

Известия

ISSN 0572-3299

Российской академии наук

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА



2023

5

СОДЕРЖАНИЕ

Решение задачи о распространении трещины Гриффитса на основе уравнений нелинейной модели <i>А. Н. Булыгин, Ю. В. Павлов</i>	3
Об одной динамически согласованной модели нормальных реакций в точках контакта мобильной платформы с поверхностью при учете конструкции механум-колес и поликомпонентного трения <i>Г. Р. Сайпулаев, Б. И. Адамов, А. И. Кобрин</i>	15
Кватернионные методы и регулярные модели небесной механики и механики космического полета: локальная регуляризация особенностей уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, порождаемых гравитационными силами <i>Ю. Н. Челноков</i>	27
Управление разворотом твердого тела (космического аппарата) с комбинированным критерием оптимальности на основе кватернионов <i>М. В. Левский</i>	58
Динамическое осесимметричное растяжение тонкого круглого идеально жесткопластического слоя <i>И. М. Цветков</i>	79
Стационарные краевые задачи связанной термоупругости для полуплоскости и их решение <i>Л. А. Алексеева, Б. Н. Алипова</i>	89
Тензоры с постоянными компонентами в определяющих уравнениях гемитропного микрополярного тела <i>Ю. Н. Радаев</i>	98
О механической концепции самосборки наноматериалов <i>В. А. Бабешко, О. В. Евдокимова, О. М. Бабешко, В. С. Евдокимов</i>	111
Изучение свойств метаматериалов с отрицательным коэффициентом Пуассона при пробивании жестким ударником <i>С. Ю. Иванова, К. Ю. Осипенко, А. И. Демин, Н. В. Баничук, Д. С. Лисовенко</i>	120
Решение динамической задачи Ламе <i>Н. Б. Расулова, Т. М. Махмудзаде</i>	131
Фундаментальные решения уравнений теории колебаний для анизотропных упругих сред <i>А. В. Ильяшенко</i>	138
Моделирование неізотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования изгибаемых армированных пластин <i>А. П. Янковский</i>	147
Периодические контактные задачи для клина с учетом сил трения <i>Е. Д. Пожарская, Д. А. Пожарский, Б. В. Соболев</i>	170
К 100-летию со дня рождения Л.А. Толоконникова	180

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТРЕЩИНЫ ГРИФФИТСА НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

© 2023 г. **А. Н. Булыгин^а**, Ю. В. Павлов^{а,*}

^аИнститут проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: yuri.pavlov@mail.ru

Поступила в редакцию 06.09.2022 г.

После доработки 18.10.2022 г.

Принята к публикации 19.10.2022 г.

На основе нелинейной модели деформирования кристаллической среды со сложной решеткой поставлена и решена задача о стационарном распространении трещины Гриффитса под действием однородных расширяющих напряжений. Показано, что напряженное и деформированное состояния среды определяют как внешние воздействия на среду, так и градиенты оптической моды (взаимное смещение атомов). Вклады от данных факторов разделены. Нахождение компонент тензора напряжений и вектора макросмещений сведено к решению краевых задач Римана–Гильберта. Получены их точные аналитические решения.

Ключевые слова: нелинейная модель, кристаллическая решетка, трещина Гриффитса

DOI: 10.31857/S0572329922600724, EDN: QXDTJS

1. Введение. В работах [1, 2] предложена нелинейная модель деформирования кристаллических сред со сложной решеткой. Она описывает многие физико-механические процессы, которые реализуются в экспериментах (образование суперрешетки, возникновение дефектов, фазовые переходы типа мартенситных и др.), но которые не описывает классическая линейная модель. На основе общих решений динамических уравнений плоской деформации нелинейной модели [3] можно решать многие динамические задачи (распространение сосредоточенных сил, штампов разного профиля и др.). В классической постановке эти задачи решены и исследованы многими авторами [4–6]. Тем не менее их решение на основе нелинейной модели представляет определенный интерес. Он обусловлен тем, что результаты исследования плоских динамических задач находят применение при решении многих фундаментальных проблем, например, построении теории разрушения и долговременной прочности твердых тел. Локальные критерии разрушения твердых тел определяют локальные поля напряжений и деформаций, а нелинейная модель их описывает более адекватно. Ниже на основе нелинейной модели решается задача о распространении трещины Гриффитса в поле однородных растягивающих напряжений.

2. Общее решение динамических уравнений плоской деформации нелинейной модели. В нелинейной модели деформацию среды описывают вектор макросмещений $U(t, x, y, z)$ (акустическая мода) и вектор микросмещений $u(t, x, y, z)$ (оптическая мода). Деформацию будем считать плоской, параллельной оси OZ , если

$$U_x = U_x(t, x, y), \quad U_y = U_y(t, x, y), \quad U_z = 0 \quad (2.1)$$

$$u_x = u_x(t, x, y), \quad u_y = u_y(t, x, y), \quad u_z = 0 \quad (2.2)$$

Для плоской деформации уравнения движения нелинейной модели принимают вид [7, 8]

$$\rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j} \quad (2.3)$$

$$\mu_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \chi_{ij,j} - R \frac{\partial \Phi(u_s)}{\partial u_i} \quad (2.4)$$

Здесь σ_{ik}, χ_{ik} — тензоры макро- и микронапряжений, ρ, μ_0 — средняя и приведенная плотности масс атомов соответственно, $i, j = 1, 2$ и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Функция $\Phi(u_s)$ описывает энергию взаимодействия подрешеток. В основополагающей работе [9] и большинстве последующих [10] принимают

$$\Phi(u_s) = 1 - \cos u_s, \quad u_s = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (2.5)$$

где $\mathbf{B}$ — вектор обратной решетки. Множитель

$$R = p - s_{ij} e_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{U_{i,j} + U_{j,i}}{2} \quad (2.6)$$

представляет собой энергию активации связей. Слагаемое p — половина энергии активации жесткого сдвига подрешеток, а s_{ij} — тензор нелинейной стрикции.

Ограничимся рассмотрением кристаллических сред кубической симметрии, состоящих из двух подрешеток. Для них материальные соотношения нелинейной модели записываются следующим образом [7, 8]

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijmn} e_{mn} - s_{ij} \Phi(u_s) \quad (2.7)$$

$$\chi_{ij} = k_{ijmn} \epsilon_{mn}, \quad \epsilon_{mn} = \frac{u_{m,n} + u_{n,m}}{2} \quad (2.8)$$

Тензоры λ_{ijmn}, k_{ijmn} — коэффициенты упругости и микроупругости соответственно. Эти тензоры симметричны к перестановке пар индексов и индексов пары между собой. В случае кристаллических сред кубической симметрии отличными от нуля компонентами будут только

$$\lambda_{1111} = \lambda_{2222} = \lambda_{3333}, \quad \lambda_{1122} = \lambda_{1133}, \quad \lambda_{1212} = \lambda_{1313} \quad (2.9)$$

$$k_{1111} = k_{2222} = k_{3333}, \quad k_{1122} = k_{1133}, \quad k_{1212} = k_{1313} \quad (2.10)$$

Для независимых компонент используем введенные Фойгтом (Voigt) [11] матричные обозначения

$$\lambda_{1111} = \lambda_{11}, \quad \lambda_{1122} = \lambda_{12} = \lambda, \quad \lambda_{1212} = \lambda_{44} = \mu \quad (2.11)$$

$$k_{1111} = k_{11}, \quad k_{1122} = k_{12}, \quad k_{1212} = k_{44} \quad (2.12)$$

В общем случае λ_{ijmn} и k_{ijmn} имеют вид тензора Хуанга (Huang) [12]

$$\begin{pmatrix} \lambda_{ijmn} \\ k_{ijmn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ k_{12} \end{pmatrix} \delta_{ij} \delta_{mn} + \begin{pmatrix} \mu \\ k_{44} \end{pmatrix} (\delta_{jn} \delta_{im} + \delta_{in} \delta_{jm}) + \begin{pmatrix} \lambda_{11} - \lambda_{12} - 2\lambda_{44} \\ k_{11} - k_{12} - 2k_{44} \end{pmatrix} \delta_{ijmn} \quad (2.13)$$

Здесь δ_{ij} — единичный тензор, а $\delta_{ijmn} = 1$, если все индексы одинаковы, и равен нулю в остальных случаях. Последнее слагаемое в (2.13) описывает анизотропию среды. В физике твердого тела [13] вводят фактор анизотропии среды (a_1, a_2)

$$\lambda_{11} - \lambda_{12} - 2\lambda_{44} = (\lambda_{11} - \lambda_{12})(1 - a_1), \quad k_{11} - k_{12} - 2k_{44} = (k_{11} - k_{12})(1 - a_2) \quad (2.14)$$

Для сред со слабой анизотропией $a_1 \approx 1$, $a_2 \approx 1$ и кубической симметрией $s_{ij} = s\delta_{ij}$ материальные соотношения (2.7), (2.8) принимают вид

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\mu U_{x,x} + \lambda(U_{x,x} + U_{y,y}) - s\Phi(u_s) \\ \sigma_{yy} &= 2\mu U_{y,y} + \lambda(U_{x,x} + U_{y,y}) - s\Phi(u_s)\end{aligned}\quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \mu(U_{x,y} + U_{y,x}) \\ \chi_{xx} &= 2k_{44}u_{x,x} + k_{12}(u_{x,x} + u_{y,y}) \\ \chi_{yy} &= 2k_{44}u_{y,y} + k_{12}(u_{x,x} + u_{y,y}) \\ \chi_{xy} &= k_{44}(u_{x,y} + u_{y,x})\end{aligned}\quad (2.16)$$

Компоненты тензора напряжений σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} должны удовлетворять условиям Бельтрами–Мичелла (Beltrami–Michell) [14]. Для плоской деформации нелинейной модели — это одно уравнение

$$\left(\Delta - \frac{1}{V_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{2s\mu}{\lambda + 2\mu} \left(\Delta - \frac{1}{V_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi(u_s) = 0 \quad (2.17)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad V_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.18)$$

Здесь V_1 — скорость продольной волны, а V_2 — скорость сдвига. Тензор σ_{ij} и вектор U_i выражаются через произвольную функцию $Q(t, x, y)$ [3]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= L_{11}(Q) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2V_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)Q, \quad \sigma_{yy} = L_{22}(Q) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2V_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)Q \\ \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= \theta = \left(\Delta - \frac{1}{V_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)Q, \quad \left(\Delta - \frac{1}{2V_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\sigma_{xy} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right) = 0\end{aligned}\quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}2\mu U_{x,x} &= \sigma_{xx} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\theta + \frac{\mu}{\lambda + \mu}s\Phi(u_s), \\ 2\mu U_{y,y} &= \sigma_{yy} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\theta + \frac{\mu}{\lambda + \mu}s\Phi(u_s)\end{aligned}\quad (2.20)$$

Если (2.19) подставить в (2.17), то получим уравнение для нахождения функции $Q(t, x, y)$

$$\left(\Delta - \frac{1}{V_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left[\left(\Delta - \frac{1}{V_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)Q + 2s\frac{V_2^2}{V_1^2}\Phi(u_s)\right] = 0 \quad (2.21)$$

Из (2.21) видно, что $Q(t, x, y)$ является динамическим аналогом функции Эри (G.B. Airy), которая вводится для решения статических задач классической плоской деформации. Функция $Q(t, x, y)$, в отличие от функции Эри, удовлетворяет неоднородному динамическому бигармоническому уравнению. Функция $\Phi(u_s)$ играет роль объемных источников макронапряжений и макродеформаций. Общее решение уравнения (2.21) можно записать в виде суммы двух слагаемых

$$Q(t, x, y) = F(t, x, y) + Q_0(t, x, y) \quad (2.22)$$

Функция $F(t, x, y)$ удовлетворяет однородному бигармоническому уравнению

$$\left(\Delta - \frac{1}{V_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(\Delta - \frac{1}{V_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) F(t, x, y) = 0 \quad (2.23)$$

а $Q_0(t, x, y)$ есть решение неоднородного уравнения

$$\left(\Delta - \frac{1}{V_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) Q_0(t, x, y) + 2s \frac{V_2^2}{V_1^2} \Phi(u_s) = 0 \quad (2.24)$$

Полученное общее решение уравнений макрополя (2.3), (2.4) позволяет ставить и находить точные аналитические решения разнообразных динамических задач на основе нелинейной модели. Среди них наиболее простыми, но имеющими большой интерес, являются стационарные задачи (движение сосредоточенных сил, штампов и трещин разного профиля и др.). В качестве примера рассмотрим решение задачи о распространении конечного разреза ($y = 0, |x| \leq a$) в плоскости под действием постоянных растягивающих напряжений.

3. Решение задачи о распространении трещины Гриффитса. Пусть конечный разрез расположен на оси OX ($y = 0, |x| \leq a$), а плоскость (X, Y) находится в поле однородных растягивающих напряжений. Тогда тензор σ_{ij} должен удовлетворять граничным условиям

$$\sigma_{yy}|_{y=0, |x| \leq a} = 0, \quad \sigma_{xy}|_{y=0, |x| \leq a} = 0 \quad (3.1)$$

$$\sigma_{yy}|_{r \rightarrow \infty} = \sigma_{yy}^\infty, \quad \sigma_{xx}|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \sigma_{xy}|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.2)$$

Примем, что трещина со скоростью C распространяется вдоль оси OX . Тогда целесообразно перейти в подвижную систему координат ($\xi = x + Ct, y = \eta$). В координатах (ξ, η) уравнения (2.23), (2.24) примут вид

$$\left[(1 - M_1^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right] \left[(1 - M_2^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right] F(\xi, \eta) = 0 \quad (3.3)$$

$$(1 - M_1^2) \frac{\partial^2 Q_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Q_0}{\partial \eta^2} + 2s \frac{V_2^2}{V_1^2} \Phi(u_s) = 0 \quad (3.4)$$

$$M_1 = \frac{C}{V_1}, \quad M_2 = \frac{C}{V_2} \quad (3.5)$$

Примем, что

$$M_1 < 1, \quad M_2 < 1 \quad (3.6)$$

Тогда решением (3.3) будет

$$F(\xi, \eta) = F_1(z_1) + \overline{F_1(\bar{z}_1)} + F_2(z_2) + \overline{F_2(\bar{z}_2)} = 2[\operatorname{Re} F_1(z_1) + \operatorname{Re} F_2(z_2)] \quad (3.7)$$

$$z_1 = \xi + \mu_1 \eta, \quad \mu_1 = i\sqrt{1 - M_1^2}, \quad z_2 = \xi + \mu_2 \eta, \quad \mu_2 = i\sqrt{1 - M_2^2}$$

Здесь $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$ – произвольные аналитические функции соответствующих комплексных переменных (z_1, z_2) . Черта сверху обозначает комплексное сопряжение. Тензор σ_{ij} и вектор U_i можно выразить через функции $Q_0(\xi, \eta)$, $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$, если в (2.19), (2.20) учесть (2.22) и (3.7). Окончательно получим

$$\sigma_{xx} = -(M_2^2 - 2M_1^2 + 2)\operatorname{Re} F_1'' + (M_2^2 - 2)\operatorname{Re} F_2'' + L_{11}(Q_0)$$

$$\sigma_{yy} = -(M_2^2 - 2)(\operatorname{Re} F_1'' + \operatorname{Re} F_2'') + L_{22}(Q_0) \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy} &= 2\sqrt{1-M_1^2}\operatorname{Im}F_1'' + \frac{(M_2^2-2)^2}{2\sqrt{1-M_2^2}}\operatorname{Im}F_2'' - \frac{\partial^2 Q_0}{\partial\xi\partial\eta} \\
\mu U_x &= -\operatorname{Re}F_1' + \frac{1}{2}(M_2^2-2)\operatorname{Re}F_2' - \frac{1}{2}\frac{\partial Q_0}{\partial\xi} \\
\mu U_y &= \sqrt{1-M_1^2}\operatorname{Im}F_1' - \frac{M_2^2-2}{2\sqrt{1-M_2^2}}\operatorname{Im}F_2' - \frac{1}{2}\frac{\partial Q_0}{\partial\eta}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по аргументу. При выводе формул (3.8) и (3.9) использовались частные производные

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Re}F_1 &= \operatorname{Re}F_1', & \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Re}F_1 &= -\sqrt{1-M_1^2}\operatorname{Im}F_1' \\
\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Re}F_2 &= \operatorname{Re}F_2', & \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Re}F_2 &= -\sqrt{1-M_2^2}\operatorname{Im}F_2' \\
\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Im}F_1 &= \operatorname{Im}F_1', & \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Im}F_1 &= \sqrt{1-M_1^2}\operatorname{Re}F_1' \\
\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Im}F_2 &= \operatorname{Im}F_2', & \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Im}F_2 &= \sqrt{1-M_2^2}\operatorname{Re}F_2'
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Согласно (3.1) функции $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$ должны удовлетворять граничным условиям

$$(M_2^2-2)[\operatorname{Re}F_1' + \operatorname{Re}F_2']_{\eta=0, |\xi|\leq a} = [L_{22}(Q_0) - \sigma_{yy}]_{\eta=0, |\xi|\leq a} \tag{3.11}$$

$$\left(2\sqrt{1-M_1^2}\operatorname{Im}F_1'' + \frac{(M_2^2-2)^2}{2\sqrt{1-M_2^2}}\operatorname{Im}F_2'' \right)_{\eta=0, |\xi|\leq a} = \left[\frac{\partial^2 Q_0}{\partial\xi\partial\eta} + \sigma_{xy} \right]_{\eta=0, |\xi|\leq a} \tag{3.12}$$

С учетом

$$\operatorname{Im}F_1''(z_1) = -\operatorname{Re}(iF_1''), \quad \operatorname{Im}F_2''(z_2) = -\operatorname{Re}(iF_2'') \tag{3.13}$$

граничное условие (3.12) может быть записано в виде

$$\left[2\sqrt{1-M_1^2}\operatorname{Re}F_1'' + \frac{(M_2^2-2)^2}{2\sqrt{1-M_2^2}}\operatorname{Re}F_2'' \right]_{\eta=0, |\xi|\leq a} = i \left[\frac{\partial^2 Q_0}{\partial\xi\partial\eta} + \sigma_{xy} \right]_{\eta=0, |\xi|\leq a} \tag{3.14}$$

Из граничных условий (3.12) и (3.14) видно, что в нелинейной модели напряженное и деформированное состояния среды определяют как внешние воздействия $(\sigma_{xy}, \sigma_{yy})$, так и градиенты оптической моды $\left(L_{22}(Q_0), \frac{\partial^2 Q_0}{\partial\xi\partial\eta} \right)$. Представляется целесообразным эти вклады учитывать порознь. С этой целью функции $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$ представим в виде суммы двух слагаемых

$$F_1''(z_1) = F_{11}'(z_1) + F_{12}'(z_1), \quad F_2''(z_2) = F_{21}'(z_2) + F_{22}'(z_2) \tag{3.15}$$

и потребуем, чтобы функции $(F_{11}', F_{12}', F_{21}', F_{22}')$ удовлетворяли граничным условиям

$$\begin{aligned}
[\operatorname{Re} F'_{11} + \operatorname{Re} F'_{21}]_{\eta=0, |\xi| \leq a} &= -\frac{\sigma_{yy}}{M_2^2 - 2} \Big|_{\eta=0, |\xi| \leq a} \\
\left[\operatorname{Re} F'_{11} + \frac{(M_2^2 - 2)^2}{2\sqrt{1 - M_2^2}} \operatorname{Re} F'_{21} \right]_{\eta=0, |\xi| \leq a} &= i \frac{\sigma_{xy}}{2\sqrt{1 - M_2^2}} \Big|_{\eta=0, |\xi| \leq a}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
[\operatorname{Re} F'_{12} + \operatorname{Re} F'_{22}]_{\eta=0, |\xi| \leq a} &= \frac{1}{M_2^2 - 2} L_{22}(Q_0) \Big|_{\eta=0, |\xi| \leq a} \\
\left[\operatorname{Re} F'_{12} + \frac{(M_2^2 - 2)^2}{4\sqrt{(1 - M_2^2)(1 - M_1^2)}} \operatorname{Re} F'_{22} \right]_{\eta=0, |\xi| \leq a} &= \frac{i}{2\sqrt{1 - M_2^2}} \frac{\partial^2 Q_0}{\partial \xi \partial \eta} \Big|_{\eta=0, |\xi| \leq a}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

С учетом (3.15) компоненты тензора напряжений (3.8) и вектора макросмещений (3.9) записываются в виде суммы двух слагаемых

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^+ + \sigma_{ik}^-, \quad U_i = U_i^+ + U_i^-, \quad (i, k) = (1, 2) \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^- \\ \sigma_{xx}^+ \end{pmatrix} &= -(M_2^2 - 2M_1^2 + 2) \begin{pmatrix} \operatorname{Re} F'_{11} \\ \operatorname{Re} F'_{12} \end{pmatrix} + (M_2^2 - 2) \begin{pmatrix} \operatorname{Re} F'_{21} \\ \operatorname{Re} F'_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ L_{11}(Q_0) \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \sigma_{yy}^- \\ \sigma_{yy}^+ \end{pmatrix} &= -(M_2^2 - 2) \begin{pmatrix} \operatorname{Re} F'_{11} + \operatorname{Re} F'_{21} \\ \operatorname{Re} F'_{12} + \operatorname{Re} F'_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ L_{22}(Q_0) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \sigma_{xy}^- \\ \sigma_{xy}^+ \end{pmatrix} &= 2\sqrt{1 - M_1^2} \begin{pmatrix} \operatorname{Im} F'_{11} \\ \operatorname{Im} F'_{12} \end{pmatrix} + \frac{(M_2^2 - 2)^2}{2\sqrt{1 - M_2^2}} \begin{pmatrix} \operatorname{Im} F'_{21} \\ \operatorname{Im} F'_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 Q_0}{\partial \xi \partial \eta} \end{pmatrix} \\
\mu \begin{pmatrix} U_x^- \\ U_x^+ \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} \operatorname{Re} F'_{11} \\ \operatorname{Re} F'_{12} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (M_2^2 - 2) \begin{pmatrix} \operatorname{Re} F'_{21} \\ \operatorname{Re} F'_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial Q_0}{\partial \xi} \end{pmatrix} \\
\mu \begin{pmatrix} U_y^- \\ U_y^+ \end{pmatrix} &= \sqrt{1 - M_1^2} \begin{pmatrix} \operatorname{Im} F'_{11} \\ \operatorname{Im} F'_{12} \end{pmatrix} - \frac{M_2^2 - 2}{2\sqrt{1 - M_2^2}} \begin{pmatrix} \operatorname{Im} F'_{21} \\ \operatorname{Im} F'_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial Q_0}{\partial \eta} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Чтобы удовлетворить условиям на бесконечности (3.2), из функций $F'_{11}(z_1)$ и $F'_{21}(z_2)$ выделим линейные слагаемые

$$\begin{aligned}
F'_{11}(z_1) &= Az_1 + F_{10}(z_1), \quad F'_{21}(z_2) = Bz_2 + F_{20}(z_2) \\
A &= -\frac{1}{2(M_2^2 - M_1^2)} \sigma_{yy}^\infty, \quad B = \frac{M_2^2 - 2M_1^2 + 2}{2(2 - M_2^2)(M_2^2 - M_1^2)} \sigma_{yy}^\infty \\
A + B &= \frac{1}{2 - M_2^2} \sigma_{yy}^\infty
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Тогда граничные условия (3.16) примут вид

$$\begin{aligned}
[\operatorname{Re} F'_{10} + \operatorname{Re} F'_{20}]_{\eta=0, |\xi| \leq a} &= \frac{1}{M_2^2 - 2} \sigma_{yy}^\infty \\
\left[\operatorname{Re} F'_{10} + \frac{(M_2^2 - 2)^2}{4\sqrt{(1 - M_1^2)(1 - M_2^2)}} \operatorname{Re} F'_{20} \right]_{\eta=0, |\xi| \leq a} &= 0
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Из (3.22) находим граничные условия для F'_{10} и F'_{20} :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} F'_{10}|_{\eta=0, |\xi| \leq a} &= (1 - G_1) \frac{\sigma_{yy}^\infty}{M_2^2 - 2} \\
\operatorname{Re} F'_{20}|_{\eta=0, |\xi| \leq a} &= \frac{G_1}{M_2^2 - 2} \sigma_{yy}^\infty \\
G_1 &= \frac{4\sqrt{(1 - M_1^2)(1 - M_2^2)}}{4\sqrt{(1 - M_1^2)(1 - M_2^2)} - (2 - M_2^2)^2}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

а из (3.12) получаем граничные условия для F'_{12} , F'_{22} :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} F'_{12}|_{\eta=0, |\xi| \leq a} &= T_{12}(\xi), \quad T_{12}(\xi) = \frac{1}{M_2^2 - 2} L_{22}(Q_0)|_{\eta=0, |\xi| \leq a} - T_{22}(\xi) \\
\operatorname{Re} F'_{22}|_{\eta=0, |\xi| \leq a} &= T_{22}(\xi), \quad T_{22}(\xi) = G_1 \left[\frac{L_{22}(Q_0)}{M_2^2 - 2} - \frac{i}{2\sqrt{1 - M_1^2}} \frac{\partial^2 Q_0}{\partial \xi \partial \eta} \right]_{\eta=0, |\xi| \leq a}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Из (3.23) и (3.24) видно, что нахождение F'_{10} , F'_{20} , F'_{12} , F'_{22} сведено к построению функции $Z(z)$, которая является регулярной вне отрезка $\eta = 0$, $|\xi| \leq a$, на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) $Z \rightarrow 0$, а на самом отрезке она удовлетворяет краевому условию вида

$$\operatorname{Re} Z|_{\eta=0, |\xi| \leq a} = -g(\xi) \tag{3.25}$$

Поставленная задача является частным случаем проблемы Римана–Гильберта (Riemann–Hilbert) [14]. Ее решение имеет вид

$$Z(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{g(\xi)\sqrt{a^2 - \xi^2}}{z - \xi} d\xi \tag{3.26}$$

На основании (3.23) и (3.26) находим

$$\begin{aligned}
F_{10}(z_1) &= (1 - G_1) \frac{\sigma_{yy}^\infty}{M_2^2 - 2} [z_1 - \sqrt{z_1^2 - a^2}] \\
F_{20}(z_2) &= G_1 \frac{\sigma_{yy}^\infty}{M_2^2 - 2} [z_2 - \sqrt{z_2^2 - a^2}]
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Поставленную задачу можно также решить с помощью формулы Келдыша–Седова [15].

Функции F_{10} и F_{20} позволяют найти компоненты тензора σ_{ik}^- и вектора макросмещений U_i^- . Для этого нужно (3.21) и (3.27) подставлять в (3.19) и (3.20). Так для компонент тензора напряжений получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^- &= \sigma_{yy}^\infty \operatorname{Re} \left[(1 - G_1) \frac{M_2^2 - 2M_1^2 + 2}{2 - M_2^2} \left(1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - a^2}} \right) + G_1 \left(1 - \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - a^2}} \right) \right] \\
\sigma_{yy}^- &= \sigma_{yy}^\infty \operatorname{Re} \left[(1 - G_1) \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - a^2}} + G_1 \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - a^2}} \right] \\
\sigma_{xy}^- &= \sigma_{yy}^\infty \frac{2 - M_2^2}{2\sqrt{1 - M_2^2}} \operatorname{Re} \left[G_1 i \left(\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - a^2}} - \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - a^2}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Соотношения (3.28) соответствуют решению задачи о распространении трещины Гриффитса на основе классической линейной модели. Эта задача была решена Е. Иоффе [16]. Если принять, что скорость распространения трещины $C = 0$, то, полагая в (3.28) $z_1 = z_2$ и переходя к пределу $M_1, M_2 \rightarrow 0$, получим поле напряжений в плоскости с разрезом $y = 0$, $|x| \leq a$ в статическом случае

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^- &= \begin{cases} -\sigma_{yy}^\infty, & |x| < a \\ -\sigma_{yy}^\infty \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right), & |x| > a \end{cases} \\
\sigma_{yy}^- &= \begin{cases} 0, & |x| < a \\ \sigma_{yy}^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}, & |x| > a \end{cases} \\
\sigma_{xy}^- &= 0, \quad -\infty < x < \infty
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Выражения (3.29) совпадают с результатами, которые получил С.Е. Инглис [17].

Компоненты тензора σ_{ik}^+ и вектора макросмещений U_i^+ можно найти, если известна оптическая мода u_s . Она находится из уравнений микрополя (2.4).

3.1. Решение уравнений микрополя. Уравнения микрополя (2.4) можно записать в компонентной форме, если тензор микронапряжений χ_{ij} (2.8) подставить в уравнение (2.4) и учесть вид тензора k_{ijmn} :

$$\begin{aligned}
\mu_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= k_{44} \Delta u_x + (k_{12} + k_{44})(u_{x,xx} + u_{y,xy}) + (k_{11} - k_{12} - 2k_{44})u_{x,xx} - \frac{R}{b} \sin u_s \\
\mu_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= k_{44} \Delta u_y + (k_{12} + k_{44})(u_{x,xy} + u_{y,yy}) + (k_{11} - k_{12} - 2k_{44})u_{y,yy} - \frac{R}{b} \sin u_s
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Вместо компонент (u_x, u_y) введем u_s и $u_m = (u_x - u_y)/b$. Тогда сумма и разность уравнений (3.30) запишутся следующим образом

$$\begin{aligned}
2\mu_0 \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} &= (k_{11} + k_{44})\Delta u_s + 2(k_{12} + k_{44})u_{s,xy} + (k_{11} - k_{44})(u_{m,xx} - u_{m,yy}) - \frac{4R}{b^2} \sin u_s \\
2\mu_0 \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} &= (k_{11} + k_{44})\Delta u_m - 2(k_{12} + k_{44})u_{m,xy} + (k_{11} - k_{44})(u_{s,xx} - u_{s,yy})
\end{aligned} \tag{3.31}$$

В подвижной системе координат (ξ, η) уравнения (3.31) принимают вид

$$\begin{aligned}
& (k_{11} + k_{44}) \left[(1 - m_1^2) \frac{\partial^2 u_s}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial \eta^2} + 2k_0 \frac{\partial^2 u_s}{\partial \xi \partial \eta} \right] + \\
& + (k_{11} - k_{44})(u_{m,\xi\xi} - u_{m,\eta\eta}) - \frac{4R}{b^2} \sin u_s = 0 \\
& (k_{11} + k_{44}) \left[(1 - m_1^2) \frac{\partial^2 u_m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial \eta^2} - 2k_0 \frac{\partial^2 u_m}{\partial \xi \partial \eta} \right] + (k_{11} - k_{44})(u_{s,\xi\xi} - u_{s,\eta\eta}) = 0 \\
& m_1 = \frac{C}{v_1}, \quad v_1^2 = \frac{k_{12} + k_{44}}{2\mu_0}, \quad k_0 = \frac{k_{12} + k_{44}}{k_{11} + k_{44}}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Видно, что уравнения (3.32) связаны. Они разделяются, если $k_{11} = k_{44}$. Примем это условие и вместо переменных (ξ, η) введем

$$\begin{aligned}
q_1 &= L_1(\xi + \alpha\eta), \quad q_2 = L_2(\xi - \alpha\eta), \quad \alpha = \sqrt{1 - m_1^2} \\
L_1 &= \frac{1}{b} \sqrt{\frac{2p}{(k_{11} + k_{44})\alpha(\alpha + k_0)}}, \quad L_2 = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{2p}{(k_{11} + k_{44})\alpha(\alpha - k_0)}}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

В переменных (q_1, q_2) уравнения (3.32) примут вид

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial q_2^2} = \frac{R}{p} \sin u_s \tag{3.34}$$

$$\omega^2 \frac{\partial^2 u_m}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial q_2^2} = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{\alpha - k_0}{\alpha + k_0}} \tag{3.35}$$

Из соотношений (2.6), (2.15) находим

$$\begin{aligned}
\frac{R}{p} &= p_1 + 2p_2 \cos u_s \\
p_1 &= 1 - 2p_2 - \frac{p_2}{s} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\
p_2 &= \frac{s^2}{2p(\lambda + \mu)}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

С учетом (3.36) уравнение (3.34) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial q_2^2} = p_1 \sin u_s + p_2 \sin 2u_s \tag{3.37}$$

Уравнение (3.37) отличается от классического уравнения двойного синус-Гордона тем, что амплитуда p_1 не постоянная величина, а функция (t, x, y, u_s) . В литературе отсутствуют аналитические методы решения такого уравнения. По этой причине оправданы допущения, которые преобразуют (3.37) к уравнениям, имеющим точные аналитические решения. Для сред, у которых $s^2 \ll 2p(\lambda + \mu)$ можно принять $p_2 = 0$, а $p_1 = 1$. Тогда уравнение (3.37) станет классическим уравнением синус-Гордона

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial q_2^2} = \sin u_s \tag{3.38}$$

Если $s^2 \ll 2p(\lambda + \mu)$, но $s(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2p(\lambda + \mu)$ не является пренебрежимо малой величиной, то (3.37) принимает вид уравнения синус-Гордона с переменной амплитудой

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial q_2^2} = p(q_1, q_2) \sin u_s \quad (3.39)$$

$$p(q_1, q_2) = 1 - s(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2p(\lambda + \mu)$$

Уравнение синус-Гордона (3.38) подробно изучено в литературе. Для уравнения синус-Гордона с переменной амплитудой аналитические решения построены только для частного вида функций $p(q_1, q_2)$ [18]– [20]. Поскольку нахождение оптической моды сопряжено с преодолением значительных трудностей, то для иллюстрации метода нахождения (σ_{ik}^+, U_i^+) возьмем самое простое решение u_s . Если принять, что справедливо уравнение (3.38), а $u_s = u_s(q_1)$, то решением уравнения (3.38) будет

$$u_s = 4 \arctg e^{q_1} \quad (3.40)$$

Найдем (σ_{ik}^+, U_i^+) оптической моды (3.40).

3.2. Нахождение напряжений и смещений, обусловленных оптической модой. Для оптической моды (3.40)

$$\Phi(u_s) = 1 - \cos u_s = 8g(q_1), \quad g(q_1) = \frac{e^{2q_1}}{(1 + e^{2q_1})^2} \quad (3.41)$$

а функция Q_0 находится из уравнений (2.24), (3.4)

$$Q_0 = -\frac{D}{2L_1^2} \ln(1 + e^{2q_1}), \quad D = \frac{8sV_2^2}{V_1^2(2 - m_1^2 - M_1^2)} \quad (3.42)$$

С учетом (2.19), (3.24), (3.42), находим

$$L_{11}(Q_0) = -D(2 - 2m_1^2 - M_2^2)g(q_1), \quad L_{22}(Q_0) = -D(2 - M_2^2)g(q_1) \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial^2 Q_0}{\partial \xi \partial \eta} = -2D\sqrt{1 - m_1^2} g(q_1)$$

$$T_{12}(\xi) = (D - G_2)g(q_1), \quad G_2 = G_1 D \left(1 + i \sqrt{\frac{1 - m_1^2}{1 - M_1^2}} \right) \quad T_{22}(\xi) = G_2 g(q_1) \quad (3.44)$$

Функции $F_{12}(z_1)$ и $F_{22}(z_2)$ являются решениями соответствующих задач Римана–Гильберта с граничными условиями (3.44) и находятся по формуле (3.26)

$$F_{12}(z_1) = (G_2 - D)\Psi(z_1) \quad (3.45)$$

$$F_{22}(z_2) = -G_2\Psi(z_2) \quad (3.46)$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{e^{2L_1\xi}}{(1 + e^{2L_1\xi})^2} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{z - \xi} d\xi \quad (3.47)$$

После подстановки функций $F_{12}(z_1)$ и $F_{22}(z_2)$ в соответствующие выражения формул (3.19) и (3.20), могут быть найдены компоненты тензора σ_{ij}^+ и вектора макросмещения U_i^+ .

4. Заключение. Изложенный общий способ решения нелинейных уравнений плоской деформации является эффективным методом решения динамических задач. Нахождение точных аналитических решений динамических задач он сводит к проблемам теории краевых задач аналитических функций (Римана, Римана–Гильберта, Келдыша–Седова). Напряженное и деформированное состояния среды получаются в виде суммы двух слагаемых. Первое описывает действие внешних сил, а второе — оптической моды. Эти факторы учитываются порознь; что позволяет исследовать влияние оптической моды на деформирование кристаллической среды и уточнить такие важные величины, как интенсивность напряжений, локальные критерии напряжения и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аэро Э.Л.* Микромасштабные деформации в двумерной решетке — структурные переходы и бифуркации при критическом сдвиге // *ФТТ*. 2000. Т. 42. Вып. 6. С. 1113–1119.
2. *Aero E.L.* Micromechanics of a double continuum in a model of a medium with variable periodic structure // *J. Eng. Math.* 2006. V. 55. P. 81–95.
<https://doi.org/10.1007/s10665-005-9012-3>
3. *Bulygin A.N., Pavlov Y.V.* Solution of dynamic equations of plane deformation for nonlinear model of complex crystal lattice / *Advanced Structured Materials*. V. 164. Mechanics and Control of Solids and Structures. Cham, Switzerland: Springer, 2022. P. 115–136.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-93076-9_6
4. Разрушение / Ред. *Либовиц Г. Т.* 2. Математические основы теории разрушения. М.: Мир, 1975. = *Fracture an Advanced Treatise* / Ed. by *H. Liebowitz*. Vol. II. Mathematical Fundamentals. New York, London: Academic Press, 1968.
5. *Нотт Дж.Ф.* Основы механики разрушения. М.: “Металлургия”, 1978. = *Knott J.F.* Fundamentals of Fracture Mechanics. London: Butterworths, 1973.
6. *Броек Д.* Основы механики разрушения. М.: Высшая школа, 1980. = *Broek D.* Elementary Engineering Fracture Mechanics. Dordrecht, The Netherlands: Martinus Nijhoff Publishers, 1984.
7. *Аэро Э.Л., Бulyгин А.Н., Павлов Ю.В.* Нелинейная модель деформирования кристаллических сред, допускающих мартенситные превращения: решение уравнений статики // *Изв. РАН. МТТ*. 2018. № 6. С. 30–40.
<https://doi.org/10.31857/S057232990002538-1>
8. *Аэро Э.Л., Бulyгин А.Н., Павлов Ю.В.* Нелинейная модель деформирования кристаллических сред, допускающих мартенситные превращения: плоская деформация // *ПММ*. 2019. Т. 83. Вып. 2. С. 303–313.
<https://doi.org/10.1134/S0032823519020024>
9. *Frenkel J., Kontorova T.* On the theory of plastic deformation and twinning // *Acad. Sci. USSR J. Phys.* 1939. V. 1. P. 137–149.
10. *Braun O.M., Kivshar Y.S.* The Frenkel–Kontorova Model. Concepts, Methods, and Applications. Berlin: Springer. 2004.
11. *Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig: Teubner, 1910.
12. *Лейбфрид Г.* Микроскопическая теория механических и тепловых свойств кристаллов. М.: Л.: ГИФМЛ, 1963. = *Leibfried G.* Gittertheorie der Mechanischen und Thermischen Eigenschaften der Kristalle. Handbuch Der Physik. Band 7. Teil 2. Berlin: Springer-Verlag, 1955.
13. *Куммель Ч.* Введение в физику твердого тела. М.: ГИФМЛ, 1963. = *Kittel C.* Introduction to Solid State Physics. New York: Wiley, 1956.
14. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения. Плоская теория упругости. Кручение и изгиб. 5-е изд., испр. и доп. М.: Наука, 1966. 708 с.
15. *Келдыш М.В., Седов Л.И.* Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций // *Докл. АН СССР*. 1937. Т. 16. № 1. С. 7–10.
16. *Yoffe E.H.* The moving Griffith crack // *Phil. Mag. Ser. 7*. 1951. V. 42. No. 330. P. 739–750.
<https://doi.org/10.1080/14786445108561302>
17. *Inglis C.E.* Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners // *Trans. Instn. Nav. Archit., Lond.* 1913. V. 55. P. 219–230.

-
18. *Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Павлов Ю.В.* Решения уравнения синус-Гордон с переменной амплитудой // ТМФ. 2015. Т. 184. № 1. С. 79–91.
<https://doi.org/10.4213/tmf8821>
 19. *Aero E.L., Bulygin A.N., Pavlov Yu.V.* Exact analytical solutions for nonautonomic nonlinear Klein-Fock–Gordon equation / *Advances in Mechanics of Microstructured Media and Structures. Advanced Structured Materials*. V. 87. Cham, Switzerland: Springer, 2018. P. 21–33.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-73694-5_2
 20. *Aero E.L., Bulygin A.N., Pavlov Yu.V.* Some solutions of dynamic and static nonlinear nonautonomous Klein–Fock–Gordon equation / *Advanced Structured Materials*. V. 122. *Nonlinear Wave Dynamics of Materials and Structures*. Cham, Switzerland: Springer, 2020. P. 107–120.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-38708-2_7

УДК 531.133.2

ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКИ СОГЛАСОВАННОЙ МОДЕЛИ НОРМАЛЬНЫХ РЕАКЦИЙ В ТОЧКАХ КОНТАКТА МОБИЛЬНОЙ ПЛАТФОРМЫ С ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИ УЧЕТЕ КОНСТРУКЦИИ МЕКАНУМ-КОЛЕС И ПОЛИКОМПОНЕНТНОГО ТРЕНИЯ

© 2023 г. Г. Р. Сайпулаев^{а,*}, Б. И. Адамов^{а,**}, А. И. Кобрин^{а,***}

^аНациональный исследовательский университет “МЭИ”,
Москва, Россия

*e-mail: saypulaevgr@mail.ru

**e-mail: adamoff.b@yandex.ru

***e-mail: kobrinai@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.09.2022 г.

После доработки 04.10.2022 г.

Принята к публикации 06.10.2022 г.

В статье исследуется влияние зависимости нормальных реакций от параметров движения на динамику мобильной платформы при учете конструкции механум-колес и поликомпонентного трения. Для описания зависимости нормальных реакций от параметров движения используются теоремы об изменении количества движения и момента количества движения, записанные для механум-платформы. Влияние нормальных реакций на динамику механум-платформы оценивается по результатам численного моделирования. Модель динамики механум-платформы учитывает конструкцию механум-колес и поликомпонентное трение. В качестве модели трения контактирующих роликов с опорной поверхностью рассматривается предложенная В.Ф. Журавлевым модель поликомпонентного трения, учитывающая скольжение и верчение. Даны оценки максимальных отклонений нормальных реакций опор, обусловленных динамикой механум-платформы, от значений нормальных реакций, рассчитанных для покоящейся мобильной платформы (равные на примере робота *KUKA youBot* 16.7%). Получены неравенства, ограничивающие максимальные значения управляющих моментов, при выполнении которых не происходит отрыва контактирующих роликов механум-колес от опорной поверхности. По результатам моделирования показано, что нормальные реакции изменялись на 5–6% от величины нормальной реакции, рассчитанной в случае покоящейся механум-платформы, что соответствует полученным оценкам. Указанные изменения нормальных реакций могут привести к снижению точности движения механум-платформы, получаемой при программном управлении.

Ключевые слова: механум-колесо, механум-платформа, динамика, поликомпонентное трение, нормальные реакции, динамическая согласованность

DOI: 10.31857/S0572329922600712, EDN: QWTDIZ

1. Введение. Исследования мобильных роботов, способных осуществлять всенаправленное движение, являются актуальными из-за широкого применения всенаправленных платформ в области складской логистики, медицины и при работе в труднодоступных местах (стесненные пространства). Способность осуществлять всенаправленное движение появляется за счет оснащения мобильных платформ роликонесущими колесами различных типов: омни-колеса или механум-колеса [1].

Для управления мобильными платформами с омни- или механум-колесами необходимо разрабатывать кинематические и динамические модели движения указанных платформ. Для математического описания омни- или механум-колес широко используется упрощенная модель роликонесущих колес [2], а на динамику мобильных платформ налагаются неголономные связи [3], характеризующие условия непроскальзывания точек контакта роликов с опорной поверхностью.

При этом в недавних исследованиях рассматривается механика всенаправленных платформ с более детальным учетом конструкции роликонесущих колес.

В [4] была описана геометрия и кинематика роликонесущих колес, а для механум-колес получена зависимость смещения точки контакта вдоль собственной оси колеса от угла поворота колеса.

В [5] построена модель динамики механум-платформы с учетом конструкции колес (конечного числа и формы роликов) и сухого трения в точках контакта роликов с опорной поверхностью. При этом для замыкания модели трения решена (в рамках статического подхода) статически неопределимая задача нахождения нормальных реакций в точках контакта в случае неподвижной механум-платформы. Построенная модель динамики была применена для исследования влияния конструкции механум-колес на динамику мобильной платформы при использовании трения Кулона [5] и модели поликомпонентного трения [6, 7].

В [6, 7] в качестве модели поликомпонентного трения рассматривается связанная модель трения, учитывающая скольжение и верчение контактирующих тел, которая была предложена В.Ф. Журавлевым [8] и проверена в экспериментальных исследованиях [9].

Работы [10, 11] посвящены описанию контактного взаимодействия роликов с опорной поверхностью и исследованию влияния контактных сил на динамику механум-платформы по результатам экспериментов и компьютерного моделирования.

В рамках данной работы ставится задача определения нормальных реакций с учетом динамической согласованности [12–14] (в рамках динамического подхода) с целью сравнительного анализа динамики механум-платформы при различных моделях нормальных реакций, полученных при статическом и динамическом подходах.

2. Конструкция механум-платформы. Объектом исследования является мобильная платформа с двумя парами соосных механум-колес.

Рассматривается движение механум-платформы по горизонтальной неподвижной плоскости xy . Введем подвижную систему координат $OXYZ$ (рис. 1,а). Начало этой системы координат находится в геометрическом центре O платформы; OX и OY – продольная и поперечная оси платформы; $\psi = \angle(x, X)$ – угол поворота платформы относительно вертикальной оси OZ .

Абсциссы и ординаты центров колес C_i ($i = 1, \dots, 4$) в системе координат $OXYZ$ равны ρ_{xi} и ρ_{yi} ($\rho_{x1} = \rho_{x2} = h$, $\rho_{x3} = \rho_{x4} = -h$, $\rho_{y1} = \rho_{y3} = l$, $\rho_{y2} = \rho_{y4} = -l$). Угол между осями роликов i -го колеса и плоскостью C_iZX обозначим δ_i ($\delta_2 = \delta_3 = 45^\circ$, $\delta_1 = \delta_4 = -45^\circ$).

Обозначим K_i центр оси контактирующего ролика, а $\tilde{\varphi}_i$ – угол его поворота вокруг оси i -го колеса (рис. 1,б). Поскольку на каждом колесе расположено по шесть роликов, то $-30^\circ \leq \tilde{\varphi}_i \leq 30^\circ$. При смене контактирующего ролика $\tilde{\varphi}_i$ скачкообразно изменяется на 60° .

Считая, что угол поворота i -го колеса φ_i отсчитывается от направления отрицательной полуоси C_iZ , угол $\tilde{\varphi}_i$ можно определить с помощью операции взятия остатка от деления mod по формуле $\tilde{\varphi}_i = (\varphi_i + 30^\circ) \text{mod}(60^\circ) - 30^\circ$.

Поверхности всех роликов колеса касаются одной цилиндрической поверхности радиуса R , поэтому точка контакта P_i ролика с опорной поверхностью смещена отно-

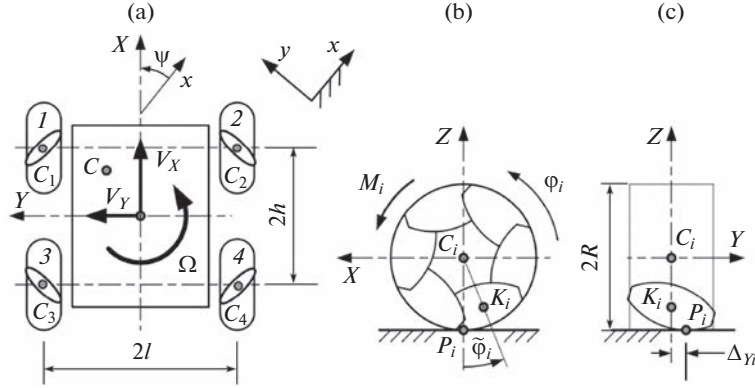


Рис. 1. Схема мобильной платформы: (a) – платформа, (b) – меканум-колесо, (c) – контактирующий ролик.

сительно центра колеса C_i в направлении оси OY на величину $\Delta_{Yi} = R_d \tan \delta_i \tan \tilde{\phi}_i$ [3, 4], где $R_d = |C_i K_i|$ (см. рис. 1, c). Отметим, что в рассматриваемом случае геометрия роликов обеспечивает отсутствие вертикальных вибраций центра колеса при движении по плоскости.

3. Математическая модель меканум-платформы. Исследование влияния модели нормальных реакций будем проводить путем сравнительного анализа динамики нескольких моделей системы. Во всех рассмотренных моделях ролики считаются безынерционными, а в сочленениях тел действуют линейные по скоростям силы трения.

Модель 1. Считается, что ролики колес непрерывно контактируют с опорной поверхностью, а точка контакта находится на центральном поперечном сечении (т.е. $\tilde{\phi}_i \equiv 0$). В этом случае

$$R\dot{\phi}_i = V_X + (V_Y + \rho_{Xi}\Omega) \tan \delta_i - \rho_{Yi}\Omega, \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (3.1)$$

Уравнения динамики для модели 1 построены с учетом неголономных связей (3.1) в работе [3].

Две другие модели описываются уравнениями динамики [5–7]:

$$\begin{aligned} m_R (\dot{V}_X - \Omega V_Y) - m (a_Y \dot{\Omega} + a_X \Omega^2) &= \sum_{i=1}^4 F_{Xi} \\ m_R (\dot{V}_Y + \Omega V_X) + m (a_X \dot{\Omega} - a_Y \Omega^2) &= \sum_{i=1}^4 F_{Yi} \\ I_R \dot{\Omega} + m a_X (\dot{V}_Y + \Omega V_X) - m a_Y (\dot{V}_X - \Omega V_Y) &= \sum_{i=1}^4 [M_{Zi}^f + F_{Yi} \rho_{Xi} - F_{Xi} (\rho_{Yi} + \Delta_{Yi})] \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} I_{wY} \ddot{\phi}_i &= M_i + M_{Yi}^f - F_{Xi} R - \mu_w \dot{\phi}_i \\ J_r \ddot{\gamma}_i &= M_{Xi}^f \cos \tilde{\phi}_i \cos \delta_i + M_{Yi}^f \sin \delta_i - M_{Zi}^f \sin \tilde{\phi}_i \cos \delta_i - \mu_r \dot{\gamma}_i - \\ &- F_{Xi} [-\Delta_{Yi} \sin \tilde{\phi}_i \cos \delta_i + \sin \delta_i (R - R_d \cos \tilde{\phi}_i)] - F_{Yi} \cos \delta_i (R_d - R \cos \tilde{\phi}_i) \end{aligned}$$

где $V_X = \dot{x}_O \cos \psi + \dot{y}_O \sin \psi$, $V_Y = -\dot{x}_O \sin \psi + \dot{y}_O \cos \psi$ – продольная и поперечная скорости платформы; $\Omega = \dot{\psi}$ – угловая скорость платформы; $m_R = m + 4m_w$ – масса робота, состоящей из платформы массой m и 4-х колес массой m_w каждое; I_R – момент инерции робота относительно вертикальной оси OZ ; a_X и a_Y – абсцисса и ордината центра

масс платформы C в системе координат $OXYZ$; I_{wy} — момент инерции i -го колеса относительно оси C_iY ; J_r — момент инерции контактирующего ролика i -го колеса относительно собственной оси, который является малой величиной и вводится для устранения проблем с не единственностью решения последнего уравнения системы (3.2) в моменты смены роликов; μ_w и μ_r — коэффициенты линейного трения в сочленениях звеньев “платформа—колесо” и “колесо—ролик” соответственно; M_i — управляющие моменты, создаваемые приводами колес; F_{Xi} и F_{Yi} — проекции сил трения скольжения на подвижные оси OX и OY соответственно; M_{Zi} — момент трения верчения; M_{Xi} и M_{Yi} — проекции момента трения качения на оси OX и OY соответственно.

Модель 2. Описывается уравнениями (3.2) при использовании выражений для нормальных реакций опор, полученных при статическом подходе [5, 6].

Модель 3. Описывается уравнениями (3.2) при использовании выражений для нормальных реакций опор, полученных при динамическом подходе.

Ниже представлен вывод модели нормальных реакций опор из условия динамической согласованности.

4. Модель нормальных реакций. Для определения нормальных реакций из условий динамической согласованности запишем теорему об изменении количества движения системы в проекциях на ось OZ и теорему об изменении момента количества движения системы в проекциях на оси OX и OY , а также примем во внимание условие совместности деформаций [5]:

$$\begin{aligned} 0 &= N_1 + N_2 + N_3 + N_4 - mg - 4m_w g \\ -I_{wy} \Omega \sum_{i=1}^4 \ddot{\phi}_i &= -(N_2 + N_4)l + (N_1 + N_3)l - mga_Y + \sum_{i=1}^4 (M_{Xi}^f + F_{Yi}R) \\ I_{wy} \sum_{i=1}^4 \ddot{\phi}_i &= -(N_1 + N_2)h + (N_3 + N_4)h + mga_X + \sum_{i=1}^4 (M_{Yi}^f - F_{Xi}R) \\ N_1 + N_4 &= N_2 + N_3 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Можно переписать систему уравнений (4.1) в силу уравнений динамики (3.2) для угловых скоростей колес в виде:

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 + N_3 + N_4 &= mg + 4m_w g \\ (N_1 + N_3)l - (N_2 + N_4)l &= mga_Y - I_{wy} \Omega \sum_{i=1}^4 \ddot{\phi}_i - \sum_{i=1}^4 (M_{Xi}^f + F_{Yi}R) \\ (N_3 + N_4)h - (N_1 + N_2)h &= -mga_X + \sum_{i=1}^4 (M_{Yi}^f - F_{Xi}R) \\ N_1 - N_2 - N_3 + N_4 &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Учитывая, что в выражения для сил и моментов трения нормальные реакции входят линейно, можно представить силы и моменты трения в виде:

$$F_{Xi} = N_i \tilde{F}_{Xi}, \quad F_{Yi} = N_i \tilde{F}_{Yi}, \quad M_{Zi}^f = N_i \tilde{M}_{Zi}^f, \quad M_{Xi}^f = N_i \tilde{M}_{Xi}^f, \quad M_{Yi}^f = N_i \tilde{M}_{Yi}^f \quad (4.3)$$

где $\tilde{F}_{Xi}$, $\tilde{F}_{Yi}$, $\tilde{M}_{Zi}^f$, $\tilde{M}_{Xi}^f$, $\tilde{M}_{Yi}^f$ — вспомогательные функции компонент трения, независимые от нормальных реакций опор. Принимая во внимание введенные обозначения, систему уравнений (4.2) можно записать в виде:

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = mg + 4m_w g$$

$$\begin{aligned}
& N_1 \left(l + \tilde{M}_{X1}^f + \tilde{F}_{Y1} R \right) + N_3 \left(l + \tilde{M}_{X3}^f + \tilde{F}_{Y3} R \right) + N_2 \left(-l + \tilde{M}_{X2}^f + \tilde{F}_{Y2} R \right) + \\
& + N_4 \left(-l + \tilde{M}_{X4}^f + \tilde{F}_{Y4} R \right) = mga_Y - I_{wY} \Omega \sum_{i=1}^4 \dot{\phi}_i \\
& (N_3 + N_4) h - (N_1 + N_2) h = -mga_X + \sum_{i=1}^4 (M_i - \mu_w \dot{\phi}_i) \\
& N_1 - N_2 - N_3 + N_4 = 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений (4.4) имеет вид:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{m_R g h (2l - W_2 - W_4) + 2hb_1 + b_2 (2l - W_2 + W_3)}{2h(4l + W_1 + W_3 - W_2 - W_4)} \\
N_2 &= \frac{m_R g h (2l + W_1 + W_3) - 2hb_1 + b_2 (2l + W_1 - W_4)}{2h(4l + W_1 + W_3 - W_2 - W_4)} \\
N_3 &= \frac{m_R g h (2l - W_2 - W_4) + 2hb_1 - b_2 (2l + W_1 - W_4)}{2h(4l + W_1 + W_3 - W_2 - W_4)} \\
N_4 &= \frac{m_R g h (2l + W_1 + W_3) - 2hb_1 - b_2 (2l - W_2 + W_3)}{2h(4l + W_1 + W_3 - W_2 - W_4)}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

где для краткости введены вспомогательные обозначения:

$$\begin{aligned}
W_1 &= \tilde{M}_{X1}^f + \tilde{F}_{Y1} R, & W_2 &= \tilde{M}_{X2}^f + \tilde{F}_{Y2} R \\
W_3 &= \tilde{M}_{X3}^f + \tilde{F}_{Y3} R, & W_4 &= \tilde{M}_{X4}^f + \tilde{F}_{Y4} R \\
b_1 &= mga_Y - I_{wY} \Omega \sum_{i=1}^4 \dot{\phi}_i, & b_2 &= mga_X - \sum_{i=1}^4 (M_i - \mu_w \dot{\phi}_i)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Для замыкания уравнений движения в *моделях 2 и 3* рассмотрим модель поликомпонентного трения [8], учитывающего скольжение и верчение:

$$\begin{aligned}
F_{Xi} &= - \frac{f N_i V_{PiX}}{\sqrt{V_{PiX}^2 + V_{PiY}^2} + \varepsilon + \frac{8}{3\pi} \chi |\omega_{riZ}|} \\
F_{Yi} &= - \frac{f N_i V_{PiY}}{\sqrt{V_{PiX}^2 + V_{PiY}^2} + \varepsilon + \frac{8}{3\pi} \chi |\omega_{riZ}|} \\
M_{Zi}^f &= - \frac{3\pi\chi}{16} f N_i \frac{\chi \omega_{riZ}}{\chi |\omega_{riZ}| + \frac{15\pi}{16} \sqrt{V_{PiX}^2 + V_{PiY}^2} + \varepsilon}, & M_{Xi}^f &= M_{Yi}^f = 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

где f — коэффициент трения скольжения; χ — радиус площадки контакта; ε — малый параметр, введенный для устранения особенности в окрестности нулевых скоростей; N_i — нормальная реакция опоры, действующая на контактирующий ролик i -го колеса. При этом площадка контакта ролика i -го колеса с опорной поверхностью предполагается кругом с центром в точке P_i .

При использовании модели трения (4.7) выражения для вспомогательных функций сил и моментов трения имеют вид:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{Xi} &= -\frac{fV_{PiX}}{\sqrt{V_{PiX}^2 + V_{PiY}^2 + \varepsilon} + \frac{8}{3\pi}\chi|\omega_{riZ}|} \\
\tilde{F}_{Yi} &= -\frac{fV_{PiY}}{\sqrt{V_{PiX}^2 + V_{PiY}^2 + \varepsilon} + \frac{8}{3\pi}\chi|\omega_{riZ}|} \\
\tilde{M}_{Zi}^f &= -\frac{3\pi\chi}{16}f \frac{\chi\omega_{riZ}}{\chi|\omega_{riZ}| + \frac{15\pi}{16}\sqrt{V_{PiX}^2 + V_{PiY}^2 + \varepsilon}}, \quad \tilde{M}_{Xi}^f = \tilde{M}_{Yi}^f = 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Отметим, что функции компонент трения ограничены неравенствами:

$$|\tilde{F}_{Xi}| \leq f, \quad |\tilde{F}_{Yi}| \leq f, \quad \sqrt{\tilde{F}_{Xi}^2 + \tilde{F}_{Yi}^2} \leq f, \quad |\tilde{M}_{Zi}^f| \leq \frac{3\pi\chi}{16}f \tag{4.9}$$

а величины, введенные в обозначениях (4.6), с учетом (4.9) ограничиваются соотношениями:

$$|W_i| \leq fR, \quad (i = 1, \dots, 4) \tag{4.10}$$

Оценим порядки величин, входящих в модель нормальных реакций (4.5) и возникающих из условия динамической согласованности:

$$\begin{aligned}
2l\left(1 - \frac{fR}{l}\right) &\leq (2l - W_2 - W_4) \leq 2l\left(1 + \frac{fR}{l}\right) \\
2l\left(1 - \frac{fR}{l}\right) &\leq (2l + W_1 + W_3) \leq 2l\left(1 + \frac{fR}{l}\right) \\
2l\left(1 - \frac{fR}{l}\right) &\leq (2l - W_2 + W_3) \leq 2l\left(1 + \frac{fR}{l}\right) \\
2l\left(1 - \frac{fR}{l}\right) &\leq (2l + W_1 - W_4) \leq 2l\left(1 + \frac{fR}{l}\right) \\
4l\left(1 - \frac{fR}{l}\right) &\leq (4l + W_1 + W_3 - W_2 - W_4) \leq 4l\left(1 + \frac{fR}{l}\right)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Рассмотрев в качестве примера значения параметров для робота *KUKA youBot* [5]: $f = 0.5$, $R = 0.05$ м, $l = 0.15$ м, получаем, что изменения величин нормальных реакций, связанные с влиянием динамики механум-платформы, могут оцениваться в $\frac{fR}{l} = \frac{0.5 \cdot 0.05}{0.15} \approx 0.167 = 16.7\%$.

В частности, при движении платформы вдоль ее поперечной оси ($V_X = 0, V_Y \neq 0, \Omega = 0$) проекция силы трения скольжения на ось Y , действующей на контактирующий ролик i -го колеса, будет максимальна по модулю ($|\tilde{F}_{Yi}| = f, |W_i| = fR$). При этом в рамках неголономной модели боковому движению соответствуют равные по модулю значения управляющих моментов ($M_2 = M_3 = -M_1 = -M_4$) и угловых скоростей вращения колес ($\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_3 = -\dot{\varphi}_1 = -\dot{\varphi}_4$). Тогда выражения нормальных реакций опор (4.5) при поперечном движении мобильной платформы примут вид:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{m_R g}{4} \left(1 \mp \frac{fR}{l}\right) + \frac{mg}{4} \left(\frac{a_Y}{l} + \frac{a_X}{h}\right), & N_2 &= \frac{m_R g}{4} \left(1 \pm \frac{fR}{l}\right) + \frac{mg}{4} \left(-\frac{a_Y}{l} + \frac{a_X}{h}\right) \\
N_3 &= \frac{m_R g}{4} \left(1 \mp \frac{fR}{l}\right) + \frac{mg}{4} \left(\frac{a_Y}{l} - \frac{a_X}{h}\right), & N_4 &= \frac{m_R g}{4} \left(1 \pm \frac{fR}{l}\right) + \frac{mg}{4} \left(-\frac{a_Y}{l} - \frac{a_X}{h}\right)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

где знак перед слагаемым fR/l в формулах (4.12) зависит от направления движения платформы вправо ($V_Y < 0$) или влево ($V_Y > 0$).

Заметим, что приведенная выше оценка максимальных отклонений (в 16.7%) нормальных реакций от значений, полученных для покоящейся платформы, явно просматривается из формул (4.12) при нулевых смещениях центра масс мобильной платформы ($a_X = a_Y = 0$). А в случае смещенного центра масс платформы оценка максимальных отклонений нормальных реакций может изменяться в зависимости от величины смещения центра масс платформы.

Стоит отметить, что при исследовании динамики систем с трением (или односторонними связями) [14, 15] интерес представляют условия безотрывного движения контактирующих тел по опорной поверхности, которые могут быть сформулированы, как положительная определенность нормальных реакций опор ($N_i \geq 0$). Поэтому ниже получим оценку максимальных управляющих моментов из условий безотрывности движения контактирующих роликов по опорной поверхности.

Для этого рассмотрим движение платформы вдоль ее продольной оси ($V_X \neq 0$, $V_Y = 0$, $\Omega = 0$). В этом случае проекция силы трения скольжения на ось Y , действующей на контактирующий ролик i -го колеса, будет близка к нулю ($|\tilde{F}_{Yi}| = 0$, $|W_i| = 0$). При этом в рамках неголономной модели продольному движению механум-платформы соответствуют равные значения управляющих моментов ($M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_p$) и угловых скоростей вращения колес ($\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 = \dot{\phi}_3 = \dot{\phi}_4 = \dot{\phi}_p$). Здесь M_p , $\dot{\phi}_p$ – значения управляющего момента и угловой скорости вращения колес, которые соответствуют программному движению. Тогда выражения нормальных реакций опор (4.5) при продольном движении мобильной платформы примут вид:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{m_R g}{4} + \frac{mg}{4} \left(\frac{a_Y}{l} + \frac{a_X}{h} \right) - \frac{M_p - \mu_w \dot{\phi}_p}{h} \\ N_2 &= \frac{m_R g}{4} + \frac{mg}{4} \left(-\frac{a_Y}{l} + \frac{a_X}{h} \right) - \frac{M_p - \mu_w \dot{\phi}_p}{h} \\ N_3 &= \frac{m_R g}{4} + \frac{mg}{4} \left(\frac{a_Y}{l} - \frac{a_X}{h} \right) + \frac{M_p - \mu_w \dot{\phi}_p}{h} \\ N_4 &= \frac{m_R g}{4} + \frac{mg}{4} \left(-\frac{a_Y}{l} - \frac{a_X}{h} \right) + \frac{M_p - \mu_w \dot{\phi}_p}{h} \end{aligned} \quad (4.13)$$

По формулам (4.13) можно получить ограничения на величины управляющих моментов, при которых механум-платформа имеет четыре точки контакта с опорной поверхностью. При этом данные ограничивающие значения минимальны в момент начала движения, когда угловая скорость колес равна нулю ($\dot{\phi}_p = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{M_p}{h} &\leq \min \left\{ \frac{m_R g}{4} + \frac{mg}{4} \left(\frac{a_Y}{l} + \frac{a_X}{h} \right), \frac{m_R g}{4} + \frac{mg}{4} \left(-\frac{a_Y}{l} + \frac{a_X}{h} \right) \right\} \\ -\frac{M_p}{h} &\leq \min \left\{ \frac{m_R g}{4} + \frac{mg}{4} \left(\frac{a_Y}{l} - \frac{a_X}{h} \right), \frac{m_R g}{4} + \frac{mg}{4} \left(-\frac{a_Y}{l} - \frac{a_X}{h} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Здесь первое неравенство из (4.14) ограничивает значения управляющих моментов при движении вперед ($V_X > 0$), возникающего при $M_p > 0$; а второе неравенство – при движении назад ($V_X < 0$), возникающего при $M_p < 0$. В случае совпадения центра масс платформы с ее геометрическим центром ($a_X = a_Y = 0$) ограничения модуля управляющих моментов описываются неравенством $M_p \leq \frac{m_R g h}{4}$. Для параметров ро-

бота *youBot* [5]: $m_R = 35.6$ кг, $h = 0.235$ м, ограничения могут быть оценены, как $M_p = \frac{35.6 \cdot 9.81 \cdot 0.235}{4} \approx 20.52$ Нм.

Далее при проведении численного моделирования с целью упрощения модели (4.5) и уменьшения вычислительных затрат можно использовать линеаризованные выражения:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{m_R g}{4} \left(1 - \frac{W_1 + W_2 + W_3 + W_4}{4l} \right) + b_2 \left(\frac{4l - W_1 - W_2 + W_3 + W_4}{16hl} \right) + b_1 \left(\frac{2l - W_3 + W_4}{8l^2} \right) \\
 N_2 &= \frac{m_R g}{4} \left(1 + \frac{W_1 + W_2 + W_3 + W_4}{4l} \right) + b_2 \left(\frac{4l + W_1 + W_2 - W_3 - W_4}{16hl} \right) - \\
 &\quad - b_1 \left(\frac{2l - W_3 + W_4}{8l^2} \right) \\
 N_3 &= \frac{m_R g}{4} \left(1 - \frac{W_1 + W_2 + W_3 + W_4}{4l} \right) - b_2 \left(\frac{4l + W_1 + W_2 - W_3 - W_4}{16hl} \right) + \\
 &\quad + b_1 \left(\frac{2l - W_1 + W_2}{8l^2} \right) \\
 N_4 &= \frac{m_R g}{4} \left(1 + \frac{W_1 + W_2 + W_3 + W_4}{4l} \right) - b_2 \left(\frac{4l - W_1 - W_2 + W_3 + W_4}{16hl} \right) - b_1 \left(\frac{2l - W_1 + W_2}{8l^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Линеаризованные выражения (4.15) для нормальных реакций опор, найденные из условий динамической согласованности, будут использованы в модели 3 при численном моделировании.

Кинематические соотношения для скорости точки P_i и угловой скорости верчения контактирующих роликов имеют вид [3, 5–7]:

$$\begin{aligned}
 V_{PiX} &= V_X - \rho_{Yi} \Omega - \dot{\phi}_i R + \dot{\gamma}_i \sin \delta_i (R_d \cos \tilde{\phi}_i - R) - \Delta_{Yi} (\Omega - \dot{\gamma}_i \sin \tilde{\phi}_i \cos \delta_i) \\
 V_{PiY} &= V_Y + \rho_{Xi} \Omega + \dot{\gamma}_i \cos \delta_i (R \cos \tilde{\phi}_i - R_d) \\
 \omega_{riZ} &= \Omega - \dot{\gamma}_i \sin \tilde{\phi}_i \cos \delta_i
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Модель поликомпонентного трения (4.7) и кинематические выражения (4.16) используются в моделях 2 и 3. При этом в модели 3 для вычисления нормальных реакций по формулам (4.15) используются выражения (4.8).

5. Результаты моделирования. Результаты численного решения уравнений движения для перечисленных моделей представлены на рис. 2. Во всех моделях использовались законы изменения управляющих моментов $M_i = M_i(t)$, при которых в соответствии с моделью 1 платформа совершает поступательное движение ($\psi = 90^\circ$), а ее геометрический центр O равномерно перемещается по окружности.

По рис. 2,а видно, что зависимости продольной скорости платформы V_X во всех рассматриваемых моделях динамики достаточно близки. А в зависимостях для поперечной скорости платформы V_Y (см. рис. 2,б) в моделях 2 и 3 учет конструкции меканум-колес приводит к снижению скорости по сравнению с поперечной скоростью, полученной для неголономной модели 1.

Отметим, что влияние изменения нормальных реакций опор при движении меканум-платформы хорошо просматривается по графикам для угловой скорости платформы Ω и ее угла курса ψ (рис. 2,с и рис. 2,д). Отклонение угла курса от программного значения в модели 3 (при использовании динамического подхода к вычислению нормальных реакций) больше, чем в модели 2 (при использовании статического подхода к вычислению нормальных реакций).

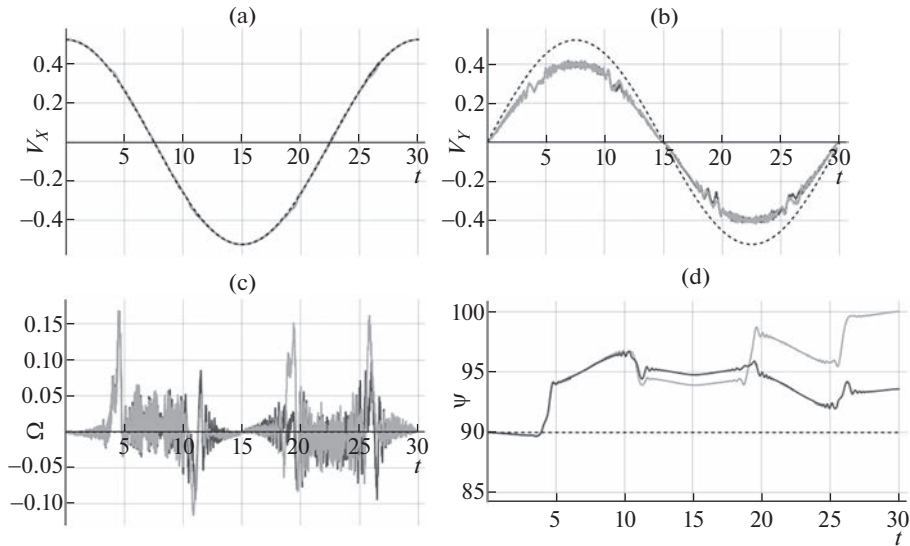


Рис. 2. Результаты моделирования: (а) — продольная скорость платформы V_x (м/с), (б) — поперечная скорость платформы V_y (м/с), (с) — угловая скорость платформы Ω (рад/с), (д) — угол курса платформы Ψ (°). (модель 1 — штриховая черная линия; модель 2 — сплошная темно-серая линия; модель 3 — сплошная светло-серая линия).

