенный модуль упругости

DOI: 10.31857/S057232992260075X, **EDN:** JMFSHE

1. Введение. Цель данной работы – экспериментальное измерение параметров твердости и модуля упругости пленок AlGa_xN, выращенных на гибридных подложках SiC/Si, синтезированных методом согласованного замещения атомов [1, 2]. Пленки AlGa_xN являются твердыми растворами соединений AlN и GaN, которые смешиваются между собой при температуре выше 1050°C [3] в произвольных пропорциях. Согласно работе [3] ниже температуры 1050°C твердый раствор Al_xGa_{1-x}N неустойчив и может распасться на области, содержащие большую и меньшую доли нитрида алюминия; выше этой температуры твердый раствор Al_xGa_{1-x}N устойчив. Как правило,

пленки AlGa_xN , имеющие переменный состав, обозначаются химической формулой вида $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$, где x — атомная доля Al в твердом растворе $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$. Эпитаксиальные пленки твердых растворов $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$ широко используются в качестве буферных слоев для дальнейшего выращивания на их поверхности пленок полупроводников ряда соединений A^3B^5 , в частности GaN. Они незаменимы при создании светодиодов, транзисторов с высокой подвижностью носителей зарядов (HEMT) и при изготовлении ряда других электронных приборов. Ширина запрещенной зоны $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$, в зависимости от содержания Al в твердом растворе, т.е. от x может изменяться от 3.4 эВ при $x = 0$ до 6.2 эВ при $x = 1$. Следует, однако, обратить внимание на следующее обстоятельство. В работе [3] устойчивость твердого раствора $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$ рассматривалась только с чисто термодинамической точки зрения. Как правило, при подобного рода расчетах, предполагается, что система бесконечна с термодинамической точки зрения. В реальности слои $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$ выращиваются в виде тонких пленок на чужеродных по отношению к составу слоя $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$ подложках. Подложка оказывает существенное влияние на процессы формирования слоя $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$. Так, например, в работе [4] было обнаружено, что в процессе осаждения пленок $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$ на подложки SiC, выращенные на Si ориентации (111) может возникнуть явление самоорганизации, которое приводит к формированию прослоек (доменов) с составом AlGa_xN , близким к стехиометрическому. Эти прослойки расположены между слоями $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$ с низким содержанием Al, близким по составу к GaN. Граница раздела между прослойками (доменами) AlGa_xN и слоями $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$ с низким процентным содержанием алюминия, резкая. Расположение прослоек (доменов) по толщине слоя пленки апериодическое. Таким образом, в работе [4] был получен сложный полупроводниковый композиционный материал, а не пленка однородного твердого раствора. Еще более отчетливо явление формирования доменной структуры в эпитаксиальных слоях $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$ наблюдалось в работе [5] на подложках SiC, выращенных на Si ориентации (110). И, как показано в работах [5, 6], эти пленки обладают значениями пиро- и пьезокоэффициентов, которые значительно превосходят значения аналогичных коэффициентов у пленок, состоящих из чистых соединений AlN и GaN. Таким образом, на подложках SiC/Si можно формировать нового типа полупроводниковые композитные структуры $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$.

Очевидно, что механические и деформационные характеристики, такие как твердость и модуль упругости пленок $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$, как и электрофизические свойства, будут зависеть от состава пленок $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$, способа их получения и кристаллографической ориентации подложки, на которой слои $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$ будут выращиваться. Поскольку слои $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$ на подложках SiC/Si являются композитными структурами [4–6], состоящими из расположенных параллельно плоскости подложки слоев, с разными механическими модулями, то их механические и деформационные характеристики должны существенно отличаться от механических свойств пленок, состоящих только из чистых соединений AlN и GaN.

Несмотря на важнейшую роль, которую играют пленки $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$ в микроэлектронике, сведения о механических свойствах этих пленок весьма скудны [7, 8], а систематические исследования механических свойств этих структур в мировой литературе отсутствуют. Таким образом, исследование механических свойств пленок $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$, которое выполнено в настоящей работе, является первым исследованием подобного рода, а данной работой мы открываем цикл исследований посвященных изучению механических свойств эпитаксиальных пленок твердых растворов $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$, выращенных на подложках кремния с буферным слоем карбида кремния.

Для выращивания эпитаксиальных пленок $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$, в настоящее время, используют следующие методы: метод молекулярно-лучевой эпитаксии (МЛЭ), металлорга-

нической газофазной эпитаксии (МОГФЭ) и хлорид-гидридной эпитаксии (ХГЭ). В данной работе мы использовали для роста пленок AlGaN метод ХГЭ. В отличие от методов роста МЛЭ и МОГФЭ метод ХГЭ обеспечивает высокие скорости роста пленок, что позволяет получать толстые пленки соединения AlN, GaN и AlGaN толщиной, превышающей 100 мкм [9, 10]. При росте пленок AlGaN методом ХГЭ, как и в работах [4, 9, 10] в качестве реагентов использовался хлористый водород (HCl) и аммиак (NH₃). Транспортирующим газом является аргон высокой чистоты (Ar), а источниками составляющих элементов, непосредственно участвующих в химической реакции, были металлические галлий (Ga) и алюминий (Al).

Для роста слоев AlGaN были использованы подложки SiC/Si с разной ориентацией исходного Si, а именно для роста слоев SiC использовался Si следующих кристаллографических ориентаций (100), (110) и (111). Использование гибридных подложек SiC/Si для роста таких соединений как AlN, GaN и AlGaN, как показано в работах [1, 2, 9, 10] имеет большое практическое значение, поскольку, именно данные подложки позволяют соединить электронику основанную на широкозонных полупроводниках с традиционной кремниевой электроникой. Кроме того, подложки SiC/Si можно использовать в качестве жертвенного слоя при синтезе толстых слоев AlN, GaN и AlGaN, поскольку слой SiC вместе с подложкой Si можно удалить [10]. Отметим, что отличительной особенностью структур SiC/Si, выращенных методом замещения атомов является то, что под слоем пленки SiC, на границе кремний–пленка карбида кремния, непосредственно в процессе ее образования, формируется слой пор и разветвленных каналов в подложке Si. Причем внутренняя поверхность этих пор и каналов покрыта слоем SiC. Таким образом, выращенные на поверхности SiC/Si эпитаксиальные слои Al_xGa_{1-x}N находятся на этой подложке, как на упругом основании. Для того, чтобы определить воздействие этого “упругого слоя” на свойства слоев Al_xGa_{1-x}N для их роста использовались подложки SiC/Si двух типов. В качестве подложки первого типа выступали подложки SiC/Si. В качестве подложек второго типа были использованы подложки SiC/Si с предварительно сформированным на их поверхности буферным слоем AlN. Этот, более жесткий слой, должен “покрыть” слой SiC, лежащий на поверхности пор в Si и, тем самым, он должен изменить механические свойства подложки, на которой будет выращиваться Al_xGa_{1-x}N. Исследования, проведенные в работе [6] показали, что предварительно осажденный слой AlN существенно меняет пирособойства пленок Al_xGa_{1-x}N, по сравнению с пирособойствами пленок выращенных непосредственно на SiC/Si без предварительно осажденного слоя AlN. Таким образом, исследование механических характеристик пленок Al_xGa_{1-x}N, выращенных на подложках SiC/Si является новой, важной и актуальной проблемой.

2. Постановка задач. Итак, задачей настоящей работы является измерение параметров твердости и модуля упругости пленок AlGaN, выращенных методом ХГЭ на гибридных подложках SiC/Si, синтезированных методом замещения атомов на пластинах Si с кристаллографическими направлениями (001), (011) и (111). Для решения поставленной задачи в работе использовалась экспериментальная методика наноиндентирования, которая отлично себя зарекомендовала в исследованиях различных физико-механических характеристик, как объемных образцов, так и тонких пленок. Наноиндентирование это процесс вдавливания геометрически аттестованного наконечника с одновременной и непрерывной регистрацией силы вдавливания и смещения индентора относительно исходной поверхности исследуемого образца. Следует отметить, что рост гетероструктур типа AlGaN/SiC и AlGaN/AlN/SiC на основе подложек Si с ориентациями (001), (011) и (111) приведет к формированию трех поверхностей с кардинально отличающейся морфологией. Такой эффект был обнаружен в работе [11] на примере тонких пленок оксида галлия, выращенных методом ХГЭ на гибридных подложках SiC/Si(001), SiC/Si(011) и SiC/Si(111). Морфология поверхности существенно влияет

на данные наноиндентирования. В связи с этим перед измерением механических характеристик пленок AlGaN была исследована морфология поверхности образцов AlGaN/SiC/Si и образцов AlGaN/AlN/SiC/Si. Поверхность слоев AlGaN исследовалась с помощью метода атомно-силовой микроскопии АСМ. Для корректного определения параметров твердости и модуля упругости по данным наноиндентирования необходимо заранее знать значения толщин исследуемых пленок. Этот структурный параметр весьма важен, поскольку в стандарте, посвященном механическим экспериментам по вдавливанию четко обозначено, что измерение характеристик пленки нужно осуществлять при глубине погружения менее 10% от толщины исследуемого слоя. В настоящем исследовании толщину пленок AlGaN и буферных слоев AlN оценивали из условий роста.

3. Технология роста и методы исследования. В качестве подложек для роста слоев AlGaN использовали пластины Si с синтезированным наномасштабным слоем SiC. Синтез приповерхностных слоев SiC осуществляли с помощью метода согласованного замещения атомов на подложках Si р-типа проводимости, легированных бором с кристаллографическими направлениями (001), (011) и (111). В случае подложки Si с ориентацией (001) кристалл был отклонен от базового направления на 4° к направлению (111). Пластины Si с ориентациями (011) и (111) были без отклонения от базового направления. Синтез слоев SiC осуществляли в течение 10 минут при температуре 1100°C . Давление внутри реактора во время синтеза было равным 0.5, 0.7 и 2.3 Торр для подложек Si с кристаллографической ориентацией (001), (011) и (111) соответственно. Толщина синтезированных слоев SiC определялась с помощью анализа спектров, полученных методом спектральной эллипсометрии на приборе M-2000D фирмы Woollam. Шероховатость поверхности пленок SiC измерялась методом оптической профилометрии на приборе Zygo New View 6000. Рост тонких пленок AlGaN осуществляли методом ХГЭ на гибридные подложки SiC/Si с буферным слоем AlN и без него. Рост слоев AlGaN проводили при температуре 1020°C в атмосфере аммиака и аргона, общий поток которых был равен 1 и 4 литра в минуту соответственно. Для переноса атомов алюминия и галлия использовался поток хлороводорода равный 0.2 и 0.1 литра в минуту соответственно. В случае пленок AlGaN, выращенных непосредственно на гибридных подложках SiC/Si толщина слоя AlGaN равна 6–9 мкм. Буферный слой AlN толщиной 2–3 мкм формировали методом ХГЭ перед наращиванием пленок AlGaN. Толщина слоев AlGaN в гетероструктурах AlGaN/AlN/SiC/Si составляла 3–5 мкм. Морфология поверхности исследуемых пленок AlGaN была исследована методом АСМ на микроскопе Easy Scan фирмы Nanosurf. Сканирование поверхности осуществлялись в контактном режиме. Измерения параметров твердости и модуля упругости слоев AlGaN проводили с помощью метода наноиндентирования на приборе NanoTest 600 фирмы Micromaterials. Эксперименты по вдавливанию осуществляли индентором Берковича с закруглением вершины наконечника радиусом 100 нм. В настоящем исследовании использовали циклический режим наноиндентирования с 4 циклами нагрузка-разгрузка. При этом в рамках одного эксперимента в одной локации индентор нагружали до 5, 10, 15 и затем до 20 мН. Разгрузку индентора в трех первых циклах осуществляли до силы вдавливания равной 20% от максимальной нагрузки соответствующего цикла. В зависимости от повторяемости экспериментальных данных вдавливание проводилось в 25, 15 и 10 различных локациях для пленок AlGaN на AlN/SiC на Si с кристаллографическими ориентациями (001), (011) и (111) соответственно. Параметры твердости и модуля упругости определяли из анализа данных наноиндентирования с помощью метода Оливера–Фарра [12]. Данные наноиндентирования на начальном этапе вдавливания описывали модернизированным соотношением Герца [13] для взаимодействия жесткого индентора Берковича с упругим полупространством:

$$F(h) = \frac{4}{3} \cdot E' \cdot \sqrt{R} \cdot \omega \cdot h^{2/3} \quad (3.1)$$

где, F — сила, с которой давит индентор, E' — приведенный модуль упругости вблизи поверхности, R — радиус закругления индентора, ω — безразмерный подгоночный коэффициент и h — смещение индентора относительно исходной поверхности. Модификация заключается в добавлении безразмерного коэффициента ω , который предназначен для компенсации геометрических искажений формы индентора от идеальной сферы. Значение коэффициента ω для используемого в настоящих исследованиях индентора Берковича определяли из анализа экспериментальных данных наноиндентирования калибровочного образца из плавленного кварца. По данным наноиндентирования калибровочного образца было определено, что коэффициент ω для используемого наконечника равен 1.09.

4. Анализ результатов. 4.1. Исследование структурных характеристик. Исследование гибридных подложек SiC/Si методом спектральной эллипсометрии показало, что толщины всех слоев SiC, выращенных на подложках Si одинаковы и равны 3 нм. По данным оптической профилометрии шероховатость поверхности всех гибридных подложек SiC/Si составляет 0.4–0.6 нм. Изучение морфологии поверхности тонких пленок AlGaN-методом ACM показало, что морфология слоев AlGaN существенно различна, в зависимости от того на какой из ориентаций подложек Si эти слои были выращены. Это и не удивительно, поскольку в работах [1, 2, 14] было показано, что при росте методом согласованного замещения атомов, только на подложке Si ориентации (111) образуется гладкая поверхность SiC ориентации (111). В случае роста SiC на гранях (001) и (011) Si поверхность слоя SiC покрывается пирамидками с наклонными гранями ориентации (111). В результате эти поверхности похожи на пилообразные структуры. Растут на этих поверхностях пленки AlN, GaN и AlGaN в виде наклонных по отношению к плоскости подложки гексагональных блоков c -ось которых будет направлена перпендикулярно плоскости структуры SiC(111), т.е. параллельно плоскости SiC(111) будут формироваться плоскости (0001) блоков состоящих из $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$ с различного состава. Такие наклонные гексагональные слои называются полуполярными слоями [15–17]. Растут полуполярные структуры на гибридных подложках SiC/Si, как с буферным слоем AlN, так и без него.

Исследования морфологии показали, что характерные геометрические размеры структурных элементов поверхности слоя AlGaN на подложках SiC/Si и на подложках AlN/SiC/Si различны. Так, размер пилообразных структур, выращенных на подложке AlN/SiC/Si(001) меньше геометрического размера структур, выращенных на подложке SiC/Si. В случае пленок AlGaN, выращенных на подложках Si с ориентацией (001) поверхность имеет пилообразную структуру, которая состоит из кластеров в виде хребтов. Среднеквадратичная шероховатость поверхности гетероструктур AlGaN/SiC/Si(001) и AlGaN/AlN/SiC/Si(001) равна 810 и 680 нм соответственно. Характерные профили поверхности пленок AlGaN, сформированных на гибридных подложках SiC/Si(001) с буферным слоем AlN и без него в виде зависимостей высоты профиля Z от длины сечения L представлены на рис. 1. На рис. 1 размерность осей Z и L указана в микрометрах.

Поверхность пленок AlGaN, выращенных на подложках Si с ориентацией (011) имеет мозаичную структуру с явно выраженными ступенями. По данным ACM среднеквадратичная шероховатость пленок AlGaN, сформированных на подложках SiC/Si(011) и AlN/SiC/Si(011) равна 480 и 700 нм соответственно, т.е., в отличие от подложек SiC/Si(001) и AlN/SiC/Si(001) предварительно выращенный слой AlN привел к увеличению шероховатости. Профили поверхности в виде зависимостей высоты профиля Z от длины сечения L для слоев AlGaN на гетероструктурах SiC/Si(011) и

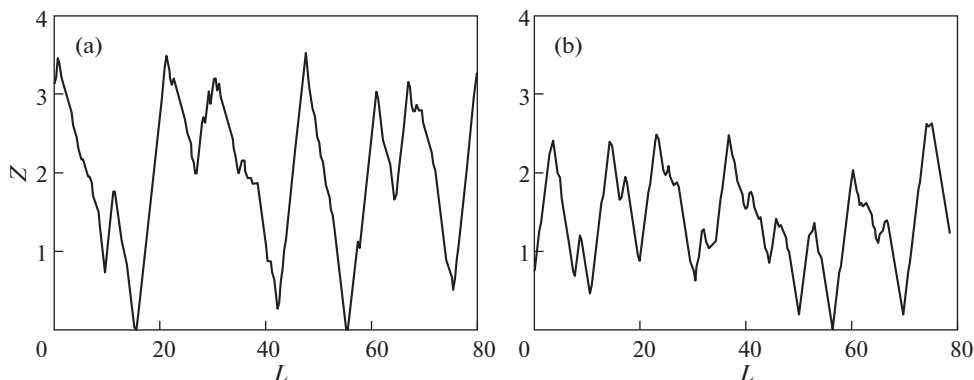


Рис. 1. Профиль поверхности гетероструктур AlGaIn/SiC/Si(001) – (a) и AlGaIn/AlN/SiC/Si(001) – (b).

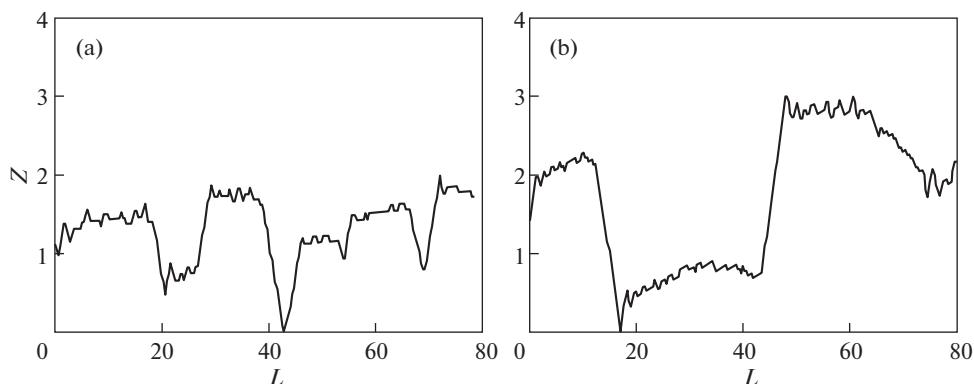


Рис. 2. Профиль поверхности гетероструктур AlGaIn/SiC/Si(011) – (a) и Al-GaIn/AlN/SiC/Si(011) – (b).

AlN/SiC/Si(011) изображены на рис. 2. На рис. 2 размерность осей Z и L указана в микрометрах.

Анализ АСМ-изображений слоев AlGaIn, выращенных на гетероструктурах SiC/Si(111) и AlN/SiC/Si(111) показал, что поверхность в процесс роста сформировалась в виде холмов. При этом среднеквадратичная шероховатость поверхности пленок AlGaIn в обоих случаях равна 60 нм. Профили поверхности в виде зависимостей высоты профиля Z от длины сечения L для образцов AlGaIn/SiC/Si(111) и AlGaIn/AlN/SiC/Si(111) изображены на рис. 3, а и рис. 3, б соответственно. На рис. 3 размерность осей Z и L указана в микрометрах.

Таким образом, наличие буферного слоя AlN приводит к уменьшению характерных размеров элементов структуры поверхности слоя AlGaIn, выращенного на структуре nano-SiC на Si с ориентацией (001). В случае пленок AlGaIn, сформированных на гибридных подложках SiC/Si(011) буферный слой AlN, напротив, приводит к увеличению элементов структуры поверхности. Предварительное формирование буферного слоя AlN на подложках SiC/Si(111) не влияет на размеры элементов структуры поверхности.

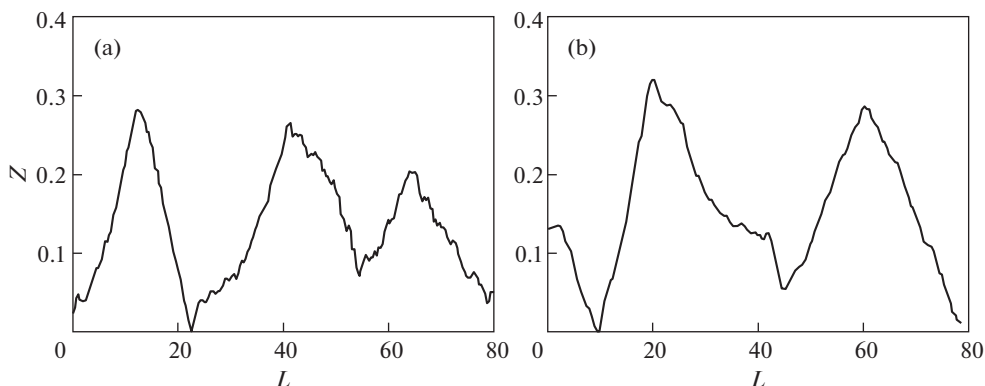


Рис. 3. Профиль поверхности гетероструктур AlGaIn/SiC/Si(111) – (a) и AlGaIn/AlN/SiC/Si(111) – (b).

4.2. Наноиндентирование пленок AlGaIn. В настоящем разделе описаны результаты наноиндентирования тонких пленок AlGaIn, выращенных методом ХГЭ на гибридных подложках SiC/Si(001), SiC/Si(011) и SiC/Si(111) с буферным слоем AlN и при его отсутствии.

Данные по наноиндентированию пленок AlGaIn, сформированных на подложках SiC/Si(001) и AlN/SiC/Si(001) можно разделить на два типа, отличающиеся друг от друга наклоном кривых нагрузки и разгрузки. Анализ начального этапа вдавливания с учетом соотношения (3.1) показал, что приведенный модуль упругости вблизи поверхности равен 150 ± 50 и 195 ± 60 ГПа для слоев AlGaIn на SiC/Si(001) и на AlN/SiC/Si(001), соответственно. В случае наноиндентирования образца AlGaIn/SiC/Si(001) метод Оливера-Фарра показывает, что условный 1 тип данных можно охарактеризовать параметрами твердости и приведенного модуля упругости 12.0 ± 1.0 и 260 ± 50 ГПа соответственно. Для 2-го типа данных наноиндентирования гетероструктуры AlGaIn/AlN/SiC/Si(001) параметры твердости и приведенного модуля упругости соответствуют значениям 15.7 ± 2.9 и 340 ± 40 ГПа соответственно. Экспериментальные зависимости твердости H и приведенного модуля упругости E_r от контактной глубины погружения индентора в материал h_c изображены на рис. 4. Зависимости для типов данных 1 и 2 отмечены соответствующими цифрами. На рис. 4 размерность осей H и E_r указаны в гигапаскалях, а ось h_c в нанометрах.

В случае анализа методом Оливера-Фарра кривых наноиндентирования гетероструктуры AlGaIn/AlN/SiC/Si(001) 1 тип данных соответствует твердости 12.5 ± 2.6 ГПа и приведенному модулю упругости 240 ± 45 ГПа, а 2 тип данных характеризуется твердостью 19 ± 4.6 ГПа и приведенным модулем упругости 330 ± 70 ГПа. Зависимости твердости H и приведенного модуля упругости E_r от глубины контакта индентора с материалом h_c изображены на рис. 5. Зависимости для типов данных 1 и 2 отмечены соответствующими цифрами. На рис. 5 размерность осей H и E_r указаны в гигапаскалях, а ось h_c в нанометрах.

Таким образом, дополнительный буферный слой AlN сформированный на подложках SiC/Si(001) приводит к повышению модуля упругости и твердости слоя AlGaIn.

Анализ данных наноиндентирования образца AlGaIn/SiC/Si(011) показал, что экспериментальные зависимости на начальном этапе вдавливания можно охарактеризовать приведенным модулем упругости вблизи поверхности равным 190 ± 50 ГПа. При этом параметры твердости и приведенного модуля упругости, рассчитанные методом Оливе-

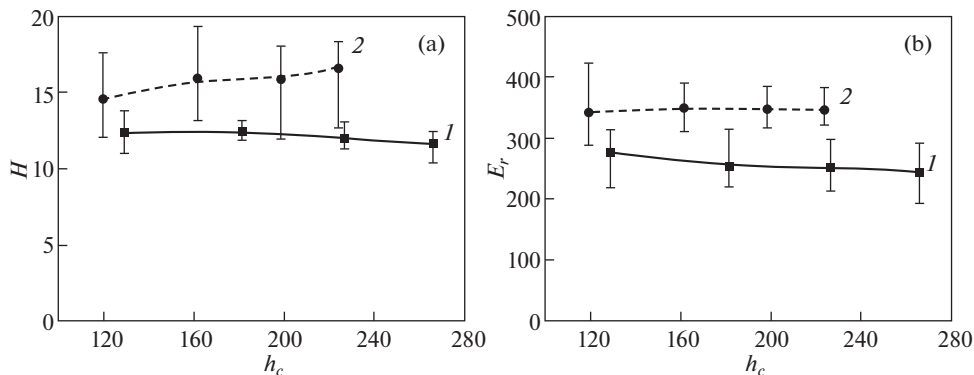


Рис. 4. Зависимости твердости — (а) и приведенного модуля упругости — (б) от контактной глубины погружения для AlGaIn/SiC/Si(001).

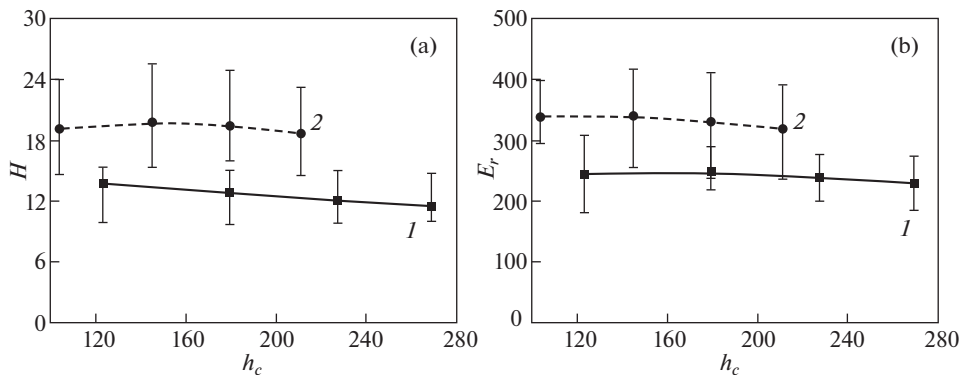


Рис. 5. Зависимости твердости — (а) и приведенного модуля упругости — (б) от контактной глубины погружения для AlGaIn/AlN/SiC/Si(001).

ра—Фарра на контактных глубинах погружения от 130 до 270 нм равны 12.2 ± 1.2 ГПа и 300 ± 40 ГПа соответственно. В случае гетероструктуры AlGaIn/AlN/SiC/Si(001) приведенный модуль упругости вблизи поверхности равен 100 ± 10 ГПа, а значения твердости и приведенного модуля упругости на контактной глубине индентирования от 140 до 260 нм равны 11.8 ± 1.3 ГПа и 260 ± 40 ГПа, соответственно. Соответствующие экспериментальные зависимости параметров твердости H и приведенного модуля упругости E_r от контактной глубины погружения h_c представлены на рис. 6. Цифрами 1 и 2 отмечены зависимости для гетероструктур AlGaIn/SiC/Si(011) и AlGaIn/AlN/SiC/Si(011) соответственно. На рис. 6 размерность осей H и E_r указаны в гигапаскалях, а ось h_c в нанометрах.

Таким образом, если дополнительно сформированный буферный слой AlN на подложках SiC/Si(001) приводит к повышению модуля упругости и твердости слоя AlGaIn, то этот же слой AlN сформированный на подложках SiC/Si(011) приводит к противоположной ситуации, а именно он приводит к уменьшению (незначительному) модуля упругости и прочности, на небольших глубинах индентирования.

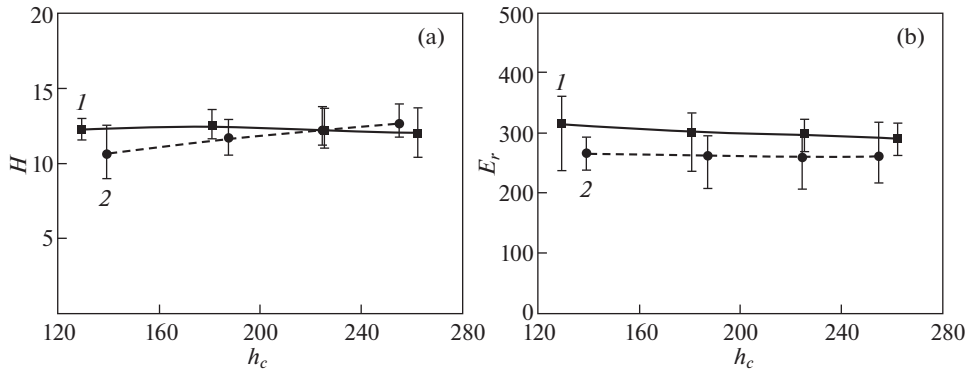


Рис. 6. Зависимости твердости — (а) и приведенного модуля упругости — (б) от контактной глубины погружения для гетероструктур: 1 — AlGaIn/SiC/Si(011) и 2 — AlGaIn/AlN/SiC/Si(011).

В случае измерения пленок AlGaIn, сформированных на гибридной подложке SiC/Si(111) и гетероструктуре AlN/SiC/Si(111) экспериментальные кривые на начальном этапе нагружения соответствуют приведенному модулю упругости вблизи поверхности 310 ± 40 и 160 ± 15 ГПа соответственно. Анализ данных наноиндентирования с контактной глубиной погружения 100–230 нм методом Оливера–Фарра показал, что у пленки AlGaIn на гибридной подложке SiC/Si(111) твердость равна 18.0 ± 3.6 ГПа, а приведенный модуль упругости 300 ± 40 ГПа. В случае гетероструктуры AlGaIn/AlN/SiC/Si(111) параметры твердости и приведенного модуля упругости в интервале контактных глубин погружения от 120 до 240 нм равны 14.1 ± 1.3 и 290 ± 30 ГПа соответственно. Зависимости твердости H и приведенного модуля упругости E_r от контактной глубины погружения h_c для тонких пленок AlGaIn, выращенных на структурах SiC/Si(111) и AlGaIn/AlN/SiC/Si(111) представлены на рис. 7. Зависимости для гетероструктур AlGaIn/SiC/Si(111) и AlGaIn/AlN/SiC/Si(111) обозначены цифрами 1 и 2 соответственно. На рис. 7 размерность осей H и E_r указаны в гигапаскалях, а ось h_c в нанометрах.

Из рис. 7 следует, что модули упругости пленок AlGaIn, выращенных на подложках SiC/Si(111) и AlN/SiC/Si(111) практически неотличимы друг от друга, однако, их твердости различны. Твердость пленок AlGaIn, выращенных на подложке SiC/Si(111) несколько больше, особенно вблизи поверхности, твердости пленок AlGaIn, сформированных на подложке AlN/SiC/Si(111). Интересно отметить, что в работе [6] было обнаружено, что пироккоэффициент слоев AlGaIn, выращенных на подложках AlN/SiC/Si(111), со слоем AlN в два раза превышает пироккоэффициент слоев AlGaIn, сформированных на подложках SiC/Si(111) без подслоя AlN.

5. Заключение. В работе методом наноиндентирования проведены исследования механических и деформационных свойств тонких пленок AlGaIn, сформированных методом ХГЭ на подложках SiC/Si и подложках AlN/SiC/Si с ориентацией Si (001), (011) и (111). Экспериментально была установлена однозначная связь между механическими свойствами (модуль упругости и твердость) структурой поверхности пленок AlGaIn. Методом АСМ были определены параметры среднеквадратичной шероховатости поверхности слоев AlGaIn. Показано, что структура поверхности слоев AlGaIn выращенных на подложках Si с ориентациями (001), (011) и (111) кардинально отличается. Экспериментально обнаружено, что буферный слой AlN существенно влияет на данные наноиндентирования пленок AlGaIn в начальный момент вдавливания, когда

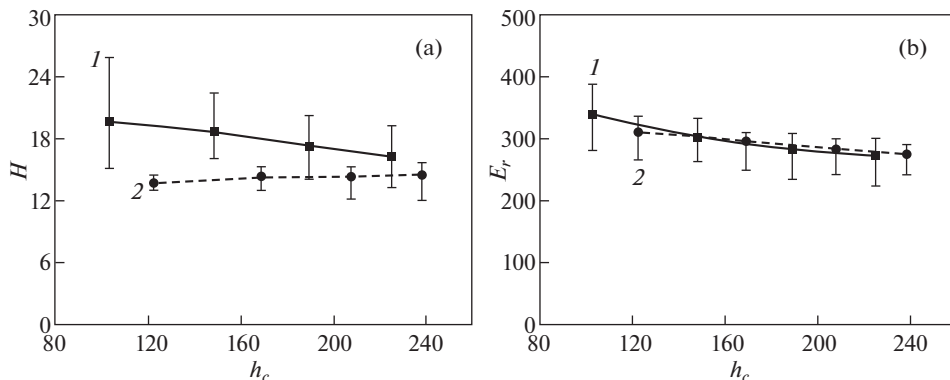


Рис. 7. Зависимости твердости — (а) и приведенного модуля упругости — (б) от контактной глубины погружения для гетероструктур: 1 — AlGaIn/SiC/Si(111) и 2 — AlGaIn/AlN/SiC/Si(111).

происходит преимущественно упругая деформация слоя. В результате исследований было установлено, что буферный слой AlN, выращенный на слоях SiC, сформированных на подложках Si ориентации (001), приводит к увеличению параметра приведенного модуля упругости и твердости слоя AlGaIn вблизи его поверхности. При росте пленок AlGaIn на слоях SiC, сформированных на подложках Si ориентации (011), как показали исследования, возникает обратная ситуация, а именно, присутствие буферного слоя AlN уменьшает значение модуля упругости и понижает прочность слоя AlGaIn на небольших глубинах индентирования. Буферный слой AlN, выращенный на слоях SiC, сформированных на подложках Si ориентации (111) не влияет на механические свойства пленок AlGaIn. Методом Оливера—Фарра были впервые рассчитаны параметры твердости и приведенного модуля упругости слоев AlGaIn, выращенных на гибридных подложках SiC/Si и гетероструктурах AlN/SiC/Si. Обнаружено, что в случае пленок AlGaIn, сформированных на SiC/Si(001) и AlN/SiC/Si(001) данные наноиндентирования можно разделить на два типа данных с различными параметрами твердости и приведенного модуля упругости.

Эти данные открывают новые возможности для управления технологией получения пленок AlGaIn с низкой плотностью дислокаций и трещин, что важно для их применения в микро- и оптоэлектронике.

Финансирование работы. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (грант № 20-12-00193).

Благодарности. Исследования проводились с использованием оборудования УНУ “Физика, химия и механика кристаллов тонких пленок” ИПМаш РАН, Санкт-Петербург.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kukushkin S.A., Osipov A.V.* Nanoscale single-crystal silicon carbide on silicon and unique properties of this material // *Inorganic Materials*. 2021. V. 57. P. 1319–1329. <https://doi.org/10.1134/S0020168521130021>
2. *Кукушкин С.А., Осипов А.В.* Эпитаксиальный карбид кремния на кремнии. Метод согласованного замещения атомов // *Журнал общей химии*. 2022. Т. 94. № 4. С. 547–577. <https://doi.org/10.31857/S0044460X22040023>
3. *Karpov S.Y., Podolskaya N.I., Zhmakina I.A., Zhmakina A.I.* Statistical model of ternary group-III nitrides // *Phys. Rev. B*. 2004. V. 70. P. 235203. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.70.235203>

4. Кукушкин С.А., Шарофидинов Ш.Ш., Осипов А.В., Гращенко А.С., Кандаков А.В., Осипова Е.В., Котляр К.П., Убийвовк Е.В. Самоорганизация состава пленок $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$, выращенных на гибридных подложках SiC/Si // ФТТ. 2021. № 3. С. 363–369.
<https://doi.org/10.21883/FTT.2021.03.50587.234>
5. Шарофидинов Ш.Ш., Кукушкин С.А., Старицын М.В., Солнышкин А.В., Сергеева О.Н., Кантелов Е.Ю., Пронин И.П. Структура и свойства композитов на основе нитридов алюминия и галлия, выращенных на кремнии разной ориентации с буферным слоем карбида кремния // ФТТ. 2022. № 5. С. 522–527.
<https://doi.org/10.21883/FTT.2022.05.52331.250>
6. Солнышкин А.В., Сергеева О.Н., Шустова О.А., Шарофидинов Ш.Ш., Старицын М.В., Кантелов Е.Ю., Кукушкин С.А., Пронин И.П. Диэлектрические и пьезоэлектрические свойства композитов на основе нитридов алюминия и галлия, выращенных методом хлорид-гибридной эпитаксии на подложке карбида кремния на кремнии // Письма в ЖТФ. 2021. № 9. С. 7–10.
<https://doi.org/10.21883/PJTF.2021.09.50898.18673>
7. Manandhar M.B., Matin M.A. Comparative modelling and thermal analysis of AlGa_N/Ga_N power devices // J. Low Power Electron. Appl. 2021. V. 11 (3). P. 33.
<https://doi.org/10.3390/jlpea11030033>
8. Ben Amar A., Faucher M., Brandli V., Cordier Y., Théron D. Young's modulus extraction of epitaxial heterostructure AlGa_N/Ga_N for MEMS application // Phys. Status Solidi A. 2014. V. 211. № 7. P. 1–5.
<https://doi.org/10.1002/pssa.201330339>
9. Шарофидинов Ш.Ш., Кукушкин С.А., Редьков А.В., Гращенко А.С., Осипов А.В. Рост полупроводниковых III–V гетероструктур на подложках SiC/Si // Письма в ЖТФ. 2019. № 14. С. 24.
<https://doi.org/10.1134/S1063785019070277>
10. Кукушкин С.А., Шарофидинов Ш.Ш. Новый метод получения объемных кристаллов AlN, GaN и AlGa_N с использованием гибридных подложек SiC/Si // ФТТ. 2019. № 12. С. 2338–2343.
<https://doi.org/10.21883/FTT.2019.12.48549.51ks>
11. Гращенко А.С., Кукушкин С.А., Николаев В.И., Осипов А.В., Осипова Е.В., Сошников И.П. Исследование анизотропных упругопластических свойств пленок β-Ga₂O₃, синтезированных на подложках SiC/Si // ФТТ. 2018. № 5. С. 851–856.
<https://doi.org/10.21883/FTT.2018.05.45776.321>
12. Oliver W.C., Pharr G.M. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments // Journal of Materials Research. 1992. V. 7. P. 1564–1583.
<https://doi.org/10.1557/JMR.1992.1564>
13. Hertz H. On the contact of elastic solids // Z. Reine Angew. Math. 1881. V. 92. P. 156–171.
14. Kukushkin S.A., Osipov A.V., Soshnikov I.P. Growth of epitaxial SiC layer on Si (100) surface of n- and p-type of conductivity by the atoms substitution method // Rev. Adv. Mater. Sci. 2017. V. 52. P. 29–42.
15. Bessolov V.N., Konenkova E.V., Kukushkin S.A., Osipov A.V., Rodin S.N. Semipolar gallium nitride on silicon: technology and properties // Rev. Adv. Mater. Sci. 2014. V. 38. P. 75–93.
16. Koryakin A.A., Kukushkin S.A., Osipov A.V., Sharofidinov S.S., Shcheglov M.P. Growth mechanism of semipolar AlN layers by HVPE on hybrid SiC/Si(110) substrates // Materials. 2022. V. 15 (18). P. 6202.
<https://doi.org/10.3390/ma15186202>
17. Корякин А.А., Кукушкин С.А., Осипов А.В., Шарофидинов Ш.Ш., Щеглов М.П. Новый метод релаксации упругих напряжений при росте гетероэпитаксиальных пленок // Изв. РАН. МТТ. 2023 (в печати).

УДК 539.3

РАСЧЕТ РЕСУРСНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНСТРУКЦИОННЫХ СПЛАВОВ ПРИ ВЗАИМНОМ ВЛИЯНИИ УСТАЛОСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛА

© 2023 г. И. А. Волков^{a,*}, Л. А. Игумнов^{a,**},
А. И. Волков^{a,***}, А. И. Юдинцева^{a,****}

^aНИИ механики Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Н. Новгород, Россия

*e-mail: pmptmvgavt@yandex.ru

**e-mail: igumnov@mech.unn.ru

***e-mail: Volkovandr89@gmail.com

****e-mail: anna.iudintseva@gmail.com

Поступила в редакцию 09.11.2022 г.

После доработки 20.11.2022 г.

Принята к публикации 24.11.2022 г.

Рассматриваются процессы деградации начальных прочностных свойств поликристаллических конструкционных сплавов при механизмах, сочетающих малоцикловую усталость и длительную прочность материала. С позиций механики поврежденной среды (МПС), механики разрушения (МР) развита математическая модель, описывающая процессы циклического вязкопластического деформирования и накопления повреждений в конструкционных сплавах при многоосных непропорциональных режимах комбинированного термомеханического нагружения. Модель состоит из трех взаимосвязанных составных частей: соотношений, определяющих циклическое вязкопластическое поведение материала с учетом зависимости от процесса разрушения; эволюционных уравнений описывающих кинетику накопления повреждений; критерия прочности поврежденного материала. Модель вязкопластичности основана на представлении о существовании в пространстве напряжений поверхностей пластичности и ползучести и принципе градиентальности векторов скоростей пластических деформаций и деформаций ползучести к соответствующей поверхности в точке нагружения. Данный вариант уравнений состояния отражает основные эффекты циклического вязкопластического деформирования материала для произвольных сложных траекторий нагружения. Вариант кинетических уравнений накопления повреждений основан на введении скалярного параметра поврежденности, базируется на энергетических принципах и учитывает основные эффекты образования, роста и слияния микродефектов при произвольных сложных режимах комбинированного термомеханического нагружения. Предложена совместная форма эволюционного уравнения накопления повреждений в областях малоциклового усталости и длительной прочности материала. В качестве критерия прочности поврежденного материала используется условие достижения величиной поврежденности критического значения. Получены материальные параметры и скалярные функции, входящие в определяющие соотношения математической модели МПС. Приводятся результаты численного моделирования процессов деформирования и накопления повреждений в конструкционных сплавах при взаимном влиянии малоциклового усталости и длительной прочности материала. Результаты сопоставления расчетных и экспериментальных данных показали, что предложенная модель МПС качественно и с необходимой для практических расчетов точностью количественно

описывает долговечность материалов при взаимном влиянии малоциклового усталости и длительной прочности материала.

Ключевые слова: малоцикловая усталость, длительная прочность, моделирование, механика поврежденной среды, напряженно-деформированное состояние, поврежденность, ресурс, материальные параметры, численный и натурный эксперимент

DOI: 10.31857/S0572329922600840, **EDN:** JMPNTY

1. Введение. Одной из основных задач современного машиностроения является обоснование ресурса оборудования и систем ответственных инженерных объектов (ОИО) на стадии их проектирования, оценка выработанного и прогноз остаточного ресурса конструктивных узлов в процессе эксплуатации, продление срока службы после отработки объектами нормативного срока службы. Особенно актуальны эти задачи для объектов, срок службы которых составляет несколько десятков лет (атомные энергетические установки, нефтехимическое оборудование, резервуары для хранения газообразных и сжиженных химических продуктов, магистральные газо- и нефтепроводы и т.п.). Эксплуатационные условия их работы характеризуются многопараметрическими нестационарными термомеханическими воздействиями, воздействиями внешних полей различной физической природы, приводящими к развитию различных механизмов деградации начальных прочностных свойств конструкционных материалов и исчерпанию начального ресурса конструктивных узлов инженерного объекта [1, 2].

Процессы исчерпания ресурса являются многостадийными, нелинейными, взаимосвязанными и сильно зависящими от конкретных условий изготовления и эксплуатации индивидуального объекта.

Существует большое количество механизмов, которые могут определять процессы исчерпания ресурса конкретного объекта в зависимости от условий его эксплуатации: многоцикловая усталость (МнЦУ), малоцикловая усталость (МЦУ), длительная прочность (ДП) и др. (с учетом их взаимодействия). Для указанных механизмов образование макроскопической трещины является результатом последовательного действия определенного числа очень сложных с физической точки зрения процессов преобразования начальной структуры конструкционного материала, включающих зарождение, развитие и взаимодействие различных дефектов кристаллической решетки в металлах и взаимодействие иерархических структурных составляющих различного уровня.

Реальные условия нагружения многих конструктивных элементов характеризуются циклическим изменением температуры и напряжений. Процесс разрушения при взаимном влиянии длительной прочности и малоциклового усталости происходит в результате циклического приложения нагрузки при повышенной температуре, выдержках нагрузки и активации механизмов деформации, зависящих от времени. Повреждения от ползучести (длительная прочность) и нестационарной пластической деформации (малоцикловая усталость) материала имеют различный физический характер. С микроскопической точки зрения можно считать, что повреждение при ползучести носит межкристаллитный характер, в то время как усталостное повреждение соответствует накоплению микротрещин по телу зерна (транскристаллитный характер). Когда в соответствии с условиями нагружения (циклическая деформация с выдержками при высокой температуре) оба процесса развиваются одновременно, имеется возможность для их взаимодействия, которая проявляется в виде сильно нелинейных эффектов, неблагоприятных для общей долговечности материала [2–8]. На микроскопическом уровне это объясняется тем, что межкристаллитные микротрещины при ползучести имеют тенденцию к образованию и развитию на очень раннем этапе жизни элементарного объема конструкционного материала. Присутствие таких дефектов за счет ползучести способствует зарождению транскристаллитных трещин при усталости.

К настоящему времени сложилась система классификации критериев малоциклового разрушения при ползучести в условиях высоких температур в зависимости от принятой меры интенсивности накопления усталостного повреждения и типа уравнений, определяющих параметр повреждения [9]. Наиболее представительными являются группы критериев следующих типов: деформационные (включающие деформацию или ее составляющие, которые характеризуют цикл деформирования в целом); кинетические (определяющие скорость повреждения и его критическое значение); энергетические (связывающие накопление повреждения с диссипацией энергии неупругого деформирования); критерии, базирующиеся на характеристиках длительной прочности. Достаточно полные обзоры по этому вопросу содержатся в работах [10–13].

Отметим, что, удовлетворительно описывая закономерности малоциклового разрушения при сравнительно простых программах нагружения, названные критерии утрачивают это свойство, когда требуется отразить влияние особенностей конкретного цикла, например, характера выдержки (ползучесть, релаксация), порядка чередования этапов пластического и вязкого деформирования как в полцикле растяжения, так и в полцикле сжатия, закона изменения температуры и т.п.

До сих пор ни процесс накопления повреждений в результате ползучести, ни процесс накопления повреждений в результате МЦУ как следует не изучены, поэтому не удивительно, что процесс, при котором одновременно накапливаются и взаимодействуют оба вида поврежденности, также до конца не изучен. Тем не менее, в ряде практически важных случаев эти процессы протекают одновременно, взаимодействуя друг с другом значительно влияя на ресурс конструктивного элемента. Обстоятельства осложняются тем, что во время эксплуатации такие элементы подвергаются действию переменных напряжений при постоянных температурах, переменных температур при постоянных напряжениях, или когда напряженно-деформированное состояние и температура меняются одновременно с различными периодами. Кроме того, экспериментальные факты свидетельствуют о том, что взаимодействие процессов малоцикловой усталости и длительной прочности синергично. В настоящее время не существует общей теории, которая бы позволяла предсказывать длительную прочность при циклическом изменении температуры в условиях действия постоянного напряжения, циклического изменения напряжения с выдержками различной длительности при постоянной температуре и в условиях, когда и напряжение и температура изменяются по различным законам. В реальных условиях эксплуатации конструктивных элементов энергетического оборудования длительности циклов термосилового нагружения могут составлять от нескольких секунд до десятков и сотен часов, причем знакопеременное вязкопластическое деформирование материала в районе конструктивных или технологических концентраторов напряжений сопровождается температурно-временными эффектами и ползучестью. Деформация ползучести и инициируемый ими процесс повреждаемости могут развиваться как в процессе выдержки под нагрузкой, так и при монотонном процессе нагружения или разгрузки, происходящих с достаточно низкой скоростью. Одновременное развитие в цикле изменения нагрузки процессов повреждения в результате малоцикловой усталости и длительной прочности оказывает заметное влияние на механизм малоциклового разрушения и долговечность материала, причем важными факторами являются форма цикла нагружения, асимметрия и знак напряжений, вид напряженного состояния, на фоне которых развиваются деформации ползучести.

Поскольку в реальных условиях длительные циклы нагружения могут быть достаточно сложными, включать участки активного нагружения и разгрузки с различными скоростями, выдержки в промежуточных точках цикла, были проведены исследования по выявлению наиболее характерных режимов нагружения [6, 7, 14–16]. Эти эксперименты показывают, что наложение времен выдержки при растяжении более $t = 1\text{--}2$ мин при повышенных температурах может вызвать резкое уменьшение уста-

лостной долговечности и изменение типа разрушения с внутризеренного на межзеренное. Времена выдержки при сжатии или циклы, включающие равные времена выдержки при растяжении и сжатии (симметричная выдержка), приводят к меньшим повреждениям, чем выдержка при растяжении. Разрушение в этих случаях внутризеренное. При циклах “медленно-быстро”, когда малая скорость деформации приходится на растягивающую часть цикла, также наблюдается значительное снижение долговечности (по числу циклов) по сравнению с симметричным циклированием с переходом на межзеренное разрушение. Если за каждым циклом типа “медленно-быстро” следует цикл типа “быстро-медленно” с аналогичными скоростями деформаций, то разрушение становится внутризеренным, а долговечность (по числу циклов) возрастает по сравнению с долговечностью при циклировании типа “медленно-быстро”. Повреждение, образовавшееся в процессе циклирования с выдержками при растяжении, не уменьшается при последующем непрерывном циклировании.

Рассмотренные выше результаты приводят к выводу, что линейный закон суммирования повреждений (гипотеза Пальмгрена–Майнера) по механизму совместной деградации малоциклового усталости и длительной прочности не применим, поскольку это совершенно различные процессы, проявляющие нелинейное взаимодействие. Для суммирования этих повреждений предложено несколько способов в основном, имеющих эмпирический или полуэмпирический характер и справедливых только для частных законов нагружения [4–7, 15]. По-видимому, единственным из этих способов, позволяющих исследовать сложные процессы нагружения, является способ разделения размаха деформаций в цикле на пластическую деформацию и деформацию ползучести. Этот способ позволяет анализировать результаты совместного действия ползучести и усталости и интерпретировать влияние частоты, времени выдержки и условий окружающей среды.

В настоящей работе с современных позиций МПС, механики разрушения развита математическая модель, описывающая процессы циклического вязкопластического деформирования и накопления повреждений в конструкционных материалах (металлах и их сплавах) при деградации начальных прочностных свойств материалов по совместным механизмам малоциклового усталости и длительной прочности материала. В целях качественной и количественной оценки модели проведено исследование влияния законов изменения механической деформации и температуры (формы цикла нагружения) на долговечность конструкционных сталей при различных циклах нагружения.

2. Определяющие соотношения математической модели механики поврежденной среды. Модель поврежденной среды при механизмах деградации, сочетающих малоцикловую усталость и длительную прочность материала, состоит из трех взаимосвязанных составных частей [17–20]:

- определяющих соотношений, описывающих вязкопластическое поведение материала с учетом зависимости от процесса разрушения;
- эволюционных уравнений, описывающих кинетику накопления повреждений;
- критерия прочности поврежденного материала.

2.1. Определяющие соотношения термовязкопластичности. Определяющие соотношения термовязкопластичности базируются на следующих основных положениях:

- материал среды начально изотропен и повреждения в нем отсутствуют (учитываются только анизотропия, вызванная процессами пластичности и ползучести; анизотропия упругих свойств, вызванная процессами поврежденности материала, не учитывается);

- тензоры деформаций и скоростей деформаций e_{ij} , $\dot{e}_{ij}$ представляют сумму “мгновенной” и “временной” составляющих. “Мгновенная” составляющая тензоров деформаций и скоростей деформаций включает упругую составляющую e_{ij}^e , $\dot{e}_{ij}^e$ (не зависящие от истории нагружения и определяющиеся конечным состоянием процесса) и

пластическую — $e_{ij}^p, \dot{e}_{ij}^p$ (зависящие от истории процесса нагружения). Временная составляющая тензоров деформаций и скоростей деформаций $e_{ij}^c, \dot{e}_{ij}^c$, связана с эволюцией процесса ползучести;

— начальная поверхность текучести описывается поверхностью в форме гиперсферы Мизеса. Эволюция изменения поверхности пластического нагружения описывается изменением ее радиуса C_p и перемещением ее центра $\dot{\rho}_{ij}^p$;

— в пространстве напряжений существует семейство эквипотенциальных поверхностей ползучести радиуса C_c и имеющих общий центр ρ_{ij}^c ;

— справедлив принцип градиентальности;

— изменение объема тела упруго $e_{ii}^n = 0$, где $e_{ij}^n = e_{ij}^p + e_{ij}^c$ — неупругая деформация, включающая в себя “мгновенную” и “временную” составляющие;

— рассматриваются процессы деформирования, характеризуемые малыми деформациями;

— единственным структурным параметром, характеризующим на макроуровне степень поврежденности материала, является скалярный параметр ω — поврежденность ($\omega_0 \leq \omega \leq \omega_f$);

— влияние уровня накопленной поврежденности на процессы деформирования материала учитывается путем введения эффективных напряжений.