На рис. 3 представлены графики модуля силы трения скольжения и момента трения вращения в зависимости от модуля скорости скольжения P_i и угловой скорости вращения контактирующего ролика.

Отметим, что ограничения минимальных значений модуля силы трения скольжения пропорциональны модулю угловой скорости вращения контактирующего ролика. А ограничения максимальных по модулю значений момента трения вращения обратно пропорциональны модулю скорости скольжения центра пятна контакта. По рис. 3 можно наблюдать наличие зон “застоя”, при которых скольжение центра пятна контакта и/или вращение контактирующего ролика отсутствуют.

Рассмотрим, как изменяется величина нормальной реакции опоры, действующая на контактирующие ролики механум-колес, на примере 1-го колеса. На рис. 4 приведены зависимости нормальной реакции опоры N_1 при использовании статического (модель 2) и динамического (модель 3) подходов. Видно, что нормальные реакции опор в модели 3 имеют высокочастотную составляющую, связанную со сменой роликов и возникающую из-за скачкообразных изменений смещения Δy_i центра пятна контакта вдоль оси вращения колеса. При рассмотренном движении изменения нормальной реакции опоры 1-го колеса составляли около 5–6% от величины нормальной реакции, вычисленной при статическом подходе.

Для демонстрации влияния изменчивость нормальных реакций опор на динамику механум-платформы были построены траектории движения геометрического центра платформы (см. рис. 5).

Из рис. 5 видно, что для неголономной модели 1 используемое программное управление приводит к точному исполнению программного движения, а в моделях 2 и 3 учет конструкции механум-колес приводит к отклонениям от программного движения.

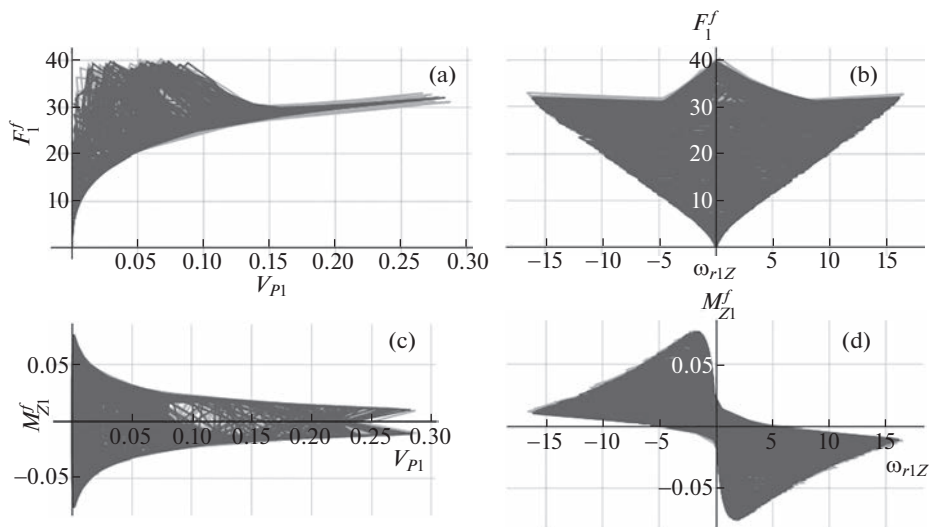


Рис. 3. Результаты моделирования для контактирующего ролика 1-го колеса: (а) – зависимость модуля силы трения $F_1^f = \sqrt{F_{X1}^2 + F_{Y1}^2}$ (Н) от скорости скольжения $V_{P1} = \sqrt{V_{P1X}^2 + V_{P1Y}^2}$ (м/с), (б) – зависимость модуля силы трения $F_1^f = \sqrt{F_{X1}^2 + F_{Y1}^2}$ (Н) от угловой скорости вращения ω_{r1Z} (рад/с), (с) – зависимость момента трения вращения M_{Z1}^f (Нм) от скорости скольжения $V_{P1} = \sqrt{V_{P1X}^2 + V_{P1Y}^2}$ (м/с), (д) – зависимость момента трения вращения M_{Z1}^f (Нм) от угловой скорости вращения ω_{r1Z} (рад/с). (модель 2 – сплошная темно-серая линия; модель 3 – сплошная светло-серая линия).

При этом отметим, что указанные отклонения от программного движения существенно изменяются при учете изменчивости нормальных реакций опор. Как следствие, изменения нормальных реакций могут существенно повлиять на точность движения механум-платформы при использовании программного управления.

6. Заключение. В статье представлена математическая модель динамики всенаправленной платформы, учитывающая конструкцию механум-колес и поликомпонентное контактное трение. При этом одним из основных результатов является построение модели нормальных реакций опор в точках контакта из условий динамической согласованности, которые позволяют учесть изменение нормальных реакций в зависимости от параметров движения механум-платформы.

Даны оценки максимальных отклонений нормальных реакций опор, обусловленных динамикой механум-платформы, от значений нормальных реакций, рассчитанных для покоящейся мобильной платформы, на примере робота *KUKA youBot* равные 16.7%. Получены неравенства, ограничивающие максимальные значения управляющих моментов, при выполнении которых не происходит отрыва контактирующих роликов механум-колес от опорной поверхности.

По результатам моделирования движения всенаправленной платформы при программном управлении (на примере движения по окружности) показано, что нормальные реакции изменяются на 5–6% от величины нормальной реакции, рассчитанной в случае покоящейся механум-платформы, что соответствует полученным оценкам.

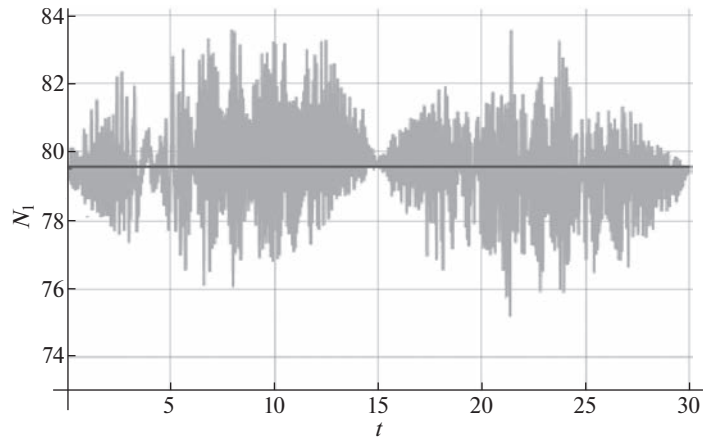


Рис. 4. Нормальная реакция опоры N_1 (Н), действующая на контактирующий ролик 1-го механум-колеса: модель 2 (статический подход) – сплошная темно-серая линия; модель 3 (динамический подход) – сплошная светло-серая линия.

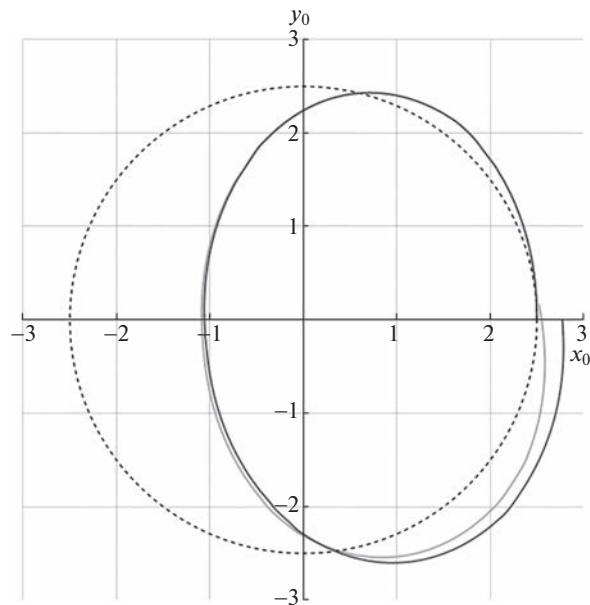


Рис. 5. Траектория движения геометрического центра платформы $y_O(x_O)$ (в метрах) (модель 1 – штриховая черная линия; модель 2 – сплошная темно-серая линия; модель 3 – сплошная светло-серая линия).

Установлено, что изменения нормальных реакций могут привести к снижению точности движения механум-платформы, получаемой при программном управлении.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00831, <https://rscf.ru/project/22-2-00831/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 6. С. 142–149.
2. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. An omni-wheel vehicle on a plane and a sphere // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2011. V. 7. № 4. P. 785–801.
<https://doi.org/10.20537/nd1104004>
3. Adamov B.I. A Study of the Controlled Motion of a Four-wheeled Mecanum Platform // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2018. V. 14. № 2. P. 265–290.
<https://doi.org/10.20537/nd180209>
4. Gferrer A. Geometry and kinematics of the Mecanum wheel // Computer Aided Geometric Design. 2008. V. 25. № 9. P. 784–791.
<https://doi.org/10.1016/j.cagd.2008.07.008>
5. Adamov B.I., Saypulaev G.R. Research on the Dynamics of an Omnidirectional Platform Taking into Account Real Design of Mecanum Wheels (as Exemplified by KUKA youBot) // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2020. V. 16. № 2. P. 291–307.
<https://doi.org/10.20537/nd200205>
6. Adamov B.I., Saypulaev G.R. A Study of the Dynamics of an Omnidirectional Platform, Taking into Account the Design of Mecanum Wheels and Multicomponent Contact Friction // 2020 International Conference Nonlinearity, Information and Robotics (NIR). IEEE. 2020.
<https://doi.org/10.1109/nir50484.2020.9290193>
7. Adamov B.I., Saypulaev G.R. Influence of Dissipative Forces and the Design of Mecanum-Wheels on the Omnidirectional Platform Dynamics // 2021 International Conference “Nonlinearity, Information and Robotics” (NIR). IEEE. 2021.
<https://doi.org/10.1109/nir52917.2021.9666053>
8. Zhuravlev V.Ph., Klimov D.M. Global motion of the celt // Mech. Solids. 2008. V. 43. № 3. P. 320–327.
<https://doi.org/10.3103/s0025654408030023>
9. Kireenkov A.A., Semendyaev S.V., Filatov V.F. Experimental study of coupled twodimensional models of sliding and spinning friction // Mech. Solids. 2010. V. 45. № 6. P. 921–930.
<https://doi.org/10.3103/s0025654410060142>
10. Bayar G., Ozturk S. Investigation of The Effects of Contact Forces Acting on Rollers of a Mecanum Wheeled Robot // Mechatronics. 2020. V. 72. P. 102467.
<https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2020.102467>
11. Giurgiu T., Puica C., Pupaza C. et al. Mecanum wheel modeling for studying roller-ground contact issues // U.P.B. Sci. Bull. 2017. V. 79. № 2. P. 147–158.
12. Zbova A.A. A review of models of distributed dry friction // J. Appl. Math. Mech. 2016. V. 80. № 2. P. 141–148.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.06.008>
13. Иванов А.П. Об общих принципах механики в системах с трением // Сборник научно-методических статей. Т. 27. М.: МГУ, 2009. С. 69–83.
14. Иванов А.П. Основы теории систем с трением. М., Ижевск: НИЦ “РХД”, ИКИ. 2011. 304 с.
15. Розенблат Г.М. Динамические системы с сухим трением. М., Ижевск: НИЦ “РХД”. 2006. 204 с.

УДК 531.3

**КВАТЕРНИОННЫЕ МЕТОДЫ И РЕГУЛЯРНЫЕ МОДЕЛИ НЕБЕСНОЙ
МЕХАНИКИ И МЕХАНИКИ КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА:
ЛОКАЛЬНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ УРАВНЕНИЙ
ВОЗМУЩЕННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ
ТЕЛ, ПОРОЖДАЕМЫХ ГРАВИТАЦИОННЫМИ СИЛАМИ**

© 2023 г. Ю. Н. Челноков^{а,*}

^аИнститут проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия

*e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com

Поступила в редакцию 29.07.2022 г.

После доработки 15.09.2022 г.

Принята к публикации 19.09.2022 г.

Изучается проблема локальной регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел: устранения порождаемых силами гравитации особенностей типа сингулярности (деления на ноль) дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения материальной точки M , имеющей пренебрежимо малую массу, в окрестностях двух гравитирующих точек M_0 и M_1 с помощью записи уравнений движения во вращающихся системах координат, использования новых регулярных переменных и регуляризующего преобразования времени. Получены различные системы регулярных кватернионных дифференциальных уравнений (РКДУ) этой задачи. В качестве переменных в этих уравнениях выступают следующие группы переменных: 1) четырехмерные переменные Кустаанхеймо–Штифеля, кеплеровские энергии и время t , 2) расстояния от точки M до точек M_0 и M_1 , модули векторов моментов скоростей точки M относительно точек M_0 и M_1 , кеплеровские энергии, время t и параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), характеризующие ориентации орбитальных систем координат в инерциальной системе координат; 3) двухмерные переменные Леви-Чивита, описывающие движение точки M в идеальных системах координат, кеплеровские энергии, время t и параметры Эйлера, характеризующие ориентации идеальных систем координат в инерциальной системе координат и являющиеся оскулирующими элементами (медленно изменяющимися переменными) для движения точки M в окрестности гравитирующей точки M_0 или M_1 соответственно. Для построения РКДУ в качестве исходных использованы уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, записанные или в неголономных (азимутально свободных), или в орбитальных, или в идеальных системах координат; в качестве новых независимых переменных использованы “фиктивные” времена τ_0 и τ_1 (т.е. использованы регуляризующие дифференциальные преобразования времени Зундмана) или угловые переменные φ_0 и φ_1 , традиционно используемые при изучении орбитального движения в составе полярных координат. Для согласования двух используемых в окрестностях гравитирующих точек M_0 и M_1 независимых переменных использованы дополнительные дифференциальные уравнения.

Полученные различные локально регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел позволяют разработать регулярные аналитические и численные методы изучения движения тела пренебрежимо малой массы в окрестностях двух других тел, имеющих конечные массы, а также позволяют построить регулярные алгоритмы численного интегрирования этих уравнений. Уравнения могут быть эффективно использованы для

изучения орбитального движения небесных и космических тел и космических аппаратов, для прогноза их движения, а также для решения задач управления орбитальным движением космических аппаратов и решения задач инерциальной навигации в космосе.

Ключевые слова: регулярные кватернионные модели (уравнения траекторного движения) небесной механики и механики космического полета (астродинамики), возмущенная пространственная ограниченная задача трех тел, параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), кватернион поворота Гамильтона, переменные Кустаанхеймо–Штифеля и Леви-Чивита, космический аппарат, неголономная, орбитальная и идеальная системы координат

DOI: 10.31857/S0572329922600591, EDN: QWJVMZ

1. Регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи трех тел. В работе [1] (Aarseth, Zare, 1974) отмечается, что история регуляризации задачи трех тел начинается со знаменитых работ Пуанкаре (Poincare [2], 1907) и Зундмана (Sundman [3], 1912). Фактически Зундман решил общую задачу в принципе, исключая случай тройного столкновения, с помощью двух преобразований времени. К сожалению, как отмечают авторы работы [1], решения представлены бесконечными рядами и не раскрывают истинного характера движений. По мнению авторов этой работы, также сомнительно, что регуляризация задачи трех тел, предложенная в [4] (Lemaître, 1955) полезна с практической точки зрения в общем случае. Ими же отмечается, что в проблеме регуляризации общей задачи трех тел можно выделить два требования: 1) регуляризация всех столкновений двух тел с помощью одного “глобального” преобразования, 2) улучшенная обработка близких тройных столкновений. Примеры преобразований, удовлетворяющих первому требованию в плоской ограниченной задаче трех тел, приведены в работах [5] (Thiele, 1896), [6] (Burrau, 1906), [7] (Birkhoff, 1915) и [4] (Lemaître, 1955). Вальдфогель ([8], 1972) получил глобальную регуляризацию плоской задачи трех тел с произвольными массами. Полученные им уравнения симметричны относительно отдельных точечных масс и удовлетворяют обоим приведенным выше требованиям.

В работе [9] дано обобщение регуляризации Леви-Чивита в невозмущенной плоской ограниченной задаче трех тел. Для регуляризации уравнений задачи использованы комплексные переменные Леви-Чивита и преобразование времени, содержащее произведение возведенных в кубические степени расстояний от тела пренебрежимо малой массы до двух тел притяжения, имеющих конечные массы.

Отметим, что в целях регуляризации в задаче трех тел чаще используется другое преобразование времени, содержащее произведение расстояний от тела пренебрежимо малой массы до двух тел конечной массы, и что, по словам авторов работы [1], уравнения, получаемые с помощью преобразования времени, содержащего кубы расстояний, не являются регулярными, т.к. новое время стремится к бесконечности при столкновении двух тел.

В работе [1] с использованием канонического формализма Гамильтона и двух KS -преобразований (преобразований Кустаанхеймо–Штифеля) предложена регуляризация уравнений возмущенной пространственной неограниченной задачи трех тел. Она позволяет одной из частиц совершать столкновения с другими двумя, относительно движение которых описываются сингулярными, но хорошо ведущими себя при численном решении уравнениями.

Приведенная в этой работе восьмимерная регуляризация общей задачи трех тел, основанная на двойной KS -регуляризации, обладает следующими свойствами: 1) уравнения движения являются регулярными при столкновении двух тел; 2) уравнения движения хорошо решаются для случаев, близких к тройным столкновениям.

По словам Арсеза и Заре, предложенный в их работе [1] новый метод регуляризации общей задачи трех тел нельзя использовать для изучения задачи трех тел, в которой одна из частиц не имеет массы, т.е. для изучения ограниченной задачи трех тел. В то же самое время, по их словам, новый метод близко связан со стандартной *KS*-регуляризацией, которая разрешает одной из двух частиц быть невесомой.

Отметим широко цитируемую книгу Арсеза [10], в которой, в частности, излагаются регуляризации Леви-Чивита и Кустаанхеймо–Штифеля (*KS*-регуляризация) уравнений плоской и пространственной задачи двух тел, а также регуляризация Арсеза–Заре (Aarseth–Zare method) пространственной задачи трех тел и обсуждаются многие аспекты, связанные с их использованием (в том числе программные, алгоритмические и практические аспекты их использования).

В книге Бордовицыной [11] (с. 34–35) двойное *KS*-преобразование предлагается использовать (со ссылкой на работу [1]) для построения канонических уравнений возмущенной ограниченной задачи трех тел. Выписывается регуляризованный (преобразованный по методологии Арсеза и Заре) гамильтониан задачи и уравнения в общей стандартной гамильтоновой форме, имеющие порядок, равный восемнадцати. Отмечается, что в состав этих дифференциальных уравнений входят уравнения, определяющие временное преобразование и закон изменения энергии системы. Правые части дифференциальных уравнений задачи в работе [11] в явной форме не выписаны, т.е. не выписаны в форме, получающейся после выполнения операций дифференцирования гамильтониана по переменным задачи (как, впрочем, такие уравнения не выписаны и в работе [1]). Это не позволяет оценить полностью, какими свойствами будут обладать уравнения, полученные указанным в работе [11] способом.

Вместе с тем, как отмечается в [1], устранение особенности в гамильтониане не обязательно влечет за собой исключение сингулярных слагаемых из уравнений движения. По словам авторов [1] неограниченная и ограниченная задачи трех тел имеют существенное различие. Если в невозмущенной неограниченной задаче трех тел существует интеграл энергии, то в невозмущенной ограниченной задаче трех тел такого интеграла не существует, что затрудняет построение удобных регулярных уравнений этой задачи.

В работах Челнокова [12–14] разработан кватернионный метод регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел с использованием переменных Кустаанхеймо–Штифеля, методологически тесно связанный с кватернионным методом регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, предложенным автором настоящей работы в [15, 16] (см. также [17, 18]). Получены различные локальные и глобальные регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (как круговой, так и некруговой задачи), т.е. уравнения, регулярные в окрестности первого или второго тела конечной массы, и уравнения, регулярные одновременно как в окрестности первого, так и в окрестности второго тел, имеющих конечные массы. Уравнения представляют собой системы нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений десятого или одиннадцатого, или девятнадцатого порядков относительно переменных Кустаанхеймо–Штифеля, их первых производных, кеплеровских или полных энергий, или переменных, являющихся постоянными интегрирования Якоби в случае невозмущенной пространственной круговой ограниченной задачи трех тел, а также относительно времени и вспомогательной временной переменной. Полученные уравнения позволяют построить различные регулярные алгоритмы интегрирования дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. Настоящая работа является развитием этих работ.

2. Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, построенные с использованием кватернионов

ориентации двух неголономных (азимутально свободных) систем координат и переменных Кустаанхеймо—Штифеля. Эти регулярные уравнения могут быть получены из дифференциальных уравнений (5.4)–(5.9) [19] возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, записанных (с использованием параметров Родрига—Гамильтона (Эйлера)) в неголономных (азимутально свободных) сопровождающих системах координат $M_i X_i Y_i Z_i$ ($i = 0, 1$) и имеющих вид

$$\begin{aligned} \ddot{r}_0 - r_0^{-3}(c_{02}^2 + c_{03}^2) + fm_0 r_0^{-2} &= -fm_1 r_0 r_{01}^{-3} + fm_1(r_{01}^{-3} - r_1^{-3})x_1' + p_1' \\ &= -fm_1 r_1^{-3} + fm_1(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})x_{01}' + p_1' \\ c_{01} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{c}_{02} &= -fm_1(r_{01}^{-3} - r_1^{-3})r_0 z_1' - r_0 p_3' = -fm_1(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})r_0 z_{01}' - r_0 p_3' \\ \dot{c}_{03} &= fm_1(r_{01}^{-3} - r_1^{-3})r_0 y_1' + r_0 p_2' = fm_1(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})r_0 y_{01}' + r_0 p_2' \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} 2d\lambda_0/dt &= r_0^{-2}\lambda_0 \circ \mathbf{C}_0 \\ \lambda_0 &= \lambda_{00} + \lambda_{01}\mathbf{i} + \lambda_{02}\mathbf{j} + \lambda_{03}\mathbf{k}, \quad \mathbf{C}_0 = c_{02}\mathbf{j} + c_{03}\mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 - r_1^{-3}(c_{12}^2 + c_{13}^2) + fm_1 r_1^{-2} &= -fm_0 r_1 r_{01}^{-3} + fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})x_0'' + p_1'' = \\ &= -fm_0 r_1 r_0^{-3} + fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})x_{01}'' + p_1'' \\ c_{11} &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{c}_{12} &= -fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})r_1 z_0'' - r_1 p_3'' = -fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})r_1 z_{01}'' - r_1 p_3'' \\ \dot{c}_{13} &= -fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})r_1 y_0'' + r_1 p_2'' = fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})r_1 y_{01}'' + r_1 p_2'' \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} 2d\lambda_1/dt &= r_0^{-2}\lambda_1 \circ \mathbf{C}_1 \\ \lambda_1 &= \lambda_{10} + \lambda_{11}\mathbf{i} + \lambda_{12}\mathbf{j} + \lambda_{13}\mathbf{k}, \quad \mathbf{C}_1 = c_{12}\mathbf{j} + c_{13}\mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.6)$$

В уравнениях возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (2.1)–(2.3) и (2.4)–(2.6) f – гравитационная постоянная, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – векторные мнимые единицы Гамильтона; в качестве переменных выступают расстояния r_0 и r_1 от точки M , имеющей пренебрежимо малую массу, до точек M_0 и M_1 , имеющих массы m_0 и m_1 ; производные от них $\dot{r}_0$ и $\dot{r}_1$ по времени t (проекции векторов скоростей $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_1$ точки M в системах координат $M_0 X_0 Y_0 Z_0$ и $M_1 X_1 Y_1 Z_1$ соответственно на направления радиус-векторов $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_1$); проекции c_{02}, c_{03} и c_{12}, c_{13} векторов $\mathbf{c}_0$ и $\mathbf{c}_1$ моментов скоростей $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_1$ точки M в системах координат $M_0 X_0 Y_0 Z_0$ и $M_1 X_1 Y_1 Z_1$ относительно точек M_0 и M_1 на оси вращающихся систем координат $M_0' X_0' Y_0' Z_0'$ и $M_1' X_1' Y_1' Z_1'$ соответственно и параметры Родрига—Гамильтона (Эйлера) λ_{0j} и λ_{1j} ($j = 0, 1, 2, 3$) (компоненты кватернионов λ_0 и λ_1), характеризующие ориентации систем координат $M_0' X_0' Y_0' Z_0'$ и $M_1' X_1' Y_1' Z_1'$ в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$.

Начала систем координат $M_0 X_0 Y_0 Z_0$ и $M_1 X_1 Y_1 Z_1$ находятся в точках M_0 и M_1 , а их координатные оси параллельны одноименным осям инерциальной системы координат $O\xi\eta\zeta$. Радиус-векторы $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_1$ точки M проводятся из точек M_0 и M_1 соответственно. Система координат $M_i' X_i' Y_i' Z_i'$ ($i = 0, 1$) вводится следующим образом: ее ось $M_i' X_i'$ направляется вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}_i$, произвольно задаваемая проекция ω_i вектора ее абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_i$ на направление радиус-вектора $\mathbf{r}_i$ (ось $M_i' X_i'$) полага-

ется равной нулю. Система координат $M_i'X_i'Y_i'Z_i'$ вращается с абсолютной угловой скоростью ω_i , коллинеарной вектору момента скорости $\mathbf{c}_i$: $\omega_i = r_i^{-2}\mathbf{c}_i$, $i = 0, 1$.

Величины $x_1', y_1', z_1', x_{01}', y_{01}', z_{01}'$ и p_1', p_2', p_3' в уравнениях (2.1)–(2.3) являются проекциями радиус-векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{01} = \overline{M_0M_1}$ и вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения точки M на оси вращающейся системы координат $M_0'X_0'Y_0'Z_0'$, а величины $x_0'', y_0'', z_0''; x_{01}'', y_{01}'', z_{01}''$ и p_1'', p_2'', p_3'' — проекциями радиус-векторов $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_{01}$ и вектора ускорения $\mathbf{p}$ на оси вращающейся системы координат $M_1'X_1'Y_1'Z_1'$.

В дальнейшем будут также использованы следующие обозначения: x_i, y_i, z_i ($i = 0, 1$) — декартовы координаты точки M в системе координат $M_iX_iY_iZ_i$; x_{01}, y_{01}, z_{01} — проекции вектора $\mathbf{r}_{01} = \overline{M_0M_1}$ на оси системы координат $M_0X_0Y_0Z_0$ (координаты точки M_1 в системе координат $M_0X_0Y_0Z_0$); $x_{10} = -x_{01}, y_{10} = -y_{01}, z_{10} = -z_{01}$ — проекции вектора $\mathbf{r}_{10} = -\mathbf{r}_{01}$ на оси системы координат $M_1X_1Y_1Z_1$ (координаты точки M_0 в системе координат $M_1X_1Y_1Z_1$); $v_{i1} = \dot{x}_i, v_{i2} = \dot{y}_i, v_{i3} = \dot{z}_i$ ($i = 0, 1$) — проекции вектора скорости $\mathbf{v}_i$ точки M в системе координат $M_iX_iY_iZ_i$ на ее же координатные оси, совпадающие с их проекциями на оси инерциальной системы координат $O\xi\eta\zeta$ (верхняя точка — символ дифференцирования по времени t); $v_0 = |\mathbf{v}_0|, \mathbf{v}_0 = d\mathbf{r}_0/dt; v_1 = |\mathbf{v}_1|, \mathbf{v}_1 = d\mathbf{r}_1/dt; p_1 = p_x, p_2 = p_y, p_3 = p_z$ — проекции вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения точки M на оси системы координат $M_0X_0Y_0Z_0$, совпадающие с его проекциями на оси системы координат $M_1X_1Y_1Z_1$ и равные его проекциям на оси инерциальной системы координат; центральная точка — символ скалярного произведения векторов; центральный кружок “ $\circ$ ” — символ кватернионного произведения.

Перейдем в кватернионных уравнениях (2.3) и (2.6) от параметров Родрига–Гамильтона λ_{ij} ($i = 0, 1; j = 0, 1, 2, 3$) к переменным Кустаанхеймо–Штифеля u_{ij} [20] по формулам [15, 16, 18]

$$\lambda_{i0} = r_i^{-1/2}u_{i0}, \quad \lambda_{ik} = -r_i^{-1/2}u_{ik}, \quad i = 0, 1; \quad j = 0, 1, 2, 3 \quad (2.7)$$

В кватернионной записи формулы (2.7) имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_i &= r_i^{-1/2}\mathbf{u}_i, \quad i = 0, 1 \\ \bar{\lambda}_i &= \lambda_{i0} - \lambda_{i1}\mathbf{i} - \lambda_{i2}\mathbf{j} - \lambda_{i3}\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}_i = u_{i0} + u_{i1}\mathbf{i} + u_{i2}\mathbf{j} + u_{i3}\mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Подставляя соотношения (2.8) в уравнения (2.3) и (2.6), получим:

$$2\ddot{\mathbf{u}}_i = r_i^{-1}(\ddot{r}_i - r_i^{-1}\mathbf{C}_i) \circ \mathbf{u}_i, \quad i = 0, 1 \quad (2.9)$$

Дифференцируя левые и правые части уравнений (2.9) по времени t , после преобразований, использующих исходные уравнения (2.9), получим

$$2\ddot{\mathbf{u}}_i + 2r_i^{-1}\dot{r}_i\dot{\mathbf{u}}_i - r_i^{-1}\left(\ddot{r}_i + \frac{1}{2}r_i^{-1}\dot{r}_i^2 - \frac{1}{2}r_i^{-3}\dot{c}_i^2\right)\mathbf{u}_i = -r_i^{-2}\dot{\mathbf{C}}_i \circ \mathbf{u}_i, \quad i = 0, 1 \quad (2.10)$$

где $c_i^2 = c_{i2}^2 + c_{i3}^2$.

Перейдем в первых двух слагаемых левых частей уравнений (2.10) от независимой переменной t к новой независимой переменной τ_i по формулам

$$dt = r_i d\tau_i, \quad \frac{d^2}{dt^2} = r_i^{-2} \frac{d^2}{d\tau_i^2} - r_i^{-3} \frac{dr_i}{d\tau_i} \frac{d}{d\tau_i} \quad (2.11)$$

Получим

$$2 \frac{d^2 \mathbf{u}_i}{d\tau_i^2} - r_i \left(\ddot{r}_i + \frac{1}{2} r_i^{-1} \dot{r}_i^2 - \frac{1}{2} r_i^{-3} c_i^2 \right) \mathbf{u}_i = -\dot{\mathbf{C}}_i \circ \mathbf{u}_i, \quad i = 0, 1 \quad (2.12)$$

Видно, что при таком переходе исчезают слагаемые уравнений (2.10), содержащие первые производные $\dot{\mathbf{u}}_i$ от кватернионной переменной $\mathbf{u}_i$; множитель r_i^{-1} , стоящий перед круглой скобкой в левых частях уравнений (2.10), переходит в множитель r_i , а множитель r_i^{-2} , стоящий в правых частях этих уравнений, переходит в 1.

Подставим в уравнения (2.12) выражения для производных $\ddot{r}_i$, вытекающие из уравнений (2.1), (2.4), и для производных $\dot{\mathbf{C}}_i$, вытекающие из уравнений (5.12), (5.13) [19]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}_0 &= fm_1(r_1^{-3} - r_0^{-3})r_0(-z_0'\mathbf{j} + y_0'\mathbf{k}) + r_0(-p_3'\mathbf{j} + p_2'\mathbf{k}) \\ \dot{\mathbf{C}}_1 &= fm_0(r_0^{-3} - r_1^{-3})r_1(-z_0''\mathbf{j} + y_0''\mathbf{k}) + r_1(-p_3''\mathbf{j} + p_2''\mathbf{k}) \end{aligned}$$

Получим уравнения

$$\begin{aligned} 2 \frac{d^2 \mathbf{u}_0}{d\tau_0^2} - \left(\frac{1}{2} r_0^2 + \frac{1}{2} r_0^{-2} c_0^2 - fm_0 r_0^{-1} \right) \mathbf{u}_0 = \\ = r_0[-fm_1 r_0 r_1^{-3} + fm_1(r_1^{-3} - r_0^{-3})(x_0' + z_0'\mathbf{j} - y_0'\mathbf{k}) + (p_1' + p_3'\mathbf{j} - p_2'\mathbf{k})] \circ \mathbf{u}_0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{d^2 \mathbf{u}_1}{d\tau_1^2} - \left(\frac{1}{2} r_1^2 + \frac{1}{2} r_1^{-2} c_1^2 - fm_1 r_1^{-1} \right) \mathbf{u}_1 = \\ = r_1[-fm_0 r_1 r_0^{-3} + fm_0(r_0^{-3} - r_1^{-3})(x_0'' + z_0''\mathbf{j} - y_0''\mathbf{k}) + (p_1'' + p_3''\mathbf{j} - p_2''\mathbf{k})] \circ \mathbf{u}_1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Введем обозначения (кеплеровские энергии)

$$h_i^* = \frac{1}{2} \dot{r}_i^2 + \frac{1}{2} r_i^{-2} c_i^2 - fm_i r_i^{-1} = \frac{1}{2} v_i^2 - fm_i r_i^{-1}, \quad i = 0, 1 \quad (2.15)$$

Кроме того, учтем, что

$$\begin{aligned} x_0' + z_0'\mathbf{j} - y_0'\mathbf{k} &= -\mathbf{i} \circ (x_0'\mathbf{i} + y_0'\mathbf{j} + z_0'\mathbf{k}) = -\mathbf{i} \circ \mathbf{R}_{01}, \quad \mathbf{R}_{01}' \circ \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0 \circ \mathbf{R}_{01} \\ x_0'' + z_0''\mathbf{j} - y_0''\mathbf{k} &= -\mathbf{i} \circ (x_0''\mathbf{i} + y_0''\mathbf{j} + z_0''\mathbf{k}) = -\mathbf{i} \circ \mathbf{R}_{01}'', \quad \mathbf{R}_{01}'' \circ \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1 \circ \mathbf{R}_{01} \\ p_1' + p_3'\mathbf{j} - p_2'\mathbf{k} &= -\mathbf{i} \circ (p_1'\mathbf{i} + p_2'\mathbf{j} + p_3'\mathbf{k}) = -\mathbf{i} \circ \mathbf{P}', \quad \mathbf{P}' \circ \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1 \circ \mathbf{P} \\ p_1'' + p_3''\mathbf{j} - p_2''\mathbf{k} &= -\mathbf{i} \circ (p_1''\mathbf{i} + p_2''\mathbf{j} + p_3''\mathbf{k}) = -\mathbf{i} \circ \mathbf{P}'', \quad \mathbf{P}'' \circ \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0 \circ \mathbf{P} \\ \mathbf{R}_{01}' &= x_0'\mathbf{i} + y_0'\mathbf{j} + z_0'\mathbf{k}, \quad \mathbf{R}_{01}'' = x_0''\mathbf{i} + y_0''\mathbf{j} + z_0''\mathbf{k} \\ \mathbf{P}' &= p_1'\mathbf{i} + p_2'\mathbf{j} + p_3'\mathbf{k}, \quad \mathbf{P}'' = p_1''\mathbf{i} + p_2''\mathbf{j} + p_3''\mathbf{k} \end{aligned}$$

Тогда уравнения (2.13) и (2.14) примут вид

$$\frac{d^2 \mathbf{u}_0}{d\tau_0^2} - \frac{1}{2} h_0^* \mathbf{u}_0 = -\frac{1}{2} r_0 \{ fm_1 r_0 r_1^{-3} \mathbf{u}_0 + \mathbf{i} \circ \mathbf{u}_0 \circ [fm_1(r_1^{-3} - r_0^{-3}) \mathbf{R}_{01} + \mathbf{P}] \} \quad (2.16)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{u}_1}{d\tau_1^2} - \frac{1}{2} h_1^* \mathbf{u}_1 = -\frac{1}{2} r_1 \{ fm_0 r_1 r_0^{-3} \mathbf{u}_1 + \mathbf{i} \circ \mathbf{u}_1 \circ [fm_0(r_0^{-3} - r_1^{-3}) \mathbf{R}_{01} + \mathbf{P}] \} \quad (2.17)$$

где кватернионы $\mathbf{R}_{01}$ и $\mathbf{P}$ определены соотношениями

$$\mathbf{R}_{01} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}, \quad \mathbf{P} = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k} \quad (2.18)$$

Фигурирующие в уравнениях (2.16) и (2.17) кеплеровские энергии h_0^* и h_1^* , определенные соотношениями (2.15), связаны с полными энергиями h_0 и h_1 движения точки M в системах координат $M_0X_0Y_0Z_0$ и $M_1X_1Y_1Z_1$ соотношениями

$$h_0^* = h_0 + (fm_1)/r_1 = (1/2)v_0^2 - (fm_0)/r_0, \quad h_1^* = h_1 + (fm_0)/r_0 = (1/2)v_1^2 - (fm_1)/r_1 \quad (2.19)$$

Отметим, что для движений точки M , для которых расстояния r_0 и r_1 равны, уравнения (2.16) и (2.17) упрощаются и принимают вид

$$\frac{d^2 \mathbf{u}_0}{d\tau_0^2} - \frac{1}{2} h_0 \mathbf{u}_0 = -\frac{1}{2} r_0 \mathbf{i} \circ \mathbf{u}_0 \circ [fm_1(r_1^{-3} - r_0^{-3}) \mathbf{R}_{01} + \mathbf{P}]$$

$$\frac{d^2 \mathbf{u}_1}{d\tau_1^2} - \frac{1}{2} h_1 \mathbf{u}_1 = -\frac{1}{2} r_1 \mathbf{i} \circ \mathbf{u}_1 \circ [fm_0(r_0^{-3} - r_1^{-3}) \mathbf{R}_{01} + \mathbf{P}]$$

В этих уравнениях содержатся полные энергии h_0 и h_1 . Они выделяются в качестве скалярных множителей перед кватернионными регулярными переменными $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}_1$. Различные формы дифференциальных уравнений для энергий h_0 и h_1 получены нами в статье [13].

Будем рассматривать величины h_0^* и h_1^* в качестве дополнительных переменных. Используя соотношения (2.19) и дифференциальные уравнения (3.2) и (3.3) [19], можно показать, что эти переменные удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dh_0^*/dt = -fm_1 r_1^{-3} (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}_0) + fm_1 (r_1^{-3} - r_0^{-3}) (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}_{01}) + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{p} \quad (2.20)$$

$$dh_1^*/dt = -fm_0 r_0^{-3} (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_1) + fm_0 (r_0^{-3} - r_1^{-3}) (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_{01}) + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{p} \quad (2.21)$$

где $\mathbf{v}_0 = d\mathbf{r}_0/dt$ и $\mathbf{v}_1 = d\mathbf{r}_1/dt$ — векторы скоростей движения точки M в системах координат $M_0X_0Y_0Z_0$ и $M_1X_1Y_1Z_1$ соответственно.

Отметим, что присутствующие в уравнениях (2.20) и (2.21) скалярные произведения $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_i = r_i \dot{r}_i$.

Переходя в уравнениях (2.20) и (2.21) к новым независимым переменным τ_0 и τ_1 в соответствии с (2.11), получим уравнения

$$\frac{dh_0^*}{d\tau_0} = -fm_1 r_1^{-3} r_0 \frac{dr_0}{d\tau_0} + fm_1 (r_1^{-3} - r_0^{-3}) \left(\frac{d\mathbf{r}_0}{d\tau_0} \cdot \mathbf{r}_{01} \right) + \frac{d\mathbf{r}_0}{d\tau_0} \cdot \mathbf{p} \quad (2.22)$$

$$\frac{dh_1^*}{d\tau_1} = -fm_0 r_0^{-3} r_1 \frac{dr_1}{d\tau_1} + fm_0 (r_0^{-3} - r_1^{-3}) \left(\frac{d\mathbf{r}_1}{d\tau_1} \cdot \mathbf{r}_{01} \right) + \frac{d\mathbf{r}_1}{d\tau_1} \cdot \mathbf{p} \quad (2.23)$$

В уравнениях (2.16), (2.17) и (2.22), (2.23)

$$\begin{aligned} r_i &= u_{i0}^2 + u_{i1}^2 + u_{i2}^2 + u_{i3}^2, \quad r_0^2 = x_{01}^2 + y_{01}^2 + z_{01}^2 \\ dr_i/d\tau_i &= 2[u_{i0}(du_{i0}/d\tau_i) + u_{i1}(du_{i1}/d\tau_i) + u_{i2}(du_{i2}/d\tau_i) + u_{i3}(du_{i3}/d\tau_i)] \\ (d\mathbf{r}_i/d\tau_i) \cdot \mathbf{r}_{01} &= \\ &= 2x_{01}[u_{i0}(du_{i0}/d\tau_i) + u_{i1}(du_{i1}/d\tau_i) - u_{i2}(du_{i2}/d\tau_i) - u_{i3}(du_{i3}/d\tau_i)] + \\ &+ 2y_{01}[u_{i2}(du_{i1}/d\tau_i) + u_{i1}(du_{i2}/d\tau_i) - u_{i3}(du_{i0}/d\tau_i) - u_{i0}(du_{i3}/d\tau_i)] + \\ &+ 2z_{01}[u_{i3}(du_{i1}/d\tau_i) + u_{i1}(du_{i3}/d\tau_i) + u_{i2}(du_{i0}/d\tau_i) + u_{i0}(du_{i2}/d\tau_i)], \quad i = 0, 1 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Скалярное произведение $(d\mathbf{r}_i/d\tau_i) \cdot \mathbf{p}$ имеет вид третьего из соотношений (2.24), в котором вместо x_{01}, y_{01}, z_{01} нужно взять p_1, p_2, p_3 соответственно.

Дифференциальные уравнения (2.16), (2.22), дополненные дифференциальными уравнениями

$$dt/d\tau_0 = r_0, \quad d\tau_1/d\tau_0 = r_0 r_1^{-1} \quad (2.25)$$

и соотношениями

$$r_0 = u_{00}^2 + u_{01}^2 + u_{02}^2 + u_{03}^2, \quad r_1^2 = (x_{01} - x_0)^2 + (y_{01} - y_0)^2 + (z_{01} - z_0)^2 \quad (2.26)$$

где

$$x_0 = u_{00}^2 + u_{01}^2 - u_{02}^2 - u_{03}^2, \quad y_0 = 2(u_{01}u_{02} - u_{00}u_{03}), \quad z_0 = 2(u_{01}u_{03} + u_{00}u_{02}) \quad (2.27)$$

образуют в совокупности дифференциальные уравнения движения точки M , регулярные в окрестности точки M_0 . Они представляют собой систему нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений одиннадцатого порядка относительно переменных Кустаанхеймо–Штифеля u_{0j} ($j = 0, 1, 2, 3$), их первых производных $du_{0j}/d\tau_0$, энергетической переменной h_0^* , времени t и переменной τ_1 .

Дифференциальные уравнения (2.17), (2.23), дополненные дифференциальными уравнениями

$$dt/d\tau_1 = r_1, \quad d\tau_0/d\tau_1 = r_1 r_0^{-1} \quad (2.28)$$

и соотношениями

$$r_1 = u_{10}^2 + u_{11}^2 + u_{12}^2 + u_{13}^2, \quad r_0^2 = (x_{01} - x_1)^2 + (y_{01} - y_1)^2 + (z_{01} - z_1)^2 \quad (2.29)$$

где

$$x_1 = u_{10}^2 + u_{11}^2 - u_{12}^2 - u_{13}^2, \quad y_1 = 2(u_{11}u_{12} - u_{10}u_{13}), \quad z_1 = 2(u_{11}u_{13} + u_{10}u_{12}) \quad (2.30)$$

образуют в совокупности дифференциальные уравнения движения точки M , регулярные в окрестности точки M_1 . Они представляют собой систему нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений одиннадцатого порядка относительно переменных Кустаанхеймо–Штифеля u_{1j} ($j = 0, 1, 2, 3$), их первых производных $du_{1j}/d\tau_1$, энергетической переменной h_1^* , времени t и переменной τ_0 .

Указанные регулярные дифференциальные уравнения возмущенного движения точки M (регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел) впервые были получены автором статьи в работе [13]. Другой их вывод приводится в его работе [14].

Полученные совокупности дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел позволяют разработать регулярные аналитические и численные методы изучения движения тела пренебрежимо малой массы в окрестностях двух других тел, имеющих конечные массы, а также позволяют построить регулярный алгоритм интегрирования этих уравнений, в котором уравнения (2.16), (2.22), (2.25)–(2.27) этой задачи, дополненные соотношениями (2.24) (при $i = 0$), используются при изучении движения точки M в окрестности точки M_0 (когда расстояния r_0

и r_1 удовлетворяют неравенству $m_1 r_0^2 \leq m_0 r_1^2$), а уравнения (2.17), (2.23), (2.28)–(2.30) этой задачи, дополненные соотношениями (2.24) (при $i = 1$), используются при изучении движения точки M в окрестности точки M_1 (когда расстояния r_1 и r_0 удовлетворяют неравенству $m_0 r_1^2 < m_1 r_0^2$).

Описанный алгоритм интегрирования построенных регулярных уравнений ограниченной задачи трех тел предполагает, что проекции x_{01}, y_{01}, z_{01} вектора $\mathbf{r}_{01}$ на оси инерциальной системы координат (координаты точки M_1 в системе координат $M_0X_0Y_0Z_0$), входящие в этот алгоритм, являются известными функциями времени t . Это имеет место, в частности, для ограниченной круговой задачи трех тел. В общем случае для нахождения проекций x_{01}, y_{01}, z_{01} в состав систем дифференциальных уравнений (2.16), (2.22) и (2.17), (2.23) необходимо дополнительно включить векторное дифференциальное уравнение (2.5) [19]:

$$d^2\mathbf{r}_{01}/dt^2 = -(f(m_0 + m_1)/r_{01}^3)\mathbf{r}_{01}$$

предварительно осуществив в нем переход к новой независимой переменной τ_0 или τ_1 по формулам (2.11).

Радиус-вектор $\mathbf{r}_i$, характеризующий положение точки M в системе координат $M_iX_iY_iZ_i$, его модуль и вектор скорости $\mathbf{v}_i$ движения точки M в этой системе координат находятся через переменные $\mathbf{u}_i$ и $d\mathbf{u}_i/d\tau_i$ в соответствии с кватернионными формулами [16] (см. также [18]):

$$\mathbf{R}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}}_i \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}_i, \quad r_i = \mathbf{u}_i \circ \bar{\mathbf{u}}_i = u_{i0}^2 + u_{i1}^2 + u_{i2}^2 + u_{i3}^2, \quad i = 0, 1$$

$$\mathbf{V}_i = v_{i1}\mathbf{i} + v_{i2}\mathbf{j} + v_{i3}\mathbf{k} = \dot{\mathbf{R}}_i = \dot{x}_i\mathbf{i} + \dot{y}_i\mathbf{j} + \dot{z}_i\mathbf{k} = 2\bar{\mathbf{u}}_i \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = 2r_i^{-1}\bar{\mathbf{u}}_i \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}_i}{d\tau_i} \quad (i = 0, 1)$$

При $m_1 = 0$ из уравнений (2.16), (2.20) и первого из уравнений (2.25) получаются регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел M и M_0 , одно из которых M имеет пренебрежимо малую массу. Соответственно, при $m_0 = 0$ из уравнений (2.17), (2.23) и первого из уравнений (2.28) получаются регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел M и M_1 , одно из которых M имеет пренебрежимо малую массу. Эти уравнения совпадают с известными регулярными кватернионными уравнениями возмущенной пространственной задачи двух тел, предложенными ранее автором статьи [16], если под величиной “ m_0 ” или “ m_1 ”, фигурирующей в этих уравнениях, понимать сумму “ m ” масс тел M и M_0 или M и M_1 . Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^*\mathbf{u} &= -\frac{1}{2}r\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{P} \\ \frac{dh^*}{d\tau} &= \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \cdot \mathbf{p} = -2\text{scal}\left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{P}\right) = \\ &= 2p_1[u_0(du_0/d\tau) + u_1(du_1/d\tau) - u_2(du_2/d\tau) - u_3(du_3/d\tau)] + \\ &+ 2p_2[u_2(du_1/d\tau) + u_1(du_2/d\tau) - u_3(du_0/d\tau) - u_0(du_3/d\tau)] + \\ &+ 2p_3[u_3(du_1/d\tau) + u_1(du_3/d\tau) + u_2(du_0/d\tau) + u_0(du_2/d\tau)] \\ \frac{dt}{d\tau} &= t = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \end{aligned}$$

где $h^* = (1/2)v^2 - (fm)/r$ — кеплеровская энергия движения тела M , $\mathbf{P} = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$.

Радиус-вектор $\mathbf{r}$ (характеризующий положение тела M в системе координат $MXYZ$, начало которой находится в точке M_0 или M_1 , а координатные оси параллельны одноименным осям инерциальной системы координат $O\xi\eta\zeta$), его модуль и вектор скорости $\mathbf{v}$ движения тела M в этой системе координат находятся через регулярные кватернионные переменные $\mathbf{u}$ и $d\mathbf{u}/d\tau$ в соответствии с кватернионными формулами:

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}, \quad t = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

$$\mathbf{V} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = \dot{\mathbf{R}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} = 2\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{2}{r} \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau}$$

Логиновым и автором статьи [21] проведено сравнительное исследование точности численного интегрирования классических ньютоновских дифференциальных уравнений пространственной ограниченной задачи трех тел (Земля, Луна и космический аппарат (КА)) в декартовых координатах и построенных нами регулярных кватернионных дифференциальных уравнений этой задачи в четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля, имеющих вид регулярных кватернионных уравнений (2.16), (2.22), (2.25)–(2.27), дополненных соотношениями (2.24) (при $i = 0$).

Регулярные кватернионные уравнения в переменных Кустаанхеймо–Штифеля показали значительно более высокую точность в сравнении с уравнениями в декартовых координатах: для круговой орбиты точность оказалась выше на 2 порядка, для возмущенных эллиптических орбит со средним эксцентриситетом — на 4 порядка, для возмущенной эллиптической орбиты с высоким эксцентриситетом — на 7 порядков. Отметим, что в книге Бордовицной [11] приведены результаты численных исследований решений уравнений невозмущенной и возмущенной пространственной задачи двух тел (решений уравнений невозмущенного и возмущенного движения ИСЗ) ряда авторов с использованием известных канонических уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и уравнений в декартовых координатах, демонстрирующие преимущество уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля перед уравнениями в декартовых координатах (в смысле точности их численного интегрирования). Сравнение этих результатов с нашими показало, что они в целом согласуются между собой (параметры возмущенных эллиптических орбит КА были взяты нами из книги [11]).

Полученные нами результаты подтверждают значительные преимущества регулярных кватернионных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля в задачах прогноза движения небесных и космических тел, а также в задачах коррекции параметров орбитального движения КА и инерциальной навигации в космосе в сравнении с классическими уравнениями движения в декартовых координатах.

3. Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, построенные с использованием кватернионов ориентации двух орбитальных систем координат. Эти регулярные уравнения могут быть получены из дифференциальных уравнений (6.5)–(6.10), (6.13) [19] возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, записанных (с использованием параметров Родрига–Гамильтона (Эйлера)) в орбитальных системах координат $M'_i X'_i Y'_i Z'_i$ ($i = 0, 1$) и имеющих вид

$$\ddot{r}_0 - c_0^2 r_0^{-3} + f m_0 r_0^{-2} = -f m_1 r_0 r_1^{-3} + f m_1 (r_1^{-3} - r_{01}^{-3}) x'_{01} + p'_1 \quad (3.1)$$

$$\dot{c}_0 = f m_1 r_0 (r_1^{-3} - r_{01}^{-3}) y'_{01} + r_0 p'_2 \quad (3.2)$$

$$\ddot{r}_1 - c_1^2 r_1^{-3} + f m_1 r_1^{-2} = -f m_0 r_1 r_0^{-3} + f m_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) x''_{01} + p''_1 \quad (3.3)$$

$$\dot{c}_1 = f m_0 r_1 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) y''_{01} + r_1 p''_2 \quad (3.4)$$

$$2d\lambda_i/dt = \lambda_i \circ \Omega_i, \quad i = 0, 1 \quad (3.5)$$

где

$$\lambda_i = \lambda_{i0} + \lambda_{i1}\mathbf{i} + \lambda_{i2}\mathbf{j} + \lambda_{i3}\mathbf{k}, \quad \Omega_i = \omega_{i1}\mathbf{i} + \omega_{i3}\mathbf{k} = \omega_{i1}\mathbf{i} + (c_i/r_i^2)\mathbf{k} \quad (3.6)$$

$$\omega_{01} = r_0 c_0^{-1} [f m_1 (r_1^{-3} - r_{01}^{-3}) x'_{01} + p'_1] \quad (3.7)$$

$$\omega_{11} = r_1 c_1^{-1} [f m_0 (r_{01}^{-3} - r_0^{-3}) z_{01}'' + p_3''] \quad (3.8)$$

$$\omega_{i2} = 0, \quad \omega_{i3} = c_i / r_i^2, \quad i = 0, 1 \quad (3.9)$$

(3.5) — кватернионное кинематическое уравнение, описывающее вращательное движение орбитальной системы координат $M_i' X_i' Y_i' Z_i'$ в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$ в параметрах Эйлера, проекции ω_{i1} вектора угловой скорости которой для $i = 0$ описываются соотношениями (3.7), (3.9), а для $i = 1$ — соотношениями (3.8), (3.9).

В уравнениях возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (3.1), (3.2), (3.5)–(3.7), (3.9) (при $i = 0$) и (3.3)–(3.6), (3.8), (3.9) (при $i = 1$), записанных в орбитальных системах координат $M_0' X_0' Y_0' Z_0'$ и $M_1' X_1' Y_1' Z_1'$ соответственно, в качестве переменных выступают расстояния r_0 и r_1 от точки M до точек M_0 и M_1 , модули c_0 и c_1 векторов $\mathbf{c}_0$ и $\mathbf{c}_1$ моментов скоростей $\mathbf{v}_0 = d\mathbf{r}_0/dt$ и $\mathbf{v}_1 = d\mathbf{r}_1/dt$ точки M в системах координат $M_0 X_0 Y_0 Z_0$ и $M_1 X_1 Y_1 Z_1$ относительно точек M_0 и M_1 и параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера) λ_{0j} и λ_{1j} ($j = 0, 1, 2, 3$) (компоненты кватернионов λ_0 и λ_1), характеризующие ориентации орбитальных систем координат в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$.

Декартовы координаты x_0, y_0, z_0 и x_1, y_1, z_1 точки M в системах координат $M_0 X_0 Y_0 Z_0$ и $M_1 X_1 Y_1 Z_1$ находятся через указанные переменные по формулам (4.7) или (4.8) [19]:

$$x_i = r_i (\lambda_{i0}^2 + \lambda_{i1}^2 - \lambda_{i2}^2 - \lambda_{i3}^2), \quad y_i = 2r_i (\lambda_{i1}\lambda_{i2} + \lambda_{i0}\lambda_{i3}), \quad z_i = 2r_i (\lambda_{i1}\lambda_{i3} - \lambda_{i0}\lambda_{i2}), \quad i = 0, 1$$

$$\mathbf{R}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k} = r_i \lambda_i \circ \mathbf{i} \circ \bar{\lambda}_i, \quad i = 0, 1$$

а проекции v_{0k}' и v_{1k}' векторов скоростей $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_1$ точки M в системах координат $M_0 X_0 Y_0 Z_0$ и $M_1 X_1 Y_1 Z_1$ на оси систем координат $M_0' X_0' Y_0' Z_0'$ и $M_1' X_1' Y_1' Z_1'$ соответственно находятся по формулам (6.3) [19]:

$$v_{i1}' = \dot{r}_i, \quad v_{i2}' = c_i / r_i, \quad v_{i3}' = 0, \quad i = 0, 1$$

Проекции v_{0k} и v_{1k} векторов скоростей $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_1$ точки M на оси систем координат $M_0 X_0 Y_0 Z_0$ и $M_1 X_1 Y_1 Z_1$ соответственно, совпадающие с их проекциями на оси инерциальной системы координат, находятся по кватернионным формулам (6.14) [19].

$$\mathbf{V}_i = v_{i1} \mathbf{i} + v_{i2} \mathbf{j} + v_{i3} \mathbf{k} = \lambda \circ \mathbf{V}_i' \circ \bar{\lambda}, \quad \mathbf{V}_i' = v_{i1}' \mathbf{i} + v_{i2}' \mathbf{j} = \dot{r}_i \mathbf{i} + (c_i / r_i) \mathbf{j}, \quad i = 0, 1$$

Перейдем в уравнениях (3.1), (3.2), (3.5) (при $i = 0$) и (3.3)–(3.5) (при $i = 1$) от независимой переменной t к новой независимой переменной τ_0 и τ_1 соответственно по формулам $dt/d\tau_0 = r_0$ и $dt/d\tau_1 = r_1$. Кроме того, учтем при этом выражения для кеплеровских энергий h_0^* и h_1^*

$$h_i^* = \frac{1}{2} \dot{r}_i^2 + \frac{1}{2} \frac{c_i^2}{r_i^2} - \frac{f m_i}{r_i}, \quad i = 0, 1$$

которые будем рассматривать в качестве дополнительных переменных, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dh_0^*}{dt} &= f m_1 \left[-\frac{r_0}{r_1^3} \frac{dr_0}{dt} + \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) \left(\frac{dr_0}{dt} x_{01}' + \frac{c_0}{r_0} y_{01}' \right) \right] + \frac{dr_0}{dt} p_1' + \frac{c_0}{r_0} p_2' \\ \frac{dh_1^*}{dt} &= f m_0 \left[-\frac{r_1}{r_0^3} \frac{dr_1}{dt} + \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) \left(\frac{dr_1}{dt} x_{01}'' + \frac{c_1}{r_1} y_{01}'' \right) \right] + \frac{dr_1}{dt} p_1'' + \frac{c_1}{r_1} p_2'' \end{aligned}$$

В итоге получим следующие уравнения:

$$\frac{d^2 r_0}{d\tau_0^2} - 2h_0^* r_0 - fm_0 = -fm_1 \frac{r_0^3}{r_1^3} + fm_1 r_0^2 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) x_{01}' + r_0^2 p_1' \quad (3.10)$$

$$\frac{dc_0}{d\tau_0} = fm_1 r_0^2 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) y_{01}' + r_0^2 p_2' \quad (3.11)$$

$$\frac{dh_0^*}{d\tau_0} = fm_1 \left[-\frac{r_0}{r_1^3} \frac{dr_0}{d\tau_0} + \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) \left(\frac{dr_0}{d\tau_0} x_{01}' + c_0 y_{01}' \right) \right] + \frac{dr_0}{d\tau_0} p_1' + c_0 p_2' \quad (3.12)$$

$$\frac{d^2 r_1}{d\tau_1^2} - 2h_1^* r_1 - fm_1 = -fm_0 \frac{r_1^3}{r_0^3} + fm_0 r_1^2 \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) x_{01}'' + r_1^2 p_1'' \quad (3.13)$$

$$\frac{dc_1}{d\tau_1} = fm_0 r_1^2 \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) y_{01}'' + r_1^2 p_2'' \quad (3.14)$$

$$\frac{dh_1^*}{d\tau_1} = fm_0 \left[-\frac{r_1}{r_0^3} \frac{dr_1}{d\tau_1} + \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) \left(\frac{dr_1}{d\tau_1} x_{01}'' + c_1 y_{01}'' \right) \right] + \frac{dr_1}{d\tau_1} p_1'' + c_1 p_2'' \quad (3.15)$$

$$2 \frac{d\lambda_i}{d\tau_i} = r_i \lambda_i \circ \Omega_i, \quad \Omega_i = \omega_{i1} \mathbf{i} + \omega_{i3} \mathbf{k} = \omega_{i1} \mathbf{i} + \frac{c_i}{r_i^2} \mathbf{k}, \quad i = 0, 1 \quad (3.16)$$

$$\frac{dt}{d\tau_i} = r_i, \quad i = 0, 1 \quad (3.17)$$

где проекция ω_{i1} абсолютной угловой скорости орбитальной системы координат $M_i' X_i' Y_i' Z_i'$ для $i = 0$ описывается соотношением (3.7), а для $i = 1$ — соотношением (3.8).

В полученных регулярных уравнениях возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (3.10)–(3.12), (3.16), (3.17), (3.7) (при $i = 0$) и (3.13)–(3.17), (3.8) (при $i = 1$), записанных в орбитальных системах координат $M_0' X_0' Y_0' Z_0'$ и $M_1' X_1' Y_1' Z_1'$, в качестве переменных выступают расстояния r_0 и r_1 от точки M до точек M_0 и M_1 , модули c_0 и c_1 векторов $\mathbf{c}_0$ и $\mathbf{c}_1$ моментов скоростей $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_1$ точки M в системах координат $M_0 X_0 Y_0 Z_0$ и $M_1 X_1 Y_1 Z_1$ относительно точек M_0 и M_1 , кеплеровские энергии h_0^* и h_1^* , время t и параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера) λ_{0j} и λ_{1j} ($j = 0, 1, 2, 3$) (компоненты кватернионов λ_0 и λ_1), характеризующие ориентации орбитальных систем координат в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$.

Дифференциальные уравнения (3.10)–(3.12), (3.16), (3.17), (3.7) при $i = 0$, дополненные дифференциальным уравнением

$$d\tau_1/d\tau_0 = r_0 r_1^{-1}$$

и соотношениями

$$r_1^2 = (x_{01} - x_0)^2 + (y_{01} - y_0)^2 + (z_{01} - z_0)^2$$

$$x_0 = r_0(\lambda_{00}^2 + \lambda_{01}^2 - \lambda_{02}^2 - \lambda_{03}^2), \quad y_0 = 2r_0(\lambda_{01}\lambda_{02} + \lambda_{00}\lambda_{03}), \quad z_0 = 2r_0(\lambda_{01}\lambda_{03} - \lambda_{00}\lambda_{02})$$

для нахождения расстояния r_1 , образуют в совокупности дифференциальные уравнения движения точки M , регулярные в окрестности точки M_0 .

Дифференциальные уравнения (3.13)–(3.17), (3.8) (при $i = 1$), дополненные дифференциальным уравнением

$$d\tau_0/d\tau_1 = r_1 r_0^{-1}$$

и соотношениями

$$r_0^2 = (x_{01} - x_1)^2 + (y_{01} - y_1)^2 + (z_{01} - z_1)^2$$

$$x_1 = r_1(\lambda_{10}^2 + \lambda_{11}^2 - \lambda_{12}^2 - \lambda_{13}^2), \quad y_1 = 2r_1(\lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{10}\lambda_{13}), \quad z_1 = 2r_1(\lambda_{11}\lambda_{13} - \lambda_{10}\lambda_{12})$$

для нахождения расстояния r_0 , образуют в совокупности дифференциальные уравнения движения точки M , регулярные в окрестности точки M_1 .

Отметим, что в кватернионных кинематических уравнениях (3.16) присутствует величина $r_i\omega_{i3} = c_i/r_i$, содержащая деление на расстояние r_i . Однако числитель этой величины $c_i = |\mathbf{c}_i| = |\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i| = r_i v_i \sin(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i)$, поэтому величина $r_i\omega_{i3} = c_i/r_i = v_i \sin(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i)$ не содержит особенности (деления на ноль) при $r_i = 0$.

При $m_1 = 0$ из уравнений (3.10)–(3.12), (3.16), (3.17), (3.7) при $i = 0$ получаются регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел M и M_0 , одно из которых M (например, космический аппарат или астероид) имеет пренебрежимо малую массу, записанные в орбитальной системе координат $M'_0 X'_0 Y'_0 Z'_0$:

$$\frac{d^2 r_0}{d\tau_0^2} - 2h_0^* r_0 - fm_0 = r_0^2 p_1', \quad \frac{dc_0}{d\tau_0} = r_0^2 p_2', \quad \frac{dh_0^*}{d\tau_0} = \frac{dr_0}{d\tau_0} p_1' + c_0 p_2'$$

$$2 \frac{d\lambda_0}{d\tau_0} = \lambda_0 \circ \left(\frac{r_0^2}{c_0} p_3' \mathbf{i} + \frac{c_0}{r_0} \mathbf{k} \right), \quad \frac{dt}{d\tau_0} = r_0$$

Для невозмущенной пространственной задачи двух тел последние уравнения принимают вид уравнений

$$\frac{d^2 r_0}{d\tau_0^2} - 2h_0^* r_0 - fm_0 = 0, \quad 2 \frac{d\lambda_0}{d\tau_0} = \frac{c_0}{r_0} \lambda_0 \circ \mathbf{k}, \quad \frac{dt}{d\tau_0} = r_0, \quad c_0 = \text{const}, \quad h_0^* = \text{const}$$

Первое из них является линейным дифференциальным уравнением второго порядка относительно расстояния r_0 .

Соответственно, при $m_0 = 0$ из уравнений (3.13)–(3.17), (3.8) (при $i = 1$) получаются регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел M и M_1 , одно из которых M имеет пренебрежимо малую массу, записанные в орбитальной системе координат $M'_1 X'_1 Y'_1 Z'_1$.

Отметим, что выше приведенные уравнения являются регулярными уравнениями классической возмущенной пространственной задачи двух тел M и M_0 , если под величиной “ m_0 ”, фигурирующей в этих уравнениях, понимать сумму масс тел M и M_0 .

При использовании в качестве независимой переменной часто используемой в задачах механики угловой переменной φ_i , связанной со временем t дифференциальным соотношением $d\varphi_i = (c_i/r_i^2)dt$, регулярные уравнения (3.10)–(3.17) принимают следующую форму:

$$\frac{d^2 r_0}{d\varphi_0^2} + \left(1 - 4h_0^* \frac{r_0^2}{c_0^2} \right) r_0 - 3fm_0 \frac{r_0^2}{c_0^2} = \frac{r_0^2}{c_0^2} \left(r_0^2 P_1' - r_0 \frac{dr_0}{d\varphi_0} P_2' \right) \quad (3.18)$$

$$\frac{dc_0}{d\varphi_0} = \frac{r_0^3}{c_0} P_2' \quad \text{или} \quad \frac{dc_0^2}{d\varphi_0} = 2r_0^3 P_2', \quad \frac{dh_0^*}{d\varphi_0} = \frac{dr_0}{d\varphi_0} P_1' + r_0 P_2' \quad (3.19)$$

$$2 \frac{d\lambda_0}{d\varphi_0} = \lambda_0 \circ \left(\frac{r_0^3}{c_0^2} P_3' \mathbf{i} + \mathbf{k} \right), \quad \frac{dt}{d\varphi_0} = \frac{r_0^2}{c_0} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned}
P_1' &= -fm_1 \frac{r_0}{r_1^3} + fm_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) x_{01}' + p_1', & P_2' &= fm_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) y_{01}' + p_2' \\
P_3' &= fm_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) z_{01}' + p_3'
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\frac{d^2 r_1}{d\varphi_1^2} + \left(1 - 4h_1^* \frac{r_1^2}{c_1^2} \right) r_1 - 3fm_1 \frac{r_1^2}{c_1^2} = \frac{r_1^2}{c_1^2} \left(r_1^2 P_1'' - r_1 \frac{dr_1}{d\varphi_1} P_2'' \right) \tag{3.22}$$

$$\frac{dc_1}{d\varphi_1} = \frac{r_1^3}{c_1} P_2'' \quad \text{или} \quad \frac{dc_1^2}{d\varphi_1} = 2r_1^3 P_2'', \quad \frac{dh_1^*}{d\varphi_1} = \frac{dr_1}{d\varphi_1} P_1'' + r_1 P_2'' \tag{3.23}$$

$$2 \frac{d\lambda_1}{d\varphi_1} = \lambda_1 \circ \left(\frac{r_1^3}{c_1^2} P_3'' \mathbf{i} + \mathbf{k} \right), \quad \frac{dt}{d\varphi_1} = \frac{r_1^2}{c_1} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
P_1'' &= -fm_0 \frac{r_1}{r_0^3} + fm_0 \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) x_{01}'' + p_1'', & P_2'' &= fm_0 \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) y_{01}'' + p_2'' \\
P_3'' &= fm_0 \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) z_{01}'' + p_3''
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Для согласования двух используемых в окрестностях гравитирующих точек M_0 и M_1 независимых переменных φ_0 и φ_1 необходимо использовать дифференциальные уравнения $d\varphi_1/d\varphi_0 = c_1 r_0^2 / (c_0 r_1^2)$ и $d\varphi_0/d\varphi_1 = c_0 r_1^2 / (c_1 r_0^2)$.

Регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел M и M_1 (или M и M_2), записанные в орбитальной системе координат $M_0'X_0'Y_0'Z_0'$ или $M_1'X_1'Y_1'Z_1'$, при использовании в качестве независимой переменной φ_0 или φ_1 получаются из уравнений (3.18)–(3.25) при $P_i' = p_i'$ (когда $m_1 = 0$) или $P_i'' = p_i''$ (когда $m_0 = 0$).

При использовании в качестве независимой переменной угловой переменной φ_i , связанной с временем t дифференциальным соотношением $d\varphi_i = (c_i/r_i^2)dt$, и переменной $\rho_i = 1/r_i$, обратной расстоянию до точки M_i , получаем следующие уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \rho_i}{d\varphi_i^2} + \rho_i - \frac{fm_i}{c_i^2} &= -\frac{1}{c_i^2 \rho_i^2} \left(P_{i1} + \frac{1}{\rho_i} \frac{d\rho_i}{d\varphi_i} P_{i2} \right), & \frac{dc_i}{d\varphi_i} &= \frac{1}{c_i \rho_i^3} P_{i2} \\
\text{или} & \frac{dc_i^2}{d\varphi_i} = \frac{2}{\rho_i^3} P_{i2}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$2 \frac{d\lambda_i}{d\varphi_i} = \lambda_i \circ \left(\frac{1}{c_i^2 \rho_i^3} P_{i3} \mathbf{i} + \mathbf{k} \right), \quad \frac{dt}{d\varphi_i} = \frac{1}{c_i \rho_i^2} \quad (i = 0, 1) \tag{3.27}$$

где $P_{01} = P_1'$, $P_{02} = P_2'$, $P_{03} = P_3'$; $P_{11} = P_1''$, $P_{12} = P_2''$, $P_{13} = P_3''$; величины P_k' и P_k'' определены следующими соотношениями, вытекающими из соотношений (3.21) и (3.25) с учетом обозначения $\rho_{01}^3 = 1/r_{01}^3$:

$$\begin{aligned}
P_1' &= -fm_1 \frac{\rho_1^3}{\rho_0} + fm_1 (\rho_1^3 - \rho_{01}^3) x_{01}' + p_1', & P_2' &= fm_1 (\rho_1^3 - \rho_{01}^3) y_{01}' + p_2', \\
P_3' &= fm_1 (\rho_1^3 - \rho_{01}^3) z_{01}' + p_3'
\end{aligned}$$

$$P_1'' = -fm_0 \frac{\rho_0^3}{\rho_1} + fm_0(\rho_{01}^3 - \rho_0^3)x_{01}'' + p_1'', \quad P_2'' = fm_0(\rho_{01}^3 - \rho_0^3)y_{01}'' + p_2'',$$

$$P_3'' = fm_0(\rho_{01}^3 - \rho_0^3)z_{01}'' + p_3''$$

Переменными в уравнениях (3.26) и (3.27) являются величина $\rho_i = 1/r_i$, обратная расстоянию r_i от точки M до точки M_i , модуль c_i вектора $\mathbf{c}_i$ момента вектора скорости $\mathbf{v}_i$ точки M в системе координат $M_0X_iY_iZ_i$ относительно точки M_i , время t и параметры Родрига–Гамильтона λ_{ij} ($j = 0, 1, 2, 3$) (компоненты кватерниона λ_i), характеризующие ориентацию орбитальной системы координат $M_iX_iY_iZ_i$ в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$. Независимой переменной является угловая переменная φ_i , связанная с временем t дифференциальным соотношением $d\varphi_i = (c_i/r_i^2)dt$.

Отметим, что первое из уравнений (3.26) является обобщенным уравнением Бинэ и что дифференциальное уравнение для кеплеровской энергии h_i^* в состав этой системы не входит.

Отметим также, что уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел M и M_1 (или M и M_2), записанные в орбитальной системе координат $M_0X_0Y_0Z_0$ или $M_1X_1Y_1Z_1$, при использовании в качестве независимой переменной φ_0 или φ_1 получаются из уравнений (3.26)–(3.27) при $i = 0$ и $P_{01} = p_1'$, $P_{02} = p_2'$, $P_{03} = p_3'$ (когда $m_1 = 0$) или при $i = 1$ и $P_{11} = p_1''$, $P_{12} = p_2''$, $P_{13} = p_3''$ (когда $m_0 = 0$).

Уравнения невозмущенной пространственной задачи двух тел M и M_1 (или M и M_2), записанные в орбитальной системе координат $M_0X_0Y_0Z_0$ или $M_1X_1Y_1Z_1$, при использовании в качестве независимой переменной φ_0 или φ_1 имеют вид линейной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2\rho_i}{d\varphi_i^2} + \rho_i - \frac{fm_i}{c_i^2} = 0, \quad c_i = \text{const}; \quad 2\frac{d\lambda_i}{d\varphi_i} = \lambda_i \circ \mathbf{k}, \quad \frac{dt}{d\varphi_i} = \frac{1}{c_i\rho_i^2} \quad (i = 0, 1)$$

Представляет интерес другая форма уравнений (3.26) и (3.27), в которой одновременно используются две переменные ρ_i и r_i и дополнительное дифференциальное уравнение, связывающее эти переменные:

$$\frac{d^2\rho_i}{d\varphi_i^2} + \rho_i - \frac{fm_i}{c_i^2} = -\frac{r_i^2}{c_i^2} \left(P_{i1} + r_i \frac{d\rho_i}{d\varphi_i} P_{i2} \right), \quad \frac{dc_i}{d\varphi_i} = \frac{r_i^3}{c_i} P_{i2} \quad \text{или} \quad \frac{dc_i^2}{d\varphi_i} = 2r_i^3 P_{i2}$$

$$2\frac{d\lambda_i}{d\varphi_i} = \lambda_i \circ \left(\frac{r_i^3}{c_i^2} P_{i3} \mathbf{i} + \mathbf{k} \right), \quad \frac{dr_i}{d\varphi_i} = -r_i^2 \frac{d\rho_i}{d\varphi_i}, \quad \frac{dt}{d\varphi_i} = \frac{r_i^2}{c_i} \quad (i = 0, 1)$$

4. Регулярные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, построенные с использованием кватернионов ориентации двух идеальных систем координат и переменных Леви-Чивита. Для получения этих уравнений используем дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, записанные в идеальных системах координат $M_0X_0^{id}Y_0^{id}Z_0^{id}$ и $M_1X_1^{id}Y_1^{id}Z_1^{id}$ и имеющие вид уравнений (8.2), (8.4)–(8.6), (8.8) (при $i = 0$) и уравнений (8.3)–(8.5), (8.7), (8.8) (при $i = 1$) соответственно нашей работы [19]:

$$\begin{aligned}
\ddot{X}_0 + \frac{fm_0}{r_0^3} X_0 &= -\frac{fm_1}{r_1^3} X_0 + fm_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) X'_{01} + P'_x \\
\ddot{Y}_0 + \frac{fm_0}{r_0^3} Y_0 &= -\frac{fm_1}{r_1^3} Y_0 + fm_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) Y'_{01} + P'_y \\
Z_0 &= 0
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{X}_1 + \frac{fm_1}{r_1^3} X_1 &= -\frac{fm_0}{r_0^3} X_1 + fm_0 \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) X''_{01} + P''_x \\
\ddot{Y}_1 + \frac{fm_1}{r_1^3} Y_1 &= -\frac{fm_0}{r_0^3} Y_1 + fm_0 \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) Y''_{01} + P''_y \\
Z_1 &= 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$2d\mathbf{\Lambda}_i/dt = \mathbf{\Lambda}_i \circ \mathbf{\Omega}_i^{\text{id}}, \quad \mathbf{\Lambda}_i = \Lambda_{i0}\mathbf{i} + \Lambda_{i1}\mathbf{j} + \Lambda_{i2}\mathbf{j} + \Lambda_{i3}\mathbf{k}, \quad i = 0, 1 \tag{4.3}$$

$$\mathbf{\Omega}_i^{\text{id}} = \Omega_{i1}\mathbf{i} + \Omega_{i2}\mathbf{j} = (\omega_{i1}/r_i)(X_i\mathbf{i} + Y_i\mathbf{j}) \tag{4.4}$$

$$\omega_{01}/r_0 = c_0^{-1} [fm_1(r_1^{-3} - r_{01}^{-3})z'_{01} + p'_3] \tag{4.5}$$

$$\omega_{11}/r_1 = c_1^{-1} [fm_0(r_{01}^{-3} - r_0^{-3})z''_{01} + p''_3] \tag{4.6}$$

$$r_i^2 = X_i^2 + Y_i^2, \quad c_i = |\mathbf{c}_i| = X_i\dot{Y}_i - Y_i\dot{X}_i, \quad i = 0, 1 \tag{4.7}$$

Величины X'_{01} , Y'_{01} и P'_x , P'_y в этих уравнениях являются проекциями радиус-вектора $\mathbf{r}_{01} = \overrightarrow{M_0M_1}$ и вектора возмущающего ускорения $\mathbf{p}$ на оси $M_0X_0^{id}$ и $M_0Y_0^{id}$ идеальной системы координат $M_0X_0^{id}Y_0^{id}Z_0^{id}$, а величины X''_{01} , Y''_{01} и P''_x , P''_y — проекциями радиус-вектора $\mathbf{r}_{01}$ и вектора ускорения $\mathbf{p}$ на оси $M_1X_1^{id}$ и $M_1Y_1^{id}$ идеальной системы координат $M_1X_1^{id}Y_1^{id}Z_1^{id}$. Отметим, что $Z'_{01} = z'_{01}$ и $Z''_{01} = z''_{01}$, а также, что $P'_z = p'_3$ и $P''_z = p''_3$, т.е. проекции радиус-вектора $\mathbf{r}_{01}$ и вектора ускорения $\mathbf{p}$ на оси $M_0Z_0^{id}$ и $M_1Z_1^{id}$ идеальных систем координат $M_0X_0^{id}Y_0^{id}Z_0^{id}$ и $M_1X_1^{id}Y_1^{id}Z_1^{id}$ совпадают с их проекциями на оси $M_0Z_0^{id}$ и $M_1Z_1^{id}$ орбитальных систем координат $M'_0X'_0Y'_0Z'_0$ и $M'_1X'_1Y'_1Z'_1$.

В уравнениях (4.3) и (4.4) ω_{i1} ($i = 0, 1$) — проекция вектора абсолютной угловой скорости орбитальной системы координат $M'_iX'_iY'_iZ'_i$ на ось $M'_iX'_i$, определяемая соотношениями (4.5) и (4.6).

Уравнения (4.1), (4.3)–(4.5), (4.7) (при $i = 0$) описывают движение точки M в системе координат $M_0X_0Y_0Z_0$, а уравнения (4.2)–(4.4), (4.6), (4.7) (при $i = 1$) — в системе координат $M_1X_1Y_1Z_1$. Начала этих систем координат находятся в точках M_0 и M_1 , а их координатные оси параллельны одноименным осям инерциальной системы координат $O\xi\eta\zeta$. В этих уравнениях переменными являются идеальные прямоугольные координаты Ганзена X_i , Y_i , $Z_i = 0$ ($i = 0, 1$), их первые производные по времени и параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) Λ_{0j} и Λ_{1j} ($j = 0, 1, 2, 3$) (компоненты кватернионов $\mathbf{\Lambda}_0$ и $\mathbf{\Lambda}_1$), характеризующие ориентации идеальных систем координат $M_0X_0^{id}Y_0^{id}Z_0^{id}$ и $M_1X_1^{id}Y_1^{id}Z_1^{id}$ в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$ соответственно.

Уравнения (4.1) и (4.2) можно также записать в другом виде:

$$\begin{aligned}\ddot{X}_0 + \frac{fm_0}{r_0^3} X_0 &= -\frac{fm_1}{r_1^3} X_1' - \frac{fm_1}{r_{01}^3} X_{01}' + P_x' \\ \ddot{Y}_0 + \frac{fm_0}{r_0^3} Y_0 &= -\frac{fm_1}{r_1^3} Y_1' - \frac{fm_1}{r_{01}^3} Y_{01}' + P_y' \\ Z_0 &= 0\end{aligned}\quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}\ddot{X}_1 + \frac{fm_1}{r_1^3} X_1 &= -\frac{fm_0}{r_0^3} X_0'' + \frac{fm_0}{r_{01}^3} X_{01}'' + P_x'' \\ \ddot{Y}_1 + \frac{fm_1}{r_1^3} Y_1 &= -\frac{fm_0}{r_0^3} Y_0'' + \frac{fm_0}{r_{01}^3} Y_{01}'' + P_y'' \\ Z_1 &= 0\end{aligned}\quad (4.9)$$

Величины X_1' и Y_1' в уравнениях (4.8) и (4.9) являются проекциями радиус-вектора $\mathbf{r}_1$ на оси $M_0X_0^{id}$ и $M_0Y_0^{id}$ идеальной системы координат $M_0X_0^{id}Y_0^{id}Z_0^{id}$, а величины X_0'' и Y_0'' — проекциями радиус-вектора $\mathbf{r}_0$ на оси $M_1X_1^{id}$ и $M_1Y_1^{id}$ идеальной системы координат $M_1X_1^{id}Y_1^{id}Z_1^{id}$.

Отметим, что уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (4.1), (4.3)–(4.5), (4.7) (при $i = 0$) могут рассматриваться независимо от уравнений (4.2)–(4.4), (4.6), (4.7) (при $i = 1$), если модуль r_1 радиус-вектора $\mathbf{r}_1$, фигурирующий в этих уравнениях, представить, используя соотношение $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{01}$, в следующем виде:

$$r_1^2 = r_0^2 + r_{01}^2 - 2(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_{01}) = X_0^2 + Y_0^2 + X_{01}'^2 + Y_{01}'^2 + Z_{01}'^2 - 2(X_0X_{01}' + Y_0Y_{01}') \quad (4.10)$$

Аналогично, уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (4.2)–(4.4), (4.6), (4.7) (при $i = 1$) могут рассматриваться независимо от уравнений (4.1), (4.3)–(4.5), (4.7) (при $i = 0$), если модуль r_0 радиус-вектора $\mathbf{r}_0$, фигурирующий в этих уравнениях, представить, используя соотношение $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_{01}$, в следующем виде:

$$r_0^2 = r_1^2 + r_{01}^2 + 2(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{01}) = X_1^2 + Y_1^2 + X_{01}'^2 + Y_{01}'^2 + Z_{01}'^2 + 2(X_1X_{01}' + Y_1Y_{01}') \quad (4.11)$$

Декартовы координаты x_i, y_i, z_i ($i = 0, 1$) точки M в системе координат $M_iX_iY_iZ_i$, оси которой параллельны одноименным осям инерциальной системы координат $O\xi\eta\zeta$, и проекции v_{ik} ($k = 1, 2, 3$) вектора скорости $\mathbf{v}_i$ точки M в системе координат $M_iX_iY_iZ_i$ на ее же координатные оси находятся через идеальные координаты и их первые производные по времени по формулам

$$\mathbf{R}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k} = \mathbf{\Lambda}_i \circ (X_i\mathbf{i} + Y_i\mathbf{j}) \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}_i, \quad i = 0, 1 \quad (4.12)$$

$$\mathbf{V}_i = v_{i1}\mathbf{i} + v_{i2}\mathbf{j} + v_{i3}\mathbf{k} = \dot{\mathbf{R}}_i = \dot{x}_i\mathbf{i} + \dot{y}_i\mathbf{j} + \dot{z}_i\mathbf{k} = \mathbf{\Lambda}_i \circ (\dot{X}_i\mathbf{i} + \dot{Y}_i\mathbf{j}) \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}_i \quad (i = 0, 1) \quad (4.13)$$

Проекции $P_x', P_y', P_z' = p_3'$ вектора возмущающего ускорения $\mathbf{p}$ на оси идеальной системы координат $M_0X_0^{id}Y_0^{id}Z_0^{id}$ и проекции $P_x'', P_y'', P_z'' = p_3''$ вектора $\mathbf{p}$ на оси идеальной системы координат $M_1X_1^{id}Y_1^{id}Z_1^{id}$ связаны с его проекциями $p_1 = p_x, p_2 = p_y, p_3 = p_z$ на оси системы координат $M_0X_0Y_0Z_0$, а также системы координат $M_1X_1Y_1Z_1$ кватернионными соотношениями

$$\begin{aligned}\mathbf{P}' &= P_x'\mathbf{i} + P_y'\mathbf{j} + P_z'\mathbf{k} = \bar{\mathbf{\Lambda}}_0 \circ (p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}) \circ \mathbf{\Lambda}_0 \\ \mathbf{P}'' &= P_x''\mathbf{i} + P_y''\mathbf{j} + P_z''\mathbf{k} = \bar{\mathbf{\Lambda}}_1 \circ (p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}) \circ \mathbf{\Lambda}_1\end{aligned}\quad (4.14)$$

Идеальные прямоугольные координаты Ганзена X_i, Y_i и $Z_i = 0$ ($i = 0, 1$), являющиеся проекциями радиус-вектора $\mathbf{r}_i$ точки M в системе координат $M_i X_i Y_i Z_i$ на оси идеальной системы координат $M_i X_i^{id} Y_i^{id} Z_i^{id}$, связаны с полярными координатами r_i и φ_i точки M в идеальной системе координат (с расстоянием $r_i = |\mathbf{r}_i|$ точки M до точки M_i и углом φ_i поворота идеальной системы координат вокруг оси $Z_i' = Z_i^{id}$ орбитальной системы координат $M_i' X_i' Y_i' Z_i'$ по ходу часовой стрелки) соотношениями

$$X_i = r_i \cos \varphi_i, \quad Y_i = r_i \sin \varphi_i, \quad Z_i = 0 \quad (i = 0, 1) \quad (4.15)$$

Ориентация орбитальной системы координат $M_i' X_i' Y_i' Z_i'$ в идеальной системе координат $M_i X_i^{id} Y_i^{id} Z_i^{id}$ характеризуется кватернионом поворота Φ_i , имеющим вид

$$\Phi_i = \cos(\varphi_i/2) + \sin(\varphi_i/2) \mathbf{i}_3, \quad i = 0, 1 \quad (4.16)$$

Компоненты Φ_{ij} ($j = 0, 1, 2, 3$) этого кватерниона определяются соотношениями

$$\Phi_{i0} = \cos(\varphi_i/2), \quad \Phi_{i1} = \Phi_{i2} = 0, \quad \Phi_{i3} = \sin(\varphi_i/2), \quad i = 0, 1 \quad (4.17)$$

Идеальные прямоугольные координаты Ганзена $X_i, Y_i, Z_i = 0$ являются декартовыми координатами точки M в идеальной системе координат $M_i X_i^{id} Y_i^{id} Z_i^{id}$ и связаны с переменными r_i и Φ_{ij} соотношениями

$$X_i = r_i \cos \varphi_i = r_i (\Phi_{i0}^2 - \Phi_{i3}^2), \quad Y_i = r_i \sin \varphi_i = 2r_i \Phi_{i0} \Phi_{i3}, \quad Z_i = 0, \quad i = 0, 1 \quad (4.18)$$

Введем переменные Леви-Чивита

$$U_{i0} = r_i^{1/2} \Phi_{i0}, \quad U_{i3} = -r_i^{1/2} \Phi_{i3}, \quad i = 0, 1 \quad (4.19)$$

связанные с ганзеновскими координатами соотношениями

$$X_i = U_{i0}^2 - U_{i3}^2, \quad Y_i = -2U_{i0}U_{i3}, \quad i = 0, 1 \quad (4.20)$$

и двухмерный кватернион $\mathbf{U}_i$, составленный из переменных Леви-Чивита:

$$\mathbf{U}_i = U_{i0} + U_{i3} \mathbf{k}, \quad i = 0, 1 \quad (4.21)$$

Введем также кватернионы $\mathbf{R}_i^{id}$ и $\mathbf{V}_i^{id}$, характеризующие положение и скорость точки M в идеальной системе координат $M_i X_i^{id} Y_i^{id} Z_i^{id}$:

$$\mathbf{R}_i^{id} = X_i \mathbf{i} + Y_i \mathbf{j} = (U_{i0}^2 - U_{i3}^2) \mathbf{i} + (-2U_{i0}U_{i3}) \mathbf{j} = \bar{\mathbf{U}}_i \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_i, \quad i = 0, 1 \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i^{id} &= \dot{X}_i \mathbf{i} + \dot{Y}_i \mathbf{j} = 2(U_{i0}\dot{U}_{i0} - U_{i3}\dot{U}_{i3}) \mathbf{i} - 2(U_{i0}\dot{U}_{i3} + U_{i3}\dot{U}_{i0}) \mathbf{j} = \\ &= \bar{\mathbf{U}}_i \circ \mathbf{i} \circ \dot{\mathbf{U}}_i + \dot{\bar{\mathbf{U}}}_i \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_i = 2\bar{\mathbf{U}}_i \circ \mathbf{i} \circ \dot{\mathbf{U}}_i, \quad i = 0, 1 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Справедливость последнего равенства в соотношениях (4.23) подтверждается непосредственной проверкой.

Запишем уравнения (4.1) и (4.2) с учетом обозначения $\mathbf{R}_i^{id} = X_i \mathbf{i} + Y_i \mathbf{j}$ в кватернионной форме

$$\ddot{\mathbf{R}}_0^{id} + \frac{fm_0}{r_0^3} \mathbf{R}_0^{id} = -\frac{fm_1}{r_1^3} \mathbf{R}_0^{id} + fm_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) \mathbf{R}_{01}^{id} + \mathbf{P}^{id} \quad (4.24)$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_1^{id} + \frac{fm_1}{r_1^3} \mathbf{R}_1^{id} = -\frac{fm_0}{r_0^3} \mathbf{R}_1^{id} + fm_0 \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) \mathbf{R}_{01}^{id} + \mathbf{P}^{id} \quad (4.25)$$

где

$$\mathbf{R}_{01}^{id} = X_{01}' \mathbf{i} + Y_{01}' \mathbf{j}, \quad \mathbf{P}^{id} = P_x' \mathbf{i} + P_y' \mathbf{j}, \quad \mathbf{R}_{01}''^{id} = X_{01}'' \mathbf{i} + Y_{01}'' \mathbf{j}, \quad \mathbf{P}''^{id} = P_x'' \mathbf{i} + P_y'' \mathbf{j}$$

Подставляя соотношение (4.22) в уравнения (4.24) и (4.25), находим, учитывая соотношение (4.23)

$$\begin{aligned} 2\bar{\mathbf{U}}_0 \circ \mathbf{i} \circ \ddot{\mathbf{U}}_0 + 2\dot{\bar{\mathbf{U}}}_0 \circ \mathbf{i} \circ \dot{\mathbf{U}}_0 + \left(\frac{fm_0}{r_0^3} + \frac{fm_1}{r_1^3} \right) \bar{\mathbf{U}}_0 \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_0 &= fm_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) \mathbf{R}_{01}^{id} + \mathbf{P}^{id} \\ 2\bar{\mathbf{U}}_1 \circ \mathbf{i} \circ \ddot{\mathbf{U}}_1 + 2\dot{\bar{\mathbf{U}}}_1 \circ \mathbf{i} \circ \dot{\mathbf{U}}_1 + \left(\frac{fm_1}{r_1^3} + \frac{fm_0}{r_0^3} \right) \bar{\mathbf{U}}_1 \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_1 &= fm_0 \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) \mathbf{R}_{01}^{id} + \mathbf{P}^{id} \end{aligned}$$

Из этих уравнений получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{U}}_0 - \frac{1}{r_0} \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_0 \circ \dot{\bar{\mathbf{U}}}_0 \circ \mathbf{i} \circ \dot{\mathbf{U}}_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{fm_0}{r_0^3} + \frac{fm_1}{r_1^3} \right) \mathbf{U}_0 &= \\ = -\frac{fm_1}{2r_0} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_0 \circ \mathbf{R}_{01}^{id} - \frac{1}{2r_0} \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_0 \circ \mathbf{P}^{id} \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{U}}_1 - \frac{1}{r_1} \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_1 \circ \dot{\bar{\mathbf{U}}}_1 \circ \mathbf{i} \circ \dot{\mathbf{U}}_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{fm_1}{r_1^3} + \frac{fm_0}{r_0^3} \right) \mathbf{U}_1 &= \\ = -\frac{fm_0}{2r_1} \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_1 \circ \mathbf{R}_{01}^{id} - \frac{1}{2r_1} \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_1 \circ \mathbf{P}^{id} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Учитывая равенство $\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{U}_i \circ \dot{\bar{\mathbf{U}}}_i + \dot{\mathbf{U}}_i \circ \bar{\mathbf{U}}_i$ ($i = 0, 1$) и соотношения (4.23), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_i \circ \dot{\bar{\mathbf{U}}}_i \circ \mathbf{i} \circ \dot{\mathbf{U}}_i &= -\dot{\mathbf{r}}_i \dot{\mathbf{U}}_i - \mathbf{i} \circ \dot{\mathbf{U}}_i \circ \bar{\mathbf{U}}_i \circ \mathbf{i} \circ \dot{\mathbf{U}}_i = \\ &= -\dot{\mathbf{r}}_i \dot{\mathbf{U}}_i + \frac{1}{4r_i} \mathbf{U}_i \circ \mathbf{V}_i^{id} \circ \bar{\mathbf{V}}_i^{id} = -\dot{\mathbf{r}}_i \dot{\mathbf{U}}_i + \frac{1}{4r_i} v_i^2 \mathbf{U}_i \end{aligned}$$

где $\mathbf{V}_i^{id} \circ \bar{\mathbf{V}}_i^{id} = \mathbf{V}_i \circ \bar{\mathbf{V}}_i = |\mathbf{v}_i|^2 = v_i^2$, $\mathbf{v}_i$ – вектор скорости движения точки M в системе координат $M_i X_i Y_i Z_i$, оси которой параллельны соответствующим осям инерциальной системы координат.

Уравнения (4.26) и (4.27) с учетом последних равенств принимают вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{U}}_0 + \frac{1}{r_0} \dot{\mathbf{r}}_0 \dot{\mathbf{U}}_0 - \frac{1}{4r_0^2} v_0^2 \mathbf{U}_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{fm_0}{r_0^3} + \frac{fm_1}{r_1^3} \right) \mathbf{U}_0 &= \\ = -\frac{fm_1}{2r_0} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_0 \circ \mathbf{R}_{01}^{id} - \frac{1}{2r_0} \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_0 \circ \mathbf{P}^{id} \\ \ddot{\mathbf{U}}_1 + \frac{1}{r_1} \dot{\mathbf{r}}_1 \dot{\mathbf{U}}_1 - \frac{1}{4r_1^2} v_1^2 \mathbf{U}_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{fm_1}{r_1^3} + \frac{fm_0}{r_0^3} \right) \mathbf{U}_1 &= \\ = -\frac{fm_0}{2r_1} \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_1 \circ \mathbf{R}_{01}^{id} - \frac{1}{2r_1} \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_1 \circ \mathbf{P}^{id} \end{aligned}$$

Перейдем в первых двух слагаемых левых частей полученных уравнений от независимой переменной t к новой независимой переменной τ_0 и τ_1 соответственно по формулам $dt/d\tau_0 = r_0$ и $dt/d\tau_1 = r_1$. Кроме того, учтем при этом выражения (2.15) для кеплеровских энергий h_0^* и h_1^* . В итоге получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{U}_0}{d\tau_0^2} - \frac{1}{2}h_0^*\mathbf{U}_0 &= -\frac{1}{2}fm_1\frac{r_0^2}{r_1^3}\mathbf{U}_0 - \frac{1}{2}fm_1r_0\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3}\right)\mathbf{i} \circ \mathbf{U}_0 \circ \mathbf{R}_{01}^{id} - \frac{1}{2}r_0\mathbf{i} \circ \mathbf{U}_0 \circ \mathbf{P}^{id} \\ \frac{d^2\mathbf{U}_1}{d\tau_1^2} - \frac{1}{2}h_1^*\mathbf{U}_1 &= -\frac{1}{2}fm_0\frac{r_1^2}{r_0^3}\mathbf{U}_1 - \frac{1}{2}fm_0r_1\left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)\mathbf{i} \circ \mathbf{U}_1 \circ \mathbf{R}_{01}^{id} - \frac{1}{2}r_1\mathbf{i} \circ \mathbf{U}_1 \circ \mathbf{P}^{id}\end{aligned}$$

Отметим, что слагаемые $\frac{1}{r_0}\dot{r}_0\dot{\mathbf{U}}_0$ и $\frac{1}{r_1}\dot{r}_1\dot{\mathbf{U}}_1$ левых частей предыдущих уравнений и слагаемые $-r_0^{-3}\frac{dr_0}{d\tau_0}\frac{d\mathbf{U}_0}{d\tau_0}$ и $-r_1^{-3}\frac{dr_1}{d\tau_1}\frac{d\mathbf{U}_1}{d\tau_1}$, появляющиеся в этих частях уравнений при переходе к новым независимым переменным τ_0 и τ_1 , сокращаются.

Дополним полученные уравнения кватернионным дифференциальным уравнением (4.3) ориентации идеальной системы координат $M_iX_i^{id}Y_i^{id}Z_i^{id}$, осуществив в нем предварительно переход от времени t к новой независимой переменной τ_i по формуле $dt/d\tau_i = r_i$, а также дифференциальными уравнениями (2.22) и (2.23) для кеплеровских энергий h_0^* и h_1^* . В итоге получим следующие локально регулярные (регулярные в окрестности точки M_0 или M_1) кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, записанные в идеальных системах координат $M_0X_0^{id}Y_0^{id}Z_0^{id}$ и $M_1X_1^{id}Y_1^{id}Z_1^{id}$ соответственно:

$$\frac{d^2\mathbf{U}_0}{d\tau_0^2} - \frac{1}{2}h_0^*\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2}fm_1\frac{r_0^2}{r_1^3}\mathbf{U}_0 - \frac{1}{2}r_0\mathbf{i} \circ \mathbf{U}_0 \circ \left[fm_1\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3}\right)\mathbf{R}_{01}^{id} + \mathbf{P}^{id} \right] \quad (4.28)$$

$$\frac{d^2\mathbf{U}_1}{d\tau_1^2} - \frac{1}{2}h_1^*\mathbf{U}_1 = -\frac{1}{2}fm_0\frac{r_1^2}{r_0^3}\mathbf{U}_1 - \frac{1}{2}r_1\mathbf{i} \circ \mathbf{U}_1 \circ \left[fm_0\left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)\mathbf{R}_{01}^{id} + \mathbf{P}^{id} \right] \quad (4.29)$$

$$\frac{dh_0^*}{d\tau_0} = -fm_1\frac{r_0}{r_1^3}\frac{dr_0}{d\tau_0} + fm_1\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3}\right)\left(\frac{d\mathbf{r}_0}{d\tau_0} \cdot \mathbf{r}_{01}\right) + \frac{d\mathbf{r}_0}{d\tau_0} \cdot \mathbf{p} \quad (4.30)$$

$$\frac{dh_1^*}{d\tau_1} = -fm_0\frac{r_1}{r_0^3}\frac{dr_1}{d\tau_1} + fm_0\left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)\left(\frac{d\mathbf{r}_1}{d\tau_1} \cdot \mathbf{r}_{01}\right) + \frac{d\mathbf{r}_1}{d\tau_1} \cdot \mathbf{p} \quad (4.31)$$

$$2\frac{d\mathbf{\Lambda}_i}{d\tau_i} = \mathbf{\Lambda}_i \circ \mathbf{\Omega}_i^{*id}, \quad \mathbf{\Lambda}_i = \mathbf{\Lambda}_{i0} + \mathbf{\Lambda}_{i1}\mathbf{i} + \mathbf{\Lambda}_{i2}\mathbf{j} + \mathbf{\Lambda}_{i3}\mathbf{k}, \quad i = 0, 1 \quad (4.32)$$

$$\frac{dt}{d\tau_i} = r_i, \quad i = 0, 1 \quad (4.33)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_i &= U_{i0} + U_{i3}\mathbf{k}, \\ \mathbf{\Omega}_i^{*id} &= r_i\mathbf{\Omega}_i^{id} = \omega_{i1}\mathbf{R}_i^{id} = \omega_{i1}[(U_{i0}^2 - U_{i3}^2)\mathbf{i} + (-2U_{i0}U_{i3})\mathbf{j}] = \omega_{i1}\bar{\mathbf{U}}_i \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_i\end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\omega_{01} = \frac{r_0}{c_0}\left[fm_1\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3}\right)z'_{01} + p'_3 \right], \quad z'_{01} = Z'_{01}, \quad p'_3 = P'_z \quad (4.35)$$

$$\omega_{11} = \frac{r_1}{c_1}\left[fm_0\left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)z''_{01} + p''_3 \right], \quad z''_{01} = Z''_{01}, \quad p''_3 = P''_z \quad (4.36)$$

$$r_i = \mathbf{U}_i \circ \bar{\mathbf{U}}_i = \bar{\mathbf{U}}_i \circ \mathbf{U}_i = U_{i0}^2 + U_{i3}^2, \quad c_i = |\mathbf{c}_i| = 2 \left(U_{i3} \frac{dU_{i0}}{d\tau_i} - U_{i0} \frac{dU_{i3}}{d\tau_i} \right) \quad (4.37)$$

$$\mathbf{R}_{01}^{id} = X_{01}' \mathbf{i} + Y_{01}' \mathbf{j}, \quad \mathbf{P}^{id} = P_x' \mathbf{i} + P_y' \mathbf{j} \quad (4.38)$$

$$\mathbf{R}_{01}^{id} = X_{01}'' \mathbf{i} + Y_{01}'' \mathbf{j}, \quad \mathbf{P}^{id} = P_x'' \mathbf{i} + P_y'' \mathbf{j} \quad (4.39)$$

$$\frac{dr_i}{d\tau_i} = 2 \left(U_{i0} \frac{dU_{i0}}{d\tau_i} + U_{i3} \frac{dU_{i3}}{d\tau_i} \right) \quad (4.40)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{d\tau_0} \cdot \mathbf{r}_{01} = 2 \left(U_{00} \frac{dU_{00}}{d\tau_0} - U_{03} \frac{dU_{03}}{d\tau_0} \right) X_{01}' - 2 \left(U_{00} \frac{dU_{03}}{d\tau_0} + U_{03} \frac{dU_{00}}{d\tau_0} \right) Y_{01}' \quad (4.41)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{d\tau_0} \cdot \mathbf{p} = 2 \left(U_{00} \frac{dU_{00}}{d\tau_0} - U_{03} \frac{dU_{03}}{d\tau_0} \right) P_x' - 2 \left(U_{00} \frac{dU_{03}}{d\tau_0} + U_{03} \frac{dU_{00}}{d\tau_0} \right) P_y' \quad (4.42)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{d\tau_1} \cdot \mathbf{r}_{01} = 2 \left(U_{10} \frac{dU_{10}}{d\tau_1} - U_{13} \frac{dU_{13}}{d\tau_1} \right) X_{01}'' - 2 \left(U_{10} \frac{dU_{13}}{d\tau_1} + U_{13} \frac{dU_{10}}{d\tau_1} \right) Y_{01}'' \quad (4.43)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{d\tau_1} \cdot \mathbf{p} = 2 \left(U_{10} \frac{dU_{10}}{d\tau_1} - U_{13} \frac{dU_{13}}{d\tau_1} \right) P_x'' - 2 \left(U_{10} \frac{dU_{13}}{d\tau_1} + U_{13} \frac{dU_{10}}{d\tau_1} \right) P_y'' \quad (4.44)$$

Для согласования двух используемых в окрестностях гравитирующих точек M_0 и M_1 независимых переменных τ_0 и τ_1 необходимо использовать дифференциальные уравнения $d\tau_1/d\tau_0 = r_0/r_1$ и $d\tau_0/d\tau_1 = r_1/r_0$.

Декартовы координаты x_i, y_i, z_i ($i = 0, 1$) точки M в системе координат $M_i X_i Y_i Z_i$, оси которой параллельны одноименным осям инерциальной системы координат $O\xi\eta\zeta$, и проекции v_{ik} ($k = 1, 2, 3$) вектора скорости $\mathbf{v}_i$ точки M в системе координат $M_i X_i Y_i Z_i$ на ее же координатные оси находятся через переменные Леви-Чивита U_{i0}, U_{i3} и их первые производные $dU_{i0}/d\tau_i, dU_{i3}/d\tau_i$ по кватернионным формулам (4.45), (4.46) и (4.47), (4.48), содержащим кватернион $\mathbf{\Lambda}_i$ ориентации идеальной системы координат:

$$\mathbf{R}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k} = \mathbf{\Lambda}_i \circ \mathbf{R}_i^{id} \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}_i, \quad i = 0, 1 \quad (4.45)$$

$$\mathbf{R}_i^{id} = X_i \mathbf{i} + Y_i \mathbf{j} = (U_{i0}^2 - U_{i3}^2) \mathbf{i} + (-2U_{i0}U_{i3}) \mathbf{j} = \bar{\mathbf{U}}_i \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_i \quad (4.46)$$

$$\mathbf{V}_i = v_{i1} \mathbf{i} + v_{i2} \mathbf{j} + v_{i3} \mathbf{k} = \dot{\mathbf{R}}_i = \dot{x}_i \mathbf{i} + \dot{y}_i \mathbf{j} + \dot{z}_i \mathbf{k} = \mathbf{\Lambda}_i \circ \mathbf{V}_i^{id} \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}_i \quad (i = 0, 1) \quad (4.47)$$

$$\mathbf{V}_i^{id} = \frac{2}{r_i} \left[\left(U_{i0} \frac{dU_{i0}}{d\tau_i} - U_{i3} \frac{dU_{i3}}{d\tau_i} \right) \mathbf{i} - \left(U_{i0} \frac{dU_{i3}}{d\tau_i} + U_{i3} \frac{dU_{i0}}{d\tau_i} \right) \mathbf{j} \right] = \frac{2}{r_i} \bar{\mathbf{U}}_i \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{U}_i}{d\tau_i} \quad (4.48)$$

Проекции $P_x', P_y', P_z' = p_3'$ вектора возмущающего ускорения $\mathbf{p}$ на оси идеальной системы координат $M_0 X_0^{id} Y_0^{id} Z_0^{id}$ и его проекции $P_x'', P_y'', P_z'' = p_3''$ на оси идеальной системы координат $M_1 X_1^{id} Y_1^{id} Z_1^{id}$ связаны с его проекциями $p_1 = p_x, p_2 = p_y, p_3 = p_z$ на оси системы координат $M_0 X_0 Y_0 Z_0$, а также системы координат $M_1 X_1 Y_1 Z_1$ кватернионными соотношениями (4.14).

Запишем полученные регулярные уравнения (4.28)–(4.33) в скалярном виде

$$\frac{d^2 U_{00}}{d\tau_0^2} - \frac{1}{2} h_0^* U_{00} =$$

$$= -\frac{1}{2} fm_1 \frac{r_0^2}{r_1^3} U_{00} - \frac{1}{2} r_0 \left[fm_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) (-U_{00} X'_{01} + U_{03} Y'_{01}) + (-U_{00} P'_x + U_{03} P'_y) \right] \quad (4.49)$$

$$\frac{d^2 U_{03}}{d\tau_0^2} - \frac{1}{2} h_0^* U_{03} =$$

$$= -\frac{1}{2} fm_1 \frac{r_0^2}{r_1^3} U_{03} - \frac{1}{2} r_0 \left[fm_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) (U_{00} Y'_{01} + U_{03} X'_{01}) + (U_{00} P'_y + U_{03} P'_x) \right]$$

$$\frac{d^2 U_{10}}{d\tau_1^2} - \frac{1}{2} h_1^* U_{10} = -\frac{1}{2} fm_0 \frac{r_1^2}{r_0^3} U_{10} -$$

$$-\frac{1}{2} r_1 \left[fm_0 \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) (-U_{10} X''_{01} + U_{13} Y''_{01}) + (-U_{10} P''_x + U_{13} P''_y) \right] \quad (4.50)$$

$$\frac{d^2 U_{13}}{d\tau_1^2} - \frac{1}{2} h_1^* U_{13} = -\frac{1}{2} fm_0 \frac{r_1^2}{r_0^3} U_{13} -$$

$$-\frac{1}{2} r_1 \left[fm_0 \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) (U_{10} Y''_{01} + U_{13} X''_{01}) + (U_{10} P''_y + U_{13} P''_x) \right]$$

$$\frac{dh_0^*}{d\tau_0} = -fm_1 \frac{r_0}{r_1^3} \frac{dr_0}{d\tau_0} + fm_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) \left[2 \left(U_{00} \frac{dU_{00}}{d\tau_0} - U_{03} \frac{dU_{03}}{d\tau_0} \right) X'_{01} - \right.$$

$$- 2 \left(U_{00} \frac{dU_{03}}{d\tau_0} + U_{03} \frac{dU_{00}}{d\tau_0} \right) Y' \left. \right] + 2 \left(U_{00} \frac{dU_{00}}{d\tau_0} - U_{03} \frac{dU_{03}}{d\tau_0} \right) P'_x -$$

$$- 2 \left(U_{00} \frac{dU_{03}}{d\tau_0} + U_{03} \frac{dU_{00}}{d\tau_0} \right) P'_y \quad (4.51)$$

$$\frac{dh_1^*}{d\tau_1} = -fm_0 \frac{r_1}{r_0^3} \frac{dr_1}{d\tau_1} + fm_0 \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) \left[2 \left(U_{10} \frac{dU_{10}}{d\tau_1} - U_{13} \frac{dU_{13}}{d\tau_1} \right) X''_{01} - \right.$$

$$- 2 \left(U_{10} \frac{dU_{13}}{d\tau_1} + U_{13} \frac{dU_{10}}{d\tau_1} \right) Y'' \left. \right] + 2 \left(U_{10} \frac{dU_{10}}{d\tau_1} - U_{13} \frac{dU_{13}}{d\tau_1} \right) P''_x -$$

$$- 2 \left(U_{10} \frac{dU_{13}}{d\tau_1} + U_{13} \frac{dU_{10}}{d\tau_1} \right) P''_y \quad (4.52)$$

$$2 \frac{d\Lambda_{i0}}{d\tau_i} = -\Omega_{i1}^* \Lambda_{i1} - \Omega_{i2}^* \Lambda_{i2}, \quad 2 \frac{d\Lambda_{i1}}{d\tau_i} = \Omega_{i1}^* \Lambda_{i0} - \Omega_{i2}^* \Lambda_{i3}$$

$$2 \frac{d\Lambda_{i2}}{d\tau_i} = \Omega_{i2}^* \Lambda_{i0} + \Omega_{i1}^* \Lambda_{i3}, \quad 2 \frac{d\Lambda_{i3}}{d\tau_i} = \Omega_{i2}^* \Lambda_{i1} - \Omega_{i1}^* \Lambda_{i2} \quad (4.53)$$

$$\frac{dt}{d\tau_i} = r_i, \quad i = 0, 1 \quad (4.54)$$

Здесь

$$\Omega_{i1}^* = \omega_{i1} (U_{i0}^2 - U_{i3}^2), \quad \Omega_{i2}^* = -2\omega_{i1} U_{i0} U_{i3} \quad (4.55)$$

$$\omega_{01} = \frac{r_0}{c_0} \left[fm_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) Z'_{01} + P'_z \right] \quad (4.56)$$

$$\omega_{11} = \frac{r_1}{c_1} \left[fm_0 \left(\frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) Z_{01}'' + P_z'' \right] \quad (4.57)$$

Кватернионные соотношения (4.45)–(4.48) для нахождения декартовых координат x_i, y_i, z_i ($i = 0, 1$) точки M и проекций скорости v_{ik} ($k = 1, 2, 3$) этой точки в системе координат $M_i X_i Y_i Z_i$ в скалярной записи принимают вид

$$\begin{aligned} x_i &= (\Lambda_{i0}^2 + \Lambda_{i1}^2 - \Lambda_{i2}^2 - \Lambda_{i3}^2) X_i + 2(\Lambda_{i1}\Lambda_{i2} - \Lambda_{i0}\Lambda_{i3}) Y_i \\ y_i &= 2(\Lambda_{i1}\Lambda_{i2} + \Lambda_{i0}\Lambda_{i3}) X_i + (\Lambda_{i0}^2 - \Lambda_{i1}^2 + \Lambda_{i2}^2 - \Lambda_{i3}^2) Y_i \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} z_i &= 2(\Lambda_{i1}\Lambda_{i3} - \Lambda_{i0}\Lambda_{i2}) X_i + 2(\Lambda_{i2}\Lambda_{i3} + \Lambda_{i0}\Lambda_{i1}) Y_i \\ X_i &= U_{i0}^2 - U_{i3}^2, \quad Y_i = -2U_{i0}U_{i3}, \quad i = 0, 1 \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} v_{i1} = \dot{x}_i &= (\Lambda_{i0}^2 + \Lambda_{i1}^2 - \Lambda_{i2}^2 - \Lambda_{i3}^2) \dot{X}_i + 2(\Lambda_{i1}\Lambda_{i2} - \Lambda_{i0}\Lambda_{i3}) \dot{Y}_i \\ v_{i2} = \dot{y}_i &= 2(\Lambda_{i1}\Lambda_{i2} + \Lambda_{i0}\Lambda_{i3}) \dot{X}_i + (\Lambda_{i0}^2 - \Lambda_{i1}^2 + \Lambda_{i2}^2 - \Lambda_{i3}^2) \dot{Y}_i \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} v_{i3} = \dot{z}_i &= 2(\Lambda_{i1}\Lambda_{i3} - \Lambda_{i0}\Lambda_{i2}) \dot{X}_i + 2(\Lambda_{i2}\Lambda_{i3} + \Lambda_{i0}\Lambda_{i1}) \dot{Y}_i \\ \dot{X}_i &= 2(U_{i0}\dot{U}_{i0} - U_{i3}\dot{U}_{i3}) = \frac{2}{r_i} \left(U_{i0} \frac{dU_{i0}}{d\tau_i} - U_{i3} \frac{dU_{i3}}{d\tau_i} \right) \\ \dot{Y}_i &= -2(U_{i0}\dot{U}_{i3} + U_{i3}\dot{U}_{i0}) = -\frac{2}{r_i} \left(U_{i0} \frac{dU_{i3}}{d\tau_i} + U_{i3} \frac{dU_{i0}}{d\tau_i} \right) \end{aligned} \quad (4.61)$$

Отметим, что дифференциальные уравнения (4.30) и (4.31), а также (4.51) и (4.52) для кеплеровских энергий можно исключить из состава кватернионных регулярных дифференциальных уравнений (4.28)–(4.33) и соответствующих им скалярных регулярных дифференциальных уравнений (4.49)–(4.54), заменив их алгебраическими соотношениями

$$h_i^* = \frac{1}{r_i} \left[2 \left(\left(\frac{dU_{i0}}{d\tau_i} \right)^2 + \left(\frac{dU_{i3}}{d\tau_i} \right)^2 \right) - fm_i \right], \quad i = 0, 1$$

Соотношения (4.41)–(4.44) при этом также выпадают из рассмотрения, однако регулярность уравнений нарушается из-за появления множителя r_i^{-1} в левых частях кватернионных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{U}_0}{d\tau_0^2} - \frac{1}{r_0} \left[\left(\left(\frac{dU_{00}}{d\tau_0} \right)^2 + \left(\frac{dU_{03}}{d\tau_0} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} fm_0 \right] \mathbf{U}_0 = \\ - \frac{1}{2} fm_1 \frac{r_0^2}{r_1^3} \mathbf{U}_0 - \frac{1}{2} r_0 \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_0 \circ \left[fm_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) \mathbf{R}_{01}^{id} + \mathbf{P}^{id} \right] \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{U}_1}{d\tau_1^2} - \frac{1}{r_1} \left[\left(\left(\frac{dU_{10}}{d\tau_1} \right)^2 + \left(\frac{dU_{13}}{d\tau_1} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} fm_1 \right] \mathbf{U}_1 = \\ = - \frac{1}{2} fm_0 \frac{r_1^2}{r_0^3} \mathbf{U}_1 - \frac{1}{2} r_1 \mathbf{i} \circ \mathbf{U}_1 \circ \left[fm_0 \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) \mathbf{R}_{01}^{id} + \mathbf{P}^{id} \right] \end{aligned} \quad (4.63)$$

и соответствующих им скалярных уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 U_{00}}{d\tau_0^2} - \frac{1}{r_0} \left[\left(\frac{dU_{00}}{d\tau_0} \right)^2 + \left(\frac{dU_{03}}{d\tau_0} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} f m_0 \Big] U_{00} = -\frac{1}{2} f m_1 \frac{r_0^2}{r_1^3} U_{00} - \\
- \frac{1}{2} r_0 \left[f m_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) (-U_{00} X'_{01} + U_{03} Y'_{01}) + (-U_{00} P'_x + U_{03} P'_y) \right] \\
\frac{d^2 U_{03}}{d\tau_0^2} - \frac{1}{r_0} \left[\left(\frac{dU_{00}}{d\tau_0} \right)^2 + \left(\frac{dU_{03}}{d\tau_0} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} f m_0 \Big] U_{03} = -\frac{1}{2} f m_1 \frac{r_0^2}{r_1^3} U_{03} - \\
- \frac{1}{2} r_0 \left[f m_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) (U_{00} Y'_{01} + U_{03} X'_{01}) + (U_{00} P'_y + U_{03} P'_x) \right]
\end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 U_{10}}{d\tau_1^2} - \frac{1}{r_1} \left[\left(\frac{dU_{10}}{d\tau_1} \right)^2 + \left(\frac{dU_{13}}{d\tau_1} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} f m_1 \Big] U_{10} = -\frac{1}{2} f m_0 \frac{r_1^2}{r_0^3} U_{10} - \\
- \frac{1}{2} r_1 \left[f m_0 \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) (-U_{10} X''_{01} + U_{13} Y''_{01}) + (-U_{10} P''_x + U_{13} P''_y) \right] \\
\frac{d^2 U_{13}}{d\tau_1^2} - \frac{1}{r_1} \left[\left(\frac{dU_{10}}{d\tau_1} \right)^2 + \left(\frac{dU_{13}}{d\tau_1} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} f m_1 \Big] U_{13} = -\frac{1}{2} f m_0 \frac{r_1^2}{r_0^3} U_{13} - \\
- \frac{1}{2} r_1 \left[f m_0 \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_{01}^3} \right) (U_{10} Y''_{01} + U_{13} X''_{01}) + (U_{10} P''_y + U_{13} P''_x) \right]
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Эти кватернионные уравнения (4.62) и (4.63), дополненные уравнениями (4.32) и (4.33), а также соответствующие им скалярные уравнения (4.64) и (4.65), дополненные уравнениями (4.53) и (4.54), являются локально квазирегулярными кватернионными дифференциальными уравнениями возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел.

Кватернионные дифференциальные уравнения (4.28), (4.30), (4.32), (4.33) и соотношения (4.34), (4.35), (4.37), (4.38), (4.40)–(4.42) при $i = 0$, а также эквивалентные им скалярные дифференциальные уравнения (4.47), (4.49), (4.51), (4.52) и соотношения (4.53), (4.54) при $i = 0$, дополненные дифференциальным уравнением

$$d\tau_1/d\tau_0 = r_0 r_1^{-1} \tag{4.66}$$

и соотношением (4.10) для нахождения r_1 , образуют в совокупности дифференциальные уравнения движения точки M , регулярные в окрестности точки M_0 .

Кватернионные дифференциальные уравнения (4.29), (4.31), (4.32), (4.33) и соотношения (4.34), (4.36), (4.37), (4.39), (4.40), (4.43), (4.44) при $i = 1$, а также эквивалентные им скалярные дифференциальные уравнения (4.50), (4.52), (4.53), (4.54) и соотношения (4.55), (4.57) при $i = 1$, дополненные дифференциальным уравнением

$$d\tau_0/d\tau_1 = r_1 r_0^{-1} \tag{4.67}$$

и соотношением (4.11) для нахождения r_0 , образуют в совокупности дифференциальные уравнения движения точки M , регулярные в окрестности точки M_1 .

В кватернионных уравнениях (4.28), (4.30), (4.32), (4.33) при $i = 0$ и (4.29), (4.31), (4.32), (4.33) при $i = 1$ регулярными переменными являются двухкомпонентный кватернион $\mathbf{U}_i = U_{i0} + U_{i3}\mathbf{k}$, описывающий движение точки M в идеальной системе координат $M_i X_i^{id} Y_i^{id} Z_i^{id}$, кеплеровская энергия h_i^* , время t и кватернион Λ_i , характеризующий ориентацию идеальной системы координат в инерциальной системе координат

$O\xi\eta\zeta$ и являющийся кватернионным оскулирующим элементом (кватернионной медленно изменяющейся переменной) для движения точки M в окрестности гравитирующей точки M_i .

В скалярных уравнениях (4.47), (4.49), (4.51), (4.52) при $i = 0$ и (4.50), (4.52), (4.53), (4.54) при $i = 1$ регулярными переменными являются переменные Леви-Чивита U_{i0} и U_{i3} , описывающие движение точки M в идеальной системе координат $M_i X_i^{id} Y_i^{id} Z_i^{id}$, кеплеровская энергия h_i^* , время t и параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера) Λ_{ij} , характеризующие ориентацию идеальной системы координат в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$ и являющиеся скалярными оскулирующими элементами (медленно изменяющимися переменными) для движения точки M в окрестности гравитирующей точки M_i .

Эти уравнения представляют собой системы нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений одиннадцатого порядка относительно двух переменных Леви-Чивита U_{i0} и U_{i3} , их первых производных $dU_{i0}/d\tau_i$ и $dU_{i3}/d\tau_i$, четырех параметров Родрига–Гамильтона (Эйлера) Λ_{ij} ($j = 0, 1, 2, 3$), энергетической переменной h_i^* , времени t и переменной τ_i или τ_0 .

Отметим, что полученные уравнения не пригодны для исследования прямолинейных движений точки M , для которых модуль c_i вектора $\mathbf{c}_i$ момента вектора скорости $\mathbf{v}_i$ точки M в системе координат $M_0 X_i Y_i Z_i$ относительно гравитирующей точки M_i равен нулю, т.к. он присутствует в знаменателях компонент кватерниона Ω_i^{*id} угловой скорости вращения идеальной системы координат (во времени τ_i).

Полученные совокупности дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел позволяют разработать регулярные аналитические и численные методы изучения движения тела пренебрежимо малой массы в окрестностях двух других тел, имеющих конечные массы, а также позволяют построить регулярные алгоритмы интегрирования этих уравнений, в которых кватернионные дифференциальные уравнения (4.28), (4.30), (4.32), (4.33) или эквивалентные им скалярные дифференциальные уравнения (4.47), (4.49), (4.51), (4.52) (при $i = 0$) этой задачи используются при изучении движения точки M в окрестности точки M_0 (когда расстояния r_0 и r_1 удовлетворяют неравенству $m_1 r_0^2 \leq m_0 r_1^2$), а кватернионные дифференциальные уравнения (4.29), (4.31), (4.32), (4.33) или эквивалентные им скалярные дифференциальные уравнения (4.50), (4.52), (4.53), (4.54) (при $i = 1$) этой задачи используются при изучении движения точки M в окрестности точки M_1 (когда расстояния r_1 и r_0 удовлетворяют неравенству $m_0 r_1^2 < m_1 r_0^2$).

Полученные в этом разделе другие совокупности дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел позволяют разработать квазирегулярные, но более простые, аналитические и численные методы изучения движения тела пренебрежимо малой массы в окрестностях двух других тел, имеющих конечные массы, а также позволяют построить более простые квазирегулярные алгоритмы интегрирования этих уравнений, в которых кватернионные дифференциальные уравнения (4.62), (4.32), (4.33) или эквивалентные им скалярные дифференциальные уравнения (4.64), (4.53), (4.54) (при $i = 0$) этой задачи используются при изучении движения точки M в окрестности точки M_0 (когда расстояния r_0 и r_1 удовлетворяют неравенству $m_1 \leq m_0 r_1^2$), а кватернионные дифференциальные уравнения (4.63), (4.32), (4.33) или эквивалентные им скалярные дифференциальные уравнения (4.65), (4.53), (4.54) (при $i = 1$) этой задачи используются при изучении движения точки M в окрестности точки M_1 (когда расстояния r_1 и r_0 удовлетворяют неравенству $m_0 r_1^2 < m_1 r_0^2$).

При $m_1 = 0$ (или $m_0 = 0$) из полученных уравнений следуют регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел M и M_0 (или M и M_1), одно из которых M (например, космический аппарат или астероид) имеет пренебрежимо малую массу (в сравнении с массой тел M_0 и M_1):

$$\frac{d^2 \mathbf{U}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h^* \mathbf{U} = -\frac{1}{2} r \mathbf{i} \circ \mathbf{U} \circ (P'_x \mathbf{i} + P'_y \mathbf{j}) \quad (4.68)$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \cdot \mathbf{p} = 2 \left(U_0 \frac{dU_0}{d\tau} - U_3 \frac{dU_3}{d\tau} \right) P'_x - 2 \left(U_0 \frac{dU_3}{d\tau} + U_3 \frac{dU_0}{d\tau} \right) P'_y \quad (4.69)$$

$$2 \frac{d\mathbf{\Lambda}}{d\tau} = r \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Omega}^{id} = \frac{r}{c} P'_z \mathbf{\Lambda} \circ [(U_0^2 - U_3^2) \mathbf{i} + (-2U_0 U_3) \mathbf{j}] = \frac{r}{c} P'_z \mathbf{\Lambda} \circ \bar{\mathbf{U}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{U} \quad (4.70)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = r \quad (4.71)$$

Здесь

$$\mathbf{U} = U_0 + U_3 \mathbf{k}, \quad \mathbf{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{i} + \Lambda_2 \mathbf{j} + \Lambda_3 \mathbf{k}$$

$$r = \mathbf{U} \circ \bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{U}} \circ \mathbf{U} = U_0^2 + U_3^2, \quad c = |\mathbf{c}| = 2 \left(U_3 \frac{dU_0}{d\tau} - U_0 \frac{dU_3}{d\tau} \right)$$

$\mathbf{U}$ — двухкомпонентный кватернион, описывающий движение точки M в идеальной системе координат $M_0 X^{id} Y^{id} Z^{id}$, U_0 и U_3 — переменные Леви-Чивиты, h^* — кеплеровская энергия точки M (скалярный оскулирующий элемент орбиты точки M), $\mathbf{\Lambda}$ — кватернион, характеризующий ориентацию идеальной системы координат в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$ (является кватернионным оскулирующим элементом (кватернионной медленно изменяющейся переменной)), Λ_j ($j = 0, 1, 2, 3$) — параметры Родрига—Гамильтона (Эйлера) (скалярные оскулирующие элементы (скалярные медленно изменяющиеся переменные)), r — расстояние от точки M до гравитирующей точки M_0 , $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M в системе координат $M_0 X_0 Y_0 Z_0$, оси которой параллельны осям инерциальной системы координат, c — модуль вектора $\mathbf{c}$ момента скорости $\mathbf{v}$ точки M в системе координат $M_0 X_0 Y_0 Z_0$ относительно точки M_0 , t — время (зависимая переменная), τ — новая независимая переменная, P'_x , P'_y , P'_z — проекции вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения точки M на оси идеальной системы координат.

Эти уравнения совпадают с регулярными кватернионными уравнениями возмущенной пространственной задачи двух тел, предложенными ранее автором статьи в работе [22].

Регулярные кватернионные уравнения (4.68)–(4.71) возмущенной пространственной задачи двух тел, в которых используются переменные Леви-Чивита и кватернион ориентации идеальной системы координат, образуют систему нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений десятого порядка (такую же размерность имеют кватернионные регулярные уравнения в переменных Кустаанхеймо—Штифеля) и имеют все достоинства уравнений в переменных Кустаанхеймо—Штифеля:

- они регулярны в центре притяжения,
- линейны для невозмущенных кеплеровских движений,
- позволяют выработать единый подход к изучению всех трех типов кеплеровского движения с использованием функций Штумпфа,
- близки к линейным уравнениям для возмущенных кеплеровских движений,
- позволяют представить правые части дифференциальных уравнений движения небесных и космических тел в полиномиальной форме, удобной для их решения с помощью ЭВМ.

Вместе с тем уравнения (4.68)–(4.71) имеют существенные отличия:

– для невозмущенного эллиптического кеплеровского движения изучаемого тела эти регулярные уравнения движения эквивалентны уравнениям движения не четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора, как в случае использования переменных Кустаанхеймо–Штифеля, а уравнениям движения двухмерного одночастотного гармонического осциллятора, квадрат частоты которого равен половине кеплеровской энергии тела, взятой с обратным знаком, поскольку кватернион ориентации идеальной системы координат, в которой записаны эти уравнения движения, в этом случае остается постоянным;

– для возмущенного (управляемого) движения изучаемого тела кватернион ориентации идеальной системы координат является кватернионным оскулирующим элементом (медленно изменяющейся кватернионной переменной), что также является полезным свойством этих уравнений.

Заключение. Классические модели небесной механики и механики космического полета (астродинамики) имеют особенности типа сингулярности (деления на ноль), порождаемые действующими гравитационными силами. Эти особенности осложняют аналитическое и численное исследование задач орбитального (траекторного) движения небесных и космических тел.

В статье решена проблема локальной регуляризации этих особенностей дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, часто используемых в задачах небесной механики и механики космического полета: проблема регуляризации особенностей уравнений этой задачи, описывающих движение изучаемой материальной точки M , имеющей пренебрежимо малую массу, в поле тяготения двух гравитирующих точек M_0 и M_1 при движении точки M в окрестности точки M_0 или при ее движении в окрестности точки M_1 .

В разделе 2 рассмотрены локально регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, построенные с использованием кватернионов ориентации двух введенных неголономных (азимутально свободных) систем координат, компонентами которых являются параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), и с использованием двух групп четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля. Они представляют собой две системы нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений 11-го порядка относительно переменных Кустаанхеймо–Штифеля u_{ij} ($i = 0, 1; j = 0, 1, 2, 3$), их первых производных $du_{ij}/d\tau_i$ по новой независимой переменной τ_i , кеплеровской энергии h_i^* и времени t . В состав этих систем уравнений входят дополнительные дифференциальные уравнения $d\tau_1/d\tau_0 = r_0/r_1$ и $d\tau_0/d\tau_1 = r_1/r_0$, введенные для согласования двух используемых в окрестностях гравитирующих точек M_0 и M_1 независимых переменных τ_0 и τ_1 (r_0 и r_1 – расстояния от точки M до точек M_0 и M_1). Эти системы уравнений описывают движение материальной точки M , имеющей пренебрежимо малую массу, в поле тяготения двух гравитирующих точек M_0 и M_1 . Одна система уравнений (при $i = 0$) регулярна в окрестности гравитирующей точки M_0 и используется для изучения движения точки M в этой окрестности, другая система уравнений (при $i = 1$) регулярна в окрестности гравитирующей точки M_1 и используется для изучения движения точки M в этой окрестности. Для построения регулярных кватернионных дифференциальных уравнений использовано регуляризующее дифференциальное преобразование времени Зундмана $dt/d\tau_i = r_i$ (в качестве новых независимых переменных использованы “фиктивные” времена τ_0 и τ_1). В этом разделе статьи развиты результаты, полученные нами ранее в работах [13, 14].

В разделе 3 получены локально регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, построен-

ные с использованием кватернионов ориентации λ_0 и λ_1 двух орбитальных систем координат и образующие системы дифференциальных уравнений 10-го порядка. В этих системах регулярных уравнений, записанных в двух орбитальных системах координат $M'_0 X'_0 Y'_0 Z'_0$ и $M'_1 X'_1 Y'_1 Z'_1$, в качестве переменных выступают расстояния r_0 и r_1 от точки M до гравитирующих точек M_0 и M_1 , модули c_0 и c_1 векторов $\mathbf{c}_0$ и $\mathbf{c}_1$ моментов скоростей $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_1$ точки M в системах координат $M_0 X_0 Y_0 Z_0$ и $M_1 X_1 Y_1 Z_1$ относительно точек M_0 и M_1 , кеплеровские энергии h_0^* и h_1^* , время t и параметры Эйлера λ_{0j} и λ_{1j} ($j = 0, 1, 2, 3$) (компоненты кватернионов λ_0 и λ_1), характеризующие ориентации орбитальных систем координат в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$. (Системы координат $M_0 X_0 Y_0 Z_0$ и $M_1 X_1 Y_1 Z_1$ имеют начала в гравитирующих точках M_0 и M_1 и движутся относительно инерциальной системы координат поступательно.) Для построения этих регулярных кватернионных дифференциальных уравнений использовано, как и в разделе 2, регуляризирующее дифференциальное преобразование времени Зундмана $dt/d\tau_i = r_i$. Для согласования двух используемых в окрестностях гравитирующих точек M_0 и M_1 независимых переменных τ_0 и τ_1 использованы, как и в случае использования переменных Ку-стаанхеймо–Штифеля, дифференциальные уравнения $d\tau_1/d\tau_0 = r_0/r_1$ и $d\tau_0/d\tau_1 = r_1/r_0$.

Из этих систем уравнений в третьем разделе получены две другие системы локально регулярных кватернионных дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел 10-го порядка, в которых в качестве двух независимых переменных используются угловые переменные φ_i ($i = 0, 1$), связанные со временем t дифференциальными соотношениями $d\varphi_i = (c_i/r_i^2)dt$. Для согласования двух используемых в окрестностях гравитирующих точек M_0 и M_1 независимых переменных φ_0 и φ_1 используются дифференциальные уравнения $d\varphi_1/d\varphi_0 = c_1 r_0^2 / (c_0 r_1^2)$ и $d\varphi_0/d\varphi_1 = c_0 r_1^2 / (c_1 r_0^2)$.

Из этих систем уравнений, в свою очередь, получены две системы кватернионных дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел 9-го порядка, в которых в качестве двух независимых переменных используются угловые переменные φ_i , а вместо расстояний используются переменные $\rho_i = 1/r_i$ ($i = 0, 1$), обратные расстояниям r_0 и r_1 до гравитирующих точек M_0 и M_1 . Отметим, что дифференциальные уравнения для кеплеровских энергий h_i^* ($i = 0, 1$) в состав этих систем уравнений не входят. Полученные уравнения, содержащие уравнения для переменных ρ_i , не являются регулярными, однако в их состав входят обобщенные уравнения Бинэ. Для задачи двух тел дифференциальное уравнение Бинэ для переменной ρ является линейным.

В разделе 3 также приведены кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, в которых одновременно используются две переменные ρ_i и r_i .

В разделе 4 получены кватернионные и скалярные системы локально регулярных дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел 11-го порядка, в которых регулярными переменными являются двухкомпонентные кватернионы $\mathbf{U}_i = U_{i0} + U_{i3}\mathbf{k}$ и переменные Леви-Чивита U_{i0} и U_{i3} ($i = 0, 1$) соответственно, описывающие движение точки M в идеальных системах координат $M_i X_i^{id} Y_i^{id} Z_i^{id}$ ($i = 0, 1$), их первые производные $d\mathbf{U}_i/d\tau_i = dU_{i0}/d\tau_i + (dU_{i3}/d\tau_i)\mathbf{k}$ и $dU_{i0}/d\tau_i$ и $dU_{i3}/d\tau_i$, кеплеровские энергии h_i^* , время t , а также кватернионы Λ_i и параметры Эйлера Λ_{ij} ($i = 0, 1$) соответственно, характеризующие ориентацию идеальных

систем координат $M_i X_i^{id} Y_i^{id} Z_i^{id}$ ($i = 0, 1$) в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$ и являющиеся кватернионными и скалярными оскулирующими элементами (медленно изменяющимися переменными) для движения точки M в окрестности гравитирующей точки M_0 или M_1 соответственно. Эти уравнения дополняются дифференциальными уравнениями $dt/d\tau_0 = r_0$ и $dt/d\tau_1 = r_1$ для времени t (регуляризующими дифференциальными преобразованиями времени Зундмана).

В разделе 4 также получены локально квазирегулярные, но более простые кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел 10-го порядка, из состава которых исключены дифференциальные уравнения для кеплеровских энергий h_i^* .

В статье показано, что из полученных локально регулярных кватернионных дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел вытекают регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, полученные автором статьи ранее.

Полученные в статье различные локально регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел позволяют разработать регулярные аналитические и численные методы изучения движения тела пренебрежимо малой массы в окрестностях двух других тел, имеющих конечные массы, а также позволяют построить регулярные алгоритмы численного интегрирования этих уравнений, в которых одни группы регулярных кватернионных дифференциальных уравнений (при $i = 0$) используются при изучении движения точки M в окрестности гравитирующей точки M_0 (когда расстояния r_0 и r_1 удовлетворяют нера-

венству $m_1 r_0^2 \leq m_0 r_1^2$), а другие группы регулярных кватернионных дифференциальных уравнений (при $i = 1$) используются при изучении движения точки M в окрестности гравитирующей точки M_1 (когда расстояния r_1 и r_0 удовлетворяют неравенству $m_0 r_1^2 < m_1 r_0^2$).

Эти уравнения могут быть эффективно использованы для изучения орбитального движения небесных и космических тел и космических аппаратов, для прогноза их движения, а также для решения задач управления орбитальным движением космических аппаратов и решения задач инерциальной навигации в космосе.

Отметим, что Леви-Чивита (1920) в отношении своих попыток обобщить предложенную им знаменитую регуляризацию уравнений плоской задачи двух тел на пространственную задачу позже признал [23]: “The problem in space has long resisted my efforts, as I tried to approach it by similar coordinate changes [. . .]” (“Проблема в пространстве долго сопротивлялась моим усилиям, так как я пытался подойти к ней с помощью аналогичных изменений координат [. . .]”). Штифель и Шейфеле (1971) в своей книге [20] отмечали, что Леви-Чивита приложил много усилий, чтобы найти обобщение своего метода регуляризации дифференциальных уравнений плоского движения в задаче двух тел на общую пространственную задачу двух тел, но безуспешно. В работе Арсеза и Заре [1] (1974) говорится, что из-за фундаментальных трудностей, первоначально разъясненных Хопфом (1931) и Гурвицем (1933), невозможно обобщить преобразование Леви-Чивита к эквивалентному набору трехмерных переменных (на случай трехмерного пространства): “Because of fundamental difficulties originally clarified by Hopf (1931) and Hurwitz (1933) it is impossible to generalize the Levi-Civita transformation to an equivalent set of three-dimensional variables”.

Тем не менее, как было отмечено выше, нами было показано [22], что регуляризация Леви-Чивита может быть с успехом использована для построения регулярных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел. Это было сделано нами с помощью использования двухмерных идеальных прямоугольных координат Ганзена, регулярных двухмерных переменных Леви-Чивита и кватерниона ориентации идеальной системы координат, в которой были записаны дифференциальные уравнения

возмущенной пространственной задачи двух тел, а также с помощью использования в качестве дополнительной переменной кеплеровской энергии и использования новой независимой переменной. Компонентами кватерниона ориентации идеальной системы координат являются параметры Эйлера. Полученные уравнения имеют не только хорошо известные достоинства уравнений Кустаанхеймо–Штифеля (регулярность, линейность для кеплеровских движений), но и обладают своими дополнительными достоинствами, описанными выше.

В настоящей статье показано (раздел 4), что переменные Леви-Чивита могут быть с успехом использованы для получения локально регулярных кватернионных дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел.

Отметим также, что обзор работ по кватернионной регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел и возмущенного центрального движения материальной точки был дан автором статьи в его недавней работе [24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aarseth S.J. and Zare K.A.* Regularization of the Three-Body Problem // *Celest. Mech.* 1974. V. 10. P. 185–205.
<https://doi.org/10.1007/BF01227619>
2. *Poincare H.* Sur l'uniformisation des fonctions analytiques // *Acta Math.* 1908. V. 31. P. 1–64.
<https://doi.org/10.1007/BF02415442>
3. *Sundman K.F.* Memoire sur le probleme des trois corps // *Acta Math.* 1913. V. 36. P. 105–179.
<https://doi.org/10.1007/BF02422379>
4. *Lemaître G.* Regularization of the three-body problem // *Vistas Astron.* 1955. № 1. P. 207–215.
[https://doi.org/10.1016/0083-6656\(55\)90028-3](https://doi.org/10.1016/0083-6656(55)90028-3)
5. *Thiele T.N.* Recherches numeriques concernant des solutions periodiques d'un cas special du probleme des trois corps // *Astron. Nachr.* 1895. V. 138. № 1. P. 17.
<https://doi.org/10.1002/asna.18951380102>
6. *Burrau C.* Uber Einige in Aussicht Genommene Berechnung, Betreffend einen Spezialfall des Dreikörperproblems // *Vierteljahrsschrift Astron. Ges.* 1906. V. 41. P. 261.
7. *Birkhoff G.D.* The restricted problem of three bodies // *Rend. Circ. Mat. Palermo.* 1915. V. 39. № 1. P. 265–334.
<https://doi.org/10.1007/BF03015982>
8. *Waldvogel J.A.* A new regularization of the planar problem of three bodies // *Celes. Mech.* 1972. № 6. P. 221–231.
<https://doi.org/10.1007/BF01227784>
9. *Roman R., Szucs-Csillik I.* Generalization of Levi-Civita regularization in the restricted three-body problem // *Astrophys. Space Sci.* 2014. V. 349. P. 117–123.
<https://doi.org/10.1007/s10509-013-1628-6>
10. *Aarseth S.J.* *Gravitational N-Body Simulations.* N.Y.: Cambridge Univ. Press, 2003. 408 p.
11. *Бордовицына Т.В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
12. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений задачи двух тел и ограниченной задачи трех тел // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов (Казань, 20–24 августа 2015 г.) / Сост. Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров, под ред. Д.А. Губайдуллина, А.М. Елизарова, Е.К. Липачёва. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. С. 4051–4053.
13. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. I // *Изв. РАН. МТТ.* 2017. № 6. С. 24–54.
14. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. II // *Изв. РАН. МТТ.* 2018. № 6. С. 41–63.
15. *Челноков Ю.Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* 1981. № 6. С. 12–21.
16. *Челноков Ю.Н.* О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1984. № 1. С. 151–158.