Принимается, что в упругой области девиаторные σ'_{ij}, e'_{ij} и шаровые σ, e составляющие тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций e_{ij} , а также их скоростей связаны обобщенным законом Гука:

$$\begin{aligned}\sigma &= 3K[e - \alpha(T - T_0)], \quad \sigma_{ij} = 2Ge_{ij}^e, \quad \dot{\sigma} = 3K(\dot{e} - \dot{\alpha}T - \alpha\dot{T}) + \frac{\dot{K}}{K}\sigma \\ \sigma'_{ij} &= 2Ge'_{ij} + \frac{\dot{G}}{G}\sigma'_{ij}\end{aligned}\quad (2.1)$$

где $\alpha(T)$ — коэффициент линейного температурного расширения материала, $K(T)$ — модуль объемной упругости, $G(T)$ — модуль сдвига, T_0 — начальная температура, T — текущая температура.

Для описания эффектов монотонного и циклического деформирования в пространстве напряжений вводится поверхность текучести, которая описывается гиперсферой Мизеса [21, 22]:

$$F_p = S_{ij}S_{ij} - C_p^2 = 0, \quad S_{ij} = \sigma'_{ij}\rho_{ij}^p \quad (2.2)$$

где C_p — радиус поверхности текучести, а ρ_{ij}^p — координаты ее центра.

Для описания сложных режимов деформирования в пространстве деформаций вводится поверхность циклической “памяти” [23]:

$$a_e = (e_{ij}^p - \xi_{ij})(e_{ij}^p - \xi_{ij}) - a_{\max}^2 = 0 \quad (2.3)$$

где $a_{\max}$ — максимальное значение интенсивности тензора пластических деформаций e_{ij}^p , а ξ_{ij} — тензор односторонне накопленных пластических деформаций.

При моделировании кинетики напряженно-деформированного состояния (НДС) при циклическом пластическом деформировании материала необходимо максимально достоверно описывать процессы упрочнения и разупрочнения конструкционных материалов, так как данные механизмы играют определяющую роль в точности оценок ресурсных характеристик материала. При усталостном нагружении реализуется конкуренция процессов упрочнения и разупрочнения, вызванных в материале меха-

низмами изменения фазового состава, микроструктурного состояния, изменением плотности дислокаций, а также влияние изменения температуры [4, 5]. Физические механизмы, протекающие в поликристаллических металлах и сплавах и влияющие на процессы упрочнения, и разупрочнения, зависят от действующей температуры, вида траектории деформирования, длины пути пластического деформирования, действующих амплитуд интенсивности пластической деформации и степени стабилизации процесса деформирования.

Постулируем, что в диапазоне температур T , при которых эффектами отжига можно пренебречь, изотропное упрочнение (разупрочнение) материала можно представить в виде:

$$\dot{C}_p(\chi, T) = q_\chi \dot{\chi}_p^{mon} + a_p(Q_p^p - C_p^{cyc(p)}) \dot{\chi}_p^{cyc} + a_c(Q_p^c - C_p^{cyc(c)}) \dot{\chi}_c^{cyc} + q_T \dot{T} \quad (2.4)$$

$$C_p = C_p^0 + \int_0^t \dot{C}_p dt \quad (2.5)$$

$$q_\chi = q_2 A + (1 - A) q_1, \quad Q_p^p = Q_2^p A + (1 - A) Q_1^p, \quad Q_p^c = Q_2^c A + (1 - A) Q_1^c$$

$$A = 1 - \cos^2 \Theta, \quad \cos \Theta = n_{ij}^e n_{ij}^s, \quad n_{ij}^e = \frac{\dot{e}_{ij}^e}{(\dot{e}_{ij}^e \dot{e}_{ij}^e)^{1/2}}, \quad n_{ij}^s = \frac{S_{ij}}{(S_{ij} S_{ij})^{1/2}} \quad (2.6)$$

$$\dot{\chi}_p = \left(\frac{2}{3} \dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p \right)^{1/2}, \quad \chi_p = \int_0^t \dot{\chi}_p dt \quad (2.7)$$

$$\dot{\chi}_p^{mon} = \begin{cases} 0 & \text{при } a_e < 0 \vee e_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p \leq 0 \\ \dot{\chi}_p & \text{при } a_e = 0 \wedge e_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p \geq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\dot{\chi}_p^{cyc} = \begin{cases} \dot{\chi}_p & \text{при } a_e < 0 \vee e_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p \leq 0 \\ 0 & \text{при } a_e = 0 \wedge e_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p \geq 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

В формулах (2.4)–(2.9) введены следующие обозначения: C_p^0 – значение начального радиуса поверхности текучести материала; q_1, q_2, q_T – модули монотонного изотропного упрочнения (разупрочнения); $Q_1^p, Q_2^p, Q_1^c, Q_2^c$ – модули циклического изотропного упрочнения (разупрочнения); $\dot{\chi}_p^{mon}, \dot{\chi}_p^{cyc}, \dot{\chi}_c^{cyc}$ – длина траектории пластического деформирования материала на монотонных участках, на участках регулярного и нерегулярного циклического нагружений и на участках выдержки нагрузки соответственно.

Первый член уравнения (2.1) описывает изотропное упрочнение в результате монотонного пластического деформирования материала, второй – на участках циклического деформирования, третий – при действии процесса ползучести, а четвертый – при изменении температуры T . Уравнения (2.1)–(2.9) описывают изотропное упрочнение материала в зависимости от параметра непропорциональности процесса нагружения, описанного параметром A .

Постулируем, что скорость изменения тензора микронапряжений $\dot{\rho}_{ij}$ принимается в виде:

$$\dot{\rho}_{ij} = \dot{\rho}_{ij}^p + \dot{\rho}_{ij}^c, \quad \rho_{ij} = \int_0^t \dot{\rho}_{ij} dt \quad (2.10)$$

$$\dot{\rho}_{ij}^p = f(\chi)(\dot{\rho}_{ij}^m + \dot{\rho}_{ij}^r) \quad (2.11)$$

$$\dot{\rho}_{ij}^m = g_1^p \dot{e}_{ij}^p - g_2^p \rho_{ij}^p \dot{\chi} + g_T^p \rho_{ij}^p \langle \dot{T} \rangle, \quad \dot{\chi} = \dot{\chi}_p + \dot{\chi}_c \quad (2.12)$$

$$\dot{\rho}_{ij}^r = g_1^r \dot{e}_{ij}^p - g_2^r \left(\frac{\rho_{\min} - \rho_u}{\rho_u} \right) \rho_{ij}^r \dot{\chi} \cos \gamma + g_T^r \rho_{ij}^r \langle \dot{T} \rangle \quad (2.13)$$

$$\cos \gamma = \begin{cases} \left| \frac{\dot{\rho}_{ij} \rho_{ij}^r}{(\dot{\rho}_{ij} \dot{\rho}_{ij})^{1/2} (\rho_{ij}^r \rho_{ij}^r)^{1/2}} \right| & \text{при } \cos \gamma < 0, \quad \rho_u^r = (\rho_u^r \rho_u^r)^{1/2} \\ 0 & \text{при } \cos \gamma > 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

$$g_T^{p,r} = \frac{1}{g_1^{p,r}} \left[\frac{\partial g_1^{p,r}}{\partial T} \right] \quad (2.15)$$

$$f(\chi) = f(\chi_p^{mon}) + f(\chi_p^{cyc}) + f(\chi_\xi), \quad f(\chi_{c,\xi}) = 1 + k_1^{c,\xi} (1 - e^{-k_2^{c,\xi} \chi_{c,\xi}})$$

где $g_1^{p,r}, g_2^{p,r}, k_1^{c,\xi}, k_2^{c,\xi}$ — материалыные параметры, определяющиеся экспериментальным путем.

Здесь и далее для любой величины B заключенной в $\langle \rangle$, выполняется условие:

$$\langle B \rangle = \begin{cases} B, & B > 0 \\ 0, & B \leq 0 \end{cases}$$

В формуле (2.11) первый член, указанный в скобках, описывает эволюцию ρ_{ij}^p , связанную с образованием макроскопических пластических деформаций, а второй — при односторонне накапливаемых пластических деформаций ξ_{ij} .

Зависимость (2.11) позволяет описывать основные эффекты анизотропии, вызванной неупругим деформированием материала при знакопеременном нагружении, а также эффекты, возникающие при реализации “жестких” (“посадка” петли пластического гистерезиса) и “мягких” (“вышагивание” петли) режимов нагружения.

Функция $f(\chi)$ учитывает изменение ρ_{ij}^p при циклических блочных не симметричных режимах циклического пластического нагружения материала.

Компоненты тензора скоростей пластических деформаций $\dot{e}_{ij}^p$ определяются на основе ассоциированного закона течения:

$$\dot{e}_{ij}^p = \lambda_p S_{ij}, \quad S_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho_{ij} \quad (2.16)$$

Если величина напряжений, температура и скорость нагружения таковы, что эффекты ползучести существенны, параметры процесса деформирования материала должны определяться на этапе нагружения с учетом процесса ползучести.

Для описания процессов ползучести в пространстве напряжений вводится семейство эквипотенциальных поверхностей ползучести F_c имеющих общий центр ρ_{ij}^c и различные радиусы C_c , определяемые текущим напряженным состоянием [22]:

$$F_c^{(i)} = S_{ij}^c S_{ij}^c - C_c^2 = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

Согласно ассоциированному закону

$$\dot{e}_{ij}^c = \lambda_c \frac{\partial F_c^{(i)}}{\partial S_{ij}^c} = \lambda_c S_{ij}^c \quad (2.18)$$

где λ_c — соответствует текущей поверхности $F_c^{(i)}$, определяющей текущее напряженное состояние S_{ij}^c .

Среди этих эквипотенциальных поверхностей можно выделить поверхность с радиусом $\bar{C}_c$, соответствующую нулевой скорости ползучести:

$$F_c^{(0)} = \bar{S}_{ij}^c \bar{S}_{ij}^c - \bar{C}_c^2 = 0, \quad \bar{S}_{ij}^c = \bar{\sigma}_{ij}' - \rho_{ij}$$

где $\bar{S}_{ij}^c$ и $\bar{\sigma}_{ij}'$ — совокупность напряженных состояний, отвечающих (с определенным допуском) нулевой скорости ползучести.

Постулируем что, с учетом взаимного влияния процессов пластичности и ползучести выражение для радиуса поверхности ползучести нулевого уровня имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{C}_c &= \bar{C}_c(\chi_c, T) + C_c^{\text{cyc}}(\chi_c^{\text{cyc}}, T) \\ \dot{C}_c^{\text{cyc}} &= a_c(Q_c^p - C_c^{\text{cyc}})\dot{\chi}_c^{\text{cyc}} \\ Q_c^p &= Q_2^{cr} A + (1 - A)Q_1^c \\ \chi_c &= \left(\frac{2}{3}\dot{e}_{ij}^c \dot{e}_{ij}^c\right)^{1/2}, \quad \chi_c = \int_0^t \dot{\chi}_c dt \\ \dot{\chi}_c^{\text{mon}} &= \begin{cases} 0 & \text{при } a_e < 0 \vee \dot{e}_{ij}^c \dot{e}_{ij}^c \leq 0 \\ \dot{\chi}_c & \text{при } a_e = 0 \wedge \dot{e}_{ij}^c \dot{e}_{ij}^c \geq 0 \end{cases}, \quad \dot{\chi}_c^{\text{cyc}} = \begin{cases} \dot{\chi} & \text{при } a_e < 0 \vee \dot{e}_{ij}^c \dot{e}_{ij}^c \leq 0 \\ 0 & \text{при } a_e = 0 \wedge \dot{e}_{ij}^c \dot{e}_{ij}^c \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\lambda_c = \lambda_c(\psi_c, T) = \lambda_c \psi_c,$$

$$\psi_c = \left[\frac{(S_{ij}^c S_{ij}^c)^{1/2} - \bar{C}_c}{C_c} \right], \quad \lambda_c = \begin{cases} 0, & \psi_c \leq 0 \\ \lambda_c, & \psi_c > 0 \end{cases}$$

где $\bar{C}_c$ и λ_c — экспериментально определяемые функции температуры T .

Эволюционное уравнение для изменения координат центра поверхности ползучести примем в виде [29]:

$$\dot{\rho}_{ij}^c = g_1^c \dot{e}_{ij}^c - g_2^c \rho_{ij}^c \dot{\chi} + g_T^c \rho_{ij}^c \langle \dot{T} \rangle$$

где g_1^c и $g_2^c > 0$ — экспериментально определяемые материальные параметры.

Конкретизируя соотношение (2.18) закон градиентальности можно представить в виде:

$$\dot{e}_{ij}^c = \lambda_c(\psi_c, T) S_{ij}^c = \lambda_c \psi_c S_{ij}^c = \lambda_c \left(\frac{\sqrt{S_{ij}^c S_{ij}^c} - \bar{C}_c}{C_c} \right) S_{ij}^c$$

Интенсивность тензора скорости деформации ползучести имеет вид:

$$\dot{e}_u^c = \lambda_c \left(\frac{\sqrt{S_{ij}^c S_{ij}^c} - \bar{C}_c}{C_c} \right) S_u^c \quad (2.20)$$

С учетом (2.20) выражение для длины траектории деформаций ползучести примет вид:

$$\dot{\chi}_c = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{e}_c^u = \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda_c (\sqrt{S_{ij}^c S_{ij}^c} - \bar{C}_c)$$

откуда:

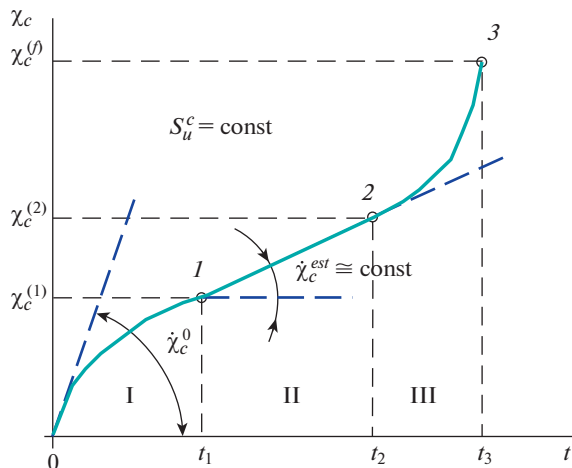


Рис. 1. Кривая ползучести при многоосном деформировании.

$$\lambda_c = \frac{\dot{\chi}_c}{\frac{2}{3}(\sqrt{S_{ij}^c S_{ij}^c} - \bar{C}_c)} \quad (2.21)$$

Зависимость χ_c от времени процесса t при $S_u^c = \text{const}$ при многоосном деформировании по лучевой траектории имеет вид, представленный на рис. 1.

На кривой $\chi_c \sim t$ (рис. 1) с определенной долей условности можно выделить три участка:

I. участок неустановившейся ползучести ($0 - \chi_c^{(1)}$) – скорость деформации ползучести $\dot{\chi}_c$ убывает;

II. участок установившейся ползучести ($\chi_c^{(1)} - \chi_c^{(2)}$) – скорость деформации ползучести $\dot{\chi}_c$ приблизительно постоянна $\dot{\chi}_c^{est} \cong \text{const}$, $\dot{\chi}_c \cong \text{const}$;

III. участок неустановившейся ползучести ($\chi_c > \chi_c^{(2)}$) – деформации ползучести быстро растут (предшествует разрушению) и $\dot{\chi}_c$ резко возрастает.

Длины участков существенным образом зависят от величины $S_u^c = \text{const}$.

Уравнения (2.19)–(2.23) описывают неустановившиеся и установившиеся участки кривой ползучести при разных уровнях напряжений и основные эффекты процесса ползучести при знакопеременном напряжении. Связь уравнений ползучести (2.19)–(2.23) с уравнениями (2.1)–(2.18), описывающими “мгновенные” пластические деформации, осуществляется на этапе нагружения через девиатор напряжений σ'_{ij} и соответствующий алгоритм определения $\dot{e}_{ij}^c$ и $\dot{e}_{ij}^p$ на этапе нагружения путем определенных соотношений между “временными” и “мгновенными” скалярными и тензорными величинами.

На стадии развития рассеянных по объему повреждений наблюдается влияние поврежденности на физико-механические характеристики материала. Это влияние может быть учтено введением эффективных напряжений [17, 18]:

$$\tilde{\sigma}'_{ij} = F_1(\omega)\sigma'_{ij} = \frac{G}{\tilde{G}}\sigma'_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{(1-\omega)\left[1 - \frac{(6K+12G)\omega}{(9K+8G)}\right]} \quad (2.22)$$

$$\tilde{\sigma} = F_2(\omega)\sigma = \frac{K}{\tilde{K}}\sigma = \frac{\sigma}{4G(1-\omega)/(4G+3K\omega)} \quad (2.23)$$

где $\tilde{G}$, $\tilde{K}$ – эффективные модули упругости, определяемые по формулам Маккензи [24].

Аналогично определяется эффективная переменная $\tilde{\rho}_{ij}$:

$$\tilde{\rho}_{ij} = F_1(\omega)\rho_{ij}$$

2.2. Эволюционные уравнения накопления повреждений. Уравнения накопления повреждений базируются на связи величины поврежденности с внутренними макроскопическими параметрами, критическое значение которых определяет момент разрушения (образования макроскопической трещины). Зависимость рассеянной энергии, затраченной на образование дефектов при усталостном нагружении, определяется через работу тензора микронапряжений $\tilde{\rho}_{ij}$ на необратимых деформациях $\dot{\epsilon}_{ij}^n$:

$$W_0 = \tilde{\rho}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^n \quad (2.24)$$

В задачах оценки ресурсных характеристик необходимо учитывать влияние многоосности нагружения, наличие которой существенным образом снижает ресурс за счет как увеличения влияния действующих компонент тензоров деформаций и напряжений при пропорциональном нагружении, так и за счет вращения главных площадок тензоров напряжений и деформаций при непропорциональном нагружении.

Многочисленные исследования влияния многоосности нагружения при различных видах напряженных состояний, таких как двухосное растяжение-сжатие, трехосное растяжение и др. позволяют сделать вывод, что на ресурс материала опасных зон конструктивных элементов оказывает существенное влияние “объемность” напряженно-го состояния, характеризуемая параметром $\beta = \sigma/\sigma_u$, где σ – гидростатическая компонента тензора напряжений, σ_u – интенсивность тензора напряжений.

Учет влияния “объемности” напряженного состояния на скорость роста поврежденности $\dot{\omega}$ производится за счет введения в уравнение скорости накопления повреждения функции $f_1(\beta)$, которая увеличивает скорость накопления повреждений $\dot{\omega}$ при нагружениях с $\beta \rightarrow +\infty$ и уменьшает скорость при $\beta \rightarrow -\infty$. При нагружениях с $\beta \rightarrow -\infty$ в некоторых поликристаллических металлах и сплавах возможно частичное уменьшение накопленной поврежденности (эффект “залечивания”).

В условиях непропорционального нагружения, при котором направляющие тензора напряжений и деформаций не соосны, реализуемая траектория деформирования существенным образом влияет на кинетику напряженно-деформированного состояния и на ресурсные характеристики конструкционного материала в целом.

Учитывая рассмотренные эффекты, влияющие на ресурсные характеристики, уравнение для скорости накопления усталостных повреждений в условиях малоциклового и многоциклового нагружения можно представить в виде:

$$\dot{\omega} = f_1(\beta)f_2(\omega)f_3(W_0)f_4(\Theta)\dot{W}_0 \quad (2.25)$$

В (2.25) введены следующие обозначения для функций, учитывающих влияние вышеописанных факторов: $f_1(\beta)$ – “объемности” напряженного состояния; $f_2(\omega)$ – накопленного уровня поврежденности; $f_3(W_0)$ – относительного уровня рассеянной энергии, идущей на образование микродефектов; $f_4(\Theta)$ – параметров траектории деформирования.

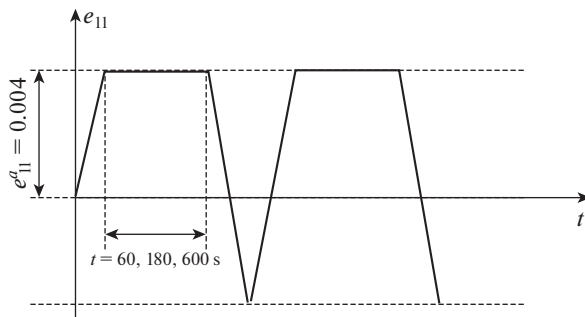


Рис. 2. Закон нагружения лабораторных образцов стали Р92.

$$f_1(\beta) = \exp(k\beta) \quad (2.26)$$

$$f_2(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{при } W_0 \leq W_a \\ \omega^{1/3} (1 - \omega)^{2/3}, & \text{при } W_0 > W_a \wedge \omega \leq 1/3 \\ \frac{\sqrt[3]{16}}{9} \omega^{-1/3} (1 - \omega)^{-2/3}, & \text{при } W_0 > W_a \wedge \omega > 1/3 \end{cases} \quad (2.27)$$

$$f_3(W_p) = \frac{W_0 - W_a}{W_f - W_a} \quad (2.28)$$

$$f_4(\Theta) = (1 - \cos^2 \Theta) \beta + \cos^2 \Theta \quad (2.29)$$

$$W_f = W_{pf}^{cyc} \frac{\dot{\chi}_p^{cyc}}{\dot{\chi}} + W_{cf}^{cyc} \frac{\dot{\chi}_c^{cyc}}{\dot{\chi}} + W_{pf}^{mon} \frac{\dot{\chi}_p^{mon}}{\dot{\chi}} + W_{cf}^{cyc} \frac{\dot{\chi}_p^{mon}}{\dot{\chi}} \quad (2.30)$$

где W_a , $W_{pf}^{cyc, mon}(T)$ и $W_{cf}^{cyc, mon}(T)$ — параметры материала.

2.3. Критерий прочности поврежденного материала. В качестве критерия разрушения принято условие достижения величины поврежденности ω критического значения:

$$\omega = \omega_f \leq 1 \quad (2.31)$$

3. Численные результаты. В качестве первого примера оценки достоверности математической модели МПС при взаимном влиянии процессов ползучести и усталости материала, а также точности определения материальных параметров и скалярных функций модели МПС была решена задача расчета кинетики НДС и накопления повреждений в лабораторных образцах из стали Р92 при “жестком” нагружении — одноосном растяжении-сжатии с временными выдержками на максимальной деформации и без них для двух амплитуд деформаций [8]. Температура в исследованиях составляла 600°C. На рис. 2 приведен закон нагружения, реализуемый в опытах.

Основные физико-механические характеристики стали Р92 [20] и материальные параметры модели МПС при температуре 650°C приведены в табл. 1–3.

На рис. 3, 4 приведены петли циклического гистерезиса для первого цикла нагружения и для цикла нагружения равного половине долговечности ($0.5N_f = 335$) соответственно (точками отмечены экспериментальные данные, сплошная линия — численные результаты).

Таблица 1. Физико-механические характеристики и материалы параметры модели МПС стали Р92

K (МПа)	141 667
G (МПа)	65 385
C_p^0 (МПа)	249
$\bar{C}_{c0}$ (МПа)	125
g_1^p (МПа)	38 900
g_2^p (МПа)	660
g_1^c (МПа)	5100
g_2^c (МПа)	260
a_p	4
a_c	0
W_{pf}^{cyc} (МДж/м ³)	4130
W_{cf}^{cyc} (МДж/м ³)	33

Таблица 2. Модуль циклического упрочнения $Q_1^p(a_{e\max})$ и $Q_1^c(a_{e\max})$ (МПа) стали Р92

$a_{e\max}$	0	0.001	0.003	0.004	0.006	0.01
$Q_1^p(a_{e\max})$	0	–92	–92	–92	–92	–92
$Q_1^c(a_{e\max})$	0	–50	–50	–50	–50	–50

На рис. 5 приведены численные результаты зависимости максимальных и минимальных напряжений в цикле от количества циклов, где точками отмечены экспериментальные данные.

На рис. 6 приведено сравнение кривых релаксации напряжений для первого цикла нагружения и для цикла нагружения равного половине долговечности ($0.5N_f = 335$) полученных численным (сплошная линия) и экспериментальным путем (точки).

В табл. 4 приведено сравнение расчетных и экспериментальных значений долговечности лабораторных образцов при циклическом нагружении с временными выдержками на максимальной деформации.

В качестве второго примера практической реализации математической модели МПС при взаимном влиянии процессов ползучести и усталости материала, а также

Таблица 3. Зависимость коэффициентов пропорциональности λ_c^0 и λ_c^{II} от интенсивности напряжения σ_u для стали Р92

σ_u , МПа	0	50	100	150	170	250
λ_c^0 , 1/МПа · час	0	0.00014	0.00014	0.00014	0.00035	0.0015
λ_c^{II} , 1/МПа · час	0	1.3×10^{-6}	1.3×10^{-6}	1.3×10^{-6}	3.2×10^{-6}	1.75×10^{-5}

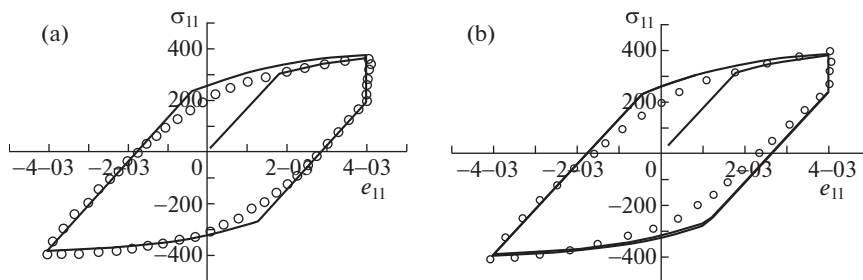


Рис. 3. Петля циклического гистерезиса для первого цикла нагружения: а – время выдержки 600 с, б – время выдержки 60 с.

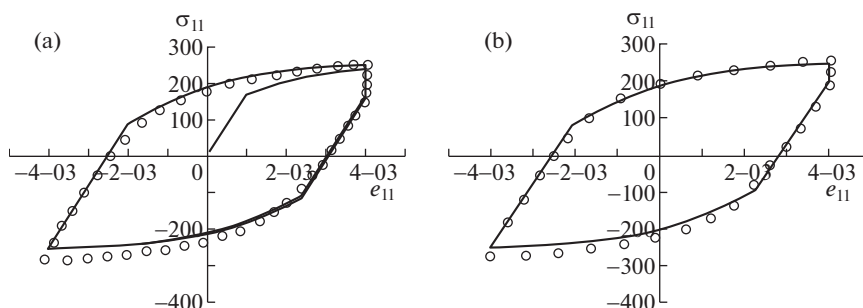


Рис. 4. Петля циклического гистерезиса для цикла равного половине долговечности материала. а – время выдержки 600 с, б – время выдержки 60 с.

точности определения материальных параметров и скалярных функций модели МПС была решена задача определения кинетики НДС и накопления повреждений в лабораторных образцах из стали 316 при жестком нагружении – растяжении-сжатии с временными выдержками на максимальной деформации и без них для двух амплитуд деформаций [7]. Температура в исследованиях составляла 650°C. На рис. 7 приведены законы нагружения, реализуемые в испытаниях [7].

Основные физико-механические характеристики стали 316 [7] и материальные параметры при температуре 650°C модели поврежденной среды [7–23] приведены в табл. 5–8.

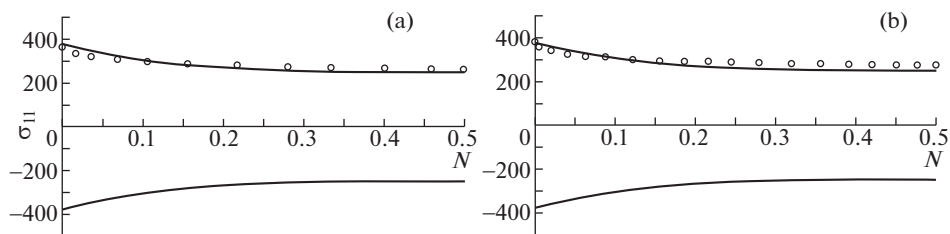


Рис. 5. Зависимость амплитудных значений величин напряжений (МПа) от числа циклов нагружения: а – время выдержки 600 с, б – время выдержки 60 с.

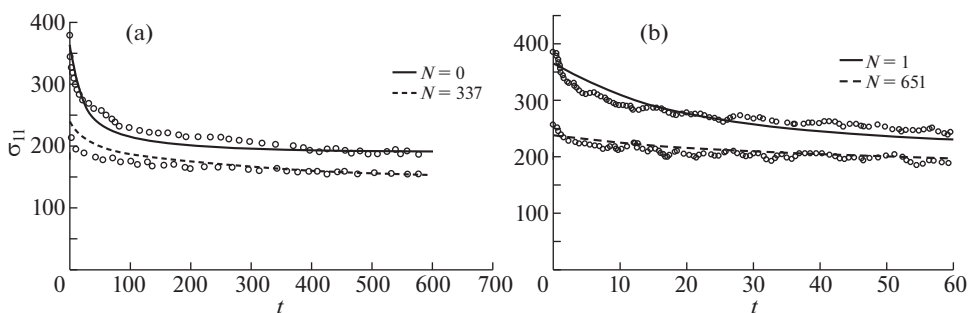


Рис. 6. Кривые релаксации напряжений (МПа) для циклического нагружения с выдержкой на максимальном значении деформации: а – 600 с, б – 60 с.

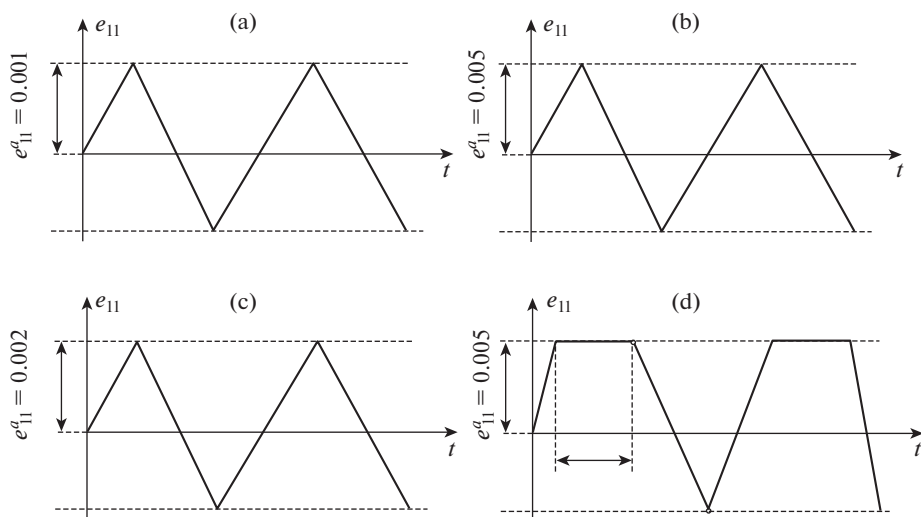


Рис. 7. Закон нагружения лабораторных образцов из стали 316 ($t = 30$ мин).

На рис. 8 приведены петли циклического гистерезиса для законов нагружения представленных на рис. 7.

На рис. 9 приведено сравнение результатов эксперимента (маркеры) и численного моделирования экспериментальных процессов (сплошная линия) по значениям размахов напряжений в циклах в зависимости от количества циклов.

Таблица 4.

Время выдержки, с	Экспериментальное число циклов до разрушения	Расчетное число циклов до разрушения
60	1303	1302
180	1190	984
600	675	801

Таблица 5. Физико-механические характеристики и материалы параметры модели МПС стали 316 при $T = 650^\circ\text{C}$

K (МПа)	153450
G (МПа)	58450
C_p^0 (МПа)	74
g_1^p (МПа)	6858
g_2^p (МПа)	290.4
g_1^c (МПа)	5100
g_2^c (МПа)	260
a_p	3.2
A_c	75
W_{pf}^{cyc} (МДж/м ³)	820
W_{cf}^{cyc} (МДж/м ³)	10

Таблица 6. Радиус поверхности нагружения, соответствующий нулевой скорости ползучести $\bar{C}_c$ (МПа) стали 316 при $T = 650^\circ\text{C}$

χ_c	0	0.01	0.05	0.08	0.1	0.12	0.14	0.16	0.17
$\bar{C}_c$	40	40	40	35	27	14	6	3	2

На рис. 10 приведено сравнение отклонений результатов численного моделирования экспериментальных процессов и опытных данных от закона линейного суммирования повреждений (светлые точки – экспериментальные данные, черные – численные результаты). Где N_h – число циклов до разрушения в испытаниях с выдержкой длительностью t_h в каждом цикле; N_f – число циклов до разрушения в аналогичных испытаниях без выдержек; t_f – время до разрушения, определяемое по кривой длительной прочности при напряжении и температуре выдержки.

В табл. 9 приведено сравнение количества циклов, полученных численным и экспериментальным путем для законов нагружения приведенных на рис. 7.

Полученные ресурсные характеристики конструкционных сталей, приведенные в настоящей работе, демонстрируют качественное и количественное совпадение численных и экспериментальных данных и, свидетельствуют о достоверности определяющих соотношений МПС и разработанной методики определения материальных параметров. Полученные отличия могут быть объяснены так же и тем, что эксперимен-

Таблица 7. Модуль циклического упрочнения $Q_1^p(a_{e\max})$ и $Q_1^c(a_{e\max})$ (МПа) стали 316 при $T = 650^\circ\text{C}$

$a_{e\max}$	0	0.001	0.003	0.004	0.006	0.01
$Q_1^p(a_{e\max})$	0	50	80	90	95	110
$Q_1^c(a_{e\max})$	0	–30	–33	–33	–33	–33

Таблица 8. Зависимость коэффициентов пропорциональности λ_c^0 и λ_c^H от интенсивности напряжения σ_u для стали 316 при $T = 650^\circ\text{C}$

σ_u , МПа	0	50	100	150	170	200
λ_c^0 , 1/МПа · час	0	9.0×10^{-6}	9.0×10^{-6}	9.0×10^{-6}	2.1×10^{-6}	7.2×10^{-5}
λ_c^H , 1/МПа · час	0	1.455×10^{-6}	1.455×10^{-6}	1.455×10^{-6}	3.6×10^{-6}	1.854×10^{-5}

Таблица 9. Сравнение расчетных и экспериментальных значений циклов до разрушения

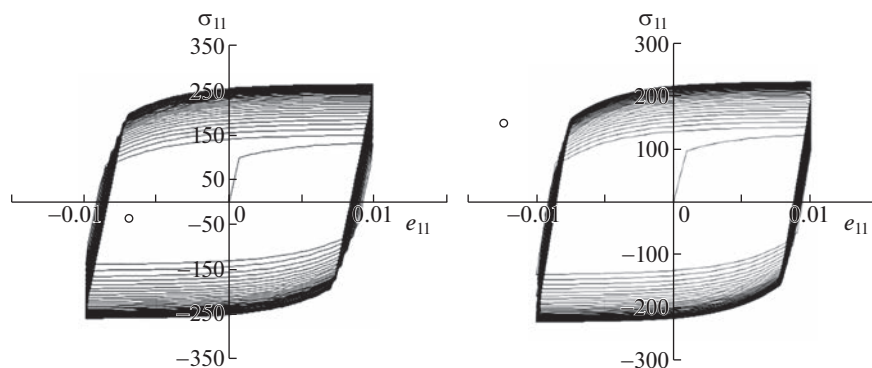
Закон нагружения	Экспериментальное число циклов до разрушения	Расчетное число циклов до разрушения
$e_{11}^a = 0.01$ без временной выдержки (рис. 7,а)	863	964
$e_{11}^a = 0.005$ без временной выдержки (рис. 7,б)	4000	3639
$e_{11}^a = 0.01$ с временной выдержкой (рис. 7,с)	338	385
$e_{11}^a = 0.005$ с временной выдержкой (рис. 7,д)	985	950

тальные данные получены на одном лабораторном образце для каждого режима нагружения.

4. Заключение. Развита математическая модель МПС, описывающая процессы деформирования и накопления повреждений, основанная на энергетическом подходе и единой форме представления процесса накопления повреждений при механизмах, сочетающих усталость и ползучесть материала.

Получены материальные параметры и скалярные функции, входящие в определяющие соотношения математической модели МПС для ряда конструкционных сталей.

Проведены численные исследования определения кинетики НДС и накопления повреждений в лабораторных образцах из сталей 316 и Р92 при “жестком” нагружении

**Рис. 8.** Петли циклического гистерезиса для законов нагружения, представленных на рис. 7, а и б.

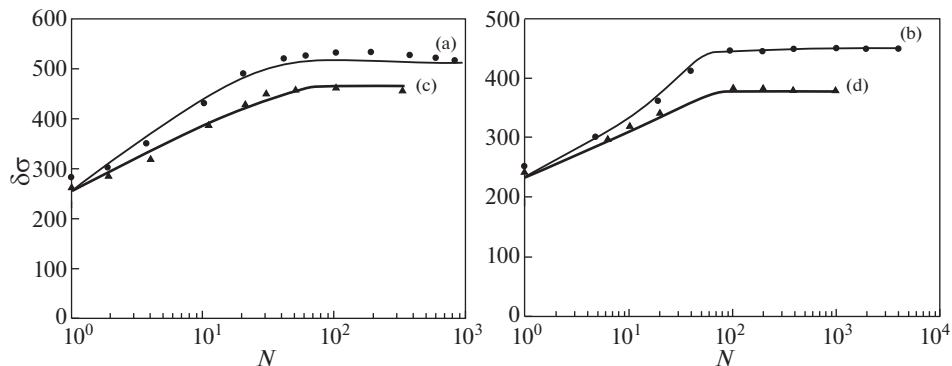


Рис. 9. Размах напряжений (МПа) в циклах нагружения в зависимости от числа циклов для режимов нагружения, представленных на рис. 7. На рис. 9 (а): ● — амплитуда $e_{11} = 0.01$, ▲ — амплитуда $e_{11} = 0.01$ с выдержкой 30 мин. На рис. 9 (b): ● — амплитуда $e_{11} = 0.005$, ▲ — амплитуда $e_{11} = 0.005$ с выдержкой 30 мин.

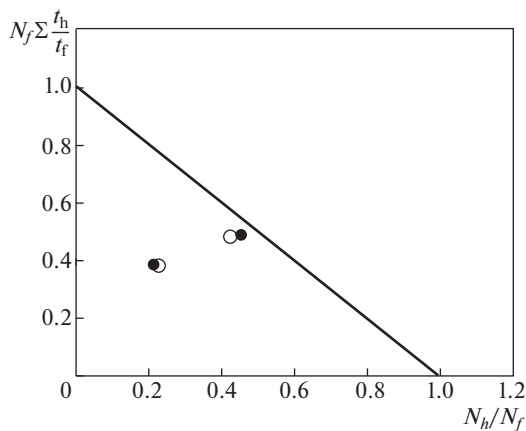


Рис. 10. Зависимость относительной наработки материала при взаимном влиянии усталости и прочности материала.

(контролируемые деформации) — одноосное растяжение-сжатие с временными выдержками на максимальной деформации и без них для двух амплитуд деформаций.

Результаты оценки достоверности показали, что развитая модель с достаточной для инженерных расчетов точностью описывает процессы нагружения при деградиационных механизмах, сочетающих усталость и длительную прочность материала.

Проведенный анализ представленных в данной работе уравнений механики поврежденной среды и результаты оценки их достоверности, позволяют, по мнению авторов, рекомендовать их на данном этапе к расчетам долговечности конструктивных узлов машиностроительных объектов, работающих в условиях нестационарного термомеханического нагружения при деградиационных механизмах, сочетающих усталость и длительную прочность материала. Вместе с тем необходима дальнейшая экспериментально-теоретическая проверка их достоверности для случаев нестационарных много-

онных напряженно-деформированных состояний и неизотермических процессов, сопровождающихся существенным вращением главных площадок тензоров напряжений и деформаций (для различных сложных траекторий нагружения) [26]. Также необходим дальнейший анализ экспериментальной информации по совместным механизмам деградации конструкционных материалов при комплексном развитии процессов деградации, вызванных усталостью, нестационарной ползучестью, коррозионными процессами, радиационными воздействиями и т.д., и формулировка на этой базе математических моделей совместных процессов деградации начальных прочностных свойств конструкционных материалов.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 22-19-00138.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В.В. Прогнозирование машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 312 с.
2. Митенков А.М., Кайдалов В.Б., Коротких Ю.Г. и др. Методы обоснования ресурса ЯЭУ. М.: Машиностроение, 2007. 445 с.
3. Вудфорд Д.А. Повреждение при ползучести и концепция остаточной долговечности // Теор. основы инж. расч. 1979. Т. 101. № 4. С. 1–8.
4. Маджумар, Мейя. Механическая усталость, зависящая от времени // Теор. основы инж. расч. 1980. Т. 102. № 1. С. 111–121.
5. Гомюк, Бью Куок. Расчет долговечности коррозионностойкой стали 304 в условиях взаимодействия усталости и ползучести с использованием теории непрерывного повреждения // Теор. основы инж. расч. 1986. № 3. С. 111–136.
6. Замрик С., Дэвис Д. Применение метода исчерпания пластичности для усталости при одноосном нагружении — оценка повреждения при ползучести для нержавеющей стали 316 // Современное машиностроение. Сер. Б. 1991. № 8. С. 16–24.
7. Замрик С. Расчет повреждений, обусловленных взаимным влиянием ползучести и усталости нержавеющей стали 316 при осевом нагружении // Современное машиностроение. Сер. Е. 1990. № 7.
8. Tianyu Zhang, Xiaowei Wang, Wei Zhang, Tasnim Hassan, Jianming Gong. Fatigue–Creep Interaction of P92 Steel and Modified Constitutive Modelling for Simulation of the Responses // Metals. 2020. V. 10. № 3. P. 307–318.
<https://doi.org/10.3390/met10030307>
9. Дульнев Р.А., Котов П.И. Термическая усталость металлов. М.: Машиностроение, 1980. 200 с.
10. Гусенков А.П. Прочность при изотермическом и неизотермическом малоцикловом нагружении. М.: Машиностроение, 1983. 269 с.
11. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Демьянушко И.В. Термопрочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1975. 455 с.
12. Lechrie F.A., Hayhurst D.R., Grant. Creep rupture of structure // J. Proc. Roy. Soc. London. 1974. V. 42. P. 323–347.
13. Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. М.: Мир, 1984. 360 с.
14. Казанцев А.Г. Исследование взаимодействия малоциклового усталости и ползучести при неизотермическом нагружении // Проблемы прочности. 1985. № 5. С. 25–31.
15. Бернард-Конноли, Бью Куок, Бирон. Усталость коррозионностойкой стали 304 при испытаниях в условиях многоступенчатой контролируемой деформации // Теор. основы инж. расч. 1983. № 3. С. 47–53.
16. Volkov I.A., Egunov V.V., Igumnov L.A., Kazakov D.A., Korotkikh Yu.G., Mitenkov F.M. Assessment of the service life of structural steels by using degradation models with allowance for fatigue and creep of the material // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2015. V. 56. №. 6. P. 995–1006.
17. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. М.: Физматлит, 2008. 424 с.
18. Волков И.А., Игумнов Л.А. Введение в континуальную механику поврежденной среды. М.: Физматлит, 2017. 304 с.

19. *Volkov I.A., Korotkikh Y.G.* Modeling of fatigue life of materials and structures under low-cycle loading // *Mech. Solids*. 2014. V. 49. № 3. P. 290–301.
20. *Большухин М.А., Лебедев В.В., Козин А.В., Коротких Ю.Г., Панов В.А., Пахомов В.А.* Моделирование процессов накопления повреждений при термопульсациях // *Проблемы прочности и пластичности*. 2014. Т. 76. № 2. С. 134–143.
21. *Митенков Ф.М., Волков И.А., Игумнов Л.А., Коротких Ю.Г. и др.* Прикладная теория пластичности. М.: Физматлит, 2015. 284 с.
22. *Volkov I.A., Tarasov I.S., Smetanin I.V., Igumnov L.A., Kazakov D.A., Shihulin D.N.* Constitutive relations of mechanic of a damaged medium for evaluating the creep-rupture strength of structural alloys // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2019. V. 60. №. 1. P. 156–166.
<https://doi.org/10.1134/S002189441901019X>
23. *Волков И.А., Игумнов Л.А., Тарасов И.С., Шишулин Д.Н., Пичков С.Н., Маркова М.Т.* Моделирование пластического деформирования поликристаллических конструкционных сплавов при блочных несимметричных режимах мягкого малоциклового нагружения // *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Т. 81. № 1. С. 63–76.
24. *MacKenzie J.K.* The elastic constants of a solids containing spherical holes // *Proc. Phys. Soc.* 1950. V. B63. P. 2–11.
25. *Трощенко В.Т.* Рассеянные усталостные повреждения металлов и сплавов. Сообщение 3. Деформационные энергетические критерии // *Проблемы прочности*. 2006. № 1. С. 5–31.
26. *Le Xu, Takaki Kojima, Takamoto Itoh* Creep-fatigue life evaluation of type 304 stainless steel under non-proportional loading // *Int. J. Pressure Vessels Piping*. 2021. V. 194. Part A. 104515. URL: [doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2021.104515](https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2021.104515)

УДК 517: (53 + 57/59)

МЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, ДЕМОНИСТРИРУЮЩАЯ “КАТАСТРОФИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ”

© 2023 г. А. И. Мошинский^{a,*}

^aФГБОУ ВО Санкт-Петербургский государственный химико-фармацевтический университет,
Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: alex-moshinskiy@yandex.ru

Поступила в редакцию 09.07.2022 г.

После доработки 26.08.2022 г.

Принята к публикации 12.09.2022 г.

Исследуется поведение механической системы при изменении характеризующих ее параметров. Анализ показывает, что в системе возникают скачкообразные изменения (катастрофы) в определенной области управляющих параметров. Рассмотренная задача допускает точный (глобальный) анализ катастрофы, без привлечения различных разложений и допущений. Предложенная механическая конструкция может служить для демонстрации возникновения катастрофы.

Ключевые слова: катастрофа, складка, бифуркация, стационарное вращение, скачок, устойчивость

DOI: 10.31857/S0572329923700034, EDN: JMWCCY

1. Введение. Особенностью ряда систем, встречающихся в различных разделах физики и техники, является качественная перестройка их поведения, в ряде случаев сопровождаемая скачками тех или иных переменных. Качественная перестройка или метаморфоза различных объектов при изменении определенных параметров, от которых они зависят, называют (в широком смысле) бифуркацией (раздвоением) [1]. Скачкообразные изменения, возникающие как внезапная реакция системы на плавное изменение внешних условий, называют катастрофами [1]. Как правило в книгах по теории катастроф приводят примеры физических устройств, иллюстрирующих теорию. Наиболее известные из них — машина катастроф Зимана и “параболическая качалка” [1–4]. Здесь рассматривается задача механики, где результаты получаются не сложнее, а зачастую более просто, чем в отмеченных и других случаях. Эта задача является естественным обобщением задачи из школьного курса физики [5] (задача 203), где по существу присутствует бифуркация (раздвоение) решения при конкретном значении определенного безразмерного параметра. Кроме того, предлагаемую механическую систему можно использовать в демонстрационных целях ее скачкообразного поведения.

2. Постановка и анализ задачи [5]. Пусть стержень, к которому прикреплен другой стержень при помощи шарнира (см. рис. 1) вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, совпадающей по направлению с вектором $\mathbf{g}$ однородного поля силы тяжести. Второй стержень считаем недеформируемым, невесомым и имеющим длину l . На его конце сосредоточен точечный груз массой m . Требуется определить угол отклонения α стержня от вертикали, который в рассматриваемом случае будет являться конфигурационной переменной системы (рис. 1).

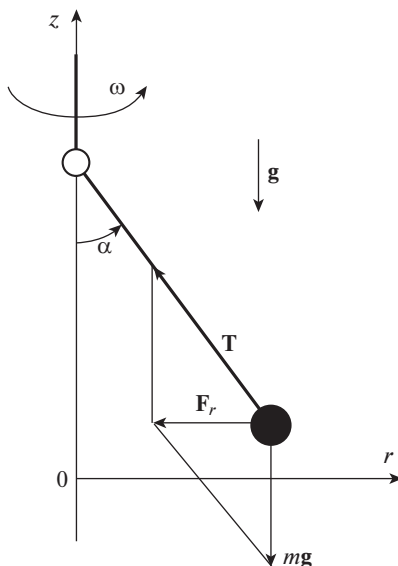


Рис. 1. Физический маятник.

Из баланса сил, действующих на массу m (сила тяжести, сила реакции стержня T и центростремительная сила) находится уравнение для определения угла α ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$):

$$mgtg\alpha = F_r = mw^2l\sin\alpha \quad (2.1)$$

(Индекс r – радиальная компонента). Откуда получаем

$$\sin\alpha(\lambda - 1/\cos\alpha) = 0; \quad \lambda = \omega^2 l/g \quad (2.2)$$

где λ можно назвать управляющим параметром системы. Уравнение (2.2) имеет два решения, отвечающие равенству нулю каждого из двух множителей:

$$\sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0; \quad \cos\alpha = 1/\lambda \Rightarrow \alpha = \arccos(1/\lambda) \quad (2.3)$$

Ясно, что физическое значение второе решение (2.3) имеет только при $\lambda \geq 1$, тогда как первое подобных ограничений не имеет. Однако, как отмечено в [5], первое решение неустойчиво при $\lambda > 1$. Это обстоятельство (как и устойчивость первого (нулевого) решения только при $\lambda \leq 1$) удобно продемонстрировать при помощи энергетических терминов во вращающейся с угловой скоростью ω системе координат. В этой системе координат задача будет статической. Такая возможность связана с инвариантностью задачи (стационарного вращения) относительно угловой координаты φ цилиндрической системы координат с осью z (рис. 1). Подобную ситуацию обычно называют относительным равновесием.

Приняв за начало отсчета потенциальной энергии гравитационного поля ось r , выходящую из нижнего положения стержня ($\alpha = 0$) для потенциальной энергии массы m в этом поле имеем выражение $U_g = mgl(1 - \cos\alpha)$. Потенциальную энергию центробежного поля можно найти, вычислив работу по перемещению массы m в этом поле. Результат будет естественно по модулю совпадать с кинетической энергией этой массы в неподвижной системе координат: $U_\omega = -0.5m\omega^2 l^2 \sin^2\alpha$, т.е. одну и ту же энергию назовем по-разному в зависимости от системы координат. Полная энергия такова

$$U(\alpha) = U_g + U_r = mgl(1 - \cos\alpha) - 0.5m\omega^2 l^2 \sin^2\alpha \quad (2.4)$$

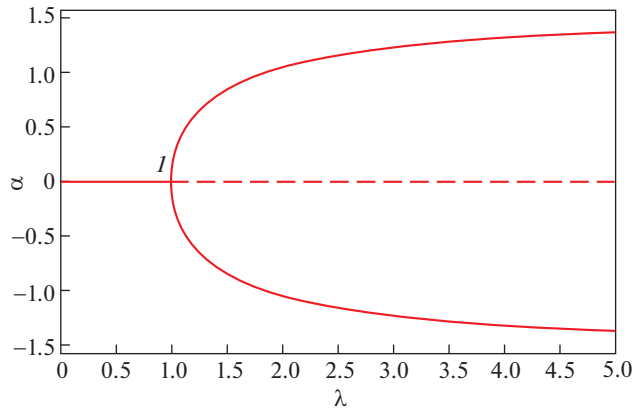


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма физического маятника.

где индекс g относится к энергии поля силы тяжести, а r — к энергии вращательного движения.

Отметим, что уравнение (2.1) можно получить из (2.4) как условие минимума потенциальной энергии $U(\alpha)$ ($dU/d\alpha = 0$). В устойчивом состоянии равновесия потенциальная энергия имеет минимум.

Кроме равновесия $\alpha = 0$ у системы, согласно (2.3), имеется всегда неустойчивое положение равновесия $\alpha = \pi$. Хотя основное значение, вытекающее из физики процесса, имеет интервал изменения $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, в котором будут лежать точки устойчивого стационарного вращения ниже иногда нас будут, для полноты картины, интересоваться случаями, когда у маятника существуют неустойчивые точки равновесия вне этого отрезка, поэтому в некоторых случаях будем использовать более широкие интервалы, в частности $\alpha \in [-\pi, \pi]$.

Формулу (2.4) целесообразно представить в безразмерном виде

$$V(\alpha) = \frac{U}{mgl} = 1 - \cos \alpha - \frac{\lambda \sin^2 \alpha}{2} \quad (2.5)$$

Заметим, что V четная функция угла α . В данной задаче угол — α описывает ту же ситуацию, что и вариант α . На рис. 2 представлен график, иллюстрирующий решение (2.2). Данная бифуркационная картина, типична для многих проблем естествознания. При этом скачков переменных состояния не наблюдается.

Точка I — точка бифуркации, когда у задачи появляется второе решение (2.3) при возрастании параметра (критерия подобия) λ . Штриховой линией показано неустойчивое решение. Это поясняет рис. 3, где представлены три кривые при $\lambda < 1$, $\lambda = 1$ и $\lambda > 1$, представляющие энергетическую функцию $V(\alpha)$ согласно (2.5). Линии при $\lambda = 0.05$ и $\lambda = 2.4$ демонстрируют типичное поведение потенциальной функции при $\lambda < 1$ и $\lambda > 1$ соответственно. При возрастании параметра λ (переход от линии 1 к линии 2 а затем к 3) сначала имеем только решение $\alpha = 0$, поскольку при $\alpha = 0$ реализуется квадратичный минимум потенциала $V \cong 0.5(1 - \lambda)\alpha^2$ при $\alpha \rightarrow 0$ ($\lambda < 1$). В критическом случае (кривая 2, $\lambda = 1$) потенциал V имеет локальное представление $V \cong \alpha^4/24$ (росток катастрофы сборки [6]), т.е. также имеем при $\alpha = 0$ локальный минимум, который сменяется локальным максимумом при $\lambda > 1$ (кривая 3). При этом происходит качественное изменение потенциальной кривой, появляются два минимума при $\alpha = \pm \arccos(1/\lambda)$. Имеем также при $\lambda \rightarrow 1$ ($\lambda > 1$) координаты точки минимума V : $\alpha_{\min} \cong \pm [2(\lambda - 1)]^{1/2}$. Неустойчивость,

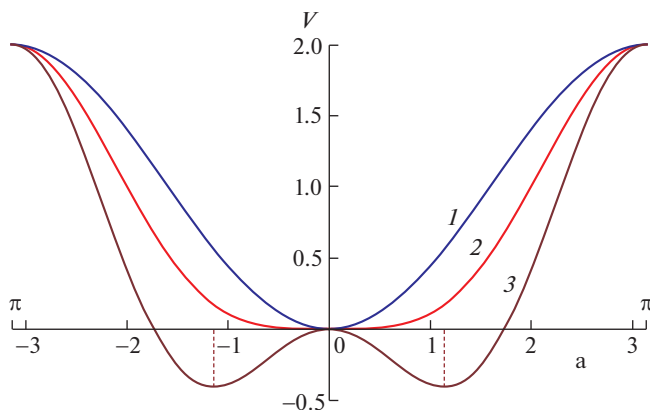


Рис. 3. Потенциальная энергия системы. 1 – $\lambda = 0.05$; 2 – $\lambda = 1$; 3 – $\lambda = 2.4$.

а значит практическая не наблюдаемость, решения $\alpha = 0$ при $\lambda > 1$, демонстрирует один из флагов (существенных, характерных признаков) катастрофы – недостижимость. Пунктирные линии на рис. 3 показывают координаты точек минимума потенциальной функции ($\alpha_{\min} = \pm 1.141$ для $\lambda = 2.4$).

Поведение механической системы наглядно характеризует ее фазовый портрет. Фазовые кривые легко находятся при наличии в аналитической форме закона сохранения механической энергии [7, стр. 22], поскольку на каждой фазовой кривой значение полной энергии постоянно. В нашем случае энергетический баланс системы запишем в безразмерном виде

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = E + \frac{\lambda \sin^2 \alpha}{2} - 1 + \cos \alpha \quad (2.6)$$

где E – безразмерная полная энергия, а для обезразмеривания времени использован масштаб $(0.5I/g)^{1/2}$. На рис. 4 приведены фазовые портреты системы при тех же значениях параметра λ , что и на рис. 3, в интервале $\alpha \in [-2\pi, 2\pi]$.

В случае малого значения параметра λ ($\lambda = 0.05$ на рис. 4, 1) фазовый портрет напоминает таковой обычного маятника, переходя в него при $\lambda = 0$. Пограничный вариант $\lambda = 1$ при $\alpha = 0$ реализует более пологий максимум $d\alpha/dt$ на фазовой кривой ($d\alpha/dt \cong \cong E^{1/2}[1 - \alpha^4/(16E)]$, $E > 0$), чем случаи при $\lambda < 1$. На рис. 4, 2 прямолинейные участки обязаны своим происхождением аппроксимационными возможностями монитора (толщиной пикселя). Вариант рис. 4, 3 при $\lambda = 2.4$ иллюстрирует появление двух точек равновесия вместо одной в начале координат, которая стала неустойчивой.

В общем случае об устойчивости точки $\alpha = 0$, $\dot{\alpha} = 0$ можно судить из разложения в окрестности этой точки:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \frac{(1-\lambda)\alpha^2}{2} = E$$

Отсюда видно, что при $\lambda < 1$ имеем эллиптическую особую точку (центр), т.е. реализуется устойчивость системы. В то же время, при $\lambda > 1$ имеем гиперболическую особую точку (седло), т.е. система становится неустойчивой.

3. Смещение шарнирного соединения. В однопараметрическом семействе функций, в частности (2.5), кривая равновесия типа рис. 2 (точнее наша математическая модель) является структурно неустойчивой. При малом изменении (шевелении) параметров

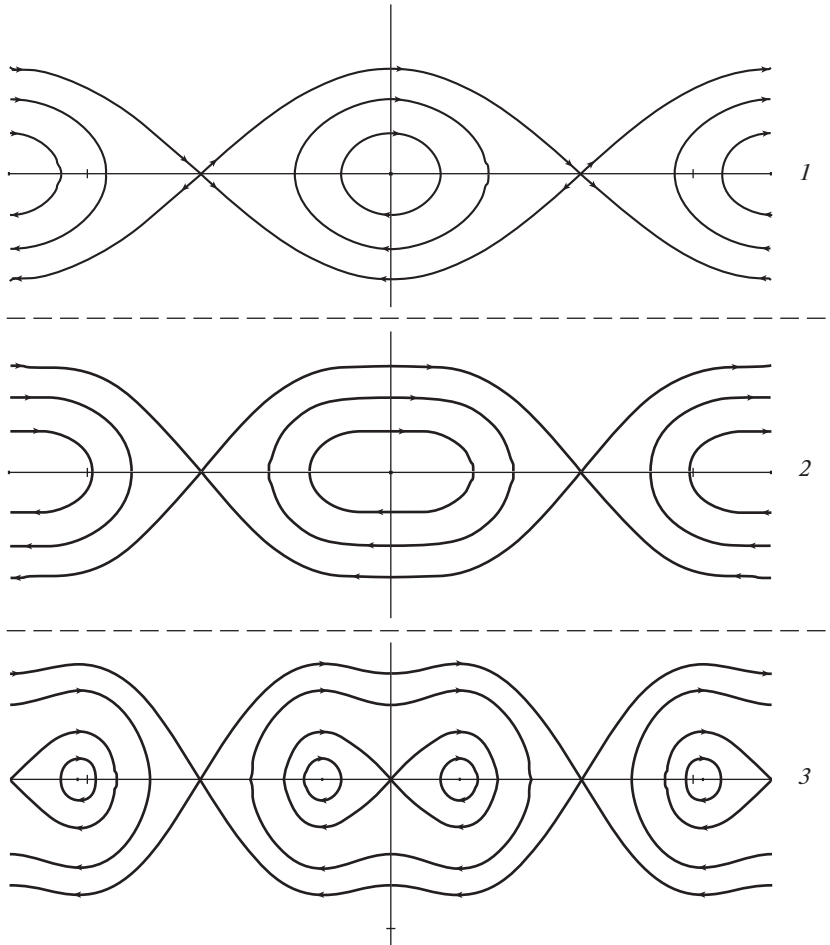


Рис. 4. Фазовые портреты системы. По оси абсцисс отложена координата α , по оси ординат $-d\alpha/dt$. Цифры справа соответствуют кривым рис. 3.

системы, связанных с какими-либо воздействиями, в типичной ситуации, он меняется таким образом, что точки самопересечения (типа 1 на рис. 2) исчезают. Это можно объяснить так. Локально, вблизи точки бифуркации 1 график приблизительно представляется уравнением $(\lambda - 1)\alpha = 0$. При “шевелении” в правой части этого уравнения вместо нуля появится некоторая константа $(\lambda - 1)\alpha = c$, т.е. теперь график функции $\alpha(\lambda)$ локально представляет собой гиперболу. Значения c принадлежат бесконечному (континуальному) множеству. В типичном случае ($c \neq 0$) точек самопересечения график не имеет и только одно значение $c = 0$ дает вырождение (см. также [8, стр. 44, 64]).

Здесь рассмотрим, в качестве отмеченного “шевеления” системы, случай определенного смещения шарнирного соединения. Ситуацию иллюстрирует рис. 5.

В этом случае формула (2.4) для потенциала заменится следующей:

$$U(\alpha) = mgl(1 - \cos\alpha) - 0.5m\omega^2 (l\sin\alpha + b)^2$$

Или в безразмерном виде

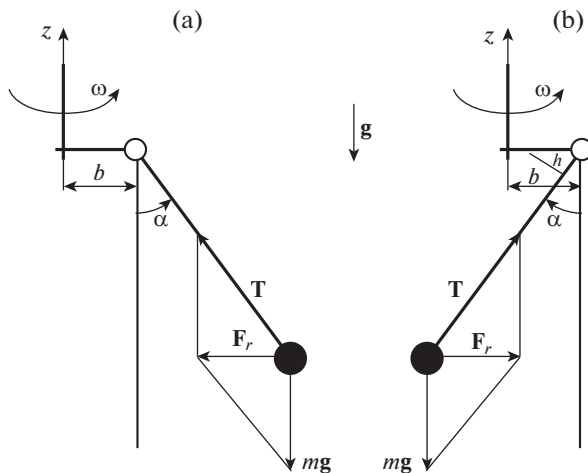


Рис. 5. Смещенный физический маятник.

$$V(\alpha) = 1 - \cos\alpha - l(\sin\alpha + \epsilon)^2/2, \quad V(\alpha) = U(\alpha)/(mgl) \quad (3.1)$$

где $\epsilon = b/l$ — еще один (в дополнение к λ) безразмерный управляющий параметр. Теперь потенциал несимметричен $V(-\alpha) \neq V(\alpha)$ ($\epsilon \neq 0$), поэтому представлены два варианта: рис. 5,а и рис. 5,б.

Из соотношения (3.1), после вычисления производной $dV/d\alpha$ и приравнивания ее нулю, найдем уравнение для определения координаты α положения стержня

$$\operatorname{tg}\alpha = l(\sin\alpha + \epsilon) \quad (3.2)$$

которое можно получить также и из баланса сил, как было найдено уравнение (2.1). Ситуацию осложняет то, что теперь нет факторизации уравнения (представление в виде двух сомножителей, как было в случае зависимости (2.2)).

На рис. 6 приведены три кривые при фиксированном значении параметра $\epsilon = 0.1$, которые построены на основе выражения (3.1). Уравнение (3.2) определяет точки экстремумов функции $V(\alpha)$ (поверхность равновесия), которых может быть от одной до трех при $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$. Наибольший интерес представляет точка, где уравнение (3.2) имеет двукратный корень. Именно она соответствует бифуркации решения задачи. На рис. 6 двукратный корень (3.2) имеет кривая 2 при $\alpha = -0.483$ (точка перегиба, левая вертикальная пунктирная линия). На рис. 6 также выделена точка минимума кривой 2 при $\alpha = 0.906$ (отмечена правой вертикальной пунктирной линией) и точка $\alpha = -\arcsin(\epsilon) \approx -0.1$ (отмечена средней вертикальной пунктирной линией), общая для всех кривых при данном ϵ . Общим будет и наклон (производная) всех кривых в этой точке, равный $-\epsilon$. При этом слагаемое в (3.1), содержащее λ обращается в нуль. Данный вариант соответствует положению груза m на оси вращения, поскольку $\sin\alpha = -\epsilon$. Имеем также $U_r = 0$. Подобная точка (напоминающая узел) имеется и при $\alpha = \arcsin(\epsilon) - \pi$. Линия 2 является разграничительной. При $\lambda < \lambda_2 = 1.439$ имеется только одна точка минимума функции $V(\alpha)$, а при $\lambda > \lambda_2$ — две. Отметим, что в отличие от кривых рис. 3, в точках $\alpha = \pm\pi$ нет максимального значения потенциальной энергии. Действительно, в точках $\alpha = \pm\pi$ значение производной функции $V(\alpha)$ (3.1) равно $\lambda\epsilon$ и не равно нулю для кривых рис. 6. Смещение точек максимума на рис. 6 незаметно из-за выбора крупного масштаба для переменных. Это смещение можно заметить (вертикальная черточка) на рис. 7 возле точки неустойчивого равновесия $\alpha = \pi$. Наличие

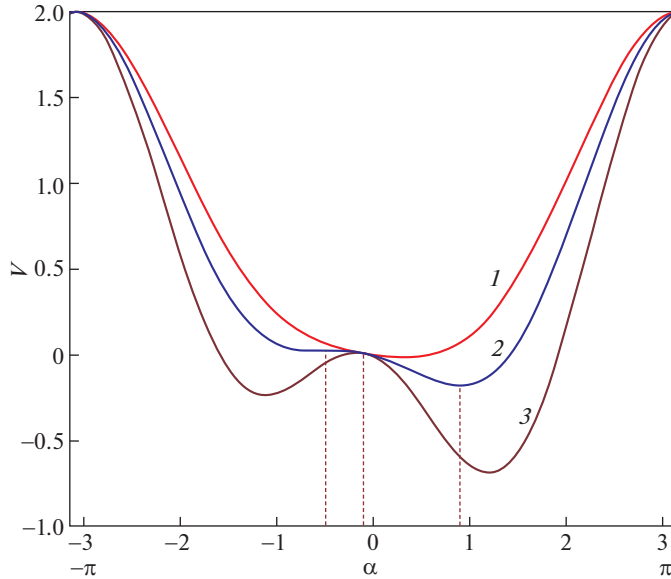


Рис. 6. Потенциальная энергия системы при $\epsilon = 0.1$. 1 – $\lambda = 0.8$; 2 – $\lambda = 1.439$; 3 – $\lambda = 2.5$.

двух устойчивых положений равновесия “мод” (линия 3, рис. 6) демонстрирует еще один флаг катастрофы – модальность.

Приведем фазовый портрет, позволяющий, в частности, судить об устойчивости точек равновесия системы с потенциалом (3.1). В данном случае уравнение (2.6) заменяется следующим:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = E + \frac{\lambda(\sin \alpha + \epsilon)^2}{2} - 1 + \cos \alpha$$

дополнительно включающим параметр ϵ . Отсутствие симметрии по координате α при $\epsilon \neq 0$ на портрете рис. 7 приводит к определенным образом “деформации” фазовых портретов рис. 4.

На рис. 7 взяты те же значения параметра λ , что и на рис. 6, и выбраны определенные значения полной энергии E . Линии $\lambda = 0.8$ и $\lambda = 2.5$ представляют типичное поведение потенциальной функции. Они соответственно меньше и больше разграничительного значения параметра $\lambda = 1.439$, определенного ниже по зависимости (3.3).

Целесообразно рассматривать значения ϵ на отрезке $\epsilon \in [0, 1]$. При $\epsilon > 1$, т.е. когда смещение b превышает длину стержня l , будет, при любых значениях λ , устойчиво реализовываться только одна ветвь кривой, типа линии 4 на рис. 8. Вариант рис. 5, b невозможен, поэтому этот случай малоинтересен. Влияние параметра ϵ на вид кривых в плоскости α, λ характеризует рис. 9, где представлены кривые (3.2) при трех значениях этого параметра. Пунктирные линии на этом рисунке показывают атрибуты катастрофы при $\epsilon = 0.1$. Вблизи точки $\lambda = 1, \alpha = 0$ при малом значении параметра ϵ (кривая 1 на рис. 9) график, в области выделенной окружностью, напоминает гиперболу, в соответствии со сказанным ранее.

Четыре линии (1 – 4) рис. 8, в случае значения ϵ на отрезке $\epsilon \in [0, 1]$, имеют соответственно следующие горизонтальные асимптоты: $\alpha_1 = \arcsin(\epsilon) - \pi$, $\alpha_2 = -\pi/2$, $\alpha_3 = -\arcsin(\epsilon)$, $\alpha_4 = \pi/2$. Этот рисунок построен на основе зависимости (3.2) при кон-

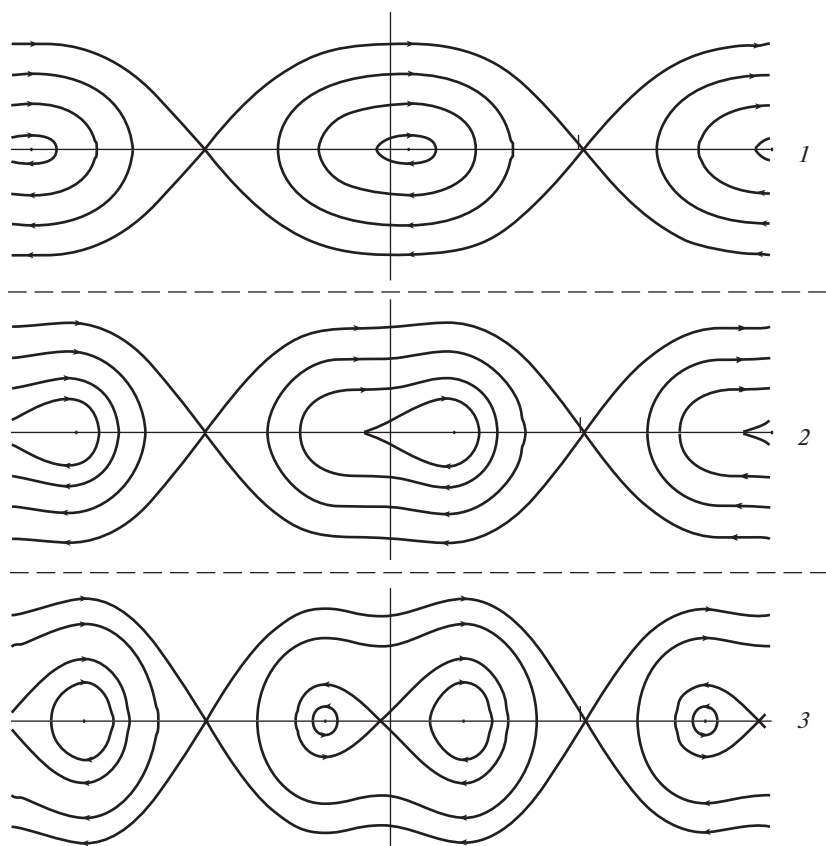


Рис. 7. Фазовые портреты системы. По оси абсцисс отложена координата α , по оси ординат $-\dot{\alpha}/dt$. Цифры справа соответствуют кривым рис. 6.

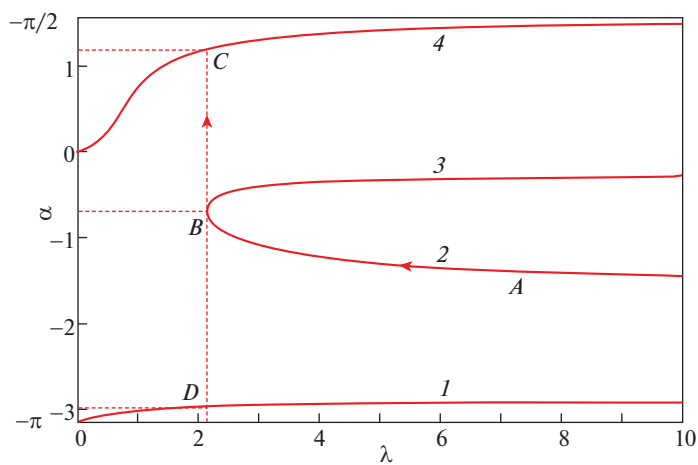


Рис. 8. Линии равновесия системы при $\varepsilon = 0.25$ ($\lambda_B = \lambda_C = \lambda_D = 2.135$).

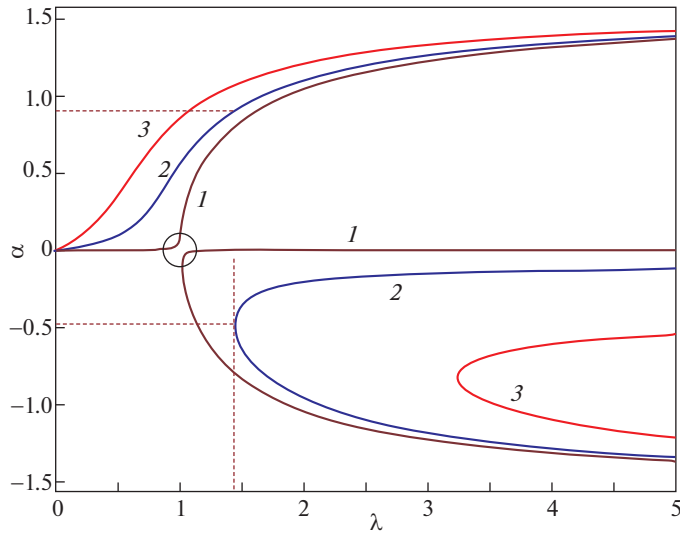


Рис. 9. Линии равновесия системы при: 1 – $\varepsilon = 0.001$; 2 – $\varepsilon = 0.1$; 3 – $\varepsilon = 0.4$.

кретном значении параметра $\varepsilon = 0.25$. Топология графиков рис. 8 и рис. 9 отличается от таковой для графика рис. 2. В частности множество, состоящее из линий графиков не связно (является объединением непересекающихся множеств) и линии графиков не имеют точек самопересечения при $\varepsilon > 0$.

Скачкообразное (катастрофическое) поведение системы прокомментируем на рис. 8. Пусть положение стержня определяет точка A на рис. 8. Если теперь медленно уменьшать угловую скорость ω (точнее уменьшать параметр λ), то, считая, что система быстро адаптируется (в частности за счет трения в шарнире) к условиям равновесия (3.2) (принцип максимального промедления [3, 6]), то придем в точку B (рис. 8). При дальнейшем уменьшении параметра λ , поведение системы определяется скачкообразным переходом на верхнюю ветвь функции (3.2) (линия 4) в точку C (рис. 8) и впоследствии будет находиться только на этой ветви. Направление перемещения показаны на кривых рис. 8 стрелками. Если после перехода на верхнюю ветвь начать увеличивать значение параметра λ , то точки, характеризующие состояние системы, будут отслеживать верхнюю ветвь, т.е. наблюдается гистерезис (один из признаков флагов катастрофы [6]). Здесь гистерезис понимается в узком смысле: при движении параметров в обратном направлении система выбирает другой путь.

Принцип максимального промедления, есть хорошо зарекомендовавшее себя на практике соглашение, когда не анализируют временную эволюцию системы. Он формулируется так [6]. Состояние системы определяется устойчивым (стабильным) или метастабильным минимумом до тех пор, пока он существует. При этом медленность изменения управляющего параметра $d\lambda/dt$ подразумевает, что выполняется неравенство $t_*(d\lambda/dt) \ll \Delta\lambda$, где $\Delta\lambda$ – характерное изменение (масштаб) параметра λ , а индекс $*$ помечает время релаксации: t_* – время релаксации, т.е. порядок времени по прошествии которого система приходит в равновесие, если прекратить внешнее воздействие. Это неравенство выражает тот факт, что за время релаксации величина λ мало изменится по сравнению с $\Delta\lambda$. При этом роль инерции незначительна. При нарушении неравенства $t_*(d\lambda/dt) \ll \Delta\lambda$ колебания угла α возле отвечающего текущему значению параметра λ положению равновесия могут привести к “преждевременной ката-

строфе” (например при $\lambda > \lambda_B$ на рис. 8). Подобное неравенство в термодинамике является фундаментальным условием квазистатичности процесса.

Параметры критической точки B определим из условия (см. рис. 8), что $\partial\lambda/\partial\alpha = 0$, $\Rightarrow \lambda \cos^3\alpha = 1$. Здесь λ рассматривается как функция параметров α и ε , при этом ε считается постоянной величиной, т.е. приравнена нулю частная производная. Подставляя это выражение в (3.2) находим $\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha = \sin\alpha + \varepsilon$. Отсюда получаем значения переменных α и λ в критической точке B (рис. 8)

$$\alpha_B = -\arcsin(\varepsilon^{1/3}), \quad \lambda_B = (1 - \varepsilon^{2/3})^{-3/2} \quad (3.3)$$

При $\varepsilon = 0.1$ имеем $\lambda_B = 1.439$. Это значение $\lambda_B = \lambda_2$ отвечает разграничительной кривой 2 на рис. 6.

Интерес представляют также координаты точки C , связанные со скачком угла α . Заметим, что рассматривая (3.2) как уравнение для определения α при заданных λ и ε , это уравнение можно свести к алгебраическому уравнению четвертой степени относительно переменной $X = \sin\alpha$ [есть также вариант выразить значения функций $\sin(\alpha)$ и $\text{tg}(\alpha)$ через $p = \text{tg}(\alpha/2)$: $\lambda \varepsilon p^4 + 2(1 + \lambda)p^3 + 2(1 - \lambda)p - \lambda \varepsilon = 0$]. Как известно (см. напр. [9]) такое уравнение допускает решение в радикалах, выраженное через коэффициенты уравнения. В нашей задаче при изменении параметров λ и ε в широких пределах, физическое значение (вещественность α) имеют только корни $|X| \leq 1$.

Выражая λ и ε в (3.2) через угол α_B в (3.3) и введя обозначение $Y = \sin\alpha_B$, приведем данное уравнение к виду

$$(X^2 - 1)(X - Y^3)^2 + X^2(1 - Y^2)^3 = 0$$

При этом, чтобы избавиться от квадратного корня, уравнение (3.2) возводили в квадрат, поэтому у выписанного уравнения могут появиться посторонние корни. Учитывая, что при $X = Y$ имеем корень этого уравнения, причем двукратный, легко свести его к виду

$$(X - Y)^2[X^2 - 2Y(Y^2 - 1)X - Y^4] = 0$$

Приравняв выражение в квадратных скобках нулю, находим два корня

$$X_{\pm} = Y(Y^2 - 1) \pm Y[(1 - Y^2 + Y^4)^{1/2} = \varepsilon^{1/3}[1 - \varepsilon^{2/3} \mp (1 - \varepsilon^{2/3} + \varepsilon^{4/3})^{1/2}]$$

где использовано равенство $Y = -\varepsilon^{1/3}$ ($Y = \sin\alpha_B$). Координату точки C определяет выражение $\alpha_C = \arcsin(X_-)$. Второй вариант $\alpha = \arcsin(X_+)$ будет посторонним для (3.2) [удовлетворяет уравнению $\text{tg}\alpha + \lambda(\sin\alpha + \varepsilon) = 0$]. Значение X_+ следует использовать так: $\alpha_D = -\pi - \arcsin(X_+)$. Корень α_D соответствует неустойчивой ветви (см. рис. 8) при наличии кратного корня α_B . При этом реализуется максимум функции $V(\alpha)$. Нижняя ветвь представляет линию, в которую переходит при $\varepsilon > 0$ неустойчивая ветвь $\alpha = -\pi$ для случая $\varepsilon = 0$. Рис. 8 показывает, что у маятника с круговой траекторией груза массы m (рис. 5) могут быть либо два положения равновесия при $\lambda < \lambda_B$ либо четыре при $\lambda > \lambda_B$ (в вырожденной точке B — три). Причем линии 1, 3 соответствуют неустойчивому равновесию, а 2, 4 — устойчивому.

Величина скачка угла α при катастрофе определяется выражением

$$\Delta\alpha = \alpha_C - \alpha_B = \arcsin\{\varepsilon^{1/3}[1 - \varepsilon^{2/3} + (1 - \varepsilon^{2/3} + \varepsilon^{4/3})^{1/2}]\} + \arcsin(\varepsilon^{1/3}) \quad (3.4)$$

Вблизи начала координат функция $\Delta\alpha$ имеет асимптотику $\Delta\alpha_0 \cong 3\varepsilon^{1/3}$, $\varepsilon \rightarrow 0$; а в окрестности точки $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon < 1$) разложение $\Delta\alpha_1 \cong \pi - [2(1 - \varepsilon^{1/3})]^{1/2}$, $\varepsilon \rightarrow 1$. Функция $\Delta\alpha(\varepsilon)$ имеет точку перегиба при $\varepsilon = 0.741$. Легко проверить, что формула $\Delta\alpha_0 = 3\varepsilon^{1/3}$ хорошо представляет (с высокой точностью) функцию $\Delta\alpha$ на интервале $\varepsilon \in [0, 0.99]$. Относительная погрешность на этом интервале не превышает 2.21%, а на всем интервале

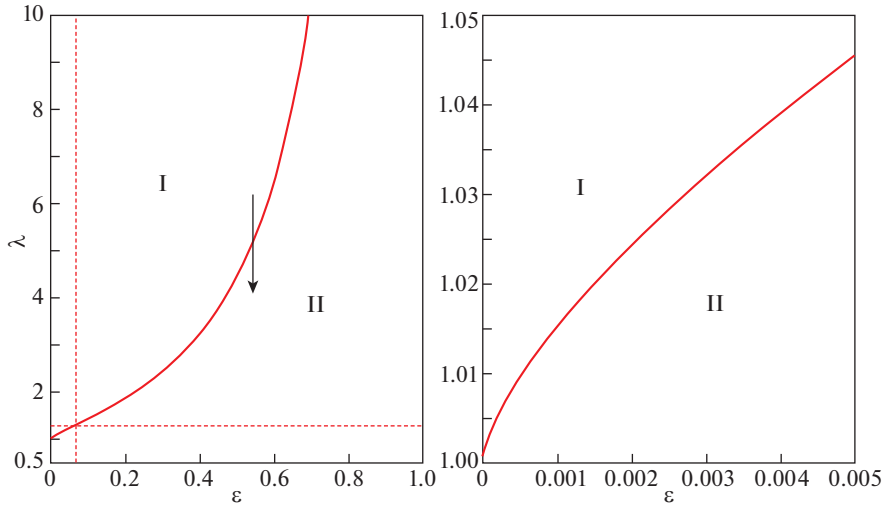


Рис. 10. График сепаратрисы катастрофы сборки (3.5).

$\varepsilon \in [0, 1]$ эта погрешность не больше 4.507%, что следует считать удачей для приближенной (асимптотической) формулы.

При $\varepsilon = 0.25$ для рис. 8 значения координат отмеченных точек таковы: $\lambda_B = 2.135$, $\alpha_D = -2.971$, $\alpha_B = -0.682$, $\alpha_C = 1.193$; величина скачка: $\Delta\alpha = 1.874$. При $\varepsilon = 0.1$ для рис. 6 (кривая 2) с помощью полученных соотношений также находятся характерные значения α , представленные ранее.

На рис. 10 приведен график функции (3.3)

$$\lambda = (1 - \varepsilon^{2/3})^{-3/2} \quad (3.5)$$

Он возникает как видимый контур при проектировании двумерной поверхности состояний (3.2) вдоль оси конфигурационной переменной α на плоскость управляющих параметров λ , ε . Эта разделяющая данную плоскость линия (сепаратриса) состоит из особых точек проектирования (линия складок). В области I имеется три действительных корня уравнения (3.2): $\alpha = \alpha(\lambda, \varepsilon)$ $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, тогда как в области II – только один. На разграничительной линии (бифуркационного множества при принятии принципа максимального промедления) присутствуют кратные корни. Поверхность (3.2) в этих точках имеет касательную плоскость перпендикулярную плоскости λ , ε . Особенность отображения проектирования понимается в том смысле, что окрестность выбранной точки в касательной плоскости (двумерная область) отображается в линию (одномерную область). Особенность, возникающую на линии (3.5) при $\varepsilon > 0$ называют складкой. Особенность отображения в окрестности точки $\lambda = 1$, $\varepsilon = 0$ более сложная. Ее называют сборкой Уитни. В этой точке сливаются три положения равновесия. На графике рис. 10,а окрестность этой точки плохо представлена из-за слишком крупных масштабов переменных по осям λ и ε . Поэтому на рис. 10,б дополнительно приведена часть того же графика в окрестности точки $\lambda = 1$, $\varepsilon = 0$. В этой окрестности точки функцию (3.5) можно представить локальной формулой

$$8(\lambda - 1)^3 = 27\varepsilon^2 \quad (3.6)$$

с точностью до масштабов переменных и выбора начала отсчета их совпадающей с обычно приводимой в литературе по теории катастроф зависимостью для бифуркации

онного множества катастрофы сборки в плоскости управляющих параметров. Характерное острое полукубической параболы (3.6) для функции (3.5) можно наблюдать на рис. 10,б, где выбран более мелкий масштаб чем на рис. 10,а. Причина “невыразительности” кривой рис. 10,а заключается в том, что эта кривая имеет точку перегиба при достаточно малом значении параметра $\epsilon_* = 6^{-3/2} = 0.068$, которую можно найти приравняв вторую производную функции (3.5) нулю. На рис. 10,а штриховыми линиями выделены координаты этой точки. Видим, что значение функции тоже достаточно мало $\lambda(\epsilon_*) = (1.2)^{3/2} = 1.315$. При этом наклон касательной в этой точке достаточно велик $\lambda'(\epsilon_*) = (1.2)^3(5)^{1/2} = 3.864$.

Стрелка на рис. 10,а, идущая из области I в область II соответствует пути, содержащему скачок угла α при катастрофе. Она, в точке пересечения с линией (3.5), определяет отрезок типа BC на рис. 8, который на рис. 10,а представлен одной точкой, поскольку этот отрезок перпендикулярен плоскости λ, ϵ .

Если пройти по стрелке на рис. 10,а в обратном направлении, то скачок α наблюдаться не будет (при тех же λ и ϵ получим другое значение α). При ограничении условиями $\lambda \geq 0, \epsilon \geq 0$, из области II ни по какому пути нельзя вернуться к старому значению α (ср. обсуждение рис. 8). Это означает, что переход от картинке рис. 5,а к картинке рис. 5,б при плавном изменении параметра λ невозможен.

Рис. 8 и рис. 9 изображают сечение поверхности, заданной соотношением (3.2) плоскостями $\epsilon = \text{const}$ (фиксированном значении одного из параметров) спроектированной на плоскость α, λ . На рис. 11 показаны некоторые кривые, когда зафиксирован другой управляющий параметр — λ . Для кривой 2 на этом рисунке выделены координаты точек, определяющих скачок $\Delta\alpha$, который описывается той же формулой (3.4).

Заключение. Рассмотренное устройство (рис. 5) можно использовать для иллюстрации скачкообразного поведения системы в свете теории катастроф. По-видимому, экспериментально его проще реализовать и регулировать управляющие параметры (по крайней мере λ), чем традиционные. Например, параболическая качалка, когда для демонстрации скачка катастрофы следует обеспечить ее контакт с плоскостью без проскальзывания и уметь плавно регулировать положение центра тяжести качалки.

Точно такое же математическое описание, как и в системе, показанной на рис. 5 будет и при вращении сдвинутого обруча радиуса l по которому может перемещаться грузик (в виде бусинки, см. рис. 12). При отсутствии смещения ($b = 0$) получим модель рис. 1. Взяв вместо окружности другие линии можно получить ряд познавательных примеров в духе теории катастроф. Например, вместо кругового обруча (рис. 12) можно взять эллиптический. При условии, что оси симметрии эллипса будут параллельны осям z и r (см. рис. 1) соответственно, можно описание данной системы свести к модели рис. 5.

Отметим, что в известном смысле аналогичное математическое описание имеет модель консольного шарнира с круговой пружиной, проанализированную в работе [10 стр. 54]. Однако там упругая энергия пружины пропорциональна квадрату координаты (а не синуса угловой координаты как у нас), что позволяет аналитически проводить только локальный анализ, выполняя разложения тригонометрических функций в ряды Тейлора. Иначе приходится иметь дело с трансцендентными уравнениями, а не алгебраическими как у нас.

При запуске вращающегося маятника в положение рис. 5,б могут возникнуть технические трудности. Можно предложить, например, такой способ. На штанге b имеется крючок, на который одета металлическая пластинка с небольшой прорезью (h рис. 5,б). При отсутствии зацепления с крючком пластинка (при определенном ее начальном положении, учитывающем воздействие на нее центробежной силы и силы тяжести) стремится упасть на стержень l на котором в нужном месте целесообразно расположить небольшой магнит. При пренебрежимой массе пластинки по сравнению

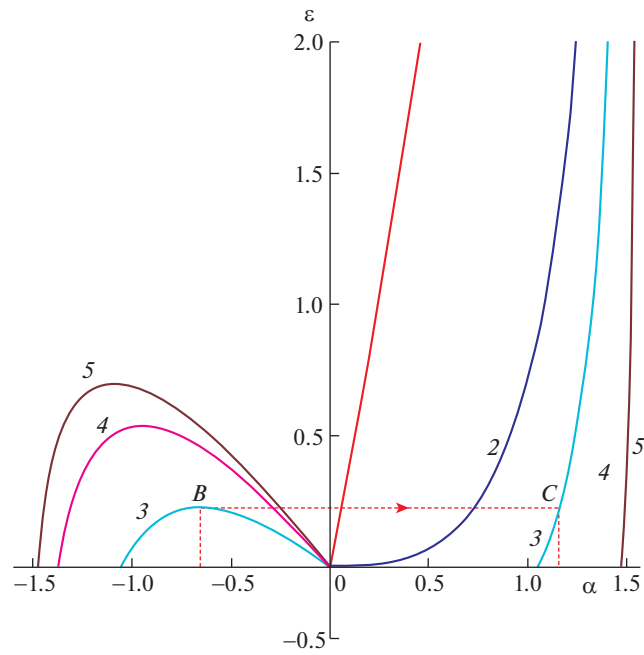


Рис. 11. Линии равновесия системы при: $1 - \lambda = 0.2$; $2 - \lambda = 1$; $3 - \lambda = 2$; $4 - \lambda = 5$; $5 - \lambda = 10$.

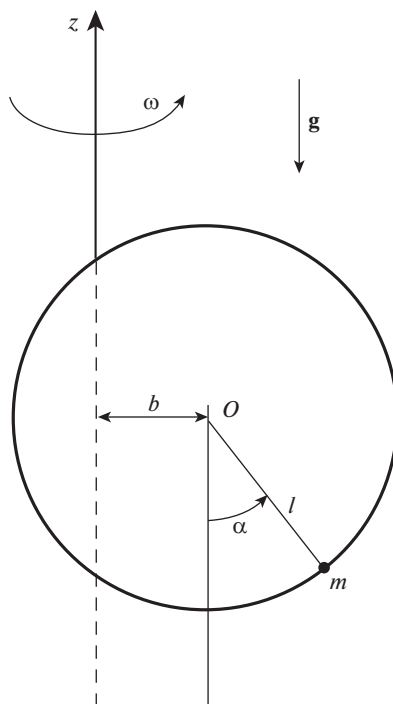


Рис. 12. Вращающийся смещенный обруч.

с массой груза m , она практически не влияет на динамику системы. После запуска маятника пластинка не дает сместиться стержню против часовой стрелки. При достижении определенного числа оборотов (значения параметра λ) стержень отклонится влево (рис. 5,b), пластинка освободится и “прилипнет” к стержню. Теперь система готова для наблюдения скачка угловой координаты стержня. При желании можно обеспечить и регулирование параметра ϵ , в том числе и реализовать во время движения вариант с $\epsilon < 0$. В таком случае получим “полноценную” катастрофу сборки, когда можно обойти снизу острие рис. 10,b) в области управляющих параметров.

Запустить установку для демонстрации катастрофы можно по-другому. Поместим горизонтальную гладкую площадку, например в форме круга необходимого диаметра, перпендикулярно оси вращения. На нее поместим грузик как показано на рис. 5,b. Далее, включив двигатель установки и постепенно увеличивая число оборотов двигателя, добьемся отрыва грузика от площадки. Теперь площадку можно удалить. Уменьшая число оборотов двигателя, в соответствующий момент будем наблюдать переход системы в состояние, показанное на рис. 5,a. Достаточное трение в шарнире позволит стабилизировать систему в положении, представленном на рис. 5,a. Не сложно перед запуском системы устанавливать различные длины штанги b . В принципе, можно предложить и устройство, регулирующее величину b в процессе вращения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. Теория катастроф. Изд. 3-е, доп. М.: Наука, 1990. 128 с.
2. Алексеев Ю.К., Сухоруков А.П. Введение в теорию катастроф: учебное пособие. Изд. 2-е, доп. М.: Книжный дом “Либроком”, 2009. 184 с.
3. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 608 с.
4. Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. Изд. 5-е. М.: Книжный дом “Либроком”, 2007. 312 с.
5. Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М. Сборник задач по элементарной физике. М.: Наука, 1974. 416 с.
6. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Т. 1. М.: Мир, 1984. 350 с.
7. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1989. 472 с.
8. Арнольд В.И. Вещественная алгебраическая геометрия. М.: МЦНМО, 2009. 88 с.
9. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. 9-е изд. М.: Наука, 1968. 431 с.
10. Томпсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985. 254 с.

УДК 539.3

ОДИН ПОДХОД К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ УДАРА ОБОЛОЧЕК ТИПА С.П. ТИМОШЕНКО ОБ УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

© 2023 г. В. Р. Богданов^{а,*}

^а*Progressive Research Solutions Pty Ltd, Sydney, Australia*

^{*}*e-mail: vladislav_bogdanov@hotmail.com, mr.vbogdanov@gmail.com*

Поступила в редакцию 13.09.2022 г.

После доработки 15.09.2022 г.

Принята к публикации 06.10.2022 г.

В работе приводится попытка решить плоскую задачу удара упругой оболочки типа С.П. Тимошенко об упругое полупространство используя методику сведения задач динамики к решению бесконечной системы интегральных уравнений (БСИУ) Вольтерра второго рода. Показано, что такой подход не приемлем. При дискретизации редуцированной БСИУ Вольтерра второго рода получается плохо определенная система линейных алгебраических уравнений: с ростом порядка редуцирования определитель такой системы стремится в бесконечность. Это показывает ограниченность такого подхода.

Ключевые слова: удар, полупространство, плоская задача, цилиндрическая оболочка

DOI: 10.31857/S0572329923700058, EDN: QXYLLX

1. Введение. Подход [1–5] для решения задач динамики, заключающийся в сведении к решению бесконечной системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода [6–8, 10], дает возможность определять напряженно-деформированное состояние упругих полупространства и слоя при проникании абсолютно твердых тел [1, 2, 7, 8, 10] и напряженно-деформированное состояние упругих оболочек типа Кирхгоффа–Лява и упругих полупространства и слоя при их соударении [3–6] и не позволяет так решать задачи удара упругих тел и оболочек типа С.П. Тимошенко. Кроме этого такой подход дает возможность определять неизвестные напряжения и перемещения только на поверхности основания. Это привело к целесообразности разработки других математических подходов и моделей. В [9, 11–14] разработан новый подход к решению задач удара и нестационарного взаимодействия в упругопластической математической постановке [15–19]. В нестационарных задачах действие ударника заменяется распределенной нагрузкой в области контакта, изменяющейся по линейному закону [20–22]. Решение задач для упругих оболочек [23–26], упругого полупространства [27–29], упругого слоя [30], упругого стержня [31, 32] было разработано с использованием метода функций влияния [33]. В [23] исследуется процесс нестационарного взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с упругим полупространством на так называемой “сверхзвуковой” стадии взаимодействия. Он характеризуется превышением скорости расширения области контактного взаимодействия скорости распространения волн растяжения–сжатия в упругом полупространстве. Решение было разработано с использованием функций влияния, соответствующих сосредоточенной силе или кинематическим воздействиям для упругого изотропного полупространства, которые были найдены и исследованы в [33].

$$\begin{aligned}
t' &= \frac{C_0 t}{R}, \quad x' = \frac{x}{R}, \quad z' = \frac{z}{R}, \quad u'_t = \frac{u_t}{R}, \quad \sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{K}, \quad v'_T = \frac{v_T}{C_0} \\
w'_T &= \frac{w_T}{R}, \quad p' = \frac{p}{KR}, \quad q' = \frac{q}{KR}, \quad M' = \frac{M}{\rho R^2}, \quad (i, j = x, y, z) \\
\beta^2 &= \frac{C_S^2}{C_0^2} = \frac{\mu}{K}, \quad \alpha^2 = \frac{C_p^2}{C_0^2} = \left(1 + \frac{4\mu}{3K}\right), \quad C_0^2 = \frac{K}{\rho}, \quad b^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{3\mu}{3K + 4\mu}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ — вектор перемещения точек среды; σ_{zz} , σ_{xx} , σ_{xz} — не нулевые компоненты тензора напряжений среды; M — погонная масса оболочки; $v_T(t)$, $w_T(t)$ — скорость и перемещение оболочки как твердого тела. Далее будем использовать только безразмерные величины, поэтому штрих опускаем. Упругое полупространство и оболочка находятся в состоянии плоской деформации.

Дифференциальные уравнения (типа Тимошенко С.П.), выведенные Д.В. Тарлаковским по аналогии с [стр. 87, 34], которые описывают динамику цилиндрических оболочек и учитывают сдвиг и инерцию вращения поперечного сечения, в силу (2.1) имеют вид:

$$\begin{aligned}
\gamma_0^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + (1 + a_4) \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + a_4 \Phi - a_4 u_0 + \beta_3 q \\
\eta_0^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - (1 + a_3) \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - a_3 w_0 + \beta_4 p \\
\gamma_0^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - a_2 \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - a_2 \Phi + a_2 u_0,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$\begin{aligned}
\gamma_0^2 &= \frac{C_0^2}{C_{02}^2}, \quad \eta_0^2 = \frac{C_0^2}{C_{01}^2}, \quad C_{01}^2 = \frac{E_0}{(1 - \nu_0)\rho_0}, \quad C_{02}^2 = \frac{b_1^2 E_0}{2(1 + \nu_0)}, \quad a_2 = \frac{6(1 - \nu_0)b_1^2 R^2}{h^2} \\
b_1^2 &= \frac{5}{6}, \quad a_3 = \frac{2}{(1 - \nu_0)b_1^2}, \quad a_4 = \frac{1}{a_3}, \quad \beta_3 = \frac{(1 - \nu_0)K^2 R}{E_0^2 h}, \quad \beta_4 = \frac{2(1 + \nu_0)K^2 R}{b_1^2 E_0^2 h}
\end{aligned}$$

где Φ — угол поворота нормального сечения к срединной поверхности, b_1^2 — коэффициент, учитывающий распределение касательных усилий в поперечном сечении оболочки, ν_0 , E_0 и ρ_0 — коэффициент Пуассона, модуль упругости Юнга и плотность материала оболочки, p и q — соответственно, радиальная и тангенциальная составляющие распределенной нагрузки, действующей на оболочку, R — радиус оболочки.

Движение упругой среды описывается скалярным потенциалом ϕ и ненулевой компонентой векторного потенциала ψ , которые удовлетворяют волновым уравнениям [1–8]:

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\alpha^2 \partial t^2}, \quad \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\beta^2 \partial t^2}, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2.3}$$

Физические величины выражаются через волновые потенциалы следующим образом:

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u_y = 0, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0, \quad \sigma_{xx} = \Theta - \sigma_{zz}$$

$$\sigma_{zz} = (1 - 2b^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\beta^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} \right), \quad \sigma_{xz} = 2\beta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - 2\beta^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

$$\Theta = \sigma_{zz} + \sigma_{xx} = 2(1 - b^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

Рассмотрим начальную стадию процесса удара упругих оболочек о поверхность упругого полупространства, когда не возникает пластических деформаций и величина заглубления оболочки в среду мала. Задача взаимодействия упругих оболочек с упругим полупространством решается в линейной постановке, поэтому выполняем линеаризацию краевых условий [1–8, 10]: краевые условия с возмущенной поверхности сносим на не возмущенную поверхность тел, которые деформируются.

Как видно из рис. 1, проекции функций u_0 , w_0 , p и q на оси $O'z$ и $O'x$ определяются так:

$$\begin{aligned} pr_z w_0(t, \theta) &= w_0(t, \theta) \cos \theta, & pr_x w_0(t, \theta) &= -w_0(t, \theta) \sin \theta, & pr_z u_0(t, \theta) &= u_0(t, \theta) \sin \theta \\ pr_x u_0(t, \theta) &= u_0(t, \theta) \cos \theta, & pr_z p(t, \theta) &= p(t, \theta) \cos \theta, & pr_x p(t, \theta) &= -p(t, \theta) \sin \theta \\ pr_z q(t, \theta) &= q(t, \theta) \sin \theta, & pr_x q(t, \theta) &= q(t, \theta) \cos \theta \end{aligned} \quad (2.5)$$

Тогда при контакте, который происходит в условиях жесткого сцепления, в системе координат zOx перемещения u_z , u_x и напряжения σ_{zz} и σ_{zx} в поверхностных точках области контакта запишутся в виде:

$$\begin{aligned} u_z(t, x, 0) &= w_T(t) - f(x) - w_0(t, \theta) \cos \theta - u_0(t, \theta) \sin \theta \\ u_x(t, x, 0) &= -w_0(t, \theta) \sin \theta + u_0(t, \theta) \cos \theta \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\sigma_{zz}(t, x, 0) = -p(t, \theta) \cos \theta - q(t, \theta) \sin \theta, \quad \sigma_{zx}(t, x, 0) = -p(t, \theta) \sin \theta + q(t, \theta) \cos \theta$$

где функция $f(x)$ описывает профиль оболочки. В случае кругового цилиндра $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$.

Радиальная и тангенциальная составляющие распределенной нагрузки, действующей на оболочку, выражаются через нормальные и тангенциальные напряжения, возникающие на поверхности полупространства в зоне контакта.

$$p(t, \theta) = -\sigma_{zz}(t, x, 0) \cos \theta - \sigma_{xz}(t, x, 0) \sin \theta, \quad |\theta| < \theta^* \quad (2.7)$$

$$q(t, \theta) = -\sigma_{zz}(t, x, 0) \sin \theta + \sigma_{xz}(t, x, 0) \cos \theta, \quad |\theta| < \theta^* \quad (2.8)$$

где $2\theta^*$, как видно из рис. 1, есть величина сектора оболочки, контактирующего с полупространством.

Кинематическое условие, определяющее полуразмер области контакта $x^*(t)$ запишется следующим образом:

$$w_T(t) - f(x) - u_z(t, x, 0) - w_0(t, \theta) \cos \theta - u_0(t, \theta) \sin \theta \begin{cases} = 0, & |x| \leq x^*(t) \\ < 0, & |x| > x^*(t) \end{cases} \quad (2.9)$$

Предполагаем, что область контакта односвязная, а это утверждение эквивалентно тому, что нормальные к площадке контакта напряжения являются сжимающими:

$$\sigma_{zz}|_{z=0} < 0, \quad |x| < x^*(t) \quad (2.10)$$

На основании (2.4), граничные условия при отсутствии трения в зоне контакта можно сформулировать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial t} \Big|_{z=0} &\equiv V(t, x) = v_T(t) - \frac{\partial w_0(t, \theta)}{\partial t} \cos \theta - \frac{\partial u_0(t, \theta)}{\partial t} \sin \theta, \quad |x| < x^*(t) \\ \sigma_{zx} &= 0; \quad |x| > x^*(t), \quad \sigma_{zx}|_{z=0} = 0, \quad |x| < \infty \end{aligned} \quad (2.11)$$

Начальные условия для потенциалов ϕ и ψ — нулевые:

$$\phi|_{t=0} = \frac{\partial \phi}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad \psi|_{t=0} = \frac{\partial \psi}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (2.12)$$

Для задачи удара упругой оболочки об упругое полупространство скорость и перемещение ударяющегося тела находятся из уравнения движения путем его интегрирования.

Уравнение движения центра масс оболочки в задаче удара с начальной скоростью V_0 имеет вид:

$$M \frac{d^2 w_T(t)}{dt^2} = P(t) \quad (2.13)$$

$$v_T(t)|_{t=0} = V_0, \quad w_T(t)|_{t=0} = 0 \quad (2.14)$$

$$P(t) = 2 \int_0^{x^*(t)} \sigma_{zz}(t, x, 0) dx \quad (2.15)$$

Справедливо условие отсутствия возмущений перед фронтом продольных волн и условие затухания возмущений на бесконечности.

3. Методика решения. Так как процесс удара — кратковременный, область возмущений в каждый момент времени t является конечной. Ограничиваясь конечным интервалом времени взаимодействия ($0 \leq t \leq T$), можно выделить область полупространства, которая к моменту времени T охватывает всю зону возмущений. С этой точки зрения для времен ($0 \leq t \leq T$) упругое полупространство можно заменить упругой полуполосой ($|x| \leq l; z \geq 0$), до границ которой к моменту времени T не доходят возмущения.

$$l = \alpha T + x^*(T) \quad (3.1)$$

Таким образом, для времен ($0 \leq t \leq T$) рассматриваемая задача сводится к нестационарной задаче для полуполосы при смешанных граничных условиях на ее торце.