17. Челноков Ю.Н. Анализ оптимального управления движением точки в гравитационном поле с использованием кватернионов // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 5. С. 18–44.
18. Челноков Ю.Н. Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.
19. Челноков Ю.Н. Кватернионные методы и регулярные модели небесной механики и механики космического полета: использование параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) для описания орбитального (траекторного) движения. II: Возмущенная пространственная ограниченная задача трех тел // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 1. С. 142–171.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922600293>
20. Stiefel E.L., Scheifele G. Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971. 350 p. (Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.)
21. Челноков Ю.Н., Логинов М.Ю. Новые кватернионные модели регулярной механики космического полета и их приложения в задачах прогноза движения космических тел и инерциальной навигации в космосе // Сборник материалов: XXVIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Санкт-Петербург, 2021. С. 292–295.
22. Челноков Ю.Н. Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. II // Космические исследования. 2014. Т. 52. № 4. С. 322–336.
23. Levi-Civita T.: Sur la regularization du probleme des trios corps // Acta Math. 1920. V. 42. P. 99–144.
<https://doi.org/10.1007/BF02404404>
24. Chelnokov Y.N. Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // Appl. Math. Mech. (Engl. Ed). 2022. V. 43. № 1. P. 21–80.
<https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9>

УДК 629.7

УПРАВЛЕНИЕ РАЗВОРОТОМ ТВЕРДОГО ТЕЛА (КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА) С КОМБИНИРОВАННЫМ КРИТЕРИЕМ ОПТИМАЛЬНОСТИ НА ОСНОВЕ КВАТЕРНИОНОВ

© 2023 г. М. В. Левский^{a,*}

^a Научно-исследовательский институт космических систем им. А.А. Максимова –
филиал Государственного космического научно-производственного центра им. М.В. Хруничева,
Королев, Россия

*e-mail: levskii1966@mail.ru

Поступила в редакцию 22.05.2022 г.

После доработки 30.08.2022 г.

Принята к публикации 19.10.2022 г.

Изучается динамическая задача оптимального разворота твердого тела (например, космического аппарата) из произвольного начального в назначенное конечное угловое положение при наличии ограничений на управляющие переменные. Время разворота не фиксировано. Для оптимизации программы управления вращением применяется комбинированный критерий качества, минимизируемый функционал объединяет в заданной пропорции энергетические затраты и длительность маневра. На основе принципа максимума Л.С. Понтрягина и кватернионных моделей управляемого движения твердого тела получено решение поставленной задачи. Условия оптимальности переориентации записаны в аналитической форме, и раскрыты свойства оптимального вращения. Для построения оптимальной программы вращения записаны формализованные уравнения и расчетные формулы. Оптимальное управление представлено в форме синтеза. Закон управления сформулирован в виде явной зависимости управляющих переменных от фазовых координат. Приведены аналитические уравнения и соотношения для нахождения оптимального движения. Даны ключевые соотношения, определяющие оптимальные значения параметров алгоритма управления вращением. Также описана конструктивная схема решения краевой задачи принципа максимума для произвольных условий разворота (начального и конечного положений и моментов инерции твердого тела). Для динамически симметричного твердого тела получено решение задачи переориентации в замкнутой форме. Представлены численный пример и результаты математического моделирования, демонстрирующие практическую реализуемость разработанного метода управления ориентацией космического аппарата.

Ключевые слова: переориентация, кватернион, управляющая функция, принцип максимума, комбинированный критерий оптимальности, краевая задача, закон управления

DOI: 10.31857/S0572329922600566, EDN: QWIXGS

Введение. В динамической постановке исследуется задача перевода твердого тела, например, космического аппарата (КА) из исходного углового положения в положение заданной ориентации. Главным отличием предложенного решения является использование нового показателя качества в условиях ограниченности управляющих переменных.

Огромное количество работ изучают проблемы управления угловым положением твердого тела в различных формулировках и используют широкий диапазон методов решения [1–26]. Например, одни авторы предлагают синтез оптимального управления, основанного на методе аналитического конструирования оптимальных регуляторов [1], другие используют концепцию обратных задач динамики для получения гладких управлений для реализации пространственного вращения КА, когда программная траектория разыскивается в классе полиномов заданной степени, коэффициенты которых определяются известными значениями фазовых переменных в граничных точках траектории [2]. Особое внимание уделялось проблемам оптимального управления [1, 3–24]. Методы оптимизации также могут быть различны. В частности, решения задачи переориентации твердых тел различной конфигурации, основанные на принципе максимума Л.С. Понтрягина, рассматриваются в [8–24]. Ранее использовались классические критерии качества процесса управления (быстродействие [4–12], минимум расхода топлива [13], минимум энергозатрат [11, 13, 14] и др.); более подробно рассмотрены кинематические задачи разворота [15–18]. Динамические задачи оптимального управления представляют особый интерес и в то же время определенные сложности в решении краевой задачи разворота; в отдельных частных случаях управления за фиксированное время краевая двухточечная задача разворота решается методом разделения переменных [13]. Практически важными остаются аналитические решения задачи оптимального разворота. Однако получить их для тел с произвольной динамической конфигурацией крайне затруднительно. Для сферического [12, 19] и динамически симметричного распределения масс [9–11, 16, 20–22] некоторые решения (в том числе аналитические) известны.

В статье рассмотрена задача, когда используется новый показатель качества, объединяющий в заданной пропорции время разворота и энергетические затраты, необходимые для переориентации КА (фактор времени делает ограниченной длительность маневра); фазовыми переменными являются кватернион ориентации и угловая скорость твердого тела (КА). Решаемая задача отличается от других задач с комбинированным функционалом видом функционала, наличием ограничений на управление и не относится к осесимметричному твердому телу [21–23].

1. Постановка оптимизационной задачи управления. Будем полагать, что пространственное положение КА регулируется с помощью системы ориентации, создающей вращающие моменты относительно трех главных центральных осей инерции. Вращательное движение твердого тела (КА) описывают следующие динамические уравнения [12]:

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = M_1, \quad J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = M_2, \quad J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = M_3 \quad (1.1)$$

и кинематическое уравнение [12]

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega \quad (1.2)$$

где ω_i – проекции вектора ω абсолютной угловой скорости КА на главные центральные оси эллипсоида инерции КА (эти оси образуют связанный базис); M_i – проекции управляющего момента $\mathbf{M}$ сил на оси связанного базиса; J_i – главные центральные моменты инерции КА ($i = 1, 3$); Λ – нормированный кватернион [12], задающий движение связанного базиса относительно инерциального базиса $\mathbf{I}$ ($\|\Lambda\| = 1$), “ $\circ$ ” – знак умножения кватернионов [12, с. 11–20]. Управление КА вокруг центра масс производится за счет изменения момента $\mathbf{M}$. Область допустимых управлений $\mathbf{M}$ полагаем подобной эллипсоиду инерции КА [11]:

$$\frac{M_1^2}{J_1} + \frac{M_2^2}{J_2} + \frac{M_3^2}{J_3} \leq u_0^2 \quad (1.3)$$

где $u_0 > 0$ определяет управляющие возможности системы ориентации КА. На практике интересны задачи, когда начальная и конечная угловые скорости отсутствуют. Выпишем граничные условия для управляемой системы (1.1)–(1.3):

$$\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}, \quad \omega(0) = 0 \quad (1.4)$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_f, \quad \omega(T) = 0 \quad (1.5)$$

где T – время завершения маневра. Кватернионы Λ_{in} и Λ_f удовлетворяют условию $\|\Lambda_{\text{in}}\| = \|\Lambda_f\| = 1$ (предполагается, что $\Lambda_f \neq \pm \Lambda_{\text{in}}$).

Оптимальным считаем управление, доставляющее минимум следующей величине

$$G = T + k_0 \int_0^T (M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3) dt \quad (1.6)$$

где $k_0 > 0$ – постоянный положительный коэффициент ($k_0 \neq 0$). Задача оптимального управления формулируется в следующей постановке: требуется перевести КА из состояния (1.4) в состояние (1.5) согласно уравнениям (1.1), (1.2) с ограничением (1.3) так, чтобы сумма (1.6) была минимальной (время T заранее не известно). Решение $\mathbf{M}(t)$ находится в классе кусочно-непрерывных функций времени.

Принятый критерий качества (1.6) отличает предлагаемую оптимизационную задачу от рассмотренных ранее задач видом минимизируемого функционала при наличии ограничения (1.3). Фактор времени, присутствующий в (1.6), ограничивает длительность T некоторым конечным значением T_{opt} (коэффициент $k_0 \neq 0$). И еще одна особенность – так как время T не фиксировано, то заявленный поворотный маневр реализуется при любых значениях Λ_{in} , Λ_f и J_1, J_2, J_3, k_0, u_0 . Задача оптимального разворота КА с ограниченным управлением, когда качество процесса управления характеризуется показателем (1.6), остается все еще актуальной.

2. Применение принципа максимума для решения оптимизационной задачи. Рассматриваемая задача (1.1)–(1.6) есть задача динамического оптимального разворота твердого тела [12], у которой моменты M_i – управляющие функции ($i = \overline{1,3}$). Поставленная задача (1.1)–(1.6) решается с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина [27]. Введем сопряженные переменные φ_i , которые соответствуют угловым скоростям ω_i ($i = \overline{1,3}$). Поскольку критерий качества (1.6) не содержит элементов кватерниона ориентации Λ , мы вместо сопряженных функций ψ_j , соответствующих компонентам λ_j кватерниона Λ , используем следующие переменные r_i ($i = \overline{1,3}, j = \overline{0,3}$) [24]:

$$\begin{aligned} r_1 &= (\lambda_0\psi_1 + \lambda_3\psi_2 - \lambda_1\psi_0 - \lambda_2\psi_3)/2, & r_2 &= (\lambda_0\psi_2 + \lambda_1\psi_3 - \lambda_2\psi_0 - \lambda_3\psi_1)/2, \\ r_1 &= (\lambda_0\psi_1 + \lambda_3\psi_2 - \lambda_1\psi_0 - \lambda_2\psi_3)/2, & r_3 &= (\lambda_0\psi_3 + \lambda_2\psi_1 - \lambda_3\psi_0 - \lambda_1\psi_2)/2 \end{aligned}$$

Такой прием применяют многие исследователи [10–23], но с другими функционалами качества (чистые быстродействие, минимум энергозатрат и пр.); впервые указанную замену переменных сделали В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский и М.Б. Черток, Ю.В. Казначеев [11, 12]. Оптимальное изменение функций r_i описывается уравнениями [24]

$$\dot{r}_1 = \omega_3 r_2 - \omega_2 r_3, \quad \dot{r}_2 = \omega_1 r_3 - \omega_3 r_1, \quad \dot{r}_3 = \omega_2 r_1 - \omega_1 r_2, \quad \dot{\mathbf{r}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2.1)$$

(r_i образуют вектор $\mathbf{r}$, символ $\times$ означает векторное произведение векторов).

Выпишем функцию Гамильтона–Понтрягина для оптимизационной задачи (1.1)–(1.6)

$$\begin{aligned} H &= -1 - k_0(M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3) + \varphi_1(M_1 + (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3)/J_1 + \\ &+ \varphi_2(M_2 + (J_3 - J_1)\omega_1\omega_3)/J_2 + \varphi_3(M_3 + (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2)/J_3 + \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3 \end{aligned}$$

Уравнения для φ_i получаются из формул [27]

$$\dot{\phi}_i = -\frac{\partial H}{\partial \omega_i} \quad (i = \overline{1,3})$$

из которых формулируется сопряженная система уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= \omega_3 \phi_2 (J_1 - J_3) / J_2 + \omega_2 \phi_3 (J_2 - J_1) / J_3 - r_1 \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_3 \phi_1 (J_3 - J_2) / J_1 + \omega_1 \phi_3 (J_2 - J_1) / J_3 - r_2 \\ \dot{\phi}_3 &= \omega_2 \phi_1 (J_3 - J_2) / J_1 + \omega_1 \phi_2 (J_1 - J_3) / J_2 - r_3\end{aligned} \quad (2.2)$$

Вектор $\mathbf{r}$ оказывается зафиксированным относительно инерциального базиса $\mathbf{I}$ и $|\mathbf{r}| = \text{const} \neq 0$ (уравнения (2.1) свидетельствуют об этом свойстве оптимального вращения). Решение $\mathbf{r}(t)$ запишем, используя кватернион $\Lambda(t)$ [12, 24]:

$$\mathbf{r} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda, \quad \text{где} \quad \mathbf{c}_E = \text{const} = \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{r}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}}$$

(компоненты вектора $\mathbf{c}_E$ есть проекции $\mathbf{r}$ на оси опорного базиса $\mathbf{I}$); $\tilde{\Lambda}$ — сопряженный кватерниону Λ кватернион [12, с. 11–20]. Мы полагаем $\mathbf{r}(0) \neq 0$ (иначе $r_1 = r_2 = r_3 \equiv 0$ и дальше не имеет смысла решать оптимизационную задачу).

Задача поиска оптимального управления заключается в решении системы дифференциальных уравнений (1.1), (1.2), (2.1), (2.2) с ограничением (1.3) с одновременной максимизацией функции H в каждый момент времени t и выполнении краевых условий (1.4), (1.5).

2.1. *Определение структуры оптимального управления.* Найдем условия максимума функции Гамильтона—Понтрягина H . Полагая $u_i = M_i / \sqrt{J_i}$, $\eta_i = \phi_i / \sqrt{J_i}$ ($i = \overline{1,3}$), перепишем

$$H = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta} - k_0 |\mathbf{u}|^2 + H_{\text{inv}} = |\boldsymbol{\eta}| |\mathbf{u}| \cos \delta - k_0 |\mathbf{u}|^2 + H_{\text{inv}}$$

где $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$; $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$; δ — угол между векторами $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\eta}$; H_{inv} не зависит в явном виде от управляющих моментов M_i (знак умножения “ $\cdot$ ” обозначает скалярное произведение векторов). Величина H максимальна, когда $\delta = 0$. Если $|\mathbf{u}| \leq u_0$, то максимум функции H по аргументу $|\mathbf{u}|$ находится внутри отрезка $[0, u_0]$ и совпадает с локальным максимумом, который определяют необходимые условия экстремума $\partial H / \partial M_i = 0$. Гамильтониан H — квадратичная функция вектора управления $\mathbf{M}$, и локальному максимуму соответствуют величины

$$M_i = \phi_i / (2k_0) \quad (2.3)$$

которые удовлетворяют (1.3) и условиям оптимальности, если $\phi_1^2/J_2 + \phi_1^2/J_2 + \phi_1^2/J_2 \leq 4k_0^2 u_0^2$.

Если $\phi_1^2/J_2 + \phi_1^2/J_2 + \phi_1^2/J_2 > 4k_0^2 u_0^2$, то точка экстремума функции H находится за пределами отрезка $0 \leq |\mathbf{u}| \leq u_0$, и искомое управление выходит на границу $|\mathbf{u}| = u_0$, следовательно

$$M_i = \frac{u_0 \phi_i}{\sqrt{\phi_1^2/J_1 + \phi_2^2/J_2 + \phi_3^2/J_3}}, \quad i = \overline{1,3}$$

Таким образом, оптимальные моменты M_i описываются зависимостью

$$M_i = \begin{cases} \phi_i / (2k_0), & \phi_1^2/J_2 + \phi_1^2/J_2 + \phi_1^2/J_2 \leq 4k_0^2 u_0^2 \\ \frac{u_0 \phi_i}{\sqrt{\phi_1^2/J_1 + \phi_2^2/J_2 + \phi_3^2/J_3}}, & \phi_1^2/J_1 + \phi_1^2/J_2 + \phi_1^2/J_2 > 4k_0^2 u_0^2 \end{cases} \quad (2.4)$$

Система уравнений (2.1), (2.2), (2.4) — необходимые условия оптимальности для задачи (1.1)–(1.6). Имея ввиду требование $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$, у системы уравнений (1.1), (2.1), (2.2), (2.4) есть единственное решение. Значение $\mathbf{r}(0)$ должно быть таким, чтобы

по результатам интегрирования системы (1.1), (1.2), (2.1), (2.2), (2.4) с начальным условием $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$ выполнялось требование $\Lambda(T) = \Lambda_f$ для траектории $\Lambda(t)$. В силу того, что $|\mathbf{r}| = \text{const} = |\mathbf{r}(0)| \neq 0$, для удобства перейдем к орту $\mathbf{p} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ и далее будем использовать его. Обозначим $r_0 = |\mathbf{r}(t)|$. С учетом (2.1) и свойства $r_0 = \text{const} \neq 0$ для векторной функции $\mathbf{p}(t)$ справедливы уравнения

$$\dot{\mathbf{p}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}, \quad \dot{p}_1 = \omega_3 p_2 - \omega_2 p_3, \quad \dot{p}_2 = \omega_1 p_3 - \omega_3 p_1, \quad \dot{p}_3 = \omega_2 p_1 - \omega_1 p_2 \quad (2.5)$$

где p_i – составляющие вектора $\mathbf{p}$. Замкнутая система уравнений (1.1), (1.2), (2.1), (2.2), (2.4) определит нам оптимальное управление. Задача нахождения оптимального программного управления свелась к решению системы уравнений движения (1.1), (1.2), сопряженных уравнений (2.2) и уравнений (2.5) с равенствами $r_i = r_0 p_i$ при наличии закона (2.4) для управляющих моментов M_i . Искомое оптимальное решение удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\varphi_i = a(t) p_i \quad (2.6)$$

$$\omega_i = b(t) p_i / J_i \quad (2.7)$$

$$M_i = m(t) p_i \quad (2.8)$$

где $a(t) = a(0) - r_0 t$; $b(t)$, $m(t)$ – скалярные функции времени; $m(t)$ определяется φ_i и равна

$$M_i = \begin{cases} a(t)/(2k_0), & a^2(t)(p_1^2/J_2 + p_1^2/J_2 + p_1^2/J_2) \leq 4k_0^2 u_0^2 \\ \frac{u_0 \text{sign} a(t)}{\sqrt{p_1^2/J_1 + p_1^2/J_2 + p_1^2/J_3}}, & a^2(t)(p_1^2/J_2 + p_1^2/J_2 + p_1^2/J_2) > 4k_0^2 u_0^2 \end{cases}$$

Последовательная подстановка (2.6) в (2.2) с учетом связей (2.7) и $r_i = r_0 p_i$ подтверждает, что решение (2.6), (2.7) системы дифференциальных уравнений (1.1), (2.2), (2.4), (2.5) действительно справедливо (соотношения (2.7) прямо следуют из системы (1.1), (2.5), (2.8)). После обозначения $\boldsymbol{\Phi}$ – вектор с компонентами φ_i , $J_{SC} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ – тензор инерции твердого тела, систему (2.2) запишем в векторном виде:

$$\boldsymbol{\Phi} = (J_{SC} \boldsymbol{\omega}) \times (J_{SC}^{-1} \boldsymbol{\Phi}) - J_{SC} (\boldsymbol{\omega} \times (J_{SC}^{-1} \boldsymbol{\Phi})) - \mathbf{r} \quad (2.9)$$

Левая часть уравнения (2.9) с учетом (2.5), (2.6) будет следующей:

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}} = \dot{a}(t) \mathbf{p} + a(t) \dot{\mathbf{p}} = \dot{a}(t) \mathbf{p} - a(t) \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$$

Правая часть уравнения (2.9) с учетом (2.6), (2.7) такова

$$b \mathbf{p} \times (a J_{SC}^{-1} \mathbf{p}) - J_{SC} ((b J_{SC}^{-1} \mathbf{p}) \times (a J_{SC}^{-1} \mathbf{p})) - \mathbf{r} = a \mathbf{p} \times (b J_{SC}^{-1} \mathbf{p}) - \mathbf{r} = \boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r} = -a(t) \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} - r_0 \mathbf{p}$$

Левая часть (2.9) тождественно равна правой части, потому что $\dot{a}(t) = -r_0$.

2.2. Главные свойства и возможные варианты оптимального управления. Каким бы ни был тип оптимального управления, скалярные функции $b(t)$ и $m(t)$ связаны зависимостью

$$b(t) = \int_0^t m(t) dt, \quad b(0) = 0, \quad b(T) = 0, \quad \dot{b} = m(t) \quad (\text{оно получается из (1.1) и (2.5), (2.7)})$$

Оптимальное вращение имеет свойство $p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3 = \text{const}$, так как оно удовлетворяет системе (2.5), (2.7). Для проверки приведенное равенство дифференцируется по времени с учетом (2.5), (2.7), в результате чего убеждаемся, что полученная производная равна нулю после подстановки $\dot{p}_i$ по уравнениям (2.5), а затем вычисления ω_i по выражениям (2.7).

Краевая задача принципа максимума состоит в определении вектора $\mathbf{p}(0)$ и величины $r_0 > 0$, при которых решение системы уравнений (1.1), (1.2), (2.2), (2.4), (2.5) с начальными условиями (1.4) и связью $r_i = r_0 p_i$ удовлетворит краевым условиям (1.5). С учетом свойств $a(t)$

$$m(t) = \begin{cases} (a(0) - r_0 t)/(2k_0), & |a(0) - r_0 t| \leq 2k_0 m_0 \\ m_0 \text{sign}(a(0) - r_0 t), & |a(0) - r_0 t| > 2k_0 m_0 \end{cases}$$

где $m_0 = u_0/C$, $C = \sqrt{p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3} = \text{const}$, $p_i = r_i/r_0$, $r_0 = \text{const} = |\mathbf{r}| \neq 0$, $a(0) > 0$, $a(T) = -a(0)$.

Если $a(0) \leq 2k_0 m_0$, то $m(0) = a(0)/(2k_0)$ и $m(t) = m(0) - r_0 t/(2k_0)$. Время маневра T не фиксировано и гамильтониан H в явной форме не зависит от времени. Значит, для оптимального управления $H = \text{const} = 0$ [28] и $H(0) = H(T) = -1 - k_0 C^2 m^2(0) + a(0) C^2 m(0) = k_0 C^2 m^2(0) - 1 = 0$, так как $a(0) = 2k_0 m(0)$. Откуда $m(0) = 1/(C\sqrt{k_0})$. Следовательно, если $k_0 \geq 1/u_0^2$, то $\mathbf{M} = \boldsymbol{\Phi}/(2k_0)$ в любой момент времени $t \in [0, T]$.

Если $k_0 u_0^2 < 1$, то $m(0) = u_0/C$ и существует два отрезка времени, внутри которых $|\mathbf{M}| = \text{const} = m_0$, при этом $a(0) > 2k_0 m_0 = a_{cr}$. Рассмотрим подробнее этот вариант. Обозначим $b_{\max}$ – максимальное значение функции $b(t)$. Так как $m(T/2) = a(T/2) = 0$, то $b(T/2) = b_{\max}$. Найдем $H(T/2) = r_0 b_{\max} C^2 - 1 = 0$ (так как $\mathbf{M}(T/2) = 0$ и $\boldsymbol{\Phi}(T/2) = 0$), $H(0) = H(T) = -1 - k_0 m_0^2 C^2 + a(0) m_0 C^2 = 0$, откуда $r_0 = 1/(b_{\max} C^2)$, $a(0) = 1/(u_0 C) + k_0 u_0/C$. Рис. 1 наглядно демонстрирует поведение функций $m(t)$ и $b(t)$ при таком варианте оптимального управления, где t_1 и t_2 – времена наступления равенств $a(t) = a_{cr}$ и $a(t) = -a_{cr}$. Если $t < t_1$, то $m(t) = m_0$. Если $t > t_2$, то $m(t) = -m_0$. Если $t_1 \leq t \leq t_2$, то $m(t) = (1/u_0 + k_0 u_0)/(2k_0 C) - r_0 t/(2k_0)$. Причем $t_1 = (1/u_0 - k_0 u_0)/(r_0 C)$, $t_2 = (1/u_0 + 3k_0 u_0)/(r_0 C)$. Время разворота $T = 2(1/u_0 + k_0 u_0)/(r_0 C)$. Соответственно, $b(t)$ описывается следующим образом: $b(t) = m_0 t$, если $t < t_1$; $b(t) = m_0 t - r_0(t - t_1)^2$, если $t_1 \leq t \leq t_2$; $b(t) = m_0(T - t)$, если $t > t_2$. Величины t_1 , t_2 , T и $b_{\max}$ связаны с константой $m_0 = u_0/C$ и интегральной величиной

$$F = \int_0^T |\mathbf{L}(t)| dt = \int_0^T b(t) dt \quad (2.10)$$

где $\mathbf{L} = J_{SC} \boldsymbol{\omega}$ – кинетический момент (F определяют исключительно кватернион разворота $\Lambda_t = \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda_f$ и моменты инерции J_1, J_2, J_3 [18]).

$$b(t_2) = b(t_1) = m_0 t_1, \quad b_{\max} = b(T/2) = m_0(1/u_0 + k_0 u_0)/(r_0 C) - k_0 u_0^2/(r_0 C^2) = 1/(r_0 C^2)$$

Величины t_1, t_2 находятся из условий: $a(t_1) = 1/(u_0 C) + k_0 u_0/C - r_0 t_1 = 2k_0 u_0/C = a_{cr}$ и $a(t_2) = 1/(u_0 C) + k_0 u_0/C - r_0 t_2 = -a_{cr} = -2k_0 u_0/C$. При этом $b(t_1) = (1 - k_0 u_0^2)/(r_0 C^2) = b(t_2) = m_0 t_1$.

Значение (2.10) для варианта оптимального вращения, когда $k_0 < 1/u_0^2$, равно

$$F = m_0(t_1 t_2 + (t_2 - t_1)^2/6) = m_0(1/u_0^2 + 2k_0 - k_0^2 u_0^2/3)/(r_0 C)^2$$

Из последнего уравнения находим значения r_0 и $b_{\max}$.

$$r_0 = \sqrt{m_0(1/u_0^2 + 2k_0 - k_0^2 u_0^2/3)/F/C}, \quad b_{\max} = \sqrt{F/[m_0(1/u_0^2 + 2k_0 - k_0^2 u_0^2/3)]/C}$$

Временные характеристики маневра t_1, t_2 и T находятся в явном виде

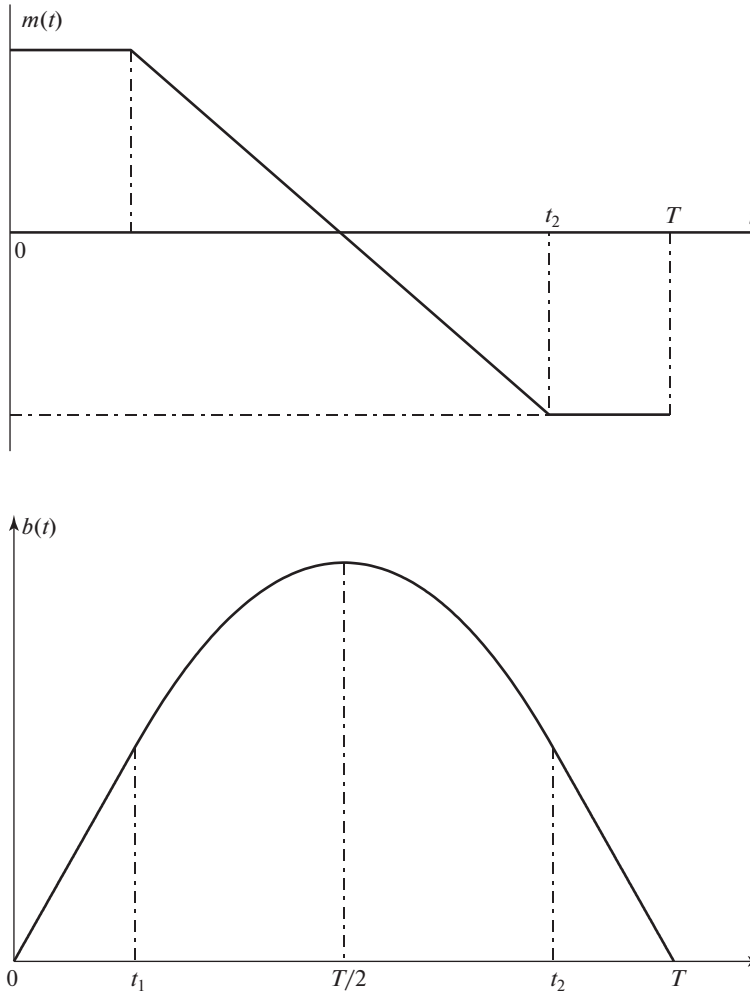


Рис. 1. Вид оптимальных функций $m(t)$ и $b(t)$ в случае $k_0 u_0^2 < 1$.

$$\begin{aligned}
 t_1 &= (1/u_0 - k_0 u_0) \sqrt{F/[m_0(1/u_0^2 + 2k_0 - k_0^2 u_0^2/3)]} \\
 t_2 &= (1/u_0 + 3k_0 u_0) \sqrt{F/[m_0(1/u_0^2 + 2k_0 - k_0^2 u_0^2/3)]} \\
 T &= 2(1/u_0 + k_0 u_0) \sqrt{F/[m_0(1/u_0^2 + 2k_0 - k_0^2 u_0^2/3)]}
 \end{aligned}$$

Из представленных выражений отчетливо видно, что в случае $k_0 \rightarrow 0$ найденное решение полностью совпадает с управлением максимального быстродействия [8] и $T = 2\sqrt{F/m_0}$.

Если $k_0 u_0^2 \geq 1$, то оптимальным является закон $\mathbf{M} = (a(0) - r_0 t) \mathbf{p} / (2k_0)$, где $a(0) = 2\sqrt{k_0}/C$. Время маневра $T = \sqrt{6FC\sqrt{k_0}}$, а $b_{\max} = m(0)T/4 = \sqrt{3F/(8C\sqrt{k_0})}$. Постоянная $r_0 =$

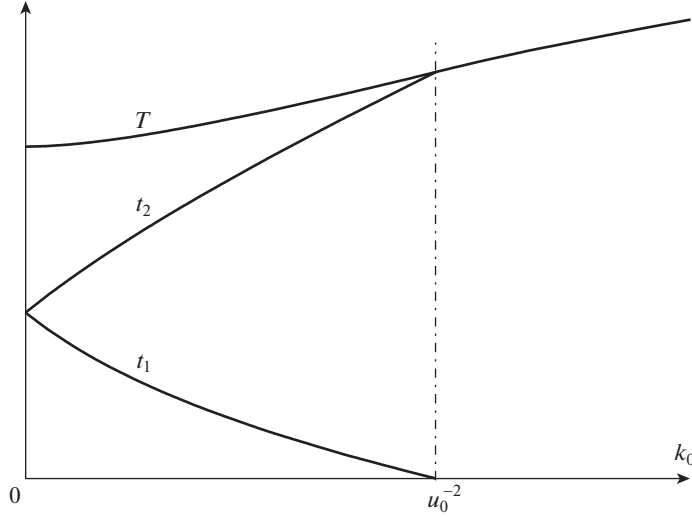


Рис. 2. Зависимость временных характеристик разворота от коэффициента k_0 .

$= \sqrt{8\sqrt{k_0}/(3FC^3)}$, поскольку $b(t) = b_{\max}$, когда $a(t) = 0$, и $H = r_0 b_{\max} C^2 - 1 = 0$. Когда $k_0 u_0^2 \geq 1$ зависимости $a(t)$, $m(t)$ и $b(t)$ имеют следующий аналитический вид:

$$a(t) = 2k_0 m(0)(1 - 2t/T), \quad m(t) = m(0)(1 - 2t/T), \quad b(t) = m(0)t(1 - t/T)$$

где $m(0) = r_0 T / (4k_0) = 1 / (C\sqrt{k_0})$ – модуль момента $\mathbf{M}$ в начальный момент времени $t = 0$. Оптимальный закон вращения можем записать в виде:

$$J_i \omega_i = m(0)t(1 - t/T)p_i, \quad i = \overline{1, 3}$$

Таким образом, поведение функций $b(t)$ и $m(t)$ в оптимальном вращении определяют коэффициент k_0 и характеристики F , m_0 (последние зависят исключительно от параметров разворота Λ_{in} , Λ_f и известных величин u_0 , J_i). Длительность оптимального разворота T монотонно возрастает с увеличением коэффициента k_0 , начиная от $T = 2\sqrt{F/m_0}$ до бесконечности. Зависимость времен t_1 , t_2 и T от коэффициента k_0 демонстрирует рис. 2. Мы видим, что t_1 – монотонно убывающая функция k_0 , а t_2 – монотонно возрастающая функция k_0 ; причем $\lim_{k_0 \rightarrow 0} t_1 = \lim_{k_0 \rightarrow 0} t_2 = T/2$, а для $k_0 = 1/u_0^2$ будет $t_1 = 0$. Параметр r_0 – непрерывная монотонно возрастающая функция коэффициента k_0 ; $b_{\max}$ – непрерывная монотонно убывающая функция k_0 .

В результате, при любых значениях u_0 и $k_0 \neq 0$ оптимальное управление $\mathbf{M}$ следующее

$$\mathbf{M}(t) = \begin{cases} (\rho - r_0 t / (2k_0)) \mathbf{p}, & |\rho - r_0 t / (2k_0)| < m_0 \\ m_0 \text{sign}(2k_0 \rho - r_0 t) \mathbf{p}, & |\rho - r_0 t / (2k_0)| \geq m_0 \end{cases} \quad (2.11)$$

где $r_0 = \sqrt{m_0(1/u_0^2 + 2k_0 - k_0^2 u_0^2/3)/F/C}$, $\rho = 1/(2k_0 u_0 C) + u_0/(2C)$, если $k_0 u_0^2 < 1$;

или $r_0 = \sqrt{8\sqrt{k_0}/(3FC^3)}$, $\rho = 1/(C\sqrt{k_0})$, если $k_0 u_0^2 \geq 1$.

При оптимальном изменении скорости $\omega(t)$ вращение имеет свойство симметрии (прежде всего, для функций $m(t)$ и $b(t)$) и характеризуется следующими закономерностями:

$$m(0) = -m(T) > 0, \quad b(t) \geq 0, \quad |m(t)| = |m(T-t)|$$

$$\int_0^{T/2} |m(t)| dt = \int_{T/2}^T |m(t)| dt, \quad \int_0^{T/2} b(t) dt = \int_{T/2}^T b(t) dt, \quad b(t) = b(T-t)$$

Выпишем $m(t)$, $b(t)$ для общего случая (его отражает рис. 1):

$$m(t) = m_0(|t - t_2| - |t - t_1|)/(t_2 - t_1), \quad b(t) = \begin{cases} m_0(T/2 - |t - T/2|), & |2t - T| \geq R \\ m_0(t - (t - t_1)^2/R), & |2t - T| < R \end{cases} \quad (2.12)$$

где $R = \sqrt{3(T^2 - 4F/m_0)}$; $T = 2(1/u_0 + k_0 u_0) \sqrt{F/[m_0(1/u_0^2 + 2k_0 - k_0^2 u_0^2/3)]}$ (t_1, t_2 рассчитаны ранее); и $L_{\max} = \sqrt{F/[m_0(1/u_0^2 + 2k_0 - k_0^2 u_0^2/3)]}/C$ – максимальный модуль $|\mathbf{L}(t)|$.

Важным свойством оптимального управления является постоянство пропорции между кинетической энергией вращения E и квадрата модуля кинетического момента КА.

$$E = b^2(p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3)/2, \quad E/|\mathbf{L}|^2 = (p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3)/2 = \text{const}$$

так как $b^2 = |\mathbf{L}|^2$ (это видно из (2.7)) и $p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3 = \text{const} = p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3$, где p_{10}, p_{20}, p_{30} – составляющие вектора $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$.

Найдем (1.6) для оптимального управления (2.11) в зависимости от коэффициента k_0 и характеристики u_0 . Если $k_0 u_0^2 \geq 1$, то участки с постоянным модулем момента $\mathbf{M}$ отсутствуют и $G = 4\sqrt{2FC\sqrt{k_0}/3}$, потому что $G = T + k_0 C^2 m^2(0)T/3$, где длительность маневра $T = \sqrt{6FC\sqrt{k_0}}$ и $m(0) = 1/(C\sqrt{k_0})$. В случае $k_0 u_0^2 < 1$ управление с двумя участками вращения, когда модуль управляющего момента постоянный и максимально возможный, является оптимальным, и поэтому $G = T + k_0 u_0^2(T + 4t_1)/3$ – расчетное значение показателя (1.6). Если $k_0 \rightarrow 0$, то $t_1 \rightarrow t_2$ и получаем релейное управление с одной точкой переключения в качестве оптимального, $G = 2(1 + k_0 u_0^2)\sqrt{FC/u_0}$, так как в этом случае $|\mathbf{M}| = m_0$, $G = (1 + k_0 u_0^2)T$, $T = 2\sqrt{F/m_0}$.

У (2.11) наблюдаются следующие уникальные закономерности:

$$\Lambda \circ \mathbf{M}(T-t) \circ \tilde{\Lambda} = -\Lambda \circ \mathbf{M}(t) \circ \tilde{\Lambda}, \quad \Lambda \circ \mathbf{L}(T-t) \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda \circ \mathbf{L}(t) \circ \tilde{\Lambda}$$

$$\max_{t < T/2} m(t) = -\min_{t > T/2} m(t) = m(0), \quad L_{\max} = \max_{0 < t < T} \sqrt{J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2} = |\mathbf{L}(T/2)|$$

Из (2.7) следует, что $\mathbf{p}$ есть орт кинетического момента $\mathbf{L}$. Оптимальные функции $\omega_i(t)$, $\varphi_i(t)$, $p_i(t)$ соответствуют требованиям (2.6), (2.7), где $p_i(t)$ – решение системы (2.5). Оптимальное управление определяется выражением (2.11), направление кинетического момента $\mathbf{L}$ остается постоянным относительно инерциального базиса $\mathbf{I}$, векторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{L}$ коллинеарны в любое время $t \in [0, T]$. Управление (2.11) является действительно оптимальным, поскольку оно – единственное решение системы уравнений (1.1), (2.2), (2.4), (2.5). В нашем случае $\omega(0) = \omega(T) = 0$, поэтому найденное решение (2.11) реализуемо при любых Λ_{in} , Λ_f и J_1, J_2, J_3 (для любых u_0 и $k_0 \neq 0$ существует решение системы (1.1), (2.1), (2.2), (2.4)).

3. Доказательство единственности оптимального решения. Введем орт $\mathbf{q}$, коллинеарный моменту $\mathbf{M}$, причем направления векторов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ совпадают в начальный момент

времени $t = 0$. Далее определим скалярный множитель f , удовлетворяющий двум условиям: $\Phi = f\mathbf{q}$ и $f(0) > 0$. В окрестности точки $t = 0$ справедливы соотношения $\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}$ и $\mathbf{L} = \chi\mathbf{q}$, где χ – скалярный множитель. Сначала оптимальный управляющий момент $\mathbf{M}$, рассчитанный по выражению (2.4) при условии $\Phi = f(t)\mathbf{q}$, подставляем в (1.1) с учетом зависимости $\mathbf{L} = \chi\mathbf{q}$ и получаем

$$\mathbf{q}\dot{\chi} + \dot{\mathbf{q}}\chi + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}\chi = m(t)\mathbf{q} \quad (3.1)$$

Векторы $\dot{\mathbf{q}}\chi + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}\chi$ и $\mathbf{q}$ ортогональны, либо сумма $\dot{\mathbf{q}}\chi + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}\chi$ есть нулевой вектор ($|\mathbf{q}| = 1$, а значит в любом случае $\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$). Уравнение (3.1) удовлетворяется, только если $\dot{\mathbf{q}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$ и $\dot{\chi} = m(t)$. Далее векторы $\Phi = f(t)\mathbf{q}$ и $\boldsymbol{\omega} = J_{SC}^{-1}\chi\mathbf{q}$ подставим в (2.9). Правая часть уравнения (2.9) будет следующей

$$\chi\mathbf{q} \times (J_{SC}^{-1}f\mathbf{q}) - fJ_{SC}((J_{SC}^{-1}\chi\mathbf{q}) \times (J_{SC}^{-1}\mathbf{q})) - \mathbf{r} = -f(\chi J_{SC}^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q} - \mathbf{r} = -f\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} - r_0\mathbf{p}$$

В силу уравнения (3.1) справедливо соотношение $\dot{\mathbf{q}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$ (оптимальное вращение подчиняется уравнениям (1.1), (2.9) одновременно). В результате получим левую часть уравнения (2.9)

$$\dot{f}\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}}f = \dot{f}\mathbf{q} - f\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$$

После подстановки левой и правой частей в (2.9) получаем уравнение $\dot{f}\mathbf{q} = -r_0\mathbf{p}$, из которого $\dot{f} = -r_0$ и $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}$ (так как $f(0) > 0$, $f(T) < 0$, откуда $\dot{f} < 0$). Приходим к следующему заключению: если в какой-то момент времени t векторы Φ и $\mathbf{L}$ коллинеарны, то они остаются коллинеарными внутри всего интервала времени $0 < t < T$. Т.е. чтобы векторы Φ и $\mathbf{L}$ оставались коллинеарными от $t = 0$ до $t = T$ достаточно, чтобы $\mathbf{L}$ оказался коллинеарным вектору Φ хотя бы в один момент времени. Условия $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$ и $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$ гарантируют существование как минимум двух таких моментов времени, когда $\mathbf{L}$ и Φ коллинеарны ($\mathbf{L} = h\Phi$ при $t \rightarrow 0$, и $\mathbf{L} = -h(T-t)\Phi$ при $t \rightarrow T$). Можем утверждать, что в процессе оптимального движения закономерность $\mathbf{L} \parallel \mathbf{p}$ сохраняется на всем отрезке времени $t \in [0, T]$, и оптимальное вращение обязательно удовлетворяет (2.6), (2.7). Доказано, что зависимости (2.6), (2.7) – единственное решение системы (1.1), (2.2), (2.4), (2.5), поскольку $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$, $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$ (напоминаем, $r_i = r_0p_i$).

Таким образом, оптимизация свелась к определению таких вектора $\mathbf{p}_0$ и длительности T , чтобы в ходе вращения КА согласно уравнениям (1.2), (2.5), (2.7) удовлетворились условия $\Lambda(T) = \Lambda_f$, $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$. Уравнения (2.5) с учетом (2.7) принимают вид:

$$\dot{p}_1 = \frac{J_2 - J_3}{J_2 J_3} b(t) p_2 p_3, \quad \dot{p}_2 = \frac{J_3 - J_1}{J_1 J_3} b(t) p_1 p_3, \quad \dot{p}_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_1 J_2} b(t) p_1 p_2 \quad (3.2)$$

Найти общее решение указанной системы практически не представляется возможным. Сложность заключается в нахождении $\mathbf{p}(0)$, $\mathbf{p}(T)$, связанных выражением

$$\Lambda_{in} \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{in} = \Lambda_f \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_f$$

($\mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_T \circ \mathbf{p}(0) \circ \Lambda_T$, здесь $\tilde{\Lambda}_T = \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda_f$ – кватернион разворота).

4. Проектирование программы оптимального разворота. Решение задачи оптимального разворота описывается уравнениями (2.6), (2.7), (3.2); управляющие функции M_i и скорости вращения ω_i изменяются в соответствии с (2.7), (2.11). Вектор $\mathbf{p}_0$ и характеристика F находятся из решения двухточечной краевой задачи разворота. Программу вращения КА полностью определяют F , m_0 . Программное значение $\mathbf{M}$ связано с кватернионом Λ по выражению

$$\mathbf{M} = m(t)\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{in} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda$$

в котором

$$m(t) = \begin{cases} m_0(|t - t_2| - |t - t_1|)/(t_2 - t_1), & k_0 u_0^2 < 1 \\ (1 - 2t/T)/(C\sqrt{k_0}), & k_0 u_0^2 \geq 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

где $m_0 = u_0/\sqrt{p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3}$.

Характеристики F , m_0 и $\mathbf{p}_0$ определяются исключительно значениями u_0 , Λ_{in} , Λ_f и J_1 , J_2 , J_3 , а времена T , t_1 , t_2 зависят от k_0 . В момент времени $t = T/2$ момент $\mathbf{M}$ меняет свое направление на противоположное, модуль $|\mathbf{L}|$ максимален ($|\mathbf{L}(T/2)| = L_{\text{max}}$), а пройденный “путь” $s(t)$ составляет половину интеграла (2.10).

$$s(T/2) = F/2, \quad s(t) = \int_0^t |\mathbf{L}(t)| dt, \quad \text{sign} m(t) = -\text{sign}(2s(t) - F)$$

Необходимо отметить, что при любой форме ограничения на $\mathbf{M}$ (произвольной области возможных управлений U), если коэффициент k_0 удовлетворяет неравенству $k_0 C^2 R_0^2 > 1$ (где R_0 – радиус сферы, вписанной в область U), то управление

$$\mathbf{M} = (1 - 2t/T)\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda/(C\sqrt{k_0})$$

оптимально по критерию (1.6); в этом случае $|\mathbf{M}(t)| \leq R_0$ в любое $t \in [0, T]$.

4.1. *Некоторые частные случаи оптимального управления разворотом.* Управляющие функции формируются согласно (2.11), для чего надо в каждый момент времени t иметь p_1 , p_2 , p_3 (их изменение описывает (3.2)). Аналитическое решение системы (1.2), (2.7), (3.2) существует применительно динамически симметричных и сферически-симметричных тел.

В случае сферически-симметричного твердого тела ($J_1 = J_2 = J_3$) зависимости известны [19]:

$$p_i(t) = \text{const} = p_{i0} = v_i/\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}, \quad M_i(t) = m(t)p_{i0}, \quad \omega_i(t) = b(t)p_{i0}/J_i$$

где временные функции $b(t)$ и $m(t)$ определяются параметрами $m_0 = u_0\sqrt{J_1}$, $F = 2J_1 \arccos v_0$ и k_0 (о чем было сказано в разделе 2); v_0 , v_1 , v_2 , v_3 – элементы кватерниона $\Lambda_t = \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda_f$. Траекторию вращения $\Lambda(t)$ представим в аналитической форме

$$\Lambda(t) = \Lambda_{\text{in}} \circ e^{\mathbf{p}_0 s(t)/(2J_1)}, \quad s(t) = \int_0^t b(t) dt$$

При динамической симметрии твердого тела ($J_2 = J_3$) задача оптимального управления (1.1)–(1.6) может быть доведена до аналитического решения (для конкретности дальнейшего изложения осью симметрии считается ось OX). При таком распределении масс оптимальное движение есть одновременное вращение тела (например, КА) вокруг направления, задаваемого вектором $\mathbf{p}$, неподвижного в инерциальной системе координат, и вокруг оси OX , которая образует с $\mathbf{p}$ постоянный угол ϑ . Угловые скорости вокруг $\mathbf{p}$ и оси OX изменяются пропорционально с постоянным коэффициентом пропорциональности, в силу чего имеем [8, 11]

$$\Lambda_f = \Lambda_{\text{in}} \circ e^{\mathbf{p}_0 \beta/2} \circ e^{\mathbf{e}_1 \alpha/2}$$

где $\mathbf{e}_1$ – орт оси симметрии; α , β – углы поворота твердого тела вокруг оси OX и вокруг $\mathbf{p}$ ($|\alpha| \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$). Запишем $\mathbf{p}(t)$ в аналитической форме [8, 11]:

$$p_1 = p_{10} = \cos \vartheta, \quad p_2 = p_{20} \cos \kappa + p_{30} \sin \kappa, \quad p_3 = -p_{20} \sin \kappa + p_{30} \cos \kappa, \quad (4.2)$$

$$\kappa = \frac{J - J_1}{J} \int_0^t \omega_1(t) dt$$

где $p_{10} = p_1(0)$; $J = J_2 = J_3$; продольная скорость $\omega_1(t)$ определяется из (2.7) при том, что $p_1 = \text{const} = p_{10}$. Значения α , β и p_{10} находятся по кватернионам Λ_{in} и Λ_f из системы [8, 11]:

$$\alpha = \frac{J - J_1}{J_1} p_{10} \beta, \quad \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = v_0, \quad \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = v_1 \quad (4.3)$$

$$p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = v_2, \quad -p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = v_3$$

причем $-\pi \leq \alpha \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$ (здесь v_0, v_1, v_2, v_3 — элементы кватерниона $\Lambda_t = \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda_f$).

Скорости вращения ω , рассчитываются по уравнениям (2.7) и (4.2). Оптимальные функции $b(t)$ и $m(t)$ определены программами (2.12), (4.1) и зависят от параметров T, m_0, F , которые рассчитываются однозначно по заданным $\Lambda_{\text{in}}, \Lambda_f, u_0, k_0$ и J_1, J_2, J_3 . Искомые оптимальные управления $M_f(t)$ запишем в следующем аналитическом виде:

$$M_1 = m(t)p_{10}, \quad M_2 = m(t)\sqrt{1 - p_{10}^2} \sin(\kappa + \gamma), \quad M_3 = m(t)\sqrt{1 - p_{10}^2} \cos(\kappa + \gamma)$$

где $\gamma = \arcsin(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2})$, если $p_{30} \geq 0$, или $\gamma = \pi - \arcsin(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2})$; вариант $|p_{10}| = 1$ означает плоское вращение вокруг оси OX , поэтому мы его не рассматриваем.

Оптимальную траекторию $\Lambda(t)$ представим в следующей аналитической форме

$$\Lambda(t) = \Lambda_{\text{in}} \circ e^{\mathbf{p}_0 \sigma / 2} \circ e^{\mu \mathbf{e}_1 / 2}$$

где $\sigma = J_2^{-1} \int_0^t b(t) dt$; $\mu = p_{10} \sigma (J_2 - J_1) / J_1$.

Параметры $\mathbf{p}_0, r_0, m_0, T$ для динамически симметричного тела находятся намного проще (также упрощается определение величины (2.10) и показателя G); $F = J_2 \beta$, так как $|\mathbf{L}| = J_2 \dot{\beta}$, где $\dot{\beta}$ — скорость вращения вокруг $\mathbf{L}$ (уточним, $\beta \geq 0, \dot{\beta} \geq 0$). Величины $r_0, T, b_{\text{max}}, G$ зависят от β . Чтобы (1.6) было минимальным необходимо, чтобы угол β был минимально возможным, для чего потребуем $\beta \leq \pi$ (именно поэтому (4.3) включает условие $0 \leq \beta \leq \pi$). Заметим, что в более ранних работах [11, 14] также выписаны предварительные выражения общего решения задачи оптимального разворота, но для других функционалов качества, и доведено до конца решение для частного случая динамической симметрии твердого тела. При этом авторами статьи [11] было доказано, что решение системы (4.3) существует при любых Λ_t и любых $J_1, J_2 = J_3$.

Для несимметричного тела ($J_1 \neq J_2 \neq J_3$) решение системы (1.2), (2.5), (2.7) находится исключительно численными методами (например, методом последовательных приближений [29], или как описано в предыдущей работе [8]). Расчет искомого орта $\mathbf{p}_0$ осуществляется решением краевой задачи $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0, \mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_t \circ \mathbf{p}_0 \circ \Lambda_t$ для системы дифференциальных уравнений (3.2). Ранее она решалась методом итераций (см. способ [30] и систему [31]). Известно [18], что $\mathbf{p}_0$ не зависит от поведения $b(t)$, которая входит в (3.2), и мы находим $\mathbf{p}_0$ в предположении, что $b(t) = \text{const}$; это обстоятельство значительно упрощает алгоритм поиска требуемого $\mathbf{p}_0$. Когда $b(t) = \text{const}$, решение $\mathbf{p}(t)$ уравнений (3.2) соответствует вращению по инерции, поскольку уравнения (3.2) выполняются совместно с (1.1), (2.7), из которых следует $\mathbf{M} = 0$.

4.2. Разработка алгоритмов терминального управления. В частном случае, когда $k_0 u_0^2 \geq 1$, появляется возможность в текущий момент t уточнять управляющую функцию $\mathbf{M}(t)$,

используя измерения параметров движения (информацию о фактических угловом положении и скорости). В процессе поиска оптимального вращения было выяснено, что в интервале $t < T/2$ оптимальное движение удовлетворяет условию $\mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{L}(t) \geq 0$, КА раскручивается с увеличивающейся скоростью вращения. Для времен $t > T/2$ должно быть $\mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{L}(t) \leq 0$, КА замедляет вращение, угловая скорость ω уменьшается до нуля ($\mathbf{M}(t) = 0$, когда $t = T/2$). На этапе раскрутки направление момента $\mathbf{M}$ задает вектор $\mathbf{L}_{\text{des}} = \mathbf{p}\sqrt{3F/(8C\sqrt{k_0})}$ (величина F априорно известна и определяется заданными J_1, J_2, J_3 и Λ_f), в идеальном исполнении направления $\mathbf{L}_{\text{des}}$ и $\mathbf{L}$ совпадают; желаемый кинетический момент $\mathbf{L}_{\text{des}}$ определяется через Λ следующим образом

$$\mathbf{L}_{\text{des}} = \sqrt{3F/(8C\sqrt{k_0})}\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda$$

На участке гашения угловой скорости $\mathbf{M}$ направляется строго противоположно имеющемуся кинетическому моменту $\mathbf{L}$. Управляющую функцию запишем в форме синтеза:

$$\mathbf{M} = |m(t)|(\mathbf{L}_{\text{req}} - \mathbf{L})/|\mathbf{L}_{\text{req}} - \mathbf{L}|$$

где $\mathbf{L}_{\text{req}} = (1 + \text{sign}m(t))\sqrt{3F/(8C\sqrt{k_0})}\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda/2$ (очевидно, при гашении угловой скорости наведение осуществляется в точку $\mathbf{L} = 0$; и $\mathbf{L}_{\text{req}} = 0$, когда $m(t) < 0$).

Если $k_0 u_0^2 \geq 1$, то (2.3) – необходимое условие оптимальности, и $m(t) = (1 - 2t/T)/(C\sqrt{k_0})$, где $T = \sqrt{6FC\sqrt{k_0}}$ – время завершения разворота (оно используется как параметр).

При оптимальном управлении момент $\mathbf{M}$ меняет свое направление на обратное в момент t , когда $s(t) = F/2$ для монотонно-возрастающей функции $s(t)$, в тот же момент происходит смена знака у $m(t)$. Скалярное произведение $\mathbf{M}$ и $\mathbf{L}$ и разность $2s(t) - F$ должны иметь разный знак (для оптимального вращения). На этом свойстве оптимального вращения выработан критерий, по которому осуществляется переход с раскрутки на остановку вращения.

Для улучшения точности переориентации необходимо вычислять $m(t)$ в каждый момент времени t на основе фактических (т.е. измеренных в ходе вращения КА) кинематических параметров $\omega_i(t)$ и $\Lambda(t)$. Закон управления определим на основе $\omega_i(t)$, $\Lambda(t)$ и остатка “пути” s_{rem} , который требуется “пройти” для завершения разворота из текущего $\Lambda(t)$ в предписанное конечное Λ_f положение. Оставшийся “путь” s_{rem} определяется непрерывным интегрированием

$$s_{\text{rem}} = F - \int_0^t |J_{SC}\omega(t)|dt$$

Найдем условия, при которых выполняются конечные условия разворота (1.5). Для этого определим “путь” $s(t)$, пройденный при линейном изменении функции $m(t)$.

$$s(t) = \int_0^t |J_{SC}\omega(t)|dt = m(0) \int_0^t t(1 - t/T)dt = (t^2/2 - t^3/(3\sqrt{6FC\sqrt{k_0}}))/(C\sqrt{k_0})$$

На момент завершения разворота $s(T) = F = m(0)T^2/6$, в момент $t = T/2$ априорная величина составляет $s(T/2) = m(0)T^2/12$. Функцию $m(t)$ сформируем на основании предположения, что $\dot{m} = \text{const}$ на отрезке времени $[t, T]$ (т.е. до конца маневра). Когда $s(t) = F$, угловая скорость должна обнулиться $\omega = 0$ (к этому моменту станет $\Lambda(t) = \Lambda_f$, согласно неизменности (2.10)). Поскольку $\Lambda(T) = \Lambda_f$, то $s(T) = F$, а значит имеет место равенство

$$s(t) + \int_t^T |J_{SC}\omega(t)|dt = F$$

Это первое условие, которое необходимо выполнить. Во-вторых, у оптимального вращения $\omega(T) = 0$ и, следовательно,

$$|J_{SC}\omega(t)| + \int_t^T m(t)dt = 0$$

До начала разворота величина F и длительность маневра T определены. Выпишем уравнения, которые позволят нам найти $m(t)$, исходя из фактически складывающейся ситуации.

$$(T-t)^3 \dot{m}/6 + (T-t)^2 m/2 + (T-t)|L| = F - s(t) = s_{\text{rem}}, \quad (T-t)^2 \dot{m}/2 + (T-t)m + |L| = 0$$

Получили линейную систему уравнений с двумя неизвестными m и $\dot{m}$. Решение ее такое

$$m(t) = 6 \left(F - \int_0^t |J_{SC}\omega(t)|dt \right) / (T-t)^2 - 4|J_{SC}\omega(t)| / (T-t) \quad (4.4)$$

причем $\dot{m} = 6|L(t)|/(T-t)^2 - 12s_{\text{rem}}(t)/(T-t)^3$, $T = \sqrt{6FC\sqrt{k_0}}$ ($m < 0$ при оптимальной остановке вращения); $T-t = t_{\text{rem}}$ – оставшееся для управления время, за которое необходимо закончить переориентацию. Знак управляющего момента M меняется, когда $s_{\text{rem}}(t) = 2|L(t)|(T-t)/3$. Если $s_{\text{rem}}(t) = |L(t)|(T-t)/2$, то $m(t) = \text{const}$ до конца разворота.

Оптимальный закон терминального управления запишем так:

$$M(t) = \begin{cases} m(t)(L_{\text{des}} - L)/|L_{\text{des}} - L|, & \text{если } m(t) > 0 \text{ \& } |L| < |L_{\text{des}}| \\ m(t)\tilde{L} \circ \Lambda_{\text{in}} \circ p_0 \circ \tilde{L}_{\text{in}} \circ \Lambda, & \text{если } m(t) > 0 \text{ \& } |L| > |L_{\text{des}}| \\ m(t)L/|L|, & \text{если } m(t) \leq 0 \text{ \& } |L - L_{\text{des}}| = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

где $m(t)$ определяется по формуле (4.4) (F – постоянный параметр); орт $p^* = \tilde{L} \circ \Lambda_{\text{in}} \circ p_0 \circ \tilde{L}_{\text{in}} \circ \Lambda$ задает желаемое направление кинетического момента при оптимальном наведении (оно берется в качестве “прицельного”), которого надо достигнуть.

Алгоритм расчета $m(t)$ использует продолжительность t_{rem} , так как она определяет насколько быстро следует увеличивать (или уменьшать) модуль кинетического момента, чтобы разворот оказался оптимальным. На заключительной стадии разворота за время t_{rem} необходимо полностью остановить вращение (до нуля снизить угловую скорость).

Для этапа торможения формула (4.4) интерпретируется следующим образом. Обозначим $m(L) = |J_{SC}\omega(t)|/(t-T)$, $m(s_{\text{rem}}) = 2(s(t) - F)/(T-t)^2$ (во время остановки вращения $m(t) < 0$), причем $T = \sqrt{6FC\sqrt{k_0}}$. Тогда если $|m(s_{\text{rem}})| > |m(L)|$, то остановку вращения выполняют медленнее, но если $|m(L)| > |m(s_{\text{rem}})|$, то торможение необходимо форсировать, чтобы успеть полностью ликвидировать угловую скорость к моменту, когда $s(t) = F$ (и $\Lambda = \Lambda_f$); если у нас $|m(s_{\text{rem}})| = |m(L)|$, то $m(t) = m(L) = m(s_{\text{rem}})$ и $\dot{m} = 0$. Следовательно, оптимальным считаем $m(t) = 4m(L) - 3m(s_{\text{rem}})$. Величины $m(s_{\text{rem}})$ и $m(L)$ определяются независимо из следующих требований: обеспечения терминального условия $s(t) = F$ (т.е. $s_{\text{rem}}(T) = 0$ и $\Lambda = \Lambda_f$) и необходимости полностью затормозить вращение к оптимальному сроку T (чтобы $\omega(T) = 0$).

В случае динамически симметричного тела (когда $J_2 = J_3$, OX – ось симметрии) величина s_{rem} определяется непосредственно (без интегрирования модуля кинетическо-

го момента) по текущему положению $\Lambda(t)$ сравнением его с требуемым Λ_f . Запишем следующие соотношения:

$$s_{\text{rem}} = \int_t^T |\mathbf{L}(t)| dt = J_2 \theta, \quad \sin \vartheta = \sqrt{J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2} / |\mathbf{L}|, \quad \sin \frac{\theta}{2} \sin \vartheta = \sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2}$$

где θ — угол поворота вокруг $\mathbf{L}$ при вращении из положения $\Lambda(t)$ в положение Λ_f ($0 \leq \theta \leq \pi$); ϑ — угол отклонения оси OX от $\mathbf{L}$; $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ — элементы кватерниона доворота $\tilde{\Lambda}(t) \circ \Lambda_f$. Откуда

$$s_{\text{rem}}(t) = 2J_2 \arcsin(|J_{SC} \boldsymbol{\omega}(t)| \sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2} / \sqrt{J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2})$$

Предложенное уточнение $m(t)$ значительно снижает погрешность переориентации и увеличивает надежность выполнения терминальных условий $\Lambda(T) = \Lambda_f, \boldsymbol{\omega}(T) = 0$ (направление момента $\mathbf{M}$ по-прежнему определяется кватернионом Λ или векторной функцией $\mathbf{p}(t)$). Терминальное управление, основанное на текущих значениях фазовых переменных Λ и $\boldsymbol{\omega}$, и применение закона (4.4), (4.5) для формирования необходимого управляющего момента $\mathbf{M}$ улучшает характеристики алгоритма управления. В случае осевой симметрии КА описанное решение отличается от [11], так как все управляющие переменные $M_i(t)$ — непрерывные функции времени.

5. Данные математического моделирования. Для примера рассмотрим разворот на 180° в положение, соответствующее кватерниону Λ_f с элементами $\lambda_0 = 0; \lambda_1 = 0.707107; \lambda_2 = 0.59; \lambda_3 = 0.39$. В исходном положении направления одноименных осей инерциального $\mathbf{I}$ и связанного базисов совпадают, и $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$. Численное решение задачи управляемого разворота в постановке (1.1)–(1.6) приведем для случая, когда $k_0 = 4$ с/Вт, а характеристики КА приняты следующими: $J_1 = 77544$ кг · м², $J_2 = 228466$ кг · м², $J_3 = 175683$ кг · м², $u_0 = 0.25$ Н/√кг.

При решении двухточечной краевой задачи разворота в (2.7) полагаем $b(t) = \text{const}$ (и $|\mathbf{L}| = \text{const}$), так как характер поведения функции $b(t)$ не влияет на искомое значение $\mathbf{p}_0$ [18]. Поиск $\mathbf{p}_0$ начнем с решения той же задачи для динамически симметричного тела с моментами инерции J_1 и J , где J — момент инерции относительно поперечной оси, равный среднему значению между J_2 и J_3 (исследователи нередко применяют принцип осреднения [32]). Допустимым является значение $J = (J_2 + J_3)/2$, хотя чаще используют следующую величину [8]

$$J = \frac{J_2 J_3}{J_2 + J_3 - J_1} (\sqrt{(1 - J_1/J_2)(1 - J_1/J_3)} + 1)$$

Предположив, что КА — динамически симметричное тело, решаем систему (4.3). Найденные $\mathbf{p}_0$ и β принимаем за начальное приближение к истинным значениям, соответствующим оптимальному решению. Они уточняются до тех пор, пока не будут удовлетворять системе (1.2), (2.7), (3.2) с учетом $b(t) = \text{const}$ (что соответствует $\mathbf{M} = 0$) при условиях $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}, \Lambda(t_{pr}) = \Lambda_f$, предъявляемых к вращению КА. Полагаем $b(t) = J\beta/T$. Зная $\mathbf{p}_0$ и угол β , начальные скорости ω_{ist} рассчитываются по выражениям:

$$\omega_{1st} = \frac{J\beta}{J_1 T} p_{10}, \quad \omega_{2st} = \frac{J\beta}{J_2 T} p_{20}, \quad \omega_{3st} = \frac{J\beta}{J_3 T} p_{30} \quad (5.1)$$

(при нахождении $\mathbf{p}_0$ время T принималось равным $T = 200$ с). Прогноз движения осуществляем путем интегрирования системы уравнений (1.2), (2.7), (3.2) и $b(t) = J\beta/T$ с начальными условиями $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}, \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_{\text{st}}, \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$. Мерой отдаленности $\mathbf{p}_0$ и β от истинного решения служит оценка $\epsilon = \text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{pr} \circ \Lambda_f)$, где Λ_{pr} — наиболее близкое к Λ_f

положение, полученное по результатам моделирования движения КА вокруг центра масс, соответствующего вращению твердого тела по инерции ($M_i = 0$). Значение $\mathbf{p}_0$ уточняем до тех пор, пока $\varepsilon < \varepsilon_{th}$ (ε_{th} — некоторая близкая к 1 пороговая величина, которая отражает точность найденного решения). Как только условие $\varepsilon \geq \varepsilon_{th}$ будет достигнуто (прогнозируемая ошибка станет удовлетворять заданной точности), истинные значения $\mathbf{p}_0$ и β (для удовлетворения граничным условиям $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$, $\Lambda(t_{pr}) = \Lambda_f$) считаются найденными, и краевая задача решена. Вектор $\mathbf{p}_0$ уточняли с помощью следующего рекуррентного правила:

$$\Lambda_t^{(k+1)} = \Lambda_t^{(k)} \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}$$

где $\Lambda_t^{(k)}$ — принимаемый в (4.3) кватернион разворота на k -м приближении. На каждом k -м шаге итераций обновляются элементы кватерниона разворота $\Lambda_t^{(k)}$ (правые части системы (4.3)), из (4.3) мы находим $\mathbf{p}_0$, β и угловую скорость ω_{st} (согласно (5.1)) для моделирования неуправляемого вращения, и в результате получаем прогноз Λ_{pr} . Если $\varepsilon < \varepsilon_{th}$, то рассчитывается новый кватернион разворота $\Lambda_t^{(k+1)}$ для следующего $(k+1)$ -го приближения, и процесс уточнения $\mathbf{p}_0$ возобновляется. В правых частях системы (4.3) для начального приближения взяты элементы кватерниона $\Lambda_t^{(0)} = \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda_f$. Итерационный процесс останавливается, когда $\varepsilon \geq \varepsilon_{th}$.

Описанная схема аналогична методу решения уравнения вида $x = g(x)$ для скалярной функции $g(x)$ скалярного (одномерного) аргумента x . В нашем случае аргумент — кватернион Λ_t , а функция — кватернионное произведение $\Lambda_t \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}$ (Λ_f — постоянный кватернион, а Λ_{pr} зависит от аргумента Λ_t через систему (4.3), (5.1) и модель движения, описываемую уравнениями (1.2), (2.7), (3.2) с учетом $b(t) = \text{const} = J\beta/T$). Изменяя Λ_t , получим новый вектор $\mathbf{p}_0$ (как решение системы (4.3) с новыми правыми частями), и новые начальные скорости ω_{ist} и прогнозируемое значение Λ_{pr} , что приведет к изменению функции $\Lambda_t \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}$. Как только $\text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{pr} \circ \Lambda_f) \geq \varepsilon_{th}$, поиск новых приближений прекращается, и решение $\mathbf{p}_0$ считается найденным. Поскольку $|\text{vect}(\tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}^{(k)})| < |\text{vect}(\Lambda_t^{(k)})|$ для всех k , то можно констатировать, что процесс приближения $\mathbf{p}_0$ к истинному решению сходится. Аналогичный способ расчета $\mathbf{p}_0$ применялся в решении двухточечной краевой задачи разворота для максимального быстрогодействия [8].

После решения краевой задачи разворота из положения $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$ в положение $\Lambda(T) = \Lambda_f$ были получены $\mathbf{p}_0 = \{0.485305; 0.126171; 0.865194\}$ и (2.10), $F = 401.63 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$.

Соответственно, $m_0 = 92.1 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Значения k_0 и u_0 соответствуют условию $k_0 u_0^2 < 1$. Поэтому оптимальное вращение включает два участка, внутри которых $|\mathbf{M}| = \text{const}$. Реализующееся управление имеет три интервала изменения момента $\mathbf{M}$ — вначале интенсивная раскрутка КА (когда $m(t) = \text{const} = m_0$), участок с квадратичным изменением модуля кинетического момента в середине разворота ($m(t)$ — линейная функция времени, уменьшающаяся с $m(t) = m_0$ до $m(t) = -m_0$), и интенсивное торможение в конце (когда $m(t) = \text{const} = -m_0$). Точкам переключения соответствуют $t_1 = 40.7 \text{ с}$ и $t_2 = 95.0 \text{ с}$. Время оптимального разворота $T = 135.7 \text{ с}$, константа $r_0 = 27.14 \text{ с}$. Максимальная энергия вращения за время разворота $E_{\max} = 92 \text{ Дж}$, кинетический момент достигает максимальной величины $L_{\max} = 5000 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ при $t = 67.85 \text{ с}$.

Данные математического моделирования движения КА во время оптимального разворота приведены на рис. 3–6. На рис. 3 даны графики изменения угловых скоростей в связанной системе координат $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ по времени (скорости ω_i даны в

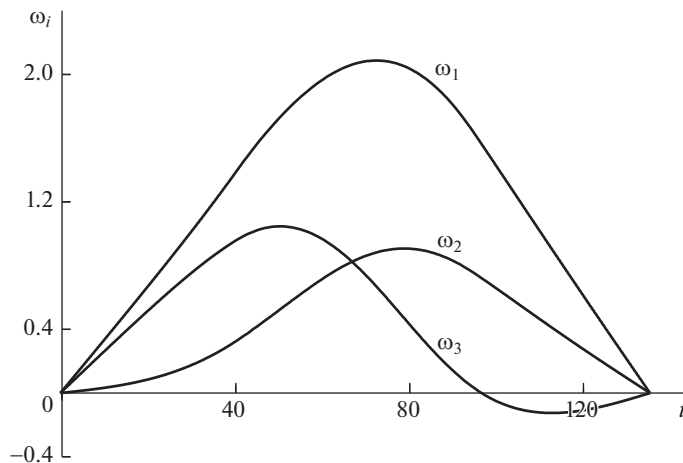


Рис. 3. Изменение угловых скоростей во время разворота.

град./с). Рис. 4 иллюстрирует изменение компонент кватерниона $\Lambda(t)$, отражающего текущую ориентацию КА в процессе совершаемого маневра: $\lambda_0(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$. Значение показателя (1.6), характеризующего экономичность программы управления $\mathbf{M}(t)$, оказалось равным $G = 160.6$ с. Характер поведения составляющих $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ орта $\mathbf{p}$ показан на рис. 5 (значения p_i , как и λ_j , — безразмерные величины), причем проекция p_1 изменяется незначительно. Изменение модуля кинетического момента КА во время оптимального разворота иллюстрирует рис. 6. Свидетельством того, что OX — продольная ось КА, является то обстоятельство, что угловая скорость ω_1 знакопостоянна, и характер ее изменения повторяет поведение модуля кинетического момента (в отличие от ω_2 и ω_3). При оптимальном управлении переменные p_i и λ_j — гладкие функции времени; ω_i — гладкие функции времени (за исключением моментов времени $t = 0$ и $t = T$).

Необходимо заметить, что чем больше коэффициент k_0 , тем больше время разворота T и меньше энергия $E_{\max}$, максимальный момент $|\mathbf{M}(0)|$ и максимальный модуль кинетического момента $L_{\max}$. Значение коэффициента k_0 в минимизируемом функционале (1.6) выбрано из условия $E_{\max} < 100$ Дж и $L_{\max} \leq 5000$ Н · м · с (и желательно, чтобы время разворота $T \approx 135$ с).

Заключение. Исследуется задача оптимального управления разворотом твердого тела (в частности, КА) из исходного положения в предписанное конечное положение. Для оптимизации выбранный показатель качества объединяет в заданной пропорции энергетические затраты и время, затраченные на переориентацию КА. Проблемы экономичности управления движением актуальны и в настоящее время, в силу чего рассмотренная задача остается практически важной. Обнаружены ключевые свойства вращения и тип траектории, соответствующей критерию (1.6). Доказано, что постоянной величиной является отношение квадрата модуля кинетического момента к кинетической энергии вращения КА.