На боковых гранях полуполосы выбираем, например, условия скользящей заделки:

$$u_x|_{|x|=l} = 0, \quad \sigma_{zx}|_{|x|=l} = 0 \quad (3.2)$$

Рассмотрим начально-краевую задачу (2.2), (2.3), (2.11)–(2.14). Представим нормальные $w_0(t, \theta)$ и тангенциальные $u_0(t, \theta)$ перемещения точек срединной поверхности оболочки и радиальные $p(t, \theta)$ и тангенциальные $q(t, \theta)$ составляющие распределенной внешней нагрузки, действующей на оболочку в виде тригонометрических рядов Фурье.

$$w_0(t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{0n}(t) \cos(n\theta) \quad (3.3)$$

$$u_0(t, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{0n}(t) \sin(n\theta) \quad (3.4)$$

$$p(t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) \cos(n\theta) \quad (3.5)$$

$$q(t, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin(n\theta) \quad (3.6)$$

$$\Phi(t, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) \sin(n\theta) \quad (3.7)$$

Подставляя равенства (3.3)–(3.7) в систему уравнений (2.2), приравнявая коэффициенты при $\cos(n\theta)$, $\sin(n\theta)$ и применяя к полученным уравнениям преобразование Лапласа по переменной t с параметром s , приходим к соотношениям, связывающим изображения по Лапласу коэффициентов рядов (3.3)–(3.7) (здесь и далее верхний индекс “ L ” означает изображение по Лапласу):

$$w_{0,0}^L(s) = \frac{\beta_4 p_0^L(s)}{\eta_0^2 s^2 + a_3} \quad (3.8)$$

$$w_{0,n}^L(s) = Q_{11}^L(n, s) p_n^L(s) + Q_{12}^L(n, s) q_n^L(s) \quad (3.9)$$

$$u_{0,n}^L(s) = Q_{21}^L(n, s) p_n^L(s) + Q_{22}^L(n, s) q_n^L(s) \quad (3.10)$$

$$\Phi_n^L(s) = Q_{31}^L(n, s) p_n^L(s) + Q_{32}^L(n, s) q_n^L(s) \quad (3.11)$$

где

$$Q_{ij}^L(n, s) = \frac{\Delta_{ij}(s)}{\Delta(s)}, \quad (i = \overline{1, 3}; j = 1, 2; n = \overline{1, \infty})$$

$$\Delta_{21}(n, s) = -\beta_4 n [a_2 + (1 + a_4)(\gamma_0^2 s^2 + n^2)]$$

$$\Delta_{22}(n, s) = \beta_3 [(\eta_0^2 s^2 + n^2)(\gamma_0^2 s^2 + n^2) + (\eta_0^2 a_2 + \gamma_0^2 a_3) s^2 + a_3 n^2 + a_2 a_3]$$

$$\Delta_{11}(n, s) = \beta_4 [(\gamma_0^2 s^2 + n^2)(\gamma_0^2 s^2 + n^2) + a_2 + a_4]$$

$$\Delta_{12}(n, s) = -\beta_3 n [(1 + a_3)(\gamma_0^2 s^2 + n^2) + a_2 a_3]$$

$$\Delta_{31}(n, s) = \beta_4 a_2 [n(\gamma_0^2 s^2 + n^2) - 1], \quad \Delta_{32}(n, s) = \beta_3 a_2 [\eta_0^2 s^2 + a_3(1 - n^2)]$$

$$\Delta(s) = \eta_0^2 \gamma_0^4 [s^6 + A_a s^4 + B_b s^2 + C_c], \quad A_a = ((2\eta_0^2 + \gamma_0^2)n^2 + a_3 \gamma_0^2 + a_4 \eta_0^2)/(\eta_0^2 \gamma_0^2)$$

$$B_b = ((\eta_0^2 + 2\gamma_0^2)n^4 + ((a_3 - 2)\gamma_0^2 + a_4 \eta_0^2)n^2 + a_2(\eta_0^2 \gamma_0^2 + a_3 \gamma_0^2 - a_4 \eta_0^2) + \gamma_0^2)/(\eta_0^2 \gamma_0^4)$$

$$C_c = (n^6 - 2n^4 + (a_2 \eta_0^2 + 1)n^2 + a_3 a_4 \eta_0^2)/(\eta_0^2 \gamma_0^4)$$

Тогда применяя к (3.8)–(3.11) обратное преобразование Лапласа, по теореме о свертке оригиналов двух функций имеем:

$$\dot{w}_{0,0}(t) = \frac{\beta_4}{\eta_0^2} \int_0^t p_0(\tau) \cos \frac{t - \tau}{\eta_0(a_4)^{1/2}} d\tau \quad (3.12)$$

$$\dot{w}_{0,n}(t) = \int_0^t p_n(\tau) Q_{11}(n, t - \tau) d\tau + \int_0^t q_n(\tau) Q_{12}(n, t - \tau) d\tau \quad (3.13)$$

$$\dot{u}_{0,n}(t) = \int_0^t p_n(\tau) Q_{21}(n, t - \tau) d\tau + \int_0^t q_n(\tau) Q_{22}(n, t - \tau) d\tau \quad (3.14)$$

$$\dot{\Phi}_n(t) = \int_0^t p_n(\tau) Q_{31}(n, t - \tau) d\tau + \int_0^t q_n(\tau) Q_{32}(n, t - \tau) d\tau, \quad (n = \overline{1, \infty}) \quad (3.15)$$

где

$$Q_{ij}(n, t) = 4[(\Delta_r R_{ij} + \Delta_i I_{ij})\text{ch}(r_0 t) \cos(\sigma_0 t) + (\Delta_i R_{ij} - \Delta_r I_{ij})\text{sh}(r_0 t) \sin(\sigma_0 t)] / (\Delta_r^2 + \Delta_i^2) + \\ + \frac{2\Delta_{ij}(n, s_1^2)(H(s_1^2)\text{ch}(s_1 t) + H(-s_1^2)\cos(s_1 t))}{\Delta'(s_1^2)}$$

$$R_{11} = \beta_4 [\gamma_0^4 r_1 + \gamma_0^2(2n^2 + a_2 + a_4)r_2 + n^2(n^2 + a_2 + a_4)]$$

$$I_{11} = \beta_4 [\gamma_0^4 \sigma_1 + \gamma_0^2(2n^2 + a_2 + a_4)\sigma_2]$$

$$R_{22} = \beta_3 [\eta_0^2 \gamma_0^2 r_1 + ((\gamma_0^2 + \eta_0^2)n^2 + \eta_0^2 a_2 + \gamma_0^2 a_3)r_2 + n^2(n^2 + a_3) + a_2 a_3]$$

$$I_{22} = \beta_3 [\eta_0^2 \gamma_0^2 \sigma_1 + ((\gamma_0^2 + \eta_0^2)n^2 + \eta_0^2 a_2 + \gamma_0^2 a_3)\sigma_2]$$

$$R_{12} = -\beta_3 n [(1 + a_3)(\gamma_0^2 r_2 + n^2) + a_2 a_3], \quad I_{12} = -\beta_3 n (1 + a_3) \gamma_0^2 \sigma_2, \quad I_{21} = -\beta_4 n (1 + a_4) \gamma_0^2 \sigma_2$$

$$R_{21} = -\beta_4 n [(1 + a_4)(\gamma_0^2 r_2 + n^2) + a_2]$$

$$\Delta_r = \eta_0^2 \gamma_0^4 [6r_1 + 4A_a r_2 + 2B_b], \quad \Delta_i = \eta_0^2 \gamma_0^4 [6\sigma_1 + 4A_a \sigma_2]$$

$$\Delta'(s) = \eta_0^2 \gamma_0^4 [6s^4 + 4A_a s^2 + 2B_b]$$

Здесь $H(x)$ – единичная функция Хевисайда, выражения s_1 , r_i , σ_i ($i = 1; 2$) определяются из решения Кардано [стр. 43, 35].

$$w_{0,0}(t) = \frac{\beta_4(a_4)^{1/2}}{\eta_0} \int_0^t p_0(\tau) \sin \frac{t-\tau}{\eta_0(a_4)^{1/2}} d\tau$$

$$w_{0,n}(t) = \int_0^t p_n(\tau) \tilde{Q}_{11}(n, t-\tau) d\tau + \int_0^t q_n(\tau) \tilde{Q}_{12}(n, t-\tau) d\tau \quad (3.16)$$

$$u_{0,n}(t) = \int_0^t p_n(\tau) \tilde{Q}_{21}(n, t-\tau) d\tau + \int_0^t q_n(\tau) \tilde{Q}_{22}(n, t-\tau) d\tau \quad (3.17)$$

$$\Phi_n(t) = \int_0^t p_n(\tau) \tilde{Q}_{31}(n, t-\tau) d\tau + \int_0^t q_n(\tau) \tilde{Q}_{32}(n, t-\tau) d\tau, \quad (n = \overline{1, \infty}) \quad (3.18)$$

где

$$\tilde{Q}_{ij}(n, t) = 4[(\delta_r R_{ij} + \delta_i I_{ij})\text{sh}(r_0 t) \cos(\sigma_0 t) + (\delta_i R_{ij} - \delta_r I_{ij})\text{ch}(r_0 t) \sin(\sigma_0 t)] / (\delta_r^2 + \delta_i^2) + \\ + \frac{2\Delta_{ij}(n, s_1^2)(H(s_1^2)\text{sh}(s_1 t) + H(-s_1^2)\sin(s_1 t))}{s_1 \Delta'(s_1^2)}, \quad \delta_r = r_0 \Delta_r - \sigma_0 \Delta_i, \quad \delta_i = \sigma_0 \Delta_r + r_0 \Delta_i$$

Применим к системе уравнений (2.3) преобразование Лапласа по переменной t (s – параметр преобразования) и метод Фурье разделения переменных [1–5], учитывая четность по x потенциала φ и нечетность ненулевой компоненты векторного потенциала ψ , и потребуем удовлетворение условий (2.16)–(2.17). Тогда в пространстве трансформант Лапласа получим следующие представления для волновых потенциалов [7, 8, 10]:

$$\begin{aligned}\varphi^L(s, x, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s) \exp \left(-z \sqrt{\frac{s^2}{\alpha^2} + \lambda_n^2} \right) \cos \lambda_n x \\ \psi^L(s, x, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s) \exp \left(-z \sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + \lambda_n^2} \right) \sin \lambda_n x\end{aligned}\quad (3.19)$$

где $\lambda_n = n\pi/l$, $(n = \overline{1, \infty})$ – собственные числа задачи, которые соответствуют условию скользящей заделки (3.3).

В (3.25) $A_n(s)$ и $B_n(s)$ определяются из граничных условий. Из представлений (3.19) и соотношений (2.4) следует, что искомые функции на поверхности полупространства представляются в виде рядов по системе собственных функций задачи.

$$u_z(t, x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{zn}(t) \cos \lambda_n x \quad (3.20)$$

$$u_x(t, x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{xn}(t) \sin \lambda_n x \quad (3.21)$$

$$\sigma_{zz}(t, x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{zn}(t) \cos \lambda_n x \quad (3.22)$$

$$\sigma_{zx}(t, x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{zxn}(t) \sin \lambda_n x \quad (3.23)$$

Так же, как в [1–5] определяется зависимость между гармониками вертикальной составляющей скорости и нормальных напряжений на поверхности полупространства [6–8, 10]:

$$\sigma_{zn}(t) = -\alpha \left(V_n(t) + \int_0^t V_n(\tau) F(t - \tau) d\tau \right) \quad (3.24)$$

где

$$\begin{aligned}F_n(t) &= -\alpha \lambda_n J_1(\alpha \lambda_n t) + 2b \beta \lambda_n \left\{ \beta^2 \lambda_n^2 t^2 (\bar{J}_0(\alpha \lambda_n t) - \bar{J}_0(\beta \lambda_n t)) - J_1(\alpha \lambda_n t) + J_1(\beta \lambda_n t) \right\} \\ &\quad + \beta \lambda_n t (b J_0(\alpha \lambda_n t) - J_0(\beta \lambda_n t)) + (2 - b^2) \bar{J}_0(\alpha \lambda_n t) - \bar{J}_0(\beta \lambda_n t)\end{aligned}$$

Здесь $J_0(t)$, $J_1(t)$ – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно, а функцию $\bar{J}_0(t)$ определим так: $\bar{J}_0(t) = \int_0^t J_0(\tau) d\tau$.

Далее, удовлетворим смешанным граничным условиям (2.11). Из (2.11), (3.24) и получим следующее представление для вертикальной составляющей скорости на поверхности полупространства:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) \cos \lambda_n x &= H(x^* - |x|) \{ v_T(t) - \dot{w}_0(t, \theta) \cos \theta - \dot{u}_0(t, \theta) \sin \theta \} - \\ &\quad - H(|x| - x^*) \sum_{n=0}^{\infty} \cos \lambda_n x \int_0^t V_n(\tau) F_n(t - \tau) d\tau\end{aligned}\quad (3.25)$$

Подставляя (3.4) и (3.5) в (3.25) с учетом $x = \sin \theta$, вытекающим из геометрических соображений в области контакта, и представляя обе части (3.25) в виде рядов по $\cos \lambda_n x$, получим бесконечную систему интегральных уравнений (БСИУ) Вольтерра

второго рода (3.26) относительно неизвестных гармоник скорости на поверхности полупространства ($n = 0, \infty$):

$$V_n(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn}^{(1)}(x^*) \int_0^t V_m(\tau) F_m(t - \tau) d\tau + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\alpha_{mn}^{(2)}(x^*) \dot{w}_{0m}(t) + \alpha_{mn}^{(3)}(x^*) \dot{u}_{0m}(t) \right] \times \\ \times \int_0^t V_m(\tau) F_m(t - \tau) d\tau = C_n(x^*) v_T(t) \quad (3.26)$$

где

$$\alpha_{mn}^{(1)}(x^*) = \frac{1}{N_n^2} \int_{x^*}^l \cos \lambda_m x \cos \lambda_n x dx, \quad \alpha_{mn}^{(2)}(x^*) = \frac{1}{N_n^2} \int_0^{x^*} \sqrt{1 - x^2} D_{1m}(x) \cos \lambda_n x dx \\ \alpha_{mn}^{(3)}(x^*) = \frac{1}{N_n^2} \int_0^{x^*} x B_{1m}(x) \cos \lambda_n x dx, \quad C_n(x^*) = \frac{1}{N_n^2} \int_0^{x^*} \cos \lambda_n x dx, \quad N_n^2 = \int_0^l \cos^2 \lambda_n x dx \\ D_{1m}(x) = \cos(m\pi/2) T_m(x) + \sin(m\pi/2) U_m(x) \\ B_{1m}(x) = \sin(m\pi/2) T_m(x) - \cos(m\pi/2) U_m(x)$$

Здесь $T_m(x)$ и $U_m(x)$ — полиномы Чебышева первого и второго рода.

Функции $\dot{w}_{0m}(t)$, $\dot{u}_{0m}(t)$ и $\dot{\Phi}_n(t)$ определяются из соотношений (3.12)–(3.15), однако в них фигурируют неизвестные функции $p_n(t)$ и $q_n(t)$. Займемся их исключением, для этого используем условия (2.7), (2.8), которые можно переписать, используя (3.24) в виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) \cos n\theta = \alpha H(\theta^* - |\theta|) \cos \theta \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\lambda_n \sin \theta) \left(V_n(t) + \int_0^t V_n(\tau) F_n(t - \tau) d\tau \right) \quad (3.27)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n(t) \sin n\theta = \alpha H(\theta^* - |\theta|) \sin \theta \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\lambda_n \sin \theta) \left(V_n(t) + \int_0^t V_n(\tau) F_n(t - \tau) d\tau \right) \quad (3.28)$$

Используя ортогональность функций $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$, получим соотношения, устанавливающие связь между гармониками разложений в ряды функций p , q и V :

$$p_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{mn}^{(1)}(\theta^*) \left(V_m(t) + \int_0^t V_m(\tau) F_m(t - \tau) d\tau \right) \quad (3.29)$$

$$q_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{mn}^{(2)}(\theta^*) \left(V_m(t) + \int_0^t V_m(\tau) F_m(t - \tau) d\tau \right) \quad (3.30)$$

где

$$\gamma_{mn}^{(1)}(\theta^*) = \frac{\alpha}{\bar{N}_n^2} \int_0^{\theta^*} \cos \theta \cos n\theta \cos(\lambda_m \sin \theta) d\theta \\ \gamma_{mn}^{(2)}(\theta^*) = \frac{\alpha}{\tilde{N}_n^2} \int_0^{\theta^*} \sin \theta \sin n\theta \cos(\lambda_m \sin \theta) d\theta \\ \bar{N}_n^2 = \int_0^{\pi} \cos^2 n\theta d\theta, \quad \tilde{N}_n^2 = \int_0^{\pi} \sin^2 n\theta d\theta$$

Таким образом, окончательный вид разрешающей БСИУ Вольтерра второго рода будет следующий:

$$\begin{aligned}
& V_n(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn}^{(1)}(x^*) \int_0^t V_m(\tau) F_m(t - \tau) d\tau + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn}^{(2)}(x^*) \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \gamma_{km}^{(1)}(\theta^*(\tau)) \left(V_k(\tau) + \int_0^{\tau} V_k(\xi) F_k(\tau - \xi) d\xi \right) Q_{11}(m, t - \tau) d\tau + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn}^{(2)}(x^*) \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \gamma_{km}^{(2)}(\theta^*(\tau)) \left(V_k(\tau) + \int_0^{\tau} V_k(\xi) F_k(\tau - \xi) d\xi \right) Q_{12}(m, t - \tau) d\tau + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn}^{(3)}(x^*) \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \gamma_{km}^{(1)}(\theta^*(\tau)) \left(V_k(\tau) + \int_0^{\tau} V_k(\xi) F_k(\tau - \xi) d\xi \right) Q_{21}(m, t - \tau) d\tau + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn}^{(3)}(x^*) \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \gamma_{km}^{(2)}(\theta^*(\tau)) \left(V_k(\tau) + \int_0^{\tau} V_k(\xi) F_k(\tau - \xi) d\xi \right) Q_{22}(m, t - \tau) d\tau = \\
& = C_n(x^*) v_T(t). \quad (n = \overline{0, \infty})
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Для решения задачи, когда скорость проникания оболочки $v_T(t)$ – наперед заданная функция, достаточно численно реализовать уравнения (3.31).

Выражение для силы реакции упругого полупространства (2.15), используя (3.24) перепишем в виде:

$$P(t) = -2 \int_0^{x^*(t)} \sigma_{zz}(t, x, 0) dx = 2\alpha \left\{ v_T(t) x^*(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n x^*}{\lambda_n} \int_0^t V_n(\tau) F_n(t - \tau) d\tau \right\} \tag{3.32}$$

Уравнение движения оболочки (2.13) с начальными условиями принимает вид:

$$M \frac{dv_T(t)}{dt} = -2\alpha \left\{ v_T(t) x^*(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n x^*}{\lambda_n} \int_0^t V_n(\tau) F_n(t - \tau) d\tau \right\} \tag{3.33}$$

Для решения задачи удара с начальной скоростью V_0 , систему уравнений (3.32) необходимо дополнить уравнением движения (3.33).

Область контакта определяется с учетом подъема среды из условия:

$$\begin{aligned}
& \delta_{1j} v_T t + \delta_{2j} \int_0^t v_T(\tau) d\tau - f(x^*) - \sum_{n=0}^{\infty} \cos \lambda_n x^* \int_0^t V_n(\tau) d\tau - \\
& - \sqrt{1 - x^{*2}} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n \arcsin x^*) \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^t [\gamma_{mn}^{(1)}(\arcsin x^*(\tau)) \tilde{G}_{11}(n, t - \tau) + \\
& + \gamma_{mn}^{(2)}(\arcsin x^*(\tau)) \tilde{G}_{12}(n, t - \tau)] \left(V_m(\tau) + \int_0^{\tau} V_m(\xi) F_m(\tau - \xi) d\xi \right) d\tau - \\
& - x^* \sum_{n=0}^{\infty} \sin(n \arcsin x^*) \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^t [\gamma_{mn}^{(1)}(\arcsin x^*(\tau)) \tilde{G}_{21}(n, t - \tau) + \\
& + \gamma_{mn}^{(2)}(\arcsin x^*(\tau)) \tilde{G}_{22}(n, t - \tau)] \left(V_m(\tau) + \int_0^{\tau} V_m(\xi) F_m(\tau - \xi) d\xi \right) d\tau \begin{cases} = 0, & |x| < x^*(t) \\ < 0, & |x| > x^*(t) \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

здесь $\delta_{ij} = \{0, \text{если } i \neq j; 1, \text{если } i = j\}$ – символ Кронекера. Индекс $j = 1$ соответствует случаю, когда тело проникает в среду со скоростью, изменяющейся по наперед заданному закону (постановка 1); если скорость проникающего тела известна только в начальный момент времени $t = 0$, а в последующие моменты определяется из уравнения

движения (постановка 2), тогда $j = 2$. Если в соотношении (3.34) исключить четвертое слагаемое, то получим условие, из которого определяется граница области контакта без учета подъема среды.

4. Численная реализация. Для расчетов были выбраны стальная оболочка и алюминиевое и стальное полупространства. Порядок редукции N БСИУ Вольтерра второго рода будем выбирать из соображений практической сходимости. Для сглаживания осцилляций, возникающих при суммировании конечного числа членов ряда, а также явлений Гиббса вблизи точек слабого разрыва, применялась операция усреднения, определенная в [1–5], состоящая, в случае суммы конечного числа членов тригонометрического ряда, к почленному умножению членов конечной суммы на σ_n — множителю Ланцоша (4.1) [7, 8, 10].

$$\sigma_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0 \\ \frac{\sin(n\pi/N)}{n\pi/N}, & \text{если } n \neq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Для вычисления интегралов применялся метод механических квадратур, в частности симметричная квадратурная формула Грегори для равноотстоящих узлов. Задача Коши для дифференциального уравнения (3.33) решалась методом Адамса (формулы замкнутого типа) [1–5] порядка m_1 с локальной ошибкой усечения $O(\Delta t^{m_1+1})$ [6–8, 10]. В результате дискретизации получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Расчеты показали, что с увеличением порядка редукции N определитель матрицы СЛАУ неограниченно увеличивается. СЛАУ является плохо определенной: при стремлении в бесконечность порядка редукции N значение определителя матрицы СЛАУ тоже стремится в бесконечность. Это происходит из-за того, что по параметру n ядра $Q_{11}(n, t)$, $Q_{22}(n, t)$ в (3.19), (3.20) имеют асимптотику $\exp(O(n))$, а $\tilde{Q}_{11}(n, t)$ и $\tilde{Q}_{22}(n, t)$ в (3.22) и (3.23) имеют асимптотику $O(1/n) \exp(O(n))$. Методы регуляризации Тихонова и ортогональных многочленов не дают возможности нейтрализовать такую экспоненциальную особенность. Подход [1–5] для решения задач динамики не дает возможности исследовать удар упругих оболочек типа С.П. Тимошенко и упругих тел об упругое основание [6–8, 10]. Кроме этого, этот подход дает возможность определять напряженно деформированное состояние только на поверхности среды, в которую проникает ударник.

Заключение. В результате попытки решить плоскую задачу удара цилиндрической оболочки типа С.П. Тимошенко о поверхность упругого полупространства, применяя методику [1–5], была выявлена ограниченность этой методики. Данная методика не позволяет решать плоские задачи динамики для уточненных оболочек типа С.П. Тимошенко и упругих тел.

Удобно и целесообразно использовать методику [1–8, 10] для решения задач динамики для калибровки вычислительного [1] процесса в упругопластической постановке на упругом этапе, которая применялась для решения [9, 11–14] задач удара и нестационарного взаимодействия [15–22].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богданов В.Р. Impact a circular cylinder with a flat on an elastic layer // Transfer of Innovative Technologies. 2018. V. 1 (2). P. 68–74.
<https://doi.org/10.31493/tit1812.0302>
2. Богданов В.Р. Impact of a hard cylinder with flat surface on the elastic layer // Underwater Technologies. 2017. V. 5. P. 8–15.
3. Богданов В.Р., Левицкая Е.Р., Приходько Т.Б., Радзивил Е.Ю., Самборская Л.Р. Дослідження плоского удару оболонки об пружний шар // Вісник Національного транспортного університету. 2009. № 19. С. 283–292.

4. Кубенко В.Д., Богданов В.Р. Плоская задача удара оболочек об упругое полупространство // Прикл. механика. 1995. 31. № 6. С. 78–86.
5. Кубенко В.Д., Богданов В.Р. Осесимметричная задача удара оболочек об упругое полупространство // Прикл. механика. 1995. Т. 31. № 10. С. 56–63.
6. Кубенко В.Д., Попов С.Н., Богданов В.Р. Удар упругой цилиндрической оболочки о поверхность упругого полупространства // Доповіді НАН України. 1995. № 7. С. 40–44.
7. Кубенко В.Д., Попов С.Н. Плоская задача удара жесткого затупленного тела о поверхность упругого полупространства // Прикл. механика. 1988. Т. 24. № 7. С. 69–77.
8. Попов С.Н. Вертикальный удар жесткого кругового цилиндра боковой поверхностью об упругое полупространство // Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 12. С. 41–47.
9. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Определение вязкости разрушения материала с использованием расчета пространственного упругопластического динамического деформирования // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 2. С. 87–99.
10. Богданов В.Р. Плоска задача про удар жорсткого циліндра об пружний шар // Вісник Київск. нац. унів. Мех. Мат. 2015. № 34. С. 42–47.
11. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Плоская деформация упругопластического материала с профилем формы компактного образца (динамическое нагружение) // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 3. С. 111–120.
12. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Моделирование роста пластических деформаций при ударе на основе численного решения задачи плоского напряженного состояния // Вестник МАИ. 2013. Т. 20. № 3. С. 196–201.
13. Богданов В.Р. Тривимірна динамічна задача концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини // Вісник Київського ун-ту. 2009. № 2. С. 51–56.
14. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Плоский деформований стан матеріалу з нерухомою тріщиною із врахуванням процесу розвантаження // Математичні методи і фізико механічні поля. Львів. 2012. 55. № 3. С. 132–138.
15. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского напруженого стану // Вісник Київського нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. 2010. № 4. С. 51–54.
16. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Моделирование руху тріщини на основі числового розв'язування задачі плоского напруженого стану // Вісник Львівського нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. 2010. Вып. 73. С. 192–204.
17. Bohdanov V.R., Sulym H.T. Evaluation of crack resistance based on the numerical modelling of the plane strained state // Mater. Sci. 2011. V. 46. № 6. P. 723–734.
<https://doi.org/10.1007/s11003-011-9346-0>
18. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Моделирование подрастания трещины на основе численного решения задачи плоского деформированного состояния // 36. наукових праць “Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій”. Дніпропетровськ. 2011. № 15. С. 33–44.
19. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання тривимірної динамічної задачі // Международный научно-технический сборник “Надежность и долговечность машин и сооружений”. 2010. № 33. С. 153–166.
20. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Просторове моделювання процесу підростання тріщини на основі числового розв'язування 36. наукових праць “Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій”. Дніпропетровськ. 2012. № 19. С. 10–19.
21. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Моделирование руху тріщини у компактному зразку на основі числового розв'язування просторової задачі // Збірник наукових праць “Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла”. Дніпропетровськ. 2012. № 13. С. 60–68.
22. Богданов В.Р. О пространственной деформации упругопластического материала с профилем формы компактного образца // Теоретическая и прикладная механика. Донецьк. 2011. № 3 (49). С. 51–58.
23. Федотенков Г.В. Удар цилиндрической оболочки по упругой полуплоскости. М.: МАИ, 2001. 100 с.
24. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек // Ученые записки Казанского университета. Серия физ.-мат. науки. 2018. 160. № 3. С. 561–577.

25. Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Скопинцев П.Д., Федотенков Г.В. Нестационарное напряженно-деформированное состояние композитной цилиндрической оболочки // Механика композиционных материалов и конструкций. 2020. 26. № 4. С. 544–559.
https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2020.26.04.544_559.08
26. Вестяк А.В., Игуменов Л.А., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Воздействие нестационарного давления на тонкую сферическую оболочку с упругим наполнителем // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9. № 4. С. 443–452.
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.37>
27. Афанасьева О.А., Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. Произвольный этап нестационарного контактного взаимодействия сферической оболочки и упругого полупространства // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2012. № 20. С. 19–26.
28. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства // Труды МАИ. 2014. № 78. С. 1–26.
29. Игуменов Л.А., Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Плоская нестационарная задача о движении поверхностной нагрузки по упругому полупространству // Мат. методы физ.-мех. поля. 2013. Т. 56. № 2. С. 157–163.
30. Кузнецова Е.Л., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В., Медведский А.Л. Воздействие нестационарной распределенной нагрузки на поверхность упругого слоя // Труды МАИ. 2013. № 71. С. 1–21.
31. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam // Lobachevskii J. Math. 2019. 40. № 4. P. 439–447.
<https://doi.org/10.1134/S1995080219040061>
32. Vahterova Y.A., Fedotenkov G.V. The inverse problem of recovering an unsteady linear load for an elastic rod of finite length // J. Appl. Eng. Sci. 2020. 18. № 4. P. 687–692.
<https://doi.org/10.5937/jaes0-28073>
33. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука, 1995. 352 с.
34. Сагомонян А.Я. Удар и проникание тел в жидкость. М.: МГУ, 1986. 169 с.
35. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). 4-е издание. М.: Наука, 1977. 830 с. = Korn G., Korn T. Mathematical handbook: For scientists and engineers. N.Y.: McGraw Hill, 1968

УДК 629.7.087

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЕ ПРИ РАЗВЕРТЫВАНИИ КОЛЬЦЕВОЙ ТРОСОВОЙ ГРУППИРОВКИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

© 2023 г. Ю. М. Заболотнов^{а,*}, А. А. Назарова^{а,**}, Чанцин Ван^{б,***}

^аСамарский национальный исследовательский университет, Самара, Россия

^бСеверо-западный политехнический университет, Сиань, Китай

*e-mail: yumz@yandex.ru

**e-mail: anazarova63@gmail.com

***e-mail: wangcq@nwpu.edu.cn

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 01.10.2022 г.

Принята к публикации 04.10.2022 г.

В работе рассматривается метод формирования вращающейся тросовой группировки малых космических аппаратов в виде правильного многоугольника. Для создания внешнего вращающего момента, действующего на всю систему в целом, используются двигатели малой тяги, причем направления реактивных сил неизменны в связанных с космическими аппаратами системах координат. Выпуск тросов регулируется по измерениям их длины и скорости в соответствии с номинальной программой, в которой предполагается, что механизмы выпуска тросов работают только на их торможение. Номинальная программа строится по упрощенной модели движения системы, построенной с помощью уравнений Лагранжа. Реализуемость программы развертывания проверяется с использованием более полной модели пространственного движения системы, записанной в геоцентрической неподвижной системе координат и учитывающей растяжимость тросов, односторонность соответствующих им механических связей, работу системы регулирования, возмущения, связанные с начальными условиями движения и т.д. В более полной модели движения учитывается движение космических аппаратов относительно своих центров масс как твердых тел конечных размеров, что приводит к возмущениям в направлениях действия реактивных сил. Приводятся численные примеры развертывания кольцевых тросовых группировок малых космических аппаратов в виде многоугольников, имеющих до семи вершин включительно, при действии возмущений.

Ключевые слова: космические аппараты, кольцевая тросовая группировка, развертывание, динамика, управление

DOI: 10.31857/S0572329922600670, EDN: QWPKSI

1. Введение. Рассматриваемая в работе тросовая группировка космических аппаратов (ТГКА) после развертывания представляет собой геометрическую кольцевую структуру, близкую к правильному многоугольнику с n вершинами. Такие ТГКА могут быть использованы для различных целей, например, как многоточечные измерительные системы, как распределенные системы дистанционного зондирования Земли, как космические интерферометры и т.д. В настоящее время имеется большое количество публикаций многих авторов, посвященных ТГКА, в частности, имеются работы, в которых рассматриваются замкнутые структуры. Первые описания замкнутых ТГКА и их возможных применений были сделаны еще в 90-х годах прошлого века, например в

[1]. В настоящее время большое внимание уделяется самой простой плоской замкнутой структуре: ТГКА в виде правильного треугольника [2–9]. Были рассмотрены задачи существования устойчивых состояний треугольной ТГКА в орбитальной плоскости [2] и разработаны программы стабилизации [3] движения вращающейся треугольной тросовой группировки, основанные на линеаризации и принципе обратной связи. В работах [4, 5] решались задачи управления развертыванием вращающейся треугольной ТГКА. Причем в [4] предполагалось как возможность выпуска тросов, так и их втягивание, а в работе [5] было разработано робастное управление с использованием режима скольжения по заданной поверхности (Sliding Mode Control, SMC). В работе [6] оценивается влияние атмосферных и гравитационных возмущений на уже развернутую и вращающуюся треугольную ТГКА. Известны работы [7, 8], в которых исследуется движение треугольной тросовой группировки вблизи точек либрации системы Земля–Луна на этапах развертывания и при вращении в конечном состоянии. К замкнутым ТГКА также можно отнести пространственные ТГКА в виде пирамиды и двойной пирамиды, причем в последнем случае удалось доказать устойчивость ее движения при вращении вокруг вертикали [9–11]. Анализ работ, в которых рассматривается динамика и управление движением замкнутых ТГКА, показывает, что во всех известных случаях КА рассматривались как материальные точки, то есть задачи решались в ограниченной постановке. Авторам также неизвестны работы, где рассматривались бы замкнутые плоские структуры ТГКА с вершинами больше трех. С этой точки зрения данное направление исследований требует дальнейшего развития.

В данной работе в исходном состоянии КА жестко связаны между собой, то есть представляют собой твердое тело, геометрическая конфигурация которого повторяет структуру системы в конечном состоянии. При этом система вращается с некоторой начальной угловой скоростью, причем плоскость вращения в номинальном случае совпадает с плоскостью орбитального движения центра масс системы. При освобождении механических связей (тросов) происходит развертывание тросовой группировки КА, причем внешний вращающий момент создается с помощью двигателей малой тяги, установленных на КА. Одновременно с этим осуществляется контроль сил натяжения тросов, соединяющих КА, по измерениям их длины и скорости выпуска из механизмов управления. Используются механизмы выпуска тросов, которые работают только на торможение и не могут втягивать тросы обратно. Программа формирования ТГКА включает в себя два активных участка (с точки зрения действия реактивных сил) и один пассивный. Пассивный участок движения вводится для обеспечения плавного торможения тросов таким образом, чтобы при достижении заданной длины их скорость и ускорение равнялись нулю. После прекращения выпуска тросов двигатели малой тяги включаются вновь для обеспечения заданной угловой скорости вращения ТГКА в своем конечном состоянии. Величина реактивных сил не регулируется, то есть программа их изменения релейная.

Для обоснования описанной схемы формирования кольцевой ТГКА используются две математические модели ее движения. Первая упрощенная модель движения ТГКА получается с помощью уравнений Лагранжа и служит для построения номинальной программы выпуска тросов. В этой модели КА рассматриваются как материальные точки, а тросы как нерастяжимые идеальные механические связи. При этом в данном идеальном случае в процессе развертывания геометрическая структура системы – правильный многоугольник, причем действием гравитационных сил пренебрегается. Таким образом, фактически рассматривается система, которая вращается относительно неподвижной точки – центра симметрии многоугольника. Простая модель движения системы позволяет выбрать направления действия реактивных сил относительно направления тросов и доказать асимптотическую устойчивость конечного состояния системы на пассивном участке ее движения в силу упрощенных уравнений. Номи-

нальная программа развертывания ТГКА учитывает ограничения на силы натяжения тросов, которые в процессе формирования системы должны быть натянуты, и является по структуре одинаковой для всего семейства многоугольников с n вершинами.

При построении второй более полной модели движения ТГКА используется методика, описанная в работе [12], где рассматривалось формирование линейной вертикальной тросовой группировки, состоящей из трех наноспутников. В этом случае уравнения движения ТГКА записываются в неподвижной геоцентрической системе координат и вся система, включая уравнения движения вокруг центра масс каждого КА, численно интегрируется совместно с учетом взаимного влияния колебаний тросов и углового движения КА. Тросы рассматриваются как растяжимые односторонние механические связи, то есть допускается их ослабление. Колебания КА относительно центров масс приводят к возмущениям в направлениях реактивных сил, которые имеют постоянную ориентацию в связанных с КА системах координат. В рамках этой более полной модели учитываются также: ошибки, связанные с начальной ориентацией вектора угловой скорости системы (до разделения КА), который может быть не ортогонален орбитальной плоскости движения центра масс системы (пространственное движение системы); массово-инерционная асимметрия КА, влияющая на их угловое движение. Возможность реализации предлагаемой схемы управления подтверждается характерными примерами численного моделирования процесса формирования ТГКА в виде многоугольника до семи вершин включительно по более полной модели ее движения с учетом перечисленных возмущений. Причем показано, что если зафиксировать радиус описанной вокруг многоугольника окружности, то можно использовать номинальную программу развертывания системы с одними и теми же значениями ее параметров.

2. Простая модель движения ТГКА и номинальная программа управления. Для построения номинальной программы управления при формировании ТГКА используется простая модель движения системы, полученная с помощью уравнений Лагранжа. В этой модели предполагается, что идеальная форма правильного многоугольника при развертывании системы сохраняется, а тросы — нерастяжимые механические связи, причем силы реакции в них должны быть положительными (должны растягивать тросы в более полной модели), что обеспечивается предлагаемой программой выпуска тросов и выбором направлений действия реактивных сил $\mathbf{F}_k$ ($k = 1, \dots, n$). Другие допущения: 1) КА — материальные точки; 2) рассматривается плоское движение системы; 3) учитывается только кинетическая энергия движения системы относительно ее центра масс.

Уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_c}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T_c}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (2.1)$$

где $\mathbf{q} = (l, \theta)^T$ — вектор обобщенных координат, l и θ — длина тросов и угол ориентации многоугольника относительно вертикали, $\dot{\mathbf{q}} = d\mathbf{q}/dt$ — вектор обобщенных скоростей, T_c — кинетическая энергия, $\mathbf{Q} = (Q_l, Q_\theta)^T$ — вектор обобщенных сил.

В системе координат cx_0y_0 , связанной с центром масс системы (в данном случае c — это неподвижная точка), компоненты радиус-векторов $\mathbf{r}_k$ материальных точек определяются следующим образом

$$x_{ok} = r(l) \cos(\theta + \theta_{ok}), \quad y_{ok} = r(l) \sin(\theta + \theta_{ok}) \quad (2.2)$$

где $\theta_{ok} = (k-1)\varphi_n$ ($k = 1, \dots, n$), $r(l) = l/2 \sin(\varphi_n/2)$ — радиус описанной вокруг многоугольника окружности, $\varphi_n = 2\pi/n$ — центральный угол многоугольника, соответствующий тросу длиной l .

Кинетическая энергия всей системы определяется как

$$T_c = \frac{1}{2} m \sum_{k=1}^n (\dot{x}_{ok}^2 + \dot{y}_{ok}^2) \quad (2.3)$$

где m — масса одного КА.

После подстановки выражений (2) в (3) и дифференцирования кинетическая энергия примет вид

$$T_c = nm \left(\dot{l}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \right) / 8 \sin^2 (\varphi_n / 2) \quad (2.4)$$

Компоненты обобщенных сил, зависящие от $\mathbf{F}_k$ ($k = 1, \dots, n$), вычисляются стандартным образом с использованием скалярного произведения

$$Q^{(F)} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{F}_k \quad (2.5)$$

Проводя вычисления (2.5), с учетом выражений (2.2) получим

$$Q_l^{(F)} = nF \sin(\psi - \varphi_n / 2) / 2 \sin(\varphi_n / 2), \quad Q_\theta = nFl \cos(\psi - \varphi_n / 2) / 2 \sin(\varphi_n / 2) \quad (2.6)$$

где $F = |\mathbf{F}_k|$ — модуль реактивных сил, ψ — угол, который определяет направление действия реактивных сил (рис. 1). Полная обобщенная сила Q_l будет иметь вид

$$Q_l = Q_l^{(F)} - nT \quad (2.7)$$

Здесь учитывается, что для невесомых тросов силы натяжения (T) равны управляющим силам в механизмах их выпуска, которые работают только на торможение.

Проводя дифференцирование кинетической энергии, с учетом (1) получим

$$\ddot{l} - \dot{l}^2 = Q_l f(n) / m, \quad \ddot{\theta} + 2\dot{\theta} / l = Q_\theta f(n) / m \quad (2.8)$$

где $f(n) = 4 \sin^2(\varphi_n / 2) / n$.

Как было отмечено выше, при формировании ТГКА имеются активные и пассивные участки. Причем пассивные участки ($\mathbf{F}_k = 0$) вводятся для того, чтобы при окончании выпуска тросов для номинального случая $l \rightarrow l_{\text{end}}$, $\dot{l} \rightarrow 0$ при выполнении ограничений $l < l_{\text{end}}$, $\dot{l} > 0$ (управляющие механизма работают только на торможение). Эти условия можно выполнить, выбрав соответствующую программу изменения натяжения тросов

$$T(n) = m \left[l \dot{\theta}^2 + k_l (l - l_{\text{end}}) + k_v \dot{l} \right] / n f(n) \quad (2.9)$$

где k_l, k_v — коэффициенты, которые выбираются исходя из выполнения конечных граничных условий, приведенных выше для $l, \dot{l}$.

Подставляя (2.9) в первое уравнение системы (2.8), получим линейное уравнение

$$\ddot{l} + k_v \dot{l} + k_l (l - l_{\text{end}}) = 0 \quad \text{или} \quad \Delta \ddot{l} + k_v \Delta \dot{l} + k_l \Delta l = 0 \quad (2.10)$$

где $\Delta l = l - l_{\text{end}}$, $\Delta \dot{l} = \dot{l}$, $\Delta \ddot{l} = \ddot{l}$.

Решение уравнения (2.10) зависит от его характеристических чисел

$$\lambda_{1,2} = -k_v / 2 \pm (k_v^2 / 4 - k_l)^{0.5} \quad (2.11)$$

Если $k_v > 0$ и $k_v^2 / 4 - k_l > 0$, то переходный процесс по переменным $\Delta l, \Delta \dot{l}$ будет апериодическим и асимптотически устойчивым, т.е. $\Delta l \rightarrow 0$, $\Delta \dot{l} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, причем если $l(0) < l_{\text{end}}$, $\dot{l}(0) > 0$, то эти неравенства будут выполняться в каждый момент

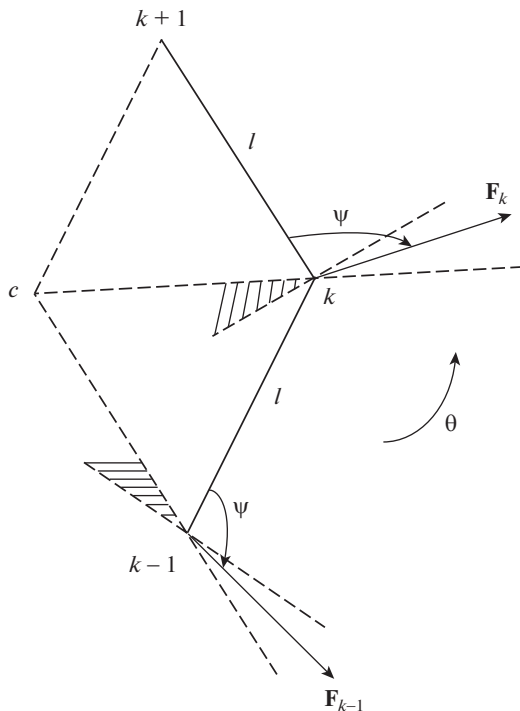


Рис. 1. Фрагмент ТГКА в виде многоугольника с обобщенными координатами.

времени. Таким образом, если управляющую силу в механизмах выпуска тросов задать в виде (2.9) с учетом соответствующего выбора значений коэффициентов k_v, k_l , то фактически будет иметь место терминальный метод управления при формировании ТГКА в виде многоугольника при соблюдении приведенных выше ограничений.

Чередование активных и пассивных участков при разворачивании ТГКА зависит от моментов времени t_i ($i = 1, 2, 3$), которые являются параметрами программы управления. Тогда

$$F(t) = \begin{cases} F_n, & t < t_1 \\ 0, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ F_n, & t_2 < t < t_3 \\ 0, & t \geq t_3 \end{cases} \quad (2.12)$$

где F_n — номинальная величина реактивных сил, а момент времени t_3 соответствует достижению угловой скорости вращения системы $\dot{\theta}_{\text{end}}$ заданного значения.

Как показали проведенные исследования с использованием более полной модели движения ТГКА, важным является выбор направления действия реактивных сил, т.е. угла ψ . С одной стороны силы $\mathbf{F}_k$ должны создавать момент определенного знака, например, положительного, который будет увеличивать угловую скорость $\dot{\theta}$ на активных участках движения системы, а с другой стороны проекции векторов реактивных сил на направление каждого участка троса должны иметь разные знаки и растягивать трос, соответствующий этому участку (в более полной модели тросы растяжимы). Приве-

денные рассуждения иллюстрируются на рис. 1, где заштрихованы сектора, в которые должны быть направлены сопла двигателей, расположенных в крайних точках участка троса. В соответствии с рис. 1 для угла ψ должно выполняться неравенство $\pi/2 < \psi < (\pi + \varphi_n)/2$, причем очевидно, что этот диапазон для углов ψ будет уменьшаться с увеличением числа вершин многоугольника.

В качестве численного примера рассматривается развертывание ТГКА в виде многоугольников, имеющих пять и семь вершин. Параметры системы следующие: массы КА 20 кг, силы тяги 6 Н, начальная угловая скорость всей системы до разделения КА 0.1 с^{-1} , угол $\psi = 95$ град, высота начальной круговой орбиты 500 км, коэффициенты $k_l = 0.15 \text{ кг с}^{-2}$, $k_v = 15 \text{ кг с}^{-1}$. На начальном участке развертывания системы имеется небольшой промежуток времени (в приведенных примерах 10–15 с), на котором сила натяжения, определенная по формуле (2.9), отрицательна. На этом участке предполагается, что выпуск тросов осуществляется с постоянной силой натяжения, т.е. учитывается ограничение $T \geq T_{\min}$. В данном случае полагается $T_{\min} = 0.01 \text{ Н}$. Моменты времени, определяющие программу изменения силы $F(t)$, равны $t_1 = 150 \text{ с}$, $t_2 = 800 \text{ с}$, $t_3 = 950 \text{ с}$. Радиус описанной вокруг многоугольников окружности был принят одинаковым 500 м. Было установлено, что в этом случае можно использовать одни и те же параметры программы развертывания ТГКА (это $t_{1,2,3}$, ψ , F_n , k_l , k_v , $T_{\min}$), причем это справедливо также для $n = 4$ и $n = 6$ (треугольник не рассматривался). Характерные зависимости, соответствующие пяти- и семиугольникам, для номинальных программ формирования ТГКА приводятся на рис. 2,а–d (сплошная линия – $n = 5$, штриховая линия – $n = 7$). На рис. 2,а–d и далее при построении графиков $\tau = \Omega t$ – безразмерное время, где Ω – угловая скорость перемещения центра масс ТГКА, соответствующая начальной круговой орбите. Для рассматриваемых случаев величина заштрихованных секторов (рис. 1) равна соответственно $\varphi_5/2 = 36$ град и $\varphi_7/2 \approx 25.7$ град. Здесь необходимо отметить, что, как следует из рис. 2,с, на пассивном участке движения системы $t_1 \leq t \leq t_2$, когда $\Delta l \rightarrow 0$, $\Delta \dot{l} \rightarrow 0$, угловая скорость $\dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta}_{\lim}$, где $\dot{\theta}_{\lim}$ – некоторая постоянная величина. Так как с увеличением числа вершин (т.е. КА) масса всей системы увеличивается, то очевидно, что конечная угловая скорость вращения системы $\dot{\theta}_{\text{end}}$, будет меньше (рис. 2,с). Однако это не является принципиальным, так как увеличивая время t_3 , т.е. длительность последнего активного участка, всегда можно обеспечить требуемую угловую скорость вращения ТГКА.

3. Уравнения движения ТГКА в геоцентрической системе координат. Запись уравнений движения ТГКА в геоцентрической неподвижной системе координат с учетом растяжимости и односторонности механических связей (тросов) между КА (которые рассматриваются как твердые тела конечных размеров), с учетом работы системы регулирования выпуска тросов из механизмов управления и других возмущений, которые будут описаны ниже, осуществляется с использованием методики, изложенной в работе [12], где рассматривалась задача формирования вертикальной (или радиальной) тросовой группировки, состоящей из трех наноспутников.

Уравнения движения центров масс КА в геоцентрической неподвижной системе координат $OXYZ$ имеют вид

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 &= \mathbf{G}_1 + \mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_n + \mathbf{F}_1 \\ m_k \ddot{\mathbf{R}}_k &= \mathbf{G}_k + \mathbf{T}_k - \mathbf{T}_{k-1} + \mathbf{F}_k \quad (k = 2, \dots, n-1) \\ m_n \ddot{\mathbf{R}}_n &= \mathbf{G}_n + \mathbf{T}_n - \mathbf{T}_1 + \mathbf{F}_n \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\mathbf{R}_k$ ($k = 1, \dots, n$) – радиус-векторы центров масс КА, $\mathbf{F}_k$ – реактивные силы, $\mathbf{G}_k = -\mu m_k \mathbf{R}_k / R_k^3$ – гравитационные силы, μ – гравитационная постоянная, $\mathbf{T}_k$ – силы на-

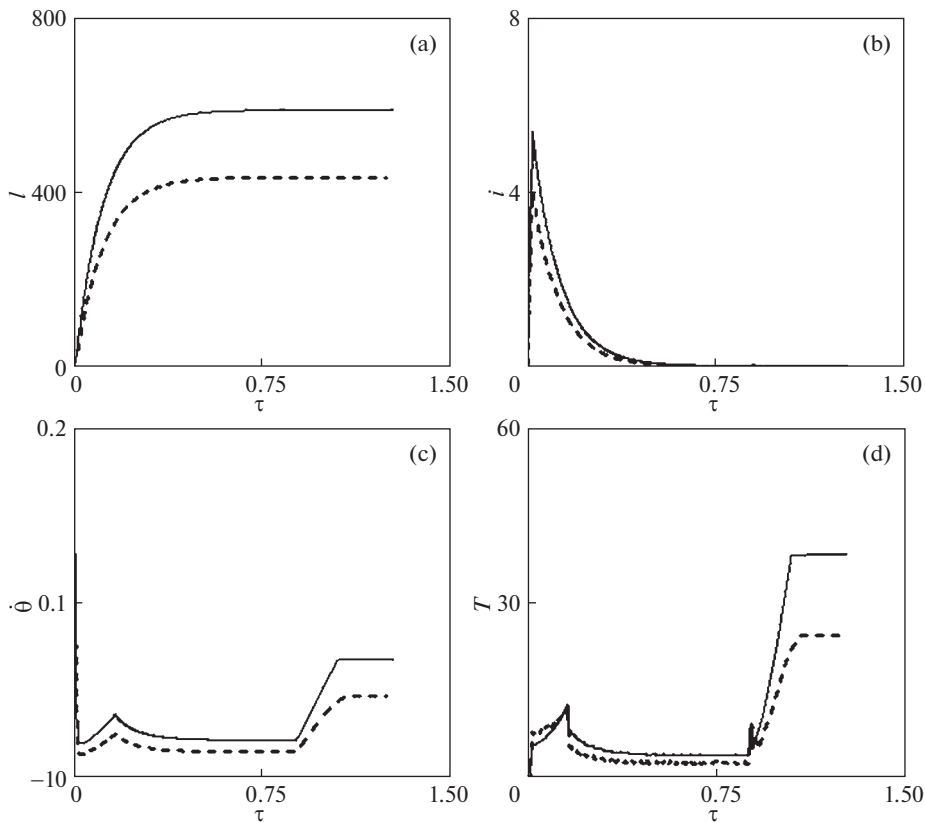


Рис. 2. Номинальные характеристики движения ТГКА в процессе ее развертывания.

тяжения тросов, приложенные к k -й точке и направленные к следующей точке (например, если считать точки против часовой стрелки). При записи системы (3.1) тросы полагаются невесомыми.

Положение геоцентрической прямоугольной правой неподвижной системы координат $OXYZ$ в начальный момент (момент разделения КА) свяжем с плоскостью орбиты центра масс системы: плоскость OXY совпадает с плоскостью орбиты, ось OZ параллельна вектору кинетического момента движения центра масс системы.

Динамические уравнения уравнений Эйлера для КА имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_k = J_k^{-1} (\mathbf{M}_k - \boldsymbol{\omega}_k \cdot J_k \boldsymbol{\omega}_k) \quad (k = 1, \dots, n) \quad (3.2)$$

где $\boldsymbol{\omega}_k$, J_k и $\mathbf{M}_k$ — векторы угловых скоростей, тензоры инерции и векторы моментов, действующих на k -й КА. Векторные уравнения (14) проецируются на оси главных связанных систем координат КА $c_k x_k y_k z_k$.

Моменты $\mathbf{M}_k$ определяются следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{T}_1 - \mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{T}_n + \mathbf{M}_1^{(F)} \\ \mathbf{M}_k &= \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{T}_k - \mathbf{r}_k' \cdot \mathbf{T}_{k-1} + \mathbf{M}_k^{(F)} \quad (k = 2, \dots, n-1) \\ \mathbf{M}_n &= \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{T}_n - \mathbf{r}_n' \cdot \mathbf{T}_1 + \mathbf{M}_n^{(F)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

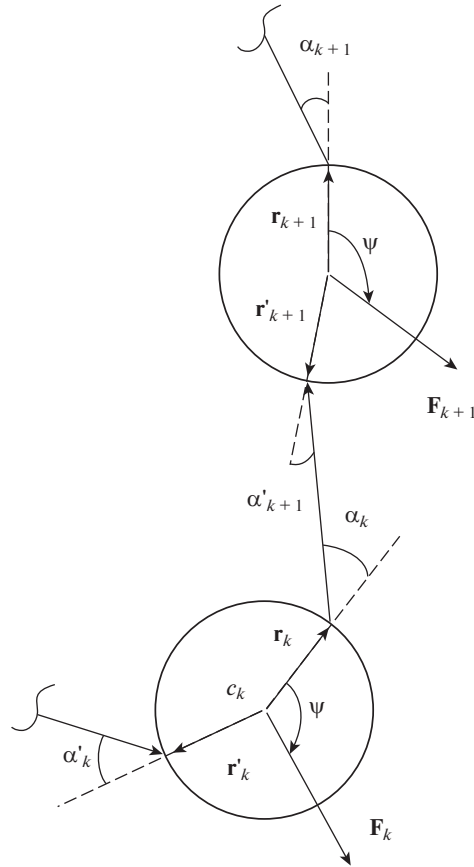


Рис. 3. Положения КА как твердых тел относительно тросов.

где $\mathbf{r}_k$ и $\mathbf{r}'_k$ — радиус-вектора точек крепления тросов относительно центров масс КА (рис. 3), $\mathbf{M}_k^{(F)}$ ($k = 1, \dots, n$) — моменты от реактивных сил, если линии их действия не проходят через центр масс КА. В динамических уравнениях (3.2) гравитационные и аэродинамические моменты не учитываются.

Положение связанных систем координат $c_k x_k y_k z_k$ относительно геоцентрической неподвижной системы координат $OXYZ$ определяется с помощью кинематических уравнений Эйлера—Пуассона

$$\dot{\mathbf{e}}_{xk} = \boldsymbol{\omega}_k \cdot \mathbf{e}_{xk}, \quad \dot{\mathbf{e}}_{yk} = \boldsymbol{\omega}_k \cdot \mathbf{e}_{yk}, \quad \dot{\mathbf{e}}_{zk} = \boldsymbol{\omega}_k \cdot \mathbf{e}_{zk} \quad (3.4)$$

где $\mathbf{e}_{xk}, \mathbf{e}_{yk}, \mathbf{e}_{zk}$ ($k = 1, \dots, n$) — орты главных связанных систем координат. Запись кинематических уравнений в форме (3.4) позволяет с одной стороны избежать вычисления поправок в кинематических уравнениях, когда, например, положение КА определяется относительно подвижной системы координат, а с другой стороны при численных расчетах использовать одни и те же алгоритмы матричных вычислений для всех КА, например, при определении их положения относительно направлений тросов. Кроме того, уравнения (3.4) не имеют особенностей, свойственных кинематическим уравнениям, записанным с использованием углов Эйлера.

Зная матрицу перехода $E_k = (\mathbf{e}_{xk}, \mathbf{e}_{yk}, \mathbf{e}_{zk})$ от системы координат $OXYZ$ к связанным системам координат каждого КА $c_k x_k y_k z_k$, нетрудно определить углы между векторами $\mathbf{r}_k, \mathbf{r}'_k$ (векторы принадлежат плоскости $c_k x_k y_k$) и направлениями тросов (или векторами, соединяющими точки крепления тросов, если они не натянуты, рис. 3)

$$\alpha_k = \arccos\left(\frac{\Delta \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_k}{r_k \Delta r_k}\right) \quad (k = 1, \dots, n)$$

$$\alpha'_k = \pi - \arccos\left(\frac{\Delta \mathbf{r}_{k-1} \cdot \mathbf{r}'_k}{r'_k \Delta r_{k-1}}\right), \quad (k = 2, \dots, n), \quad \alpha'_1 = \pi - \arccos\left(\frac{\Delta \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}'_1}{r'_1 \Delta r_n}\right) \quad (3.5)$$

где $\Delta \mathbf{r}_k = \mathbf{R}_{k+1} + \mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{R}_k - \mathbf{r}'_k$ ($k = 1, \dots, n-1$), $\Delta \mathbf{r}_n = \mathbf{R}_1 + \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_n - \mathbf{r}'_n$, причем угол между векторами $\mathbf{r}_k$ и $\mathbf{r}'_k$ равен $\pi - \varphi_n$.

Для определения длин тросов L_k , выпущенных из механизмов управления, используются динамические уравнения [12, 13]

$$m_{in} \ddot{L}_k = T_k - U_k \quad (3.6)$$

где U_k — управляющие силы, тормозящие тросы; m_{in} — параметр, учитывающий инерционность механизмов управления.

Управляющие силы определяются следующим образом [13]

$$U_k = K_l (L_k - l) + K_v (\dot{L}_k - \dot{l}) \quad (3.7)$$

где K_l, K_v — коэффициенты обратной связи, $l, \dot{l}$ — номинальные значения длины и скорости тросов, определенные в соответствии с системой уравнений (2.8). Так как управляющие механизмы работают только на торможение, поэтому если $\dot{L}_k \leq 0$ или $T_k \leq 0$, то $\dot{L}_k = \ddot{L}_k = 0$.

Силы натяжения тросов T_k определяются по закону Гука и с учетом односторонности механических связей между КА [13]

$$T_k = T_k \Delta \mathbf{r}_k / \Delta r_k$$

$$T_k = \begin{cases} C \frac{\Delta r_k - L_k}{L_k}, & \Delta r_k - L_k \geq 0 \\ 0, & \Delta r_k - L_k < 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

где $k = 1, \dots, n$, $C = ES$, E — модуль упругости Юнга, S — площадь поперечного сечения тросов.

Предполагается, что система до разделения КА имеет некоторую угловую скорость вращения относительно центра масс $\dot{\theta}_0$ (в численных примерах $\dot{\theta}_0 = 0.1 \text{ с}^{-1}$) и процесс разделения КА происходит естественным образом посредством освобождения механических связей (тросов) под действием центробежных сил.

Система уравнений (3.1), (3.2), (3.4), (3.6) с учетом (3.3), (3.7), (3.8) описывает пространственное движение ТГКА в геоцентрической системе координат $OXYZ$ и используется для оценки реализуемости предлагаемой номинальной программы управления, описанной выше, при действии возмущений. Следует отметить, что все перечисленные уравнения связаны между собой и интегрируются совместно, т.е. движения центров масс и относительно центров масс как КА, так и всей системы, не разделяются. При этом учитывается взаимное влияние продольных колебаний тросов и угловых колебаний КА вокруг центров масс, переменность направлений действия реактивных сил $\mathbf{F}_k$, связанная с движениями КА относительно своих центров масс.

4. Результаты моделирования возмущенного движения ТГКА. Моделирование процесса формирования ТГКА осуществлялось для многоугольников, содержащих от че-

тырех до семи вершин включительно. При проведении моделирования с использованием системы уравнений (3.1), (3.2), (3.4), (3.6) были приняты дополнительно следующие исходные данные: КА – сферы диаметром $D = 0.4$ м, жесткость троса $C = 7070$ Н, коэффициент инерционности механизмов управления $m_{in} = 0.2$ кг, коэффициенты обратной связи $K_l = 0.2$ м с⁻², $K_v = 7.8$ м с⁻¹ [13]. Как показали результаты моделирования при отсутствии дополнительных возмущений (рассматривалась лишь более полная модель движения), т.е. когда КА – идеальные однородные сферы, система до разделения КА вращается в плоскости орбиты центра масс с номинальной угловой скоростью $\dot{\theta}_0 = 0.1$ с⁻¹, массы КА одинаковы, во всех рассмотренных случаях многоугольники сохраняли симметричную конфигурацию и угловое движение КА относительно центров масс было ограничено (углы α_k и α'_k совершали малые колебания относительно своих невозмущенных значений $\alpha_k = \alpha'_k = 0$) в процессе всего времени развертывания ТГКА. После этого была проведена оценка влияния на процесс формирования ТГКА возмущений, приводящих к сложному пространственному движению всей системы и отдельных КА. С этой точки зрения были рассмотрены следующие возмущения: начальная угловая скорость вращения системы до разделения КА $\omega_{x0} = \pm 0.1$ с⁻¹, $\omega_{y0} = \pm 0.1$ с⁻¹; неравные массы КА $m_k = m(1 \pm 0.05)$; динамическая асимметрия при задании моментов инерции КА $(J_{yk} - J_{xk})/J_{zk} = \pm 0.1$; статическая асимметрия (смещение положения центра масс КА относительно геометрического центра сферы) $\Delta y_k = \pm 0.1D$, $\Delta z_k = \pm 0.1D$. Проведенные численные расчеты показали структурную устойчивость (сохранение в процессе развертывания правильной геометрической конфигурации ТГКА) при приведенном уровне возмущений многоугольников с пятью, шестью и семью вершинами, причем колебания углов α_k , α'_k также оставались ограниченными. В качестве примера на рис. 4–5 приводятся некоторые характеристики возмущенного движения ТГКА при ее формировании для $n = 6$. На рис. 4,а,б показаны переходные процессы для отклонений $\Delta l = L_1 - l$, $\Delta \dot{l} = \dot{L}_1 - \dot{l}$ для первого троса (для других тросов переходные процессы аналогичны). На рис. 4с показано как изменяется угловая скорость для того же троса $\dot{\theta}_l$ (штриховая линия) по сравнению с номинальной угловой скоростью всей системы $\dot{\theta}$, определенной по уравнениям (2.8). На рис. 4,д приводится сравнение номинальной силы натяжения троса (сплошная жирная линия) с силой натяжения, определенной с использованием более полной математической модели в соответствии с (3.8). Когда действие реактивных сил прекращается $t \geq t_3$, как следует из рис. 4,д, имеют место упругие колебания силы натяжения троса. На рис. 5 показаны как изменяются характеристики углового движения первого КА: характерных углов α_l, α'_l (рис. 3) и угловой скорости ω_{z1} , которая в номинальном случае должна совпадать с $\dot{\theta}$, определенной в соответствии с уравнениями (2.8). Рис. 5,а,с,е соответствуют случаю, когда дополнительная стабилизация углового движения КА не производится, а рис. 5,б,д,ф иллюстрируют случай, когда вводится дополнительное активное управление угловым движением КА с помощью двигателей системы стабилизации, работающих в соответствии с измерениями угловых скоростей $\omega_{xk,yk,zk}$. Стабилизирующие КА моменты имеют вид

$$M_{x,y,z}^{(k)} = K_{\omega} \omega_{xk,yk,zk} \quad (k = 1, \dots, n) \quad (4.1)$$

где K_{ω} – коэффициент обратной связи (в численном примере $K_{\omega} = -0.01$).

Если без введения моментов (4.1) угловое движение КА из-за наличия начальных возмущений имеет сложный пространственный характер, а угловая скорость ω_{z1} имеет большую амплитуду колебаний относительной $\dot{\theta}$ (рис. 5,а), то после введения управ-

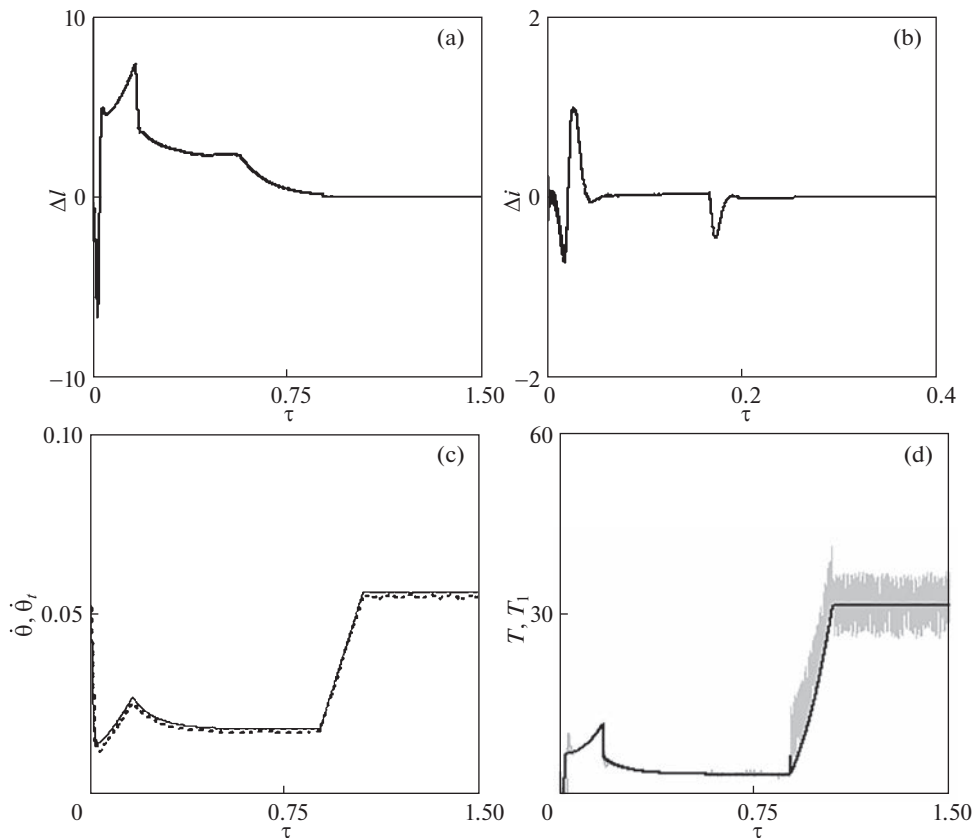


Рис. 4. Примеры зависимостей, характеризующих возмущенное движение ТГКА.

ления (4.1) $\omega_{xk}, y_k \rightarrow 0$, $\omega_{zk} \rightarrow \dot{\theta}$ (рис. 5,b), т.е. плоскости связанных систем координат $c_k x_k y_k$ приближаются к плоскости орбиты центра масс системы. При этом амплитуды колебаний углов α_1, α_1' относительно своих невозмущенных значений $\alpha_1 = \alpha_1' = 0$ уменьшаются (рис. 5,d,f). Движение центров масс всех КА относительно общего центра масс системы (0, 0) показано на рис. 6, где рис. 6,a,b соответствуют $n = 6$, а рис. 6,c,d – $n = 7$ (используется более полная модель движения ТГКА, масштаб по осям в км). Как следует из проведенных численных результатов, центры масс всех КА, если их соединить прямыми, геометрически представляют собой фигуру близкую к правильному многоугольнику в каждый момент времени. Причем это справедливо независимо от того используется дополнительная стабилизация (4.1) или нет. Численное моделирование показало, что при заданном уровне возмущений ТГКА в виде четырехугольника не сохраняла свою геометрическую конфигурацию, хотя процесс регулирования выпуска тросов по скорости и длине (3.7) проходил почти идеально. В этом случае квадрат в процессе разворачивания ТГКА деформировался в ромб (рис. 7,a,b), т.е. данная конфигурация показала худшие свойства структурной устойчивости по сравнению со случаями, когда $n = 5, 6, 7$. Выше было отмечено, что ориентация реактивных сил по отношению к направлениям тросов должна удовлетворять определенным условиям, а именно угол ψ должен принадлежать интервалу $\pi/2 < \psi < (\pi + \varphi_n)/2$. Проверка данно-

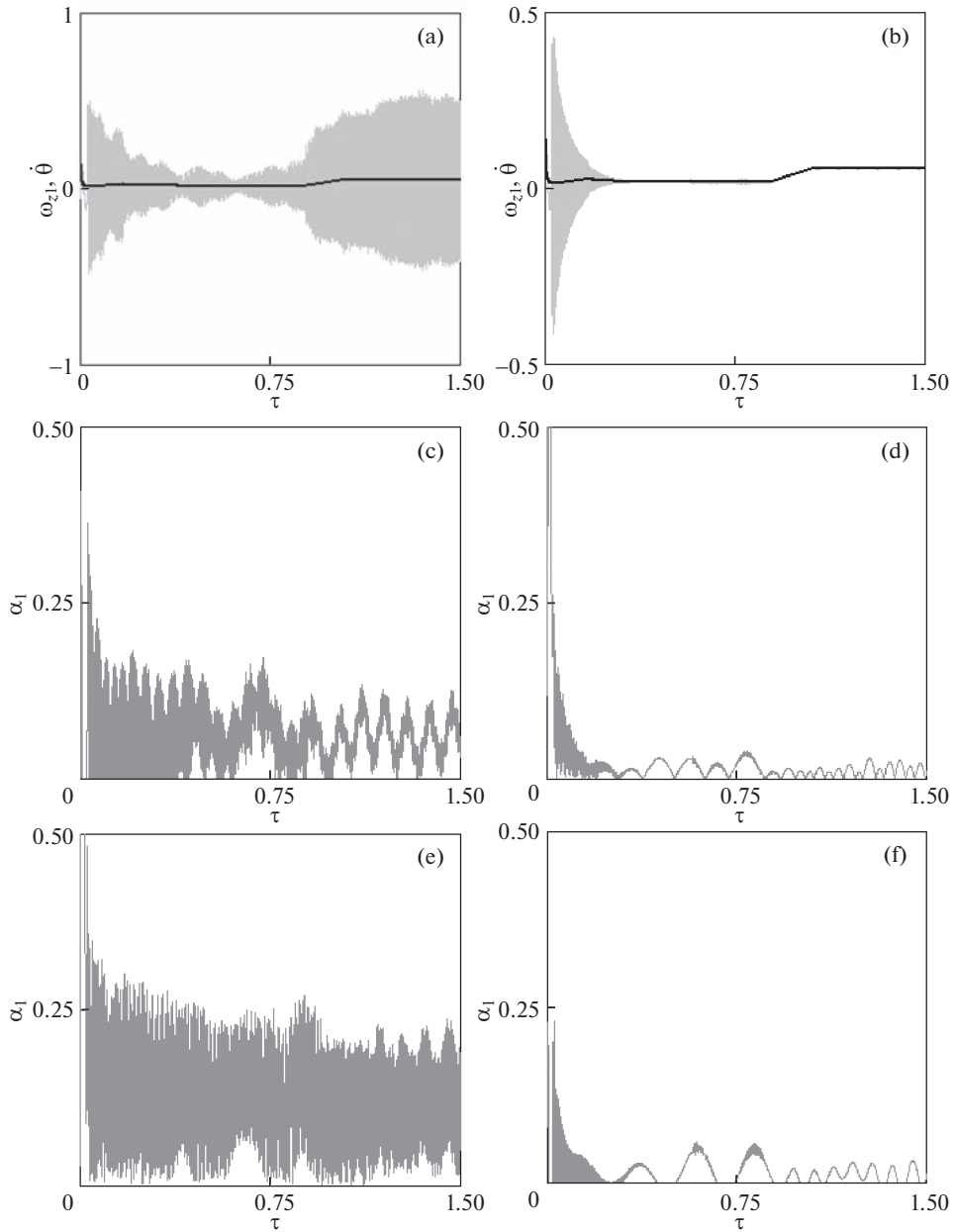


Рис. 5. Примеры зависимостей, характеризующих возмущенное угловое движение КА.

го положения была также проведена с использованием более полной модели движения ТГКА. Численное моделирование показало, что если $\psi < \pi/2$ (нарушение верхнего ограничения не рассматривалось, так как в этом случае реактивные силы создают моменты вокруг центра масс системы другого знака), то с уменьшением угла ψ качество переходных процессов становилось хуже и в итоге тросы провисали (т.е. не были

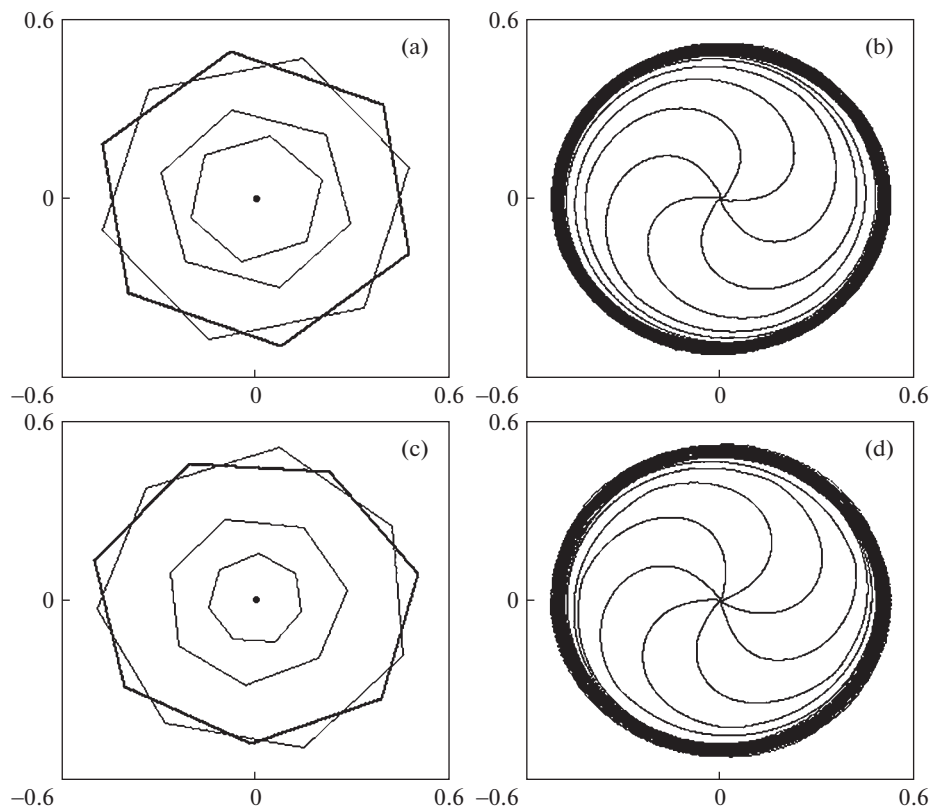


Рис. 6. Примеры движений ТГКА относительно центра масс (0.0) при их развертывании.

натянуты), и имела место сложная деформация всех рассматриваемых структур сразу после разделения КА. В качестве примера на рис. 7,с,d показано, как деформируется шестиугольник в этом случае ($\psi = 5\pi/12$).

5. Заключение. Предложен комбинированный метод управления при формировании вращающейся ТГКА в виде правильного многоугольника, заключающийся в совместном применении двигателей малой тяги и регулирования натяжений тросов с помощью управляющих механизмов, работающих только на торможение. Построена номинальная программа управления, учитывающая ограничения на направления действия реактивных сил и на силы натяжения тросов. Возможность реализации предложенных номинальных законов управления подтверждена с помощью достаточно полной модели возмущенного пространственного движения ТГКА, учитывающей растяжимость и односторонность механических связей (тросов) между КА, которые рассматриваются как твердые тела конечных размеров, совершающие угловые колебания относительно своих центров масс. При этом рассматриваются возмущения, связанные с начальными условиями вращения системы до разделения КА, с неравенством масс КА, с массово-инерционной асимметрией КА как твердых тел, с отличием направлений действия реактивных сил от номинальных направлений, связанные с колебаниями КА относительно центров масс. Приводятся характерные результаты математического моделирования возмущенного движения ТГКА при их развертывании для многоугольников от четырех до семи вершин включительно. Установлено, что с

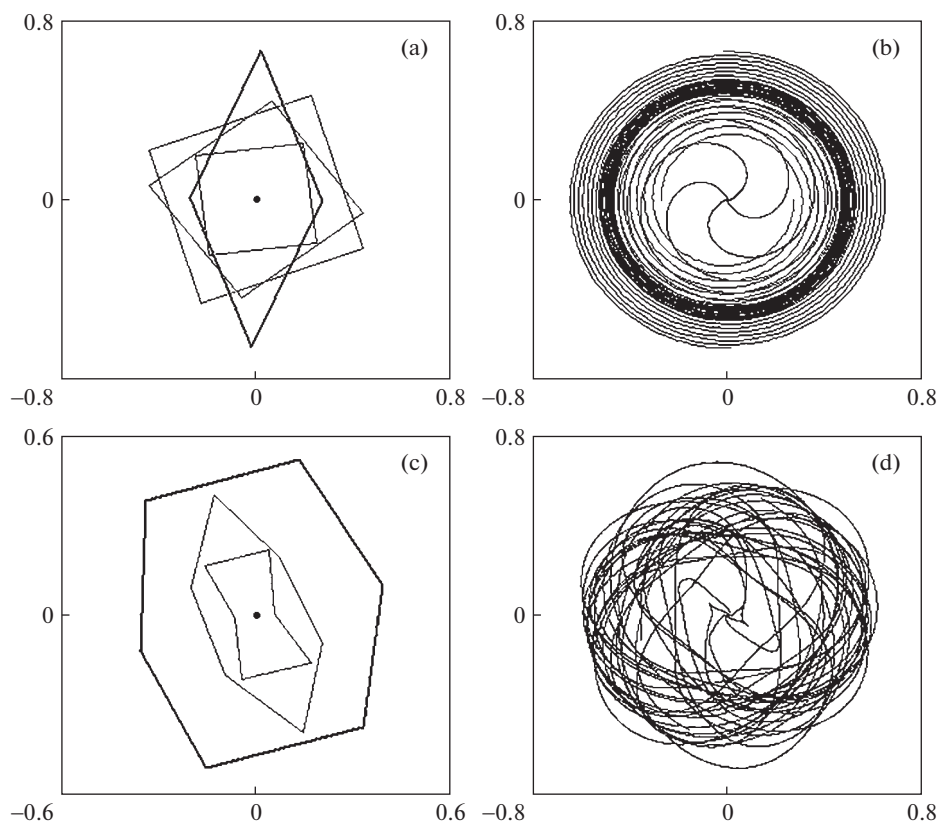


Рис. 7. Неустойчивые движения ТГКА относительно центра масс (0,0).

точки зрения действия рассматриваемых возмущений худшие свойства структурной устойчивости (сохранения заданной геометрической конфигурации) имеет ТГКА в виде квадрата, который в процессе формирования системы деформируется в ромб. Следует отметить, что в данной работе рассматривается лишь процесс формирования ТГКА многоугольной конфигурации, который занимает сравнительно небольшой промежуток времени (в численных примерах менее одного витка вокруг Земли). Устойчивость движения вращающейся ТГКА на длительных интервалах времени после формирования системы при действии традиционно учитываемых в механике полета КА возмущений, таких как нецентральность гравитационного поля, атмосферные возмущения и др. требует отдельного рассмотрения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 21-51-53002.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 336 с.
2. Kumar K.D., Yasaka T. Rotating formation flying of three satellites using tethers // J. Spacecr. 2004. V. 41. № 6. P. 973–985.
<https://doi.org/10.2514/1.14251>

3. *Kim M., Hall C.D.* Control of a rotating variable-length tethered system // *J. Guid. Contr. Dyn.* 2004. V. 27. № 5. P. 849–858.
<https://doi.org/10.2514/1.3226>
4. *Williams P.* Optimal deployment/retrieval of a tethered formation spinning in the orbital plane // *J. Spacecr.* 2006. V. 43. № 3. P. 638–650.
<https://doi.org/10.2514/1.17093>
5. *Su B., Zhang F., Huang P.* Robust control of triangular tethered satellite formation with unmeasured velocities // *Acta Astronaut.* 2021. V. 186. P. 190–202.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.04.045>
6. *Razzaghi P., Assadian N.* Study of the Triple-Mass Tethered Satellite System under Aerodynamic Drag and J2 Perturbations // *Adv. Space Res.* 2015. V. 56 (10). P. 2141–2150.
<https://doi.org/10.1016/J.ASR.2015.07.046>
7. *Cai Z., Li X., Wu Z.* Deployment and retrieval of a rotating triangular tethered satellite formation near libration points // *Acta Astronaut.* 2014. V. 98. P. 37–49.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.01.015>
8. *Cai Z., Li X., Zhou H.* Nonlinear dynamics of a rotating triangular tethered satellite formation near libration points // *Aerosp. Sci. Technol.* 2015. V. 42. P. 384–391.
<https://doi.org/10.1016/j.ast.2015.02.005>
9. *Pizarro-Chong A., Misra A.K.* Dynamics of multi-tethered satellite formations containing a parent body // *Acta Astronaut.* 2008. V. 63. P. 1188–1202.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2008.06.021>
10. *Alary D., Andreev K., Boyko P. et al.* Dynamics of multi-tethered pyramidal satellite formation // *Acta Astronaut.* 2015. V. 117. P. 222–230.
<https://doi.org/10.1016/J.ACTAASTRO.2015.08.011>
11. *Yarotsky D., Sidorenko V., Pritykin D.* Three-dimensional multi-tethered satellite formation with the elements moving along Lissajous curves // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2016. V. 125. № 3. P. 309–322.
<https://doi.org/10.1007/s10569-016-9683-2>
12. *Ван Ч., Заболотнов Ю.М.* Анализ динамики формирования тросовой группировки из трех наноспутников с учетом их движения вокруг центров масс // *ПММ.* 2021. Т. 85. № 1. С. 21–43.
<https://doi.org/10.31857/S0032823521010082>
13. *Заболотнов Ю.М.* Управление развертыванием орбитальной тросовой системы, состоящей из двух малых космических аппаратов // *Космич. исслед.* 2017. Т. 55. № 3. С. 236–246.
<https://doi.org/10.7868/S002342061702008X>

УДК 62-50, 521

О ЗАДАЧЕ ПОДДЕРЖАНИЯ КОНТАКТА ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЗОНДА МАЛОЙ МАССЫ С АСТЕРОИДОМ

© 2023 г. Э. К. Лавровский^{a,*}

^aНИИ механики МГУ, Москва, Россия

*e-mail: lavrov.EK@yandex.ru

Поступила в редакцию 26.07.2022 г.

После доработки 23.09.2022 г.

Принята к публикации 29.09.2022 г.

Исследуется задача поддержания контакта тела малой массы с поверхностью однородного, симметричного вращающегося по инерции астероида. На тело воздействуют две противоположные силы: удерживающая гравитационная сила астероида и отталкивающая центробежная. Задача рассматривается в ограниченной постановке. Ищутся критические точки контакта на ряде поверхностей, обладающих осью симметрии. Показано также, что перемещение тела по поверхности астероида может способствовать более надежному его контакту с астероидом.

Ключевые слова: тело малой массы, симметричный астероид, сила инерции переносного движения, гравитационная сила, критические точки контакта поверхности астероида

DOI: 10.31857/S0572329923700046, EDN: QXYDGT

1. Введение. В последнее время в процессе изучения дальнего космоса человечество все чаще обращает внимание на такие небесные объекты как кометы и астероиды, пролетающие вблизи Земли, образование которых и физические процессы, на них протекающие, ему пока не во всем понятны. Было сделано несколько попыток исследовать близкие окрестности этих тел (миссии Хаябуса на астероид Ryugu, Osiris-Rex на Бенну, миссия к кометам Розетта и Чурюмова–Герасименко) и даже произвести посадку на данные объекты с целью изучения вещества, из которых они сложены.

Настоящее исследование с позиций механики рассматривает процесс контакта автоматической станции малой массы с подобным вращающимся небесным телом и перспективы его сохранения. Задача рассматривается в модельной ограниченной постановке, считается, что астероид является однородным телом вращения, причем зонд имеет столь малую массу, что она не оказывает существенного влияния ни на поступательное движение астероида, ни на его вращение.

2. Отталкивающие силы инерции. На внешней поверхности астероида борются две силы – отталкивающая сила инерции за счет его вращения и сила притяжения за счет массы астероида. Поскольку воздействием точки малой массы (ТММ) мы пренебрегаем, то астероид, будучи телом динамически симметричным, вращается с некоторой угловой скоростью ω в режиме регулярной прецессии [1]. Для ее описания введем в рассмотрение в центре масс астероида абсолютную систему осей $OL_1L_2L_3$ (рис. 1), связанную с вектором кинетического момента L , и подвижную систему $Ox_1x_2x_3$ главных осей, причем z – ось симметрии тела. Выразим угловую скорость астероида через производные углов Эйлера, как $\omega = \dot{\varphi}z^0 + \psi l$, где z^0, l – единичные векторы, направленные

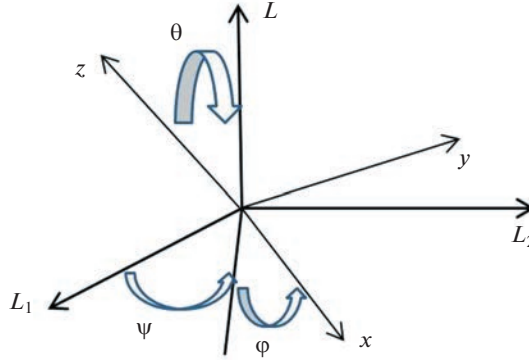


Рис. 1. Регулярная прецессия астероида.

ные соответственно по оси симметрии астероида и оси неизменного в абсолютных осях кинетического момента L .

Пусть ТММ неподвижна относительно тела и находится в точке поверхности астероида с радиус-вектором $\mathbf{r}(x, y, z)$. Переносное ускорение точки $\mathbf{j} = [d\boldsymbol{\omega}/dt \times \mathbf{r}] + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$ является суммой осецистремительного и вращательного ускорений; $\mathbf{j}_* = -\mathbf{j}$ ускорение силы инерции, действующее на ТММ. Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности тела в данной точке. Тогда ускорение отталкивающей силы инерции переносного движения может быть записано с помощью использования процедур преобразования скалярных и векторных произведений как

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}, \mathbf{j}_*) &= (\mathbf{n}, \{-[d\boldsymbol{\omega}/dt \times \mathbf{r}] - \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]\}) = -(\mathbf{r}, [\mathbf{n} \times d\boldsymbol{\omega}/dt]) - (\mathbf{n}, \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) + \\ &+ (\mathbf{n}, \mathbf{r})\omega^2 = -\dot{\phi}\psi(\mathbf{r}, [\mathbf{n} \times \mathbf{l} \times \mathbf{z}^0]) - (\mathbf{n}, \dot{\phi}\mathbf{z}^0 + \dot{\psi}\mathbf{l})(\dot{\phi}\mathbf{z}^0 + \dot{\psi}\mathbf{l}, \mathbf{r}) + (\mathbf{n}, \mathbf{r})\omega^2 = \\ &= -2\dot{\phi}\psi(\mathbf{r}, \mathbf{l})(\mathbf{n}, \mathbf{z}^0) - \dot{\phi}^2(\mathbf{n}, \mathbf{z}^0)(\mathbf{z}^0, \mathbf{r}) - \dot{\psi}^2(\mathbf{n}, \mathbf{l})(\mathbf{l}, \mathbf{r}) + (\mathbf{n}, \mathbf{r})\{\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta\} \end{aligned}$$

Здесь $(\mathbf{z}^0, \mathbf{l}) = \cos\theta$ — косинус угла нутации θ , причем и угол нутации, и угловые скорости $\dot{\phi}, \dot{\psi}$ есть постоянные величины; известно, что они связаны соотношением

$$\dot{\phi} = \dot{\psi} \cos\theta \frac{A-C}{C}, \quad (\theta \in (0, \pi))$$

где A, C — соответственно экваториальный и осевой момент инерции тела. Постоянен и модуль угловой скорости $\omega^2 = \dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta$. Другие компоненты переносной силы инерции гасятся за счет предполагаемой абсолютной шероховатости поверхности астероида.

Сформулируем первую из задач, связанную с контактом тела и ТММ — в текущий момент времени требуется найти на поверхности астероида критические точки, где ускорение отталкивания максимально, а также саму величину ускорения отталкивания в этих точках. Дальнейшее, разумеется, в значительной степени зависит от формы тела. Рассмотрим некоторые варианты сфероидов — регулярных тел вращения.

Астероид — эллипсоид вращения. Форма его поверхности удовлетворяет условию

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

где c , a — соответственно осевой и экваториальный полу диаметры эллипсоида. Обозначая $k = c/a$, имеем $k^2(x^2 + y^2) + z^2 = c^2$, причем, если $k > 1$, эллипсоид вытянутый, а при $k < 1$ сплюснутый; сферический случай $k = 1$ не рассматривается в рамках общего подхода ввиду вырождения углов Эйлера. Моменты инерции симметричного, однородного эллипсоида зависят от его массы

$$A = 0.2 \cdot m(a^2 + c^2), \quad C = 0.2 \cdot m \cdot 2a^2, \quad (A - C)/C = 0.5 \cdot (k^2 - 1)$$

Отсюда

$$\phi = \psi \cos \theta \cdot \frac{1}{2}(k^2 - 1), \quad \frac{\dot{\phi}^2}{\omega^2} = \frac{\frac{1}{4} \cos^2 \theta (k^2 - 1)^2}{1 + \cos^2 \theta \left\{ \frac{1}{4} k^4 + \frac{1}{2} k^2 - \frac{3}{4} \right\}} = \frac{\dot{\psi}^2}{4\omega^2} \cos^2 \theta (k^2 - 1)^2$$

Поскольку главные оси в экваториальной плоскости x, y можно выбирать произвольным образом, будем считать, что ось x в данный момент времени лежит на пересечении экваториальной плоскости и плоскости, проведенной через оси $\mathbf{z}^0, \mathbf{l}$. А точнее из двух таких возможных положений для определенности возьмем ту, где неотрицательна проекция $\mathbf{l}$ на x . При таком выборе осей $\mathbf{l}(\sin \theta, 0, \cos \theta)$, $\mathbf{z}^0(0, 0, 1)$. Задаваясь величиной $-c \leq z \leq c$ и произвольным углом $\gamma \in [0, 2\pi]$, множество всех точек поверхности эллипсоида можно описать параметрически как

$$x = \frac{\sqrt{c^2 - z^2}}{k} \cdot \cos \gamma, \quad y = \frac{\sqrt{c^2 - z^2}}{k} \cdot \sin \gamma, \quad z = z$$

Для эллипсоида вращения единичный вектор внешней нормали $\mathbf{n}$ в точке $\mathbf{r}(x, y, z)$ есть

$$\mathbf{n} = \frac{\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{a^2}, \frac{z}{c^2} \right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2} \right)^2 + \left(\frac{y}{a^2} \right)^2 + \left(\frac{z}{c^2} \right)^2}} = \frac{(k^2 x, k^2 y, z)}{\sqrt{k^4(x^2 + y^2) + z^2}} = \frac{(k^2 x, k^2 y, z)}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}}$$

или

$$\mathbf{n} \left(\frac{k\sqrt{c^2 - z^2}}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} \cdot \cos \gamma, \frac{k\sqrt{c^2 - z^2}}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} \cdot \sin \gamma, \frac{z}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} \right)$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} N \equiv (\mathbf{n}, \mathbf{j}_*) &= \frac{c^2 \omega^2}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} - 2\phi \dot{\psi} \frac{z \sin \theta \cos \gamma \sqrt{c^2 - z^2} + k z^2 \cos \theta}{k \sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} - \\ &- \frac{\dot{\phi}^2 z^2}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} - \dot{\psi}^2 \frac{\sin \theta \cos \gamma \sqrt{c^2 - z^2} + z k \cos \theta}{k} \times \\ &\times \frac{k \sin \theta \cos \gamma \sqrt{c^2 - z^2} + z \cos \theta}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} = \frac{1}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} \times \\ &\times \left\{ c^2 \omega^2 - \dot{\psi}^2 \left[z^2 \frac{1}{4} (k^2 + 1)^2 \cos^2 \theta + \cos \gamma \cdot 2 z k \sin \theta \cos \theta \sqrt{c^2 - z^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos^2 \gamma \cdot \sin^2 \theta (c^2 - z^2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

То есть N квадратично зависит от $\cos \gamma$. Обозначим

$$\Phi(\cos \gamma) = -\psi^2 \sin \theta \sqrt{c^2 - z^2} \cdot \{2kz \cos \theta \cos \gamma + \cos^2 \gamma \sin \theta \sqrt{c^2 - z^2}\}$$

тогда

$$N = \frac{c^2 \omega^2 + \Phi(\cos \gamma) - \psi^2 z^2 \frac{1}{4} (k^2 + 1)^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2 (1 - k^2)}}$$

Будем считать, $\cos \theta \geq 0$: выбор знака $\cos \theta$ влияет только на направление отсчета положительных и отрицательных значений по координате z и никак не сказывается на фактической величине N . “Рога” квадратичной по $\cos \gamma$ функции Φ направлены вниз. Поэтому, приравнявая производную Φ по $\cos \gamma$ к нулю, находим локальный максимум этой функции (что отвечает критическим положениям при заданных z, θ), если, конечно, экстремальная величина модуля $\cos \gamma$ не превышает единицы. Эти локально оптимальные значения по $\cos \gamma$ равны $-(z \cos \theta)k/(\sin \theta \sqrt{c^2 - z^2})$. Таким образом, если $|z|k \cos \theta \leq \sin \theta \sqrt{c^2 - z^2}$, то $(\cos \gamma)_{extr} = -\frac{kz \cos \theta}{\sin \theta \sqrt{c^2 - z^2}}$; если же это неравенство нарушено, то $(\cos \gamma)_{extr} = -\operatorname{sgn} z$, $\gamma_{extr} = 0, \pi$. При $z = 0$ имеем $(\cos \gamma)_{extr} = 0$. При $|z| \rightarrow c$, наоборот, $(\sin \gamma)_{extr} \rightarrow 0$. Аналогичным образом строятся и наименее критичные точки поверхности эллипсоида (в смысле учета только переносной силы инерции).

Выражение для Φ при z вблизи нуля равно

$$\begin{aligned} \Phi(\cos \gamma_{extr}) = & (-\psi^2 \sin \theta \sqrt{c^2 - z^2}) \left\{ -\frac{2k^2 z^2 \cos^2 \theta}{\sin \theta \sqrt{c^2 - z^2}} + \right. \\ & \left. + \sin \theta \sqrt{c^2 - z^2} \cdot \frac{k^2 z^2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta (c^2 - z^2)} \right\} = \psi^2 k^2 z^2 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

То есть величина Φ растет с ростом модуля z и достигает максимума при “пограничном” значении $|z| = \sin \theta \frac{\sqrt{c^2 - z^2}}{k \cos \theta}$. По другую сторону от “границы”, где $|\cos \gamma_{extr}| = 1$,

$$\Phi = (-\psi^2 \sin \theta \sqrt{c^2 - z^2}) \cdot [-2k|z| \cos \theta + \sqrt{c^2 - z^2} \sin \theta]$$

Иными словами, при положительных и отрицательных значениях z (с одним и тем же $|z|$) мы имеем сходную картину критических точек на поверхности эллипсоида – они отличаются только знаком по $\cos \gamma_{extr}$. При этом каждому значению z (если $|z| < c$) отвечают ровно две точки на поверхности эллипсоида с одним и тем же значением $\cos \gamma$. При $z = 0$ это точки “протыкания” поверхности осью y . По мере роста $|z|$ точки начинают сходиться, превращаясь в “вершины” эллипсоида при $|z| = c$.

На рис. 2 жирной кривой показан след критических точек на поверхности эллипсоида, отвечающий различным отрицательным значениям z . Пунктиром показан след аналогичных точек при $z > 0$, они затенены изображением самого эллипсоида.

Нахождение абсолютной критической точки поверхности связано с перебором значений z и анализом ситуации. Возникают сложные алгебраические соотношения, затрудняющие аналитический путь исследования. Зато задачу далее не сложно исследовать численно. Общий вывод, вытекающий из численного метода исследования вкратце таков: в основном абсолютными критическими точками поверхности являются, по-видимому, в зависимости от величин угла θ и коэффициента k либо окрест-

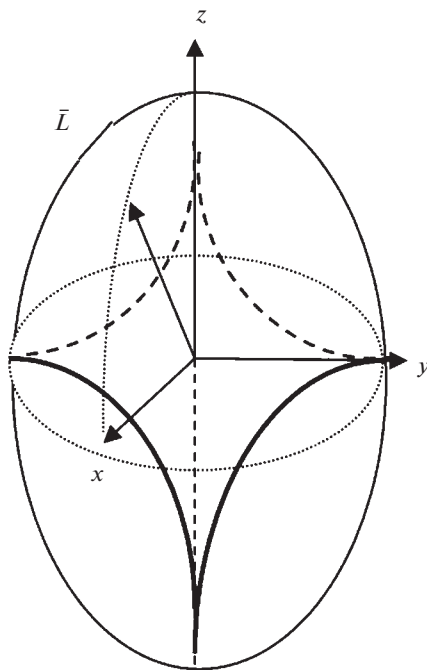


Рис. 2. Картина точек на поверхности эллипсоида с максимальной силой отталкивания.

ность вершины эллипсоида при относительно больших значениях $|\sin \theta|$, либо точки экваториальной зоны — в противном случае.

Сказанное нетрудно понять из чисто физических соображений. Если $\theta \approx 0$, то угловые скорости $\dot{\phi}$, $\dot{\psi}$, складываясь, образуют некую угловую скорость ω , направленную почти по оси симметрии. При этом экваториальные точки движутся с наибольшей линейной скоростью, а точки вершины имеют почти нулевую скорость. Ввиду этого максимальная центробежная сила возникает на экваторе и она лежит в плоскости экватора, где, кстати, лежит и вектор нормали к поверхности в этих точках. На вершине эллипсоида и центробежная сила почти равна нулю, и нормаль направлена почти по оси симметрии, т.е. перпендикулярно действующей центробежной силе. Значит, в этом случае критическая точка поверхности должна быть на экваторе.

Если угол θ велик и приближается, скажем, к $\theta \approx \pi/2$, то проекция центробежной силы в экваториальных точках за счет $\dot{\phi}$, конечно, не равна нулю и она создает центробежную силу, причем нормаль и эта центробежная сила одинаково направлены. Но в этом случае $\dot{\phi} \approx 0$ и сила отталкивания мала. Угловая скорость $\dot{\psi}$ тоже создает центробежную силу почти по оси симметрии, в то время как нормаль в экваториальных точках перпендикулярна оси симметрии, т.е. и эта ее проекция равна нулю. Что касается точки вершины, то ее линейная скорость равна $c\dot{\psi}$. Причем нормаль в вершине направлена туда же, куда и центробежная сила. Значит, ее проекция отнюдь не равна нулю. И эта проекция отталкивающей силы вполне может оказаться самой большой.

При промежуточных значениях θ можно ожидать, что “проявят” себя либо окрестности экватора, либо вершины.

Случай прямого кругового цилиндра. Рассмотрим сначала его боковую поверхность: $z \in [-h/2, h/2]$, цилиндр имеет радиус R и высоту h . Радиус-вектор и внешняя нормаль в подвижных осях, выбираемых также как и ранее, есть $\mathbf{r} = (R \cos \gamma, R \sin \gamma, z)$, $\mathbf{n} = (\cos \gamma, \sin \gamma, 0)$, кроме того, $\mathbf{l}(\sin \theta, 0, \cos \theta)$, $\mathbf{z}^0(0, 0, 1)$. Отсюда находим

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}, \mathbf{l}) &= R \sin \theta \cos \gamma + z \cos \theta, & (\mathbf{n}, \mathbf{z}^0) &= 0, \\ (\mathbf{n}, \mathbf{l}) &= \sin \theta \cos \gamma, & (\mathbf{r}, \mathbf{z}^0) &= z, & (\mathbf{n}, \mathbf{r}) &= R\end{aligned}$$

В выражении $(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*)$ пропадают все члены, связанные с $\dot{\phi}$. Поэтому

$$\begin{aligned}(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*) &= \omega^2 R - \dot{\psi}^2 [R \sin \theta \cos \gamma + z \cos \theta] \sin \theta \cos \gamma = \\ &= \omega^2 R - \dot{\psi}^2 \sin \theta (z \cos \gamma \cos \theta + R \cos^2 \gamma \sin \theta)\end{aligned}$$

Максимум этого выражения достигается при $\cos \gamma = -0.5 \cdot (z/R) \operatorname{ctg} \theta$, если $|0.5 \times (z/R) \cdot \operatorname{ctg} \theta| \leq 1$, и $\cos \gamma = -\operatorname{sign}(z)$ в противной ситуации. В первом случае максимум $(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*)$ при текущем z равен $(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*) = \omega^2 R + \dot{\psi}^2 \frac{1}{4R} z^2 \cos^2 \theta$, а во втором $(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*) = \omega^2 R + \dot{\psi}^2 \sin \theta (|z| \cos \theta - R \sin \theta)$. Пусть $\cos \theta > 0$. Если рассматриваются положительные z и при $z = h/2$ выполняется неравенство $z \cos \theta < 2R \sin \theta$, то на допустимом интервале $z \in [0, h/2]$ реализуется только первый случай. Максимум $(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*)$ достигается тогда при $z = h/2$, он равен $(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*)_{\max} = \omega^2 R + \dot{\psi}^2 \frac{1}{4R} \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cos^2 \theta$. Если же при $z = h/2$ выполняется обратное и $h \cos \theta > 4R \sin \theta$, то приходится, начиная с некоторого значения $z_* = 2R \operatorname{tg} \theta$, переходить на другой случай. Но тогда скобка $(z \cos \theta - R \sin \theta)$ и подавно будет больше нуля для всех $z > z_*$, а $(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*)$ будет продолжать расти с ростом z . Т.е. максимальное $(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*)$, так или иначе, реализуется при $z = h/2$, но здесь $(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*)_{\max} = \omega^2 R + \dot{\psi}^2 \sin \theta (0.5h \cos \theta - R \sin \theta)$. Иными словами, верхний край есть абсолютная критическая точка боковой поверхности цилиндра. Есть также и другое, аналогичное найденному симметричное решение при отрицательных z , которое тяготеет соответственно к $\cos \gamma = 1$.

В случае рассмотрения верхнего основания $\mathbf{r} = (\rho \cos \gamma, \rho \sin \gamma, 0.5h)$, $\rho \leq R$, $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}, \mathbf{l}) &= \rho \sin \theta \cos \gamma + 0.5h \cos \theta, \\ (\mathbf{n}, \mathbf{z}^0) &= 1, & (\mathbf{n}, \mathbf{l}) &= \cos \theta, & (\mathbf{r}, \mathbf{z}^0) &= 0.5h, & (\mathbf{n}, \mathbf{r}) &= 0.5h\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}(\mathbf{n}, \mathbf{j}_*) &= \frac{h}{2} \omega^2 - 2\dot{\phi}\dot{\psi} \left(\rho \sin \theta \cos \gamma + \frac{h}{2} \cos \theta \right) - \dot{\phi}^2 \frac{h}{2} - \\ &\quad - \dot{\psi}^2 \left(\rho \sin \theta \cos \gamma + \frac{h}{2} \cos \theta \right) \cos \theta = \omega^2 \frac{h}{2} - \\ &\quad - \dot{\psi}^2 \left\{ 2 \cos \theta \frac{A-C}{C} \left(\rho \sin \theta \cos \gamma + \frac{h}{2} \cos \theta \right) + \frac{h}{2} \cos^2 \theta \left(\frac{A-C}{C} \right)^2 + \right.\end{aligned}$$

$$+ \left(\rho \sin \theta \cos \gamma + \frac{h}{2} \cos \theta \right) \cos \theta \Big\} = \\ = \frac{h}{2} \omega^2 - \dot{\psi}^2 \cos \theta \left\{ \frac{2A - C}{C} \left(\rho \sin \theta \cos \gamma + \frac{h}{2} \cos \theta \right) + \frac{h}{2} \cos \theta \left(\frac{A - C}{C} \right)^2 \right\}$$

Если $\cos \theta \frac{2A - C}{C} > 0$, то максимум этого выражения реализуется при $\cos \gamma = -1$, $\rho = R$. Если же данное неравенство нарушается, то $\cos \gamma = 1$, $\rho = R$. Моменты инерции цилиндра

$$A = \frac{1}{12} m(3R^2 + h^2), \quad C = \frac{1}{2} mR^2, \quad \frac{2A - C}{C} > 0$$

Иными словами, анализ ситуации на боковой поверхности и на верхнем основании указывает при $z > 0$ на точки, принадлежащие краю цилиндра, иногда геометрически на одни и те же. Только отталкивающие ускорения в них различны; ответить на вопрос, кто из них больше, т.е. которая из них есть абсолютная критическая точка можно лишь после учета конкретных кинематических параметров и величин R, h .

Симметричное решение возникает в случае рассмотрения нижнего основания при $z < 0$.

Случай усеченного кругового конуса. Рассмотренный выше цилиндр — частный случай такого конуса. Уравнение конуса в абсолютных координатах $x^2 + y^2 - (R - kz)^2 = 0$. Пусть высота полного (т.е. не усеченного) конуса $H = R/k$, $z \in [0, H]$, ось z идет вверх от основания конуса к его вершине. На высоте h от нижнего основания у него срезается верхушка и образуется усеченный конус, верхнее его основание есть окружность радиуса $r = R - kh = k(H - h) = (H - h)R/H$.