Чтобы решить поставленную задачу мы использовали кватернионные модели и принцип максимума. Для сформулированной оптимизационной задачи выписаны функция Гамильтона—Понтрягина, сопряженная система уравнений и аналитические выражения для оптимального управления. На основе необходимых условий опти-

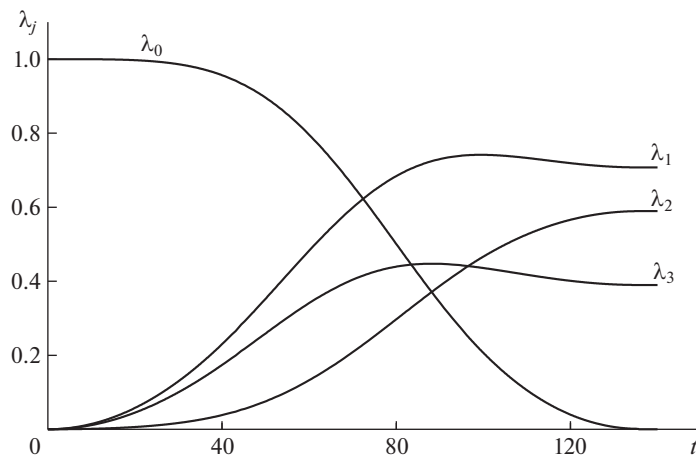


Рис. 4. Изменение компонент кватерниона ориентации $\Lambda(t)$ во время разворота.

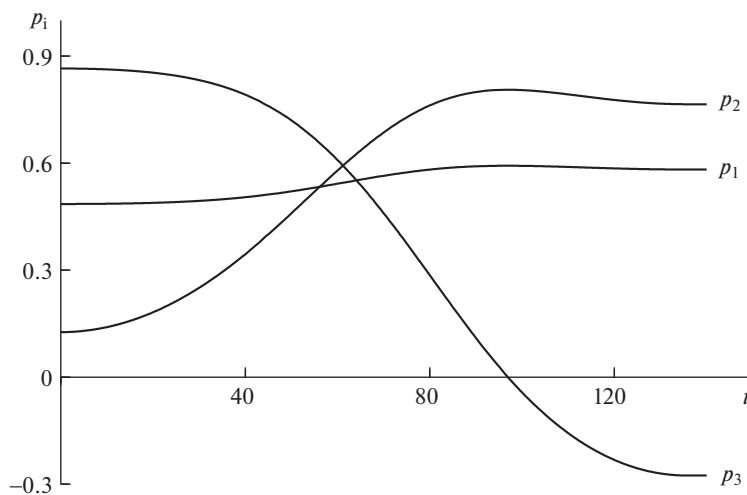


Рис. 5. Вид функций $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ во время оптимального разворота.

мальности определена структура оптимального управления; даны соотношения для определения пространственного движения КА. В статье доказана единственность оптимального решения.

Главное отличие представленного решения — использование нового функционала качества. Введение в минимизируемый показатель времени, затраченного на разворот (со своим коэффициентом пропорциональности), определяет максимальную величину кинетического момента и продолжительность маневра. Другое принципиальное отличие заключается в том, что из-за ограниченности управления во время оптимального разворота не исключено наличие участков вращения с постоянным модулем управляющего момента. В статье определены и подробно описаны все возможные варианты реализующегося оптимального управления, найдено условие (критерий), поз-

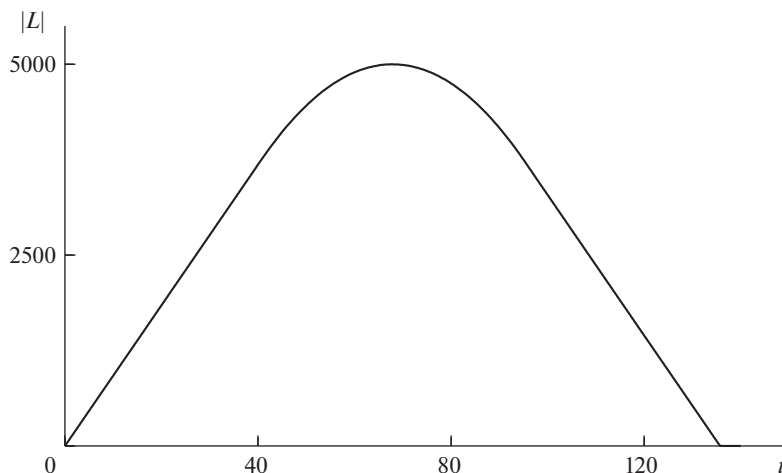


Рис. 6. Изменение модуля кинетического момента при оптимальном управлении.

воляющее определить тип оптимального управления, зная коэффициент k_0 минимизируемого функционала и размер области допустимых управлений. В зависимости от коэффициента k_0 оптимальным может быть один из двух вариантов управления: а) вращение с переменным модулем управляющего момента на протяжении всего маневра; б) управление с участками вращения с постоянным максимально возможным модулем управляющего момента (раскрутка в начале разворота и торможение в конце разворота), причем модуль кинетического момента меняется по квадратичному закону между раскруткой и торможением. Проведены аналитические исследования длительности участков вращения с постоянным максимально возможным модулем управляющего момента и длительности всего разворота в зависимости от коэффициента k_0 минимизируемого функционала и выписаны формулы (в аналитическом виде) для вычисления времени разворота T , длительности участков вращения с постоянным максимально возможным модулем управляющего момента и максимального модуля кинетического момента. Описана реализация программного разворота. Предложено терминальное управление, использующее измерения фазовых переменных.

Полученные результаты отличаются от решения работы [11], где найдено оптимальное релейное управление вместо непрерывного управления, полученного в нашем случае. Кроме того, мы решили задачу в форме синтеза, в явном виде построена зависимость управляющих переменных от фазовых координат. Представлены выражения для расчета основных характеристик поворотного маневра. Описывается вычислительный алгоритм решения краевой задачи для произвольного распределения масс твердого тела. Приведен пример математического моделирования, демонстрирующий поведение параметров движения. В частном случае динамически симметричного тела решение задачи оптимального управления доведено до конца: в аналитическом виде получена система уравнений, позволяющая напрямую найти решение двухточечной краевой задачи и рассчитать ключевые константы закона управления (например, разработанным ранее устройством [33]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sinitsin L.I., Kramlikh A.V.* Synthesis of the optimal control law for the reorientation of a nanosatellite using the procedure of analytical construction of optimal regulators // J. Phys.: Conf. Ser.

2021. V. 1745. P. 012053.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012053>
2. Велищанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Синтез алгоритмов переориентации космического аппарата на основе концепции обратной задачи динамики // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 5. С. 156–163.
 3. Junkins J.L., Turner J.D. Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. Elsevier, 1986. 515 p.
 4. Решмин С.А. Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в желаемое угловое положение // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 5. С. 30–41.
<https://doi.org/10.1134/S106423071805012X>
 5. Scrivenner S., Thompson R. Survey of Time-optimal Attitude Maneuvers // J. Guid. Contr. Dyn. 1994. V. 17. № 2. P. 225–233.
 6. Zhou H., Wang D., Wu B., Ek Poh. Time-optimal reorientation for rigid satellite with reaction wheels // Int. J. Contr. 2012. V. 85. № 10. P. 1–12.
<https://doi.org/10.1134/S106423071805012X>
 7. Решмин С.А. Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в гравитационно-устойчивое положение // Док. Ак. наук. 2018. Т. 480. № 6. С. 671–675.
<https://doi.org/10.1134/S1028335818060101>
 8. Левский М.В. Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 6. С. 144–157.
<https://doi.org/10.1134/S1064230708060117>
 9. Shen H., Tsiotras P. Time-optimal Control of Axi-symmetric Rigid Spacecraft with two Controls // AIAA J. Guid. Contr. Dyn. 1999. V. 22. № 5. P. 682–694.
<https://doi.org/10.2514/2.4436>
 10. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 2. С. 131–147.
<https://doi.org/10.7868/S0002338818020117>
 11. Бранец В.Н., Черток М.Б., Казначеев Ю.В. Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исслед. 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 352–360.
 12. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
 13. Айпанов Ш.А., Жакытов А.Т. Метод разделения переменных и его применение для задачи оптимального разворота космического аппарата // Космич. исслед. 2020. Т. 58. № 1. С. 73–84.
<https://doi.org/10.31857/S002342062001001X>
 14. Стрелкова Н.А. Об оптимальной переориентации твердого тела // Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы. Пермь: ПГУ, 1990. С. 115–133.
 15. Левский М.В. Кинематически оптимальное управление переориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 1. С. 119–136.
<https://doi.org/10.1134/S1064230714050116>
 16. Зелепукина О.В., Челноков Ю.Н. Построение оптимальных законов изменения вектора кинетического момента динамически симметричного твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 4. С. 31–49.
<https://doi.org/10.3103/S0025654411040030>
 17. Бирюков В.Г., Челноков Ю.Н. Построение оптимальных законов изменения вектора кинетического момента твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 5. С. 3–21.
<https://doi.org/10.3103/S002565441405001X>
 18. Левский М.В. Синтез оптимального управления терминальной ориентацией космического аппарата с использованием метода кватернионов // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 7–24.
<https://doi.org/10.3103/S0025654409020022>
 19. Levskii M.V. About Method for Solving the Optimal Control Problems of Spacecraft Spatial Orientation // Probl. Nonlin. Anal. Eng. Syst. 2015. V. 21. № 2. P. 61–75.
 20. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 6. С. 129–145.
<https://doi.org/10.1134/S1064230707020189>

21. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое квазиоптимальное решение задачи поворота осесимметричного твердого тела с комбинированным функционалом // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 3. С. 39–49.
<https://doi.org/10.31857/S0002338820030105>
22. Сапунков Я.Г., Молоденков А.В. Аналитическое решение задачи оптимального в смысле комбинированного функционала разворота осесимметричного космического аппарата // Автоматика и телемеханика. 2021. № 7. С. 86–106.
<https://doi.org/10.31857/S0005231021070059>
23. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое приближенное решение задачи оптимального разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 3. С. 170–180.
<https://doi.org/10.7868/S0002338815030142>
24. Левский М.В. Использование универсальных переменных в задачах оптимального управления ориентацией космических аппаратов // Мехатрон. автомат. управл. 2014. № 1. С. 53–59.
25. Quang M. Lam. Robust and adaptive reconfigurable control for satellite attitude control subject to under-actuated control condition of reaction wheel assembly // Math. Eng. Sci. Aerosp. 2018. V. 9. № 1. P. 47–63.
26. Levskii M.V. Special aspects in attitude control of a spacecraft, equipped with inertial actuators // J. Comp. Sci. Appl. Inform. Technol. 2017. V. 2. № 4. P. 1–9.
27. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
28. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974. 488 с.
29. Любушин А.А. О применении модификаций метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления // ЖВМиМФ. 1982. Т. 22. № 1. С. 30–35.
30. Левский М.В. Способ управления разворотом космического аппарата и система для его реализации. Патент на изобретение РФ № 2114771 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 1998. № 19. С. 234–236.
31. Левский М.В. Система управления пространственным разворотом космического аппарата. Патент на изобретение РФ № 2006431 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 1994. № 2. С. 49–50.
32. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
33. Левский М.В. Устройство формирования параметров регулярной прецессии твердого тела. Патент на изобретение РФ № 2146638 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 2000. № 8. С. 148.

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКОЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ТОНКОГО КРУГЛОГО ИДЕАЛЬНО ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ

© 2023 г. И. М. Цветков^{a,*}

^aМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*e-mail: cvetkoviv@yandex.ru

Поступила в редакцию 30.08.2022 г.

После доработки 11.11.2022 г.

Принята к публикации 17.11.2022 г.

Рассматривается напряженно-деформированное состояние, возникающее при динамическом растяжении однородного круглого слоя из несжимаемого идеально жесткопластического материала, подчиняющегося критерию Мизеса–Генки. Верхнее и нижнее основания свободны от напряжений, на боковой границе задана радиальная скорость. Учитывается возможность утолщения либо утоньшения слоя, что моделирует шейкообразование и дальнейшее развитие шейки. Выявлено два характерных режима растяжения — один связан с достаточно большой скоростью удаления боковой границы слоя от центра, второй с ускорением. Во втором случае проведен анализ с использованием метода асимптотического интегрирования, позволяющий приближенно найти параметры напряженно-деформированного состояния.

Ключевые слова: идеальная пластичность, предел текучести, круглый слой, растяжение, шейка, квазистатика, динамика, скорость деформации, напряжение, асимптотические разложения

DOI: 10.31857/S0572329922600682, **EDN:** QWQFKO

Интерес к динамическим задачам пластического течения возникает в самых разных областях [1, 2] — оптимизация быстрых производственных процессов, поведение грунтов при внезапных приложениях нагрузок, безопасность строений подверженных ударам или авариям. Локализация деформаций, шейкообразование — результат неустойчивости пластического течения и часто является предвестником разрушения конструкции.

В [3, 4] проведен анализ задач о динамическом растяжении идеально жесткопластических стержня и бесконечного листа в осесимметричной и плоской постановках соответственно. На основе метода асимптотического интегрирования, в случае когда ускорение торцов достаточно высоко, получены приближенно параметры напряженно-деформированного состояния, в том числе аппроксимация границы области квадратичным трехчленом.

Настоящая работа посвящена задаче об осесимметричном растяжении идеально жесткопластического слоя. С использованием метода асимптотического интегрирования, показано, что при переходе от квазистатики к динамическому деформированию прослеживаются два характерных сценария растяжения. Каждый из них связан с достижением некоторой безразмерной функцией времени определенного порядка малости по отношению к малому геометрическому параметру, характеризующую форму слоя. Одна из этих функций представляет собой обратное число Эйлера, другая зависит от ускорения, с которым боковая поверхность удаляется от центра. При реализа-

ции режима связанного с достижением ускорения своих критических значений, приближенно вычислены параметры напряженно-деформированного состояния, в частности получена аппроксимация формы границы слоя, позволяющая моделировать шейкообразование.

1. Постановка задачи о динамическом растяжении круглого слоя. Рассмотрим деформирование во времени круглого слоя из однородного несжимаемого идеально жесткопластического материала, подчиняющегося критерию пластичности Мизеса–Генки с плотностью ρ и пределом текучести σ_s . Область Ω_t в $\mathbb{R}^3$, занятая слоем в момент t , симметрична относительно оси z , имеет неизменный во времени объем $|\Omega|$ и в цилиндрической системе координат, связанной с осью симметрии слоя, имеет вид

$$\Omega_t = \{(r, \theta, z) | 0 \leq r \leq R(t), 0 \leq \theta < 2\pi, -h(t, r) \leq z \leq h(t, r)\} \quad (1.1)$$

$$|\Omega| = 4\pi \int_0^{R(t)} rh(t, r) dr = 2\pi R^2(t) h^*(t) \quad (1.2)$$

Средняя высота слоя h^* определяется в (1.2) таким образом, чтобы объем слоя цилиндрической формы радиуса $R(t)$ и высоты $2h^*(t)$ равнялся $|\Omega|$.

Верхнее и нижнее основания слоя $z = \pm h(r, t)$ свободны от напряжений, а на боковой поверхности $r = R(t)$ задана радиальная скорость:

$$r = R(t): v_r = V(t), V(t) > 0 \quad (1.3)$$

Итак, рассматривается растяжение слоя с заданной кинематикой движения его боковой поверхности. Функции $R(t)$ и $h^*(t)$ являются соответственно монотонно возрастающей и монотонно убывающей. Ограничимся рассмотрением поля вектора скорости следующего вида: $v(x, t) = (v_r(r, z, t), 0, v_z(r, z, t))$. Это порождает тензор скоростей деформации $\underline{\gamma}$ с ненулевыми компонентами, где запятая в индексе обозначает дифференцирование по соответствующей переменной

$$v_{rr} = v_{r,r}, \quad v_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r}, \quad v_{zz} = v_{z,z}, \quad v_{rz} = \frac{1}{2}(v_{r,z} + v_{z,r}) \quad (1.4)$$

В силу несжимаемости $\text{tr} \underline{\gamma} = 0$.

Представим симметричный тензор напряжений $\underline{\sigma}(x, t)$ как сумму шаровой и девиаторной частей: $\underline{\sigma} = -p\underline{I} + \underline{s}$, где p – давление, $\underline{I}$ – единичный тензор второго ранга, $\text{tr} \underline{s} = 0$. Определим интенсивности скоростей деформаций v_u и напряжений σ_u :

$$v_u = \sqrt{\underline{\gamma} : \underline{\gamma}}, \quad \sigma_u = \sqrt{\underline{s} : \underline{s}} \quad (1.5)$$

Векторные определяющие соотношения идеально жесткопластической среды

$$v_u \underline{s} = \sigma_u \underline{\gamma} \quad (1.6)$$

тензорно линейны, следовательно ненулевыми у девиатора $\underline{s}$ будут те же компоненты, что и у тензора $\underline{\gamma}$. Выражая $s_{\theta\theta} = -s_{rr} - s_{zz}$, оставим у девиатора независимыми компоненты s_{rr} , s_{rz} , s_{zz} . Тогда определяющее соотношение $\sigma_u = \sigma_s$, являющееся условием пластичности Мизеса–Генки, запишется следующим образом:

$$s_{rr}^2 + s_{zz}^2 + s_{rr}s_{zz} + s_{rz}^2 = \tau_s^2 \quad (1.7)$$

Исключая интенсивности σ_u и v_u , из соотношений (1.6) можно образовать независимые пропорции $s_{rr}v_{zz} = s_{zz}v_{rr}$, $s_{rz}v_{rr} = s_{rr}v_{rz}$, которые с учетом связей (1.4) преобразуются к виду:

$$s_{rr}v_{z,z} = s_{zz}v_{r,r}, \quad s_{rr}(v_{r,z} + v_{z,r}) = 2s_{rz}v_{r,r} \quad (1.8)$$

Выпишем условие несжимаемости, а также два уравнения движения в осесимметричном случае:

$$v_{r,r} + \frac{v_r}{r} + v_{z,z} = 0 \quad (1.9)$$

$$-p_{,r} + s_{rr,r} + s_{rz,z} + \frac{1}{r}(2s_{rr} + s_{zz}) = \rho(v_{r,t} + v_r v_{r,r} + v_z v_{r,z}) \quad (1.10)$$

$$-p_{,z} + s_{rz,r} + s_{zz,z} + \frac{s_{rz}}{r} = \rho(v_{z,t} + v_r v_{z,r} + v_z v_{z,z}) \quad (1.11)$$

Нелинейная система шести уравнений (1.7)–(1.11) замкнута относительно шести функций $v_r, v_z, p, s_{rr}, s_{rz}, s_{zz}$ зависящих от r, z и t в области Ω_t с заранее неизвестной частью границы $z = \pm h(r, t)$, которая характеризуется нормалью $\mathbf{n}$:

$$n_r = -\frac{\partial h / \partial r}{\sqrt{1 + (\partial h / \partial r)^2}}, \quad n_z = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial h / \partial r)^2}}$$

На этих частях границы выполнены условия равенства нулю двух компонент вектора напряжений:

$$z = \pm h(r, t): (p - s_{rr}) \frac{\partial h}{\partial r} \pm s_{rz} = 0, \quad -s_{rz} \frac{\partial h}{\partial r} \pm (-p + s_{zz}) = 0 \quad (1.12)$$

Также, выполняется кинематическое граничное условие на боковой границе слоя (1.3).

Для строгой постановки начально краевой задачи, рассматриваемой при $t > 0$, необходимо задать функцию $h(r, 0) \equiv h_0(r)$, $0 \leq r < r_0$, удовлетворяющую интегральному условию

$$\frac{|\Omega|}{4\pi} = \int_0^{r_0} r h_0(r) dr$$

Из симметричности области Ω вытекает, что функции s_{rz}, v_z антисимметричны по z .

2. Квазистатический режим растяжения. Квазистатическая постановка задачи о растяжении идеально жесткопластического слоя отличается от динамической тем, что в правых частях уравнений (1.10), (1.11) стоят нули, т.е. время t становится параметром, входящим в решения неявно через V, h и R . Уравнения (1.10) и (1.11) превращаются в уравнения равновесия.

Аналитическое решение квазистатической задачи несложно получить, если в начальный момент времени слой имел цилиндрическую форму, т.е. $h_0^* = \text{const}$. Будем обозначать параметры этого решения верхним индексом “qs”. Имеем:

$$v_r^{qs} = \frac{Vr}{R}, \quad v_z^{qs} = -2 \frac{Vz}{R} \quad (2.1)$$

$$s_{rz}^{qs} = 0, \quad s_{rr}^{qs} = s_{\theta\theta}^{qs} = \frac{\tau_s}{\sqrt{3}}, \quad s_{zz}^{qs} = p^{qs} = -\frac{2\tau_s}{\sqrt{3}} \quad (2.2)$$

Напряженное состояние (2.2) однородно и не зависит от заданной скорости V .

Интегрируя задачу Коши

$$\frac{dr}{dt} = v_r^{qs}(r), \quad \frac{dz}{dt} = v_z^{qs}(z); \quad r|_{t=0} = r_0, \quad z|_{t=0} = z_0$$

найдем лагранжев закон движения частиц (при интегрировании полагаем, что V и R постоянны):

$$r^{qs} = r_0 \exp\left(\frac{Vt}{R}\right), \quad z^{qs} = z_0 \exp\left(-2\frac{Vt}{R}\right)$$

Траектории частиц – семейство гипербол $r^2 z = r_0^2 z_0$. Независимость r^{qs} от z_0 и z^{qs} от r_0 свидетельствует о том, что Ω_t представляет собой вытягивающийся со временем цилиндр.

Кинематика (2.1) обеспечивает отсутствие жестких зон в Ω_t , так как согласно (1.4) и (1.5) $v_u^{qs} = \sqrt{6} \frac{V}{R} > 0$ во всех точках слоя.

Исследуем далее вопрос о том, при каких соотношениях безразмерных параметров системы (или на каких временах) выписанное выше квазистатическое приближение является главным и им можно ограничиться в технологических расчетах, а когда инерционные эффекты, вызванные слагаемыми в правых частях уравнений (1.10) и (1.11), начинают играть соизмеримую роль в распределении напряжений и движении точек слоя.

3. Асимптотическое разложение. Обратимся к динамическим уравнениям (1.10), (1.11) и образуем три явно зависящих от времени безразмерных параметра:

$$\alpha(t) = \frac{h^*(t)}{R(t)} \ll 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{\rho V^2(t)}{\tau_s}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\rho \dot{V}(t) h^*(t)}{\tau_s} \quad (3.1)$$

Первый из них – малый геометрический параметр, второй – обратное число Эйлера. На разных интервалах процесса растяжения порядок малости α по отношению к ε_1 и ε_2 может меняться. От этого зависит вклад инерционных слагаемых в уравнениях движения.

Представим разложения шести неизвестных функций в виде регулярных асимптотических рядов по целым степеням малого асимптотического параметра α (в [3, 4] аналогичные по структуре разложения использовались при анализе растяжения осесимметричного стержня и бесконечного листа, в [5] разложения использовались в анализе задачи Прандтля):

$$\begin{aligned} v_r(r, z, t) &= V(t) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(t) v_{\xi}^{\{n\}}(\xi, \zeta, \tau) \\ v_z(r, z, t) &= V(t) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(t) v_{\zeta}^{\{n\}}(\xi, \zeta, \tau) \\ s_{(rr; rz; zz)}(r, z, t) &= \tau_s \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(t) s_{(\xi\xi; \xi\zeta; \zeta\zeta)}^{\{n\}}(\xi, \zeta, \tau) \\ p(r, z, t) &= \tau_s \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(t) p^{\{n\}}(\xi, \zeta, \tau) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\xi = \frac{\alpha(t)r}{h^*(t)} = \frac{r}{R(t)}, \quad \zeta = \frac{z}{h^*(t)}, \quad \tau = \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} \frac{t}{h^*(t)} \quad (3.3)$$

Безразмерные коэффициенты рядов (3.2) (с верхними индексами) зависят от новых безразмерных координат ξ , ζ и безразмерного времени τ . Область слоя Ω_t (1.1) в любой момент времени описывается неравенствами

$$\Omega_{\tau} = \{(\xi, \theta, \zeta) | 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi, -\eta(\xi, \tau) \leq \zeta \leq \eta(\xi, \tau)\} \quad (3.4)$$

$$\eta(\xi, \tau) = \frac{h(r, t)}{h^*(t)}, \quad \int_0^1 \xi \eta(\xi, \tau) d\xi = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial h}{\partial r} = \alpha \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \quad (3.5)$$

Отметим что порядок малости по α безразмерных производных $\partial h / \partial r$ и $\partial \eta / \partial \xi$ разный. Так как функция $\tau(t)$ монотонно возрастает, якобиан замены переменных $\partial(\xi, \zeta, \tau) / \partial(r, z, t)$ отличен от нуля, т.е. она невырождена.

Имеет место замена дифференциальных операторов:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R(t)} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\alpha(t)}{h^*(t)} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{h^*(t)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{V\xi}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{2V\zeta}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \left(\sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} \frac{1}{h^*} + \frac{2V\tau}{R} \right) \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (3.7)$$

Из определения малого параметра (3.1) и средней высоты слоя (1.2) следуют кинетические соотношения:

$$\dot{\alpha} = -\frac{3\alpha V}{R}, \quad \dot{h}^* = -2 \frac{h^* V}{R} \quad (3.8)$$

Подставим ряды (3.2) в пять уравнений (1.7)–(1.11) и граничные условия (1.3), (1.12). С учетом формул (3.5)–(3.8) получим систему, состоящую из уравнений движения (1.10), (1.11)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left(-\alpha p_{,\xi}^{\{n\}} + \alpha s_{\xi\xi,\xi}^{\{n\}} + s_{\xi\xi,\xi}^{\{n\}} + \frac{1}{\xi} (2\alpha s_{\xi\xi}^{\{n\}} + \alpha s_{\xi\xi}^{\{n\}}) \right) = \\ & = \varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} (-3nv_{\xi}^{\{n\}} - \xi v_{\xi,\xi}^{\{n\}} + 2\zeta v_{\xi,\xi}^{\{n\}} + 2\tau v_{\xi,\tau}^{\{n\}}) + \\ & + \sqrt{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n v_{\xi,\tau}^{\{n\}} + \varepsilon_1 \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sum_{j=0}^n v_{\xi}^{\{j\}} v_{\xi,\xi}^{\{n-j\}} + \varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sum_{j=0}^n v_{\xi}^{\{j\}} v_{\xi,\xi}^{\{n-j\}} + \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n v_{\xi}^{\{n\}} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n (-p_{,\xi}^{\{n\}} + \alpha s_{\xi\xi,\xi}^{\{n\}} + s_{\xi\xi,\xi}^{\{n\}} + \frac{\alpha}{\xi} s_{\xi\xi}^{\{n\}}) = \\ & = \varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} (-3nv_{\xi}^{\{n\}} - \xi v_{\xi,\xi}^{\{n\}} + 2\zeta v_{\xi,\xi}^{\{n\}} + 2\tau v_{\xi,\tau}^{\{n\}}) + \\ & + \sqrt{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n v_{\xi,\tau}^{\{n\}} + \varepsilon_1 \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sum_{j=0}^n v_{\xi}^{\{j\}} v_{\xi,\xi}^{\{n-j\}} + \varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sum_{j=0}^n v_{\xi}^{\{j\}} v_{\xi,\xi}^{\{n-j\}} + \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n v_{\xi}^{\{n\}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

условия несжимаемости (1.9), которое в силу линейности, может быть записано в виде рекуррентной цепочки (коэффициенты с отрицательными индексами далее всюду считаются равными нулю)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(v_{\xi,\xi}^{\{n-1\}} + \frac{1}{\xi} v_{\xi}^{\{n-1\}} + v_{\xi,\xi}^{\{n\}} \right) \alpha^n = 0 \Leftrightarrow v_{\xi,\xi}^{\{n-1\}} + \frac{1}{\xi} v_{\xi}^{\{n-1\}} + v_{\xi,\xi}^{\{n\}} = 0, \quad n \geq 0 \quad (3.11)$$

критерия Мизеса–Генки (1.7)

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}} \right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}} \right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}} \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}} \right)^2 = 1 \\ & \Leftrightarrow (s_{\xi\xi}^{\{0\}})^2 + (s_{\xi\xi}^{\{0\}})^2 + s_{\xi\xi}^{\{0\}} s_{\xi\xi}^{\{0\}} + (s_{\xi\xi}^{\{0\}})^2 = 1, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\sum_{j=0}^n (s_{\xi\xi}^{\{j\}} s_{\xi\xi}^{\{n-j\}} + s_{\xi\xi}^{\{j\}} s_{\xi\xi}^{\{n-j\}} + s_{\xi\xi}^{\{j\}} s_{\xi\xi}^{\{n-j\}} + s_{\xi\xi}^{\{j\}} s_{\xi\xi}^{\{n-j\}}) = 0, \quad n \geq 1$$

условия соосности девиатора напряжений и тензора скоростей деформаций (1.8)

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n v_{\xi,\xi}^{\{n\}} \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} v_{\xi,\xi}^{\{n\}} \right) \Leftrightarrow \\ & \sum_{j=0}^n s_{\xi\xi}^{\{j\}} v_{\xi,\xi}^{\{n-j\}} = \sum_{j=0}^{n-1} s_{\xi\xi}^{\{j\}} v_{\xi,\xi}^{\{n-1-j\}}, \quad n \geq 0 \\ & \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n v_{\xi,\xi}^{\{n\}} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} v_{\xi,\xi}^{\{n\}} \right) = 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} v_{\xi,\xi}^{\{n\}} \right) \Leftrightarrow \\ & \sum_{j=0}^n s_{\xi\xi}^{\{j\}} v_{\xi,\xi}^{\{n-j\}} + \sum_{j=0}^{n-1} s_{\xi\xi}^{\{j\}} v_{\xi,\xi}^{\{n-1-j\}} = 2 \sum_{j=0}^{n-1} s_{\xi\xi}^{\{j\}} v_{\xi,\xi}^{\{n-1-j\}}, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Граничные условия (1.3) имеют вид:

$$\xi = 1: v_{\xi}^{\{0\}} = 1, \quad v_{\xi}^{\{n\}} = 0, \quad n \geq 1 \quad (3.14)$$

Условия того, что верхнее и нижнее основания свободны от напряжений (1.12) следующие:

$$\begin{aligned} \zeta = \pm \eta(\xi, \tau): \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} (p^{\{n\}} - s_{\xi\xi}^{\{n\}}) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \pm \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}} &= 0 \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} s_{\xi\xi}^{\{n\}} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \pm \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n (-p^{\{n\}} + s_{\xi\xi}^{\{n\}}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Безразмерные параметры $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ входят только в уравнения (3.9) и (3.10). На тех или иных временных интервалах порядок их малости по сравнению с $\alpha(t)$ может меняться. От этого зависит учет или неучет слагаемых в правых частях уравнений в процессе приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра.

4. Метод асимптотического интегрирования. Воспользуемся методом асимптотического интегрирования [3–6] задачи (3.9)–(3.15), заключающемся в последовательном решении замкнутых систем уравнений относительно $v_{\xi}^{\{n\}}$, $v_{\xi}^{\{n\}}$, $s_{\xi\xi}^{\{n\}}$, $s_{\xi\xi}^{\{n\}}$, $s_{\xi\xi}^{\{n\}}$, $p^{\{n\}}$, где $n \geq 0$, в области Ω_{τ} с заранее неизвестной частью границы $\zeta = \pm \eta(\xi, \tau)$.

Обратимся к уравнению (3.11) при $n = 0$: $v_{\xi,\xi}^{\{0\}} = 0$. Отсюда следует, что $v_{\xi}^{\{0\}} = v_{\xi}^{\{0\}}(\xi, \tau)$, а с учетом требования антисимметричности по ζ получим $v_{\xi}^{\{0\}} = 0$.

Из рекуррентной цепочки (3.11) при $n = 1$ и из второго условия (3.13) при $n = 0$ имеем

$$v_{\xi,\xi}^{\{0\}} + \frac{v_{\xi}^{\{0\}}}{\xi} + v_{\xi,\xi}^{\{1\}} = 0, \quad s_{\xi\xi}^{\{0\}} v_{\xi,\xi}^{\{0\}} = 0 \quad (4.1)$$

Перепишем первое уравнение (4.1) следующим образом и запишем следствие второго уравнения

$$\frac{1}{\xi} (\xi v_{\xi}^{\{0\}})_{,\xi} = -v_{\xi,\xi}^{\{1\}}, \quad v_{\xi}^{\{0\}} = v_{\xi}^{\{0\}}(\xi, \tau)$$

Таким образом, видно, что $v_{\xi,\xi}^{\{1\}}$ является функцией от ξ , τ . Обозначим $v_{\xi,\xi}^{\{1\}} = a(\xi, \tau)$, тогда, с учетом нечетности $v_{\xi}^{\{1\}}$ по ζ , общий вид $v_{\xi}^{\{0\}}$ и $v_{\xi}^{\{1\}}$ следующий

$$v_{\xi}^{\{0\}} = -\frac{1}{\xi} \left(\int_0^{\xi} a(u, \tau) u du - b(\tau) \right), \quad v_{\zeta}^{\{1\}} = a(\xi, \tau) \zeta \quad (4.2)$$

где $a(\xi, \tau)$ и $b(\tau)$ произвольные функции, удовлетворяющие граничному условию (3.14)

$$-\int_0^1 a(u, \tau) u du + b(\tau) = 1$$

Из физических соображений $\lim_{\xi \rightarrow 0} v_{\xi}^{\{0\}} = 0$, откуда необходимо вытекает $b(\tau) \equiv 0$. Потребуем чтобы решение (4.2) совпало с квазистатическим для чего достаточно положить $a(\xi, \tau)$ константой, таким образом

$$v_{\xi}^{\{0\}} = \xi, \quad v_{\zeta}^{\{1\}} = -2\zeta \quad (4.3)$$

Линейные зависимости (4.3) имеют место для любых соотношений порядков малости по α параметров $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$. Рассмотрев первое уравнение в (3.12) и уравнения (3.13) при $n = 1$, выведем незамкнутую систему уравнений относительно $s_{\xi\xi}^{\{0\}}, s_{\xi\zeta}^{\{0\}}, s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}, v_{\xi}^{\{1\}}$:

$$(s_{\xi\xi}^{\{0\}})^2 + (s_{\zeta\zeta}^{\{0\}})^2 + s_{\xi\xi}^{\{0\}} s_{\zeta\zeta}^{\{0\}} + (s_{\xi\zeta}^{\{0\}})^2 = 1, \quad -2s_{\xi\xi}^{\{0\}} = s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}, \quad s_{\xi\xi}^{\{0\}} v_{\xi}^{\{1\}} = 2s_{\xi\zeta}^{\{0\}} \quad (4.4)$$

Для замыкания системы (4.4) необходимо рассмотреть конкретный режим растяжения. Из (3.9) и (3.10) следует, что на временных интервалах, где одновременно $\varepsilon_1 \alpha^2 = o(1)$ и $\varepsilon_2 = o(1)$, после приравнивания нулю коэффициентов при α^0 в (3.9), с учетом (4.3), придем к следующей системе уравнений:

$$(s_{\xi\xi}^{\{0\}})^2 + (s_{\zeta\zeta}^{\{0\}})^2 + s_{\xi\xi}^{\{0\}} s_{\zeta\zeta}^{\{0\}} + (s_{\xi\zeta}^{\{0\}})^2 = 1, \quad -2s_{\xi\xi}^{\{0\}} = s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}, \quad s_{\xi\zeta}^{\{0\}} = 0$$

Из последнего уравнения имеем, что $s_{\xi\zeta}^{\{0\}} = s_{\xi\zeta}^{\{0\}}(\xi, \tau)$, а с учетом требования нечетности $s_{\xi\zeta}^{\{0\}}$ по ζ получаем

$$s_{\xi\zeta}^{\{0\}} = 0, \quad s_{\xi\xi}^{\{0\}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad s_{\zeta\zeta}^{\{0\}} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

Таким образом пришли к напряженному состоянию, соответствующему квазистатическому растяжению слоя цилиндрической формы. Также, приравнявая коэффициенты при α^0 , из (3.10) следует, что $-p_{,\zeta}^{\{0\}} + s_{\zeta\zeta,\zeta}^{\{0\}} = 0$.

Итак, динамические эффекты начинают играть роль и вносить вклад в напряженно-деформированное состояние, сопоставимый с квазистатикой, если выполняется хотя бы одно из требований: а) параметр ε_1 становится порядка α^n , $n \geq -2$; б) параметр ε_2 становится порядка α^m , $m \geq 0$.

Остановимся в данной работе на случае, когда $\varepsilon_2 = O(1)$ и $\varepsilon_1 = o(\alpha^{-2})$. Рассмотрев коэффициенты при α^0 в (3.9) и (3.10) и, добавив полученные уравнения к (4.4), имеем замкнутую систему относительно $s_{\xi\xi}^{\{0\}}, s_{\xi\zeta}^{\{0\}}, s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}, v_{\xi}^{\{1\}}$:

$$s_{\xi\zeta,\zeta}^{\{0\}} = \varepsilon_2 \xi, \quad -p_{,\zeta}^{\{0\}} + s_{\zeta\zeta,\zeta}^{\{0\}} = 0 \quad (4.5)$$

Первое уравнение (4.5) замыкает систему, а третье служит для определения давления $p^{\{0\}}$.

Решение системы (4.5) следующее:

$$\begin{aligned}
s_{\xi\zeta}^{\{0\}} &= \varepsilon_2 \xi \zeta, & s_{\xi\xi}^{\{0\}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \varepsilon_2^2 \xi^2 \zeta^2}, & s_{\zeta\zeta}^{\{0\}} &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \varepsilon_2^2 \xi^2 \zeta^2} \\
v_{\xi}^{\{1\}} &= -2\sqrt{3} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_2^2 \xi^2 \zeta^2}}{\varepsilon_2 \xi} + f(\xi, \tau)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

где функция $f(\xi, \tau)$ определяется из последующих по α приближений. Заметим, что если формально устремить $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, то компоненты девиатора (4.6) будут стремиться к квазистатическому решению.

Вид функции $v_{\xi}^{\{1\}}$ позволяет сделать следующие выводы:

1. Точно однородным граничным условиям на боковой границе слоя $\xi = 1$ удовлетворить не удается.

2. Когда $|\xi| \rightarrow 0$, т.е. при стремлении к центру слоя, $|v_{\xi}^{\{1\}}| \rightarrow \infty$. Это говорит о потере асимптотичности в смысле Пуанкаре вблизи точки $\xi = 0$ ряда (3.2) для радиальной скорости v_{ξ} .

Из этих выводов следует, что использование асимптотических рядов (3.2) вблизи боковой поверхности $\xi = 1$ слоя, т.е. в зоне краевого эффекта и в центре $\xi = 0$, где происходит перестройка течения, неправомерно. По своей геометрии область неприемимости асимптотического разложения напоминает задачу Прандтля [5].

5. Уравнение для определения формы границы слоя. Обратимся к граничным условиям (3.15) на неизвестной границе слоя $\zeta = \pm\eta(\xi, \tau)$. Порядок малости по α производной $\frac{\partial\eta}{\partial\xi}$ заранее неизвестен. Предположим сначала, что $\frac{\partial\eta}{\partial\xi} \sim 1$, т.е. $\frac{\partial h}{\partial r} \sim \alpha$. Тогда в главном по α приближении

$$\zeta = \pm\eta(\xi, \tau): p^{\{0\}} - s_{\xi\zeta}^{\{0\}} = 0, \quad s_{\xi\xi}^{\{0\}} = 0$$

Но согласно (4.6) компонента $s_{\xi\zeta}^{\{0\}}$ равна нулю только при $\xi = 0$ или при $\eta = 0$. Ни одно из этих уравнений форму границу описывать не может, что говорит о неправомерности предположения $\frac{\partial\eta}{\partial\xi} \sim 1$.

Пусть $\frac{\partial\eta}{\partial\xi} \sim \frac{1}{\alpha}$, т.е. $\frac{\partial h}{\partial r} \sim 1$. Тогда, в главном по α приближении, условия (3.15) имеют вид

$$\zeta = \pm\eta(\xi, \tau): -\alpha s_{\xi\zeta}^{\{0\}} \frac{\partial\eta}{\partial\xi} \pm (-p^{\{0\}} + s_{\xi\xi}^{\{0\}}) = 0, \quad \alpha \frac{\partial\eta}{\partial\xi} (p^{\{0\}} - s_{\xi\xi}^{\{0\}}) \pm s_{\xi\zeta}^{\{0\}} = 0 \tag{5.1}$$

Будем работать только с верхней частью границы $\zeta = \pm\eta(\xi, \tau)$ — т.к. нижнее основание получается отражением относительно плоскости $\zeta = 0$, то в уравнениях (5.1) оставим знак “+”. Исключая $p^{\{0\}}$ из равенств (5.1) и подставляя из (4.6) компоненты девиатора напряжений, получаем нелинейное уравнение первого порядка для определения функции $\eta(\xi, \tau)$:

$$\sqrt{3}\alpha\sqrt{1 - \varepsilon_2^2 \xi^2 \eta^2} \frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \varepsilon_2 \xi \eta \left(1 - \alpha^2 \left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi} \right)^2 \right) \tag{5.2}$$

Необходимо учесть также интегральное условие нормировки (3.5). Частную производную можно заменить на обыкновенную, т.к. время в уравнение входит как параметр через известную функцию ε_2 (3.1).

Для приближенного интегрирования уравнения заметим, что если положить $\varepsilon_2 = 0$, то с учетом (3.5) получим $\eta \equiv 1$, что соответствует слою цилиндрической формы в квазистатическом решении. Представим функцию $\eta(\xi, \tau)$ в виде ряда по ε_2 :

$$\eta(\xi, \tau) = 1 + \varepsilon_2 \eta_1 + \varepsilon_2^2 \eta_2 + \dots, \quad \varepsilon_2 < 1$$

и подставим в (5.2) и интегральное условие (3.5). В линейном приближении по ε_2 для η_1 будем иметь уравнение $\frac{d\eta_1}{d\xi} = \frac{\xi}{\sqrt{3}\alpha}$, откуда после интегрирования и нормировки следует параболическая зависимость

$$\eta = 1 + \frac{\varepsilon_2}{2\sqrt{3}\alpha} \left(\xi^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (5.3)$$

моделирующая утоньшение слоя в центре и утолщение вблизи его боковой поверхности, т.е. шейкообразование при динамическом растяжении.

Найдем последний из неопределенных коэффициентов главного по α приближения (3.2) — давление $p^{\{0\}}$. Из второго уравнения (4.5) следует, что $-p^{\{0\}} + s_{\xi\xi}^{\{0\}}$ не зависит от ξ , а из первого граничного условия (5.1) то, что эта же комбинация на границе равна $\alpha s_{\xi\xi}^{\{0\}} \frac{\partial \eta}{\partial \xi}$. Следовательно всюду в области Ω_τ :

$$p^{\{0\}} = s_{\xi\xi}^{\{0\}} - \alpha s_{\xi\xi}^{\{0\}} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\eta} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \varepsilon_2^2 \xi^2 \tau^2} - \alpha \varepsilon_2 \xi \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \quad (5.4)$$

куда из (4.6) подставлены компоненты $s_{\xi\xi}^{\{0\}}$, $s_{\xi\xi}^{\{0\}}$ девиатора напряжений. В (5.4) входит функция удовлетворяющая дифференциальному уравнению (5.2). В качестве приближенного решения может быть использована аппроксимация квадратичным трехчленом (5.3).

Вернемся к размерным переменным зависящим от r, z, t :

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{Vr}{R} - \frac{2\sqrt{3}V\tau_s}{\rho\dot{V}r} \sqrt{1 - \frac{\rho^2\dot{V}^2 r^2 z^2}{\tau_s^2 R^2}} + Vf(r, t) \frac{h^*}{R} + O((h^*/R)^2) \\ v_z &= -\frac{2Vz}{R} + O((h^*/R)^2) \\ s_{rr} &= \frac{\tau_s}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{\rho^2\dot{V}^2 r^2 z^2}{\tau_s^2 R^2}} + O(h^*/R), \quad s_{zz} = -\frac{2\tau_s}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{\rho^2\dot{V}^2 r^2 z^2}{\tau_s^2 R^2}} + O(h^*/R) \\ s_{rz} &= \frac{\rho\dot{V}rz}{R} + O(h^*/R) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Аппроксимация границы $h(r, t)$ квадратичным трехчленом:

$$h(r, t) = h^* \left(1 + \frac{\rho\dot{V}R}{2\sqrt{3}\tau_s} \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{1}{2} \right) \right), \quad \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\rho\dot{V}h^*r}{\sqrt{3}\tau_s R} \quad (5.6)$$

Используя эту аппроксимацию можем выписать давление p , где h и $\partial h/\partial r$ следует взять из (5.6):

$$p = -\frac{2\tau_s}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{\rho^2\dot{V}^2 r^2 z^2}{\tau_s^2 R^2}} - \frac{\rho\dot{V}r}{R} h \frac{\partial h}{\partial r} + O(h^*/R)$$

Заметим, что в отличие от квазистатики, все исследуемые компоненты тензора напряжений отличны от нуля, в частности, осевое напряжение σ_{zz} имеет вид $\sigma_{zz} \approx \frac{\rho \dot{V}r}{R} h \frac{\partial h}{\partial r}$.

6. Заключение. Таким образом, найдены условия, связывающие безразмерные параметры задачи, при которых необходим учет динамических эффектов. Показано, что переход от квазистатики к динамическому режиму растяжения круглого слоя, характеризующийся достижением ускорения $\dot{V}$ своих критических значений, влечет за собой образование и рост шейки в его центральной части. Параметры напряженно-деформированного состояния и других инерционных эффектов точно или приближенно найдены выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001.
2. Ильюшин А.А. Труды. Т. 4. Моделирование динамических процессов в твердых телах и инженерные приложения. М.: Физматлит, 2009.
3. Георгиевский Д.В. Динамические режимы растяжения стержня из идеально жесткопластического материала // Прикладная механика и техническая физика. 2021. 62. № 5. С. 119–130.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20210513>
4. Цветков И.М. Динамическое растяжение листа из идеально жесткопластического материала. // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2022. № 6. С. 51–60.
5. Georgievskii D.V., Müller W.H., Abali B.E. Thin-layer inertial effects in plasticity and dynamics in the Prandtl problem // ZAMM. 2019. V. 99. № 12. P. 1–11.
<https://doi.org/10.1002/zamm.201900184>
6. Найфэ А.Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с. = Nayfeh A.H. Introduction To Perturbation Techniques. N.Y.: Wiley, 1981.

УДК 539.3

СТАЦИОНАРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ И ИХ РЕШЕНИЕ

© 2023 г. Л. А. Алексеева^{а,*}, Б. Н. Алипова^{б,с,**}

^аИнститут математики и математического моделирования,
Алматы, Казахстан

^бУниверситет Кентукки, Лексингтон, США

^сМеждународный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан

*e-mail: alexeeva@math.kz

**e-mail: alipova.bakhyt@gmail.com

Поступила в редакцию 07.09.2022 г.

После доработки 15.10.2022 г.

Принята к публикации 17.10.2022 г.

С использованием модели связанной термоупругости, решены краевые задачи динамики термоупругого полупространства в условиях плоской деформации при периодических поверхностных силовых и тепловых воздействиях, связанных с искомыми граничными функциями линейными алгебраическими соотношениями. Для поставленных краевых задач построены тензоры Грина, используя их свойства, получены аналитические решения этих задач. Для их решения использовался метод неполного разделения переменных, преобразование Фурье и свойства фундаментальных решений. Представленный алгоритм дает решение классических четырех краевых задач термоупругости, а также неклассических со связанными тепловыми и силовыми характеристиками на границе полуплоскости.

Ключевые слова: связанная термоупругость, термонапряженное состояние, периодические краевые задачи, линейно-связанные краевые условия, аналитическое решение

DOI: 10.31857/S0572329922600827, **EDN:** QXHRRR

1. Введение. Среди существующих теорий термоупругости наиболее развитыми для приложений являются теория температурных напряжений (несвязанная термоупругость) и теория связанной термоупругости (СТУ), которые наиболее разработаны в трудах Новацкого В. [1, 2]. В этих теориях система дифференциальных уравнений, описывающая динамику термоупругой среды, является смешанной системой гипербола-параболического типа. В связи со сложностью построения решений такой системы, обычно уравнения упрощают, пренебрегая воздействием упругих деформаций на температурное поле среды (несвязанная термоупругость). Для такой модели, которая получила название теории температурных напряжений (ТТН), вначале определяется температурное поле, решая параболическое уравнение теплопроводности, а затем можно определить перемещения или скорости точек среды, используя классические уравнения динамики упругого тела, в которые градиент температурного поля входит как массовая сила. Отметим, что на основе этой теории проводятся расчеты температурных напряжений при проектировании различных сооружений и конструкций с использованием как аналитических, так и вычислительных разностных и конечно-элементных методов.

В случае связанной термоупругости (СТУ) не только температура влияет на напряженное состояние среды, но и деформации среды меняют ее температурное поле, что характерно для реальных материалов при высокочастотных деформациях. Это делает теорию температурных напряжений непригодной для изучения высокочастотных термодинамических процессов в телах и средах и требует разработки эффективных методов и алгоритмов решения различных краевых задач связанной термоупругости.

В работах Новацкого В. и др. построены частные решения уравнений СТУ, описывающие плоские, цилиндрические и сферические термоупругие волны и ряд краевых задач. В работах Купрадз В.Д. и других [3], на основе теории потенциала разработан метод граничных интегральных уравнений (МГИУ) для решения краевых задач связанной термоупругости в пространстве преобразования Лапласа по времени. МГИУ для решения плоских краевых задач связанной термоупругости разработан в [4, 5], а также авторами в [6, 7]. Класс аналитически решенных краевых задач связанной термоупругости невелик и разработка эффективных методов их решения весьма актуальна.

В работе [7] авторами построены фундаментальные и обобщенные решения уравнений движения термоупругой полуплоскости со свободной от напряжений и тепловых потоков границей. Здесь разработан единый алгоритм для решения ряда краевых задач (КЗ) динамики термоупругого полупространства при действии произвольных периодических по времени силах и тепловых потоках на его поверхности, в том числе сингулярных из класса обобщенных функций медленного роста. Постановка краевой задачи, при соответствующем выборе коэффициентов в граничных условиях, включает в себя известные четыре краевые задачи термоупругости, когда из четырех характеристик процесса на поверхности: перемещения, напряжения, температура и тепловой поток — заданы две, одна из которых — тепловая. Для таких краевых задач ранее нами доказаны теоремы единственности, в том числе с учетом ударных термоупругих волн [9–10]. Здесь построено решение для широкого класса краевых условий, линейно связывающих эти четыре характеристики процесса на границе.

2. Уравнения движения термоупругой среды. Изотропная термоупругая среда характеризуется конечным числом положительных термодинамических параметров [4]: массовой плотностью ρ , упругими постоянными Ламе λ и μ , а также термоупругими константами γ , η и κ . Уравнения движения и температурного поля термоупругой среды в декартовой системе координат описывается системой гиперболо-параболических уравнений вида [1, 2]:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} - \gamma \theta_{,i} + F_i &= \rho \dot{u}_i \\ \Delta \theta - \kappa^{-1} \dot{\theta} - \eta \dot{u}_{j,j} + \kappa^{-1} Q &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь u_j , σ_{ij} — компоненты вектора смещений и тензора напряжений термоупругой среды, $u_{N+1} = \theta$ — температура: $\theta = T - T_0$, где T_0 — температура свободного состояния среды, при которой определены ее параметры; F_i — компоненты массовой силы, Q — мощность теплового источника. Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование (тензорная свертка) от 1 до N . При плоской деформации $N = 2$, в общем случае $N = 3$. Тензор термоупругих напряжений σ_{ij} связан с перемещением u и температурой θ законом Дюамеля–Неймана:

$$\sigma_{ij} = (\lambda u_{k,k} - \gamma \theta) \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.2)$$

Везде символом после запятой обозначены частные производные по координатам: $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$, а точкой над символом — дифференцирование по времени: $\dot{u} = \partial u / \partial t$, δ_{ij} — символ Кронекера. Здесь рассмотрим случай плоской деформации ($N = 2$). Далее используем обозначения: $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ — это скорости распростране-

ния дилатационных и сдвиговых волн в упругой среде той же плотности и с теми же параметрами Ламе, $\tilde{\gamma} = \gamma/\rho$.

3. Постановка стационарных краевых задач для термоупругой полуплоскости. Рассматривается термоупругая полуплоскость $S^- = \{(x_1, x_2) = x \in R^2 : x_1 < 0\}$, $n(x_2) = (1, 0)$ – внешняя нормаль к границе полуплоскости. Обозначим действующие на ее границе $S = \{(0, x_2) : |x_2| < \infty\}$ напряжения $F^S(x, t)$ и тепловые потоки $Q^S(x, t)$, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} F^S(x_2, t) &= \sigma_{jl}(x, t)|_{x_1=0} e_j = p_j(x_2, t) e_j \\ Q^S(x, t) &= \kappa \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = q(x_2, t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Массовые силы и внутренние тепловые источники отсутствуют:

$$F_i(x, t) = 0, \quad i = 1, 2 \quad Q(x, t) = 0 \quad (3.2)$$

Среди действующих нагрузок и тепловых потоков особенно распространены периодические по времени, которые можно разложить в конечные или бесконечные ряды Фурье:

$$p_j(x_2, t) = \sum_n a_{jn} p_{jn}(x_2) e^{-i\omega_n t}, \quad q(x_2, t) = \sum_n b_n q_n(x_2) e^{-i\omega_n t} \quad (3.3)$$

Период колебания $T_n = 2\pi/\omega_n$ каждой гармоник кратен основному периоду колебания T . При периодических воздействиях решение задачи (перемещения и температура) представимы в виде аналогичного ряда Фурье:

$$u_j(x, t) = \sum_n c_{nj} u_{nj}(x) e^{-i\omega_n t}, \quad \theta(x, t) = \sum_n d_n \theta_n(x) e^{-i\omega_n t} \quad (3.4)$$

Требуется построить решение уравнений (2.1), удовлетворяющее линейно связанным граничным условиям вида:

$$\alpha_{kj} u_j + \alpha_{k(3)} \theta + \beta_{kj} p_j + \beta_{k(3)} q = f_k(x_2, t), \quad k = 1, 2 \quad (3.5)$$

Здесь $f_k(x_2, t)$ – регулярная периодическая по времени функция с тем же периодом T . Предполагается, что комплексные амплитуды гармоник ряда из класса обобщенных функций медленного роста [11]. Также должны выполняться условия затухания решения на бесконечности: при $\|x\| \rightarrow \infty$

$$u_i(x, t) \rightarrow 0, \quad i = 1, 2 \quad \theta(x, t) \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

Отметим, что граничные условия (3.5) включают в себя постановку четырех классических краевых задач (КЗ) термоупругости соответствующим выбором коэффициентов матриц α, β . В частности, ненулевые компоненты для них будут иметь следующий вид:

КЗ 1: заданы перемещения $u_i(x, t)$ и температура $\theta(x, t)$ на границе, тогда

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1$$

КЗ 2: заданы напряжения $p_j(x, t)$ и тепловой поток $q(x, t)$ на границе:

$$\beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{33} = 1$$

КЗ 3: заданы перемещения $u_i(x, t)$ и тепловой поток $q(x, t)$ на границе:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1, \quad \beta_{33} = 1$$

КЗ 4: заданы напряжения $p_j(x, t)$ и температура $\theta(x, t)$ на границе:

$$\beta_{11} = \beta_{22} = 1, \quad \alpha_{33} = 1$$

Очевидно, что варьирование коэффициентов матриц (3.5) дает возможность строить решения многих неклассических краевых задач. Здесь мы рассмотрим общий случай граничных условий вида (3.5).

4. Гармонические колебания. Постановка задач для комплексных амплитуд. В силу линейности уравнений решение краевой задачи можно строить в виде ряда Фурье (3.4), если известно решение периодической краевой задачи для каждой гармоники ряда с краевыми условиями:

$$\alpha_{kj}u_j + \alpha_{k3}\theta + \beta_{kj}p_j + \beta_{k3}q = f_k(x_2)e^{-i\omega t} \quad \text{при} \quad x_1 = 0 \quad (4.1)$$

Предположим здесь, что при $|x_2| \rightarrow \infty$

$$f_k(x_2) \sim o(|x_2|^{-1}), \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

Решение задачи для каждой гармоники ряда будем искать в аналогичном виде:

$$u(x, t) = u(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \quad \theta(x, t) = \theta(x_1, x_2)e^{-i\omega t}$$

Требуется определить комплексные амплитуды перемещений и температуры $u(x), \theta(x)$, которые затухают на бесконечности:

$$\text{при} \quad \|x\| \rightarrow \infty \quad u_i(x) \rightarrow 0 \quad i = 1, 2 \quad \theta(x) \rightarrow 0 \quad (4.3)$$

и удовлетворяют определенным условиям излучения, о которых мы скажем ниже. Построим решение этой задачи.

5. Тензор Грина краевой задачи для термоупругой полуплоскости. Для решения этой задачи построим тензор Грина для термоупругой полуплоскости

$$V_i^k(x, t) = V_i^k(x_1, x_2)\exp(-i\omega t)$$

Его комплексная амплитуда $V_i^k(x)$ должна удовлетворять однородным стационарным уравнениям термоупругости:

$$\begin{aligned} L_{ij}(\partial_1, \partial_2)V_j^k(x_1, x_2) &= 0 \\ L_{3j}(\partial_1, \partial_2)V_j^k(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$L_{3j}(\partial_1, \partial_2)V_j^k(x_1, x_2) = 0, \quad i = 1, 2 \quad j, k = 1, 2, 3,$$

где дифференциальные операторы, как следует из (2.1), имеют вид:

$$\begin{aligned} L_{ij}(\partial_1, \partial_2) &= (\lambda + \mu)\partial_i\partial_j + (\mu\Delta - \rho\omega^2)\delta_{ij} - \gamma\delta_{j3}\partial_i \\ L_{3j}(\partial_1, \partial_2) &= (\Delta + i\omega\kappa^{-1})\delta_{j3} + i\omega\eta(1 - \delta_{j3})\partial_j \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа. Обозначим Σ_{ij}^m — тензор напряжений, порождаемый тензором V , который определяется законом Дюамеля—Неймана:

$$\Sigma_{ij}^m(x_1, x_2) = \lambda V_{k,k}^m\delta_{ij} - \gamma V_3^m\delta_{ij} + \mu(V_{i,j}^m + V_{j,i}^m), \quad j = 1, 2 \quad (5.3)$$

Соответствующие ему напряжения в точке x на площадке с нормалью $n(x)$ вычисляются по формуле:

$$\begin{aligned} \Gamma_i^m(x_1, x_2, n) &= \Sigma_{ij}^m n_j = D_{ik}(n, \partial_1, \partial_2)V_k^m \\ D_{ik}(n, \partial_1, \partial_2) &= \lambda n_i\delta_{jk}\partial_j - \gamma n_i\delta_{3k} + \mu n_j\delta_{ki}\partial_j + \mu n_k\partial_i \end{aligned}$$

Соответствующий тепловой поток на площадке

$$\Gamma_3^m(n, x_1, x_2) = \kappa n_k \delta_{j3} \partial_k V_j^m$$

На свободной поверхности $n = (1, 0)$ этот тензор порождает термоупругие напряжения и тепловой поток с амплитудами:

$$\Sigma_{il}^m(n, 0, x_2) = (\lambda V_{k,k}^m - \gamma V_3^m) \delta_{il} + \mu (V_{i,1}^m + V_{1,i}^m) = \Gamma_i^m(n, 0, x_2) \quad (5.4)$$

$$\kappa \frac{\partial V_3^m}{\partial x_1} = \Gamma_3^m(n, x_1, x_2) \quad (5.5)$$

Тензор Грина, согласно (3.5), будет удовлетворять следующим условиям на поверхности полуплоскости:

$$\begin{aligned} \alpha_{kj} V_j^m(0, x_2) + \alpha_{k3} V_3^m(0, x_2) + \beta_{kj} \Gamma_j^m(x_2) + \beta_{k3} \Gamma_3^m(x_2) &= \delta_k^m \delta(x_2) \\ B_{kj}(n, \partial_1, \partial_2) V_j^m &= \delta_k^m \delta(x_2) \\ (\alpha_{kj} + \alpha_{k3} \delta_{3j} + \beta_{kl} D_{lj}(n, \partial_1, \partial_2) + \beta_{k3} \delta_{j3} \partial_1) V_j^m &= \delta_k^m \delta(x_2) \\ k, j, m &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Здесь $B_{kj}(n, \partial_1, \partial_2) = \alpha_{kj} + \alpha_{k3} \delta_{3j} + \beta_{kl} D_{lj}(n, \partial_1, \partial_2) + \beta_{k3} \delta_{j3} \partial_1$. Тензор Грина также должен удовлетворять условиям затухания на бесконечности:

$$V_i^m(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \rightarrow \infty \quad (5.7)$$

и определенным условиям излучения, описывающим волны, исходящие от границы полуплоскости, которые приведем далее.

6. Построение тензора Грина краевой задачи. Для построения тензора Грина используем преобразование Фурье по горизонтальной координате ($x_2 \leftrightarrow \xi$) в уравнениях (5.3)–(5.4). Поскольку при преобразовании Фурье производных $\partial/\partial x_2 \leftrightarrow -i\xi$ [12], в результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для трансформант Фурье амплитуд колебаний:

$$\begin{aligned} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{d^2}{dx_1^2} - \mu \xi^2 + \rho \omega^2 \right] \bar{V}_1^k + i \xi (\lambda + 9\mu) \frac{d \bar{V}_2^k}{dx_1} - \gamma \frac{d \bar{V}_3^k}{dx_1} &= 0 \\ i(\lambda + \mu) \frac{d}{dx_1} \xi^2 \bar{V}_1^k + \left[-(\lambda + 2\mu) \xi^2 + \mu \frac{d^2}{dx_1^2} + \rho \omega^2 \right] \bar{V}_2^k - i \gamma \xi \bar{V}_3^k &= 0 \\ i \eta \omega \frac{d}{dx_1} \bar{V}_1^k + \eta \omega \xi \bar{V}_2^k + \left(\frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{i \omega}{\kappa} - \xi^2 \right) \bar{V}_3^k &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Граничные условия (5.6) примут вид: при $x_1 = 0$

$$B_{lk}(\partial_1, -i\xi) \bar{V}_k^m(x_1, \xi) = \delta_l^m \quad l, m, j = 1, 2, 3 \quad (6.2)$$

где $\bar{V}_j^m(x_1, \xi)$ – трансформанта Фурье по x_2 тензора $V_j^m(x_1, x_2)$ при фиксированном m . Для регулярных $f(x_1, x_2)$ они связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{f}(x_1, \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) \exp(ix_2 \xi) dx_2 \\ f(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x_1, \xi) \exp(-ix_2 \xi) d\xi \end{aligned} \quad (6.3)$$

Как известно, частные решения однородной системы (6.1) можно искать в виде:

$$\bar{V}^m(x_1, \xi) = v^m(k) \exp(kx_1) \quad (6.4)$$

где k – корень характеристического уравнения этой системы. Подставляя (6.4) в (6.1), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных $v^m(k)$:

$$\begin{bmatrix} c_1^2 k^2 + \omega^2 - c_2^2 \xi^2 & i(c_1^2 - c_2^2) \xi k & -\tilde{\gamma} k \\ i(c_1^2 - c_2^2) \xi k & \omega^2 - c_1^2 \xi^2 + c_2^2 k^2 & -i\tilde{\gamma} \xi \\ i\omega \eta k & \eta \omega \xi & k^2 - \xi^2 + i\omega \varkappa^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1^m(k) \\ v_2^m(k) \\ v_3^m(k) \end{bmatrix} = 0 \quad (6.5)$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид алгебраического уравнения для детерминанта матрицы системы (6.5):

$$\det(\xi) = \det[L_{kj}(k, -i\xi)] = 0 \quad (6.6)$$

приводится к виду:

$$c_2^2 \left(\xi^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} \right) \left\{ \left(\xi^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} \right) \left(\xi^2 - \frac{i\omega}{\varkappa} \right) - \xi^2 \frac{i\omega \varepsilon}{\varkappa} \right\} = 0$$

$$\xi^2 = \xi^2 - k^2 \Rightarrow k^2 = \xi^2 - \xi^2$$

Здесь $\varepsilon = \gamma \eta \varkappa / (\lambda + 2\mu)$. Отсюда получаем два действительных корня характеристического уравнения

$$k_1(\xi, \omega) = \pm \sqrt{\xi^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}} \quad (6.7)$$

Затем вычисляем четыре комплексных корня биквадратного уравнения:

$$\left(\xi^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} \right) \left(\xi^2 - \frac{i\omega}{\varkappa} \right) - \frac{i\omega \varepsilon}{\varkappa} \xi^2 = 0$$

квадраты которых имеют вид:

$$k_2^2 = \xi^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{i\omega(1+\varepsilon)}{\varkappa} + \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{i\omega(1+\varepsilon)}{\varkappa} \right)^2 - \frac{4i\omega^3}{\varkappa c_1^2}} \right] \quad (6.8)$$

$$k_3^2 = \xi^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{i\omega(1+\varepsilon)}{\varkappa} - \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{i\omega(1+\varepsilon)}{\varkappa} \right)^2 - \frac{4i\omega^3}{\varkappa c_1^2}} \right] \quad (6.9)$$

В силу однородности система уравнений имеет ненулевые решения лишь при $k = k_j$. При этом при выборе корней необходимо, чтобы

$$\operatorname{Re} k_j(\xi, \omega) > 0, \quad \operatorname{Im} k_j \leq 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (6.10)$$

Первое условие обеспечивает затухание решения по глубине при $x_1 \rightarrow -\infty$. Второе условие описывает волны, движущиеся от границы, волновой вектор которых должен по оси X_1 иметь отрицательную составляющую. Условия (6.10) являются условиями излучения для поставленной краевой задачи.

Рассмотрим решения линейной однородной системы уравнений (6.6) при $k = k_j$:

$$\begin{bmatrix} c_1^2 k_j^2 + \omega^2 - c_2^2 \xi^2 & i(c_1^2 - c_2^2) \xi k_j & -\tilde{\gamma} k_j \\ i(c_1^2 - c_2^2) \xi k_j & \omega^2 - c_1^2 \xi^2 + c_2^2 k_j^2 & -i\tilde{\gamma} \xi \\ i\omega \eta k_j & \eta \omega \xi & k_j^2 - \xi^2 + i\omega \kappa^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1^m(k_j) \\ v_2^m(k_j) \\ v_3^m(k_j) \end{bmatrix} = 0$$

В силу линейной зависимости уравнений, достаточно рассмотреть два первых уравнения, полагая $v_3^m(k_j) = 1$:

$$\begin{bmatrix} c_1^2 k_j^2 + \omega^2 - c_2^2 \xi^2 & i(c_1^2 - c_2^2) \xi k_j \\ i(c_1^2 - c_2^2) \xi k_j & \omega^2 - c_1^2 \xi^2 + c_2^2 k_j^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1^m(k_j) \\ v_2^m(k_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\gamma} k_j \\ i\tilde{\gamma} \xi \end{bmatrix}$$

Ее решение, согласно правилу Крамера, имеет вид:

$$v_1^m(k_j(\xi, \omega)) = v_{1(j)}^m(\xi, \omega) = \frac{\Delta_{j1}(\xi, \omega)}{\Delta_j(\xi, \omega)}$$

$$v_2^m(k_j(\xi, \omega)) = v_{2(j)}^m(\xi, \omega) = \frac{\Delta_{j2}(\xi, \omega)}{\Delta_j(\xi, \omega)}$$

$$\Delta_j(\xi, \omega) = \det \begin{bmatrix} c_1^2 k_j^2 + \omega^2 - c_2^2 \xi^2 & i(c_1^2 - c_2^2) \xi k_j \\ i(c_1^2 - c_2^2) \xi k_j & \omega^2 - c_1^2 \xi^2 + c_2^2 k_j^2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{j1}(\xi, \omega) = \det \begin{bmatrix} \tilde{\gamma} k_j & i(c_1^2 - c_2^2) \xi k_j \\ i\tilde{\gamma} \xi & \omega^2 - c_1^2 \xi^2 + c_2^2 k_j^2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{j2}(\xi, \omega) = \det \begin{bmatrix} c_1^2 k_j^2 + \omega^2 - c_2^2 \xi^2 & \tilde{\gamma} k_j \\ i(c_1^2 - c_2^2) \xi k_j & i\tilde{\gamma} \xi \end{bmatrix}$$

В результате получим три линейно-независимых решения:

$$\bar{V}_{1(j)}^m = \frac{\Delta_{j1}(\xi, \omega)}{\Delta_j(\xi, \omega)} \exp(x_1 k_j(\xi, \omega))$$

$$\bar{V}_{2(j)}^m = \frac{\Delta_{j2}(\xi, \omega)}{\Delta_j(\xi, \omega)} \exp(x_1 k_j(\xi, \omega)) \quad (6.11)$$

$$\bar{V}_{3(j)}^m = \exp(x_1 k_j(\xi, \omega)), \quad j = 1, 2, 3$$

Следовательно, решение уравнений (6.1), удовлетворяющее, условиям излучения на бесконечности, имеет вид:

$$\bar{V}_{k(j)}^m(x_1, \xi, \omega) = \sum_{j=1}^3 A_j^{[m]} v_{k(j)}^m(\xi, \omega) \exp(ik_j x_1), \quad k = 1, 2, 3 \quad (6.12)$$

Здесь $A_j^{[m]}$ — произвольные величины (по индексу в квадратных скобках нет тензорной свертки). Для их определения имеем три граничных условия на свободной поверхности (6.2). Подставляя в них (6.12), получим линейную систему из трех уравнений для определения $A_j^{[m]}$ при фиксированном m :

$$\sum_{j=1}^3 A_j^{[m]} \sum_{k=1}^3 B_{lk}(k_j, -i\xi) v_{k(j)}^m(\xi, \omega) = \delta_l^m, \quad l, m = 1, 2, 3$$

Обозначим

$$b_{lj}^m(\xi, \omega) = \sum_{k=1}^3 B_{lk}(k_j, -i\xi) v_{k(j)}^m(\xi, \omega) \quad (6.13)$$

Тогда система уравнений (6.13) и ее решение имеют следующий вид:

$$\sum_{j=1}^3 b_{lj}^m(\xi, \omega) A_j^{[m]} = \delta_l^m, \quad l, j = 1, 2, 3 \quad (6.14)$$

$$A_j^{[m]}(\xi, \omega) = \frac{\det[a_{lj}^{[m]}]}{\det[b_{lj}^{[m]}(\xi, \omega)]}$$

Матрицы $[a_{lj}^{[m]}]$ получаем из матрицы $[b_{lj}^{[m]}(\xi, \omega)]$ заменой j -го столбца на $(\delta_1^m, \delta_2^m, \delta_3^m)^T$. Такую процедуру следует сделать для каждого $m = 1, 2, 3$.

Таким образом, для вычисления трансформанты тензора Грина $\bar{V}_j^m$ поставленной краевой задачи все искомые функции найдены. Переходя к его оригиналу, получим искомый тензор Грина для термоупругого полупространства:

$$V_k^m(x_1, x_2, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} A_j^{[m]}(\xi, \omega) v_{k(j)}^m(\xi, \omega) \exp(ik_j(\xi, \omega)x_1 - i\xi x_2) d\xi \quad (6.15)$$

7. Решение краевых задач для термоупругой полуплоскости. Свойство тензора Грина позволяет построить решение задач стационарных колебаний при произвольных $f_k(x_2)$ в краевых условиях (4.1), удовлетворяющих условиям (4.2). Оно имеет вид тензорно-функциональной свертки

$$u_i(x_1, x_2) = V_i^k(x_1, x_2) *_{x_2} F_k^S(x_2) + V_i^3(x_1, x_2) *_{x_2} Q^S(x_2) \\ \theta(x_1, x_2) = V_3^k(x_1, x_2) *_{x_2} F_k^S(x_2) + V_3^3(x_1, x_2) *_{x_2} Q^S(x_2), \quad i, k = 1, 2 \quad (7.1)$$

Здесь берется тензорная свертка по повторяющимся индексам и неполная свертка по x_2 , которая имеет следующее интегральное представление:

$$f(x_1, x_2) *_{x_2} g(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2 - y) g(y) dy \quad (7.2)$$

При сингулярных воздействиях на дневной поверхности свертки берутся согласно определению свертки в пространстве обобщенных функций [13].

Свертка этого тензора с распределенными или сосредоточенными источниками различного типа позволяет исследовать процессы распространения термоупругих волн при различных динамических воздействиях в термоупругом полупространстве.

8. Заключение. Формулы (7.1) позволяют моделировать динамику термоупругого полупространства при плоской деформации для широкого класса силовых и тепловых воздействий на его поверхности. Операторный метод решения краевых задач, который здесь использовался, значительно упрощает процесс алгоритмизации и программирования краевых задач для проведения компьютерных экспериментов.

Разработанный алгоритм дает решение и нестационарных краевых задач термоупругой полуплоскости. В этом случае построенное решение является преобразованием Фурье по времени нестационарной краевой задачи с нулевыми начальными условиями и произвольными нестационарными возмущениями на границе полупространства (допускающими такое преобразование). Обратное преобразование Фурье по времени построенного решения дает решение нестационарной задачи.

Полученные решения позволяют исследовать термонапряженное состояние массива при действии источников сейсмических волн естественного и искусственного про-

исхождения как на поверхности, так и внутри массива. При внутренних источниках возмущений нужно сначала решить задачу Коши для термоупругого пространства, используя тензор Грина уравнений связанной термоупругости [10]. А затем искать решение исходной задачи в виде суммы этого решения с построенным в этой статье, при заданных граничных условиях с учетом добавки от решения задачи Коши.

Для моделирования сейсмических процессов при землетрясениях, наземных и подземных взрывах полезно использовать аппарат теории обобщенных функций, с использованием моделей импульсных и сосредоточенных источников в телах и средах, представленных в [13]. Поэтому разработанные в этих двух статьях алгоритмы решения должны найти инженерные приложения в задачах геофизики и сейсмостойкого строительства при проектировании наземных и подземных сооружений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
2. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
3. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Бачелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 664 с.
4. *Dargush G.E., Banerjee P.K.* Boundary element methods in three-dimensional thermoelasticity // Int. J. Solid Struct. 1990. V. 26. № 2. P. 199–216.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(90\)90052-W](https://doi.org/10.1016/0020-7683(90)90052-W)
5. *Sah J., Tasaka N.* Boundary element analysis of linear coupled thermoelasticity problems by using Laplace transformation // Proc 1st. Japan-U.S. Symp. on BEM. Oxford, New York: Pergamon Press, 1988. P. 535–544.
6. *Алексеева Л.А., Купцова Б.Н.* Метод обобщенных функций в краевых задачах связанной термоэластодинамики // Прикл. мат. мех. 2001. Т. 65. № 2. С. 334–345.
7. *Alexeyeva L.A., Alipova B.N.* Fundamental and generalized solutions of the equations of motion of a thermoelastic half-plane with a free boundary // Computat. Math. Math. Phys. 2019. V. 59. № 5. P. 782–790.
8. *Alexeyeva L.A., Dadayeva A.N.* Shock thermoelastic waves as generalized solutions of thermoelasticity equations // ISAAC 9-th Congress: Abstracts. Krakow, Poland, 2013. P. 19–20.
9. *Алексеева Л.А., Дадаева А.Н.* О единственности решений краевых задач термоупругости с учетом термоударных волн // Вест. КазНТУ им. К. Сатпаева. Сер.: Мат. мех. инф. 2013. № 28. С. 11–18.
10. *Alexeyeva L.A., Alipova B.N., Dadayeva A.N.* Shock waves as generalized solutions of thermoelastodynamics equations. On the uniqueness of boundary value problems solutions // Am. Inst. Phys. Conf. Proc. 2017. V. 1798. P. 020003-1-020003-8.
<https://doi.org/10.1063/1.4972595>
11. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
12. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
13. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.

УДК 539.32

ТЕНЗОРЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОМПОНЕНТАМИ В ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЯХ ГЕМИТРОПНОГО МИКРОПОЛЯРНОГО ТЕЛА

© 2023 г. Ю. Н. Радаев^{a,*}

^aИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

* e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Поступила в редакцию 13.03.2023 г.

После доработки 06.04.2023 г.

Принята к публикации 21.04.2023 г.

В статье рассматриваются упругие потенциалы и определяющие уравнения механики анизотропных микрополярных тел, кинематика которых может быть задана двумя независимыми векторными полями: контравариантным полем трансляционных перемещений и контравариантным псевдовекторным полем микроповоротов веса +1. Квадратичный потенциал напряжений представлен с помощью трех определяющих тензоров четвертого ранга, два из которых имеют псевдотензорную природу и им можно приписать веса -2 и -1 . Такое тело полностью задается 171-м микрополярным упругим модулем. Основное внимание сфокусировано на модели гемитропного (полуизотропного, демитропного) микрополярного упругого тела, характеризующегося девятью определяющими постоянными. Компоненты определяющего псевдотензора веса -1 оказываются чувствительными к преобразованиям зеркального отражения в трехмерном пространстве. Исследована своеобразная алгебраическая структура определяющих тензоров гемитропного тела, точнее, их абсолютных аналогов, получающихся умножением на целые степени псевдоскалярной единицы. Показано, что указанные тензоры всегда могут быть сконструированы из изомеров (изомера) тензора с постоянными компонентами (вообще не чувствительного ни к каким преобразованиям координатной системы) и одного дополнительного тензора четвертого ранга, сконструированного, в свою очередь, из компонент метрического тензора.

Ключевые слова: микрополярное тело, потенциал напряжений, полуизотропное тело, определяющий тензор, зеркальное отражение, изомер

DOI: 10.31857/S057232992370006X, EDN: PHNOCG

1. Предварительные сведения и вводные замечания. В теоретическом плане кинематика микрополярного континуума основана на трех основных результатах, касающихся перемещений абсолютно твердых тел в трехмерном пространстве.

В 1776 г. Эйлером (L. Euler) была установлена знаменитая теорема о перемещении абсолютно твердого тела с одной закрепленной точкой [1, с. 104]: произвольное перемещение абсолютно твердого тела с закрепленной точкой представляет собой конечный поворот относительно оси, проходящей через точку закрепления. В 1830 г. Шалем (M. Chasles) была доказана следующая теорема: самое общее перемещение твердого тела в пространстве складывается из поступательного перемещения, при котором произвольно выбранный полюс перемещается из своего первоначального положения в конечное, и конечного поворота относительно некоторой оси, проходящей через

этот полюс¹. Наконец винтовая теорема Моцци (G. Mozzi, 1763) – Коши–Шаля (приписываемая в [1, с. 109] Шалю, несмотря на имеющиеся более ранние доказательства, данные Моцци и Коши) гласит: произвольное перемещение абсолютно твердого тела в пространстве может быть осуществлено путем поступательного перемещения вдоль некоторого направления и вращения относительно оси, заданной указанным направлением, т.е. произвольное перемещение абсолютно твердого тела в пространстве реализуется как винтовое, а ось называется винтовой осью.

Из двух теорем Шаля по-существу только первая применялась при формулировках основных положений линейной микрополярной теории упругости, начиная с исторически первой работы [2]. До настоящего времени не предпринималось попыток использовать при математическом моделировании микрополярного континуума винтовую кинематику Шаля, соответствующую его винтовой теореме. Поэтому в конвенциональных микрополярных теориях механики деформируемых сред² помимо поля трансляционных перемещений приходится оперировать с независимыми от трансляций микроповоротами, которые наиболее просто представляются псевдовекторами (в частности, контравариантами псевдовекторами веса +1). В свою очередь, алгебра псевдотензоров развивается, исходя из фундаментальных понятий, связанных с перенумерацией координатных направлений, ориентации пространства и псевдоскалярных единиц, степени которых позволяют достаточно просто трансформировать произвольный псевдотензор в абсолютный тензор. Заметим, что необходимые для понимания настоящей работы сведения по теории псевдотензоров излагаются, например, в монографии [4].

Представляемая работа посвящена определяющим тензорам (псевдотензорам) гемитропного микрополярного упругого тела, вводимым в модель с помощью квадратичного потенциала напряжений. Компоненты одного из трех определяющих псевдотензоров оказываются чувствительными к преобразованиям зеркального отражения в трехмерном пространстве и, тем самым, обеспечивается зависимость механического состояния гемитропного тела от ориентации трехмерного пространства. Исследована своеобразная алгебраическая структура определяющих тензоров гемитропного тела, точнее, их абсолютных аналогов, получающихся умножением на целые степени псевдоскалярной единицы. Показано, что указанные тензоры всегда могут быть сконструированы из изомеров (изомера) тензора четвертого ранга с постоянными компонентами (вообще не чувствительного ни к каким преобразованиям координатной системы) и одного дополнительного тензора четвертого ранга, сконструированного, в свою очередь, из компонент метрического тензора.

Несмотря на то, что два из трех определяющих гемитропное тело тензоров на самом деле являются псевдотензорами, изложение удастся провести в основном в терминах абсолютных тензоров, опираясь при этом на свойства степеней псевдоскалярных единиц. Такой подход был принят в статье [5], где в более или менее современном стиле реализовано построение модели линейного гемитропного тела, исходя из принципа виртуальных перемещений. Дальнейшее развитие теории было выполнено в работах [6–10]. Внимание к этой модели обусловлено потенциально широким кругом ее приложений к актуальным для всей механики деформируемого твердого тела проблемам.

2. Псевдотензоры и псевдоскаляры, связанные с ориентацией трехмерного пространства. Рассмотрим, прежде всего, основные понятия, относящиеся к представлению об ориентации плоского трехмерного пространства. Ориентировать пространство можно различными способами, разделив их на право- и левоориентированные. В частности, задание ориентации плоского пространства может быть выполнено той или иной схе-

¹ Разложение перемещения абсолютно твердого тела на поступательное и поворот не является единственным: положение полюса можно поменять (при этом изменятся направление и длина поступательного перемещения), а направление оси поворота и угол поворота при этом не зависят от выбора полюса.

² Достаточно полное изложение микрополярной теории упругости имеется в монографии [3].

мой нумерации трех линейно независимых прямолинейных осей³. Транспозиция номеров в схеме нумерации будет означать переход от одной ориентации к другой.

Символы перестановок (альтернирующие символы) в трехмерном пространстве определяются согласно

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если } i, j, k = 123, 231, 312 \\ -1, & \text{если } i, j, k = 132, 213, 321 \\ 0, & \text{во всех остальных случаях} \end{cases}$$

Как известно, символы перестановок являются одновременно ковариатным псевдотензором третьего ранга веса -1 и контравариантным псевдотензором третьего ранга веса $+1$, т.е. на основании их определения справедливо следующее равенство

$$\epsilon_{lsk}^{[-1]} = \epsilon^{lsk^{[+1]}}$$

которое нарушает принятые в псевдотензорной алгебре соглашения о балансе индексов и равенстве весов равных друг другу псевдотензоров. Приведенное равенство является проявлением особого статуса символов перестановок⁴.

Координатные направления в плоском трехмерном пространстве зададим с помощью трех базисных векторов $\mathbf{z}_s$ ($s = 1, 2, 3$), образующих ковариантный базис (локальный, если речь идет о полевых представлениях). Локальный контравариантный базис $\mathbf{z}^s$ ($s = 1, 2, 3$) однозначно определяется следующими соотношениями

$$\mathbf{z}^s \cdot \mathbf{z}_k = \delta_s^k \quad (k = 1, 2, 3; s = 1, 2, 3)$$

Предполагая далее заданными скалярное и векторное произведение двух векторов, введем фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр (веса $+1$):

$$e = \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{z}_2 \times \mathbf{z}_3)$$

и две псевдоскалярные единицы

$$\overset{[+1]}{1} = e, \quad \overset{[-1]}{1} = e^{-1} \quad (2.1)$$

Ориентации координатных систем в таком случае находятся по знаку первой из псевдоскалярных единиц:

$$\overset{[+1]}{1} > 0$$

для правоориентированного координатного базиса,

$$\overset{[+1]}{1} < 0$$

для левоориентированного координатного базиса.

Введем также целые степени g псевдоскалярных единиц, полагая

$$\overset{[g]}{1} = (\overset{[+1]}{1})^g$$

$$\overset{[-g]}{1} = (\overset{[-1]}{1})^g$$

³ Ясно, что в этом случае можно также говорить об ориентации координатной системы.

⁴ Надо заметить, что это не единственное проявление особого статуса символов перестановок. Для них также нарушаются достаточно широко применяемые в алгебре тензоров правила жонглирования индексами.

Пользуясь псевдоскалярными единицами, определим абсолютные e -тензоры (тензоры перестановок, дискриминантные тензоры) следующими равенствами:

$$\begin{aligned} e_{ijk} &= 1^{[+1]} \epsilon_{ijk} \\ e^{ijk} &= 1^{[-1]} \epsilon^{ijk} \end{aligned}$$

В дальнейшем изложении нам также потребуются еще два спецсимвола, так или иначе связанные с символами перестановок. Однако начать приходится с метрического тензора. Абсолютно инвариантная метрическая дифференциальная форма

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

порождает метрический тензор g_{js} . Квадрат псевдоскалярной единицы оказывается равным детерминанту, составленному из компонент тензора g_{js} :

$$1^{[2]} = \det(g_{js})$$

Как отмечалось выше, символы перестановок не подчиняются обычным правилам жонглирования индексов. Например, опускать индексы у контравариантного псевдотензора перестановок следует по правилу

$$\epsilon_{ijk}^{[-1]} = 1^{[-2]} g_{il} g_{js} g_{kr} \epsilon^{[+1]lsr} \quad (2.2)$$

Опираясь на это правило и вводя сначала спецсимволы

$$\epsilon_{i:k}^{p\cdot} = g^{pj} \epsilon_{ijk}^{[-1]}, \quad \epsilon_{i:k}^{p\cdot} = g_{il} g_{kr} \epsilon^{lpr[+1]}$$

нетрудно показать, что они удовлетворяют соотношению

$$\epsilon_{i:k}^{p\cdot} = 1^{[-1]} \epsilon_{i:k}^{p\cdot}$$

поскольку

$$\epsilon_{i:k}^{p\cdot} = g^{pj} \epsilon_{ijk}^{[-1]} = 1^{[-2]} \delta_s^p g_{il} g_{kr} \epsilon^{lsr[+1]} = 1^{[-2]} g_{il} g_{kr} \epsilon^{lpr[+1]} = 1^{[-2]} \epsilon_{i:k}^{p\cdot}$$

Из только что полученного соотношения следует, что

$$1^{[+1]} \epsilon_{i:k}^{p\cdot} = 1^{[-1]} \epsilon_{i:k}^{p\cdot}$$

и поэтому можно ввести следующий специальный символ

$$e_{i:k}^{p\cdot} = 1^{[+1]} \epsilon_{i:k}^{p\cdot} = 1^{[-1]} \epsilon_{i:k}^{p\cdot} \quad (2.3)$$

который очевидно является абсолютным тензором и оказывается весьма полезным при оперировании с уравнениями микрополярной теории упругости.

3. Ковариантная теория линейного микрополярного континуума. В этом разделе работы мы будем рассматривать одну абсолютную тензорную формулировку основных уравнений микрополярной теории упругости, в существенных чертах развитую в статье [5].

Введем в пространстве криволинейную координатную сетку и обозначим через x^k криволинейные координаты. Для сокращения записи тензорных уравнений будем обозначать через ∂_k оператор частного дифференцирования по переменной x^k , а через ∇_k — оператор ковариантного дифференцирования в метрике g_{js} .

Заметим, что ковариантная теория линейного микрополярного континуума [5] на самом деле может быть получена, исходя из ее первичного псевдотензорного аналога, если принять во внимание ковариантное постоянство степеней псевдоскалярных единиц

$$\nabla_k \overset{[\pm g]}{1} = \overset{[\pm g]}{0}$$

В статье [5] вектор перемещений предполагался ковариантным, т.е. вводился в теорию компонентами u_k . Ковариантное поле перемещений порождает вихрь, вычисляемый согласно

$$\omega^i = \frac{1}{2} e^{ikl} \nabla_k u_l$$

где

$$\nabla_i u_k = \partial_i u_k - \Gamma_{ik}^s u_s$$

— ковариантная производная векторного поля u_k .

Полный микроповорот обычно вводится как псевдовектор, например, как контравариантный псевдовектор веса $g = +1$ (см. [12]): $\overset{[+1]}{\phi^s}$.

Этот вектор затем умножением на вторую псевдоскалярную единицу приводится к абсолютному вектору

$$\phi^s = \overset{[-1]}{1} \overset{[+1]}{\phi^s}$$

Вслед за полным микроповоротом и вихрем поля трансляционных перемещений можно говорить об относительном векторе микроповорота

$$\varphi^i = \phi^i - \omega^i = \phi^i - \frac{1}{2} e^{ikl} \nabla_k u_l \quad (3.1)$$

Этот вектор, наряду с вектором трансляционного перемещения, считается в линейных микрополярных теориях малым и используется при конструировании асимметричного тензора деформации.

Асимметричный тензор деформации геометрически линейных микрополярных теорий

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{(ij)} + \epsilon_{[ij]} \quad (3.2)$$

складывается из симметричной (определяемой полностью полем перемещений)

$$\epsilon_{(ij)} = \nabla_{(i} u_{j)} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$$

и антисимметричной (определяемой полностью полем относительных микроповоротов (3.1))

$$\epsilon_{[ij]} = -e_{ijk} \phi^k$$

частей.

Его можно также определить через полный вектор микроповорота согласно

$$\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - e_{ijk} \phi^k \quad (3.3)$$

или в терминах псевдотензоров — согласно

$$\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - \overset{[-1]}{\epsilon_{ijk}} \overset{[+1]}{\phi^k} \quad (3.4)$$

Помимо асимметричного тензора деформации, необходим еще тензор изгиба–кручения

$$\kappa_{i\cdot}^s = \nabla_i \phi^s \quad (3.5)$$

который представляет собой пространственный градиент полного вектора микроповорота. Ясно, что первичное определение тензора изгиба–кручения на самом деле имеет псевдотензорную природу

$$\kappa_{i\cdot}^s = \nabla_i \phi^s$$

Определим, наконец, следующие присоединенные к тензорам ϵ_{is} и κ^{is} векторы, положив

$$\varphi^j = -\frac{1}{2} e^{jis} \epsilon_{[is]}, \quad \kappa_j = \frac{1}{2} e_{jis} \kappa^{[is]}$$

Уравнения статического равновесия получаются, исходя из принципа виртуальных перемещений [5]

$$\begin{aligned} \nabla_i t^{ik} &= -X^k \\ \nabla_i \mu_k^{i\cdot} - 2\tau_k &= -Y_k \end{aligned} \quad (3.6)$$

где t^{ik} – асимметричный тензор силовых напряжений; $\mu_k^{i\cdot}$ – тензор моментных напряжений

$$\tau_j = -\frac{1}{2} e_{jis} t^{[is]}, \quad \mu^j = \frac{1}{2} e^{jis} \mu_{[is]}$$

– присоединенные к тензорам силовых и моментных напряжений векторы.

4. Упругий потенциал гемитропного микрополярного тела. В модели упругого микрополярного тела пара ϵ_{ik} , $\kappa_{i\cdot}^s$ сопряжена с парой t^{ik} , $\mu_{\cdot s}^{i\cdot}$ через потенциал напряжений (упругий потенциал) $\mathcal{U}$:

$$t^{ik} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \epsilon_{ik}}, \quad \mu_{\cdot s}^{i\cdot} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \kappa_{i\cdot}^s}$$

Наиболее общая форма упругого потенциала линейного микрополярного тела $\mathcal{U}$ имеет вид квадратичной формы

$$2\mathcal{U} = H_1^{islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + H_2^{i\cdot l\cdot} \kappa_{i\cdot}^s \kappa_{l\cdot}^m + H_3^{isl\cdot} \epsilon_{is} \kappa_{l\cdot}^m \quad (4.1)$$

где H_1^{islm} , $H_2^{i\cdot l\cdot}$, $H_3^{isl\cdot}$ есть определяющие тензоры. Определяющие тензоры имеют в приведенной выше форме (4.1) совершенно разную структуру индексов. Два из них на самом деле являются псевдотензорами, но как обычно приводятся к абсолютным тензорам с помощью степеней первой псевдоскалярной единицы:

$$H_2^{i\cdot l\cdot} = 1 \begin{matrix} [+2] & [-2] \\ H_2^{i\cdot l\cdot} \end{matrix}, \quad H_3^{isl\cdot} = 1 \begin{matrix} [+1] & [-1] \\ H_3^{isl\cdot} \end{matrix} \quad (4.2)$$

Нетрудно заметить, что компоненты определяющих тензоров удовлетворяют следующим “условиям симметрии”:

$$H_1^{islm} = H_1^{lmis}, \quad H_2^{i\cdot l\cdot} = H_2^{l\cdot i\cdot},$$

учитывая которые можно показать, что число независимых компонент определяющих тензоров микрополярной теории упругости равно 171.

Упругому потенциалу (4.1) соответствуют определяющие уравнения:

$$\begin{aligned} t^{is} &= H_1^{islm} \epsilon_{lm} + \frac{1}{2} H_3^{isl\cdot} \kappa_{l\cdot}^m \\ \mu_{\cdot s}^{i\cdot} &= H_2^{i\cdot l\cdot} \kappa_{l\cdot}^m + \frac{1}{2} H_3^{lmi\cdot} \epsilon_{lm} \end{aligned}$$

которые следует считать пригодными для любого линейно упругого микрополярного тела.

В дальнейшем изложении мы будем рассматривать только гемитропные микрополярные среды, т.е. такие среды, определяющие тензоры которых являются гемитропными (полуизотропными, демитропными) и характеризуются неизменностью компонента при любых преобразованиях поворота.

Хорошо известно, что в декартовой системе координат абсолютный полуизотропный тензор четвертого ранга H_{islm} представится в форме [11, с. 66–70]:

$$H_{islm} = \lambda \delta_{is} \delta_{lm} + \mu (\delta_{il} \delta_{sm} + \delta_{im} \delta_{sl}) + \nu (\delta_{il} \delta_{sm} - \delta_{im} \delta_{sl})$$

Вводя новые постоянные

$$\lambda = a, \quad \mu = \frac{b+c}{2}, \quad \nu = \frac{b-c}{2}$$

полуизотропный тензор четвертого ранга H_{islm} можно также представить в следующем виде:

$$H_{islm} = a \delta_{is} \delta_{lm} + b \delta_{il} \delta_{sm} + c \delta_{im} \delta_{sl}$$

наиболее подходящем для последующего изложения.

В том случае, когда система координат не будет декартовой, полуизотропное микрополярное тело характеризуется определяющими тензорами следующей структуры:

$$\begin{aligned} H_1^{islm} &= a_1 g^{is} g^{lm} + b_1 g^{il} g^{sm} + c_1 g^{im} g^{sl} \\ H_2^{islm} &= a_2 g^{is} g^{lm} + b_2 g^{il} g^{sm} + c_2 g^{im} g^{sl} \\ H_3^{islm} &= a_3 g^{is} g^{lm} + b_3 g^{il} g^{sm} + c_3 g^{im} g^{sl} \end{aligned}$$

и определяющими уравнениями

$$\begin{aligned} t^{(is)} &= a_1 g^{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + \left(b_1 + c_1 \right) \epsilon^{(is)} + \frac{1}{2} a_3 g^{is} g^{lm} \kappa_{(lm)} + \frac{1}{2} \left(b_3 + c_3 \right) \kappa^{(is)} \\ \mu_{(is)} &= a_2 g_{is} g^{lm} \kappa_{(lm)} + \left(b_2 + c_2 \right) \kappa_{(is)} + \frac{1}{2} a_3 g_{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + \frac{1}{2} \left(b_3 + c_3 \right) \epsilon_{(is)} \\ t^{[is]} &= \left(b_1 - c_1 \right) \epsilon^{[is]} + \frac{1}{2} \left(b_3 - c_3 \right) \kappa^{[is]} \\ \mu_{[is]} &= \left(b_2 - c_2 \right) \kappa_{[is]} + \frac{1}{2} \left(b_3 - c_3 \right) \epsilon_{[is]} \end{aligned}$$

или в терминах присоединенных векторов

$$\begin{aligned} t^{(is)} &= a_1 g^{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + \left(b_1 + c_1 \right) \epsilon^{(is)} + \frac{1}{2} a_3 g^{is} g^{lm} \kappa_{(lm)} + \frac{1}{2} \left(b_3 + c_3 \right) \kappa^{(is)} \\ \mu_{(is)} &= a_2 g_{is} g^{lm} \kappa_{(lm)} + \left(b_2 + c_2 \right) \kappa_{(is)} + \frac{1}{2} a_3 g_{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + \frac{1}{2} \left(b_3 + c_3 \right) \epsilon_{(is)} \\ 2\tau_j &= 2 \left(b_1 - c_1 \right) \varphi_j - \left(b_3 - c_3 \right) \kappa_j \\ 2\mu^j &= 2 \left(b_2 - c_2 \right) \kappa^j - \left(b_3 - c_3 \right) \varphi^j \end{aligned}$$

Вместо определяющих постоянных

$$a, \quad b, \quad c$$

имеет смысл ввести наиболее приемлемые с точки зрения теории упругости механические модули

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2G\nu}{1-2\nu}, \quad a_2 = 2GL^2c_3, \quad a_3 = 2GLc_4 \\ b_1 &= G(1+c_1), \quad b_2 = GL^2(1+c_2), \quad b_3 = GL\left(c_5 - \frac{1}{2}c_6\right) \\ c_1 &= G(1-c_1), \quad c_2 = GL^2(1-c_2), \quad c_3 = GL\left(c_5 + \frac{1}{2}c_6\right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь G – упругий модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, L – характерная микродлина, c_k ($k = 1, 6$) – физически безразмерные микрополярные упругие модули.

5. Абсолютный тензор четвертого ранга с постоянными компонентами в трехмерном пространстве и ряд его изомеров. Абсолютный тензор с постоянными компонентами должен иметь одинаковые ко- и контравалентности, т.е. иметь четную валентность $2r$ (см., например, [4, с. 171]):

$$C_{s_1 s_2 \dots s_r}^{k_1 k_2 \dots k_r}$$

Как известно, для абсолютного тензора с постоянными компонентами справедливо следующее представление

$$C_{s_1 s_2 \dots s_r}^{k_1 k_2 \dots k_r} = \sum_P c_P C_{s_1 s_2 \dots s_r}^{\{k_1 k_2 \dots k_r\}P} \quad (5.1)$$

где суммирование производится по всем $r!$ перестановкам P натуральных чисел $1, 2, \dots, r$, в том случае, когда r не превосходит размерности пространства, произвольные коэффициенты c_P можно связать с компонентами тензора согласно

$$c_P = C_{\{12\dots r\}P}^{12\dots r}$$

Абсолютный тензор четвертого ранга с постоянными компонентами в трехмерном пространстве на основании данной выше формулы (5.1) следующую общую форму, которую мы приведем, не указывая пустующие позиции для верхних и нижних индексов:

$$C_{il}^{sm} = a\delta_i^s \delta_l^m + c\delta_i^m \delta_l^s \quad (5.2)$$

из которой можно вывести ряд изомеров, которые, в свою очередь, также будут тензорами с постоянными компонентами.

Изомеры тензора C_{il}^{sm} в дальнейшем изложении будем обозначать тем же самым корневым символом, снабжая его номером вверху слева. Число возможных изомеров тензора C_{il}^{sm} оценивается как произведение числа всех возможных перестановок одного ряда символов $s, m, \cdot, \cdot$ и числа всех возможных перестановок другого ряда символов $i, l, \cdot, \cdot$ с учетом того, что перестановка позиций, обозначаемых через $\cdot$, приводит к одному и тому же изомеру. Таким образом, число возможных изомеров тензора C_{il}^{sm} оказывается равным

$$\frac{4! \cdot 4!}{2 \cdot 2} = 144$$

Рассмотрим некоторые из ряда изомеров тензора (2). Определим сначала изомер тензора четвертого ранга с постоянными компонентами, положив

$${}^4C_{i..}^{s.m} = a\delta_i^s\delta_l^m + c\delta_i^m\delta_l^s$$

откуда

$${}^4C^{ism} = ag^{is}g^{lm} + cg^{im}g^{sl}$$

Далее нетрудно проверить, что

$${}^4C_{i..}^{s.m} = {}^4C_{l..}^{m.s}$$

а также

$${}^4C^{ism} = {}^4C^{lmis}$$

Введем изомер

$${}^1C_{i..}^{sm} = a\delta_i^s\delta_l^m + c\delta_i^m\delta_l^s$$

Для него будут выполняться следующие равенства:

$${}^1C_{ilsm} = {}^1C_{smil}$$

и

$${}^1C_{ilsm} = {}^4C_{ilsm} = {}^4C_{lmis}$$

которые позволяют заключить, что изомеры ${}^4C_{ilsm}$ и ${}^1C_{ilsm}$ представляют собой совершенно разные тензоры четвертого ранга.

Продолжим рассмотрение изомеров тензора четвертого ранга с постоянными компонентами, определив

$${}^2C_{..il}^{sm..} = a\delta_i^s\delta_l^m + c\delta_i^m\delta_l^s$$

Легко проверяются следующие равенства, связывающие между собой изомеры ${}^4C^{ilsm}$, ${}^1C^{ilsm}$, ${}^2C^{ilsm}$:

$${}^2C^{smil} = {}^4C^{ilsm} = {}^1C^{ilsm} = {}^1C^{smil}$$

откуда следует вывод о том, что

$${}^2C^{smil} = {}^1C^{smil}$$

т.е. тензоры ${}^2C^{smil}$ и ${}^1C^{smil}$ равны.

Следующим в ряду изомеров выступает тензор

$${}^3C_{i..l}^{s.m} = a\delta_i^s\delta_l^m + c\delta_i^m\delta_l^s \quad (5.3)$$

Сразу же можно утверждать, что справедливо равенство

$${}^3C^{siml} = {}^4C^{ilsm} = {}^2C^{smil}$$

и, кроме того, — равенства

$${}^3C_{s.m}^{i..l} = {}^3C_{m.s}^{l..i}, \quad {}^3C_{s.m}^{i..l} = {}^4C_{s.m}^{i..l}$$

Поскольку

$${}^3C^{siml} = {}^3C^{ilsm}$$

то приходим к заключению о равенстве тензоров ${}^3C^{ilsm}$ и ${}^4C^{ilsm}$.

Таким образом, в цепочке изомеров тензора четвертого ранга с постоянными компонентами

$${}^4C_{i\cdot l\cdot}^{s\cdot m} = {}^3C_{i\cdot l\cdot}^{s\cdot m} = {}^2C_{\cdot il\cdot}^{sm\cdot} = {}^1C_{il\cdot\cdot}^{\cdot sm}$$

не все из них являются независимыми, и в дальнейшем изложении нам потребуется только третий, т.е. (5.3), из ряда измеров тензора четвертого ранга с постоянными компонентами.

6. Представление определяющих тензоров гемитропного тела с помощью изомера тензора с постоянными компонентами. Основную энергетическую форму гемитропного микрополярного упругого тела можно преобразовать к специальной форме, позволяющей дать оптимальное представление определяющих тензоров в терминах тензоров с постоянными компонентами. С этой целью сначала заметим, что трансляции пространства наиболее естественным образом представляются контравариантным вектором,⁵ поэтому и вектор перемещений будем считать контравариантным с естественными компонентами u^s . Кроме этого полный микроповорот, как продемонстрировано в [12], в одном из вариантов развития микрополярной теории упругости выступает как контравариантный псевдовектор веса $g = +1$.

С учетом высказанных положений наиболее естественным выглядит следующее определение асимметричного тензора деформации:

$$\epsilon_{s\cdot}^{\cdot l} = \nabla_s u^l - \epsilon_{s\cdot k}^{\cdot l\cdot} \phi^k$$

или в терминах абсолютных тензоров

$$\epsilon_{s\cdot}^{\cdot l} = \nabla_s u^l - e_{s\cdot k}^{\cdot l\cdot} \phi^k$$

Тензор изгиба—кручения имеет идентичную структуру индексов

$$\kappa_{i\cdot}^s = \nabla_i \phi^s$$

Асимметричному тензору деформации $\epsilon_{i\cdot}^{\cdot k}$ и тензору изгиба—кручения сопряжены по энергии тензор силовых напряжений $t_{\cdot k}^{\cdot i}$ и тензор моментных напряжений $\mu_{\cdot k}^{\cdot i}$. Оба тензора также имеют идентичную структуру индексов. Уравнения статического равновесия, очевидно, приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla_i t_{\cdot k}^{\cdot i} &= -X_k \\ \nabla_i \mu_{\cdot k}^{\cdot i} - e_{k\cdot i}^{s\cdot} t_{\cdot s}^{\cdot i} &= -Y_k \end{aligned}$$

Определяющие тензоры анизотропного микрополярного тела будут иметь однотипную структуру индексов вида: $H_{\cdot s\cdot m}^{i\cdot l\cdot}$, поскольку энергетическая форма преобразуется к следующему виду:

$$2\mathcal{U} = H_1^{i\cdot l\cdot}{}_{\cdot s\cdot m} \epsilon_{i\cdot}^{\cdot s} \epsilon_{l\cdot}^{\cdot m} + H_2^{i\cdot l\cdot}{}_{\cdot s\cdot m} \kappa_{i\cdot}^s \kappa_{l\cdot}^m + H_3^{i\cdot l\cdot}{}_{\cdot s\cdot m} \epsilon_{i\cdot}^{\cdot s} \kappa_{l\cdot}^m \quad (6.1)$$

В случае гемитропного микрополярного упругого тела каждый из трех определяющих тензоров выражается через третий изомер тензора с постоянными компонентами согласно

$$H_{\cdot s\cdot m}^{i\cdot l\cdot} = {}^3C_{\cdot s\cdot m}^{i\cdot l\cdot} + b_{\cdot} g_{sm} g^{il} \quad (6.2)$$

Таким образом, показано, что каждый из трех определяющих тензоров всегда может быть сконструирован из одного из изомеров тензора с постоянными компонентами (вообще не чувствительного ни к каким преобразованиям координатной системы) и одного дополнительного тензора четвертого ранга, сконструированного, в свою оче-

⁵ См. по этому поводу [4, с. 90, 91].

редь, из компонент метрического тензора (не чувствительного к изометриям трехмерного пространства и даже к его гомотетичным преобразованиям).

Важным представляется также то обстоятельство, что определяющие тензоры (и псевдотензоры (6.2)) в силу (6.2) ковариантно постоянны⁶. Действительно, тензоры с постоянными компонентами ковариантно постоянны. То же самое относится к метрическому тензору. Определяющие псевдоскаляры

$$\begin{aligned} \overset{[-2]}{a} &= \overset{[-2]}{1} \overset{[-2]}{a}, & \overset{[-2]}{b} &= \overset{[-2]}{1} \overset{[-2]}{b}, & \overset{[-2]}{c} &= \overset{[-2]}{1} \overset{[-2]}{c} \\ \overset{[-1]}{a} &= \overset{[-1]}{1} \overset{[-1]}{a}, & \overset{[-1]}{b} &= \overset{[-1]}{1} \overset{[-1]}{b}, & \overset{[-1]}{c} &= \overset{[-1]}{1} \overset{[-1]}{c} \end{aligned}$$

ковариантно постоянны, поскольку ковариантно постоянны степени псевдоскалярной единицы

$$\nabla_s \overset{[\pm g]}{1} = 0$$

В качестве еще одного примера укажем на ковариантное постоянство характерной микродлины L . Так как

$$L^2 = \frac{\overset{b}{2} + \overset{c}{2}}{\overset{b}{1} + \overset{c}{1}}$$

то микродлина на самом деле является ковариантно постоянным псевдоскаляром веса -1 , чувствительным к преобразованиям зеркального отражения:

$$\overset{[-1]^2}{L} = \frac{\overset{[-2]}{1} \overset{[-2]}{b} + \overset{[-2]}{1} \overset{[-2]}{c}}{\overset{[-2]}{b} + \overset{[-2]}{c}} = \frac{\overset{[-2]}{b} + \overset{[-2]}{c}}{\overset{[-2]}{b} + \overset{[-2]}{c}} = \overset{[-2]}{1} L^2$$

Интересно также отметить, что ковариантное постоянство определяющего псевдоскаляра $\overset{[-1]}{L}$, т.е. выполнение условия

$$\nabla_s \overset{[-1]}{L} = 0$$

сразу же влечет его представимость в форме

$$\overset{[-1]}{L} = \overset{[-1]}{1} L$$

Характерная микродлина микрополярной теории упругости L – единственный из модулей, которому может быть приписан вес, и только она получает трактовку как определяющий псевдоскаляр, чувствительный к замене ориентации координатной системы, например, с право- на левоориентированную.

Кроме ковариантного постоянства определяющих тензоров (6.2) выделим присущее им важное свойство нечувствительности компонент при произвольных преобразованиях координат при выполнении условий

$$\overset{b}{c} = 0 \quad (c = 1, 2, 3)$$

В силу (6.2) гемитропное микрополярное тело характеризуется девятью определяющими постоянными. Если считать выполненными приведенные выше условия, то

⁶ Т.е. ковариантное дифференцирование аннулирует тензор (псевдотензор). Ковариантное постоянство того или иного тензора или псевдотензора делает его весьма удобными при преобразованиях дифференциальных уравнений механики континуума, поскольку его можно вносить и выносить за область действия оператора ковариантного дифференцирования ∇_s .

остается всего шесть определяющих постоянных. По смыслу проведенных выше рассуждений такое микрополярное тело следует назвать *ультраизотропным*. Физически приемлемым такое микрополярное тело будет, очевидно, только в том случае, когда потенциал напряжений суть положительно определенная квадратичная форма от компонент асимметричного тензора деформации и тензора изгиба–кручения.

7. Заключение. В представляемой работе рассмотрены определяющие тензоры (псевдотензоры) четвертого ранга, с которыми приходится иметь дело в атермической механике гемитропного микрополярного упругого тела. Указанные тензоры с различной структурой индексов могут быть введены в модель гемитропного тела с помощью квадратичного потенциала напряжений. Несмотря на первичность псевдотензорного представления энергетического потенциала, изложение удается провести в основном в терминах абсолютных тензоров, опираясь при этом на свойства степеней псевдоскалярных единиц. Компоненты одного из трех определяющих псевдотензоров оказываются чувствительными к преобразованиям зеркального отражения в трехмерном пространстве. Исследована алгебраическая структура определяющих тензоров гемитропного тела. Показано, что последние всегда могут быть сконструированы из изомеров (а в случае идентичности структуры тензорных индексов — одного изомера) тензора четвертого ранга с постоянными компонентами (вообще не чувствительного ни к каким преобразованиям координатной системы) и одного дополнительного тензора четвертого ранга, сконструированного, в свою очередь, из компонент метрического тензора. Тензорам подобной алгебраической структуры могут быть приписаны веса только за счет придания весов определяющим псевдоскалярам. Среди определяющих псевдоскаляров выделяется характерная микродлина — единственная конвенциональная определяющая характеристика микрополярного упругого тела, которая может быть определена как псевдоскаляр нечетного веса, чувствительный к замене ориентации координатной системы с право- на левоориентированную.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262 “Связанная термомеханика микрополярных полуизотропных сред”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Папс Л.А.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 636 с.
2. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. Paris: Herman et Fils, 1909. 226 p.
3. *Nowacki W.* Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
4. *Гуревич Г.Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: Гостехтеоретиздат. 1948. 408 с.
5. *Радаев Ю.Н.* Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. № 3. С. 504–517.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>
6. *Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 4. С. 752–761.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>
7. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* An algebraic algorithm of pseudotensors weights eliminating and recovering // Mech. Solids. 2022. V. 57. № 6. P. 1416–1423.
<https://doi.org/10.3103/s0025654422060085>
8. *Murashkin E.V., Radaev Y.N.* On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // Mech. Solids. 2022. V. 57. № 2. P. 205–213.
<https://doi.org/10.3103/s0025654422020108>
9. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* К теории гемитропных тензоров четвертого ранга в трехмерных пространствах Евклида // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022.

- Т. 26. № 3. С. 592–602.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1941>
10. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // Вестн. Чув. гос. пед. универс. им. И.Я. Яковлева. Серия: мех. предельного состояния. 2022. № 3. С. 86–100.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010>
11. *Jeffreys H.* Cartesian tensors. Cambridge: Cambridge University Press, 1969. 93 p.
12. *Radayev Y.N.* Two-point rotations in geometry of finite deformations // Theory of Elasticity and Creep. Advanced Structured Materials. V. 185. Springer, 2023. P. 275–283.
https://doi.org/10.1007/978-3-031-18564-9_20

УДК 539.3

О МЕХАНИЧЕСКОЙ КОНЦЕПЦИИ САМОСБОРКИ НАНОМАТЕРИАЛОВ

© 2023 г. В. А. Бабешко^{а,*}, О. В. Евдокимова^б, О. М. Бабешко^а, В. С. Евдокимов^а

^аКубанский государственный университет, Краснодар, Россия

^бЮжный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Россия

* e-mail: babeshko41@mail.ru

Поступила в редакцию 11.01.2023 г.

После доработки 20.01.2023 г.

Принята к публикации 23.01.2023 г.

В работе излагается механическая концепция самосборки наночастиц. Предполагается, что наночастицы являются деформируемыми штампами в плоской динамической контактной задаче, лежащими на границе многослойной деформируемой среды. Постоянная вибрация в микромире вызывается колебательной энергией фононов и магнонов. Ранее, в работах авторов изложена механическая концепция самоорганизации наночастиц. В ее основу положен высокочастотный резонанс, вызывающий образование стоячих волн. Они локализуют имеющиеся совокупности наночастиц на гребне стоячих волн. В основу самосборки наночастиц положен резонанс, ранее предсказанный академиком И.И. Воровичем и присущ только деформируемым штампам в контактных задачах на многослойной среде. Деформируемые наночастицы моделируются фракталами, представляющими упакованные блочные элементы, описываемые уравнением Гельмгольца. Резонанс деформируемых штампов позволяет осуществлять захват наночастиц, диктуемый кулоновскими силами притяжения. Показано, что соединение двух фракталов, порождает новый фрактал с объединенным носителем, а в случае множественного объединения, получается фрагмент наноматериала. Для реализации исследования впервые удалось построить высокоточное приближенное решение плоской контактной задачи о действии штампа любых конечных размеров на многослойное основание. Этот результат продиктован необходимостью аналитического построения теории самосборки наноматериалов.

Ключевые слова: граничные задачи, наночастицы, интегральные уравнения, высокочастотный резонанс, факторизация, самосборка

DOI: 10.31857/S057232992360007X, EDN: GFZOYW

Введение. Развивается механический подход для описания самосборки наноматериалов. Ранее в работе авторов был изложен механический подход самоорганизации наноматериалов [1]. В его основу был положен эффект, связанный с возникновением высокочастотных резонансов, вызывающих стоячие волны, амплитуды которых локализуют расположение наночастиц.

Самосборка является следующим этапом сопряжения самоорганизованных наночастиц в более крупные фрагменты. Механическая концепция самосборки наноматериалов выполняется при следующих естественных допущениях, и реализуется строго математически.

1. Наночастицы находятся на плоской границе деформируемого многослойного основания, и подвержены вибрации, порождаемой квазичастицами — фононами и маг-

нонами, постоянно присутствующими в микромире [2, 3]. Они являются носителями энергии при самосборке.

2. Между наночастицами существует как кулоновское отталкивание, так и притяжение после достижения связности, как и в химических или в квантовомеханических процессах при сближении ядер атомов. Отталкивание преодолевается энергией резонансов.

3. Наночастицы являются плоскими деформируемыми объектами, самоподобной формы, описываемыми упакованными блочными элементами. Последние, в результате самосборки, представляют открытое топологическое покрытие дискретного топологического пространства. Это означает, что они подобны кристаллическим частицам при выращивании кристаллов, что описывается в теориях, связанных с наноматериалами [4].

При этих предположениях оказывается возможным строго математически описать процесс самосборки механических объектов, как деформируемых вибрирующих штампов на деформируемом основании. Если самоорганизация использует высокочастотный резонанс, то самосборка, как средство преодоления возможного отталкивания наночастиц на некоторых расстояниях, и взаимного их захвата при сближении, использует резонанс, ранее предсказанный академиком И.И. Воровичем для деформируемых штампов, лежащих на основании [5–7]. Резонанс необходим для преодоления возможного кулоновского отталкивания одинаково заряженных частиц, которые, после слияния в связную структуру, приобретают объект того же заряда, но большей электрической емкости.

В процессе выполнения работы в двумерной постановке рассмотрена отдельная наночастица, как деформируемый штамп, моделируемый упакованным блочным элементом. Приведен пример уравнения резонансных частот, полученных в [8]. На следующем этапе рассматриваются две наночастицы, вошедшие в соприкосновение, как топологические объекты. Строится фактор топологического пространства. Соотношениями эквивалентности принимаются граничные условия наночастиц, как деформируемых объектов. В результате сопряжения двух наночастиц образуется новая, с совместным носителем, более крупная наночастица, представляемая упакованным блочным элементом в дискретном топологическом пространстве [9]. Последовательность сопряжения наночастиц по описанному процессу, приведет к построению фрагмента материала. Для выполнения исследования, авторам впервые удалось построить высокоточное приближенное решение контактной задачи о действии штампа любых конечных размеров на многослойное основание.

Ранее, аналитические формулы для контактных напряжений для узких и широких относительных размеров штампов, строились асимптотически отдельными выражениями [10–13]. Также применялись численные методы, которые не эффективно для учета влияния концентрации напряжений в окрестностях краев штампов [14–18]. Исследование выполнено для материала простой реологии, описываемого уравнением Гельмгольца. Для использования этого подхода в случаях материалов сложных реологий, необходимо применить описанный в [19] метод разложения решений граничных задач для таких материалов по решениям, получаемым в настоящей работе.

1. Постановка задачи. На верхней границе многослойной среды вводится декартова система координат таким образом, что ось ox_3 направлена по внешней нормали, остальные оси ox_1 , ox_2 лежат в касательной плоскости. В областях $\Omega_1(-B \leq x_1 \leq B, |x_2| \leq \infty)$ и $\Omega_2(A \leq x_1 \leq C, |x_2| \leq \infty)$, $B \leq A$ действует гармонически колеблющийся штамп по закону $e^{-i\omega t}$, имитирующий наночастицу. В дальнейшем он представляется упакованным блочным элементом. Однако, для постановки и решения задачи, необходимо на некотором этапе рассмотреть случай абсолютно твердого штампа, действующего в условиях вибрации на многослойную среду. Методом, описанным в [20], исключив

временной множитель, смешанная задача сводится к решению интегрального уравнения вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{l(\gamma)} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q_\gamma(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = f(x_1, x_2), \quad \gamma = B, C$$

$$l(B) = \Omega_B(-B \leq x_1 \leq B, |x_2| \leq \infty), \quad l(C) = \Omega_C(A \leq x_1 \leq C, |x_2| \leq \infty) \quad (1.1)$$

$$k(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} K(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2$$

Здесь $q(x_1, x_2)$ контактные напряжения под штампом, $f(x_1, x_2)$ — перемещения в зоне контакта, $k(x_1, x_2)$ — ядро интегрального уравнения, функция $K(\alpha_1, \alpha_2)$ — преобразование Фурье ядра интегрального уравнения.

Расположение контуров G связано с рассмотрением динамической контактной задачи, описано в [20], и состоит в правилах обхода полюсов функции $K(\alpha_1, \alpha_2)$ на вещественной оси. Задача состоит в рассмотрении случая деформируемого штампа. Разработанный авторами подход [19], а также результат, полученный в [8] открыли возможность использовать “фракталы”, т.е. упакованные блочные элементы, являющиеся решениями достаточно простых граничных задач, при исследовании граничных задач для многокомпонентных сред.

Решения сложных граничных задач представляются в виде комбинации фракталов. С учетом этой возможности, в качестве деформируемого штампа принимаются фракталы — решения граничных задач в рассматриваемых областях, являющиеся упакованными блочными элементами для уравнения Гельмгольца. Рассматриваются два случая. Полоса определяется соотношениями $-B \leq x_1 \leq B, |x_2| \leq \infty$, случай B , и соотношениями $A \leq x_1 \leq C, |x_2| \leq \infty, B \leq A$, случай C .

Таким образом, в указанных областях необходимо построить упакованные блочные элементы, которые будут рассматриваться как деформируемые штампы. Ниже рассматривается двумерное уравнение Гельмгольца в указанных областях

$$[\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p^2] \varphi(x_1, x_2) = g(x_1, x_2), \quad g(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2) \quad (1.2)$$

Здесь $\varphi(x_1, x_2)$ — вертикальное перемещение в зоне контакта, $q(x_1, x_2)$ контактные напряжений, действующие на объект снизу, которые надо определить, $t(x_1, x_2)$ — заданные внешние воздействия сверху на объект.

Для задачи B в области $\Omega_B(-B < x_1 < B)$ граничные условия следующие

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(-B, x_2), \quad x_1 = -B; \quad \varphi(x_1, x_2) = \varphi(B, x_2), \quad x_1 = B$$

Для задачи C в области $\Omega_C(A < x_1 < C, |x_2| < \infty)$ вид

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(A, x_2), \quad x_1 \rightarrow A; \quad \varphi(x_1, x_2) = \varphi(C, x_2) \quad x_1 \rightarrow C$$

Для обеих задач необходимо построить упакованные блочные элементы.

2. Построение одномерных интегральных уравнений. Способ их построения изложен во многих публикациях авторов, например, в [20]. Поставленные двумерные задачи (1.1), (1.2) сводятся к одномерным с вещественным параметром α_2 , в результате применения преобразования Фурье по координате x_2 .

Тогда интегральное уравнение (1.1) принимает вид

$$\mathbf{K}_0 q = \int_{l(\gamma)} k_0(x_1 - \xi_1) q(\xi_1) d\xi_1 = f(x_1), \quad q(\xi_1) = q(\xi_1, \alpha_2), \quad k_0(x_1) = k(x_1, \alpha_2), \quad \gamma = B, C$$

$$k_0(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad K_0(\alpha_1) = K(\alpha_1, \alpha_2), \quad K_0(\alpha_1) = P_0^{-1}(\alpha_1) R_0(\alpha_1) \quad (2.1)$$

Ради краткости, считаем, что функция $K_0(\alpha_1)$ является четной, мероморфной, и на бесконечности обладает асимптотическим поведением $K_0(\alpha_1) = O(\alpha_1^{-1})$, $\text{Im } \alpha_1 = 0$.

Таким свойством обладают ядра интегральных уравнений, построенные для смешанных задач на многослойной среде [20].

Функция $K_0(\alpha_1)$ представляется отношением двух целых функций $R_0(\alpha_1)$ и $P_0(\alpha_1)$, имеющих счетные множества нулей, уходящих на бесконечность в окрестностях мнимых осей.

Примеры смешанных задач, в которых встречаются подобные интегральные уравнения, имеются в многочисленных публикациях, например, в [20].

Граничные задачи (1.2) для блочного элемента становятся одномерными

$$\begin{aligned} (\partial^2 x_1 + k^2)\varphi(x_1) &= g(x_1), \quad g(x_1) = q(x_1) - t(x_1), \quad k^2 = p^2 - \alpha^2 \\ \varphi(x_1) &= \varphi(x_1, \alpha_2), \quad g(x_1) = g(x_1, \alpha_2), \\ \varphi(x_1, \alpha_2) &= \varphi(A), \quad x_1 \in \Omega_C; \quad \varphi(x_1, \alpha_2) = \varphi(C), \quad x_1 \rightarrow C, \quad x_1 \in \Omega_C \\ \varphi(x_1, \alpha_2) &= \varphi(-B), \quad x_1 \rightarrow -B; \quad \varphi(x_1, \alpha_2) = \varphi(B), \quad x_1 \rightarrow B, \quad x_1 \in \Omega_B \end{aligned} \quad (2.2)$$

Применив к граничной задаче (2.2) метод блочного элемента [19], получим следующее представление для упакованных блочных элементов.

Для задачи В имеем

$$\begin{aligned} \omega_B(\alpha_1) &= \left[-e^{-i\alpha_1 B} k \frac{1}{\sin k2B} (e^{i(\alpha_1 - k)2B} - 1) - i(\alpha_1 - k)e^{i\alpha_1 B} \right] \varphi_B(B) + \\ &+ \left[-e^{i\alpha_1 B} k \frac{1}{\sin k2B} (-e^{-i(\alpha_1 - k)2B} + 1) + i(\alpha_1 - k)e^{-i\alpha_1 B} \right] \varphi_B(-B) + \\ &+ \frac{i}{2 \sin k2B} \left\langle G_B(k)(-e^{i(\alpha_1 + k)B} + e^{-i(\alpha_1 + k)B}) + G_B(-k)(e^{i(\alpha_1 - k)B} - e^{-i(\alpha_1 - k)B}) \right\rangle - G_B(\alpha_1) \\ G_B(\alpha_1) &= \int_{-B}^B g_B(x_1) e^{i\alpha_1 x_1} dx, \quad Q_B(\alpha_1) = \int_{-B}^B q_B(x_1) e^{i\alpha_1 x_1} dx, \quad T_B(\alpha_1) = \int_{-B}^B t_B(x_1) e^{i\alpha_1 x_1} dx \end{aligned} \quad (2.3)$$

В задаче С получаем

$$\begin{aligned} \omega_C(\alpha_1) &= \left[\frac{e^{i\alpha_1 A} k}{\sin k(C - A)} (e^{i(\alpha_1 - k)(C - A)} - 1) - i(\alpha_1 - k)e^{i\alpha_1 C} \right] \varphi(C) + \\ &+ \left[\frac{e^{i\alpha_1 C} k}{\sin k(C - A)} (e^{-i(\alpha_1 - k)(C - A)} - 1) + i(\alpha_1 - k)e^{i\alpha_1 A} \right] \varphi(A) \Bigg\rangle + \\ &+ \frac{i}{2 \sin k(C - A)} \left\langle G(k)(-e^{-ikA + i\alpha_1 C} + e^{-ikC + i\alpha_1 A}) + G(-k)(e^{ikA + i\alpha_1 C} - e^{ikC + i\alpha_1 A}) \right\rangle - G(\alpha_1) \\ G_C(\alpha_1) &= Q_C(\alpha_1) - T_C(\alpha_1), \quad \omega_C(k) = 0 \\ G_C(\alpha_1) &= \int_A^C g_C(x_1) e^{i\alpha_1 x_1} dx, \quad Q_C(\alpha_1) = \int_A^C q_C(x_1) e^{i\alpha_1 x_1} dx, \quad T_C(\alpha_1) = \int_A^C t_C(x_1) e^{i\alpha_1 x_1} dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

Вертикальные перемещения от блочных элементов имеют вид

$$\varphi_\gamma(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_\gamma(\alpha)}{\alpha^2 - k^2} e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \quad \gamma = B, C \quad (2.5)$$

Для приведения смешанной граничной задачи к интегральному уравнению приравняем перемещения (2.1) $f_\lambda(x_1)$ в зоне контакта, составленные для многослойного основания, и перемещения упакованного блочного элемента (2.5) $\varphi_\gamma(x_1)$. В обеих задачах

предварительно применяем к ним преобразование Фурье. Для случаев обоих задач это дает соотношения

$$\begin{aligned} K_0(\alpha_1)Q_\gamma(\alpha_1) + E_\gamma(\alpha_1) &= -(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}Q_\gamma(\alpha_1) + S_\gamma(\alpha_1) \\ S_\gamma(\alpha_1) &= (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}\langle\omega_\gamma(\alpha_1) + Q_\gamma(\alpha_1)\rangle, \quad \gamma = B, C \end{aligned}$$

Здесь $E_\gamma(\alpha_1)$ часть поверхности границы многослойной среды, свободная от контакта. Объединив члены, содержащие преобразования Фурье контактных напряжений и применив к этим равенствам обращение Фурье по параметру α_1 , получаем два интегральных уравнения Винера–Хопфа на конечных отрезках

$$\begin{aligned} Kq_\gamma &= \int_{l(\gamma)} k(x_1 - \xi_1)q_\gamma(\xi_1)d\xi_1 = s_\gamma(x_1), \quad l(B) = [-B \leq x_1 \leq B] \\ l(C) &= [A \leq x_1 \leq C], \quad k(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1)e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1 \\ K(\alpha_1) &= K_0(\alpha_1) + (\alpha_1^2 - k^2)^{-1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Заметим, что оба уравнения содержат в правой части неизвестные функционалы $Q_C(k)$, $Q_C(-k)$, $Q_B(k)$, $Q_B(-k)$ решений интегральных уравнений, которые находятся после обращения интегральных уравнений. Это одна из особенностей, присущая контактным задачам для деформируемых штампов, взятых в виде упакованных блочных элементов.

В работе [8] доказана возможность нахождения всех функционалов и объяснена их роль в рассматриваемых задачах. В динамических контактных задачах они лежат в основе построения уравнений, описывающих дискретные резонансные частоты в задачах с деформируемым штампом, предсказанные академиком И.И. Воровичем [5, 6]. Эти уравнения построены и входят в знаменатели решений контактных задач с деформируемым штампом для некоторых их размеров, полученных в [8], а также приведены в [9]. Резонансы, описываемые ими, формируемые квазичастицами — фононами и магнонами, порождают механические процессы движения наночастиц, приводящих в результате случайных подвижек к захвату подходящих, в соответствии с граничными условиями, наночастиц и их удержанию. Эти резонансы способны вызывать как вертикальные, так и горизонтальные подвижки частиц [21]. В настоящей работе доказывается, что этот процесс и полученные в [8, 9] формулы оказываются справедливыми для любых относительных размеров наночастиц. Например, в [8] получены формулы, описывающие резонансные частоты для случая В, имеющие вид

$$D_{11}(k)D_{22}(-k) - C_{13}(k)C_{23}(-k) = 0$$

Входящие в представление функции, являются аналитическими, содержащими параметр частоты. В работе [8] они получены только для ограниченных значений параметра штампа большого относительного размера. Для построения подобного уравнения для всех относительных размеров штампа ниже впервые, строится высокоточное решение интегрального уравнения (2.1) для любого конечного отрезка $l(B)$.

Для решения задачи описания самосборки наночастиц, имитируемых упакованными блочными элементами, ниже излагается новый высокоточный приближенный подход, позволяющий построение решений интегральных уравнений Винера–Хопфа (2.6) для любого конечного отрезка $[-B, B]$, $0 < B < \infty$. Ранее это делалось отдельно для случаев малых и больших относительных величин отрезков областей контакта [10–13].

3. Построение высокоточного приближенного решения интегральных уравнений на отрезке. Метод построения приближенного решения интегрального уравнения (2.6) дает следующая теорема.

Теорема [22]. Пусть имеются два интегральных уравнения

$$\mathbf{K}_1 q_1 = \int_{-B}^B k_1(x-s)q_1(s)ds = f(x) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{K}_2 q_2 = \int_{-B}^B k_2(x-s)q_2(s)ds = f(x), \quad k_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K_n(u)e^{-iux} du, \quad n = 1, 2 \quad (3.2)$$

Пусть для ядер интегральных уравнений справедлива оценка

$$|K_1(u) - K_2(u)| + |u|^{2,5(1+\delta)} < \frac{4\epsilon}{2(\delta_1 - \delta)r - 1}, \quad u \in G, \quad (3.3)$$

$$\delta_1 > \delta > 0.5, \quad r > r_0 = 2(\delta_1 - \delta), \quad r > r_0 > 1$$

Тогда решения интегральных уравнений близки в следующем смысле

$$\max |q_1(x) - q_2(x)| \sqrt{B^2 - x^2} < M\epsilon, \quad |x| \leq B$$

Постоянная M не зависит от ϵ .

Здесь контур G совпадает с вещественной осью в статических контактных задачах и отклоняется от нее лишь в небольших окрестностях, обходя вещественные полюсы, в динамических задачах.

Способ построения приближения ядер рациональными функциями с любой точностью, описан в ряде работ, например, в [7] и здесь не повторяется.

Применим эти результаты для построения высокоточного решения интегрального уравнения рассматриваемой контактной задачи, справедливого для любых конечных значений параметра B .

Для построения приближенного решения интегрального уравнения с ядром $K_2(u)$. возьмем, в качестве исходного, интегральное уравнение (3.1) с ядром $K_1(u)$, записанное в следующем виде

$$\int_{-B}^B k_1(x-s)q(s,B)ds = f(x), \quad k_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K_1(u)e^{-iux} du \quad (3.4)$$

$$K_1(u) = \frac{shu}{uchu}$$

Его точное решение $q_0(s, B)$ для любых конечных B и для $f(x) = 1$ построено в [23] и имеет вид

$$q_0(s, B) = \frac{1}{\pi Q_{-1/2}(chB) \sqrt{2chB - 2chs}}$$

Здесь $Q_{-1/2}(chB)$ — функция Лежандра.

Для построения решения этого интегрального уравнения для произвольной, один раз дифференцируемой функции $f(x)$, справедлива формула М.Г. Крейна [23], свободная от применения сингулярного интеграла

$$q_1(s, B) = \frac{1}{2M'(B)} \left[\frac{d}{dB} \int_{-B}^B q_0(s, B) f(s) ds \right] q_0(x, B) - \frac{1}{2} \int_{|x|}^B q_0(x, \xi) \frac{d}{d\xi} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{M'(\xi)} \frac{d}{d\xi} \int_{-\xi}^{\xi} q_0(s, \xi) f(s) ds \right] d\xi - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_{|x|}^B \frac{q_0(x, \xi)}{M'(\xi)} \left[\int_{-\xi}^{\xi} q_0(s, \xi) df(s) \right] d\xi, \quad |x| < B \quad (3.5)$$

Таким образом, достаточно осуществить построение приближенного решения интегрального уравнения для случая $f(x) = 1$, чтобы получить решение для случая произвольной функции $f(x)$.

В результате выполнения построения приближенного решения для уравнения (3.1), будет построена, с использованием требования (3.3), функция $K_2(u)$, вида

$$K_2(u) = K_1(u)\Pi(u)$$

Здесь $\Pi(u)$ — рациональная функция, имеющая конечное число нулей и полюсов. Построив функцию $K_2(u)$, которая равна $K_1(u)\Pi(u)$ и применив к ней метод фиктивного поглощения, детально изложенный в [22], построим высокоточное приближенное решение интегрального уравнения (3.2) с этим ядром, справедливое для всех конечных значений параметра B .

Алгоритм метода фиктивного поглощения состоит в следующем [22].

Пусть имеются два интегральных уравнения (3.1) и (3.2) со свойствами ядер

$$K_2(u) = K_1(u)\Pi(u), \quad \Pi(u) = \prod_{m=1}^M \frac{u - z_m}{u - \xi_m}, \quad M < \infty$$

Пусть известен обратный оператор $\mathbf{K}_1^{-1}$. Тогда решение интегрального уравнения (3.2) дается формулой

$$q_2 = \mathbf{V}^{-1}\Pi^{-1}(u)\mathbf{V}[\mathbf{K}_1^{-1}f - \mathbf{K}_1^{-1}\phi] + \phi$$

Здесь вводимая функция ϕ имеет носитель на отрезке $[-B, B]$ и содержит M неизвестных постоянных. Метод фиктивного поглощения позволяет путем решения конечной системы алгебраических уравнений, для определения M постоянных, строить точные решения интегральных уравнений с ядрами, преобразования Фурье которых отличаются множителем на рациональную функцию $\Pi(u)$. В рассматриваемом случае, решение имеет вид

$$q_2(s, B) = \frac{n(s, B)}{\pi Q_{-1/2}(\text{ch}B)\sqrt{2\text{ch}B - 2\text{chs}}}$$

Функция $n(s, B)$ непрерывна на отрезке $[-B, B]$. Важно заметить, что построенное решение содержит асимптотические формулы, справедливые, как для малых относительных размеров штампов, так и для больших.

Так, в случае малых относительных размеров штампов справедлива оценка $Q_{-1/2}(\text{ch}B) = O(\ln B)$, $B \rightarrow 0$, свойственная малым размерам штампа [10–13]. Таким образом, контактная задача для любой отдельно взятой наночастицы, произвольного конечного размера, решается построением высокоточного приближенного решения, описанным выше способом.

Найденные, в результате решения интегральных уравнений, контактные напряжения вносятся во внешние формы соответствующих упакованных блочных элементов.

4. Самосборка наночастиц в более крупные фрагменты материала. В основе самосборки наночастиц лежит свойство полилинейных и, в частности, внешних форм, составлять линейное пространство [24]. Их сумма остается в линейном пространстве. Это свойство переносится на упакованные блочные элементы, фракталы, определяемые внешними формами, имитируя наночастицы. В рамках механической концепции процесс самосборки наночастиц, описываемых фракталами, происходит после преодоления, благодаря резонансным явлениям И.И. Воровича, возможного отталкивания одинаково заряженных наночастиц. В квантовой механике сталкиваются с подобной ситуацией при решении задачи сближений одинаково заряженных ядер атомов. Соприкоснувшись, они объединяются в более крупный фрактал. Этот процесс явля-

ется построением фактор-топологии в дискретном топологическом пространстве. Как сказано выше, фракталы – это упакованные блочные элементы, которые могут быть разноразмерными. Для этого берутся интегральные представления двух фракталов, имеющих носители $[-B, B]$ и $[A, C]$ с внешними формами (2.3) и (2.4). При сближении носителей наночастиц до соприкосновения границ, возникает равенство $B = A$. В результате сложения упакованных блочных элементов, с учетом одинаковых граничных условий, как отношений эквивалентности фактор-топологий, и выполнения преобразований, получается новый блочный элемент. Он имеет носитель, равный объединению носителей исходных блочных элементов, образуя фактор-топологическое пространство. Дальнейший процесс самосборки состоит в объединениях уже больших фрагментов наноматериала в цельный объект и приводит к открытому топологическому покрытию построенного дискретного фактор-топологического пространства [25]. Оно же является наноматериалом, подобно более сложному, двумерному, изучавшемуся в [26]. Рассмотрен случай простой реологии наночастиц и наноматериала. В случае сложной реологии, решения граничных задач для них разлагаются на фракталы материалов более простых реологий по схемам, представленным в [9, 19, 26]. При построении фактор-топологий отношения эквивалентности берутся в форме соответствующих граничных условий. Таким образом, при самосборке сохраняются механические и физические свойства материалов наночастиц вследствие выполнения законов механики деформируемого твердого тела.

Вывод. Выполненные в настоящей работе аналитические построения дают возможность исследовать процесс самосборки наночастиц разных размеров и переносить исследования на материалы сложных реологий. До конца нет ясности о механизме удержания наночастиц, который должен проясниться при рассмотрении наночастиц многокомпонентных материалов сложных реологий. Поэтому исследования настоящей работы, по мнению авторов, дадут возможность изучения свойств самосборки наночастиц для случаев многокомпонентных материалов сложной реологии. Особо следует отметить изложенный способ построения высокоточного приближенного решения контактных задач для областей контакта любых конечных размеров. Этот подход допускает применение в различных областях теории прочности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-21-00128.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Об одной механической модели самоорганизации наночастиц // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 6. С. 72–78.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922060034>
2. Клеменс П. Влияние тепловых и фононных процессов на затухание ультразвука // Физическая акустика. М.: Мир, 1968. Т. 3. С. 244–284.
3. Гутфельд Р. Распространение тепловых импульсов // Физическая акустика. М.: Мир, 1973. Т. 5. С. 267–332.
4. Арефьева Л.П., Шебзухова И.Г. Смачивание и анизотропия межфазной энергии на границе контакта нанокристаллов индия с ориентированной подложкой // Физ.-хим. аспекты изучения кластеров, наноструктур и наноматериалов. 2018. № 10. С. 27–34.
<https://doi.org/10.26456/pcascnn/2018.10.027>
5. Ворович И.И. Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 4. С. 817–820.
6. Ворович И.И. Резонансные свойства упругой неоднородной полосы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 5. С. 1076–1079.
7. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Наука, 1999. 246 с.

8. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О контактных задачах с деформируемым штампом // Проблемы прочности и пластичности. 2022. Т. 84. № 1. С. 25–34. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-1-25-34>
9. *Бабешко В.А., Хрипков Д.А., Евдокимов В.С., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* Построение дискретного топологического пространства самосборки для упакованных блочных элементов, имитирующих наночастицы // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19. № 3. С. 38–46. <https://doi.org/10.31429/vestnik-19-3-38-46>
10. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
11. *Айзикович С.М.* Асимптотическое решение одного класса парных уравнений при больших значениях параметра // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319. № 5. С. 1037.
12. *Александров В.М., Костырева Л.А.* Плоская контактная задача для предварительного несжимаемого слоя // ПММ. 2009. Т. 73. № 6. С. 977–982.
13. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 312 с.
14. *Raous M., Cangermi L., Cocou M.* A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1999. V. 177. P. 383–399.
15. *Shillor M., Sofonea M., Telega J.J.* Models and analysis of quasistatic contact. Lect. Notes Phys. V. 655. Berlin: Springer, 2004.
16. *Guler M.A., Erdogan F.* The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings // Int. J. Mech. Sci. 2007. V. 49. № 2. P. 161–182. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006>
17. *Ke L.-L., Wang Y.-S.* Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials // Eur. J. Mech. A. Solids. 2007. V. 26. № 1. P. 171–188. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.05.007>
18. *Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S.* On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces // Tribol. Int. 2007. V. 40. № 4. P. 574–579. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2005.11.008>
19. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования // ДАН. Физика, технические науки. 2021. Т. 499. № 1. С. 30–35. <https://doi.org/10.31857/S2686740021040039>
20. *Ворович И.И.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
21. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of lithospheric plates // Acta Mech. 2018. V. 229. P. 4727–4739. <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2255-7>
22. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
23. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967. 508 с.
24. *Ефимов Н.В.* Введение в теорию внешних форм. М.: Наука, 1977. 87 с.
25. *Голованов Н.Н., Ильютко Д.П., Носовский Г.В., Фоменко А.Т.* Компьютерная геометрия. М.: Академия, 2006. 512 с.
26. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Трещины нового типа и модели некоторых наноматериалов // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 5. С. 13–20. <https://doi.org/10.31857/S0572329920050025>

УДК 539.3

ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ МЕТАМАТЕРИАЛОВ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПУАССОНА ПРИ ПРОБИВАНИИ ЖЕСТКИМ УДАРНИКОМ

© 2023 г. С. Ю. Иванова^а, К. Ю. Осипенко^а, А. И. Демин^а,
Н. В. Баничук^а, Д. С. Лисовенко^{а,*}

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

* e-mail lisovenk@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 23.04.2023 г.

После доработки 10.05.2023 г.

Принята к публикации 18.05.2023 г.

Экспериментально исследовались некоторые свойства метаматериалов с отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетиков) при пробивании по нормали жестким сферическим ударником. Образцы метаматериала, обладающего хиральной структурой (hexachirals honeycomb), были изготовлены из PLA пластика с помощью 3D-принтера. В экспериментах наблюдалось отклонение направления движения ударника после вылета из пробиваемого образца от подлетного направления (нормального к боковой поверхности). Установлена зависимость направления вылета ударника от ориентации элементов хиральной симметрии образцов. Разработана КЭ-модель расчета пробивания хиральной структуры. Приведены численные результаты, отмечено их соответствие экспериментальным данным.