Найдем вертикальную координату центра масс η усеченного конуса, используя формулу объема конуса $V = \pi r^2 H/3$. Приравняем объёмы получившихся верхней и нижней частей усеченного конуса за счет его сечения на уровне η . Объем каждой из частей можно выразить через разность объемов некоторых полных конусов. Поскольку и радиусы оснований выражаются через высоты, объёмы полных конусов пропорциональны кубу высот. В результате получаем

$$\frac{(H - \eta)^2}{H^2} \cdot R^2(H - \eta) - \frac{(H - h)^2}{H^2} \cdot R^2(H - h) = R^2 H - \frac{(H - \eta)^2}{H^2} \cdot R^2(H - \eta)$$

Отсюда

$$2(H - \eta)^3 = H^3 + (H - h)^3 \Rightarrow \eta = H - \sqrt[3]{\frac{H^3 + (H - h)^3}{2}}$$

Построим уравнение усеченного конуса относительно системы подвижных осей в его центре масс, координату z переопределяем

$$x^2 + y^2 - [R - k(z + \eta)]^2 = 0, \quad z \in [-\eta, h - \eta]$$

Точки боковой поверхности конуса можно задать параметрически как

$$x = [R - k(z + \eta)] \cos \gamma, \quad y = [R - k(z + \eta)] \sin \gamma, \quad z = z, \quad z \in [-\eta, h - \eta]$$

а точки оснований как

$$z = -\eta, \quad x^2 + y^2 \leq R^2; \quad z = h - \eta, \quad x^2 + y^2 \leq r^2$$

Рассмотрим боковую поверхность, плоские основания усеченного конуса исследуются так же, как и в случае цилиндра. На боковой поверхности

$$\mathbf{r} = ([R - k(z + \eta)] \cdot \cos \gamma, [R - k(z + \eta)] \cdot \sin \gamma, z)$$

Вектор внешней нормали

$$\mathbf{n} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + k^2[R - k(z + \eta)]^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + k^2[R - k(z + \eta)]^2}}, \frac{k[R - k(z + \eta)]}{\sqrt{x^2 + y^2 + k^2[R - k(z + \eta)]^2}} \right)$$

или

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} (\cos \gamma, \sin \gamma, k), \quad \mathbf{l}(\sin \theta, 0, \cos \theta), \quad \mathbf{z}^0(0, 0, 1)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}, \mathbf{l}) &= [R - k(z + \eta)] \sin \theta \cos \gamma + z \cos \theta \\ (\mathbf{n}, \mathbf{z}^0) &= \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{l}) = \frac{\sin \theta \cos \gamma + k \cos \theta}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{z}^0) = z \\ (\mathbf{n}, \mathbf{r}) &= \frac{x \cos \gamma + y \sin \gamma + kz}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{[R - k(z + \eta)] + kz}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{R - k\eta}{\sqrt{1 + k^2}} = \text{const} \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}, \mathbf{j}_*) &= \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} \{ \omega^2(R - k\eta) - \dot{\phi}^2 kz - 2\dot{\phi}\dot{\psi}k[(R - k(z + \eta)) \sin \theta \cos \gamma + z \cos \theta] - \\ &\quad - \dot{\psi}^2[(R - k(z + \eta)) \sin \theta \cos \gamma + z \cos \theta][\sin \theta \cos \gamma + k \cos \theta] \} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} \left\{ -\dot{\psi}^2 kz \left(\frac{A - C}{C} \right)^2 \cos^2 \theta - \right. \\ &\quad - \dot{\psi}^2 \left[2k \frac{A - C}{C} \cos \theta + k \cos \theta + \sin \theta \cos \gamma \right] [(R - k(z + \eta)) \sin \theta \cos \gamma + z \cos \theta] + \\ &\quad \left. + \omega^2(R - k\eta) \right\} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} \left\{ \omega^2(R - k\eta) - \dot{\psi}^2 kz \left(\frac{A - C}{C} \right)^2 \cos^2 \theta - \right. \\ &\quad - \dot{\psi}^2 \left[k \cos \theta \frac{2A - C}{C} + \sin \theta \cos \gamma \right] [(R - k(z + \eta)) \cdot \sin \theta \cos \gamma + z \cos \theta] \} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} \left\{ \omega^2(R - k\eta) - k\dot{\psi}^2 \left[z \cos^2 \theta \frac{A^2}{C^2} + \cos \gamma \cos \theta \sin \theta \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(\frac{2A - C}{C} (R - k(z + \eta)) + \frac{z}{k} \right) + \cos^2 \gamma \sin^2 \theta (R - k(z + \eta))/k \right] \right\} \end{aligned}$$

Экстремальное значение $\cos \gamma$ вычисляется по формуле

$$(\cos \gamma)_{\text{extr}} = -0.5 \operatorname{ctg} \theta \left[k \frac{2A - C}{C} + \frac{z}{R - k(z + \eta)} \right]$$

Если модуль этой величины превышает единицу, то в качестве экстремального $\cos \gamma$ принимается ± 1 .

Приведенные выше формулы содержат величины моментов инерции A, C усеченного конуса. Определим их, предварительно обозначив через σ плотность вещества тела и вычислив

$$M = \pi\sigma R^2 H/3, \quad m = \pi\sigma r^2 (H - h)/3, \quad m' = M - m$$

Тогда

$$C = \frac{3}{10}(MR^2 - mr^2), \quad A = \frac{3}{20}[M(R^2 + 4H^2) - m(r^2 + 4(H - h)^2)] - m' \cdot (H - \eta)^2$$

3. Гравитационная сила притяжения. В небесной механике, к сожалению, известно всего лишь два-три результата, описывающих в конечном аналитическом виде гравитационное поле различных космических тел. Одним из них является решение Дирихле, которое описывает поле эллипсоидов [2]. Рассмотрим наиболее простой случай, когда эллипсоид к тому же является телом вращения. Если эллипсоид сплюснутый $c < a$ и точка находится на его поверхности, то используемая ниже величина χ равна

$$\chi^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2} = \frac{1 - k^2}{k^2}$$

Тогда гравитационные ускорения (X, Y, Z) по осям тела (x, y, z) , причем x, y — экваториальные оси, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} &= \frac{3fM}{2c^3\chi^3} \left[\frac{\chi}{1 + \chi^2} - \operatorname{arctg}(\chi) \right] \equiv vP \\ \frac{Z}{z} &= \frac{3fM}{c^3\chi^3} [\operatorname{arctg}(\chi) - \chi] \equiv vQ, \quad v = \frac{3fM}{c^3\chi^3} \end{aligned}$$

где $M = \frac{4}{3}\pi\sigma a^2 c$ — масса эллипсоида, f — гравитационная постоянная. Если эллипсоид вытянутый $c > a$ и точка находится на его поверхности, то

$$\chi^2 = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = k^2 - 1$$

и

$$\begin{aligned} \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} &= \frac{3fM}{2a^3\chi^3} [\ln(\sqrt{1 + \chi^2} + \chi) - \chi\sqrt{1 + \chi^2}] \equiv vP \\ \frac{Z}{z} &= \frac{3fM}{a^3\chi^3} \left[\frac{\chi}{\sqrt{1 + \chi^2}} - \ln(\sqrt{1 + \chi^2} + \chi) \right] \equiv vQ, \quad v = \frac{3fM}{a^3\chi^3} \end{aligned}$$

Случай сферы $c = a$ не рассматривается ввиду вырождения самого закона регулярной прецессии и формул ускорений.

Рассмотрим вначале случай вытянутого эллипсоида $k = c/a > 1$. Спроецируем гравитационное ускорение на нормаль к телу

$$\begin{aligned} F &= \frac{4\pi f k \sigma}{(k^2 - 1)^{3/2}} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{c^2 - z^2}}{k} \cos \gamma \cdot P \cdot \frac{k\sqrt{c^2 - z^2}}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} \cos \gamma + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{c^2 - z^2}}{k} \sin \gamma \cdot P \cdot \frac{k\sqrt{c^2 - z^2}}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} \sin \gamma + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^2}{\sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} \cdot Q \right\} = \frac{4\pi f k \sigma}{(k^2 - 1)^{3/2} \cdot \sqrt{k^2 c^2 + z^2(1 - k^2)}} \cdot \{c^2 P + z^2(Q - P)\} \end{aligned}$$

Величина F — проекции ускорения за счет притяжения одинакова для всех точек с вертикальной координатой z . Поэтому истинными критическими точками поверхности при заданном z остаются ранее найденные — критические с точки зрения сил

Таблица 1. Распределение отталкивающих и притягивающих ускорений, критические точки поверхности (частный случай вытянутого эллипсоида)

z [м]	0	7.5	15	22.5	30	37.5	45	52.5	60	67.5	75	82.5	90	97.5
$N/\dot{\psi}^2$ [м]	182.4	182.1	182.3	182.7	183.3	184.1	185	186.1	187.4	189	190.9	193.1	195.1	196
$10^3 * \omega_{\max}$ [1/с]	0.907	0.906	0.904	0.901	0.896	0.89	0.882	0.873	0.862	0.85	0.836	0.82	0.802	0.785
γ [град]	90	94.3	98.7	103.2	107.8	112.8	118.2	124.1	130.9	139.1	150	171	180	180
z [м]	105	112.5	120	127.5	135	142.5	150							
$N/\dot{\psi}^2$ [м]	195.6	193.3	188.8	180.8	167.8	145.2	75.0							
$10^3 * \omega_{\max}$ [1/с]	0.769	0.754	0.74	0.729	0.724	0.737	0.954							
γ [град]	180	180	180	180	180	180	180							

инерции переносного движения. Если F больше модуля отталкивающего ускорения N из (2.1), то гравитация способна удержать малое тело на поверхности астероида — боковые реакции не в счет в силу предполагаемой абсолютной шероховатости поверхности астероида.

Значения F зависят от двух параметров: k и “доли” z по сравнению с длиной тела c . Скалярное произведение N зависит от тех же двух параметров, а также от ω (или $\dot{\psi}$) и угла θ . Если же условия задачи требуют подсчета проекций конфликтующих сил в конкретной точке поверхности, то появляется еще один параметр γ .

Поскольку чисто теоретическое исследование не позволило решить задачу до конца, были проведены в ряде случаев численные расчеты с одновременным учетом и гравитации, и переносной силы инерции. Предполагалось, что астероид сложен из кремния $\sigma = 2.328$ г/см³. Результаты этих расчетов, например, в случае вытянутого эллипсоидального тела при $\theta^\circ = 45$ и $c = 150$ м, $a = 100$ м, $k = c/a = 1.5$ представлены в табл. 1

Расположение критических точек (в текущий момент времени и в смысле сил инерции) на поверхности эллипсоида характеризуется данными в первой и четвертой строках таблицы. Качественно они изображены на рис. 2 пунктиром, ибо в таблице учтены “разрезы” эллипсоида только при $z > 0$. Разрезы при $z < 0$ дают симметричную картину. Во второй строке представлена картина отталкивающих ускорений в этих точках. Из нее видно, что абсолютная критическая точка лежит здесь посередине между экваториальной зоной и вершиной. Она отвечает $z = 97.5$ м. Гравитационное поле симметрично относительно оси z , в отличие от поля сил инерции. Но теперь в любой критической точке удерживающая сила может как уступать, так и превалировать над отталкивающей. В третьей строке представлены предельные величины угловой скорости вращения тела, при которой удержание на поверхности за счет гравитации в данных критических точках с координатами (z, γ) еще возможно. Видно, что наибольшие значения $\omega_{\max}$ сосредоточены в окрестности экватора и вершины эллипсоида, а минимальные — посередине, но ближе к вершине. Именно последние являются абсолютными критическими точками, если учитывается и гравитация, и сила инерции.

В табл. 2 приведены данные расчетов в аналогичном случае сплюснутого эллипсоида с малой полуосью $c = 100$ м при $\theta^\circ = 45$. Соотношение длин большой и малой полуоси эллипсоида здесь такое же, как и ранее $k = a/c = 1.5$.

Расположение критических точек (поведение угла γ) здесь примерно такое же, как и в случае вытянутого тела. Величины $\omega_{\max}$ в основном заметно меньше, чем ранее, но эта характеристика меняется тут гораздо резче при приближении к вершине эллипсо-

Таблица 2. Распределение отталкивающих и притягивающих ускорений, критические точки поверхности (частный случай сплюснутого эллипсоида)

z [м]	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$N/\dot{\psi}^2$ [м]	114.1	113.4	111.1	107.7	103.3	98.4	93	87.6	82.3	75.7	50
$10^3 * \omega_{\max}$ [1/с]	0.419	0.425	0.443	0.473	0.515	0.569	0.637	0.719	0.819	0.951	1.32
γ [град]	90	93.8	97.8	102.1	106.9	112.6	120	130.8	152.7	180	180

ида, где наблюдается и наибольшая допустимая скорость. Абсолютная критическая точка расположена в окрестности экватора.

4. Влияние перемещения ТММ по поверхности астероида на отталкивающие силы. Возможности эффекта движения легко понять на простейшем примере кругового цилиндра, закрученного при $\theta = 0$ по оси постоянной угловой скоростью ω . Неподвижную материальную точку отбрасывает с поверхности центробежная сила. Однако, представим себе, что одновременно точка движется по боковой поверхности цилиндра с той же линейной скоростью, которую создает вращение для точек цилиндра, но направленную в противоположную сторону, а гравитационная сила, скажем, пренебрежимо мала. Тогда в абсолютном пространстве ТММ покоится и, следовательно, никакая сила не отбрасывает ее с поверхности — цилиндр как бы “проскальзывает” под материальной точкой. Заметим, что подобными свойствами при осевом вращении астероида обладают и все точки на, так сказать, “параллелях” любых осесимметричных тел, представляющих собой окружности различных радиусов. Более того, режим обратной относительной скорости

$$\mathbf{V} = V\mathbf{i} = -[\omega \times \mathbf{r}] \quad (4.1)$$

где V — модуль скорости, а $\mathbf{i}$ — единичный вектор этой скорости гарантирует материальной точке, по крайней мере, локально неподвижность, что помогает ей оставаться в контакте с поверхностью как при $\theta = 0$, так и в самом общем случае $\theta \neq 0$, когда

$$\omega = \phi z^0 + \psi \mathbf{l}.$$

Взглянем теперь на ситуацию с позиции механики. Абсолютное ускорение есть сумма переносного, относительного и кориолисова ускорений. Соответственно, в подвижной системе осей возникают и отвечающие им силы инерции. Таким образом, идея перемещения ТММ состоит в использовании сил инерции — кориолисова движения и за счет проекции относительного ускорения — для полной или хотя бы частичной компенсации отталкивающего действия силы инерции переносного движения: ведь на поверхности астероида есть и гравитация, быть может, недостаточная. Если две указанные силы инерции скомпенсируют хотя бы часть силы инерции переносного движения, то остаточная гравитационная сила обеспечит более комфортное пребывание материальной точке на поверхности астероида (будем считать, что миссия зонда исключает постоянное использование механизмов закрепления типа якоря). Выражаясь более точно, требуется хотя бы частично скомпенсировать проекции всех сил инерции на нормаль к поверхности, т.е. должно выполняться условие

$$((-j_{\text{rel}} - j_{\text{cor}}), \mathbf{n}) + \lambda N = 0, \quad 0 < \lambda \leq 1 \quad \text{“rel” — относительное,} \\ \text{“cor” — кориолисово (ускорения)}$$

Имеем $-\left(\left(\frac{dV}{dt}\mathbf{i} + V\frac{d\mathbf{i}}{dt}\right), \mathbf{n}\right)$ — проекция силы инерции за счет ускорения в относительном движении. В результате получаем в силу правила перестановочности векторов в смешанном произведении

$$-2\{([\mathbf{n} \times \dot{\phi} \mathbf{z}^0], V\mathbf{i}) + ([\mathbf{n} \times \psi \mathbf{l}], V\mathbf{i})\} - \left(\left(\frac{dV}{dt} \mathbf{i} + V \frac{d\mathbf{i}}{dt} \right), \mathbf{n} \right) + \lambda N = 0$$

Ввиду $(\mathbf{i}, \mathbf{n}) \equiv 0$ преобразуем левую часть равенства

$$2(-V)\{\dot{\phi}([\mathbf{n} \times \mathbf{z}^0], \mathbf{i}) + \psi([\mathbf{n} \times \mathbf{l}], \mathbf{i})\} + V \left(\frac{d\mathbf{n}}{dt}, \mathbf{i} \right) + \lambda N = 0 \quad (4.2)$$

где $d\mathbf{n}/dt$ есть некоторая функция, зависящая, в частности, от геометрических свойств поверхности астероида.

Согласно (4.2), например, процесс полной компенсации определяется выбором 4-х параметров движения по поверхности $V, \mathbf{i}(i_x, i_y, i_z)$ (в подвижных осях), удовлетворяющих следующей системе 3-х условий

$$2(-V)\{\dot{\phi}([\mathbf{n} \times \mathbf{z}^0], \mathbf{i}) + \psi([\mathbf{n} \times \mathbf{l}], \mathbf{i})\} + V \left(\frac{d\mathbf{n}}{dt}, \mathbf{i} \right) + N = 0, \quad (\mathbf{i}, \mathbf{i}) = 1, \quad (\mathbf{i}, \mathbf{n}) = 0$$

Значит, имеется одна степень свободы при выборе, например, одной из компонент направления вектора скорости. Дальнейшее определяется видом зависимости $d\mathbf{n}/dt = f(V, \mathbf{i})$, которая различна на разных поверхностях.

Рассмотрим далее случай осесимметричного эллипсоида, хотя то же самое может быть проделано для любой поверхности вращения, задаваемой аналитически. Здесь

$$k^2(x^2 + y^2) + z^2 = c^2, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\mu}(k^2x, k^2y, z), \quad \mu(z) \equiv \sqrt{k^2c^2 + z^2(1 - k^2)}$$

Тогда ввиду

$$\dot{x} = Vi_x, \quad \dot{y} = Vi_y, \quad \dot{z} = Vi_z$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{n}}{dt} &= \left\{ \frac{k^2Vi_x}{\mu} - \frac{k^2xV(1-k^2)zi_z}{\mu^3}, \frac{k^2Vi_y}{\mu} - \frac{k^2yV(1-k^2)zi_z}{\mu^3}, \frac{Vi_z}{\mu} - \frac{zV(1-k^2)zi_z}{\mu^3} \right\}, \\ \left(\mathbf{i}, \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right) &= \frac{V[k^2 + (1-k^2)i_z^2]}{\mu} - \frac{V(1-k^2)zi_z}{\mu^3} \cdot (k^2xi_x + k^2yi_y + zi_z) = \\ &= \frac{V[k^2 + (1-k^2)i_z^2]}{\mu} - \frac{V(1-k^2)zi_z}{\mu^2} (\mathbf{n}, \mathbf{i}) = \frac{V[k^2 + (1-k^2)i_z^2]}{\mu} \end{aligned}$$

В результате возникает следующая система условий

$$\frac{V^2[k^2 + (1-k^2)i_z^2]}{\mu} - 2V([\mathbf{i} \times \mathbf{n}], \{\dot{\phi} \mathbf{z}^0 + \psi \mathbf{l}\}) + N = 0, \quad (\mathbf{i}, \mathbf{n}) = 0, \quad (\mathbf{i}, \mathbf{i}) = 1 \quad (4.3)$$

Первое из них квадратично с положительным коэффициентом при V^2 . Любое вещественное решение системы (4.3) отвечает в данный момент времени комфортному удержанию материальной точки на поверхности астероида. При этом далее материальная точка перейдет в новое положение на поверхности, где для ее надежного удержания снова придется удовлетворять условиям (4.3) и т.д.

Возникает задача численного анализа квадратичного по V условия в (4.3) с целью отыскания ситуаций, когда квадратичное уравнение имеет вещественные решения. Рассмотрим дискриминант. Исследование можно строить на основе перебора в пространстве 6-ти параметров: глобальных k, θ, ψ , параметров положения точки на эллипсоиде z, γ и параметра вектора $\mathbf{i}$ направления скорости – угла $\alpha \in [0, 2\pi]$. При этом $\mathbf{i}$ задается как

$$\mathbf{i} = \frac{1}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} [-(n_y \cos \alpha + n_x n_z \sin \alpha), \\ n_x \cos \alpha - n_y n_z \sin \alpha, (n_x^2 + n_y^2) \sin \alpha], \quad \mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$$

Легко видеть, что такой вектор $\mathbf{i}$ единичный и он перпендикулярен единичному вектору $\mathbf{n}$. Если в каких-то выбранных точках эллипсоида путем перебора по свободному параметру α удалось отыскать хотя бы одно его значение такое, что дискриминант квадратного уравнения (4.3) положителен, то в этих точках поверхности можно добиться наиболее комфортного контакта ТММ за счет управляемого изменения его скорости.

Как показывает численное исследование, режимы “обратной скорости” (4.1) отвечают случаю нулевого дискриминанта и кратных корней квадратичного уравнения. Этот режим немного плох только в одном смысле: материальная точка при этом движется по одним и тем же почти периодическим траекториям некоторого периода по поверхности эллипсоида, поскольку угловые скорости прецессии ϕ, ψ , вообще говоря, несоизмеримы. Если перед зондом стоит задача более полного исследования поверхности, надо пытаться более свободно управлять вектором $\mathbf{i}$, а, значит, требуется искать области, где дискриминант заметно больше нуля.

Некоторые численные расчеты ($k = 1.5$, $\theta = \pi/4$), осуществленные с этой целью по данной методе, говорят о наличии требуемых значений угла α в больших зонах на поверхности эллипсоида вращения, за исключением окрестности вершин. Впрочем, есть и “провальные” зоны, в которых нельзя полностью нейтрализовать отталкивающую силу инерции переносного движения, но подбором параметров (V, α) ее можно уменьшить. На нахождение изучаемой точки в той или иной зоне влияет величина угла нутации и то, насколько близко она находится от экватора тела. На самом экваторе “провальных” зон не обнаружено.

При частичной компенсации выбору подлежит и параметр λ . Легко видеть, что при сколь угодно малой его величине упомянутый выше дискриминант не отрицателен и система условий типа (4.3) имеет решение. Все это открывает путь построения различных траекторий перемещения ТММ по поверхности астероида в, так сказать, облегченной ситуации.

Заключение. 1. Исследованы случаи контакта зонда малой массы с симметричными вращающимися телами, имеющими формы эллипсоида, цилиндра и усеченного конуса. Построены формулы, описывающие отталкивающие силы инерции, которые позволяют судить о критических в этом смысле точках на поверхностях данных тел.

2. Для случая эллипсоидальной формы астероида результаты этого исследования дополнены также с учетом силы гравитационного притяжения. Дальнейшее исследование требует использования численных методов.

3. Рассмотрен вопрос влияния перемещения зонда по поверхности на возникающие силы отталкивания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Том 2. Динамика системы аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1960. 487 с. = *Appell P.* Traité de mécanique rationnelle. Tome 2. Dynamique des systèmes. Mécanique analytique. Paris: Gauthier-Villars, 1953.
2. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. 800 с.

УДК 531.38

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ЗАТУХАНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ДВИЖЕНИЙ ПРИЦЕПА, СЛЕДУЮЩЕГО ЗА ТЯГАЧОМ

© 2023 г. А. С. Смирнов^{a,b,*}, А. С. Муравьев^{c,**}

^aСанкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия

^bИнститут проблем машиноведения Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Россия

^cАО “Газпром энергетика”, Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com

**e-mail: Muravyoff97@mail.ru

Поступила в редакцию 03.05.2022 г.

После доработки 25.07.2022 г.

Принята к публикации 16.09.2022 г.

В работе рассматриваются вопросы оптимизации процессов затухания поперечных движений прицепа, который присоединен к движущемуся с постоянной скоростью тягачу при помощи шарнира и с учетом податливого сцепления. В качестве критерия оптимизации, характеризующего эффективность этого затухания, принимается максимизация степени устойчивости системы. При этом в качестве оптимизируемого параметра выступает расстояние от центра масс прицепа до точки его сцепления с тягачом. Производится подробное аналитическое решение задачи, в ходе которого определяется оптимальная кривая на плоскости безразмерных параметров, состоящая из нескольких участков и расположенная в области устойчивости движения. Приводятся наглядные графические иллюстрации, поясняющие смысл найденного решения и его основные особенности. Кроме того, осуществляется сопоставление полученных результатов с вариантом расположения центра масс прицепа ровно посередине между точкой его сцепления с тягачом и осью колесной пары и дается оценка эффективности полученного оптимального решения. Сделанные в работе выводы представляют не только теоретический интерес, но могут найти и определенное практическое применение.

Ключевые слова: тягач, прицеп, устойчивость движения, критерий оптимизации, степень устойчивости, дискриминантная кривая, оптимальная кривая

DOI: 10.31857/S0572329922600244, EDN: QVZVKO

1. Введение. Движение тягача, совершающего некоторое предписанное движение, к которому присоединен один или несколько прицепов, является одной из наиболее важных и интересных задач аналитической механики [1–7]. В первую очередь, это связано с ее практическим значением, поскольку подобного рода системы часто встречаются как в промышленности, так и в повседневной жизни [8]. Так, иногда приходится наблюдать ситуации, когда прицеп, катящийся за равномерно движущимся по горизонтальной дороге автомобилем, теряет устойчивость и начинает совершать опасные поперечные колебания. Такое явление получило название “шимми прицепа” [9], и оно послужило основой для многих последующих исследований в этом направлении. В частности, в случае устойчивости движения был установлен характер затуха-

ния движений системы в зависимости от параметров задачи, а также исследовано влияние диссипативных сил вязкого трения в различных элементах системы на условия устойчивости [10, 11].

При этом большой интерес как в теоретическом, так и в практическом отношении представляет задача оптимизации параметров прицепа, при которых обеспечивается наиболее эффективное затухание его нежелательных поперечных движений. Этот вопрос может быть поставлен в рамках линейной модели, и в этом случае он требует детального исследования характеристического полинома системы и установления поведения его корней в зависимости от параметров рассматриваемой задачи. Именно ему и посвящена настоящая статья, в которой на основе принятого критерия оптимизации строится аналитическое решение и обсуждаются его качественные и количественные особенности.

2. Постановка задачи. Рассмотрим наиболее известную упрощенную модель системы “тягач-прицеп” [9–11]. Будем моделировать прицеп абсолютно твердым телом массы m с центром масс, расположенным в точке C (рис. 1). Примем момент инерции прицепа относительно центральной оси, проходящей через точку C и перпендикулярной плоскости рисунка, равным $J = mr^2$, где r — радиус инерции прицепа. Будем считать, что прицеп шарнирно присоединен к автомобилю, который играет роль тягача и движется в продольном направлении равномерно и прямолинейно со скоростью v . Обозначим расстояние от точки C до точки крепления за a , а от оси колес прицепа до этой точки — за b . Кроме того, при помощи пружины с коэффициентом жесткости c необходимо учесть податливое сцепление прицепа с тягачом. Это связано с тем, что в реальных условиях точка их шарнирного соединения не является неподвижной относительно тягача, так что абсолютно жесткое крепление этого шарнира не имеет места. Важно подчеркнуть, что учет упругого элемента является необходимым и с точки зрения анализа устойчивости движения системы, что будет проиллюстрировано в дальнейшем, и именно это обстоятельство позволяет получить условия устойчивости и подробно исследовать эффект шимми прицепа [9]. Наконец, будем считать, что колесная пара не имеет бокового проскальзывания (т. е. скорость точки A направлена перпендикулярно оси колесной пары), и это в свою очередь приводит к наличию дифференциальной связи первого порядка и делает данную систему неголономной.

Указанные допущения позволяют построить достаточно несложную математическую модель тягача с прицепом, на основе которой можно не только проанализировать вопросы устойчивости движения, но и решить более сложные задачи, в том числе оптимизационные. Отметим, что основной акцент в настоящей работе делается на подробном исследовании построенной модели аналитическими методами. Именно поэтому авторы не принимали во внимание многие другие факторы, которые имеют место при реальном движении тягача с прицепом, поскольку их учет приведет к существенному усложнению расчетной схемы и, как следствие, математической модели, анализ которой пришлось бы проводить численными методами.

В качестве обобщенных координат примем боковое смещение точки крепления x и угол отклонения прицепа φ . Вывод уравнений движения рассматриваемой системы можно осуществить с помощью уравнений Ньютона и уравнения моментов, как это показано в [9], а также для этой цели можно использовать уравнения, специально приспособленные для неголономных систем [12, 13]. Так, в статье [10] для этой цели использованы уравнения Аппеля, а в работе [11] — уравнения Лагранжа второго рода с неопределенными множителями (называемые также уравнениями Феррерса).

Приведем кратко вывод уравнений движения тягача с прицепом, ограничиваясь далее рассмотрением лишь линейной модели, которая пригодна для малых отклонений прицепа от продольного направления, и прибегая для этого к уравнениям Аппеля. Сначала выпишем уравнение неголономной связи в линейной постановке:

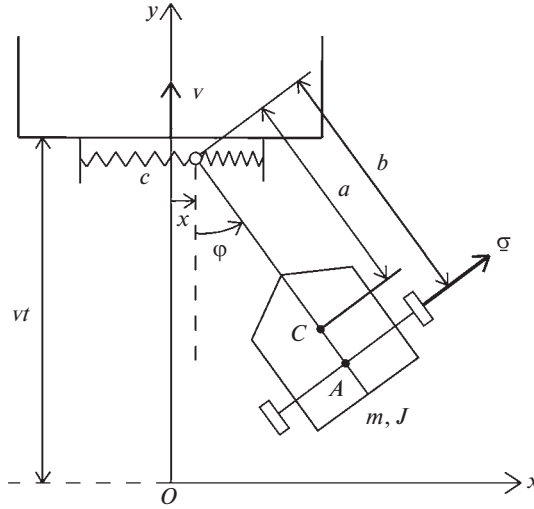


Рис. 1. Расчетная схема тягача с прицепом.

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{v}_A = b\dot{\phi} + \dot{x} + v\phi = 0 \quad (2.1)$$

где $\underline{\sigma} = \underline{i} + \underline{j}\phi$ – орт колесной пары, записанный с точностью до слагаемых первого порядка малости, а $\underline{v}_A = (b\dot{\phi} + \dot{x})\underline{i} + v\underline{j}$ – скорость точки A с той же точностью. Отсюда можно видеть, что если не учитывать податливое соединение прицепа с тягачом, т. е. изначально положить $x = 0$, то уравнение (2.1) сразу позволит определить зависимость $\phi(t) = \phi_0 e^{-\alpha t}$, где ϕ_0 – начальное значение угла ϕ , а $\alpha = v/b$. В этом случае система не будет иметь динамических степеней свободы, а будет обладать лишь одной кинематической степенью свободы, отвечающей углу ϕ , поскольку для его определения не нужно привлекать уравнения динамики. Полученное выражение для $\phi(t)$ демонстрирует, что в этой ситуации угол ϕ по абсолютной величине понижается до нуля по экспоненциальному закону, что гарантирует асимптотическую устойчивость движения. Однако как уже говорилось выше, в реальных условиях может возникать неустойчивость движения, поэтому как для детального анализа устойчивости, так и для последующей постановки оптимизационной задачи обсуждаемое упрощение является недопустимым. Эти рассуждения лишний раз подтверждают, что учет упругого элемента в рассматриваемой модели является крайне важным, а его пренебрежение приводит к качественно неверным результатам.

Запишем далее энергию ускорений S рассматриваемой системы:

$$S = \frac{1}{2} m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} J(\ddot{\phi}^2 + \dot{\phi}^4) \doteq \frac{1}{2} [m(b-a)^2 + J]\ddot{\phi}^2 + m(b-a)v\dot{\phi}\ddot{\phi} \quad (2.2)$$

где учтено, что с необходимой здесь точностью $x_C = x + a\phi$, $y_C = vt - a$; ускорение $\ddot{x}$ исключено с помощью уравнения неголономной связи (2.1); а символ $\doteq$ означает, что в выражении (2.2) оставлены лишь слагаемые, содержащие обобщенное ускорение $\ddot{\phi}$, тогда как все несущественные для дальнейших действий слагаемые, не зависящие от $\ddot{\phi}$, отброшены. Кроме того, запишем выражение для элементарной работы силы упругости:

$$\delta' W = -c x \delta x = Q \delta \phi, \quad Q = c b x \quad (2.3)$$

где учтено, что согласно (2.1) имеет место равенство $b\delta\dot{\varphi} + \delta x = 0$. В результате единственное уравнение Аппеля $\partial S/\partial \dot{\varphi} = Q$ после подстановки в него выражений (2.2) и (2.3) примет вид:

$$[m(b-a)^2 + J]\ddot{\varphi} + m(b-a)v\dot{\varphi} - cbx = 0 \quad (2.4)$$

Для удобства дальнейших действий введем в рассмотрение следующие обозначения:

$$\delta = \frac{a}{b}, \quad \rho = \frac{r}{b}, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \gamma = \frac{v}{bk}, \quad \tau = kt, \quad \xi = \frac{x}{b} \quad (2.5)$$

Поясним их физический и геометрический смысл: δ – безразмерное расстояние от центра масс прицепа до точки его шарнирного соединения с тягачом, ρ – безразмерный радиус инерции прицепа, k – частота колебаний груза массой m на пружине жесткости c , γ – безразмерная скорость движения тягача, τ – безразмерное время, а ξ – безразмерное смещение точки крепления прицепа к тягачу. В результате система уравнений (2.1) и (2.4) после преобразований запишется в следующей форме:

$$\varphi' + \xi' + \gamma\varphi = 0, \quad [(1-\delta)^2 + \rho^2]\varphi'' + \gamma(1-\delta)\varphi' - \xi = 0 \quad (2.6)$$

где штрихом обозначена производная по безразмерному времени τ : $(\)' = d/d\tau$. Характеристическое уравнение системы (2.6), которое сразу же является обезразмеренным, будет иметь вид:

$$Q(p) = [(1-\delta)^2 + \rho^2]p^3 + \gamma(1-\delta)p^2 + p + \gamma = 0 \quad (2.7)$$

и оно было ранее получено в работах [10, 11]. Видно, что характеристический полином (2.7) является кубическим, и это обусловлено именно наличием неголономной связи. Если система имеет характеристический полином нечетного порядка, то говорят, что эта система обладает нецелым числом степеней свободы (в данном случае – 1.5) [11]. Подобные системы достаточно редко обсуждаются в существующей литературе, а вместе с тем они имеют целый ряд характерных особенностей [14–17]. Вследствие этого данное исследование вносит определенный вклад и в динамику систем с полутора степенями свободы, тем более, что задачи оптимизации параметров данных систем и вовсе не получили должного внимания [18].

Применяя к кубическому уравнению (2.7) критерий устойчивости Льенара–Шипара [19], можно получить следующие условия устойчивости движения [20]:

$$\delta < 1, \quad \gamma > 0, \quad \rho < \sqrt{\delta(1-\delta)} \quad (2.8)$$

Они означают, что, во-первых, должна иметь место статическая устойчивость (т. е. движение тягача в сторону, указанную на рис. 1, а не в противоположную ей), во-вторых, центр масс прицепа должен находиться между точкой его крепления и осью колесной пары, и, наконец, радиус инерции прицепа не должен быть слишком большим (а именно, он должен быть меньше среднего геометрического величин a и $b-a$). При этом максимально возможное значение $\rho = 1/2$ на границе устойчивости достигается при $\delta = 1/2$, когда центр масс прицепа расположен ровно посередине между точкой его сцепления с тягачом и осью колесной пары. Отметим, что последнее из условий (2.8) не зависит от γ , т. е. ни скорость движения тягача, ни жесткость упругого соединения не будут влиять на характер области устойчивости на плоскости параметров $\rho\delta$. Тем не менее, как будет показано далее, качественный характер движений в пределах области устойчивости будет существенно зависеть от величины γ [10].

Переходя теперь к разговору об оптимизации процессов затухания движений прицепа, необходимо принять некоторый критерий оптимизации, который будет характеризовать эффективность этого затухания и на основе которого будут выбираться параметры прицепа. Наиболее часто в качестве такого критерия выступает максима-

ция степени устойчивости [21]. Как известно, степень устойчивости линейной динамической системы представляет собой расстояние от мнимой оси плоскости корней характеристического уравнения до ближайшего к ней корня при условии, что все они расположены в левой полуплоскости [22]. Данный критерий был использован для решения многих оптимизационных задач механики и управления, где он продемонстрировал свое важное значение [23–27].

Таким образом, теперь можно сформулировать конкретную цель предлагаемого исследования. Предположим, что в качестве оптимизируемого параметра выступает расположение центра масс прицепа, характеризуемое величиной a (или отвечающим ей безразмерным параметром δ). Фиксируя значение γ , необходимо определить внутри области устойчивости движения (2.8) на плоскости $\rho\delta$ для каждого заданного значения ρ такое δ , которое доставляет максимум степени устойчивости.

3. Определение дискриминантных кривых. Прежде, чем переходить непосредственно к решению поставленной оптимизационной задачи, представим уравнения дискриминантных кривых диаграммы Вышнеградского для кубического полинома (2.7) на плоскости параметров $\delta\rho$ внутри области устойчивости (2.8), фиксируя при этом значение γ . Эти кривые разделяют указанную плоскость на области с различным характером корней полинома. Будем нумеровать их следующим образом: в области I – два комплексно-сопряженных и один вещественный корень, причем комплексно-сопряженные корни расположены ближе к мнимой оси; в области II – также два комплексно-сопряженных и один вещественный корень, но теперь вещественный корень расположен ближе к мнимой оси, и, наконец, в области III – три вещественных корня.

Ясно, что пограничным ситуациям между указанными вариантами отвечают либо наличие кратного корня, либо равенство вещественной части всех трех корней. Кривые, отвечающие данным случаям, были получены в работе [10]. Так, полином $Q(p)$ имеет кратный корень в том случае, когда одновременно $Q(p) = 0$, $Q'(p) = 0$, что приводит к следующим параметрическим уравнениям кривой на плоскости $\delta\rho$:

$$\delta(p) = \frac{\gamma(p^2 + 3) + 2p}{\gamma p^2}, \quad \rho(p) = \sqrt{\frac{(\gamma^2 - 4)p^2 + 2\gamma(\gamma^2 - 6)p - 9\gamma^2}{\gamma^2 p^4}} \quad (3.1)$$

где p играет роль параметра. Отметим, что при $p = -3\gamma$ кривая (3.1) будет иметь точку возврата, т. к. в этом случае одновременно выполняются условия $d\delta/dp = 0$, $d\rho/dp = 0$. Тогда из выражений (3.1) вытекает, что

$$\delta = \frac{3\gamma^2 - 1}{3\gamma^2}, \quad \rho = \sqrt{\frac{\gamma^2 - 3}{27\gamma^4}} \quad (3.2)$$

Отсюда следует, что точка возврата существует лишь при $\gamma > \sqrt{3}$, тогда как при $\gamma < \sqrt{3}$ она будет отсутствовать. Нетрудно показать, что уравнение (2.7) с учетом (3.2) приводится к виду $(p + 3\gamma)^3 = 0$, т. е. в этом случае корень $p = -3\gamma$ будет трехкратным. Отметим, что при $\gamma < \sqrt{3}$ дискриминант квадратного трехчлена, стоящего под радикалом в числителе во второй формуле (3.1), будет равен $4\gamma^4(\gamma^2 - 3) < 0$, а его старший коэффициент есть $\gamma^2 - 4 < 0$. Это означает, что выражение, стоящее под радикалом, отрицательно, так что в указанном случае и сама кривая (3.1) также не существует. Необходимо более детально обсудить и случай $\gamma > \sqrt{3}$ в том плане, какие значения p следует выбирать для построения кривой (3.1). Так, при $\sqrt{3} < \gamma < 2$ оба корня упомянутого выше квадратного трехчлена под радикалом будут отрицательными, так что для вещественности ρ следует изменять параметр p в пределах

$$\frac{\gamma(6 - \gamma^2 + \gamma\sqrt{\gamma^2 - 3})}{\gamma^2 - 4} < p < \frac{\gamma(6 - \gamma^2 - \gamma\sqrt{\gamma^2 - 3})}{\gamma^2 - 4} \quad (3.3)$$

причем в крайних точках этого интервала будем иметь $\rho = 0$, а δ внутри этого интервала, равно как и на его краях, будет принимать значения, меньшие 1, поскольку для p согласно (3.3) будет выполнено условие $p < -3/2\gamma$. При $\gamma = 2$, очевидно, должно быть $p < -9/2$, а при $\gamma > 2$ корни квадратного трехчлена будут иметь уже разные знаки, поэтому с учетом того, что по своему смыслу $p < 0$, будем иметь теперь следующее условие:

$$p < \frac{\gamma(6 - \gamma^2 - \gamma\sqrt{\gamma^2 - 3})}{\gamma^2 - 4} = \frac{9\gamma}{\gamma^2 - 6 - \gamma\sqrt{\gamma^2 - 3}} \quad (3.4)$$

причем это неравенство дополнено таким образом, чтобы устранить неопределенность $0/0$ при $\gamma = 2$, и тогда им можно будет пользоваться и в этом случае. Отметим, что при $\gamma \geq 2$ следует неограниченно уменьшать p в сторону $-\infty$, причем при $p \rightarrow -\infty$ имеем $\rho \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 1$. Таким образом, все отличие случая $\sqrt{3} < \gamma < 2$ от случая $\gamma \geq 2$ заключается в том, что во втором из них кривая (3.1) будет приходить в точку $\rho = 0$, $\delta = 1$. Тем не менее, эта особенность не оказывает никакого заметного влияния на последующие действия. Важно лишь подчеркнуть, что при любом $\gamma > \sqrt{3}$ кривая (3.1) будет делиться точкой возврата (3.2) на две части, и, конечно, отвечающее ей значение $p = -3\gamma$ лежит внутри интервалов (3.3) и (3.4). Эти части найденной кривой (3.1) и отделят область III от областей I и II. Отметим, что на рассматриваемой кривой (3.1) два корня полинома равны $p_{1,2} = p$, а третий корень можно найти по теореме Виета для кубического полинома (2.7) с использованием (3.1):

$$p_3 = -\frac{\gamma}{(1 - \delta)^2 + \rho^2} = -\frac{\gamma p}{p + 2\gamma}$$

Анализируя эти корни и принимая во внимание все вышесказанное, можно сделать вывод, что в допускаемых для существования кривой (3.1) пределах при $p < -3\gamma$ кратные корни $p_{1,2}$ будут лежать левее корня p_3 , т. е. эта часть кривой (3.1) будет являться границей области III с областью II, а при $p > -3\gamma$ будем иметь противоположную ситуацию, так что другая часть кривой (3.1) будет являться границей области III с областью I.

Что касается кривой, отвечающей случаю совпадения вещественной части всех трех корней полинома $Q(p)$, то представляя их как $-n$ и $-n \pm i\omega$, можно получить [5]:

$$\delta(n) = \frac{\gamma(2n^2 + 3) - 3n}{2\gamma n^2}, \quad \rho(n) = \sqrt{\frac{(n - \gamma)(2\gamma^2 - 9)n + 9\gamma}{4\gamma^2 n^4}} \quad (3.5)$$

$$\omega(n) = \sqrt{\frac{n^2(3\gamma - n)}{n - \gamma}}$$

где теперь роль параметра играет n . Необходимо подчеркнуть, что, во-первых, значение ω при этом должно быть вещественным, так что величина n может изменяться лишь в диапазоне $\gamma < n < 3\gamma$, при этом, разумеется, $\delta < 1$. При $n = \gamma$ согласно (3.5) будем иметь $\delta = 1$, $\rho = 0$, при этом полином (2.7) вырождается в линейный и имеет единственный корень $p = -\gamma$. При $n = 3\gamma$ полином будет иметь трехкратный корень $p = -3\gamma$, которому как раз отвечают полученные выше значения (3.2), и, как было сказано выше, он существует лишь при $\gamma > \sqrt{3}$. Что же касается варианта $\gamma < \sqrt{3}$, то в этом случае диапазон возможных значений n оказывается несколько более узким, чем ин-

тервал $\gamma < n < 3\gamma$, и он определяется условиями положительности подкоренного выражения во второй формуле (3.5):

$$\gamma < n < \frac{9\gamma}{9 - 2\gamma^2} \quad (3.6)$$

В этой ситуации в обоих крайних точках данного интервала будем иметь $\rho = 0$. Интересно отметить, что $d\delta/dn = 0$ (а $d\rho/dn \neq 0$, так что $d\delta/d\rho = 0$) в точке $n = 2\gamma$, попадающей всегда в диапазон $\gamma < n < 3\gamma$ при $\gamma > \sqrt{3}$ и оказывающейся в диапазоне (3.6) при $3/2 < \gamma < \sqrt{3}$. Остается подчеркнуть, что найденная кривая (3.5) будет отделять область II от области I.

4. Определение оптимальной кривой. Обратимся теперь к определению оптимальной кривой. С этой целью будем использовать следующий подход [18]: сделаем в уравнении (2.7) замену переменной $p = \lambda - \eta$ [28], в результате чего получим т. н. “смещенное” уравнение:

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \quad (4.1)$$

где приняты обозначения для его коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_0 &= (1 - \delta)^2 + \rho^2, & a_1 &= -3\eta[(1 - \delta)^2 + \rho^2] + \gamma(1 - \delta) \\ a_2 &= 3\eta^2[(1 - \delta)^2 + \rho^2] - 2\eta\gamma(1 - \delta) + 1, & a_3 &= -[(1 - \delta)^2 + \rho^2]\eta^3 + \gamma(1 - \delta)\eta^2 - \eta + \gamma \end{aligned} \quad (4.2)$$

Эта процедура необходима для того, чтобы ввести в рассмотрение степень устойчивости, за которую и будет отвечать величина η .

Запишем сначала для “смещенного” уравнения (4.1) условие колебательной границы устойчивости, которое имеет вид:

$$a_0a_3 = a_1a_2 \quad (4.3)$$

Ясно, что при выполнении этого условия корни уравнения (4.1) в случае положительности всех коэффициентов (4.2) будут следующими:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}, \quad \lambda_3 = -\frac{a_1}{a_0}$$

т. е. будем иметь два комплексно-сопряженных корня и один отрицательный вещественный корень. Величина η тогда будет характеризовать степень устойчивости исходной системы. Подставляя коэффициенты (4.2) в условие (4.3), получим после преобразований уравнение:

$$\begin{aligned} 8\eta^3(1 - \delta)^4 - 8\eta^2\gamma(1 - \delta)^3 + (16\eta^3\rho^2 + 2\eta + 2\eta\gamma^2 + \gamma)(1 - \delta)^2 - \\ - \gamma(8\eta^2\rho^2 + 1)(1 - \delta) + 8\eta^3\rho^4 + 2\eta\rho^2 + \gamma\rho^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Для определения первого участка оптимальной кривой, лежащего в области I, следует найти зависимость $\delta(\rho)$, доставляющую максимум величине η . С этой целью продифференцируем уравнение (4.4) по δ , принимая во внимание, что $d\eta/d\delta = 0$, в результате чего получим:

$$-32\eta^3(1 - \delta)^3 + 24\eta^2\gamma(1 - \delta)^2 - 2(16\eta^3\rho^2 + 2\eta + 2\eta\gamma^2 + \gamma)(1 - \delta) + \gamma(8\eta^2\rho^2 + 1) = 0 \quad (4.5)$$

Перепишем теперь уравнения (4.4) и (4.5), группируя слагаемые с одинаковыми степенями η и объединяя полученные уравнения в систему:

$$\begin{aligned}
& 8[(1-\delta)^2 + \rho^2]\eta^3 - 8\gamma[(1-\delta)^2 + \rho^2](1-\delta)\eta^2 + 2[(1+\gamma^2)(1-\delta)^2 + \rho^2]\eta + \\
& \quad + \gamma\rho^2 - \delta(1-\delta)] = 0 \\
& -32[(1-\delta)^2 + \rho^2](1-\delta)\eta^3 + 8\gamma[3(1-\delta)^2 + \rho^2]\eta^2 - 4(1+\gamma^2)(1-\delta)\eta + \gamma(2\delta-1) = 0
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Домножим первое уравнение этой системы на $4(1-\delta)$, а второе — на $[(1-\delta)^2 + \rho^2]$, после чего сложим их. Тем самым получим уравнение, в котором будет исключено слагаемое с η^3 , т. е. квадратное уравнение относительно η , которое уже можно легко решить аналитически:

$$A\eta^2 + B\eta + C = 0 \tag{4.7}$$

где коэффициенты A , B и C определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
A &= 8\gamma\rho^4 - (1-\delta)^4], \quad B = 4(1-\delta)[(1+\gamma^2)(1-\delta)^2 + \rho^2(1-\gamma^2)] \\
C &= \gamma(3-2\delta)\rho^2 - (1+2\delta)(1-\delta)^2]
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Решая уравнение (4.7), можно выразить оба его корня в явном виде $\eta = \eta(\delta, \rho, \gamma)$. Наконец, подставляя их во второе уравнение (4.6) как более простое, получаем неявные зависимости вида $F(\delta, \rho, \gamma) = 0$, из которых при помощи численного анализа можно найти необходимый нам первый участок кривой $\delta = \delta(\rho, \gamma)$, который должен располагаться в области I. Отметим, что полученные уравнения (4.6) и (4.7) удовлетворяются при $\rho = 1/2$ и $\delta = 1/2$, и при этом $\eta = 0$, как того и следовало ожидать, т. к. данная точка лежит на границе области устойчивости. Поэтому оптимальная кривая будет выходить именно из указанной точки, и при постепенном уменьшении ρ она будет относиться к области I до тех пор, пока не пересечет ее границы в некоторой точке. Разумеется, для найденного участка все коэффициенты (4.2) действительно будут принимать положительные значения.

После определения первого участка оптимальной кривой необходимо искать остальные ее участки уже в областях II и III или на их границах с областью I. Для нахождения этих участков следует применить к “смещенному” уравнению (4.1) уже условие аperiodической границы устойчивости, которое имеет вид:

$$a_3 = 0 \tag{4.9}$$

При выполнении этого условия корни уравнения (4.1) будут следующими:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0} \tag{4.10}$$

и в случае положительности коэффициентов a_0 , a_1 и a_2 величина η будет характеризовать степень устойчивости исходной системы. С учетом (4.2) уравнение (4.9) приводится к виду:

$$-[(1-\delta)^2 + \rho^2]\eta^3 + \gamma(1-\delta)\eta^2 - \eta + \gamma = 0 \tag{4.11}$$

Возьмем производную этого уравнения по δ , принимая во внимание, что $d\eta/d\delta = 0$, и выразим из этого требования величину η , а также подставим ее сразу в уравнение (4.11). В результате получим следующие соотношения:

$$\eta = \frac{\gamma}{2(1-\delta)}, \quad \rho^2 = (1-\delta)^2 \left[1 + \frac{4}{\gamma^2}(1-2\delta) \right] \tag{4.12}$$

Отметим, что условие существования данного решения, возникающее вследствие требования положительности выражения в квадратных скобках в (4.12), имеет вид

$\delta < 1/2 + \gamma^2/8$, и его следует добавлять лишь при $\gamma < 2$, тогда как при $\gamma > 2$ в силу требования $\delta < 1$ согласно (2.8) оно уже оказывается излишним. Обращаясь к формулам (4.2), можно видеть, что $a_0 > 0$ всегда, а коэффициенты a_1 и a_2 с учетом соотношений (4.12) будут определяться выражениями:

$$a_1 = -2\gamma(1 - \delta) \left[1 + \frac{3}{\gamma^2}(1 - 2\delta) \right], \quad a_2 = \frac{\gamma^2}{2} + 4 - 6\delta$$

Отсюда с учетом высказанных выше условий можно получить, что $a_1 < 0$, $a_2 > 0$. Это означает, что корни $\lambda_{2,3}$ согласно второй формуле (4.10) будут располагаться в правой полуплоскости, так что величина η согласно (4.12) уже не будет характеризовать степень устойчивости, т. к. в этом случае она не определяет поведение корня, ближайшего к мнимой оси. Отметим, что кривая (4.12) будет проходить лишь через области I и III, т. к. именно в них может реализоваться упомянутая ситуация, однако в любом случае она является посторонней по отношению к оптимальному решению. Из сказанного можно сделать вывод, что внутри областей II и III и на разделяющей их границе максимум степени устойчивости достигаться не будет. Следовательно, этот максимум будет обеспечен на границах этих областей с областью I, т. е. именно на дискриминантных кривых, выражения для которых были получены выше. Таким образом, первый участок оптимальной кривой, расположенный в области I, при уменьшении параметра ρ будет продолжаться от точки ее выхода из данной области участка дискриминантных кривых.

Остается показать, что найденный первый участок будет пересекать дискриминантную кривую (3.5), и определить точку их пересечения. Подставляя зависимости (3.5) в уравнение (4.7) с учетом (4.8) и принимая во внимание, что в данном случае $\eta = n$, а также учитывая, что корень $n = \gamma$ получившегося уравнения не отвечает смыслу задачи, придем после упрощений к следующему квадратному уравнению:

$$(6 - \gamma^2)n^2 + \gamma(2\gamma^2 - 21)n + 15\gamma^2 = 0 \quad (4.13)$$

Из двух его корней следует выбрать тот, который при $\gamma > \sqrt{3}$ отвечает диапазону $\gamma < n < 3\gamma$, а при $\gamma < \sqrt{3}$ удовлетворяет условию (3.6). Нетрудно показать, что этим требованиям удовлетворяет лишь корень уравнения (4.13) со знаком “–” перед радикалом, который для устранения неопределенности 0/0 при $\gamma = \sqrt{6}$ удобно записать в следующем виде:

$$n_* = \frac{30\gamma}{21 - 2\gamma^2 + \sqrt{4\gamma^4 - 24\gamma^2 + 81}}$$

Это представление уже является пригодным для любого значения γ . Отметим, что $n_* < 2\gamma$, поэтому точка $n = 2\gamma$ на кривой (3.5), существующая при $\gamma > 3/2$ и отвечающая условию $d\delta/d\rho = 0$, располагается на том ее участке, который входит в состав оптимальной кривой. Таким образом, процесс построения оптимального решения можно считать завершенным.

5. Обсуждение результатов. Представим теперь полученные результаты в наглядной графической форме на плоскости параметров $\rho\delta$. Для этого примем два значения γ , которые отвечают качественно различной картине поведения в плане отсутствия/наличия трехкратного корня, например, (а) $\gamma = 1 < \sqrt{3}$ и (б) $\gamma = 2 > \sqrt{3}$. На рис. 2 внутри области устойчивости движения (она выделена светлым) для указанных вариантов представлены оптимальные кривые (жирные линии) совместно с дискриминантными кривыми.

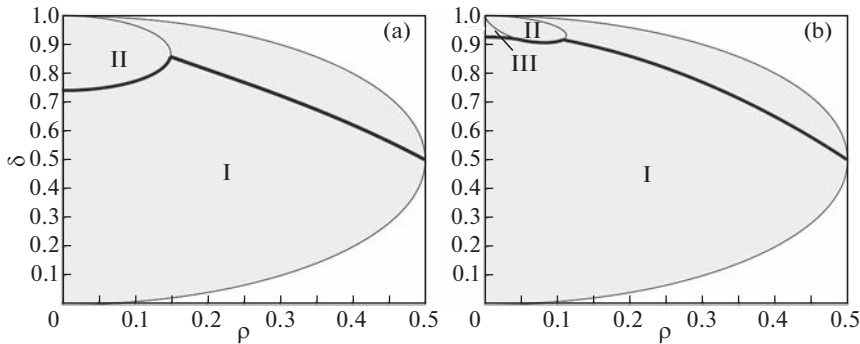


Рис. 2. Оптимальная кривая: (a) при $\gamma = 1$, (b) при $\gamma = 2$.

Видно, что на рис. 2, а присутствуют лишь области I и II, тогда как область III, равно как и трехкратный корень, в этой ситуации не существуют. Напротив, на рис. 2, b имеются области I, II и III, а также точка, лежащая на стыке всех трех областей и отвечающая трехкратному корню. Что же касается оптимальной кривой $\delta(\rho)$, то в обоих указанных случаях она имеет немонотонное поведение, является кусочно-гладкой и обладает ярко выраженным нетривиальным характером. Отметим, что представленные результаты находятся в полном соответствии с теми рассуждениями, которые были изложены ранее.

Следует подчеркнуть, что полученные оптимальные кривые на плоскости $\rho\delta$ для различных значений γ , обеспечивающие максимум степени устойчивости, могут быть проверены с помощью процедуры численной оптимизации в пакетах прикладных программ [18]. Для этого, задаваясь значением γ , необходимо для каждого фиксированного значения ρ из интервала от 0 до $1/2$ определить численно корни исходного кубического уравнения (2.7) при значениях δ , попадающих в область устойчивости согласно (2.8):

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4\rho^2}}{2} < \delta < \frac{1 + \sqrt{1 - 4\rho^2}}{2}$$

после чего выбрать из них то, при котором степень устойчивости будет максимальной. В результате этого исследования можно получить при различных значениях γ численные оптимальные кривые на плоскости $\rho\delta$, которые будут полностью совпадать с найденными ранее аналитическими кривыми. Это обстоятельство лишний раз подтверждает корректность приведенных выше действий и конечных выражений.

Поскольку исследование носит прикладной характер, то для более глубокого прояснения физического смысла полученного решения следует привести результаты и в исходных параметрах. Для этого зададимся геометрическими и инерционными свойствами прицепа, которые можно считать достаточно правдоподобными. Например, примем $b = 1.5$ м, $m = 500$ кг, $c = 24500$ Н/м, $r = 0.5$ м. Отметим, что радиус инерции прицепа выбран из тех соображений, что согласно (2.7) для попадания в область устойчивости должно быть $\rho < 1/2$, так что $r < b/2 = 0.75$ м. Тогда из (2.5) находим, что $k = 7$ рад/с. Если при этом варьировать параметр γ в пределах от 0 до 4, то согласно (2.5) получим, что скорость тягача будет меняться в диапазоне от 0 до 42 м/с = 151.2 км/ч, что отвечает реальным условиям движения. На рис. 3 приведен график зависимости оптимального значения δ от величины γ , которая изменяется в указанном выше диапазоне, для принятого набора параметров задачи.

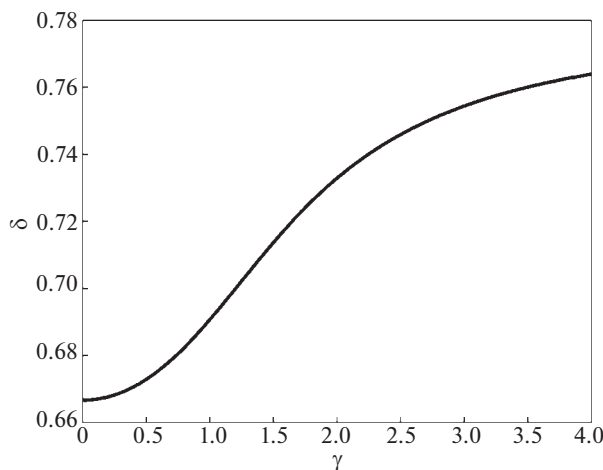


Рис. 3. График зависимости оптимального значения δ от γ при заданных параметрах ($b = 1.5$ м, $m = 500$ кг, $c = 24500$ Н/м, $r = 0.5$ м).

Отсюда можно видеть, что при увеличении параметра γ от 0 до 4 (т. е. при изменении скорости тягача от 0 до 151.2 км/ч) оптимальное значение δ увеличивается с $2/3 \approx 0.67$ до 0.76 (а, стало быть, расстояние a изменяется с 1 м до 1.15 м). Следует также подчеркнуть, что результаты, представленные на рис. 3, согласуются и с графиками, приведенными на рис. 2.

6. Оценка эффективности оптимального решения. Чтобы продемонстрировать ценность полученного оптимального решения, перейдем к оценке его эффективности. Для этого сопоставим найденные результаты с наиболее простым случаем, когда для любого значения параметра ρ в пределах области устойчивости принимается $\delta = 1/2$, т. е. центр масс прицепа располагается посередине между точкой его сцепления с тягачом и осью колесной пары. Отметим, что линия $\delta = 1/2$ делит область устойчивости на плоскости $\rho\delta$ ровно пополам. Фиксируя значение γ , построим графики зависимости максимальной степени устойчивости (т. е. при найденном выше оптимальном значении δ) и степени устойчивости, достигаемой при $\delta = 1/2$, от параметра ρ . При этом для определения максимальной степени устойчивости следует использовать полученные ранее аналитические выражения, тогда как для случая $\delta = 1/2$ необходимо определить степень устойчивости путем непосредственного решения кубического уравнения (2.7). Упомянутые графики приведены на рис. 4 для двух значений параметра γ , принятых ранее при построении оптимальной кривой на рис. 2.

По рис. 4, а видно, что максимальная степень устойчивости монотонно убывает с увеличением ρ , тогда как на рис. 4, б она имеет ярко выраженный максимум, достигаемый на трехкратном корне, которому, очевидно, отвечает значение $\eta = 3\gamma$. Представленные графики показывают, что различие максимальной степени устойчивости и степени устойчивости при $\delta = 1/2$ является весьма заметным при достаточно малых значениях параметра ρ , причем данное различие становится все более существенным с увеличением параметра γ . Эти результаты позволяют сделать вывод, что построенное оптимальное решение имеет важное значение и большую ценность, и данное суждение оправдывает все выполненные действия.

Наконец, остается представить и графики, иллюстрирующие максимальную степень устойчивости и степень устойчивости при $\delta = 1/2$ в зависимости от γ при задании

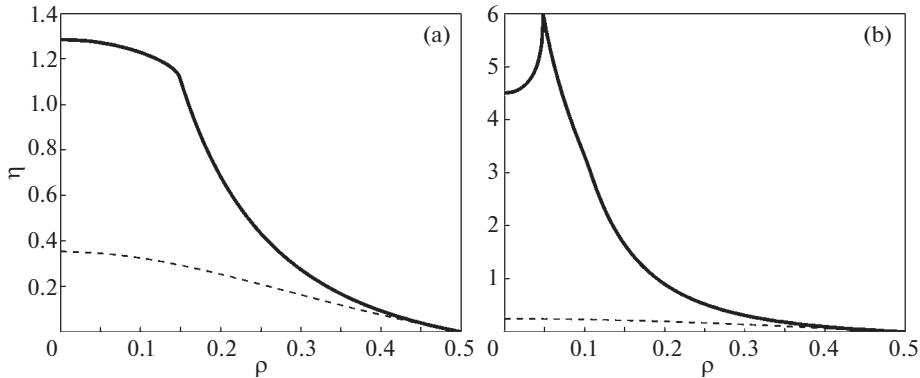


Рис. 4. Графики зависимости максимальной степени устойчивости (сплошная линия) и степени устойчивости при $\delta = 1/2$ (пунктирная линия) от ρ : (a) при $\gamma = 1$, (b) при $\gamma = 2$.

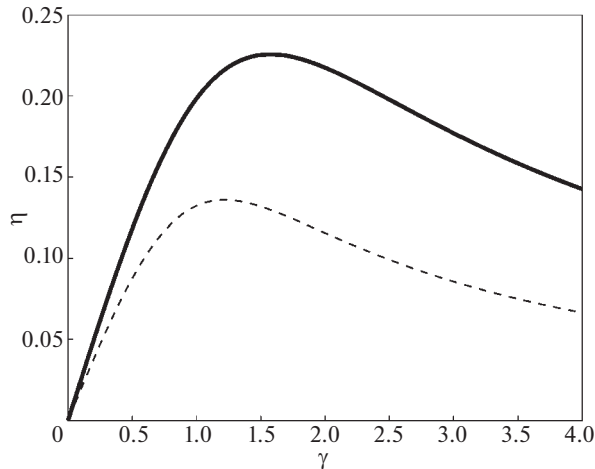


Рис. 5. Графики зависимости максимальной степени устойчивости (сплошная линия) и степени устойчивости при $\delta = 1/2$ (пунктирная линия) от γ при заданных параметрах ($b = 1.5$ м, $m = 500$ кг, $c = 24500$ Н/м, $r = 0.5$ м).

тех же самых параметров, что и выше ($b = 1.5$ м, $m = 500$ кг, $c = 24500$ Н/м, $r = 0.5$ м). Эти графики приведены на рис. 5 и имеют немонотонный характер. Они лишь раз подтверждают тот факт, что, используя оптимальное решение по сравнению с простейшим вариантом $\delta = 1/2$, можно обеспечить заметный выигрыш в степени устойчивости.

7. Заключение. В настоящей работе была поставлена и решена задача оптимизации процессов затухания поперечных движений прицепа, следующего за тягачом. Для этой цели принимался критерий оптимизации, связанный с максимизацией степени устойчивости, на основе которого выбиралось наилучшее расположение центра масс прицепа при прочих фиксированных параметрах задачи. Полученные результаты были представлены в удобной графической форме, позволяющей установить их каче-

ственные и количественные особенности. При этом достоверность найденного в работе оптимального решения определяется как строгостью математических построений, так и его сопоставлением с численным решением. Помимо этого, путем сравнения максимальной степени устойчивости со степенью устойчивости для случая расположения центра масс прицепа посередине между точкой его крепления к тягачу и осью колесной пары был сделан вывод о существенной важности оптимального решения и целесообразности его использования для обеспечения наиболее ярко выраженных процессов затухания движений прицепа. Представленные в работе результаты исследования интересны в теоретическом отношении, находясь на стыке неголономной механики, теории оптимизации и динамики систем с нецелым числом степеней свободы, а также они могут оказаться полезными для приложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рокар И.* Неустойчивость в механике. М.: изд-во иностранной литературы, 1959. 287 с. *Rokard Y.* L'instabilité en mécanique. Automobiles. Avions. Ponts suspendus. Paris, Masson, 1954.
2. *Закин Я.Х.* Прикладная теория движения автопоезда. М.: Транспорт, 1967. 255 с.
3. *Nastasoiu M., Ispas N.* Comparative analysis into the tractor-trailer braking dynamics: tractor with single axle brakes, tractor with all wheel brakes // Cent. Eur. J. Eng. 2014. V. 4 (2). P. 142–147. <https://doi.org/10.2478/s13531-013-0155-0>
4. *Astolfi A., Bolzern P., Locatelli A.* Path-Tracking of a Tractor-Trailer Vehicle Along Rectilinear and Circular Paths: A Lyapunov-Based Approach // IEEE Trans. Rob. Autom. 2004. V. 20. № 1. P. 154–160. <https://doi.org/10.1109/TRA.2003.820928>
5. *Lin J.J.-C., Yang C.-E., Hung W.-H., Kang S.-C.* Accessibility evaluation system for site layout planning – a tractor trailer example // Vis. Eng. 2013. V. 1 (1). P. 12. <https://doi.org/10.1186/2213-7459-1-12>
6. *Rouchon P., Fliess M., Levine J., Martin P.* Flatness and motion planning: The car with n trailers // Proc. European Control Conf., Groningen, The Netherlands, 1993. IEEE, 1993. P. 1518–1522.
7. *Tanaka K., Kosaki T.* Design of a stable fuzzy controller for an articulated vehicle // IEEE Trans. Syst. Man. Cybern. Part B. 1997. V. 27. № 3. P. 552–558. <https://doi.org/10.1109/3477.584963>
8. *Смирнов А.С., Смольников Б.А., Леонтьев В.А.* Принципы неголономной механики в управлении движением группы транспортных роботов // Научно-технические ведомости СПб-ПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2017. № 3. С. 83–91. <https://doi.org/10.18721/JCSTCS.10307>
9. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с. *Ziegler H.* Principles of Structural Stability. Waltham, Massachusetts, Toronto, London: Blaisdell Publishing Company, 1968.
10. *Муравьев А.С., Смирнов А.С.* Динамика и устойчивость движения тягача с прицепом // Неделя науки СПбПУ. Материалы научной конференции с международным участием. 18–23 ноября 2019 года, Санкт-Петербург. СПб.: Политех Пресс, 2019. С. 92–95.
11. *Муравьев А.С., Смирнов А.С.* Устойчивость движения тягача с прицепом с учетом сил сопротивления // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды” 2020–2021. СПб.: Наука, 2021. С. 29–40.
12. *Меркин Д.Р., Смольников Б.А.* Прикладные задачи динамики твердого тела. СПб.: СПбГУ, 2003. 534 с.
13. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. 591 с.
14. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. Изд. 2-е. М.: Физматгиз, 1959. 918 с.
15. *Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г.* Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. М.: Наука, 1983. 328 с.
16. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352 с.

17. Трегубов В.П. Системы с нецелым числом степеней свободы // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія “Математика, прикладна математика і механіка”. 2009. № 850. С. 83–90.
18. Смирнов А.С., Муравьев А.С. Оптимизация демпфирования колебаний в системах с нецелым числом степеней свободы // Вестн. СПбГУ. Мат. Мех. Астрон. 2022. Т. 9 (67). № 1. С. 164–175.
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.116>
19. Теория автоматического управления. Ч. 1. Теория линейных систем автоматического регулирования / Под ред. А.А. Воронова. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1986. 367 с.
20. Меркин Д.Р., Бауэр С.М., Смольников Б.А., Смирнов А.Л. Теория устойчивости в примерах и задачах. М., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. 208 с.
21. Болотник Н.Н. Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 256 с.
22. Смольников Б.А. Проблемы механики и оптимизации роботов. М.: Наука, 1991. 232 с.
23. Муравьев А.С., Смирнов А.С. Оптимизация демпфирования колебаний маятника с упруго-подвижной точкой подвеса // IX Поляховские чтения. Материалы международной научной конференции по механике. СПб.: Издательство ВВМ, 2021. С. 115–117.
24. Нагаев Р.Ф., Степанов А.В. Об оптимизации коэффициента затухания свободных колебаний двухмассовой системы // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 24–28.
25. Мирер С.А., Прилепский И.В. Оптимальные параметры гравитационной системы спутник–стабилизатор // Космические исследования. 2010. № 48 (2). С. 198–208.
26. Леонтьев В.А., Смирнов А.С., Смольников Б.А. Оптимальное демпфирование колебаний двухзвенного манипулятора // Робототехника и техническая кибернетика. 2018. № 2 (19). С. 52–59.
27. Кумакишев С.А. Активное гашение колебаний несущих конструкций перемещением внутренней массы // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятиницкого). Материалы XV Международной научной конференции / Под общ. ред. В.Н. Тхай. М.: ИПУ РАН, 2020. С. 250–252.
28. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1972. 768 с.

УДК 539.1, 539.64

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОДВОДНОГО МОРСКОГО ГАЗОПРОВОДА С УЧЕТОМ РАЗЖИЖЕНИЯ ГРУНТА И ПАРАМЕТРОВ ЭКСПЛУАТАЦИИ

© 2023 г. Р. М. Зарипов^{a,*}, Р. Б. Масалимов^{b,**}

^aИнститут механики им. Р.Р. Мавлютова — структурное подразделение УФИЦ РАН,
Уфа, Россия

^bУфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия

*e-mail: rail.zaripov@gmail.com

**e-mail: masalimovrb@mail.ru

Поступила в редакцию 01.09.2022 г.

После доработки 08.10.2022 г.

Принята к публикации 19.10.2022 г.

Представленная краткая информация о неожиданном всплытии двух ниток на подводном переходе через Байдарацкую губу на Ямале свидетельствует о том, что при разработке проектов не были проведены полные исследования, посвященные вопросам обеспечения прочности и устойчивости и сохранения в проектном положении газопроводов. Для выявления одной из основных причин всплытия поставлена и решена задача о напряженно-деформированном состоянии подводного участка морского газопровода с учетом частичного и полного обводнения грунта в отдельных подземных частях. Рассматриваемый подводный участок подводного газопровода в расчетной схеме условно делится на три части. В его средней части находится размытая оголенная часть, которая образуется вследствие разжижения и размыва грунта. К ней слева и справа примыкают подземные части. За математическую модель рассчитываемого участка газопровода принимается одномерная стержневая система в упругой среде, состоящая из криволинейных и прямолинейных трехслойных стержней трубчатого сечения и их узлов сопряжения. Напряженно-деформированное состояние стержневого элемента описывается системой дифференциальных уравнений, которая состоит из геометрических и физических нелинейных соотношений, нелинейных дифференциальных уравнений равновесия. Решение поставленной задачи осуществляется методом конечных элементов в перемещениях. Численным экспериментом найдены критические значения параметров эксплуатации и формы изгиба газопровода, предшествующие его всплытию для разных длин размытой оголенной части, изменения состояния грунта в подземных частях и различных значений параметров эксплуатации газопровода.

Ключевые слова: газопровод, обетонированная труба, грунт, прогиб, напряжение, давление, усилие, всплытие

DOI: 10.31857/S0572329922600700, EDN: QWSFJU

1. Введение. Из новостных сведений агентства Интерфакс от 20 ноября 2019 г. “Газпром” раскрыл информацию о нарушении проектного положения двух из четырех ниток морского газопровода на подводном переходе через Байдарацкую губу на Ямале: в 2018 году стало известно о неожиданном всплытии первой нитки, а в 2019 г. — четвертой нитки. Вышеупомянутая информация о неожиданном всплытии двух ниток подводного морского перехода газопровода Северный поток-2 свидетельствует о том, что



Рис. 1. Внешний вид обетонированной трубы.

при разработке проектов не были проведены полные исследования, посвященные вопросам обеспечения прочности и устойчивости и сохранения в проектном положении.

Байдарацкая губа в Карском море, где находится морской переход газопровода Северный поток-2, относится к мелководным районам. За счет воздействия волн прибойной зоны и температурных напряжений от прогретой трубы, вследствие потока газа по ней, на одних частях участка подводного морского газопровода происходит размывание и оголение трубы, а в других частях — ослабление удерживающей способности грунта засыпки и потеря несущей способности грунта основания, что приводит к всплытию газопровода, нарушению его проектного положения [1–5]. Целью исследований в данной статье является решение следующих проблем: выявление влияния на всплытие подводного участка морского газопровода параметров эксплуатации, размывания и оголения трубы, изменения состояния грунтов основания и засыпки за счет частичного обводнения.

Одним из путей решения этих проблем является нахождение условий, при выполнении которых возможно всплытие газопровода. Эти условия в данной статье определяются из решения задачи о напряженно-деформированном состоянии подводного участка морского газопровода с учетом частичного и полного обводнения грунта на его отдельных частях. Решение поставленной задачи осуществляется методом конечных элементов в перемещениях. Численным экспериментом найдены критические значения параметров эксплуатации и формы изгиба газопровода, предшествующие его всплытию.

2. Постановка задачи. В подводном переходе через Байдарацкую губу на Ямале использованы трубы с наружным утяжеляющим (балластным) бетонным покрытием, и они имеют довольно сложную конструкцию. На рис. 1 представлен внешний вид обетонированной трубы, состоящей из стальной трубы, изоляционного слоя и утяжеляющего бетонного покрытия.

Бетонное покрытие изготавливается в заводских условиях с металлическим каркасом или арматурной сеткой непрерывным набрасыванием бетонной смеси на продольно перемещающуюся и вращающуюся стальную трубу с антикоррозионным покрытием. Эксплуатация труб с наружным сплошным утяжеляющим бетонным покрытием показала их более эффективную работу, чем труб, уложенных традиционными способами балластировки с применением бетонных и чугунных утяжелителей, жестко фиксируемых на трубе [6–8]. Поэтому в последние годы при сооружении подводных

Таблица 1. Физико-механические и геометрические характеристики стальной трубы, изоляционного покрытия и бетонной оболочки в обетонированной трубе

Наименование труб	Геометрические, физико-механические характеристики труб				
	наружный диаметр, толщина стенки, мм	модуль упругости, E , МПа	коэффициент Пуассона, μ	коэффициент линейного температурного расширения, α , $^{\circ}\text{C}^{-1}$	объемная масса, γ , кг/м^3
Стальная труба	1219×27	2.06×10^5	0.3	1.2×10^{-5}	7.8×10^3
Изоляционная оболочка	1229×5	6.09×10^2	0.3	1.3×10^{-4}	0.9×10^3
Бетонное покрытие	1429×100	2.06×10^4	0.4	1.0×10^{-5}	2.5×10^3

участков морских газопроводов и нефтепроводов, в основном, применяются обетонированные трубы, а также при выполнении капитального ремонта трубы с бетонными и чугунными утяжелителями заменяются на обетонированные трубы [9].

В табл. 1 приведены ориентировочные значения физико-механических и геометрических характеристик стальной трубы, изоляционного покрытия и бетонной оболочки обетонированной трубы подводного перехода через Байдарацкую губу в Карском море на Ямале [5].

Расчетное давление p_0 в трубопроводе согласно положению 2.2 нормативного документа [10], регламентирующего правила классификации и постройки морских подводных трубопроводов, задается по формуле

$$p_0 = (p_i - p_{g \min}) + \Delta p \quad (2.1)$$

В (2.1) приняты следующие обозначения:

p_i — внутреннее рабочее давление в газопроводе;

$p_{g \min}$ — минимальное гидростатическое давление, определяемое в зависимости от давления морской воды на газопровод и от глубины его укладки;

Δp — добавочное расчетное давление от гидравлического удара Δp .

По данным работы [5] глубина моря, где проходит подводный переход через Байдарацкую губу, не превышает 15–20 метров, $p_i = 11.8$ МПа, $p_{g \min} = 0.2$ МПа, $\Delta p = 0.1$ МПа, $p_0 = 11.5$ МПа.

Рассчитываемый подводный участок подводного газопровода находится в осложненных условиях эксплуатации. На размытую оголенную часть действует вес обетонированной трубы с газом и выталкивающая сила морской воды, а в подземных частях газопровод совместно деформируется с грунтом, при этом он испытывает дополнительный изгиб от воздействия температурных напряжений, внутреннего и внешнего давления. Определение напряженно-деформированного состояния газопровода для каждого из этих случаев нагружения и разработка мероприятий, направленных на предотвращение его всплытия, представляет собой самостоятельную задачу, решение которой осуществлено в работах [11–27].

Рассматриваемый подземный участок морского газопровода в расчетной схеме условно делится на три части. В его средней части находится размытая оголенная часть, которая образуется вследствие разжижения и размыва грунта с трубы. К ней слева и справа примыкают подземные части. За математическую модель рассчитываемого участка газопровода принимается одномерная стержневая система в упругой среде, состоящая из криволинейных и прямолинейных трехслойных стержней трубчатого сечения и их узлов сопряжения. Принимается предположение о том, что профиль

рассматриваемого подземного участка газопровода является плоским, поэтому для стержневой системы выполняется гипотеза плоских сечений Эйлера–Бернулли. Описание в математической модели обетонированной трубы трехслойным стержнем не вносит осложнений в расчете ее напряженно-деформированного состояния, и оно осуществляется по теории механики многослойных оболочек и стержней [27, 28].

Напряженно-деформированное состояние стержневого элемента описывают [29, 30]:

а) геометрические нелинейные соотношения, состоящие из деформаций растяжения-сжатия ε_x , угла поворота нормали продольной оси ω_x и изгибных деформаций χ :

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} - \frac{w}{\rho_0} + \frac{1}{2} \cdot \rho_0 \omega_x^2 \quad (2.2)$$

$$\omega_x = -\frac{dw}{dx} + \frac{u}{\rho_0} \quad (2.3)$$

$$\chi = \frac{d\omega_x}{dx} \quad (2.4)$$

где ρ_0 – радиус кривизны продольной оси стержневого элемента до его деформации; x – независимая переменная, которая совпадает с продольной осевой координатой; u, w – продольное перемещение и прогиб стержневого элемента соответственно; б) уравнения равновесия:

$$\frac{d(N_x + \omega_x Q_y)}{dx} - \frac{Q_y}{\rho_0} + \pi \cdot D_n \cdot c_{xo} \cdot u = q_x - q_n \omega_x \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ_y}{dx} + \frac{(N_x - p_i \cdot F_{cv} + p_{g \min} \cdot F_{ot})}{\rho_0} + \frac{d\omega_x}{dx} (N_x - p_i \cdot F_{cv} + p_{g \min} \cdot F_{ot}) + \\ + \pi \cdot D_n \cdot c_{yo} \cdot w = -r_{vt} + q_n \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\frac{dM_z}{dx} - Q_y = 0, \quad (2.7)$$

где N_x, Q_y, M_z – продольное осевое усилие, перерезывающая сила и осевой изгибающий момент соответственно.

На рис. 2 изображена расчетная схема элемента стержня, моделирующего подводный участок морского газопровода. В дифференциальных уравнениях (2.5)–(2.7) и на рис. 2 приняты следующие обозначения:

D_n – наружный диаметр обетонированной трубы; c_{xo} и c_{yo} – обобщенные коэффициенты касательного и нормального сопротивления грунта, соответственно. В расчетах значение коэффициента c_{xo} , МПа/см, берется в зависимости от типа грунта по экспериментальным данным работы [31], полученных в промышленных условиях на действующих газопроводах. Величина коэффициента c_{yo} вычисляется по формуле [32]

$$c_{yo} = \frac{0.12 E_{gr}}{(1 - \mu_{gr}^2) \sqrt{l_{01} D_n}} \quad (2.8)$$

Здесь E_{gr}, μ_{gr} – модуль деформации и коэффициент Пуассона грунта ненарушенной структуры; l_{01} – единичная длина трубопровода, $l_{01} = 100$ см; r_{vt} – выталкивающая сила воды. Ее величина, приходящаяся на единицу длины размытой оголенной и полностью погруженной в воду обетонированной трубы, определяется по формуле

$$r_{vt} = \frac{\pi D_n^2}{4} \cdot \gamma_v \quad (2.9)$$

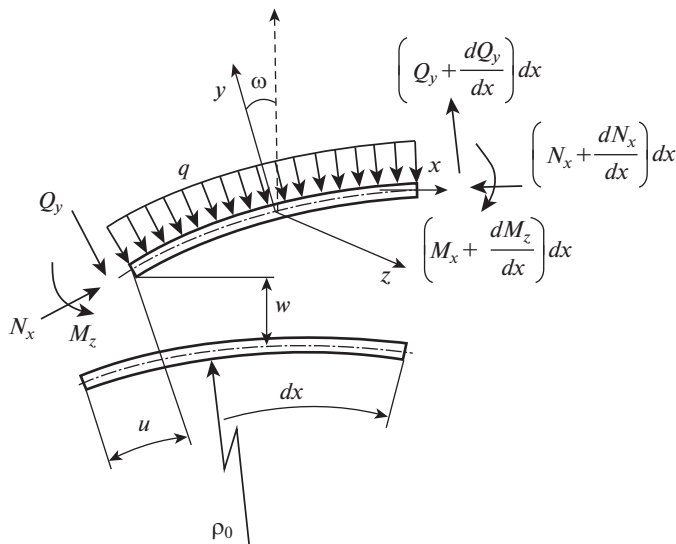


Рис. 2. Расчетная схема элемента стержня, моделирующего подводный участок морского газопровода.

где γ_v — удельный вес морской воды.

В подземных частях, в которых обетонированная труба не размыва и не оголена, принимается $r_{vt} = 0$.

Пусть q_x, q_n — продольная и вертикальная составляющие внешней распределенной нагрузки, соответственно. Они учитывают вес обетонированной трубы с газом, а также давления грунта, находящегося на ней, т.е. грунта засыпки [29, 30, 32]. Значение q_n задается по различным формулам в зависимости от наличия или отсутствия свода естественного равновесия в грунте засыпки. В размывтой оголенной части отсутствует грунт, поэтому в этой части необходимо принять $q_x = 0, q_n = 0$.

Обозначим через $p_i \cdot F_{cv}$ — силу воздействия внутреннего давления, где F_{cv} — площадь обетонированной трубы “в свету”, т.е. площадь поперечного сечения обетонированной трубы по ее внутренней поверхности.

Обозначим также через $p_{g \min} \cdot F_{ot}$ — силу воздействия внешнего давления от морской воды на обетонированную трубу, где F_{ot} — площадь поперечного сечения обетонированной трубы по ее внешней поверхности [27].

В подземных частях, в которых обетонированная труба не размыва и не оголена, принимается $p_{g \min} \cdot F_{ot} = 0$.

в) продольное осевое усилие N_x , определяемое в зависимости от деформаций растяжения-сжатия ϵ_x , вызванных совместными деформациями обетонированной трубы с грунтом, кольцевыми напряжениями σ_{ks} и температурного перепада Δt . Его значение вычисляется по формуле

$$N_x = (E_{st} \cdot F_{0st} + E_{iz} \cdot F_{0iz} + E_{bt} \cdot F_{0bt}) \cdot \epsilon_x + \sigma_{ks} \cdot (\mu_{st} \cdot F_{0st} + \mu_{iz} \cdot F_{0iz} + \mu_{bt} \cdot F_{0bt}) - \Delta t \cdot (\alpha_{st} \cdot E_{st} \cdot F_{0st} + \alpha_{iz} \cdot E_{iz} \cdot F_{0iz} + \alpha_{bt} \cdot E_{bt} \cdot F_{0bt}) \quad (2.10)$$

где $E_{st}, \mu_{st}, \alpha_{st}, E_{iz}, \mu_{iz}, \alpha_{iz}, E_{bt}, \mu_{bt}, \alpha_{bt}$ — модуль упругости, коэффициент Пуассона и коэффициент линейного расширения металла стали трубы, изоляционного покрытия,

бетонного покрытия соответственно; Δt — температурный перепад, равный разности температур эксплуатации и замыкания трубы при сооружении трубопровода; F , F_{0st} , F_{0iz} , F_{0bt} — площадь поперечного сечения стенки обетонированной трубы, стальной трубы, изоляционного покрытия и бетонной оболочки соответственно;

г) осевой изгибающий момент находится по формуле

$$M_z = D \cdot \chi \quad (2.11)$$

где D — изгибная жесткость обетонированной трубы, определяется суммированием изгибных жесткостей стальной трубы, изоляционного покрытия и бетонной оболочки

$$D = E_{st} \cdot J_{st} + E_{iz} \cdot J_{iz} + E_{bt} \cdot J_{bt} \quad (2.12)$$

J_{st} , J_{iz} , J_{bt} — момент инерции стальной трубы, изоляционного покрытия и бетонной оболочки соответственно.

$$J_{st} = \frac{\pi(D_{nst}^4 - D_{vnst}^4)}{64}, \quad J_{iz} = \frac{\pi(D_{niz}^4 - D_{vniz}^4)}{64}, \quad J_{bt} = \frac{\pi(D_{nbt}^4 - D_{vnbt}^4)}{64} \quad (2.13)$$

а D_{nst} , D_{vnst} , D_{niz} , D_{vniz} , D_{nbt} , D_{vnbt} — наружный и внутренний диаметр стальной трубы, изоляционного покрытия и бетонной оболочки соответственно.

Дифференциальные уравнения (2.5), (2.6), в отличие от аналогичных уравнений, представленных в работах [29, 30], учитывают совместные деформации обетонированной трубы с грунтом и воздействие выталкивающей силы воды, а также воздействие гидростатического давления, которое, как и воздействие внутреннего давления, будет вызывать дополнительный изгиб газопровода [27].

При составлении кинематических нелинейных дифференциальных соотношений (2.2)–(2.4) вводится сопутствующая система координат, жестко связанная с осевой линией стержня, которая, деформируясь с этой осью, перемещается вместе с ней в пространстве. Сама осевая линия стержня, занимая до деформации положение кривой в пространстве, перемещаясь в пространстве, занимает новое положение другой кривой. Для каждой из этих кривых вводятся единичные вектора, направленные по касательной, нормали и бинормали каждой кривой. Они образуют трехгранники Серре–Френе, которые жестко связаны с каждой из этих кривых и остаются взаимно ортогональными при их деформации. Далее, по теории дифференциальной геометрии и теории нелинейных деформаций стержней устанавливаются зависимости между трехгранниками Серре–Френе продольных осей стержня до и после их деформации, что позволяет получить основные кинематические нелинейные дифференциальные соотношения, связывающие деформации сжатия-растяжения, изгиба и кручения продольной оси стержня через координаты вектора обобщенных перемещений. Поскольку в данной статье принимается предположение о том, что стержневая система, которая моделирует рассматриваемый подземный участок морского газопровода, находится в плоско-деформированном состоянии, то деформаций кручения продольной оси стержня пренебрегается.

В уравнении равновесия в векторной форме вектор усилий и вектор внешней нагрузки, которая состоит из поверхностной нагрузки, внутреннего давления в трубе и внешнего гидростатического давления, представляются в проекциях по ортам естественных осей деформированного стержня, и при дифференцировании ортов используются формулы Серре–Френе. Далее, для получения системы дифференциальных уравнений (2.5), (2.6) приравняются коэффициенты при одинаковых ортах.

Разложение вектора усилий по ортам естественных осей деформированного стержня объясняется тем, что компоненты вектора усилий N_x , Q_y имеют четкий физический смысл: они являются составляющими вектора усилий по касательной и нормали продольной оси деформированной оси стержня соответственно. За счет дифференци-

рования ортов по формулам Серре—Френе в дифференциальном уравнении (2.6) появляются слагаемые, которые описывают воздействие внутреннего давления в трубе и внешнего гидростатического давления, вызывающее дополнительный изгиб трубопровода.

Такой подход составления уравнений равновесия для трубопровода одним из первых осуществил В.А. Светлицкий [33]. Он в качестве примера привел эти уравнения для прямолинейной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. В настоящей статье уравнения равновесия трубы составлены с учетом ее начальной кривизны, находящейся в упругой среде и под воздействием внутреннего давления в трубе и внешнего гидростатического давления, температурных напряжений и выталкивающей силы воды, что позволяет их применять для исследования напряженно-деформированного состояния магистральных трубопроводов в сложных инженерно-геологических условиях.

Система из восьми алгебраических и дифференциальных уравнений (2.2)–(2.7), (2.10)–(2.11) относительно восьми неизвестных $u, w, \omega_x, \varepsilon_x, \chi, N_x, Q_y, M_z$ представляется в виде системы из шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных

$$y_1 = N_x, \quad y_2 = Q_y, \quad y_3 = M_z, \quad y_4 = u, \quad y_5 = w, \quad y_6 = \omega_x \quad (2.14)$$

Эта система в векторной форме имеет вид

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial x} = \bar{f}(x, \bar{Y}) + \bar{b}(x) \quad (2.15)$$

где компоненты векторов $\bar{Y}, \bar{f}, \bar{b}$ есть

$$\begin{aligned} f_1 &= y_2/\rho_o - \pi D_n c_{xo} y_4 - \frac{y_3}{D} y_2 \\ f_2 &= y_1/\rho_o - D_n c_{yo} y_5 + \frac{y_3}{D} (y_1 - p_o F_{c\theta}) \\ f_3 &= -y_2, \quad f_4 = \varepsilon_x + y_5/\rho_o - 0,5 y_6^2 \\ f_5 &= y_5/\rho_o - y_6, \quad f_6 = \chi \\ b_1 &= -y_6 q_n, \quad b_2 = q_n, \quad b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

В алгебраических уравнениях (2.10), (2.11) также проводится замена переменных N_x на y_1 и M_z на y_3

$$y_1 = E \cdot F_o \cdot \varepsilon_x + \mu \cdot \sigma_{\kappa\kappa} \cdot F_o - \alpha \cdot \Delta t \cdot E \cdot F_o \quad (2.18)$$

$$y_3 = D \cdot \chi \quad (2.19)$$

Система дифференциальных уравнений (2.15) является нелинейной; ее правые части, которые представлены в формулах (2.16), (2.17), содержат нелинейные члены: $y_3 \cdot y_2, y_3 (y_1 - p_o F_{c\theta} p_o), y_6^2$. Их линеаризация осуществляется итерационным методом Ньютона—Канторовича.

Решение поставленной задачи осуществляется методом конечных элементов в перемещениях с учетом составленных дифференциальных и алгебраических уравнений (2.6)–(2.7), (2.10)–(2.11). Применение этого метода и компьютерного моделирования в решении задач о напряженно-деформированном состоянии трубопроводов в сложных инженерно-геологических условиях представлено в работах [29, 30]. Дадим их краткое описание.

При решении системы дифференциальных уравнений (2.2)–(2.7), которое осуществляется методом ортогональной прогонки с промежуточным ортонормировани-

ем по Годунову, каждый стержневой элемент делится на равные части. Точки деления называются узловыми.

Далее, в каждом узле сопряжения стержневых элементов составляется система из 3-х уравнений равновесия с учетом действия сосредоточенных сил и моментов, приложенных в этих узлах, а также ограничений продольного перемещения, угла поворота нормали и прогиба. Эти системы уравнений дополняются граничными условиями, поставленными в начале и конце рассчитываемого участка. В этих системах компоненты векторов обобщенных усилий записываются через компоненты векторов обобщенных перемещений этих узловых элементов с использованием найденных значений матриц жесткости стержневых элементов. Решение этих систем алгебраических уравнений определяет компоненты вектора перемещений в узлах сопряжения. Далее, используя найденные значения компонент этого вектора перемещений, составляется система дифференциальных уравнений (2.15) для каждого стержневого элемента. Решение этой системы дифференциальных уравнений определяет продольные перемещения, прогиб, напряжения и деформации в узловых точках разбиения каждого стержневого элемента, а также они описывают полную картину НДС всей стержневой системы, моделирующей газопровод.

Программное математическое обеспечение вышеописанного компьютерного моделирования НДС трубопровода состоит из следующих разделов: численное интегрирование системы дифференциальных уравнений методом Рунге–Кутты; ортонормирование и ортогонализация векторов; решение системы алгебраических уравнений методом Гаусса; нахождение матриц жесткости и вектора обобщенных усилий на торцах стержневого элемента; решение нормальной системы неоднородных дифференциальных уравнений; алгоритмы учета нелинейности в последующих приближениях по методу Канторовича–Крылова; нахождение промежуточных значений функции по интерполяционным формулам Лагранжа; умножение и транспонирование матриц; программа, которая автоматически составляет разрешающую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения компонент вектора перемещений узловых элементов с учетом реакции каждого стержневого элемента, ограничений, наложенных на компоненты перемещений узлов, и внешних силовых факторов, приложенных в этих узлах. Вышеописанный метод решения задачи в конечных элементах в перемещениях и компьютерное моделирование адаптированы авторами данной статьи для расчета напряженно-деформированного состояния подводного морского газопровода.

В.И. Мяченков впервые в СССР использовал принцип построения стержневой системы, состоящей из тонкостенных упругих оболочек вращения и колец жесткости (шпангоутов), при разработке теории и методов расчета прочности и устойчивости сложных конструкций, находящихся под действием внутреннего давления и температурных напряжений [34]. Адаптация этих методов расчета в настоящей статье к расчету прочности и устойчивости трубопроводов в сложных инженерно-геологических условиях имеет преимущество по сравнению с применением программных комплексов таких, как ANSYS, поскольку с помощью этих комплексов не удастся оценить воздействие внутреннего давления и температурных напряжений, ведущее к исчерпанию несущей способности трубопровода и потере его устойчивости.

3. Анализ результатов расчета. Анализ данных эксплуатации участка газопровода, на котором произошло всплытие двух ниток подводного участка газопровода “Бованенково- Ухта” в заливе Байдарацкая губа в Карском море, показал наличие в средней части размытой оголенной части [1–5]. На рис. 3 представлена фотография типичной размытой оголенной части подводного морского газопровода.

Для выявления возможного всплытия участка подводного газопровода были выполнены расчеты и анализ его напряженно-деформированного состояния при изменении грунтовых условий за счет частичного и полного обводнения и размыва грунта на отдельных частях рассчитываемого участка. В расчете выбран подводный участок



Рис. 3. Фотография размытой оголенной части подводного морского газопровода.

морского газопровода, который имеет длину 696 метров. В середине рассчитываемого участка имеется размытая оголенная часть.

В численном моделировании НДС рассматриваемый участок разбивается на 58 равных частей, каждая длиной 12 метров. Первый и последний, т.е. 58-й, части защемлены грунтом и находятся в горизонтальном положении. Каждый стержневой элемент при интегрировании системы дифференциальных уравнений (2.2)–(2.7) разбивается на 24 части. Таким образом в результате решения поставленной задачи имеем значения характеристик напряженно-деформированного состояния рассматриваемого здесь подводного участка газопровода в 1398 точках.

По длине рассчитываемого участка для каждой части условного разбиения в подземных частях задаются: h_{tr}, h_y — расстояния от верха засыпки до нижней образующей трубы и от верха засыпки до уровня воды соответственно; $E_{gr\,zas}$ — модуль деформации грунта засыпки; $\gamma_{gr\,zas}, \gamma_{yd\,zas}$ — объемный и удельный вес грунта (скелета) засыпки соответственно; ϕ_{gr}, c_{gr} — угол внутреннего трения, сцепление, соответственно, грунта; ε — коэффициент пористости грунта засыпки; $E_{gr\,osn}, \mu_{gr\,osn}$ — соответственно, модуль деформации и коэффициент Пуассона грунта основания; $c_{xo}, R_{gr\,osn}$ — обобщенный коэффициент касательного сопротивления и несущая способность грунта основания соответственно.

В первом варианте расчета рассмотрим случай, когда длина размытой оголенной части равна 72 м. На рис. 4 изображены эпюры прогибов газопровода при следующих значениях параметров эксплуатации: $p_0 = 11.5$ МПа, $\Delta t = 54.3^\circ\text{C}$ (линейная постановка задачи, рис. 4,а); $p_0 = 11.5$ МПа, $\Delta t = 54.3^\circ\text{C}$ (нелинейная постановка задачи, рис. 4,б); $p_0 = 11.5$ МПа, $\Delta t = 54.4^\circ\text{C}$ (рис. 4,с); $p_0 = 11.5$ МПа, $\Delta t = 61.0^\circ\text{C}$ (рис. 4,д). Для этого варианта расчета в подземных частях, прилегающих слева и справа к средней размытой оголенной части, в грунте засыпки не нарушен свод естественного равновесия, а грунт основания сохраняет несущую способность. Это состояние грунтов обозначим случаем а).

Здесь и далее на рисунках, где представлены эпюры прогиба, по оси ординат отложены значения прогиба обетонированной трубы в метрах, по оси абсцисс — длина рассчитываемого участка подводного участка газопровода в метрах.

Далее представлены значения физико-механических характеристик грунтов для одной из частей условного разбиения. Например, для левой крайней части с номером 1 они имеют следующие значения для грунта засыпки: $E_{gr\,zas} = 20$ МПа; $\gamma_{gr\,zas} = 17.0$ кН/м³; $\phi_{gr\,zas} = 22^\circ$; $c_{gr} = 0.003$; $\epsilon = 0.75$ и грунта основания: $E_{gr\,osn} = 20$ МПа; $\mu_{gr\,osn} = 0.22$; $\phi_{gr\,osn} = 22^\circ$; $c_{xo} = 0.03$ МПа/м; $R_{gr\,osn} = 0.05$ МПа.

Эти же характеристики для грунта засыпки и грунта основания в правой крайней части с номером 58 имеют аналогичные значения.

Необходимо отметить следующее. Задача о напряженно-деформированном состоянии обетонированной трубы, в которой учитывается воздействие внутреннего давления, вызывающего дополнительный изгиб трубы, получена в геометрически нелинейной постановке. Ее решение позволяет найти изменение формы изгиба трубы, т.е. переход из вогнутой формы в выпуклую, которое соответствует ее потере устойчивости.

Анализ исходных данных расчета и представленных эпюр прогиба (рис. 4) показывает следующее. При $p_0 = 11.5$ МПа, $\Delta t = 54.3^\circ\text{C}$ вес обетонированной трубы длиной в 1 метр равен 19.86 кН, в ней находится газ весом 1.71 кН. На размытой оголенной части на 1 метр трубы действует выталкивающая сила воды, равная 15.81 кН. Вертикальная составляющая нагрузки направлена вниз, ее значение равно минус 4.05 кН/м. В подземных участках газопровод прогибается равномерно вниз без изгиба. Анализ эпюр прогиба на рис. 4,а и 4,б показывает, что в подземных участках газопровод прогибается равномерно вниз без изгиба, а в средней размытой оголенной части труба прогибается вниз. Сравнение экстремальных значений прогиба в середине пролета, полученных из решения задач в линейной и в нелинейной постановках, указывает на то, что эта характеристика возрастает более в пять раз за счет воздействия внутреннего давления и температурных напряжений, вызывающего дополнительный изгиб трубы.

Сравнение эпюр прогибов на рис. 4 б,с,д показало следующее. При изменении температурного перепада Δt на 0.1°C , т.е. с $\Delta t = 54.3^\circ\text{C}$ до $\Delta t = 54.4^\circ\text{C}$, при неизменном значении внутреннего давления $p_0 = 11.5$ МПа, размытая оголенная часть начинает приподниматься вверх и при дальнейшем увеличении температурного перепада, например, при $\Delta t = 61.0^\circ\text{C}$, возможно всплытие газопровода.

Анализ данных эксплуатации участка газопровода, на котором произошло всплытие двух ниток подводного участка газопровода “Бованенково-Ухта” в заливе Байдаракская губа в Карском море, показал неравномерную осадку грунта основания на подземных частях, прилегающих слева и справа к размытой оголенной части, что объясняется воздействием волн прибойной зоны и температурных напряжений от прогретой трубы, которая находится в неровном рельефе морского дна [1–8]. По этой причине в подземной части, которая примыкает слева к средней размытой оголенной части, ослаблены грунт засыпки и грунт основания. В правой подземной части грунт засыпки и грунт основания не подвергаются этим воздействиям. Это состояние грунтов обозначим случаем б) состояния грунтов этих частей.

Далее, в качестве примера приведены значения физико-механических характеристик грунта засыпки: $E_{gr\,zas} = 5.0$ МПа; $\gamma_{gr\,zas} = 10.0$ кН/м³; $\phi_{gr\,zas} = 22^\circ$; $c_{gr} = 0.003$; $\epsilon = 0.25$ и грунта основания: $E_{gr\,osn} = 5.0$ МПа; $\mu_{gr\,osn} = 0.22$; $\phi_{gr\,osn} = 22^\circ$; $c_{xo} = 0.003$ МПа/м; $R_{gr\,osn} = 0.01$ МПа для крайней левой подземной части условного разбиения с номером 1.

На рис. 5 изображены эпюры прогибов газопровода при следующих значениях параметров эксплуатации: $p_0 = 11.5$ МПа, $\Delta t = 31.4^\circ\text{C}$ (рис. 5,а); $p_0 = 11.5$ МПа, $\Delta t = 31.5^\circ\text{C}$ (рис. 5,б).

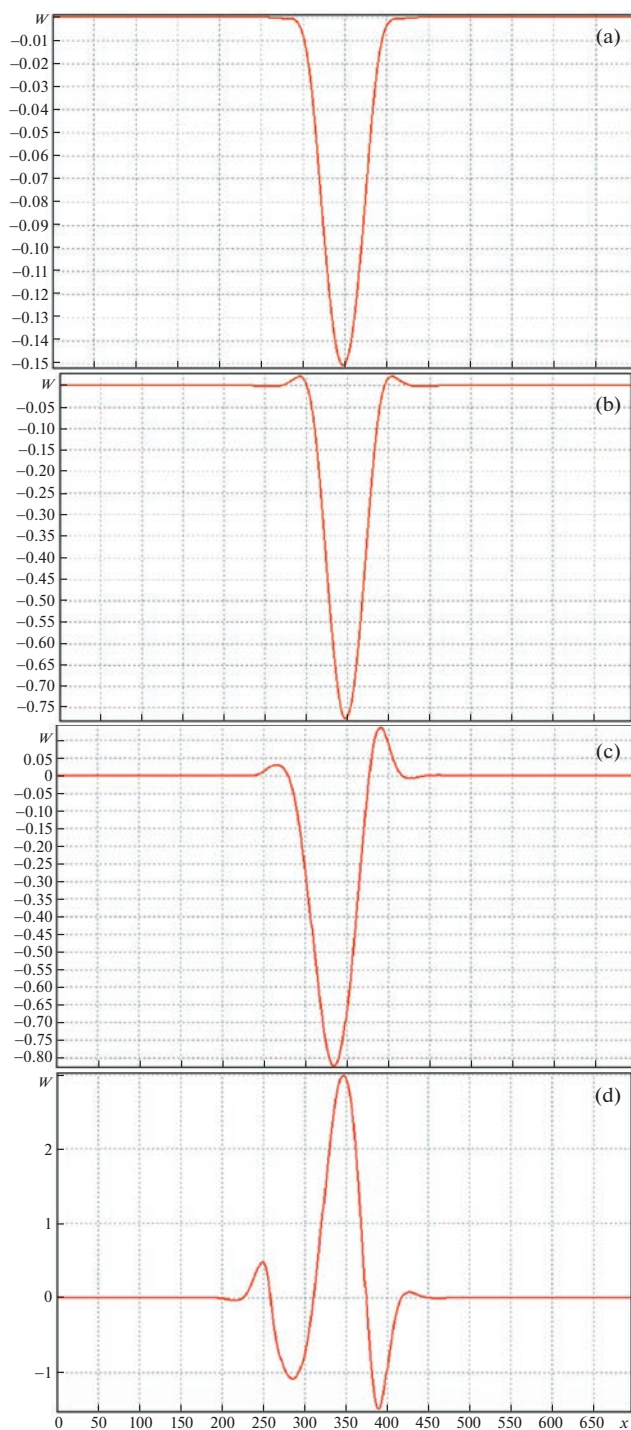


Рис. 4. Эпюры прогиба газопровода в подводном морском участке при равномерной осадке грунта под обестонированной трубой ($l_o = 72$ м).