Ключевые слова: метаматериалы, ауксетики, экспериментальные исследования, пробивание, жесткие ударники, конечно-элементный расчет

DOI: 10.31857/S0572329923600366, **EDN:** GBZWAQ

1. Введение. Развитие новых технологий требует создания новых материалов и конструкций с уникальными механическими свойствами. Такими материалами могут быть метаматериалы. Новые метаматериалы для механических конструкций должны удовлетворять ряду требований, диктуемых экономией места, снижением веса, обеспечением необходимой прочности и пр. Важной эксплуатационной характеристикой метаматериалов является механическая реакция на внедрение в него жестких ударников. Среди новых метаматериалов следует отметить метаматериалы с ауксетическими свойствами (материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона) [1–7]. Ауксетики имеют более высокое сопротивление индентированию по сравнению с обычными материалами. Например, в [8–13] исследовалось влияние ауксетичности на механические свойства метаматериалов при упругопластическом деформировании. В этих работах было показано, что при динамических нагрузках ауксетических метаматериалов режимы деформирования зависят, например, от геометрии ячейки, относительной плотности.

Экспериментальные исследования по пробиванию металлических ауксетических структур со скоростью ~ 280 м/с [14] показали, что ауксетики оказывают большее сопротивление внедряющемуся жесткому ударнику, чем неауксетические сотовые металлические образцы. Этот результат говорит в пользу того, что ауксетики могут быть перспективными для создания ударо- и энергопоглощающих конструкций.

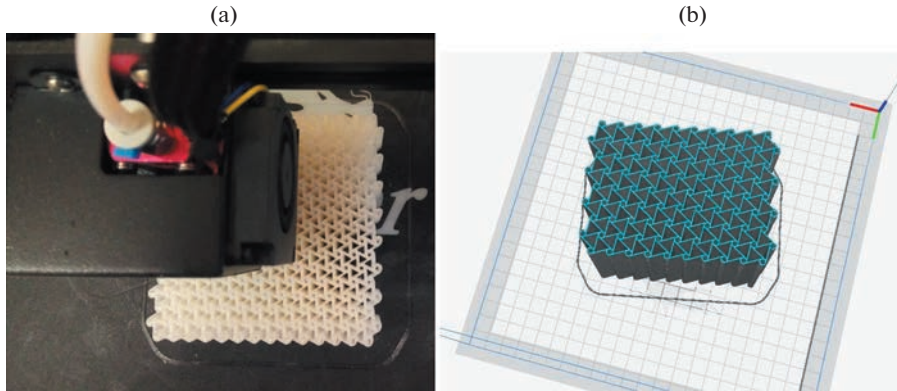


Рис. 1. Изготовление ауксетического образца с хиральной структурой на 3D-принтере: (а) печать образца на 3D-принтере, (b) 3D-модель.

Настоящая работа посвящена экспериментальному изучению сопротивляемости пробивания жестким ударником хиральных ячеистых структур (метаматериалов), обладающих ауксетическими свойствами. Для исследования был выбран метаматериал с хиральной структурой типа *hexachirals honeycomb*. Данная структура была предложена в [15] и развита в [16, 17]. Исследуется способность хиральных ауксетических ячеистых структур (*hexachirals honeycomb*) отклонять внедряющийся ударник от первоначального направления движения. Также в работе представлена КЭ-модель расчета пробивания хиральной ауксетической структуры, приведены численные результаты и оценено их соответствие экспериментальным данным.

2. Эксперименты по пробиванию хиральных ауксетических ячеистых структур из пластика. Для проведения экспериментов по пробиванию хиральных ауксетических структур с помощью 3D-принтера были изготовлены образцы из пластика PLA (фирмы eSUN, рис. 1), имеющие размеры $70 \times 70 \times 70$ мм.

Образец, представленный на рис. 1, а, имеет ауксетическую структуру, характеризующуюся звездчатыми элементами с закруткой против часовой стрелки. Будем для краткости называть это закруткой “влево”. Если перевернуть образец, можно будет увидеть ауксетическую структуру с закруткой по часовой стрелке, то есть “вправо” (схематичное изображение на рис. 1, b). Целью экспериментов было установить, как влияет внутренняя структура метаматериала на траекторию движения ударника при пробивании образцов. Мишени пробивались стальным сферическим ударником массой 4.06 г и диаметром 10 мм. Образцы жестко фиксировались на экспериментальном стенде, ударник разгонялся пневматической пушкой и входил без вращения в преграду по нормали к ее боковой поверхности. Давление в камере пушки выставлялось таким образом, чтобы скорость вылета ударника составляла приблизительно 240 м/с. Скорость ударника на вылете из ствола пушки принималась за скорость входа в преграду, сопротивлением воздуха движению тела можно было пренебречь в силу небольших размеров экспериментальной установки. Скорость входа и выхода ударника измерялись с помощью оптических рамочных хронографов ИБХ-АСС-0021 “Стрелец”. Для предотвращения попадания в хронограф осколков пластика, что могло бы привести к измерению их скорости вместо скорости ударника, хронограф, измеряющий скорость за преградой, закрывался тканевым экраном. Это приводило к некоторому уменьшению измеряемой скорости выхода. Процесс пробивания образца записывался с помощью высокоскоростной видеокамеры FASTCAM mini AX200. Камера разме-

Таблица 1. Отклонение движения ударника (результаты экспериментов)

Номер эксперимента (образца)	Рисунок	Ауксетическая структура с закруткой	Скорость входа, м/с	Скорость выхода, м/с	Угол отклонения, град	Направление отклонения
1	2а	вправо	197.9	не получено данных	4.5	вверх
2	2б	вправо	243.3	70.3	1.4	вверх
3	3а	влево	243.6	72.3	6.6	вниз
4	3б	влево	246.3	92.3	1.4	вниз
5	4а	влево	240	50.8	0.1	вверх
6	4б	влево	238.9	107.7	1.1	вниз

шалась таким образом, что на видеозаписи ударник пробивает образец, двигаясь справа налево. Результаты серии экспериментов приведены в табл. 1.

На рис. 2, а представлены четыре положения ударника (отмечены стрелками), зафиксированные видеокамерой в процессе эксперимента № 1. Штриховая линия показывает направление движения ударника до взаимодействия с преградой, сплошная линия – направление вылета ударника из нее. При пробивании ауксетической структуры с закруткой вправо ударник на вылете из преграды отклонился вверх от своего первоначального направления движения на 4.5 град. В эксперименте № 2 для образца с закруткой вправо было зафиксировано отклонение ударника вверх на 1.4 град. (рис. 2, б).

Рисунок 3, а соответствует эксперименту № 3 (образец с закруткой влево, отклонение вниз на 6.6 град.). Пробивание образца в эксперименте № 4 представлено на рис. 3, б с отклонением ударника вниз на 1.4 град.

На рис. 4, а показан результат эксперимента № 5 по пробиванию образца с закруткой влево и слабым отклонением вверх порядка 0.1 град. Это могло быть вызвано разрушением образца при пробивании: на рис. 4, а видно, как в левой верхней части образца откололся большой кусок. Такое разрушение мог вызвать скрытый внутренний дефект (например, трещина или расслоение), образовавшийся в процессе 3D-печати. Рисунок 4, б соответствует эксперименту № 6 (хиральная ауксетическая структура с закруткой влево, отклонение вниз на 1.1 град.). Заметим, что для всех шести экспери-

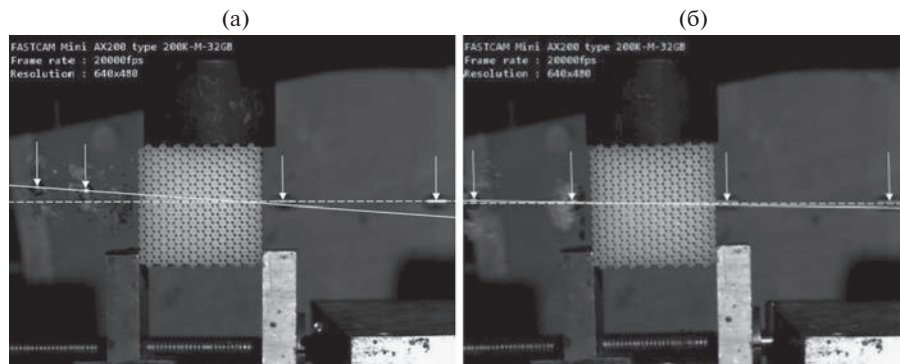


Рис. 2. Отклонение направления движения ударника вверх при пробивании ауксетических образцов с закруткой вправо: а) эксперимент № 1; б) эксперимент № 2.

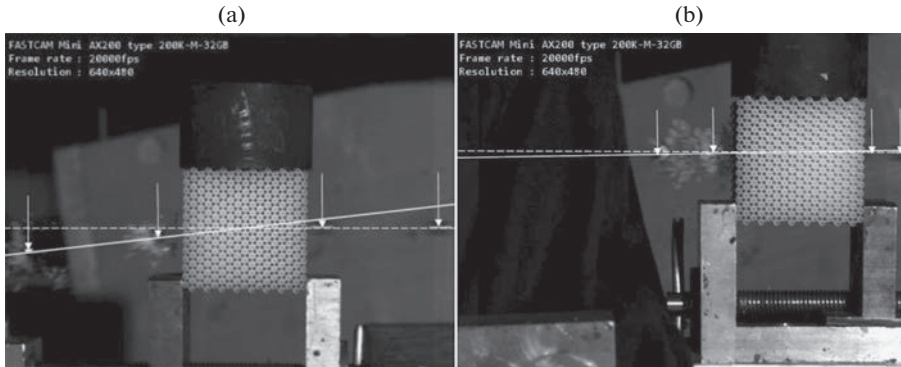


Рис. 3. Отклонение направления движения ударника вниз при пробивании ауксетических образцов с закруткой влево: а) эксперимент № 3; б) эксперимент № 4.

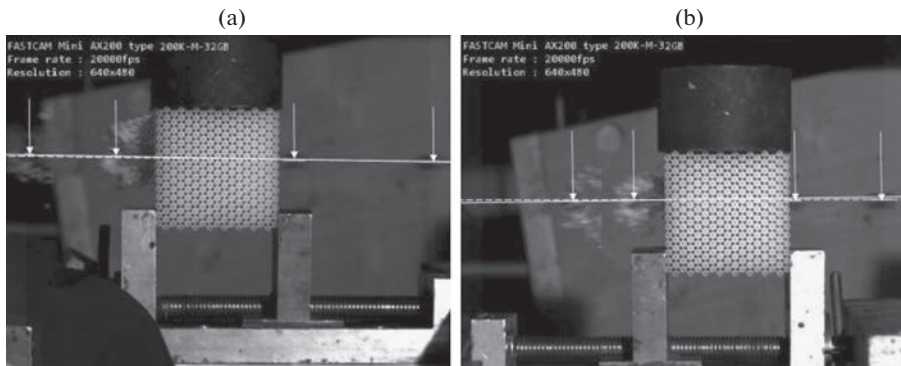


Рис. 4. Отклонение направления движения ударника при пробивании ауксетических образцов с закруткой влево: а) вверх — эксперимент № 5; б) вниз — эксперимент № 6.

ментов образцы были напечатаны из одной и той же упаковки (№ 1) исходного материала, то есть имели одинаковые материальные параметры.

Вторая серия экспериментов была проведена с целью изучения сопротивления пробиванию хиральных ауксетических образцов разной толщины. Все образцы были напечатаны из одной упаковки пластика (№ 2). Во всех экспериментах давление в камере пушки выставлялось таким образом, чтобы скорость вылета сферического ударника составляла приблизительно 275 м/с. Скорость ударника на входе измерялась с помощью приборов (осциллографа и оптического хронографа), а также высокоскоростной камеры. Скорость на выходе из образца измерялась с помощью съемки высокоскоростной камерой. Толщина пробиваемых образцов составляла, соответственно, 29, 37 и 45 мм. Размеры фронтальной и тыльной поверхностей, как и в предыдущей серии экспериментов, были равны 70×72 мм. В качестве ударника использовалось описанное выше сферическое жесткое тело. Данные экспериментов приведены в табл. 2.

На рис. 5 синим маркером нанесены экспериментальные данные значений квадрата скорости выхода ударника из образцов различной толщины.

Таблица 2. Результаты экспериментов и расчетов

Номер эксперимента (образца)	Толщина образца, мм	Скорость входа, камера, м/с	Скорость выхода, камера, м/с	Скорость выхода, по формуле (2.9), м/с	Скорость выхода, расчет КЭ, м/с
10	45	277.5	71.2	72.4	58.73
11	45	276.5	70.9	68.7	59.7
14	80	277.5	Застрял, глубина = 41 мм	—	Застрял, глубина = 50.6 мм
15	29	274.3	161.25	175.2	160.65
16	29	275.6	160	176.7	162.42
17	29	277.5	154.5	179	164.78
18	37	274.3	115.5	129.4	116.04

Для приближенного оценивания сопротивляемости пробиванию рассматриваемых образцов с аусетической структурой и прогнозирования скорости выхода ударника предлагается использовать хорошо известную двучленную формулу для зависимости силы сопротивления среды D от скорости внедряющегося тела $v = v(x)$ [18, 19]

$$D = -\pi R^2(A_0 + \kappa A_2 v^2), \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.1)$$

Здесь R — радиус цилиндрического ударника, M — его масса, κ — коэффициент, характеризующий форму головной части ударника [19–21], x — координата, отсчитываемая в направлении движения тела от крайней точки образца (точки входа), L — толщина образца, а заданные константы A_0 и A_2 характеризуют, соответственно, прочностные и инерционные свойства среды. Из второго закона Ньютона имеем уравнение, описывающее изменение скорости тела в сопротивляющейся среде, и начальное условие в виде

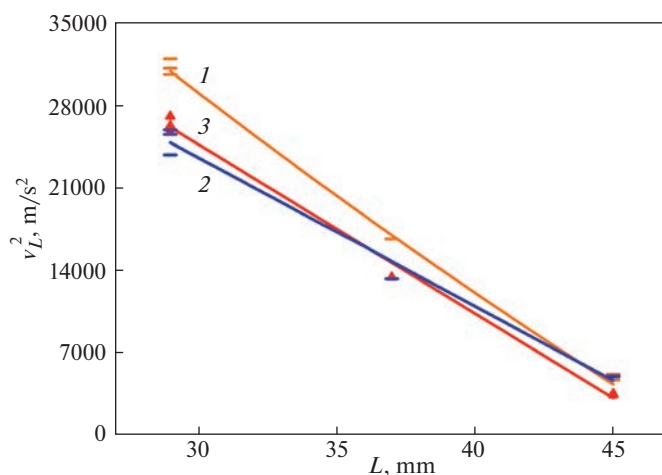


Рис. 5. Зависимость квадрата скорости выхода v_L^2 ударника от толщины L образца для скорости входа $v_0 \sim 275$ м/с.

$$\frac{dv^2}{dx} = -(\alpha A_0 + \beta A_2 v^2), \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.2)$$

$$(v^2)_{x=0} = v_0^2 \quad (2.3)$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha = \frac{2\pi R^2}{M}, \quad \beta = \frac{2\pi R^2 \kappa}{M} \quad (2.4)$$

Таким образом, при заданной скорости v_0 входа ударника в образец, заданных массе и радиусе ударника, а также заданных свойствах и размерах образца распределение скоростей $v = v(x)$ может быть найдено из решения задачи Коши (2.2), (2.3) и является монотонно убывающей функцией координаты $x \in [0, L]$. Обозначим скорость ударника на выходе из образца через v_L . Из решения краевой задачи (2.2), (2.3) имеем

$$v_L^2 = \frac{(\alpha A_0 + \beta A_2 v_0^2) \exp(-L\beta A_2) - \alpha A_0}{\beta A_2} = \left(\frac{A_0}{\kappa A_2} + v_0^2 \right) \exp(-L\beta A_2) - \frac{A_0}{\kappa A_2} \quad (2.5)$$

Соотношение (2.5) дает достаточно грубую оценку скорости на выходе из образца, так как предложенная модель не учитывает влияние на силу сопротивления граничных участков. После проведения экспериментов для всех использованных образцов было характерно отсутствие сколов и трещин на фронтальной поверхности и наличие конического кратера (каверны) на тыльной стороне. При этом размер кратера (его глубина и ширина) были примерно одинаковы у всех образцов вне зависимости от их толщины. Исходя из данных наблюдений, предлагается двухстадийная модель пробивания образцов из метаматериала с ауксетическими свойствами. На первом этапе внедрения ударника $x \in [0, l]$ свойства материала считаются постоянными, и используется соотношение (2.5), в котором L нужно заменить на l . Будем полагать на основе экспериментальных данных во всех случаях $l = L - 3R$. Скорость $v_l = v(l)$, определенную из формулы (2.5), примем в качестве начальной скорости входа на втором этапе внедрения. Будем считать, что при прохождении ударником второго участка образца ($x \in [l, L]$) прочностные и инерционные свойства метаматериала зависят от переменной x и описываются соотношениями

$$a_0(x) = \frac{A_0}{L-l}(L-x), \quad a_2(x) = \frac{A_2}{L-l}(L-x) \quad (2.6)$$

Скорость ударника на втором участке определим из решения следующей краевой задачи

$$\frac{dv^2}{dx} = -(\alpha a_0 + \beta a_2 v^2), \quad l \leq x \leq L \quad (2.7)$$

$$(v^2)_{x=l} = v_l^2 \quad (2.8)$$

Опуская элементарные выкладки, получим

$$\begin{aligned} v_L^2 &= \frac{(\alpha A_0 + \beta A_2 v_l^2) \exp\left(\frac{l-L}{2}\beta A_2\right) - \alpha A_0}{\beta A_2} = \\ &= \left(\frac{A_0}{\kappa A_2} + v_l^2 \right) \exp\left(\frac{l-L}{2}\beta A_2\right) - \frac{A_0}{\kappa A_2} = \left(\frac{A_0}{\kappa A_2} + v_0^2 \right) \exp\left(-\frac{l+L}{2}\beta A_2\right) - \frac{A_0}{\kappa A_2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

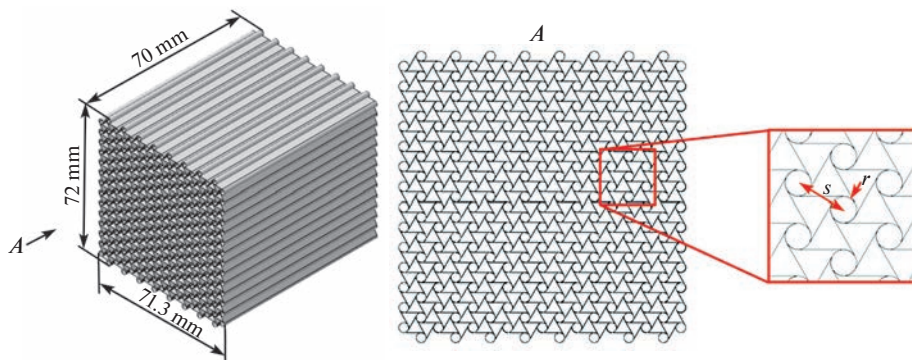


Рис. 6. Геометрическая модель образца с хиральной ауксетической структурой для расчетов методом конечных элементов.

Результаты расчетов по формуле (2.9) приведены для всех экспериментов в табл. 2. Значение параметра A_2 принималось равным плотности метаматериала и определялось экспериментально: $A_2 = 606.7 \text{ кг/м}^3$. Значение параметра k для сферического тела равно 0.5 [21]. Значение параметра $A_0 = 37.8 \times 10^6 \text{ н/м}^2$ определено из соотношения (2.5), в которое были подставлены данные эксперимента № 14 (см. табл. 2). При этом полагалось $L = 0.041 \text{ м}$. Для сравнения приведем параметры для алюминия [22, 23] ($A_0 = 350 \times 10^6 \text{ н/м}^2$, $A_2 = 2765 \text{ кг/м}^3$). Результаты расчетов нанесены оранжевыми маркерами на рис. 5. Оранжевая линия (линия 1) на рис. 5 иллюстрирует зависимость определенной по формуле (2.9) величины v_L^2 , которая характеризует остаточную энергию ударника, от толщины образца L для начальной скорости $v_0 = 275 \text{ м/с}$. Синяя линия (линия 2) является добавленной линией тренда для полученных экспериментальных данных. Прогнозируемая на основании предложенной расчетной модели скорость оказалась несколько выше экспериментальных значений. Это, в первую очередь, объясняется тем, что данная упрощенная модель не учитывает рассеивание энергии за счет разрушения материала и выброса его в момент вылета ударника за пределы образца. Для уточнения модели могут быть в дальнейшем включены в рассмотрение влияние начального этапа внедрения ударника в образец и зависимость силы сопротивления от ускорения тела (см., например, работу [24], где для этого вводится присоединенная масса ударника). Также уточнения модели можно было бы ожидать при добавлении третьего члена (линейного по скорости) в выражение в круглых скобках формулы (2.1). В этой связи можно отметить, например, работы [25–28], где применялась модель с трехчленной формулой для силы сопротивления и оценивалась глубина проникания ударников в такие материалы как бетон, металлы и песок.

3. Численное решение на основе КЭ-модели. Задача решалась с использованием явной динамической конечно-элементной формулировки с помощью программного комплекса Abaqus/Explicit. Для исследования пробивания хиральных ауксетических структур методом конечных элементов была подготовлена геометрическая модель образца, на основе 6 лучевых хиральных ячеек с расстоянием между соседними ячейками $s = 5 \text{ мм}$ и радиусом окружности $r = 1 \text{ мм}$ (рис. 6).

Подготовленная геометрическая модель была разбита на 4-узловые оболочечные элементы с редуцированным интегрированием S4R с глобальным размером элементов 0.5 мм. Толщина элемента образца задавалась равной 0.5 мм, что соответствует минимальной доступной экспериментальной толщине образца при 3D-печати по технологии

методом послойного наплавления (FDM). В качестве упругих свойств материала задавались свойства PLA пластика, используемого при печати: модуль Юнга $E = 3300$ МПа и коэффициент Пуассона $\nu = 0.33$. В качестве модели разрушения задавалось удаление элементов с деформацией сдвига, превышающей 0.55. Ударник моделировался как недеформируемая аналитическая поверхность, которая была разбита на 4-узловые жесткие элементы R3D4 с глобальным размером 0.5 мм.

Контактное взаимодействие ударника и образца задавалось с учетом жесткого нормального взаимодействия и с изотропным коэффициентом трения 0.2 в качестве касательного поведения. Главной поверхностью контакта задавалась поверхность ударника, вспомогательной поверхностью контакта — узлы образца. Граничными условиями принималось отсутствие перемещений в вершинах образца, в качестве начальных условий задавалась начальная скорость ударника в соответствии с измеренными значениями при экспериментах.

На рис. 7 приведены полученные по результатам расчета графики для компонент смещений и скоростей ударника (положительное вертикальное направление соответствует направлению вверх при закрутке хиральной структуры “вправо”).

По результатам расчета наблюдается отклонение ударника при пробивании образца с хиральной ауксетической структурой. При пробивании такой структуры с закруткой “вправо” ударник отклоняется вверх, что качественно соответствует результатам эксперимента (эксперименты № 1, 2, 3, 4, 6). Количественные различия в результатах расчета и экспериментов могут быть связаны с несоответствием исходных данных свойств материала и контактного взаимодействия, задаваемых в модели.

Также были выполнены расчеты методом конечных элементов для образцов с различной толщиной в соответствии с экспериментами, описанными в табл. 2. Результаты расчетов скорости выхода ударника приведены в данной таблице. По результатам расчетов получено, что отклонение расчетных значений выходной скорости ударника от экспериментально измеренных значений для образцов с толщиной 29–37 мм не превышает 7%. Для образцов с толщиной 45 мм отклонение существенно выше и составляет порядка 20%. Образец с толщиной 80 мм ударник не пробил, толщина пробития составила 50.6 мм, что превышает значение, полученное при эксперименте на 23%. На рис. 5 конечно-элементным расчетам соответствуют красные треугольные маркеры и красная линия тренда (линия 3). Из табл. 2 и рис. 5 видно, что для более тонких образцов точнее оказалась конечно-элементная модель. Для более толстых образцов лучше совпадали с экспериментом расчетные данные, полученные на основе аналитической модели.

4. Некоторые замечания и выводы. Проведенные эксперименты показали, что при пробивании ауксетических образцов с хиральной внутренней структурой наблюдается отклонение направления движения ударника после вылета из образца от подлетного направления. Установлен факт зависимости этого отклонения от ориентации (закрутки) элементов хиральной структуры. Возможные скрытые дефекты структуры (небольшие трещины или расслоения), появляющиеся в процессе изготовления образцов, могли быть причиной некоторого разброса в значениях величины угла отклонения. Можно предположить, что отклонение ударника при пробивании можно усилить, если подобрать нужным образом свойства материала, из которого изготавливается образец (элемент конструкции). В представленном экспериментальном исследовании размер элемента структуры имел порядок диаметра сферического ударника, что было обусловлено техническими возможностями 3D-принтера и особенностями экспериментальной установки (калибром пневматической пушки). Изучение влияния геометрических соотношений на степень отклонения ударника может стать предметом дальнейших исследований, в том числе с помощью разработанной численной модели. На основе предложенной двухстадийной модели пробивания рассматриваемых образцов из материала с ауксетическими свойствами сферическим ударником были

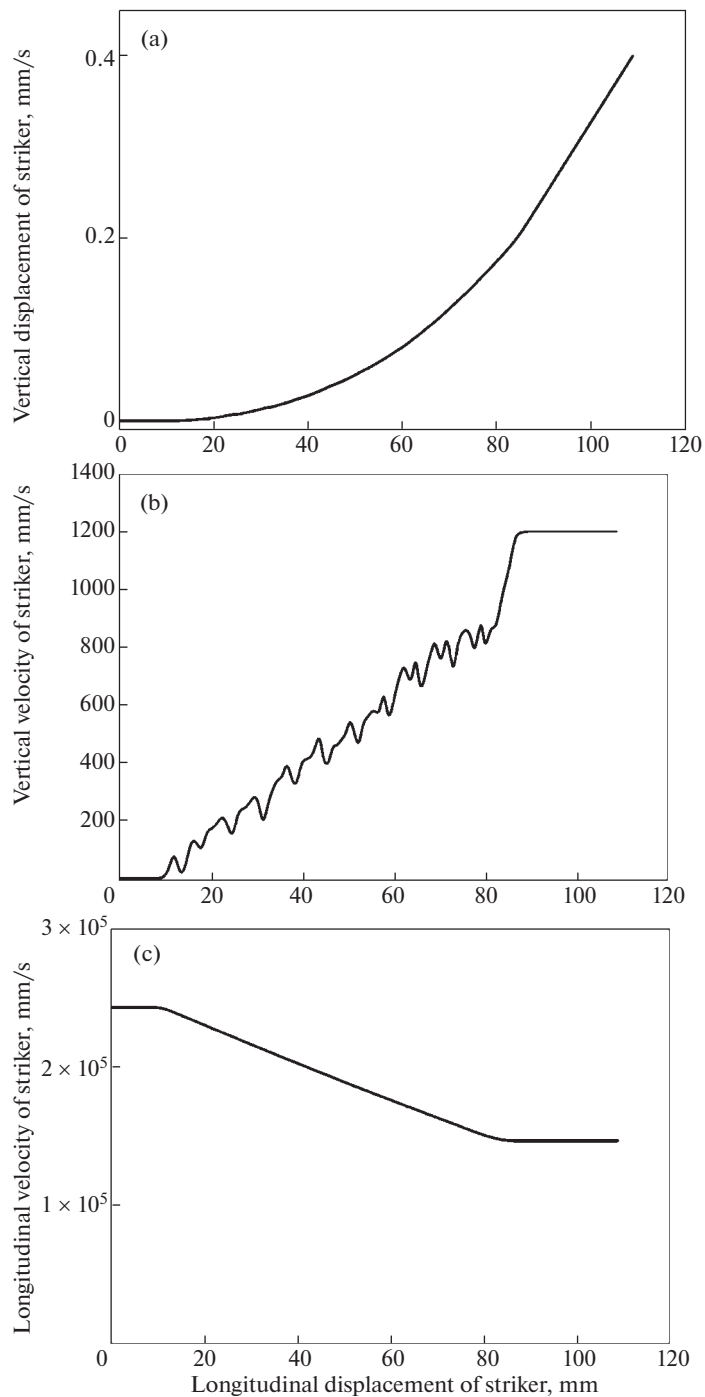


Рис. 7. Результаты расчета методом конечных элементов: (а) — вертикальное отклонение ударника, (б) — вертикальная скорость ударника, (с) — продольная скорость ударника.

получены приближенные аналитические оценки скорости ударника на вылете из образца. Эти данные могут быть полезны при планировании проведения дальнейших экспериментов. С теоретической и практической точек зрения будет также полезно уточнить математическую модель для применения аналитического подхода к изучению процессов высокоскоростного пробивания описанных структур.

Работа выполнена по темам госзадания ИПМех РАН (номера госрегистрации 123021700050-1, 123021700045-7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lim T.-C.* Auxetic materials and structures. Singapore: Springer, 2015.
<https://doi.org/10.1007/978-981-287-275-3>
2. *Kolken H.M.A., Zadpoor A.A.* Auxetic Mechanical Metamaterials // RSC Adv. 2017. V. 7. № 9. P. 5111–5129.
<https://doi.org/10.1039/C6RA27333E>
3. *Ren X., Das R., Tran P. et al.* Auxetic Metamaterials and Structures: A Review // Smart Mater. Struct. 2018. V. 27. № 2. P. 023001.
<https://doi.org/10.1088/1361-665X/aaa61c>
4. *Wu W., Hu W., Qian G. et al.* Mechanical design and multifunctional applications of chiral mechanical metamaterials: A review // Mater. Des. 2019. V. 180. P. 107950.
<https://doi.org/10.1016/j.matdes.2019.107950>
5. *Городицов В.А., Лисовенко Д.С.* Ауксетики среди материалов с кубической анизотропией // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 4. С. 7–24.
<https://doi.org/10.31857/S0572329920040054>
6. *Шутикова М.В.* Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 1. С. 3–40.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921060118>
7. *Gao Y., Huang H.* Energy absorption and gradient of hybrid honeycomb structure with negative Poisson's ratio // Mech. Solids. 2022. V. 57. № 5. P. 1118–1133.
<https://doi.org/10.3103/S0025654422050053>
8. *Скрипняк В.В., Чирков М.О., Скрипняк В.А.* Моделирование механической реакции ауксетических метаматериалов на динамические воздействия // Вестник ПНИПУ. Механика. 2021. № 2. С. 144–152.
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.13>
9. *Imbalzano G., Tran P., Lee P.V.S. et al.* Influences of material and geometry in the performance of auxetic composite structure under blast loading // Appl. Mech. Mater. 2016. V. 846. P. 476–481.
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.846.476>
10. *Zhao X., Gao Q., Wang L. et al.* Dynamic crushing of double-arrowed auxetic structure under impact loading // Mater. Des. 2018. V. 160. P. 527–537.
<https://doi.org/10.1016/j.matdes.2018.09.041>
11. *Li C., Shen H.S., Wang H.* Nonlinear dynamic response of sandwich plates with functionally graded auxetic 3D lattice core // Nonlinear Dyn. 2020. V. 100. P. 3235–3252.
<https://doi.org/10.1007/s11071-020-05686-4>
12. *Qiao J.X., Chen C.Q.* Impact resistance of uniform and functionally graded auxetic double arrow-head honeycombs // Inter. J. Impact Eng. 2015. V. 83. P. 47–58.
<https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2015.04.005>
13. *Novak N., Starcevic L., Vesjenjak M. et al.* Blast response study of the sandwich composite panels with 3D chiral auxetic core // Compos. Struct. 2019. V. 210. P. 167–178.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.11.050>
14. *Иванова С.Ю., Осипенко К.Ю., Кузнецов В.А., Соловьев Н.Г., Баничук Н.В., Лисовенко Д.С.* Экспериментальное исследование свойств ауксетических и неауксетических метаматериалов из металла при проникании в них жестких ударников // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 2. С. 176–180.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922600773>

15. *Lakes R.* Deformation mechanisms in negative Poisson's ratio materials: structural aspects // *J. Mater. Sci.* 1991. V. 26. P. 2287–2292.
<https://doi.org/10.1007/BF01130170>
16. *Grima J.N., Gatt R., Farrugia P.-S.* On the properties of auxetic meta-tetrachiral structures // *Phys Status Solidi B.* 2008. V.245. № 3. P. 511–520.
<https://doi.org/10.1002/pssb.200777704>
17. *Alderson A., Alderson K., Attard D. et al.* Elastic constants of 3-, 4- and 6-connected chiral and anti-chiral honeycombs subject to uniaxial in-plane loading // *Compos. Sci. Technol.* 2010. V. 70. P. 1042–1048.
<https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2009.07.009>
18. *Витман Ф.Ф., Иоффе Б.С.* Простой метод нахождения динамической твердости металлов с помощью двустороннего конуса // *Заводская лаборатория.* 1948. Т. XIV. № 6. С. 727–732.
19. *Витман Ф.Ф., Степанов В.А.* Влияние скорости деформирования на сопротивление деформированию металлов при скоростях удара 10^2 – 10^3 м/с // *Некоторые проблемы прочности твердого тела.* Изд-во АН СССР, 1959. С. 207–221.
20. *Каниболотский М.А., Уржумцев Ю.С.* Оптимальное проектирование слоистых конструкций. Новосибирск: Наука, 1989. 176 с.
21. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Макеев Е.В., Турутько А.И.* Некоторые аналитические и численные оценки параметров оптимальной структуры защитной плиты // *Проблемы прочности и пластичности.* 2013. Т. 75. № 3. С. 206–214.
22. *Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.* Applied high-speed plate penetration dynamics. Dordrecht: Springer, 2006. 353 p.
23. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю.* Оптимизация: контактные задачи и высокоскоростное проникновение. М.: Физматлит, 2016. 176 с.
24. *Бивин Ю.К., Колесников В.А., Флитман Л.М.* Определение механических свойств среды методом динамического внедрения // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1982. № 5. С. 181–185.
25. *Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.* Modeling of high-speed penetration into concrete shields and shape optimization of impactors // *Mech. Based Des. Struct. Mach.* 2006. V. 34. № 2. P. 139–156.
<https://doi.org/10.1080/15397730600663398>
26. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю.* Оптимизация формы жесткого тела, внедряющегося в сплошную среду // *Проблемы прочности и пластичности.* 2007. С. 47–58.
27. *Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.* High-Speed Penetration Modeling and Shape Optimization of the Projectile Penetrating into Concrete Shields // *Mech. Based Des. Struct. Mach.* 2009. 37. № 4. P. 538–549.
<https://doi.org/10.1080/15397730903272830>
28. *Cuncheng Shi, Mingyang Wang, Jie Li, Mengshen Li.* A model of depth calculation for projectile penetration into dry sand and comparison with experiments // *Int. J. Impact Eng.* 2014. V. 73. P. 112–122.
<https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.06.010>

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ЛАМЕ

© 2023 г. Н. Б. Расулова^{a,*}, Т. М. Махмудзаде^{b,**}

^aИнститут математики и механики НАН, Баку, Азербайджан

^bБакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

* e-mail: rasulova@gmail.com

** e-mail: tehminemahmudzade1996@gmail.com

Поступила в редакцию 10.07.2022 г.

После доработки 15.12.2022 г.

Принята к публикации 06.01.2023 г.

Хорошо известная задача Ламе, поставленная в 1852 году, предусматривает решение статического равновесия параллелепипеда, со свободными боковыми поверхностями, подверженными действию противоположных торцевых усилий. В данной работе эта же задача рассматривается для более усложнённого варианта, т.е. для случая ударных воздействий торцевых сил.

Найдено точное аналитическое решение этой задачи.

Подчеркивая особую трудность решения этой задачи, Ламе, в своей книге “*Leçons sur la thorie mathematique de l'elasticite des corps solides*” (Paris, 1852) писал: “C’est une sorte d’engine aussi digne d’exercer la sagasite des analystes que le fameux problem des trios corps de la Mécanique celeste”, — “Это, своего рода двигатель, столь же достойный тренировать прозорливость аналитиков, как и знаменитая проблема трех тел небесной механики”. В то время эта задача была предметом премии Парижской академии наук, предназначавшимся для того, кто решит задачу Ламе. Несмотря на это, до сегодняшнего дня не найдено никакого решения даже статического варианта этой задачи, а в усложненном варианте задача даже не была в повестке.

Ключевые слова: параллелепипед, уравнение Ламе, нестационарные волны, преобразование Лапласа

DOI: 10.31857/S0572329922600542, EDN: GABLBR

1. Введение. Особенности распространения волн в прямоугольном волноводе, несмотря на большое число публикаций, исследованы недостаточно. Это связано со значительным (по сравнению со слоем) усложнением картины явления — наличие дополнительной пары граничных плоскостей приводит к дополнительным отражениям продольных и сдвиговых волн, набором которых всегда определяется поле в волноводе. Такое усложнение физики процесса формирования нормальной волны приводит к тому, что строгое решение соответствующей граничной задачи является далеко не простым вопросом.

Существующие публикации в этой области механики, до недавнего времени, в основном были посвящены стационарной динамике прямоугольных брусьев [1–6], но существует и асимптотическое решение о нестационарном движении [7], где на основе уравнений упругости анализированы продольные волны нестационарной деформации в полубесконечном прямоугольном стержне. Получены асимптотические решения, справедливые на большом расстоянии от ударяемого конца.

Подход к решению задач динамики прямоугольных брус, в решениях [8–10], в которых найдены точные решения нестационарно – динамических задач о нормальном ударе по торцевой площадке полубесконечных, прямоугольных призм, для разного вида боковых условий, резко изменен; в отличие от всех предыдущих работ, здесь не было использовано Гельмгольцевое разложение трехмерной системы уравнений Ламе, а вместо этого, были введены три новые функции, взамен трех компонентов перемещения. Эти новые функции, впоследствии, окажутся решением неоднородных уравнений Гельмгольца, правая часть которых выражается через функции, составляющие начально-краевые условия задачи. Это, конечно, сильно упрощает процесс интегрирования, и тем самым позволяет построить решение почти для любого распределения внешних ударных сил по торцевой области, и одновременно, для произвольного по времени ударного импульса.

В работе [10], построено аналитическое решение о распространении волн в полубесконечной прямоугольной призме со свободными боковыми поверхностями. Настоящая работа аналогична этой, за исключением того, что длина призмы конечная. Возникновение двух дополнительных преград на пути распространения волн, (в виде торцевых площадок), несомненно ещё больше усугубляет, и без того сложную волновую картину движения.

В рассматриваемом случае ввиду того, что тело имеет конечные размеры, для существования единственного решения, противоположные торцы подвергаются и одинаковым, и противоположным ударным нагрузкам, дабы результирующая внешняя сила была нулевой.

Найдено точное аналитическое решение представленной задачи для случая равномерного распределения ударных нагрузок на области торцевых площадок.

2. Постановка и решение задачи. Прямоугольный упругий брус конечной длины, параллелепипед подвергается действию противоположенных ударных осевых сил, приложенных к торцевым площадкам. Боковые стороны свободны от усилий, что гораздо усложняет процесс построения решений.

Очевидно, рассматриваемая задача требует решения следующей начально-краевой задачи математической физики; – движение описывается системой трехмерных уравнений Ламе, которая в векторной форме имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{graddiv} \mathbf{U} + \mu \Delta \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(u, v, w) \quad (2.1)$$

и оно происходит в области пространства, занятой параллелепипедом:

$-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, -l \leq z \leq l$ при $t > 0$. К этой системе присоединяются следующие начально-краевые условия.

$$\vec{U} = 0; \quad \dot{\mathbf{U}} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (2.2)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_0 f(t), \quad u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm l \quad (2.3)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a, \quad -l \leq z \leq l$$

$$\sigma_{yx} = \sigma_{yy} = \sigma_{yz} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b, \quad -l \leq z \leq l \quad (2.4)$$

где $\mathbf{U}$ – вектор перемещения, $\{\sigma\}$ – тензор напряжения, λ, μ – коэффициенты Ламе, t – время, ρ – плотность материала.

Следуя [8, 9], задача (2.1)–(2.4) сводится к интегрированию более простой, но на этот раз однородной системы:

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} H_2^* \psi_2 - (\lambda + 2\mu) H_1^* \phi = 0$$

$$H_2^* \psi_1 = 0$$

$$\Delta H_2^* \psi_2 = 0$$

где H_i^* и Δ трехмерные операторы Гельмгольца и Лапласа, соответственно:

$$H_i^* = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{p^2}{c_i^2}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

а три новые функции ϕ, ψ_1, ψ_2 определяются преобразованиями Лапласа трех компонентов перемещения по формулам:

$$\bar{u} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial x}$$

$$\bar{v} = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial y}$$

$$\bar{w} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2}$$

В дальнейшем для простоты черточки над величинами $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ будут опущены. Эта система эквивалентна следующей системе:

$$\Delta H_1^* \phi = 0$$

$$H_2^* \psi_1 = 0 \tag{2.5}$$

$$\Delta H_2^* \psi_2 = 0$$

Вид решений определяется на основе решений аналогичной задачи полубесконечной призмы [10].

Решение можно искать в виде:

$$\phi = \phi(z) \tag{2.6}$$

Подставив в первое уравнение (2.5), с учетом соображений о симметрии получим:

$$\phi = A \operatorname{ch} \frac{p}{c_1} z \tag{2.7}$$

Постоянная A определяется из условий (2.3), после их преобразования по оператору Лапласа:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \sigma_0 \overline{f(p)}, \quad z = \pm l$$

Отсюда

$$A = \frac{c_1^2 \sigma_0 \overline{f(p)}}{p^2 (\lambda + 2\mu) \operatorname{ch} \frac{p}{c_1} l} \tag{2.8}$$

Отметим, что решение (2.7), с учетом (2.8), удовлетворяет всем торцевым условиям (2.3).

Это решение соответствует плоским продольным волнам, одновременно стартующих с торцов, и распространяющихся вдоль оси призмы, в противоположных направлениях.

Несомненно, взаимодействия этих волн со свободными боковыми поверхностями вызывают, в первую очередь, поперечные волновые движения.

Сначала отметим, что все решения, соответствующие этим дифракционным волнам, должны удовлетворять нулевым торцевым условиям; следовательно,

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ v &= 0 \quad \text{при} \quad z = \pm l \\ \sigma_{zz} &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Благодаря работе [10], эти волны, отраженные от боковых поверхностей, могут быть найдены как решение третьего уравнения системы (2.5), с учетом условий (2.9). Уместно отметить, что условия (2.9) могут быть автоматически удовлетворены выбором решения в следующем виде:

$$\psi_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\psi}_{2m}(x, y) \sin\left(\frac{1}{2} + m\right) \cdot \pi z \quad (2.10)$$

Подставив эту функцию в вышеупомянутые уравнения, получим:

$$H_{0m}^* H_{2m}^* \bar{\psi}_{2m} = 0 \quad (2.11)$$

где

$$H_0^* = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\pi^2 \left(\frac{1}{2} + m\right)^2}{l^2}$$

Обозначим $\pi^2 \left(\frac{1}{2} + m\right)^2 = \beta_m^2$

$$H_{im}^* = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(\frac{\beta_m^2}{l^2} + \frac{p^2}{c_i^2}\right)$$

для определения каждого $\bar{\psi}_{2m}(x, y)$ в отдельности.

Следуя [10], функции $\bar{\psi}_{2m}(x, y)$ будем искать в классе решений $f_1(x) + f_2(y)$. Простейшим решением этого вида будет:

$$\bar{\psi}(x, y) = B_{1m} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p^2}{c_2^2} + \frac{\beta_m^2}{l^2}} x + B_{2m} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p^2}{c_2^2} + \frac{\beta_m^2}{l^2}} y$$

Постоянные B_{1m} и B_{2m} могут быть определены из условия равенства нулю растягивающих напряжений на поверхностях $x = \pm a$ и $y = \pm b$, а именно:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}|_{x=\pm a} &= \sigma_{xx}(\varphi) + \sigma_{xx}(\psi_2) = 0 \\ \sigma_{yy}|_{y=\pm b} &= \sigma_{yy}(\varphi) + \sigma_{yy}(\psi_2) = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda \frac{\sigma_0 f(p)}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{p}{c_1} z}{\operatorname{ch} \frac{p}{c_1} l} = -2\mu \sum_{m=0}^{\infty} B_{im} \frac{\pi m}{l} \left[\frac{p^2}{c_2^2} + \left(\frac{\beta_m^2}{l^2} \right) \right] \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p^2}{c_2^2} + \frac{\beta_m^2}{l^2}} \cdot a \cdot \cos \frac{\beta_m z}{l} \quad (2.12)$$

$$\lambda \frac{\sigma_0 f(p)}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{p}{c_1} z}{\operatorname{ch} \frac{p}{c_1} l} = -2\mu \sum_{m=0}^{\infty} B_{lm} \frac{\pi m}{l} \left[\frac{p^2}{c_2^2} + \left(\frac{\beta_m^2}{l^2} \right) \right] \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p^2}{c_2^2} + \frac{\beta_m^2}{l^2}} \cdot b \cdot \cos \frac{\beta_m z}{l}$$

Разделим левую часть уравнения (2.12) по функциям $\cos \frac{\beta_m z}{l}$, а затем сравнением коэффициентов при одинаковых функциях $\cos \frac{\beta_m z}{l}$ получим:

$$B_{lm} = \frac{2\lambda \cdot \sigma_0 f(p)}{\pi\mu(\lambda + 2\mu)m} \cdot \frac{(-1)^m \alpha_1 \operatorname{th} \alpha_1 l}{v_{1m}^2(p) \cdot v_{2m}^2(p) \cdot \operatorname{ch} v_{2m} \frac{pa}{c_2}}$$

$$B_{2m} = \frac{2\lambda \cdot \sigma_0 f(p)}{\pi\mu(\lambda + 2\mu)m} \cdot \frac{c_1^2 c_2^2 (-1)^m \alpha_1 \operatorname{th} \alpha_1 l}{v_{1m}^2(p) \cdot v_{2m}^2(p) \cdot \operatorname{ch} v_{2m} \frac{pb}{c_2}} \quad (2.13)$$

здесь:

$$\alpha_1 = \frac{p}{c_1} \quad v_{im}(p) = \sqrt{p^2 + \frac{\beta_m^2 c_2^2}{l^2}}$$

Итак, решение (2.10), соответствующее первой группе отраженных поперечных волн, полностью определено. Это решение на боковых поверхностях вызывает касательные напряжения σ_{xz} и σ_{yz} , которые должны быть аннулированы дополнительными решениями. Оказывается, как и было отмечено в [10], из всех возможных решений систем уравнения (2.5), только решение вида

$$\bar{\Psi}_{2m}^* = \sum_k C_{1mk} \cos\left(\frac{1}{2} + k\right) \frac{\pi x}{a} + C_{2mk} \cos\left(\frac{1}{2} + k\right) \frac{\pi y}{b} \quad (2.14)$$

способно нейтрализовать вышеупомянутые напряжения.

Рассмотрим уравнения $H_{0m}^* H_{2m}^* \bar{\Psi}^* = D_m$ или

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\beta_m^2}{l^2} - \frac{p^2}{c_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\beta_m^2}{l^2} \right) \bar{\Psi}_{2m}^* = D_{1m}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\beta_m^2}{l^2} - \frac{p^2}{c_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\beta_m^2}{l^2} \right) \bar{\Psi}_{2m}^* = D_{2m} \quad (2.15)$$

где неизвестные постоянные $D_m = D_{1m} + D_{2m}$ подлежат определению. Не вдаваясь в подробности, приведем готовые формулы для этих постоянных, которые определены из условия равенства нулю касательных напряжений σ_{xz} и σ_{yz} на поверхностях $x = \pm a$ и $y = \pm b$:

$$C_{1km} = 2D_{1m} \frac{(-1)^k}{\pi \left[\eta_{1k}^2 + \frac{v_{2m}^2(p)}{c_2^2} \right] \left[\eta_{1k}^2 + \frac{\beta_m^2}{l^2} \right] \eta_{1k}}$$

$$C_{2km} = 2D_{2m} \frac{(-1)^k}{\pi \left[\eta_{2k}^2 + \frac{v_{2m}^2(p)}{c_2^2} \right] \left[\eta_{2k}^2 + \frac{\beta_m^2}{l^2} \right] \eta_{2k}} \quad (2.16)$$

$$D_{1m} = \frac{2}{\pi(\lambda + 2\mu)\mu} \frac{2\lambda\sigma_0 c_1^2}{v_{1m}^2(p)} \frac{f(p)}{v_{1m}^2(p)} \frac{(-1)^m \left(\frac{p^2}{c_2^2} + 2 \frac{\beta_m^2}{l^2} \right) \cdot \left(\text{th} v_{2m}(p) \frac{a}{c_1} \right) \cdot \text{th} \frac{p}{c_1} l}{\sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\eta_{2k}^2 + \frac{v_{2m}^2}{c_2^2} \right) \frac{\beta_m^2 - \eta_{2k}^2}{l^2} \right]^{-1} \frac{\beta_m^2}{l_2} + \eta_{2k}^2} \quad (2.17)$$

$$D_{2m} = \frac{2}{\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{2\lambda\sigma_0 c_1^2}{v_{1m}^2(p)} \frac{f(p)}{v_{1m}^2(p)} \frac{(-1)^m \left(\frac{p^2}{c_2^2} + 2 \frac{\beta_m^2}{l^2} \right) \cdot \left(\text{th} v_{2m} \frac{b}{c_1} \right) \cdot \text{th} \frac{p}{c_1} l}{\sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\eta_{2k}^2 + \frac{v_{2m}^2}{c_2^2} \right) \frac{\beta_m^2 - \eta_{2k}^2}{l^2} \right]^{-1} \frac{\beta_m^2}{l_2} + \eta_{2k}^2}$$

$$\eta_{1k} = \frac{\pi}{a} \left(\frac{1}{2} + k \right), \quad \eta_{2k} = \frac{\pi}{b} \left(\frac{1}{2} + k \right), \quad v_{im} = \sqrt{p^2 + \frac{\beta_m^2 c_i^2}{l^2}}$$

Заметим, что уравнение $H_{0m}^* H_{1m}^* \psi_{2m} = -D_m$ имеет еще и очевидное решение $\psi_{2m} = -\frac{D_m}{\left(\frac{\beta_m^2}{l^2} + \frac{p^2}{c_2^2} \right) \frac{\beta_m^2}{l^2}}$, которое компенсирует решение (2.14) неоднородного уравнения (2.15), и, одновременно, не вызывает в теле никакого перемещения.

Полученные решения по виду почти идентичны с решениями, приведенными в [10], только с одной разницей, что интегралы по непрерывному параметру $q \in (0, \infty)$, в решениях [10], (представляющих оригиналы преобразований Фурье) заменяются с бесконечной суммой для дискретных значений $q = \frac{\beta_m}{l}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) аналогичного параметра. Поэтому методы обращения полученных решений (преобразований Лапласа), изложенных в [10], также идентичны и легко могут быть применены и здесь. Не останавливаясь в подробностях, мы только приведем решение для осевых скоростей ($\dot{W}$) рассматриваемого параллелепипеда:

$$f(p) = H(t)$$

$$\dot{W} = \frac{\lambda \cdot \sigma_0 \cdot c_1}{\mu(\lambda + 2\mu)} \left\{ \left[\int_0^t \sum_m \frac{(-1)^m}{m} F_m(t - \tau) \cdot M \left(\tau, \frac{2nl}{c_1} \right) d\tau \right] \frac{\cos \beta_m z}{l} \right\}$$

где:

$$F_m(\tau) = F_{am}(\tau) + F_{bm}(\tau)$$

$$F_{am}(\tau) = \frac{\alpha_{1m} \left(\cos \frac{\gamma_m x}{c_2} \right) \sin \alpha_{1m} t}{\cos \frac{\gamma_m a}{c_2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{(\alpha_{1m}^2 + \eta_{1k}^2 c_2^2)} \eta_{1k} \cdot c_2^2 \cdot (\cos \eta_{1k} c_2 t) \cos \eta_{1k} x}{a(\gamma_m^2 - \eta_{1k}^2 \cdot c_2^2)}$$

$$F_{bm}(\tau) = \frac{\alpha_{1m} \left(\cos \frac{\gamma_m y}{c_2} \right) \sin \alpha_{1m} t}{\cos \frac{\gamma_m b}{c_2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{(\alpha_{1m}^2 + \eta_{2k}^2 c_2^2)} \eta_{2k} \cdot c_2^2 \cdot (\cos \eta_{2k} c_2 t) \cos \eta_{2k} x}{b(\gamma_m^2 - \eta_{2k}^2 \cdot c_2^2)}$$

$$M\left(\tau, \frac{2nl}{c_1}\right) = H(\tau) + 2 \sum_1^{\infty} (-1)^n H\left(\tau - \frac{2nl}{c_1}\right)$$

$$\alpha_{im} \doteq \frac{c_i \beta_m}{l} \quad \gamma_m = \sqrt{\alpha_{1m}^2 - \alpha_{2m}^2}$$

3. Заключение. Найдено точное аналитическое решение нестационарной задачи о распространении волн в прямоугольной призме короткой длины, подверженной действиям ударных, противоположно-осевых сил, равномерно распределенных на торцевых площадках. Эта задача является динамическим аналогом известной задачи Ламе, которая предусматривает определение решения статического равновесия этого же параллелепипеда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Medick M.A. Extensional waves in elastic bars of rectangular cross sections // J. Acoust. Soc. Am. 1968. V. 43. № 1. P. 152–161.
<https://doi.org/10.1121/1.1910744>
2. Вовк А.Е., Гудков В.В., Левченкова Т.В., Тютекин В.В. Нормальные волны твердого прямоугольного волновода // Акустический журнал. 1980. Т. 26. В. 3. С. 365–363.
3. Fraser W.B. Stress wave propagation in rectangular bars // Int. J. Solids Struct. 1969. V. 5. № 4. P. 379–397.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90020-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90020-1)
4. Volterra E., Asce M. Dispersion of longitudinal waves // J. Eng. Mech. 1957. V. 83. № 3. P. 13–22.
<https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0000032>
5. Hertelendy P. An approximate theory governing symmetric motions of elastic rods of rectangular or square cross section // J. Appl. Mech. 1968. V. 35. № 2. P. 333–341.
<https://doi.org/10.1115/1.3601200>
6. Tanaka K., Iwahashi Y. Dispersion relations of elastic wave in bars of rectangular cross sections // Bull. JSME. 1977. V. 20. № 146. P. 922–929.
<https://doi.org/10.1299/jsme1958.20.922>
7. Tanaka K., Iwahashi Y. Longitudinal impact of a semi-infinite rectangular bar // Bull. JSME. 1978. V. 21. № 156. P. 980–985.
<https://doi.org/10.1299/jsme1958.21.980>
8. Расулова Н.Б. Распространение волн в призматическом бруссе, подверженном действию осевых сил // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 176–179.
9. Rassoulova N.B. On dynamic of bar of rectangular cross section // J. Appl. Mech. 2001. V. 68. № 4. P. 662–666.
<https://doi.org/10.1115/1.1352063>
10. Расулова Н.Б., Шамилова Г.Р. Распространение волн напряжений в прямоугольном бруссе // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 4. С. 144–152.

УДК 539.3

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕД

© 2023 г. А. В. Ильяшенко^{a,*}

^aМосковский государственный строительный университет, Москва, Россия

* e-mail: avi_56@mail.ru

Поступила в редакцию 20.12.2022 г.

После доработки 09.01.2023 г.

Принята к публикации 12.01.2023 г.

Осуществляется построение фундаментальных решений в R^3 для уравнений гармонических колебаний в теории упругости анизотропных упругих сред. Решения строятся в виде рядов по мультиполям. Доказываются теоремы о сходимости рядов в топологии компактной сходимости в $R^3 \setminus 0$. Обсуждаются проблемы построения некоторых сингулярных решений теории колебаний анизотропного тела. Фундаментальное решение уравнений колебаний для изотропной среды получено в замкнутом виде.

Ключевые слова: фундаментальные решения, анизотропия, изотропия, теория колебаний

DOI: 10.31857/S0572329922600852, EDN: PYWIFD

Введение. Осуществляется построение в R^3 тензора Грина уравнений теории колебаний анизотропных упругих сред с анизотропией общего вида.

Для изотропной упругой среды в R^3 фундаментальное решение уравнений установленных упругих колебаний в замкнутом виде получено в [1, 2]. Однако форма построенного решения такова, что при нулевой частоте это решение теряет смысл и не переходит в фундаментальное решение Кельвина, отвечающее уравнениям статики изотропной среды. Заметим, что в скалярном случае в аналогичной ситуации фундаментальное решение уравнения Гельмгольца при $\omega = 0$ совпадает с соответствующим решением классической теории потенциала [3, 4].

При произвольной анизотропии упругой среды фундаментальные решения теории колебаний в замкнутом виде получить не удастся. В [5] с помощью преобразования Фурье задача построения фундаментальных решений уравнений теории колебаний и псевдоколебаний анизотропных сред сведена к задаче вычисления несобственных пространственных интегралов, для подсчета которых эффективные вычислительные алгоритмы отсутствуют.

В отличие от теории колебаний, для нестационарной динамической теории упругости задачу построения фундаментальных решений в общем случае анизотропии удастся свести к вычислению интегралов по диаметральному окружностям на сфере единичного радиуса [6, 7]. Это выполняется при помощи преобразования Радона [8, 9], возникающего на этапе обращения по Фурье символов фундаментальных решений. В принципе этот метод, известный также как метод разложения на плоские волны, может быть применен и для получения фундаментальных решений теории колебаний. В то же время, метод разложения на плоские волны даже в более простом случае урав-

нений статики по оценкам [10, 11] требует весьма значительных затрат машинного времени.

Один из альтернативных подходов состоит в разложении символа фундаментального решения в мультиполярный ряд [12–14] и осуществлении обратного преобразования Фурье с использованием мультипликаторов Бохнера [15, 16]. На основе этой методики, известной как разложения по мультиполям [12, 17, 18], в настоящей работе, по-видимому, впервые получено фундаментальное решение теории колебаний для анизотропной упругой среды. Показано, что в случае изотропной среды этим методом удастся в замкнутом виде получить фундаментальное решение, которое, в отличие от фундаментального решения Купрадзе [1, 2], совпадает в фундаментальным решением Кельвина при нулевой частоте.

В заключение надо отметить, что в случае уравнений нестационарной динамики, соответствующие фундаментальные решения в пространственном случае обычно строят с помощью экспоненциальных отображений [19–21], а в плоском случае для этих целей применяют логарифмические отображения [22–24]. На основе фундаментальных решений уравнений движения могут быть построены соответствующие потенциалы простого слоя (с регулярным ядром) и двойного слоя (с сингулярным ядром на несущей поверхности) [25–29]. С помощью соответствующих сингулярных ядер удастся построить точные решения внутренней и внешней динамических задач Лэмба, см. [30–33].

1. Основные операторы. Рассматривается однородная анизотропная упругая среда в R^3 , уравнения установившихся колебаний которой имеют вид

$$A_\omega(\partial_x)u(x) \equiv [A_0(\partial_x) - \rho\omega^2 I]u(x) = g(x) \quad (1.1)$$

u — поле перемещений, ρ — плотность среды, ω — частота колебаний, I — единичная диагональная матрица, g — поле объемных сил. В уравнениях (1.1) A_0 — матричный дифференциальный оператор уравнений равновесия (статики):

$$A_0(\partial_x)u(x) \equiv -\operatorname{div}_x C \cdot \nabla_x u(x) \quad (1.2)$$

Четырехвалентный тензор упругости C в (1.2) предполагается строго эллиптическим и симметричным, если его рассматривать как линейный оператор действующий в пространстве двухвалентных тензоров, что обеспечивается симметрией по крайним парам индексов: $C^{ijkl} = C^{klij}$.

Преобразование Фурье

$$f^\wedge(\xi) = \int_{R^3} f(x) \exp(2\pi i \xi \cdot x) dx, \quad \xi \in R^3$$

примененное к оператору A_ω , дает соответствующий символ

$$A^\wedge_\omega(\xi) \equiv A^\wedge_0(\xi) - \rho\omega^2 I = (2\pi)^2 \xi \cdot C \cdot \xi - \rho\omega^2 I \quad (1.3)$$

По определению фундаментального решения имеем

$$A_\omega(\partial_x)E_\omega(x) = \delta(x)I \quad (1.4)$$

Преобразование Фурье формулы (1.4) позволяет получить следующее выражение для символа фундаментального решения

$$E^\wedge_\omega(\xi) = A^\wedge_\omega{}^{-1}(\xi) \quad (1.5)$$

Выражения (1.3), (1.5) показывают, что символы $A^\wedge_0$, $E^\wedge_0$, отвечающие уравнениям статики, положительно однородны по ξ степени 2 и -2 соответственно.

2. Свойства символов. Спектральное разложение символов $A^\wedge_0$, $E^\wedge_0$ дает

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{\wedge}_0(\xi) &= \mathbf{Q}(\xi') \cdot \mathbf{D}_0(\xi) \cdot \mathbf{Q}'(\xi') \\ \mathbf{E}^{\wedge}_0(\xi) &= \mathbf{Q}(\xi') \cdot \mathbf{D}_0^{-1}(\xi) \cdot \mathbf{Q}'(\xi'), \quad \xi' = \xi/|\xi| \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\mathbf{Q}$ — матрица поворотов, а $\mathbf{D}_0$ — диагональная матрица, на главной диагонали которой находятся собственные числа $\lambda_i(\xi)$, $i = 1, 2, 3$ символа $\mathbf{A}^{\wedge}_0$. Формулы (1.3), (1.4) показывают, что спектральное разложение символов $\mathbf{A}^{\wedge}_\omega$, $\mathbf{E}^{\wedge}_\omega$ осуществляется по формулам аналогичным (2.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{\wedge}_\omega(\xi) &= \mathbf{Q}(\xi') \cdot \mathbf{D}_\omega(\xi) \cdot \mathbf{Q}'(\xi'), \quad \mathbf{E}^{\wedge}_\omega(\xi) = \mathbf{Q}(\xi') \cdot \mathbf{D}_\omega^{-1}(\xi) \cdot \mathbf{Q}'(\xi') \\ \mathbf{D}_\omega(\xi) &= \mathbf{D}_0(\xi) - \rho\omega^2 \mathbf{I}, \quad \xi' = \xi/|\xi| \end{aligned} \quad (2.2)$$

Существенно, что тензоры поворота $\mathbf{Q}$ в (2.1) и (2.2) одинаковы. Это легко доказать для символов $\mathbf{A}^{\wedge}_0$ и $\mathbf{A}^{\wedge}_\omega$, а затем перейти к $\mathbf{E}^{\wedge}_0$, $\mathbf{E}^{\wedge}_\omega$ по (1.5).

Приведем также следующее легко проверяемое тождество

$$(\mathbf{E}^{\wedge}_0)^n = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{D}_0)^{-n} \cdot \mathbf{Q}' \quad (2.3)$$

Теорема 2.1. а) Символ $\mathbf{E}^{\wedge}_\omega$ вещественно аналитичен по ξ и ω всюду в $R^3 \times R^1 \setminus \text{Con}_d$, где Con_d — характеристический конус оператора $\mathbf{A}(\partial_x, \partial_t)$; б) в точках $\xi, \omega \notin \text{Con}_d$ имеет место разложение в ряд Тейлора

$$\mathbf{E}^{\wedge}_\omega(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{E}^{\wedge}_0(\xi))^n \rho^{n-1} \omega^{2(n-1)} \quad (2.4)$$

в) ряд в правой части (2.4) абсолютно сходится в топологии компактной сходимости в $R^3 \cdot R^1 \setminus \text{Con}_d$; г) для любых $\omega \neq 0$ $\mathbf{E}^{\wedge}_\omega(\xi) \rightarrow 1/\rho\omega^2 \mathbf{I}$ при $\xi \rightarrow 0$; д) при любых ω ряд в правой части (2.4) сходится в слабой топологии S' , где S' — пространство медленно растущих тензорных распределений в R^3 .

Замечание 2.1. В общем случае анизотропии Con_d состоит из трех конусов с общей вершиной в нуле, причем в некоторых частных случаях эти конусы могут иметь и другие точки соприкосновения. Например, в изотропном случае два из трех конусов вообще совпадают [2].

Доказательство. Утверждение а) вытекает из вещественной аналитичности символа $\mathbf{A}^{\wedge}_\omega$ всюду в $R^3 \cdot R^1$, причем в $R^3 \cdot R^1$ детерминант $\mathbf{A}^{\wedge}_\omega$ обращается в нуль лишь в точках характеристического конуса. В силу (1.5) точки характеристического конуса образуют полярное множество символа $\mathbf{E}^{\wedge}_\omega$.

Для доказательства б) заметим, что с учетом формул (1.3), (1.5) символ $\mathbf{E}^{\wedge}_\omega(\xi)$ является резольвентой символа $\mathbf{A}^{\wedge}_\omega(\xi)$ в нормированной алгебре симметричных тензоров второго ранга в R^3 . Далее рассмотрим разложение символа $\mathbf{E}^{\wedge}_\omega(\xi)$, очевидно вещественно аналитичного по ω при любых $\xi, \omega \notin \text{Con}_d$, в ряд Тейлора по степеням ω :

$$\mathbf{E}^{\wedge}_\omega(\xi) \equiv (\mathbf{A}^{\wedge}_0(\xi) - \rho\omega^2 \mathbf{I})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}^{\wedge}_0(\xi)^{-n} \rho^{n-1} \omega^{2(n-1)} \quad (2.5)$$

При получении (2.5) использовалась формула дифференцирования резольвенты по параметру [12] с необходимым изменением знаков:

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda) = n! R^{n+1}(\lambda) \quad (2.6)$$

где $R(\lambda) = \mathbf{E}^{\wedge}_\omega(\xi)$, $\lambda = \rho\omega^2$, так что $R(0) = \mathbf{E}^{\wedge}_0(\xi)$. Но ряд в правой части (2.5) как раз представляет собой искомое разложение (2.4).

Доказательство в) вытекает из вещественной аналитичности символа $E_\omega^\wedge$ в $R^3 \cdot R^1 \setminus \text{Con}_d$, обеспечивающей абсолютную и, следовательно, равномерную сходимость на компактных подмножествах из $R^3 \cdot R^1 \setminus \text{Con}_d$.

Для доказательства утверждения г) заметим, что $\forall \omega A_\omega^\wedge(\xi) \rightarrow \rho \omega^2 I$ при $\xi \rightarrow 0$. Отсюда и из общей теории нормированных алгебр следует, что при любых $\xi, \omega \notin \text{Con}_d$ и $\omega \neq 0$ символ $E_\omega^\wedge(\xi)$ как резольвента $A_\omega^\wedge(\xi)$ сходится к $1/\rho \omega^2 I$.

В силу (2.5) доказательство утверждения д) достаточно провести для произвольной тензорной функции $g \in C^\infty$, имеющей компактный носитель, содержащийся в какой-либо окрестности нуля в ξ -пространстве, где сосредоточены особенности вида $|\xi|^{-2n}$ членов ряда (2.5) при условии, что $\omega \neq 0$ (при $\omega = 0$ доказательство тривиально, поскольку ряд в правой части (2.5) редуцируется к одному члену). Но в силу предыдущего утверждения ряд (2.5) в ε -окрестности нуля в ξ -пространстве можно заменить на $1/\rho \omega^2 I$ с ошибкой $O(\varepsilon)$, что обеспечивает доказательство утверждения д).

3. Построение фундаментального решения E_ω . Теорема 3.1. а) Фундаментальное решение E_ω вещественно аналитично по x и ω всюду в $R^3 \setminus 0 \cdot R^1$; б) имеет место разложение

$$E_\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(x) \rho^{n-1} \omega^{2(n-1)}, \quad (x, \omega) \in R^3 \setminus 0 \times R^1 \quad (3.1)$$

сходится в топологии компактной сходимости в $R^3 \setminus 0 \cdot R^1$.

Доказательство. Утверждение а) вытекает из известных результатов об аналитичности решений дифференциальных операторов с аналитическими коэффициентами [13].

Применяя почленное обратное преобразование Фурье к ряду (2.4) и используя топологический изоморфизм пространства S' на себя при обратном преобразовании Фурье, получаем доказательство утверждения б).

Для доказательства утверждения в) заметим, что тензорные функции E_n в (3.1) положительно однородны по $|x|$ степени $2n - 3$ [7], так что особенность при $x = 0$ имеет лишь $E_1 \equiv E_0$. Надо отметить, что при обратном преобразовании Фурье символов $(E^\wedge_0)^n$ появляются множители Бохнера γ , зависящие от n и еще одного параметра, так что

$$|\gamma| = O\left(\frac{\pi^{2n}}{(n-1)! \Gamma(-1/2 + n)}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

Ниже выражения для множителей Бохнера будут выписаны явно. Таким образом, при любых $x \neq 0$ и ω имеем

$$|E_n(x) \rho^{n-1} \omega^{2(n-1)}| = O\left(\frac{a^n}{(n-1)! \Gamma(-1/2 + n)}\right) \quad (3.2)$$

$$n \rightarrow \infty, \quad a > 0$$

Но ряд, члены которого удовлетворяют асимптотической оценке (3.2) абсолютно сходится. Отсюда вытекает равномерная сходимость ряда (3.1) на компактных подмножествах из $R^3 \setminus 0 \cdot R^1$. В заключение остается отметить, что обратное преобразование Фурье расширило область сходимости ряда (3.2) по сравнению с исходным рядом (2.4), поскольку характеристический конус в (3.1) свелся к единственной точке — нулю в x -пространстве.

Для построения ядер $\mathbf{E}_n$, присутствующих в (3.1), разложим символы $(\mathbf{E} \wedge_0)^n$ в ряд по мультиполям

$$(\mathbf{E} \wedge_0(\xi))^n = \xi^{-2n+2} \sum_{k=0,2,4,\dots} \sum_{m=1}^{2k+1} (\mathbf{E}_0)_{km}^n Y_m^k(\xi'), \quad \xi' = \xi/|\xi| \quad (3.3)$$

где Y_m^k — поверхностные сферические гармоники степени k индекса m . Матричные коэффициенты $(\mathbf{E}_0)_{km}^n$ в (3.3) определяются интегрированием по сфере единичного радиуса в R^3 :

$$(\mathbf{E}_0)_{km}^n = \int_S (\mathbf{E} \wedge_0(\xi'))^n Y_m^k(\xi') d\xi'$$

Присутствие в разложении (3.3) гармоник лишь четных степеней обусловлено положительной однородностью по $|\xi|$ символов $(\mathbf{E} \wedge_0)^n$.

Обратное преобразование Фурье, примененное к $(\mathbf{E} \wedge_0)^n$, дает [7]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_n(\mathbf{x}) &= |\mathbf{x}|^{2n-3} \sum_{k=0,2,4,\dots}^{\infty} \gamma_{nk} \sum_{m=1}^{2k+1} (\mathbf{E}_0)_{km}^n Y_m^k(\mathbf{x}') \\ \gamma_{nk} &= (-1)^{k/2} \pi^{2n-3/2} \Gamma\left(\frac{3+k}{2} - n\right) / \Gamma\left(\frac{k}{2} + n\right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

В этой формуле γ_{nk} — множители Бохнера, определяющие действие преобразования Фурье на положительно однородные обобщенные функции медленного роста.

Из формул (3.1), (3.4) немедленно вытекает

Следствие. а) $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{E}_0(\mathbf{x})$ при $\omega \rightarrow 0$ равномерно по $\mathbf{x}$ на любых компактных подмножествах из $R^3 \setminus \{0\}$; б) при любых ω имеем $|\mathbf{E}_\omega(\mathbf{x})| = O(|\mathbf{x}|^{-1})$, $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$.

В некоторых случаях ряд (3.1) удастся просуммировать с получением аналитических выражений. В следующих разделах приводятся примеры построения в замкнутом виде фундаментальных решений для скалярного уравнения Гельмгольца и уравнений теории колебаний изотропной упругой среды.

4. Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца. В качестве демонстрации возможностей метода рассмотрим построение фундаментального решения E_ω скалярного уравнения Гельмгольца в R^3 :

$$(-\Delta - \omega^2)E_\omega(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

Применяя формулы разложения (2.4), (2.5) к символу фундаментального решения уравнения (4.1), получим

$$E_\omega(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi|\xi|)^{-2n} \omega^{2(n-1)} \quad (4.2)$$

Характеристический конус в этом случае определяется уравнением $(2\pi|\xi|)^2 = \omega^2$.