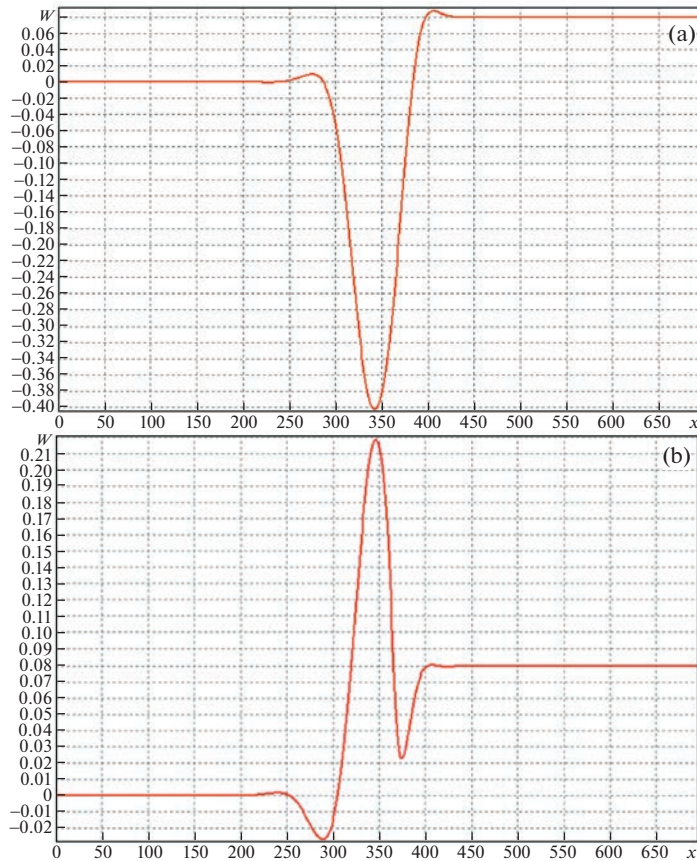


Рис. 5. Эпюра прогиба газопровода в подводном морском участке при неравномерной осадке грунта под обетонированной трубой ($l_0 = 72$ м).

Анализ результатов расчета и эпюр прогиба рис. 5 показывает следующее. При $p_0 = 11.5$ МПа, $\Delta t = 31.4^\circ\text{C}$ в подземной части газопровод прогибается равномерно вниз без изгиба, причем на левой ослабленной части стрела прогиба обетонированной трубы больше на минус 0.4 м, чем эта характеристика на правой половине, где грунт не ослаблен. В размытой оголенной части газопровод испытывает изгибные деформации, здесь стрела прогиба направлена вниз, ее экстремальное значение не превышает минус 0.5 м, а сам газопровод находится в устойчивом положении.

При увеличении температурного перепада, например, до значения $\Delta t = 31.5^\circ\text{C}$, происходит изменение формы изгиба газопровода: обетонированная труба начинает подниматься вверх, при дальнейшем возрастании температурного перепада Δt возможно ее всплытие С.

Для выявления длины размытой оголенной части на устойчивое положение рассматриваемого подводного участка газопровода и возможное его всплытие были выполнены расчеты его напряженно-деформированного состояния для случаев, когда длина размытой оголенной части составляла $l_0 = 96$ м, параметры эксплуатации принимали следующие значения: $p_0 = 11.5$ МПа, $\Delta t = 14.0^\circ\text{C}$; $p_0 = 11.5$ МПа, $\Delta t = 15.0^\circ\text{C}$; $p_0 = 6.5$ МПа,

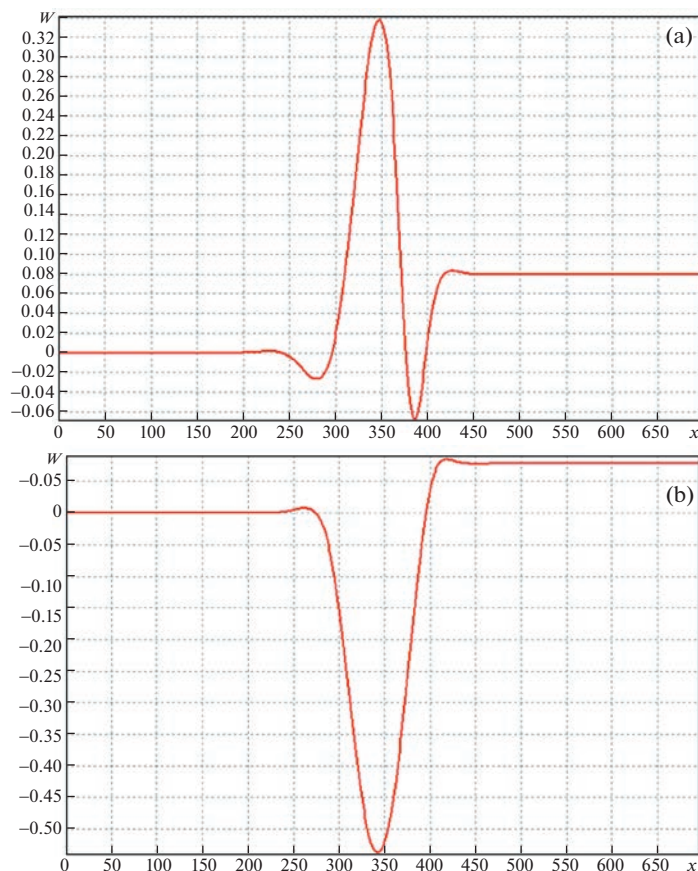


Рис. 6. Эпюры прогиба газопровода в подводном морском участке при изменении длины размытой оголенной части под обетонированной трубой ($l_o = 96$ м).

$\Delta t = 15.0^\circ\text{C}$. Некоторые результаты расчета представлены в виде эпюр прогиба на рис. 6а,б.

Анализ данных расчета и эпюр прогиба рис. 6 показал следующее. При $p_0 = 11.5$ МПа, $\Delta t = 14.0^\circ\text{C}$ размытая оголенная часть газопровода прогибается вниз. При увеличении температурного перепада, например, при $p_0 = 11.5$ МПа, $\Delta t = 15.0^\circ\text{C}$ (рис. 6,а), обетонированная труба начинает подниматься вверх, нарушается его устойчивое положение и при дальнейшем росте значения температурного перепада Δt возможно его всплытие. Таким образом, что и следовало ожидать, увеличение длины размытой оголенной части на 24 метра привело к уменьшению критического значения температурного перепада с $\Delta t = 31.5^\circ\text{C}$ до $\Delta t = 15.0^\circ\text{C}$.

Если снизить внутреннее давление в газопроводе со значения при $p_0 = 11.5$ МПа до $p_0 = 6.5$ МПа при неизменном значении температурного перепада $\Delta t = 15.0^\circ\text{C}$ (рис. 6,б), то газопровод возвращается в проектное положение.

3. Заключение. 1. Неожиданное всплытие двух из четырех ниток подводного морского перехода газопровода Северный поток-2 после их сооружения свидетельствует о

том, что при разработке проектов не были проведены достаточно полные исследования, посвященные вопросам их напряженно-деформированного состояния и обеспечения в проектное положение.

2. Выявлено влияние на всплытие обетонированной трубы на подводном участке морского газопровода параметров эксплуатации, особенностей его конструкции, разжижения грунтов основания и засыпки на подземных участках, прилегающих к размытой оголенной части и даны рекомендации по выявлению возможных причин его всплытия. Найдены критические значения параметров эксплуатации в зависимости от длины размытой оголенной части, жесткости грунта на прилегающих подземных частях. Расчетным путем установлена возможность всплытия газопровода на подводном морском участке при наличии в нем размытой оголенной части от воздействия температурных напряжений и внутреннего давления. Одним из способов возвращения газопровода в проектное положение является снижение внутреннего давления и температурного перепада.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаптева Т.И., Мансуров М.Н. Разработка методов, обеспечивающих работоспособность морских газопроводов в условиях арктического шельфа // Надежность и безопасность эксплуатации линейной части магистральных газонефтепроводов: Сборник научных трудов экспертно-инжиниринговой компании "ЭКСИКОМ" № 1. М.: РГУ нефти и газа, 2018. С. 27–30.
2. Лаптева Т.И. Повышение безопасной эксплуатации морских трубопроводов в сложных инженерно-геологических условиях арктического шельфа // Нефть. Газ. Новации. 2018. № 5. С. 63–65.
3. Лаптева Т.И. Эксплуатационная надежность морских трубопроводов в сложных инженерно-геологических условиях континентального шельфа России // Безопасность труда в промышленности. 2018. № 1. С. 30–34.
<https://doi.org/10.24000/0409-2961-2018-1-30-34>
4. Лаптева Т.И., Мансуров М.Н., Шабарчина М.В., Конаева Л.А. Морские трубопроводы в транзитной зоне арктического шельфа. Обеспечение // Oil & Gas J. Russ. 2018. № 9. С. 78–84.
5. Лаптева Т.И. Разработка методов обеспечения работоспособности морских нефтегазопроводов в сложных инженерно-геологических условиях арктического шельфа: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Москва: ООО Газпром ВНИИГАЗ, 2019. 47 с.
6. Bi K., Hao H. Using pipe-in-pipe systems for subsea pipeline vibration control // Eng. Struct. 2016. V. 109. P. 75–84.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.11.018>
7. Davaripour F., Quinton B.W.T., Pike K. Effect of damage progression on the plastic capacity of a subsea pipeline // Ocean Eng. 2021. V. 234. 109118.
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.109118>
8. Cheng A., Chen N.-Z. Corrosion fatigue crack growth modelling for subsea pipeline steels // Ocean Eng. 2017. V. 142. P. 10–19.
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2017.06.057>
9. Васильев Г.Г., Горяинов Ю.А., Саксаганский А.И. Достоинства и недостатки современных подходов к балластировке подводных переходов // НГС. 2012. № 1. С. 30–37.
10. Правила классификации и построение морских подводных трубопроводов. НД № 020301-005. СПб.: Российский морской регистр судоходства, 2017. 171 с.
11. Palmer A.C., King R.A. Subsea pipeline engineering. Oklahoma: PWC, 2004. 570 p.
12. Peek R., Yun H. Flotation to trigger lateral buckles in pipelines on a flat seabed // J. Eng. Mech. 2007. V. 4. P. 442–451.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2007\)133:4\(442\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2007)133:4(442))
13. Огородов С.А. Роль морских льдов в динамике рельефа береговой зоны. М.: МГУ, 2011. 173 с.
14. Шестов А.С., Марченко А.В., Огородов С.А. Математическое моделирование воздействия ледяных образований на дно Байдарской губы Карского // Труды ЦНИИ им. Акад. А.Н. Крылова. 2011. Вып. 5. № 63 (347). С. 105–118.

15. Ан Е.В., Рашидов Т.Р. Сейсמודинамика подземных трубопроводов, взаимодействующих с водонасыщенным мелкодисперсным грунтом // Изв. РАН МТТ. 2015. № 3. С. 89–104.
16. Hong Z., Liu R., Liu W., Yan S. Study on lateral buckling characteristics of a submarine pipeline with a single arch symmetric initial imperfection // Ocean Eng. 2015. V. 108. P. 21–32.
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2015.07.049>
17. Bi K., Hao H. Using pipe-in-pipe systems for subsea pipeline vibration control // Eng. Struct. 2016. V. 109. P. 75–84.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.11.018>
18. Ибраилов М.Ш. Связанные сейсмические колебания трубопровода в бесконечной упругой среде // Изв. РАН МТТ. 2016. № 1. С. 57–66.
19. Cheng A., Chen N.-Z. Corrosion fatigue crack growth modelling for subsea pipeline steels // Ocean Eng. 2017. V. 142. P. 10–19.
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2017.06.057>
20. Новиков А.И., Лантева Т.И., Конаева Л.А., Бохан А. Морские трубопроводы в транзитной зоне. Методы защиты от ледово-экзарационных воздействий // Offshore Rus. 2017. № 4 (18). С. 62–67.
21. Ильгамов М.А. Динамика трубопровода при действии внутреннего ударного давления // Изв. РАН МТТ. 2017. № 6. С. 83–96.
22. Акуленко Л.Д., Гавриков А.А., Нестеров С.В. Собственные колебания трубопровода на упругом основании, транспортирующего жидкость // Изв. РАН МТТ. 2018. № 1. С. 123–133.
23. Зарипов Р.Ф., Коробков Г.Е. Защита арктических трубопроводов // Деловой журнал Neft-egaz.RU. 2018. № 12 (84). С. 28–33. ID: 36467795.
24. Шакирьянов М.М. Пространственные нелинейные колебания трубопровода при действии внутреннего ударного давления // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 6. С. 76–84.
<https://doi.org/10.1134/S0572329919060114>
25. Wang Z., Tang Y. Study on symmetric buckling mode triggered by dual distributed buoyancy sections for subsea pipelines // Ocean Eng. 2020. V. 216. P. 108019.
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.108019>
26. Chen Y., Dong S. et al. Buckling analysis of subsea pipeline with idealized corrosion defects using homotopy analysis method // Ocean Eng. 2021. V. 234. P. 108865.
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.108865>
27. Ильгамов М.А. Модель всплытия подводного трубопровода // ДАН. Физика. Тех. науки. 2022. Т. 504. С. 12–16.
<https://doi.org/10.31857/S2686740021010053>
28. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 376 с.
29. Шаммазов А.М., Зарипов Р.М., Чичелов В.А., Коробков Г. Е. Расчет и обеспечение прочности трубопроводов в сложных инженерно-геологических условиях. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния и устойчивости. Т. 1. М.: Изд-во Интер, 2005. 706 с. ISBN: 5-98761-006-0.
30. Коробков Г.Е., Зарипов Р.М., Шаммазов И.А. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния и устойчивости трубопроводов и резервуаров в осложненных условиях эксплуатации. СПб.: Недра, 2009. 409 с. ISBN 978-5-94089-129-2.
31. Шаммазов А.М., Зарипов Р.М., Чичелов В.А. и др. Расчет и обеспечение прочности трубопроводов в сложных инженерно-геологических условиях. Т. 2. Оценка и обеспечение прочности трубопроводов. М.: Изд-во “Интер”, 2006. 564 с.
32. Айнбиндер А.Б. Камерштейн А.Г. Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость. Справочное пособие. М.: Недра, 1982. 341 с.
33. Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
34. Маячков В.И., Мальцев В.П. Методы и алгоритмы расчета пространственных конструкций на ЭВМ ЕС. М.: Машиностроение, 1984. 280 с.

УДК 539.3

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПРОДОЛЬНО ДВИЖУЩЕГОСЯ СЛОИСТОГО ПОЛОТНА НА ОСНОВЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ПОДХОДА

© 2023 г. Н. В. Баничук^a, С. Ю. Иванова^{a,*}, В. С. Афанасьев^a

^aИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail syuivanova@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.02.2023 г.

После доработки 26.02.2023 г.

Принята к публикации 27.02.2023 г.

Рассматривается продольное движение с постоянной скоростью тонкого неразрезного упругого полотна через систему роликовых опор под действием заданного постоянного натяжения. Рассматривается один пролет между соседними опорами. Полотно моделируется тонкой слоистой пластиной, шарнирно опертой на двух противоположных краях, оставшиеся две стороны пластины свободны. Предполагается, что пластина в процессе продольного движения может совершать малые поперечные колебания. Слои пластины из заданного набора материалов располагаются симметрично срединной поверхности и плотно прилегают друг к другу. Суммарная толщина всех слоев задана и мала по сравнению с длиной пролета и шириной пластины. Выводятся аналитические выражения для эффективных характеристик пластины, в результате чего исходная составная структура может рассматриваться как изотропная однородная пластина, для которой применяются известные формулы для вычисления критической скорости. В рамках многокритериальной оптимизации по Парето с помощью численного метода нелокальной оптимизации определяется порядок расположения слоев и их толщина, чтобы удовлетворить ряду выбранных критериев: максимуму критической скорости дивергенции, максимуму изгибной жесткости и минимуму погонной массы слоистого полотна. Приводится пример найденной оптимальной структуры пластины и построенный Парето-фронт для заданного набора определяющих параметров задачи.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, слоистое полотно, движущиеся материалы, Парето-фронт

DOI: 10.31857/S0572329923600093, EDN: QXKQAA

1. Введение. Движущиеся упругие струны, балки, мембраны и пластины – наиболее популярные модели в исследовании движущихся материалов. В научной литературе представлено большое число работ, где используются эти модели, приводящие к решению дифференциальных уравнений с частными производными второго и четвертого порядков. Подробные обзоры работ по движущимся материалам содержатся, например, в монографиях [1–3]. Ряд исследований был посвящен вопросам свободных колебаний, включая природу распространения волн в движущейся среде и эффекты аксиального движения спектра частот и собственных значений. Было показано, что собственная частота каждой моды уменьшается при увеличении транспортной скорости и что движущаяся струна, балка, панель и пластина будут испытывать неустойчивость дивергенции при достаточно высокой скорости (см., например, [4, 5]). Задача повышения критического значения транспортной скорости, при которой наступает

явление статической неустойчивости (дивергенция) полотна (панели, пластины) является актуальным для многих технологических процессов, связанных с продольным движением материалов (производство бумаги и пленок, вращение дисков и стержней, движение транспортерных лент, приводных ремней и т.п.). В результате проведенных теоретических исследований ранее были аналитически получены зависимости критических скоростей от ряда определяющих параметров [1, 2, 6, 7]. Одним из возможных способов увеличить критическую скорость является изменение внутренней структуры самого полотна. Важную роль здесь могут играть слоистые конструкции и их оптимизация [8].

На практике бывает необходимо удовлетворить при проектировании конструкций не одному, а нескольким критериям качества. Вопросам многокритериальной и многоцелевой оптимизации в механике, основанной на подходах Парето и Нэша, также посвящено большое количество исследований. Первые работы, посвященные применению многоцелевой оптимизации в механике, опубликованы Стадлером [10, 11], Эшенауэром [12, 13] и др. Отметим также обзор Стадлера [14] по многокритериальной оптимизации в механике, коллективную монографию под редакцией Стадлера [15] и монографию Миттенена [16], посвященную нелинейным проблемам многоцелевой оптимизации. Многокритериальные подходы к проблемам оптимального проектирования конструкций обсуждались в [17, 18]. Вопросы многоцелевой оптимизации конструкций рассматривались также применительно к задачам контактного взаимодействия и высокоскоростного проникания тел в деформируемые среды в монографии [19].

В данной работе в рамках многокритериальной оптимизации по Парето с помощью численного метода нелокальной оптимизации (генетический алгоритм [20–22]) определяется порядок расположения слоев движущегося полотна (слоистой пластины) и их толщина, чтобы удовлетворить ряду выбранных критериев: максимуму критической скорости дивергенции, максимуму изгибной жесткости и минимуму погонной массы слоистого полотна.

2. Основные соотношения механической модели. Рассматривается продольно движущееся с постоянной транспортной скоростью V_0 упругое неразрезное слоистое полотно, совершающее поперечные колебания малой амплитуды и находящееся под действием заданного продольного натяжения. Полотно движется через систему роликовых опор (валков), и в Эйлеровой системе координат рассматривается один пролет между двумя соседними опорами. Полотно моделируется упругой слоистой пластиной, движущейся с постоянной продольной скоростью в направлении оси x , шарнирно опертой на валках в начале и конце пролета. Будем считать, что пластина эффективно изотропна и однородна и занимает в прямоугольной системе координат x, y, z область $\Omega = \{(x, y, z) : 0 < x < l, -b < y < b, -H/2 < z < H/2\}$. При этом пластина шарнирно оперта при $x = 0$ и $x = l$ и имеет свободные края при $y = b$ и $y = -b$. Длина пролета l , ширина пластины $2b$, полная толщина пластины H и ее скорость V_0 являются заданными постоянными величинами.

Динамическое поведение движущегося однородного изотропного полотна (пластины) в Эйлеровой системе координат описывается следующим уравнением в частных производных и краевыми условиями (Δ^2 – бигармонический оператор) [1, 2]:

$$m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D \Delta^2 w = 0 \quad (2.1)$$

$$(w)_{x=0,l} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=0,l} = 0, \quad -b \leq y \leq b \quad (2.2)$$

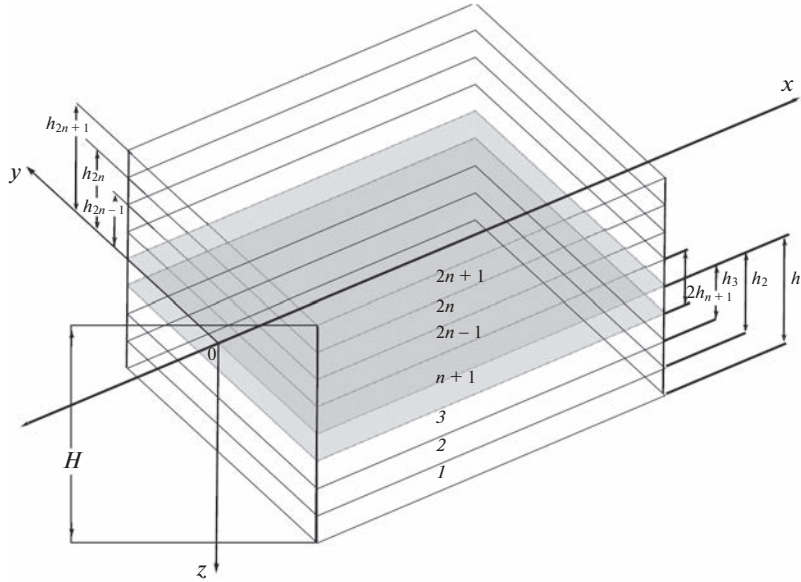


Рис. 1. Слоистая пластина.

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=\pm b} = \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)_{y=\pm b} = 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.3)$$

Здесь $w = w(x, y, t)$ — поперечные перемещения полотна, m — масса на единицу площади, D — изгибная жесткость, ν — коэффициент Пуассона, а T_0 — постоянное механическое натяжение, приложенное к концам полотна при $x = 0, l$. Для рассматриваемого случая слоистого эффективно однородного и изотропного полотна можно воспользоваться соотношениями (2.1)–(2.3), если положить в них $m = m^{ef}$, $D = D^{ef}$, $\nu = \nu^{ef}$, где m^{ef} — эффективная масса пластины на единицу площади, D^{ef} — эффективная изгибная жесткость пластины, ν^{ef} — эффективный коэффициент Пуассона.

Для определения эффективных характеристик будем считать, что пластина симметрично составлена относительно срединной плоскости из нечетного числа $2n + 1$ упругих слоев, которые характеризуются массой на единицу площади m_i , модулем Юнга E_i , коэффициентом Пуассона ν_i и расстоянием h_i от срединной плоскости. При этом внешние слои имеют номера 1 и $2n + 1$ (см. рис. 1).

Учитывая симметричное расположение слоев относительно срединной плоскости ($z = 0$) и тот факт, что они плотно прилегают друг к другу, получим выражения для эффективной изгибной жесткости пластины D^{ef} , эффективного коэффициента Пуассона ν^{ef} и эффективной массы пластины m^{ef} на единицу площади. Для этого мы применим формулы для напряжений и деформаций и используем выражение для изгибающего момента

$$\int_{-H/2}^{H/2} \sigma_x z dz = \left(\int_{-H/2}^{H/2} \frac{z^2 E(z) dz}{1 - (\nu(z))^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = D^{ef} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Принимая во внимание симметрию укладки слоев структуры полотна, т.е.

$$E(z) = E(-z), \quad v(z) = v(-z)$$

найдем выражение для эффективной изгибной жесткости в виде

$$D^{ef} = 2 \int_0^{H/2} \frac{z^2 E(z)}{1 - (v(z))^2} dz$$

Используя механические и геометрические характеристики слоев полотна E_i , v_i , h_i , получим следующее выражение:

$$D^{ef} = \frac{2}{3} \left[\frac{E_{n+1} h_{n+1}^3}{1 - v_{n+1}^2} + \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{1 - v_i^2} (h_i^3 - h_{i+1}^3) \right] \quad (2.4)$$

Аналогично выводится формула для эффективного коэффициента Пуассона неоднородного изотропного слоистого полотна. Имеем

$$v^{ef} = \frac{2}{D^{ef}} \int_0^{H/2} \frac{z^2 v(z) E(z)}{1 - (v(z))^2} dz = \frac{2}{D^{ef}} \left[\frac{v_{n+1} E_{n+1} h_{n+1}^3}{1 - v_{n+1}^2} + \sum_{i=1}^n \frac{E_i v_i}{1 - v_i^2} (h_i^3 - h_{i+1}^3) \right] \quad (2.5)$$

Формула для эффективной массы m^{ef} на единицу площади слоистого полотна получается прямым суммированием соответствующих масс $2n + 1$ слоев. Получим

$$m^{ef} = m_{n+1} + 2 \sum_{i=1}^n m_i \quad (2.6)$$

Одним из важнейших параметров, характеризующих механическое поведение рассматриваемой движущейся системы, является критическая скорость статической формы потери устойчивости пластины (критическая скорость дивергенции). В стационарном случае, когда все производные по времени обращаются в нуль, приходим к краевой задаче на собственные значения для однородной и изотропной пластины с уравнением

$$(mV_0^2 - T_0) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D \Delta^2 w = 0 \quad (2.7)$$

и граничными условиями (2.2), (2.3). В случае однородного изотропного движущегося полотна получено в явном виде выражение для критической скорости дивергенции V_0^{div} (статическая неустойчивость) [1, 2]. Данное выражение может быть также записано и для рассматриваемого случая слоистого эффективно однородного и изотропного полотна. Имеем

$$\left(V_0^{div} \right)^2 = \frac{T_0}{m^{ef}} + \frac{\gamma_*^2 \pi^2 D^{ef}}{m^{ef} l^2} \quad (2.8)$$

где γ_* является корнем следующего трансцендентного уравнения [1]:

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma, \mu) - \Psi(\gamma, v^{ef}) &= 0 \\ \Phi &\equiv \tanh\left(\frac{\sqrt{1-\gamma}}{\mu}\right) \coth\left(\frac{\sqrt{1+\gamma}}{\mu}\right) \\ \Psi &\equiv \frac{\sqrt{1+\gamma}(\gamma + v^{ef} - 1)^2}{\sqrt{1-\gamma}(\gamma - v^{ef} + 1)^2}, \quad \mu = \frac{l}{\pi b} \end{aligned}$$

Таким образом, для любого слоистого полотна с симметричной внутренней структурой и заданными параметрами m_i , E_i , v_i ($i = 1, 2, \dots, n+1$) мы можем определить величины m^{ef} , D^{ef} , v^{ef} и, следовательно, определить значение критической скорости дивергенции V_0^{div} , используя выражение (2.8).

3. Многокритериальная задача оптимизации. Имея возможность формировать внутреннюю структуру полотна, то есть менять наполнение и расположение слоев, мы можем влиять на эффективные характеристики и основные свойства системы, удовлетворяя выбранным критериям оптимальности. Для этого удобно использовать натуральную параметризацию. Будем считать, что число r допустимых материалов для изготовления слоев полотна задано. Учитывая, что каждый из данных материалов может быть пронумерован с помощью одного параметра, применим натуральную параметризацию, используя скалярную переменную k , которая может принимать значения $k_1, k_2, \dots, k_s, \dots, k_r$, то есть $k \in \{k_1, k_2, \dots, k_s, \dots, k_r\}$. Так как слои характеризуются модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона v , массой на единицу площади m , то $E_s = E(k_s)$, $v_s = v(k_s)$, $m_s = m(k_s)$. Таким образом, рассматриваемое слоистое полотно состоит из дискретного набора слоев (материалов), распределенных вдоль оси z и характеризуется набором параметров $\{E_s, v_s, m_s\}$, $s = 1, 2, \dots, r$. Распределения параметров $(E(z), v(z), m(z))$ по толщине полотна задаются кусочно-постоянными функциями, определенными на отрезке $0 \leq z \leq H/2$. Для каждой точки $z \in [0, H/2]$ эти функции принимают значения из заданного конечного набора, т.е. $E(z) \in \{E_s\}$, $v(z) \in \{v_s\}$, $m(z) \in \{m_s\}$, $s = 1, 2, \dots, r$.

Применим описанную выше параметризацию, используя кусочно-постоянную функцию $k = k(z)$ ($z \in [0, H/2]$), принимающую значения $k = k_s = s$ из заданного набора, т.е. $k \in \{k_s = s\}$. Справедливы следующие соотношения:

$$E_s = E(k(z))_{k=k_s=s}, \quad v_s = v(k(z))_{k=k_s=s}, \quad m_s = m(k(z))_{k=k_s=s} \quad (3.1)$$

Будем считать функцию $k = k(z)$ искомой переменной проектирования, определяющей структуру рассматриваемого слоистого полотна. В качестве критериев оптимизации (целевых функционалов) выберем критическую скорость дивергенции полотна, обратную полную эффективную массу и эффективную изгибную жесткость. Определим векторный функционал $J = J(k(z))$ в виде

$$J = J(k(z)) = \begin{Bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

$$J_1 = V_0^{div}(k(z)), \quad J_2 = \frac{1}{m^{ef}(k(z))}, \quad J_3 = D^{ef}(k(z))$$

и сформулируем следующую задачу векторной (многокритериальной) оптимизации:

$$(J)_* = \max_k J(k(z)) \quad (3.3)$$

$$k(z) \in \{k_s\} : z_{i-1} < z < z_i$$

$$i = 1, 2, \dots, n+1, \quad s = 1, 2, \dots, r, \quad z_1 = H/2, \quad z_{n+1} = 0$$

Максимум в (3.3) понимается в смысле Парето [17, 18]. Это означает, что выражение

$$k_* = \arg \max_k J(k) \quad (3.4)$$

является оптимальным решением сформулированной задачи с векторным функционалом, если не существует другой переменной проектирования k_{**} , удовлетворяющей условию $k_{**} \in \{k_s = s\}$, такой что

$$J_i(k_{**}) \geq J_i(k_*), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

и, по крайней мере, для одной из компонент (j -й) векторного функционала выполняется строгое неравенство

$$J_j(k_{**}) > J_j(k_*) \quad (3.6)$$

Для решения многокритериальной задачи оптимизации (3.3) применим метод целевого взвешивания. Построим функционал взвешивания J_C (функционал предпочтений) в виде суммы

$$J_C = \sum_{i=1}^3 C_i \hat{J}_i \quad (3.7)$$

с весовыми коэффициентами C_i , удовлетворяющими следующим условиям:

$$C_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \sum_{i=1}^3 C_i = 1 \quad (3.8)$$

Под $\hat{J}_i$ в (3.7) понимаются безразмерные величины $\hat{J}_i = J_i/J_i^0$, $i = 1, 2, 3$, где J_i^0 — некоторые характерные величины скорости, обратной массы и изгибной жесткости (“крышка” у рассматриваемых величин в соотношении (3.7) в дальнейшем опускается).

В соответствии с применяемым методом целевого взвешивания решение многоцелевой задачи оптимизации (3.3) и отыскание множества оптимальных в смысле Парето слоистых структур полотна сводится к решению следующей задачи определения максимума скалярного функционала

$$J_C^* = J_C(k_*) = \max_{k \in \{k_s=s\}} J_C(k) \quad (3.9)$$

при ограничениях (3.8), наложенных на весовые коэффициенты. Таким образом, для любого заданного набора весовых коэффициентов, удовлетворяющих условию (3.8), будет определена оптимальная структура слоистой пластины (полотна), обладающей максимальной критической скоростью дивергенции и при этом максимальной изгибной жесткостью и минимальной погонной массой.

4. Численное решение на основе генетического алгоритма. Решение задачи максимизации функционала J_C (3.9), (3.8) для различных значений параметров задачи l , b , H , n , r , T_0 и характеристик используемых материалов выполнялось численно с помощью генетического алгоритма [20, 8, 19]. Данный метод глобальной оптимизации был выбран из-за большого числа параметров, чтобы избежать сложностей, обусловленных возможным появлением в рассматриваемой задаче локальных экстремумов.

Согласно принятой для данного метода терминологии каждое допустимое распределение материалов по слоям принимается в качестве “индивидуума”, принадлежащего некоторой популяции (поколению), и характеризуется набором значений $k(j, i)$, где j — номер “индивидуума” в поколении, а i — номер слоя. Число “индивидуумов” N в популяции задается четным и является неизменным в процессе дальнейшего обновления поколений. Инициализация алгоритма заключается в генерировании начального поколения из произвольно сформированных допустимых распределений $k(j, i)$. Каждому “индивидууму” соответствует некоторое значение максимизируемого функционала J_C . Далее следует итерационный процесс последовательного формирования

Таблица 1. Характеристики материалов

Материал, s	E , (кг/см ²)	ν	m , (г/м ²)
1	14.0×10^6	0.460	450
2	1.7×10^6	0.038	400
3	9.36×10^6	0.017	410

новых улучшенных поколений “индивидуумов”. В основе этого процесса лежит формирование для каждого поколения $N/2$ родительских пар “индивидуумов” и получения от них с помощью операции скрещивания (crossover) $N/2$ пар отпрысков, которые образуют следующее поколение. При этом задействуются как вероятностные, так и детерминированные механизмы отбора: каждый родитель выбирается из сформированной случайным образом подгруппы N^T “индивидуумов” так, чтобы соответствующее ему значение J_C было максимальным. Операция скрещивания для каждой сформированной пары выполняется с заданной вероятностью p_{co} . В результате отпрыски либо полностью копируют родителей, либо происходит частичный обмен их свойств в результате скрещивания в произвольно выбранной точке (i). Для сформированного нового поколения “индивидуумов” применяется операция мутации. С очень малым заданным значением вероятности p_m осуществляется изменение “индивидуума” в произвольно выбранной точке (i). Операция мутации важна для преодоления возможного попадания в локальный максимум. Для окончательно сформированного поколения устанавливается наилучший “индивидуум”, то есть распределение $k_*(j, i)$ материалов по слоям полотна, в смысле выполнения условий (3.9), (3.8). Это наилучшее решение запоминается, и алгоритм переходит к выполнению следующей итерации по построению нового улучшенного поколения. Построенное новое оптимальное решение сравнивается с решением, зафиксированным на предыдущей итерации, и сохраняется наилучшее из них. Выполнение алгоритма осуществляется с заданным количеством итераций или до выполнения некоторого условия сходимости. Как правило, выполняется несколько повторных инициализаций для тех же исходных данных.

Приведем пример решения задачи оптимизации структуры полотна для следующих значений параметров задачи: $l = 1.2$ м, $b = 0.47$ м, $T_0 = 16$ н/м, $H = 10^{-3}$ м, $n = 10$, $r = 3$. Характеристики материалов, рассматриваемых в качестве допустимых для оптимального проектирования неоднородного изотропного слоистого полотна, представлены в табл. 1.

Зависимость величины γ_* от эффективного коэффициента Пуассона ν^{ef} для рассматриваемых параметров задачи представлена на рис. 2.

Вычислительный процесс выполнялся для 500 поколений (формируемых последовательно популяций) при следующих параметрах алгоритма: $n = 10$, $N = 10$, $N^T = 4$, $p_{co} = 0.5$, $p_m = 0.05$ для 10 инициализаций.

Для простоты и большей наглядности приведем пример, когда векторный функционал J имеет только две компоненты J_1 и J_2 . В выражениях (3.7), (3.8) следует положить $C_3 = 0$. На рис. 3 представлен Парето-фронт в осях J_1 , J_2 . Каждая точка фронта соответствует некоторому значению весового коэффициента C_1 (из условия (3.8) следует, что $C_2 = 1 - C_1$) и соответствующему максимальному значению J_C^* .

Точки с номерами 1–8 соответствуют значениям коэффициента $C_1 = 1; 0.3, 0.2; 0.15; 0.12; 0.1; 0.008$ и $C_1 = 0$ соответственно.

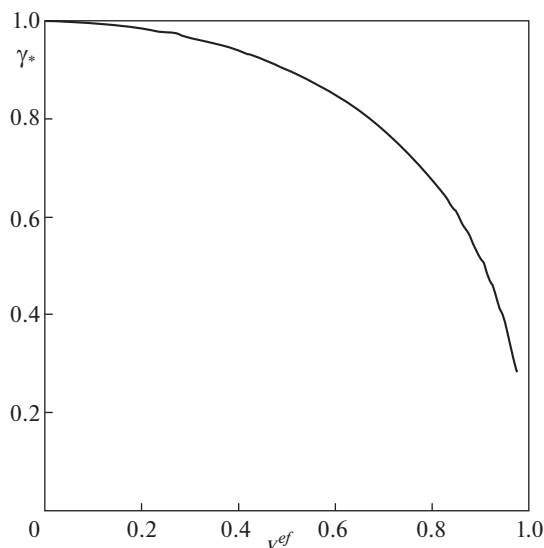


Рис. 2. Зависимость параметра γ_* от эффективного коэффициента Пуассона ν^{ef} .

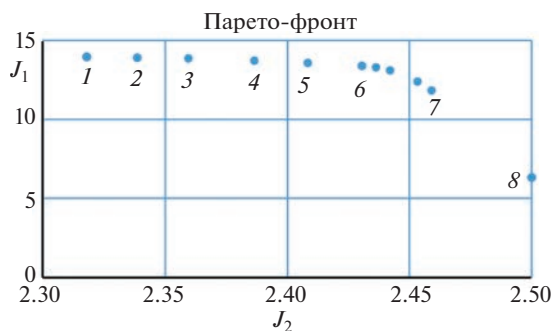


Рис. 3. Фронт Парето.

На рис. 4 представлена зависимость максимального значения J_C^* оптимизируемого функционала от коэффициента C_1 .

Для случая $C_1 = 1$ на рис. 5 показано оптимальное распределение материалов по слоям полотна: материалы $s = 1, 2, 3$ обозначены белым, розовым и голубым цветом соответственно. Видно, что для выполнения критерия (3.9) эффективно размещать более жесткий материал на верхнем и нижнем слоях полотна, а мягкие материалы – ближе к срединной поверхности.

Сходимость генетического алгоритма для данного случая представлена на рис. 6.

5. Некоторые выводы и замечания. В работе рассмотрена многокритериальная постановка задачи оптимизации слоистой структуры движущегося упругого полотна, моделируемого тонкой слоистой пластиной. С помощью подхода, основанного на построении Парето-оптимальных решений для задачи с несколькими целевыми функ-

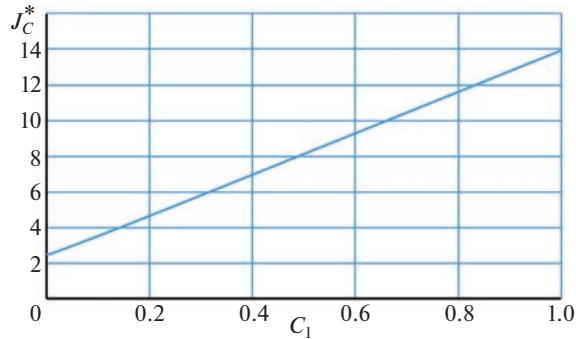


Рис. 4. Зависимость максимального значения J_C^* оптимизируемого функционала от весового коэффициента C_1 .

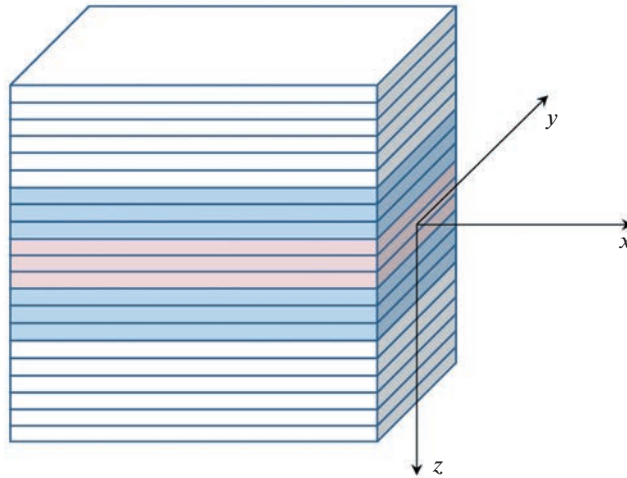


Рис. 5. Оптимальное распределение материалов по слоям полотна при $C_1 = 1$.

ционалами и применении численного метода нелокальной оптимизации (генетического алгоритма), найдены оптимальные распределения материалов из заданного набора по слоям полотна. В качестве критериев оптимизации были выбраны технологически важные параметры движущегося полотна: критическая скорость дивергенции (статической формы потери устойчивости), погонная масса (или обратная к ней величина) и изгибная жесткость. Многокритериальная оптимизация по Парето позволяет учитывать выбранные критерии с различными весовыми коэффициентами в зависимости от их значимости в тех или иных условиях производства или эксплуатации полотна. Для выполнения оптимизационного алгоритма были аналитически определены эффективные характеристики слоистого материала, которые позволили рассматривать его как эффективно изотропный и однородный и применить для него полученные ранее аналитические выражения для критической скорости дивергенции движущейся упругой пластины. Приведен пример построения оптимального реше-

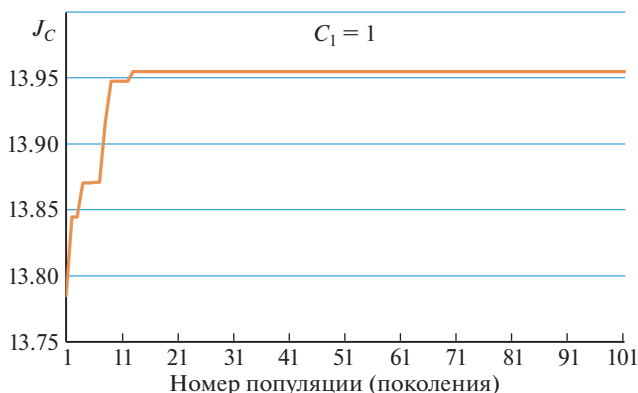


Рис. 6. Сходимость генетического алгоритма при $C_1 = 1$.

ния, на графиках представлены результаты расчетов и данные о сходимости генетического алгоритма. Отметим, что найденные оптимальные распределения материалов по слоям полотна могут служить ответом сразу на несколько вопросов конструктора: из скольких слоев надо сделать оптимальную конструкцию, какой материал взять для каждого слоя, какой толщины будет каждый слой и каков будет порядок укладки этих слоев. Отметим, что описанный многокритериальный подход к решению задачи оптимизации слоистой структуры движущегося полотна может быть применен и в случае тепловых воздействий на него. При этом в оптимизационном процессе будут также учитываться термоупругие свойства выбранных материалов.

Работа выполнена по теме госзадания (номер госрегистрации 123021700050-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmäki P., Saksa T., Tuovinen T. *Mechanics of Moving Materials*. Cham: Springer, 2014. 253 p.
2. Banichuk N., Barsuk A., Jeronen J., Tuovinen T., Neittaanmäki P. *Stability of axially moving materials*. Cham, Switzerland: Springer, 2020. 642 p.
3. Marynowski K. *Dynamics of the Axially Moving Orthotropic Web*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics V. 38. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 154 p.
4. Archibald F.R., Emslie A.G. The vibration of a string having a uniform motion along its length // *ASME J. Appl. Mech.* 1958. V. 25. № 3. P. 347–348. <https://doi.org/10.1115/1.4011824>
5. Simpson A. Transverse modes and frequencies of beams translating between fixed end supports // *J. Mech. Eng. Sci.* 1973. V. 15. № 3. P. 159–164. https://doi.org/10.1243/JMES_JOUR_1973_015_031_02
6. Banichuk N.V., Ivanova S.Y. Mathematical modelling of the axially moving panels subjected to thermomechanical actions // *Mech. Based Des. Struct. Machin.* 2018. V. 46. № 1. P. 101–109. <https://doi.org/10.1080/15397734.2017.1289472>
7. Баничук Н.В., Афанасьев В.С., Иванова С.Ю. О статической бифуркации движущейся нагретой панели, обтекаемой идеальной жидкостью // *Прикл. мат. мех.* 2020. Т. 84. № 2. С. 234–241.
8. Banichuk N., Ivanova S., Sinitsin A., Afanas'ev V. Optimization of axially moving layered web // *EngOpt 2018 Proceedings of the 6th International Conference on Engineering Optimization*. Springer, 2019. P. 657–665.

9. *Stadler W.* Preference optimality and application of Pareto-optimality // Multicriteria decision making. CISM Courses and lectures / Ed. by *Marzollo, Leitmann*. Berlin: Springer, 1975. P. 125–225.
10. *Stadler W.* Natural structural shapes (the static case) // Quarterly J. Mech. Appl. Math. 1978. V. 31. P. 169–217.
11. *Stadler W.* Stability of the natural shapes of sinusoidally loaded uniform shallow arches // Quarterly J. Mech. Appl. Math. 1983. V. 34. P. 1–22.
12. *Eschenauer H.A.* Numerical and experimental investigations on structural optimization of engineering design. Siegen, Bonn-Fries: Druckerei und Verlag, 1986. 309 p.
13. *Eschenauer H.A.* Multicriteria optimization – Fundamental and motivation // Multicriteria design optimization / Ed. by: *H. Eschenauer, J. Koski, A. Osyczka*. Berlin: Springer-Verlag, 1990. P. 1–32.
14. *Stadler W.* Multicriteria optimization in mechanics (A survey) // Appl. Mech. Rev. 1984. V. 37. № 3. P. 227–286.
15. Multicriteria Optimization in Engineering and in the Sciences / Ed. by *W. Stadler* // Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering V. 37 / Ed. by *A. Miele*. N.Y.: Plenum Press, 1988. 406 p.
16. *Miettinen K.M.* Nonlinear Multiobjective Optimization. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999. 298 p.
17. *Banichuk N.V.* Problems and Methods of Optimal Structural Design. New York: Plenum Press, 1983.
18. *Sinitsin A., Ivanova S., Makeev E., Banichuk N.* Some problems of multipurpose optimization for deformed bodies and structures // Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures. Computational methods and applied sciences. Vol. 40. Springer Netherlands, 2016. P. 313–328.
19. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю.* Оптимизация: контактные задачи и высокоскоростное проникание. М.: Физматлит, 2016. 176 с.
20. *Goldberg D.E.* Genetic Algorithm in Search, Optimization and Machine Learning. Westley Publ. Comp., 1989. 372 p.
21. *Periaux J., Gonzalez F., Lee D.S.C.* Evolutionary optimization and game strategies for advanced multi-disciplinary design. Intelligent system, Control and Automation: Science and Engineering. V. 75. Dordrecht, Heidelberg: Springer, 2015.
<https://doi.org/10.1007/978-94-017-9520-3>
22. *Periaux J., Greiner D.* Efficient parallel nash genetic algorithm for solving inverse problems in structural engineering // Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures. Computational methods and applied sciences. V. 40. Springer Netherlands, 2016. P. 205–228.

**К 110-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ
А.Ю. ИШЛИНСКОГО**

DOI: 10.31857/S0572329923600159, EDN: QXQQNY

Александр Юльевич Ишлинский — выдающийся ученый-механик XX столетия, автор фундаментальных исследований в области механики деформируемых сред, динамики твердых тел, гироскопии и инерциальной навигации, создавший новые направления в разделах науки, которым он посвятил свой талант ученого, инженера, замечательного педагога. А.Ю. Ишлинский родился 6 августа 1913 года в Москве.

Научное творчество Александра Юльевича Ишлинского характеризует широта и разнообразие интересов — от вопросов, имеющих фундаментальное значение для теории, до конкретных прикладных задач. В механике деформируемого твердого тела — это вопросы поведения упругих, пластических, вязкопластических, наследственных сред, вопросы статического и динамического разрушения тел и конструкций и многие другие.

А.Ю. Ишлинскому принадлежат более 300 научных публикаций, им написаны фундаментальные монографии: “Механика специальных гироскопических систем” (1952), “Механика гироскопических систем” (1963), “Инерциальное управление баллистическими ракетами” (1968), “Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация” (1976), “Механика относительного движения и силы инерции” (1981), “Классическая механика и силы инерции” (1987), “Вращение твёрдого тела на струне и смежные задачи” (1991, совместно с В.А. Стороженко и М.Е. Темченко), “Математическая теория пластичности” (2001, совместно с Д.Д. Ивлевым), в которых изложены сложнейшие вопросы многих разделов механики.

Александру Юльевичу были присущи острота мысли, компетентность, корректность, доброжелательность. Он обладал исключительно мощным интеллектом, поразительной научной интуицией. Его суждения были глубоко осмыслены, оценка событий и людей была трезвой и взвешенной. Он сам определил свое место и отношение к жизни: ученый не политик, он должен заниматься своими делами и на окружающий мир влиять, в основном, с помощью открытых им законов природы. Тогда меньше претензий к обществу, больше — к самому себе. Он оставил пример исключительно высокой требовательности к себе.

Александр Юльевич Ишлинский был удостоен Ленинской премии (1960 г.), Государственной премии СССР (1981 г.), Государственной премии РФ (1996 г.), премии им. Н.Н. Острякова (1975), премии им. А.Н. Динника (1981), Золотой медали им. В.Г. Шухова (1992), многими другими именными премиями и медалями различных международных академий и научных обществ.

С 1965 года А. Ю. Ишлинский — директор вновь созданного Института проблем механики АН СССР (позднее — ИПМех РАН). Уйдя в 1990 году с поста директора, он остался почётным директором института (ныне носящего его имя), а руководство институтом перешло к его ученику — Д. М. Климову.

А.Ю. Ишлинский вел громадную издательскую работу. Много лет был главным редактором журнала “Известия РАН. Механика твердого тела”.

Александр Юльевич оставил неизгладимый след в науке, его достижения вошли в золотой фонд механики.

К 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Д.М. КЛИМОВА

DOI: 10.31857/S0572329923600160, EDN: QXUOLG

Академику Дмитрию Михайловичу Климову 13 июля 2023 года исполняется 90 лет. Д.М. Климов – специалист в области теоретической и прикладной механики, механики деформируемого твердого тела. Основные научные труды посвящены механике гироскопических и навигационных систем, механике деформируемого твердого тела, теории нефтяных и газовых скважин.

В научном багаже юбиляра более двухсот научных работ с решениями сложнейших задач современного приборостроения, десять монографий, посвященных актуальнейшим проблемам современной механики. Д.М. Климов работал в НИИ парашютных систем, затем в Институте прикладной механики, принимая участие в испытаниях ракетной техники на Байконуре. За плечами пятнадцатилетний опыт директора академического института – Института проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН. Опыт активной научно-организационной деятельности на посту академика-секретаря и заместителя академика-секретаря ОЭММПУ РАН, председателя Объединенного научного совета по комплексной проблеме “Механика”, главного редактора журнала “Известия РАН. Механика твердого тела”. Заслуженный авторитет ученого и организатора, способного решать важные для развития отечественной науки проблемы с большой ответственностью. Дмитрий Михайлович до сих пор уделяет внимание интересующим его научным проблемам. В частности, очень яркие результаты получены в построении новой, удовлетворяющей строгому анализу, модели сухого трения. С использованием новой модели трения удается дать адекватное объяснение явления шимми, существенно уточняясь известные классические модели. Также получены новые важные результаты по теории волнового твердотельного гироскопа.

Результаты по модели трения и теории волнового твердотельного гироскопа получены в тесном и плодотворном сотрудничестве с академиком Журавлевым Виктором Филипповичем.

В свои девяносто Дмитрий Михайлович полон сил и творческой энергии. Друзья и коллеги, вместе с редакцией журнала желают Дмитрию Михайловичу счастья, доброго здоровья, долгих лет активной творческой жизни.

К 80-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ В.Ф. ЖУРАВЛЕВА

DOI: 10.31857/S0572329923600202, EDN: QXXRBM

Академику Виктору Филипповичу Журавлеву 29 августа 2023 года исполняется 80 лет. Трудовая деятельность многие годы связана с Институтом проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, в котором пройден путь от аспиранта до главного научного сотрудника.

Исследования В.Ф. Журавлева охватывают широкий круг научных проблем. Вне-сен значительный вклад в развитие ряда научных направлений механики. Проведены фундаментальные исследования механики систем твердых тел, теории современных навигационных гироскопических приборов, теории управления механическими системами, аналитической механики и теории колебаний. Исследования в области общей и прикладной механики отличаются глубиной проникновения в суть рассматриваемых явлений. В частности, получена оценка систематического ухода гироскопа в идеальном кардановом подвесе, решена задача о предельной точности идеального криогенного гироскопа, создана теория большого класса инерциальных датчиков на базе волнового твердотельного гироскопа, разработана модель поликомпонентного сухого трения.

В.Ф. Журавлевым предложена теория принципиально новой бескарданной инерциальной системы минимальной размерности (маятникового типа) – БИНС-МТ, которая не требует классических гироскопов, акселерометров и интегрирующих устройств для определения произвольной ориентации подвижного объекта в инерциальном пространстве. Практическая реализация БИНС-МТ позволит существенно уменьшить массогабаритные характеристики самой системы и впервые выводит отечественных гироскопистов на новый класс инерциальных систем наведения и управления.

В.Ф. Журавлев — автор более двухсотпятидесяти научных работ, ряда монографий, патентов и изобретений. Является постоянным членом редколлегии журналов “Известия РАН. Механика твердого тела” и “Прикладная математика и механика”.

Научная, организационная, педагогическая и общественная деятельность В.Ф. Журавлева получила высокую оценку со стороны государства, научных и общественных организаций страны — премия Ленинского комсомола (1976 г.), орден “Знак Почета” (1982 г.), Государственная премия РФ в области науки и техники (1996 г.), Премия имени Н.Е. Жуковского второй степени (2013 г.).

Друзья и коллеги, вместе с редакцией журнала сердечно поздравляют Виктора Филипповича Журавлева с юбилеем, от всей души желают доброго здоровья, счастья и дальнейших творческих успехов.