Обратное преобразование Фурье выражения (4.2) с использованием формул (3.1), (3.4) дает

$$\begin{aligned} E_\omega(\mathbf{x}) &= \pi^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} |\mathbf{x}|^{2n-3} \Gamma(3/2 - n) / \Gamma(n) \omega^{2(n-1)} \\ &= (4|\mathbf{x}|)^{-1} \pi^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)! \Gamma(-1/2 + n)} \left(\frac{\omega|\mathbf{x}|}{2} \right)^{2(n-1)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

При получении (4.3) использовалось соотношение

$$\frac{\Gamma(3/2 - n)}{\Gamma(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \pi}{(n-1)! \Gamma(-1/2 + n)}$$

Но последний ряд в правой части (4.3) с точностью до множителя совпадает с тейлоровским разложением функции Неймана $N_{1/2}$, так что (4.3) дает формулу для фундаментального решения уравнения Гельмгольца, выраженного через функцию Неймана [6]:

$$E_{\omega}(\mathbf{x}) = 1/4\omega^{1/2}(2\pi|\mathbf{x}|)^{-1/2} N_{1/2}(\omega|\mathbf{x}|) \quad (4.4)$$

В ряде исследований по теории колебаний [1, 2, 15–18] фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в R^3 записывается в виде

$$E_{\omega}(\mathbf{x}) = (4\pi|\mathbf{x}|)^{-1} \exp(\pm i\omega|\mathbf{x}|) \quad (4.5)$$

Нетрудно видеть, что действительная часть фундаментального решения (4.5) совпадает с (4.4) и с построенным фундаментальным решением (4.3).

5. Фундаментальное решение теории упругих колебаний для изотропной среды. Рассмотрим однородную изотропную упругую среду, тензор упругости которой имеет вид

$$C^{ijmn} = \lambda \delta^{ij} \delta^{mn} + \mu (\delta^{im} \delta^{jn} + \delta^{in} \delta^{jm}) \quad (5.1)$$

где λ, μ – константы Ламе.

С учетом (5.1) символ оператора уравнений теории упругих колебаний может быть представлен в виде

$$\mathbf{A}_{\omega}(\xi) = (2\pi)^2 (\mu |\xi| \mathbf{I} + (\lambda + \mu) \xi \otimes \xi) - \rho \omega^2 \mathbf{I} \quad (5.2)$$

Используя (1.4), (5.2) получим символ фундаментального решения уравнений статики (равновесия) изотропной среды

$$\mathbf{E}_0(\xi) = (2\pi)^{-2} (\mu(\lambda + 2\mu))^{-1} [(\lambda + 2\mu) |\xi|^{-1} \mathbf{I} - (\lambda + \mu) |\xi|^{-4} \xi \otimes \xi] \quad (5.3)$$

Непосредственно из (5.3) вытекает тождество, легко доказываемое по индукции

$$(\mathbf{E}_0(\xi))^n = (2\pi)^{-2n} [\mu^{-n} |\xi|^{-2n} \mathbf{I} - (\mu^{-n} - (\lambda + 2\mu)^{-n}) |\xi|^{-2n-2} \xi \otimes \xi] \quad (5.4)$$

С учетом (2.4), (5.4) получаем представление символа фундаментального решения теории упругих колебаний изотропной среды в виде ряда Тейлора

$$\mathbf{E}_{\omega}(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi)^{-2n} (\mu^{-n} |\xi|^{-2n} \mathbf{I} - (\mu^{-n} - (\lambda + 2\mu)^{-n}) |\xi|^{-2n-2} \xi \otimes \xi) \rho^{n-1} \omega^{2(n-1)} \quad (5.5)$$

Обратное преобразование Фурье, примененное к (5.5) с использованием формул (4.2)–(4.5), дает искомое фундаментальное решение в виде

$$\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{x}) = (4\pi\mu)^{-1} \left\{ |\mathbf{x}|^{-1} \cos(\alpha\omega|\mathbf{x}|) \mathbf{I} - 2^{-1} \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} \left(|\mathbf{x}| \left(\cos(\alpha\omega|\mathbf{x}|) - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \cos(\beta\omega|\mathbf{x}|) \right) \right) \right\} \quad (5.6)$$

$$\alpha = (\rho/\mu)^{1/2} \quad \beta = (\rho/(\lambda + 2\mu))^{1/2}$$

Нетрудно видеть, что при $\omega \rightarrow 0$ фундаментальное решение (5.6) переходит в фундаментальное решение Кельвина [14]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (4\pi\mu)^{-1} \left\{ |\mathbf{x}|^{-1} \mathbf{I} - \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} |\mathbf{x}| \right\} \quad (5.7)$$

Отметим, что в отличие от фундаментального решения Купрадзе [2, 7], теряющего смысл при $\omega = 0$, фундаментальное решение (5.6) остается справедливым при любых действительных значениях частоты.

Заключение. Фундаментальное решение (тензор Грина) уравнений установившихся колебаний для анизотропной упругой среды с анизотропией общего вида построен в виде мультиполярных рядов по пространственным координатам. Показано, что в частном случае изотропной среды, ряды удается просуммировать, и тензор Грина теории колебаний для безграничной упругой среды представим в замкнутом виде (5.6).

В заключение надо отметить, что фундаментальные решения теории колебаний находят применение при решении задач квазистационарной динамики [33–38], а так же для построения решений некоторых волновых задач теории упругости [39–42], где с помощью преобразования Фурье по временной переменной, задача сводится к решению соответствующих задач теории колебаний в спектральной области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kupradze V.D.* Граничные задачи теории установившихся упругих колебаний // УМН. 1953. Т. 8. № 3. С. 21–74.
2. *Kupradze V.D.* Dynamical problems in elasticity. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1963.
3. *Burchuladze T.* Non-stationary problems of generalized elastothermodiffusion for inhomogeneous media // Georgian Math. J. 1994. V. 1. P. 587–598.
4. *Colton D., Kress R.* Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. N.Y.: Springer, 1998.
5. *McLean W.* Strongly elliptic systems and boundary integral operators. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
6. *Constanda Ch., Doty D., Hamill W.* Boundary integral equation methods and numerical solutions: thin plates on an elastic foundation. N.Y.: Springer, 2016.
7. *Kupradze V.D., Basheleishvili, M.O., Burchuladze T.V.* Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, 25. Amsterdam, N. Y.: North-Holland Publ. Co. 1979.
8. *John F.* Plane waves and spherical means applied to partial differential equations. Interscience tracts in pure and applied mathematics. V. 2. N.Y.: Interscience Publ., 1955.
9. *Grosser M. et al.* Geometric theory of generalized functions with applications to general relativity. Berlin: Kluwer Acad. Publ., 2001.
10. *Wilson R.B., Cruse T.A.* Efficient implementation of anisotropic three dimensional boundary-integral equation stress analysis // Int. J. Num. Meth. Eng. 1978. V. 12. № 9. P. 1383–1397. <https://doi.org/10.1002/nme.1620120907>
11. *Deb A., Henry D.P., Jr., Wilson R.B.* Alternate BEM formulation for 2- and 3D anisotropic thermoelasticity // Int. J. Solids Struct. 1991. V. 27. № 13. P. 1721–1738. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(91\)90071-M](https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90071-M)
12. *Kuznetsov S.V.* Closed form analytical solution for dispersion of Lamb waves in FG plates // Wave Motion. 2019. V. 84. P. 1–7. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2018.09.018>
13. *Kuznetsov S.V.* Fundamental and singular solutions of Lamé equations of media with arbitrary anisotropy // Quart. Appl. Math. 2005. V. 63. № 3. P. 455–467. <https://doi.org/10.1090/S0033-569X-05-00969-X>
14. *Gegelia T., Buchukuri T.* Some dynamic problems of the theory of electroelasticity // Mem. Differential Equations Math. Phys. 1997. V. 10. P. 1–53.
15. *Bourbaki N.* Théories spectrales. Ch. 1, 2. Berlin: Springer. 2019.
16. *Marti J.-A.* Nonlinear algebraic analysis of delta shock wave solutions to Burgers' equation // Pacific J. Math. 2003. V. 210. P. 165–187.
17. *Gegelia T., Chichinadze R.* Boundary value problems of mechanics of continuum media for a sphere // Mem. Differential Equations Math. Phys. 1996. V. 7. P. 1–222.
18. *Sanchez-Palencia E.* Non homogeneous media and vibration theory. Lecture notes in physics. V. 127. Berlin: Springer, 1980.
19. *Fairweather G., Karageorghis A., Martin P.A.* The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems // Eng. Anal. Bound. Elem. 2003. V. 27. № 7. P. 759–769. [https://doi.org/10.1016/S0955-7997\(03\)00017-1](https://doi.org/10.1016/S0955-7997(03)00017-1)

20. Iovane G., Nasedkin A.V., Passarella F. Fundamental solutions in antiplane elastodynamic problem for anisotropic medium under moving oscillating source // *Eur. J. Mech. A/Solids*. 2004. V. 23. № 6. P. 935–943.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.09.002>
21. Iovane G., Nasedkin A.V., Passarella F. Moving oscillating loads in 2D anisotropic elastic medium: plane waves and fundamental solutions // *Wave Motion*. 2005. V. 43. № 1. P. 51–66.
<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2005.06.002>
22. Kleiman R.E., Roach G.F. On modified Green functions in exterior problems for the Helmholtz equations // *R. Soc. Lond.* 1982. V. 383. № 1785. P. 313–332.
<https://doi.org/10.1098/rspa.1982.0133>
23. Kleinman R.E., Roach G.F. Boundary integral equation for the three-dimension Helmholtz equations // *SIAM Rev.* 1974. V. 16. № 2. P. 214–236. <https://www.jstor.org/stable/2028461>
24. Kuznetsov S.V. Surface waves of non-Rayleigh type // *Quart. Appl. Math.* 2003. V. 61. P. 575–583.
<https://doi.org/10.1090/qam/1999838>
25. Yang S.A. Evaluation of the Helmholtz boundary integral equation and its normal and tangential derivatives in two dimensions // *J. Sound Vibr.* 2007. V. 301. № 3–5. P. 864–877.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.10.023>
26. Wang C.Y., Achenbach J.D. Elastodynamic fundamental solutions for anisotropic solids // *Geophys. Int. J.* 1994. V. 118. № 2. P. 384–92.
<https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1994.tb03970.x>
27. Tonon F., Pan E., Amadei B. Green's functions and boundary element method formulation for 3D anisotropic media // *Comput. Struct.* 2001. V. 79. № 5. P. 469–482.
[https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(00\)00163-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00163-2)
28. Kuznetsov S.V. On the operator of the theory of cracks // *C. R. Acad. Sci. Paris*. 1996. V. 323. P. 427–432.
29. Ilyashenko A.V. et al. Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // *Arch. Appl. Mech.* 2018. V. 88. P. 1385–1394.
<https://doi.org/10.1007/s00419-018-1377-7>
30. Kravtsov A.V. et al. Finite element models in Lamb's problem // *Mech. Solids*. 2011. V. 46. P. 952–959.
<https://doi.org/10.3103/S002565441106015X>
31. Kuznetsov S.V., Terentjeva E.O. Planar internal Lamb problem: Waves in the epicentral zone of a vertical power source // *Acoust. Phys.* 2015. V. 61. № 3. P. 356–367.
<https://doi.org/10.1134/S1063771015030112>
32. Norris A.N. Dynamic Green's functions in anisotropic piezoelectric, thermoelastic and poroelectric solids // *R. Soc. Lond.* 1994. V. 447. № 1929. P. 175–188. <https://doi.org/10.1098/rspa.1994.0134>
33. Tverdokhlebov A., Rose J. On Green's functions for elastic waves in anisotropic media // *J. Acoust. Soc. Am.* 1988. V. 83. № 1. P. 118–121.
<https://doi.org/10.1121/1.396437>
34. Telles J.C.F., Brebbia C.A. Boundary element solution for half-plane problems // *Int. J. Solids Struct.* 1981. V. 17. № 12. P. 1149–1158.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(81\)90094-9](https://doi.org/10.1016/0020-7683(81)90094-9)
35. Spyarakos C.C., Ahtes H. Time domain boundary element method approaches in elastodynamics: a comparative study // *Comp. Struct.* 1986. V. 24. № 4. P. 529–535.
[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(86\)90191-4](https://doi.org/10.1016/0045-7949(86)90191-4)
36. Singh K.M., Tanaka M. Elementary analytical integrals required in subtraction of singularity method for evaluation of weakly singular boundary integrals // *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2007. V. 31. № 3. P. 241–247.
<https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2006.05.003>
37. Saez A., Dominguez J. Far field dynamic Green's functions for BEM in transversely isotropic solids // *Wave Motion*. 2000. V. 32. № 1. P. 113–123.
[https://doi.org/10.1016/S0165-2125\(00\)00032-9](https://doi.org/10.1016/S0165-2125(00)00032-9)
38. Koegl M. Free vibration analysis of anisotropic solids with the boundary element method // *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2003. V. 27. № 2. P. 107–114.
[https://doi.org/10.1016/S0955-7997\(02\)00088-7](https://doi.org/10.1016/S0955-7997(02)00088-7)

-
39. *Hayir A., Bakirtas I.* A note on a plate having a circular cavity excited by plane harmonic SH waves // J. Sound Vibr. 2004. V. 271. № 1–2. P. 241–255.
[https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00751-X](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00751-X)
 40. *Dumir P.C., Mehta A.K.* Boundary element solution for elastic orthotropic half-plan problem // Comp. Struct. 1978. V. 26. № 3. P. 431–438.
[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90043-5](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90043-5)
 41. *Kuznetsov S.V.* Seismic waves and seismic barriers // Acoust. Phys. 2011. V. 57. № 3. P. 420–436.
<https://doi.org/10.1134/S1063771011030109>
 42. *Djeran-Maigre I. et al.* Velocities, dispersion, and energy of SH-waves in anisotropic laminated plates // Acoust. Phys. 2014. V. 60. P. 200–207.
<https://doi.org/10.1134/S106377101402002X>

УДК 539.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ВЯЗКОУПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ИЗГИБАЕМЫХ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН

© 2023 г. А. П. Янковский^{a,*}

^aИнститут теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Россия

* e-mail: lab4nemir@rambler.ru

Поступила в редакцию 26.07.2022 г.

После доработки 11.11.2022 г.

Принята к публикации 20.12.2022 г.

Разработана модель неизотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования многонаправленно армированных гибких пластин. Вязкопластическое деформирование изотропных материалов композиции описывается соотношениями теории течения с изотропным упрочнением, учитывающими зависимости функций нагружения от температуры и интенсивности скоростей деформаций. Вязкоупругое поведение компонентов композиции описывается уравнениями модели Максвелла–Больцмана. Ослабленное сопротивление армированных пластин поперечным сдвигам моделируется соотношениями теории изгиба Амбарцумяна, а геометрическая нелинейность — в приближении Кармана. Учитывается связанность теплофизической и механической составляющих задачи о неупругом динамическом деформировании армированных пластин. Температура по толщине конструкций аппроксимируется полиномом 7-го порядка. Численное решение сформулированной нелинейной двумерной задачи строится с использованием явной схемы шагов по времени. Исследовано вязкоупруго-вязкопластическое динамическое поведение относительно тонкой стеклопластиковой пластины с учетом и без учета теплового отклика в ней. Конструкция нагружается в поперечном направлении воздушной взрывной волной. Показано: неучет теплового отклика в стеклопластиковой пластине может существенно исказить расчетные поля остаточных деформаций компонентов ее композиции, несмотря даже на то, что максимальный нагрев такой конструкции не превышает 10°C. Вязкоупругопластические расчеты, когда чувствительность материалов композиции к скорости их деформирования можно пренебречь, вполне обоснованно допустимо проводить без учета теплового отклика композитной пластины, если отсутствуют внешние источники тепла немеханического происхождения.

Ключевые слова: вязкоупруго-вязкопластическое деформирование, термочувствительность, многонаправленно армирование, гибкая пластина, тепловой отклик, теория изгиба Амбарцумяна, динамическое деформирование, явная численная схема

DOI: 10.31857/S0572329923700071, EDN: GLOLRC

1. Введение. Тонкостенные конструкции из композитных материалов (КМ) находят все более широкое применение в качестве силовых и защитных элементов современных изделий [1–17], которые часто испытывают высокоинтенсивное термосиловое нагружение [2, 6, 11, 13, 14, 17]. При этом материалы составляющих композиции могут деформироваться упругопластически [5, 13, 14, 18–20], поэтому актуальной является

проблема математического моделирования неупругого деформирования КМ-пластин и оболочек, которая в настоящее время находится на стадии становления [5, 9, 13–15, 18, 20–23].

Известно, что пластические свойства материалов зависят от температуры и скорости деформирования [24, 25], поэтому в [23] была разработана модель термоупруго-вязкопластического деформирования многонаправленно армированных сред и проведены соответствующие расчеты для динамически нагружаемых гибких КМ-пластин. Однако в [23] не учитывались вязкоупругие свойства материалов компонентов композиции, что не позволило определить остаточные прогибы и остаточное напряженно-деформированное состояние (НДС) армированных пластин после их пластического неизотермического деформирования. В работе [22] учитывались как вязкопластические, так и вязкоупругие свойства материалов компонентов композиции, но не рассматривался тепловой отклик в КМ-пластинах при динамических нагрузках взрывного типа. Таким образом, модель неизотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования армированных непрерывными волокнами композитных сред до настоящего времени не была разработана. При этом, как и в [23], необходимо учитывать связанность механической и температурной составляющих динамической задачи.

Для расчета волновых процессов, возникающих в тонкостенных элементах КМ-конструкций при их динамическом изгибном нагружении, и для моделирования их слабого сопротивления поперечному сдвигу обычно используют простейшие неклассические теории Рейсснера [2, 5, 10, 14, 26], Редди [8, 11] или Амбарцумяна [1, 22, 23]. Реже применяют более точные теории, основанные на использовании гипотезы ломаной линии [5, 6, 10].

Для численного интегрирования нелинейных задач динамики пластин и оболочек традиционно применяют явные схемы [5, 22, 23] или неявные методы Ньюмарка [13, 27].

Настоящая работа посвящена моделированию неизотермического вязкоупруго-вязкопластического динамического деформирования гибких армированных пластин при учете их ослабленного сопротивления поперечным сдвигам. Численное решение связанной термомеханической задачи строится с использованием явных методов шагов по времени.

2. Численно-аналитическая модель неизотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования многонаправленно армированного материала. Рассматривается КМ-среда, состоящая из матрицы, усиленной N семействами непрерывных волокон с плотностями армирования ω_k ($1 \leq k \leq N$). Как и в работах [22, 23], разложим малые деформации $\epsilon_{ij}^{(k)}$ изотропного однородного материала k -го компонента композиции на вязкоупругие $e_{ij}^{(k)}$, несжимаемые пластические $p_{ij}^{(k)}$ и температурные $\delta_{ij}\epsilon_\Theta^{(k)}$ составляющие, поэтому для скоростей этих деформаций справедливо представление

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(k)} = \dot{e}_{ij}^{(k)} + \dot{p}_{ij}^{(k)} + \delta_{ij}\dot{\epsilon}_\Theta^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\dot{p}_{ii}^{(k)} = 0, \dot{\epsilon}_\Theta^{(k)} = \alpha_k \dot{\Theta}), \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.1)$$

где Θ — температура; α_k — коэффициент линейного температурного расширения k -го материала композиции ($k = 0$ — связующая матрица, $k \geq 1$ — волокна k -го семейства); δ_{ij} — символ Кронекера; точка — производная по времени t . По повторяющимся индексам, если не оговорено, производится суммирование от 1 до 3.

Вязкоупругое поведение k -го компонента композиции моделируется соотношениями тела Максвелла–Больцмана [22, 28]:

$$\dot{e}_{ij}^{(k)} = \frac{\dot{s}_{ij}^{(k)}}{2G_k} + \frac{s_{ij}^{(k)}}{2\eta_k}, \quad \dot{e}_0 = \frac{\dot{\sigma}_0^{(k)}}{3K_k} + \frac{\sigma_0^{(k)}}{3\mu_k}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(k)} &= \sigma_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} \sigma_0^{(k)}, \quad \dot{e}_{ij}^{(k)} = \dot{e}_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} \dot{e}_0^{(k)}, \quad \dot{e}_0^{(k)} = \frac{1}{3} \dot{e}_{ll}^{(k)} = \dot{\epsilon}_0^{(k)} - \dot{\epsilon}_\Theta^{(k)}, \quad \sigma_0^{(k)} = \frac{1}{3} \sigma_{ll}^{(k)} \\ \dot{\epsilon}_0^{(k)} &= \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{ll}^{(k)}, \quad 2G_k = \frac{E_k}{1 + \nu_k}, \quad 3K_k = \frac{E_k}{1 - 2\nu_k}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N \end{aligned} \quad (2.3)$$

$\sigma_{ij}^{(k)}$ — тензор напряжений; $s_{ij}^{(k)}$, $\dot{e}_{ij}^{(k)}$ — девиаторы напряжений и скоростей вязкоупругих деформаций; $\sigma_0^{(k)}$ — среднее напряжение; $\dot{\epsilon}_0^{(k)}$ — скорость средней деформации; E_k , ν_k — мгновенные модуль упругости первого рода и коэффициент Пуассона; G_k — мгновенный модуль упругости второго рода; K_k — мгновенный объемный модуль упругости; η_k , μ_k — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости. Если материал k -го составляющего композиции термочувствителен, то величины E_k , ν_k , G_k , K_k , α_k , η_k и μ_k зависят от температуры ($E_k = E_k(\Theta)$ и т.д.).

Пластическое деформирование k -го компонента композиции ассоциировано с поверхностью текучести $f_k = 0$, обобщающей условие текучести Мизеса [23, 28]:

$$f_k(T_k, \chi_k, H_k, \Theta) \equiv T_k^2 - \tau_s^{(k)2}(\chi_k, H_k, \Theta) = 0, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} T_k &= \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij}^{(k)} s_{ij}^{(k)}}, \quad \chi_k = \int_0^t \sqrt{2 \dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} dt, \quad H_k = \sqrt{2 \xi_{ij}^{(k)} \xi_{ij}^{(k)}}, \quad \xi_{ij}^{(k)} = \dot{e}_{ij}^{(k)} + \dot{p}_{ij}^{(k)} \\ i, j &= 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N \end{aligned} \quad (2.5)$$

$\xi_{ij}^{(k)}$ — девиатор скоростей деформаций; $\tau_s^{(k)}$ — мгновенный предел текучести при чистом сдвиге, который равен значению интенсивности касательных напряжений T_k при фиксированных значениях накопленной пластической деформации χ_k (параметра Одквиста), интенсивности скоростей деформаций сдвига H_k и температуры Θ в текущий момент времени t .

В работе [22] не учитывалась зависимость функции f_k от Θ в соотношении (2.4), а в [23] не учитывались вязкие свойства в равенствах (2.2), т.е. было принято $\eta_k = \mu_k \rightarrow \infty$. Повторяя рассуждения из [22, 23], при учете соотношений (2.1)–(2.5) получим искомые определяющие соотношения неадиабатического вязкоупруго-вязкопластического деформирования k -го материала композиции, которые для удобства изложения запишем в матричной форме:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{V}_k \sigma_k + \mathbf{Z}_k \dot{\epsilon}_k + \mathbf{Y}_k \dot{\epsilon}_k + \beta_k \dot{\Theta}, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.6)$$

Здесь и далее:

$$\begin{aligned} \sigma_k &= (\sigma_1^{(k)} \sigma_2^{(k)} \sigma_3^{(k)} \sigma_4^{(k)} \sigma_5^{(k)} \sigma_6^{(k)})^T \equiv (\sigma_{11}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} \sigma_{31}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)})^T \\ \epsilon_k &= (\epsilon_1^{(k)} \epsilon_2^{(k)} \epsilon_3^{(k)} \epsilon_4^{(k)} \epsilon_5^{(k)} \epsilon_6^{(k)})^T \equiv (\epsilon_{11}^{(k)} \epsilon_{22}^{(k)} \epsilon_{33}^{(k)} 2\epsilon_{23}^{(k)} 2\epsilon_{31}^{(k)} 2\epsilon_{12}^{(k)})^T \\ s_k &= (s_1^{(k)} s_2^{(k)} s_3^{(k)} s_4^{(k)} s_5^{(k)} s_6^{(k)})^T \equiv (s_{11}^{(k)} s_{22}^{(k)} s_{33}^{(k)} s_{23}^{(k)} s_{31}^{(k)} s_{12}^{(k)})^T \\ \xi_k &= (\xi_1^{(k)} \xi_2^{(k)} \xi_3^{(k)} \xi_4^{(k)} \xi_5^{(k)} \xi_6^{(k)})^T \equiv (\xi_{11}^{(k)} \xi_{22}^{(k)} \xi_{33}^{(k)} \xi_{23}^{(k)} \xi_{31}^{(k)} \xi_{12}^{(k)})^T \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{Z}_k = \bar{\mathbf{Z}}_k - G_k \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k, \quad \mathbf{Y}_k = \tau_H^{(k)} \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.8)$$

$\mathbf{V}_k = (\nu_{ij}^{(k)})$, $\bar{\mathbf{Z}}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$, $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k = (\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)})$ — симметричные 6×6 -матрицы, $\beta_k = (\beta_i^{(k)})$ — шестикомпонентный вектор-столбец, ненулевые элементы которых определяются так:

$$\begin{aligned}
v_{ij}^{(k)} &= -\frac{K_k}{3\mu_k} + \left(\frac{1}{3} - \delta_{ij}\right) B_k, \quad v_{ll}^{(k)} = -B_k, \quad \bar{z}_{ij}^{(k)} = 2\delta_{ij}G_k + \lambda_k, \quad \bar{z}_{ll}^{(k)} = G_k \\
\beta_i^{(k)} &= \frac{K_\Theta^{(k)}}{3K_k} \sum_{m=1}^3 \sigma_m^{(k)} + 3K_k \alpha_k + \frac{s_i^{(k)}}{G_k} [G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)} (\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k) A_k] \\
\beta_l^{(k)} &= \frac{s_l^{(k)}}{G_k} [G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)} (\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k) A_k] \\
(i, j &= \overline{1, 3}, \quad l = \overline{4, 6}), \quad \bar{z}_{ij}^{(k)} = A_k s_i^{(k)} s_j^{(k)} \\
(i, j &= \overline{1, 6}), \quad \lambda_k = \frac{v_k E_k}{(1 + v_k)(1 - 2v_k)}, \\
A_k &= \frac{c_k G_k}{(G_k + \bar{G}_k) \tau_s^{(k)2}}, \quad B_k = \frac{G_k}{\eta_k} \left(1 - \frac{c_k G_k}{G_k + \bar{G}_k}\right) \\
K_\Theta^{(k)} &= \frac{dK_k}{d\Theta}, \quad G_\Theta^{(k)} = \frac{dG_k}{d\Theta}, \quad \tau_\Theta^{(k)} = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \Theta}, \quad \tau_H^{(k)} = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial H_k}, \quad \bar{G}_k = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \chi_k} \\
c_k &= \begin{cases} 0 & \text{при } T_k < \tau_s^{(k)} \quad \text{или} \quad T_k = \tau_s^{(k)}, \quad W_k \leq 0 \\ 1 & \text{при } T_k = \tau_s^{(k)}, \quad W_k > 0 \end{cases} \\
W_k &= G_k s_k^T \dot{\mathbf{e}}_k + \tau_s^{(k)} G_k^{-1} (\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k) \dot{\Theta} - 2\tau_s^{(k)} \tau_H^{(k)} H_k^{-1} \xi_k^T \ddot{\mathbf{e}}_k - G_k \eta_k^{-1} \tau_s^{(k)2} \\
T_k^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 s_i^{(k)2} + \sum_{i=4}^6 s_i^{(k)2}, \quad H_k^2 = 2 \sum_{i=1}^3 \xi_i^{(k)2} + 4 \sum_{i=4}^6 \xi_i^{(k)2}, \quad 0 \leq k \leq N
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$\bar{G}_k$ — касательный модуль сдвига при неупругом деформировании; c_k — параметр переключения, при определении которого использовано равенство (2.4): $c_k = 0$ — термовязкоупругое деформирование, разгрузка или нейтральное нагружение, $c_k = 1$ — активное нагружение при пластическом деформировании материала k -й фазы композиции; индекс “Т” — операция транспонирования. По повторяющимся индексам k и l в равенствах (2.9) суммирование нет.

Если пластические свойства не зависят от температуры ($\tau_\Theta^{(k)} \equiv 0$), то уравнения (2.6) при учете (2.8) и (2.9) редуцируются в определяющие соотношения вязкоупруго-вязкопластического деформирования k -го материала композиции, которые полностью совпадают с уравнениями, полученными в [22]. Если же не учитываются вязкие свойства при упругом деформировании ($\mu_k = \eta_k \rightarrow \infty$), то из соотношений (2.6), (2.8) и (2.9) вытекают определяющие уравнения неизотермического упруговязкопластического деформирования k -го компонента композиции, полностью совпадающие с полученными в [23]. Таким образом, соотношение (2.6) при учете равенств (2.3)–(2.5), (2.8) и (2.9) обобщает определяющие уравнения, полученные в [22, 23].

В разделе 1 уже отмечалось, что численное решение исследуемой задачи предполагается получать на базе явных пошаговых схем [5, 22, 23], т.е. значения неизвестных функций будем определять в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \Delta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где $\Delta = \text{const} > 0$ — шаг по времени. Используя результаты работ [22, 23], считаем, что при $t = t_{n-1}$, t_n уже известны значения величин

$$\begin{aligned}
\sigma_k(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \dot{\sigma}_k(\mathbf{r}) \equiv \dot{\sigma}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \dot{\mathbf{e}}_k(\mathbf{r}) \equiv \dot{\mathbf{e}}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \ddot{\mathbf{e}}_k(\mathbf{r}) \equiv \ddot{\mathbf{e}}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}) \\
\dot{\Theta}(\mathbf{r}) &\equiv \dot{\Theta}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \Theta(\mathbf{r}) \equiv \Theta(t_m, \mathbf{r}), \quad 0 \leq k \leq N, \quad m = n-1, n, \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

где x_i — координаты точек КМ-тела. По аналогии с [22, 23] преобразуем первое, третье и четвертое слагаемые в правой части равенства (2.6), применив формулу трапеций, имеющую второй порядок точности по Δ [29]:

$$\overset{n}{\sigma}_k - \overset{n}{\sigma}_k = \frac{\Delta}{2} \left(\overset{n}{\dot{\sigma}}_k + \overset{n}{\dot{\sigma}}_k \right), \quad \overset{n}{\dot{\epsilon}}_k - \overset{n}{\dot{\epsilon}}_k = \frac{\Delta}{2} \left(\overset{n}{\ddot{\epsilon}}_k + \overset{n}{\ddot{\epsilon}}_k \right), \quad \overset{n}{\Theta} - \overset{n}{\Theta} = \frac{\Delta}{2} \left(\overset{n}{\dot{\Theta}} + \overset{n}{\dot{\Theta}} \right), \quad 0 \leq k \leq N$$

откуда получаем

$$\overset{n}{\sigma}_k = \frac{\Delta}{2} \overset{n}{\dot{\sigma}}_k + \overset{n}{\sigma}_k, \quad \overset{n}{\dot{\epsilon}}_k = \frac{2}{\Delta} \overset{n}{\dot{\epsilon}}_k - \frac{2}{\Delta} \overset{n-1/2}{\dot{\epsilon}}_k, \quad \overset{n}{\Theta} = \frac{2}{\Delta} \overset{n}{\Theta} - \frac{2}{\Delta} \overset{n-1/2}{\Theta}, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.11)$$

где

$$\overset{n-1/2}{\sigma}_k \equiv \overset{n-1}{\sigma}_k + \frac{\Delta}{2} \overset{n-1}{\dot{\sigma}}_k, \quad \overset{n-1/2}{\dot{\epsilon}}_k \equiv \overset{n-1}{\dot{\epsilon}}_k + \frac{\Delta}{2} \overset{n-1}{\ddot{\epsilon}}_k, \quad \overset{n-1/2}{\Theta} \equiv \overset{n-1}{\Theta} + \frac{\Delta}{2} \overset{n-1}{\dot{\Theta}}, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.12)$$

Из равенств (2.12) при учете предположений (2.10) следует, что шестикомпонентные векторы-столбцы $\overset{n-1/2}{\sigma}_k$, $\overset{n-1/2}{\dot{\epsilon}}_k$ и величины $\overset{n-1/2}{\Theta}$, $\overset{n}{\Theta}$ в выражениях (2.11) при $t = t_n$ уже известны. Подстановка (2.11) в соотношение (2.6) приводит к матричному уравнению

$$\overset{n}{\dot{\sigma}}_k = \overset{n}{\mathbf{B}}_k \overset{n}{\dot{\epsilon}}_k + \overset{n}{\mathbf{p}}_k, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.13)$$

где

$$\overset{n}{\mathbf{B}}_k \equiv \overset{n}{\bar{\mathbf{V}}}_k^{-1} \left(\overset{n}{\mathbf{Z}}_k + \frac{2}{\Delta} \overset{n}{\mathbf{Y}}_k \right), \quad \overset{n}{\mathbf{p}}_k \equiv \overset{n}{\bar{\mathbf{V}}}_k^{-1} \left(\overset{n}{\mathbf{V}}_k \overset{n}{\sigma}_k - \frac{2}{\Delta} \overset{n}{\mathbf{Y}}_k \overset{n-1/2}{\dot{\epsilon}}_k + \frac{2}{\Delta} \left(\overset{n}{\Theta} - \overset{n-1/2}{\Theta} \right) \overset{n}{\beta}_k \right) \quad (2.14)$$

$$\overset{n}{\bar{\mathbf{V}}}_k \equiv \mathbf{I} - \frac{\Delta}{2} \overset{n}{\mathbf{V}}_k, \quad 0 \leq k \leq N$$

$\mathbf{I}$ — единичная 6×6 -матрица; $\overset{n}{\bar{\mathbf{V}}}_k^{-1}$ — матрица, обратная 6×6 -матрице $\overset{n}{\bar{\mathbf{V}}}_k$. В текущий момент времени t_n равенство (2.13) — искомое определяющее соотношение в случае неізотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования k -го компонента композиции.

Элементы матриц $\overset{n}{\mathbf{V}}_k$, $\overset{n}{\mathbf{Z}}_k$, $\overset{n}{\mathbf{Y}}_k$ и вектора-столбца $\overset{n}{\beta}_k$ зависят от решения рассматриваемой задачи (см. выражения (2.8) и (2.9)), поэтому равенство (2.13) при учете (2.12) и (2.14) является нелинейным. Как и в [22, 23], линеаризовать это соотношение можно, используя метод, аналогичный методу переменных параметров упругости [30]. При этом в данный момент времени t_n на текущей итерации этого метода 6×6 -матрица $\overset{n}{\mathbf{B}}_k = (\overset{n}{b}_{ij}^{(k)})$ и шестикомпонентный вектор-столбец $\overset{n}{\mathbf{p}}_k = (\overset{n}{p}_i^{(k)})$ ($i, j = \overline{1, 6}$) в уравнении (2.13) известны.

Линеаризованное матричное соотношение (2.13) формально совпадает с уравнениями (2.24) в [22] и (1.15) в [23], поэтому, используя результаты работ [22, 23], на базе определяющего равенства (2.13) в момент времени t_n на данной итерации получаем следующее линейное матричное соотношение, характеризующее неізотермическое вязкоупруго-вязкопластическое состояние КМ:

$$\overset{n}{\dot{\sigma}} = \overset{n}{\mathbf{B}} \overset{n}{\dot{\epsilon}} + \overset{n}{\mathbf{p}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

где

$$\mathbf{B} \equiv \left(\omega_0 \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{B}_k \mathbf{E}_k \right) \mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{g}, \quad \mathbf{f} \equiv \omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k (\mathbf{p}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{r}_k) \quad (2.16)$$

$$\mathbf{H} \equiv \omega_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{g} \equiv \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{r}_k, \quad \omega_0 \equiv 1 - \sum_{k=1}^N \omega_k, \quad \mathbf{r}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \boldsymbol{\zeta}_k, \quad \mathbf{E}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k$$

$\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – шестикомпонентные вектор-столбцы усредненных напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} в композиции, которые аналогичны выражениям (2.7); ω_0 – относительное объемное содержание связующего материала в репрезентативной ячейке композиции; $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{C}_k$ – 6×6 -матрицы; $\mathbf{D}_k^{-1}$, $\mathbf{H}^{-1}$ – матрицы, обратные 6×6 -матрицам $\mathbf{D}_k$, $\mathbf{H}$; $\mathbf{p}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{r}_k$, $\boldsymbol{\zeta}_k$ – шестикомпонентные вектор-столбцы. Элементы матриц $\mathbf{C}_k = (c_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{D}_k = (d_{ij}^{(k)})$ и вектор-столбца $\boldsymbol{\zeta}_k = (\zeta_i^{(k)})$ вычисляются так:

$$c_{1j}^{(k)} = d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)} \quad (2.17)$$

$$\zeta_1^{(k)} = 0, \quad \zeta_i^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} (p_l^{(0)} - p_l^{(k)}), \quad i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}, \quad 1 \leq k \leq N$$

$$g_{11}^{(k)} = q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \dots, g_{16}^{(k)} = 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \dots$$

$$2g_{61}^{(k)} = q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \dots, g_{66}^{(k)} = q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.18)$$

$$l_{11}^{(k)} = \sin \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_{12}^{(k)} = \sin \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_{13}^{(k)} = \cos \theta_k$$

$$l_{21}^{(k)} = -\sin \varphi_k, \quad l_{22}^{(k)} = \cos \varphi_k, \quad l_{23}^{(k)} = 0 \quad (2.19)$$

$$l_{31}^{(k)} = -\cos \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_{32}^{(k)} = -\cos \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_{33}^{(k)} = \sin \theta_k, \quad 1 \leq k \leq N$$

Не выписанные в выражениях (2.18) элементы $6 \cdot 6$ -матриц $\mathbf{G}_k = (g_{ij}^{(k)})$ и $\mathbf{Q}_k = (q_{ij}^{(k)})$ приведены в табл. (2.1.40) и (2.1.44) в [31]. Матрицы $\mathbf{G}_k$ и $\mathbf{Q}_k$ определяют преобразования векторов-столбцов $\boldsymbol{\sigma}_k$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ (см. равенства (2.7)) при переходе от глобальной ортогональной системы координат x_j к локальной ортогональной системе $x_i^{(k)}$, связанной с арматурой k -го семейства. При этом ось $x_1^{(k)}$ ориентирована вдоль волокна и определяется углами сферической системы координат θ_k и φ_k (рис. 1). Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ между осями $x_i^{(k)}$ и x_j ($i, j = \overline{1, 3}$) задаются равенствами (2.19). (В соотношениях (2.17) и (2.18) опущен верхний индекс n .)

Как и в [22, 23], при выводе равенств (2.15), (2.16) попутно получаются линейризованные матричные соотношения

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \mathbf{H}^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \mathbf{E}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 + \mathbf{r}_k, \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.20)$$

Эти равенства при $t = t_n$ на текущей итерации позволяют последовательно выразить скорости деформаций связующего $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ и волокон k -го семейства $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ через скорости усредненных деформаций композиции $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

Согласно равенствам (2.9) и (2.16)–(2.19), в данный момент времени t_n на рассматриваемой итерации матрицы $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}^{-1}$, $\mathbf{E}_k$ и векторы-столбцы $\mathbf{p}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{r}_k$ в соотношениях (2.15) и (2.20) известны. Если температурное влияние не учитывается ($\dot{\Theta} \equiv 0$), то уравнение (2.15) при учете равенств (2.12), (2.14), (2.16) и (2.17) редуцируется в определяющее соотношение для КМ, полученное в [22] для случая вязкоупруго-вязкопластиче-

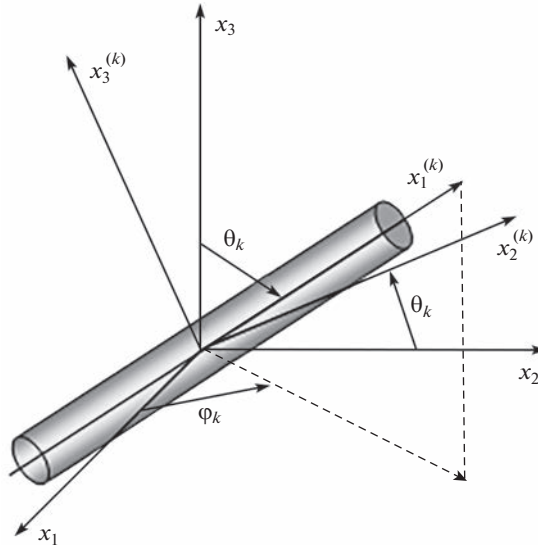


Рис. 1. Локальная система координат, связанная с траекторией волокна k -го семейства.

ского деформирования материалов композиции. Если же в выражениях (2.9) принять $\mu_k = \eta_k \rightarrow \infty$, то уравнение (2.15) вырождается в определяющее соотношение для КМ, полученное в [23] для неадиабатического случая упруговязкопластического деформирования составляющих композиции. Таким образом, уравнение (2.15) обобщает структурные соотношения, выведенные в [22, 23].

Пусть в момент времени t_n итерационный процесс сошелся с необходимой точностью, т.е. в соотношении (2.15) известны скорости деформаций композиции $\dot{\epsilon}_k^n$, тогда с помощью (2.20) определяем скорости деформаций компонентов композиции $\dot{\epsilon}_k^n$ (см. (2.7)), а из равенств (2.13) – скорости напряжений $\dot{\sigma}_k^n$ в этих же материалах. После этого, используя (2.2) при учете (2.3), можно вычислить скорости вязкоупругих деформаций $\dot{e}_{ij}^{(k)n}$. Центральные конечные разности на трехточечном шаблоне по времени $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$ дают выражения

$$\frac{1}{2\Delta} \left(\epsilon_{ij}^{(k)n+1} - \epsilon_{ij}^{(k)n-1} \right) = \dot{\epsilon}_{ij}^{(k)n}, \quad \frac{1}{2\Delta} \left(e_{ij}^{(k)n+1} - e_{ij}^{(k)n-1} \right) = \dot{e}_{ij}^{(k)n}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.21)$$

где правые части уже вычислены, а в левых частях деформации $\epsilon_{ij}^{(k)n-1}$ и $e_{ij}^{(k)n-1}$ предполагаются известными из решения задачи в предшествующий момент времени t_{n-1} . Следова-

тельно, соотношения (2.21) позволяют определить $\epsilon_{ij}^{(k)n+1}$ и $e_{ij}^{(k)n+1}$.

Считаем, что в начальный момент времени $t = t_0 = 0$ все составляющие композиции находились в естественном состоянии при температуре $\Theta = \Theta^0 = \text{const}$, тогда из соотношений (2.1) имеем

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} + p_{ij}^{(k)} + \delta_{ij} \varepsilon_{\Theta}^{(k)} \quad \left(\varepsilon_{\Theta}^{(k)} = \int_{t_0}^t \alpha_k \dot{\Theta} dt \right)$$

откуда, используя для вычисления интеграла формулу средней точки, получаем

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(k)} &= \varepsilon_{ij}^{(k)} - e_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} \bar{\alpha}_k \left(\Theta - \Theta^n \right) - \delta_{ij} \varepsilon_{\Theta}^{(k)} \\ \bar{\alpha}_k &\equiv \left(\alpha_k + \alpha_k^n \right) / 2, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq N \end{aligned} \quad (2.22)$$

где правые части уже известны из равенств (2.21) и предположения о том, что температура Θ^{n+1} заранее вычислена из уравнения теплового баланса для КМ по явной численной схеме (см. ниже), а температурная деформация $\varepsilon_{\Theta}^{(k)}$ определена по решению, полученному в предшествующий момент времени t_{n-1} :

$$\varepsilon_{\Theta}^{(k)} \equiv \int_{t_0}^{t_n} \alpha_k \dot{\Theta} dt = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \alpha_k \dot{\Theta} dt + \varepsilon_{\Theta}^{(k)n-1} \approx \varepsilon_{\Theta}^{(k)n-1} + \bar{\alpha}_k \left(\Theta - \Theta^{n-1} \right), \quad 0 \leq k \leq N$$

Используя второе соотношение (2.5), можно вычислить параметр упрочнения χ_k в следующий момент времени t_{n+1} :

$$\chi_k = \int_0^{t_{n+1}} \sqrt{2 \dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} dt = \chi_k^n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sqrt{2 dp_{ij}^{(k)} dp_{ij}^{(k)}} \approx \chi_k^n + \sqrt{2 \Delta p_{ij}^{(k)} \Delta p_{ij}^{(k)}}, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.23)$$

где

$$\Delta p_{ij}^{(k)} \equiv p_{ij}^{(k)n+1} - p_{ij}^{(k)n}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.24)$$

В правой части равенства (2.24) значения пластических деформаций, согласно (2.22), уже определены, поэтому в выражении (2.23) известно последнее слагаемое. Следовательно, по формуле (2.23) при учете соотношений (2.21), (2.22) и (2.24) можно

вычислить величину параметра Одквиста χ_k^{n+1} при $t = t_{n+1}$. Такой способ расчета значения χ_k^{n+1} удобен тем, что в момент времени t_{n+1} не требуется уточнять параметр упрочнения при использовании итерационного процесса по методу переменных параметров упругости.

При моделировании динамического неизотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования КМ нужно учитывать связанность механической и теплофизической составляющих задачи. Поэтому к механическим определяющим уравнениям (2.15) необходимо добавить структурные соотношения закона Фурье для КМ, которые ранее были получены в [32], и определяются матричными равенствами (2.1)–(2.3) из [23].

3. Формулировка задачи неизотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования КМ-пластины при изгибе. Рассмотрим динамический изгиб КМ-пластины толщиной $2h$ (рис. 2), с которой связана прямоугольная декартова си-

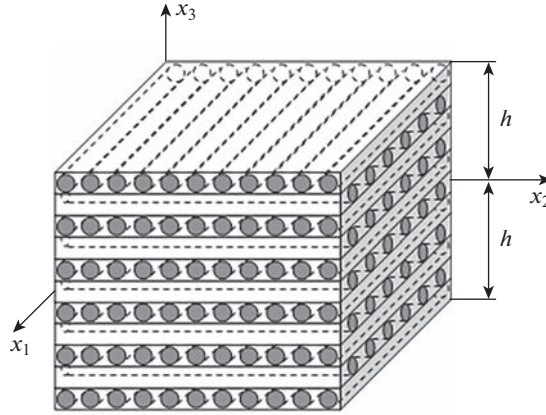


Рис. 2. Элемент пластины с ортогональной плоско-перекрестной структурой армирования.

стема координат x_i так, что плоскость Ox_1x_2 ($x_3 = 0$) – срединная ($|x_3| \leq h$). Конструкция многонеправленно армирована (возможно, и пространственно [33]) N семействами волокон. Структура армирования в направлении Ox_3 является однородной.

Для учета возможного ослабленного сопротивления КМ-пластины поперечному сдвигу и моделирования волновых процессов в ней используем теорию изгиба Амбарцумяна [1, 22, 23, 31]. Предполагаем, что внешние касательные силы на лицевых поверхностях конструкции ($|x_3| = h$) не учитываются и в случае пространственной структуры армирования выполняются требования, изложенные в замечании в [23]. (Для плоско-перекрестной структуры, изображенной на рис. 2, эти требования заведомо выполняются.) При этих условиях усредненные деформации композиции ϵ_{ij} и перемещения точек пластины U_i определяются так (геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана):

$$\epsilon_{IJ}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\partial_I u_J + \partial_J u_I) - x_3 \partial_I \partial_J w + \frac{x_3}{3h^2}(3h^2 - x_3^2)(\partial_I \epsilon_{J3}^0 + \partial_J \epsilon_{I3}^0) + \frac{1}{2} \partial_I w \partial_J w$$

$$\epsilon_{I3}(t, \mathbf{r}) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \epsilon_{I3}^0(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad I, J = 1, 2 \quad (3.1)$$

$$U_I(t, \mathbf{r}) = u_I(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_I w + \frac{2x_3}{3h^2}(3h^2 - x_3^2) \epsilon_{I3}^0$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad I = 1, 2 \quad (3.2)$$

где w – прогиб; u_I – тангенциальные перемещения точек отсчетной плоскости ($x_3 = 0$) в направлениях x_i ; ϵ_{I3}^0 – деформации поперечных сдвигов в точках этой плоскости; ∂_I – оператор частного дифференцирования по координате x_i ; Ω – область, занимаемая пластиной в плане. В соотношениях (3.1) и (3.2) неизвестны двумерные функции u_I , w и ϵ_{I3}^0 ($I = 1, 2$).

В настоящей работе рассматривается динамическое деформирование КМ-пластины как гибкой тонкостенной системы, поэтому нормальное напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ с приемлемой для инженерных приложений точностью можно линейно аппроксимировать по x_3 [2]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) \equiv \sigma_3(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ — известные из силовых граничных условий напряжения на верхней (+) и нижней (−) лицевых плоскостях.

Матричное определяющее соотношение (2.15) состоит из шести алгебраических уравнений. Согласно условиям соответствия, аналогичным (2.7), из третьего равенства этой системы в текущий момент времени t_n можем выразить скорость линейной деформации композиции в поперечном направлении

$$\dot{\epsilon}_{33} \equiv \dot{\epsilon}_3 = \left(b_{33} \right)^{-1} \left(\dot{\sigma}_3 - p_3 - \sum_{i=1}^6 (1 - \delta_{3i}) b_{3i} \dot{\epsilon}_i \right) \quad (3.4)$$

где b_{3i} , p_3 ($i = \overline{1, 6}$) — элементы матрицы $\mathbf{B}$ и вектор-столбца $\mathbf{p}$ в уравнении (2.15); скорость $\dot{\sigma}_3$ получается путем дифференцирования по t выражения (3.3). Скорости $\dot{\epsilon}_i$ в правой части равенства (3.4) определяются за счет дифференцирования по времени соотношений (3.1), т.е. характеризуются функциями w , $\dot{w}$, $\dot{u}_I$ и $\dot{\epsilon}_{I3}^0$ ($I = 1, 2$).

К кинематическим соотношениям (3.1), (3.2) нужно присоединить двумерные уравнения движения гибкой пластины (см. (3.5) в [22]) и соответствующие граничные и начальные условия (см. (3.8)–(3.10) в [22]).

Как и в [23], температуру Θ по толщине конструкции аппроксимируем полиномом порядка L :

$$\Theta(t, \mathbf{r}) - \Theta^0 = \sum_{l=0}^L \Theta_l(t, \mathbf{x}) x_3^l, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0 \quad (3.5)$$

где Θ_l ($0 \leq l \leq L$) — искомые двумерные функции.

Для замыкания системы разрешающих уравнений неизотермического вязкоупруго-вязкопластического изгибного деформирования КМ-пластины к соотношениям (3.5) необходимо присоединить двумерные (относительно Θ_l , $0 \leq l \leq L$) уравнения теплопроводности (см. (4.11), (4.13) и (4.18) в [23]) и соответствующие им граничные и начальные условия (см. (4.20) и (4.22) в [23]).

4. Метод расчета. Как и в работах [22, 23], для интегрирования сформулированной нелинейной задачи используем явные схемы шагов по времени, определяя неизвестные функции в дискретные моменты времени t_n ($n = 0, 1, 2, \dots$). При этом предполагаем, что при $t = t_m$ кроме функций (2.10) уже известны и значения следующих величин:

$$\begin{aligned} u_I^m(\mathbf{x}) &\equiv u_I(t_m, \mathbf{x}), & w^m(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}) \\ \gamma_I^m(\mathbf{x}) &\equiv \gamma_I(t_m, \mathbf{x}), & \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}) \\ \sigma_{33}^{(\pm)m}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), & \sigma_{ij}^{(k)m}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \chi_k^n(\mathbf{r}) \equiv \chi_k(t_n, \mathbf{r}) \\
\dot{p}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \dot{p}_{ij}^{(k)}(t_n, \mathbf{r}), \quad U^{(r)}(\mathbf{x}) \equiv U^{(r)}(t_n, \mathbf{x}) \\
q_i^n(\mathbf{r}) &\equiv q_i(t_n, \mathbf{r}), \quad \Theta_l^n(\mathbf{x}) \equiv \Theta_l(t_n, \mathbf{x}) \\
q_\infty^{(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv q_\infty^{(\pm)}(t_n, \mathbf{x}), \quad I = 1, 2, \quad i, j = \overline{1, 3} \\
0 \leq r &\leq L - 2, \quad 0 \leq l \leq L, \quad m = n - 1, n \\
0 \leq k &\leq N, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где

$$\gamma_I(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{8}{5} \varepsilon_{I3}^0 - \partial_I w, \quad U^{(r)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U(t, \mathbf{r}) x_3^r dx_3, \quad I = 1, 2, \quad 0 \leq r \leq L - 2 \tag{4.2}$$

γ_I — введенные для удобства двумерные функции; U — удельная внутренняя энергия КМ; q_i — компоненты вектора теплового потока в КМ; $q_\infty^{(\pm)}$ — заданные тепловые потоки через нижнюю (—) и верхнюю (+) лицевые плоскости.

Производные по времени в механической составляющей рассматриваемой неизо-термической вязкоупруго-вязкопластической задачи (за исключением второго соотношения (2.11)) аппроксимируем центральными конечными разностями на трехточечном шаблоне $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$, что позволяет разработать явную численную схему. После замены в уравнениях движения гибкой КМ-пластины вторых производных по времени от кинематических переменных w , u_I и γ_I их конечно-разностными аналогами при учете выражения (3.3), первого соотношения (4.2) и обозначений, аналогичных (4.1), получим [22, 23]

$$\begin{aligned}
\frac{2h\rho}{\Delta^2} \left(w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \sum_{S=1}^2 \partial_S \left(F_{S3} + \sum_{J=1}^2 F_{SJ} \partial_J w^n \right) + \sigma_{33}^{n(+)} - \sigma_{33}^{n(-)} \\
\frac{2h\rho}{\Delta^2} \left(u_I^{n+1} - 2u_I^n + u_I^{n-1} \right) &= \sum_{J=1}^2 \partial_J \left(F_{IJ} - F_{J3} \partial_J w^n \right) - \left(\sigma_{33}^{n(+)} - \sigma_{33}^{n(-)} \right) \partial_I w^n \\
\frac{2h^3\rho}{3\Delta^2} \left(\gamma_I^{n+1} - 2\gamma_I^n + \gamma_I^{n-1} \right) &= \sum_{J=1}^2 \partial_J M_{IJ} - F_{I3}, \quad I = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad n = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{4.3}$$

где

$$\begin{aligned}
\rho &\equiv \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^N \rho_k \omega_k, \quad F_{IJ} \equiv \int_{-h}^h \sigma_{IJ} dx_3 \\
F_{I3} &\equiv \int_{-h}^h \sigma_{I3} dx_3, \quad M_{IJ} \equiv \int_{-h}^h \sigma_{IJ} x_3 dx_3, \quad I, J = 1, 2
\end{aligned} \tag{4.4}$$

ρ_0 , ρ_k — объемные плотности материалов связующего и волокон k -го семейства. Внешние массовые силы в равенствах (4.3) не учитываются.

Используя предположения (4.1), по формулам (4.4) в текущий момент времени t_n можно определить все силовые факторы F_{IJ} , F_{I3} и M_{IJ} , входящие в правые части уравнений (4.3). Поэтому при учете необходимых граничных условий [22] из уравнений (4.3) по явной схеме можно вычислить значения неизвестных функций w , u_I и γ_I в

момент времени t_{n+1} . Затем по формулам (3.1) при учете первого равенства (4.2) определяем усредненные деформации композиции ε_{ij}^{n+1} . На основании равенств (3.1), (4.1) при $t = t_{n-1}$ деформации ε_{ij}^{n-1} уже известны, поэтому, используя численное дифференцирование по времени (аналогичное (2.21)), и учитывая соотношение (3.4), в данный момент времени t_n можем вычислить и скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^n$ в каждой точке КМ-конструкции. После этого по формулам (2.20) с учетом соответствий (2.7) получаем скорости деформаций фаз композиции $\dot{\varepsilon}_k^n$, а по формулам (2.13) с учетом (2.14) — скорости напряжений $\dot{\sigma}_k^n$ в тех же компонентах. Далее, из равенств (2.21) и

$$\frac{1}{2\Delta} \left(\sigma_{ij}^{(k)n+1} - \sigma_{ij}^{(k)n-1} \right) = \dot{\sigma}_{ij}^{(k)n}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N$$

в которых правые части уже известны, при учете предположений (4.1) определяем напряжения $\sigma_{ij}^{(k)n+1}$, полные $\varepsilon_{ij}^{(k)n+1}$ и упругие $e_{ij}^{(k)n+1}$ деформации в k -м компоненте композиции, а по формулам (2.22) и (2.23) при учете (2.24) — пластические деформации $p_{ij}^{(k)n+1}$ и параметр Одвишта χ_k^{n+1} в том же компоненте в следующий момент времени t_{n+1} . Усредняя по правилу смеси (аналогично первой формуле (4.4)) известные напряжения $\sigma_{ij}^{(k)n+1}$, получим напряжения в композиции σ_{ij}^{n+1} ($i, j = \overline{1, 3}$) при $t = t_{n+1}$.

Согласно формулам (2.9) при учете (2.11), в рассматриваемый момент времени t_n параметр переключения c_k зависит от скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_k$, поэтому определяющее уравнение (2.15) при $t = t_n$ нужно уточнять, используя итерации метода переменных параметров упругости [30]. Предварительно выполненные расчеты показали, что для достижения приемлемой в инженерных приложениях точности на каждом шаге по времени вполне достаточно использовать две таких итерации.

Для интегрирования теплофизической составляющей исследуемой задачи используем явную схему, но построенную на двухточечном шаблоне по времени $\{t_n, t_{n+1}\}$. При этом двумерные уравнения теплопроводности с учетом (3.5), (4.2) и обозначений, аналогичных (4.1), примут вид [23]:

$$\frac{\rho}{\Delta} \left(U^{(m)n+1} - U^{(m)n} \right) = -\partial_1 Q_1^{(m)n} - \partial_2 Q_2^{(m)n} - \bar{Q}_3^{(m)n} + W^{(m)n} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \leq m \leq L-2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$-\sum_{l=0}^L (-1)^l h^{l-1} (l\lambda_{33}^{(-)} + h\alpha^{(-)}) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(-)} (\Theta_{\infty}^{(-)} - \Theta^0) + q_{\infty}^{(-)}(t, \mathbf{x}) \quad (4.6)$$

$$\sum_{l=0}^L h^{l-1} (l\lambda_{33}^{(+)} + h\alpha^{(+)}) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(+)} (\Theta_{\infty}^{(+)} - \Theta^0) - q_{\infty}^{(+)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0$$

$$\begin{aligned}
& C_0 \sum_{i=0}^L H(i+m) \Theta_i + \frac{C_1}{2} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L H(i+j+m) \Theta_i \Theta_j + \\
& + \frac{C_2}{3} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L \sum_{l=0}^L H(i+j+l+m) \Theta_i \Theta_j \Theta_l = U^{(m)}(t, \mathbf{x}) \\
& \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq L-2
\end{aligned} \tag{4.7}$$

где

$$\begin{aligned}
H(s) & \equiv \frac{h^{s+1}}{s+1} [1 - (-1)^{s+1}], \quad Q_i^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \\
& \equiv \int_{-h}^h q_i(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad \bar{Q}_3^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \\
& \equiv \int_{-h}^h \partial_3 q_3(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 = h^m [q_3^{(+)} - (-1)^m q_3^{(-)}] - m Q_3^{(m-1)}(t, \mathbf{x}) \\
W^{(m)}(t, \mathbf{x}) & \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} x_3^m dx_3 \\
C_l(\mathbf{x}) & \equiv \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^N c_l^{(k)} \rho_k \omega_k(\mathbf{x}) \quad (l = 0, 1, 2), \quad \lambda_{33}^{(\pm)} \equiv \lambda_{33}|_{\Theta=\Theta(t, \mathbf{x}, \pm h)}, \quad q_3^{(\pm)} \equiv q_\infty^{(\pm)}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

λ_{33} — коэффициент теплопроводности КМ в направлении Ox_3 , который вычисляется по структурным соотношениям из [32] (см. (2.2) в [23]); $\alpha^{(\pm)}$ — коэффициент теплоотдачи со стороны нижней (–) и верхней (+) лицевых поверхностей; $\Theta_\infty^{(\pm)}$ — температуры окружающей среды со стороны тех же плоскостей; $c_l^{(k)}$ — коэффициент разложения удельной теплоемкости k -го материала композиции $c_k(\Theta - \Theta^0)$ по формуле (в случае термочувствительности):

$$c_k(\Theta - \Theta^0) = c_0^{(k)} + c_1^{(k)}(\Theta - \Theta^0) + c_2^{(k)}(\Theta - \Theta^0)^2, \quad 0 \leq k \leq N \tag{4.9}$$

Соотношения (4.6) — тепловые граничные условия, заданные на лицевых поверхностях КМ-конструкции и преобразованные с учетом выражения (3.5). Уравнения (4.7) определяют связь между двумерными величинами $U^{(m)}$ (см. (4.2)) и коэффициентами разложения температуры (3.5) при выполнении равенств (4.9). Соотношения (4.6) и (4.7) выполняются в каждый момент времени t .

Используя формулы (4.8) и предположения (4.1), в данный момент времени t_n можем вычислить правые части в уравнениях (4.5), из которых при учете соответствующих начальных и граничных тепловых условий, заданных на контуре Γ , ограничиваю-

щем область Ω , по явной схеме определяем значения функций $U^{(m)}$ в последующий момент времени t_{n+1} . Затем из уравнения (4.6) и (4.7) с учетом (4.8) вычисляем коэф-

фициенты разложения температуры $\Theta_l(\mathbf{x})$ ($0 \leq l \leq L$) в формуле (3.5). Далее, с помощью закона теплопроводности Фурье для композиции пластины (см. (3.1)–(3.3) в

[23]) при уже известной из (3.5) температуре $\Theta^{n+1}(\mathbf{r})$ определяем компоненты вектора

теплового потока $q_i(\mathbf{r})$ ($i = \overline{1, 3}$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $|x_3| \leq h$), после чего все функции, указанные в

(4.1), становятся известными при $t = t_{n+1}$ и можно повторить описанную выше процедуру для построения решения на следующем шаге по времени.

При учете термочувствительности компонентов композиции система уравнений (4.6) и (4.7), в которой правые части при $t = t_{n+1}$ уже известны, нелинейна. Линеаризовать ее можно, применяя метод переменных теплофизических параметров, формально аналогичный методу переменных параметров упругости [30]. Как показали расчеты, для достижения приемлемой в приложениях точности достаточно применять две–три итерации такого процесса.

Анализ структуры левых частей равенств (4.3) и (4.5) показывает, что для начала проведения расчетов по разработанной схеме следует предварительно определить

функции w, u_I, γ_I ($m = 0, 1$) и $U^{(l)}$. При $t = t_0$ значения функций w, u_I, γ_I и $U^{(l)}$ ($0 \leq l \leq L - 2$) получаются из начальных условий (см. (3.10) в [22] и (4.22) в [23]). Если

в момент времени t_0 внешние нагрузки отсутствуют ($\sigma_{33}^{(+)} = \sigma_{33}^{(-)} \equiv 0$) и КМ-конструкция покоится в естественном состоянии, то, используя начальные условия и уравнения движения, по формуле Тейлора получим $w \approx u_I \approx 0, \gamma_I \approx 0$ ($I = 1, 2$) с точностью Δ^3 [23].

После замены в равенствах (4.3), (4.5) производных $\partial_I(\bullet)$ их конечно-разностными аналогами и присоединения к этим соотношениям необходимых граничных условий (см. (3.8), (3.9) в [22] и (4.20) в [23]) окончательно получаем явную численную схему для интегрирования нелинейной связанной начально-краевой задачи неизоэтермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования гибкой армированной пластины. В случае неканонической формы области Ω , занимаемой конструкцией в плане, дискретизацию по пространственным переменным x_1 и x_2 можно проводить с использованием вариационно-разностного подхода, предложенного в [5]. В работе [23] показано, что шаг по времени Δ в уравнениях (4.3) и (4.5) следует выбирать, исходя из критерия устойчивости Куранта для уравнений (4.3) (см. анализ соотношений (6.3) в [23]).

5. Обсуждение результатов расчетов. Исследуем неизоэтермическое вязкоупруго-вязкопластическое деформирование относительно тонкой прямоугольной пластины ($\Omega: |x_1| \leq a, |x_2| \leq b; a = 3b, b = 50$ см, $2h = 2$ см; $2h/2b = 1/50$), которая по всей кромке жестко закреплена ($w = u_I = 0, \gamma_I = 0, \mathbf{x} \in \Gamma, t \geq t_0$) и до момента времени $t = t_0 = 0$ покоится ($w = u_I \equiv 0, \gamma_I \equiv 0, \mathbf{x} \in \Omega, t = t_0, I = 1, 2$) при температуре естественного состояния $\Theta = \Theta^0 = 20^\circ\text{C}$ ($\mathbf{x} \in \Omega, |x_3| \leq h, t = t_0$). Конструкция нагружается со стороны нижней лицевой плоскости давлением p , вызванным воздушной взрывной волной [27]:

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max} \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max} \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\alpha = -\ln(0.01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} < t_{\max}$$

где смысл параметров $p_{\max}, t_{\max}, t_{\min}$ и α очевиден и описан в [22]. На основании экспериментальных данных [27] примем $t_{\max} = 0.1$ мс, $t_{\min} = 2$ мс и $p_{\max} = 3$ МПа.

На лицевых плоскостях ($x_3 = \pm h$) теплообмен с окружающей средой реализуется в условиях естественной конвекции ($q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0, \alpha^{(\pm)} = 30$ Вт/(м² · К) [34]) при температуре воздуха $\Theta_{\infty}^{(\pm)} = \Theta^0$ (см. соотношения (4.6) и (4.8)). На торцевых поверхностях кон-

Таблица 1. Физико-механические характеристики компонентов композиции [25, 35]

Характеристика	Эпоксидная смола		Стекловолокно	
материала	$\Theta = 20^\circ\text{C}$	$\Theta = 40^\circ\text{C}$	$\Theta = 20^\circ\text{C}$	$\Theta = 80^\circ\text{C}$
$\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-4} \text{ c}^{-1}$				
$\rho, \text{ кг/м}^3$	1210.0	1208.0	2520.0	2519.6
$E, \text{ ГПа}$	2.8	2.3	86.8	86.3
N	0.330	0.333	0.250	0.254
$\eta, \text{ МПа} \cdot \text{с}$	340	300	1250	1200
$\sigma_s, \text{ МПа}$	20	18	4500	4400
$E_s, \text{ ГПа}$	1.114	0.783	6.230	5.168
$\lambda, \text{ Вт/(м К)}$	0.243	0.240	0.89	0.86
$\alpha \times 10^6, \text{ К}^{-1}$	68.1	70.3	2.5	2.6
$c, \text{ кДж/(кг К)}$	1.54	1.60	0.800	0.839
$\dot{\epsilon} = 104.0 \text{ c}^{-1}$				
$\sigma_s, \text{ МПа}$	22.0	19.5	4600	4550
$E_s, \text{ ГПа}$	1.238	0.853	6.314	5.458

струкции заданы тепловые граничные условия I рода, и температура поддерживается равной Θ^0 .

Конструкция изготовлена из эпоксисвязующего [35] и усилена стекловолокнами [25]. Пластическое поведение компонентов композиции при активном нагружении и постоянстве температуры Θ и скорости деформации $\dot{\epsilon}$ описывается зависимостью

$$\sigma = \text{sign}(\epsilon_p) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} \epsilon_p, \quad 0 \leq k \leq N \quad (5.2)$$

где σ, ϵ_p – осевое напряжение и пластическая составляющая соответствующей линейной деформации ϵ ; $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\dot{\epsilon}, \Theta)$ – модуль упрочнения k -го материала композиции; $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\dot{\epsilon}, \Theta)$ – условный предел текучести того же материала. Физико-механические характеристики компонентов композиции представлены в табл. 1. Объемная вязкость материалов не учитывалась: $\mu_k \rightarrow \infty, 0 \leq k \leq N$ (см. (2.2) и (2.9)). Во второй части табл. 1 (для $\dot{\epsilon} = 104 \text{ c}^{-1}$) приведены только те значения характеристик материалов, которые отличаются от данных, представленных в первой части (при $\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-4} \text{ c}^{-1}$). Зависимости всех физико-механических характеристик от температуры Θ и скорости деформирования $\dot{\epsilon}$ в расчетах аппроксимировались линейно по данным, приведенным в табл. 1.

При проведении расчетов по пространственным переменным x_1 и x_2 вводилась равномерная сетка с шагом $\Delta x_1 = \Delta x_2 = b/50 = 1 \text{ см}$, а шаг по времени $\Delta = 1 \text{ мкс}$. При этом необходимое условие устойчивости численной схемы (критерий Куранта) с запасом выполняется для каждого из компонентов композиции, а значит и для композиции в целом.

Конструкция армирована двумя ($N = 2$) семействами волокон, которые уложены в направлениях Ox_1 и Ox_2 (рис. 2) с плотностями $\omega_1 = 0.1$ и $\omega_2 = 0.3$ соответственно. Согласно рис. 1, в этом случае в формулах (2.19) следует принять $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2, \varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi/2$.

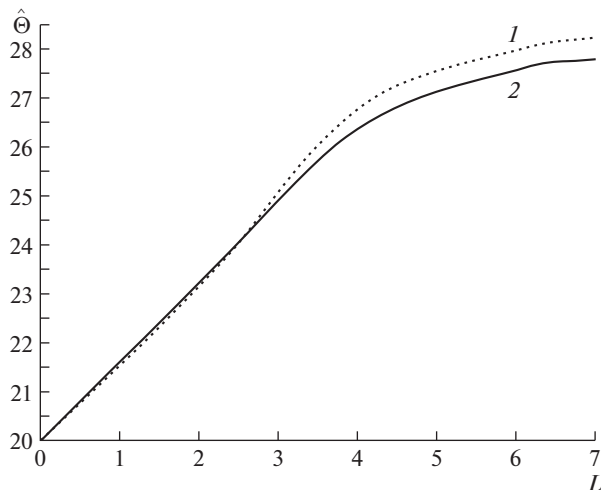


Рис. 3. Зависимости наибольшего значения температуры в КМ-пластине от порядка ее аппроксимирующего полинома в поперечном направлении, рассчитанные по разным теориям.

Для того чтобы определить порядок полинома L в разложении (3.5), при котором аппроксимация температуры Θ имеет приемлемую точность, исследуем зависимость от L наибольшего значения $\hat{\Theta}(L) = \max_{t,r} \Theta(t, \mathbf{r}; L)$, $|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$ и $|x_3| \leq h$ (расчетный интервал времени $0 \leq t \leq 0.5$ с). На рис. 3 представлены зависимости $\hat{\Theta}(L)$ (в $^{\circ}\text{C}$), полученные при учете (кривая 1) и неучете (кривая 2) чувствительности пластических свойств материалов композиции к скорости их деформирования. В последнем случае (см. (2.9) при $\tau_H^{(k)} \equiv 0$, $0 \leq k \leq N$) расчет проводился по данным табл. 1, которые соответствуют скорости деформации $\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$.

На рис. 3 значению $L = 0$ соответствует случай, когда тепловой отклик в КМ-конструкции вообще не учитывается, поэтому условно принято $\hat{\Theta}(0) = \Theta^0 = 20^{\circ}\text{C}$. Поведение обеих кривых показывает, что приращение величины $\hat{\Theta}$ при переходе от значения $L = 6$ к значению $L = 7$ пренебрежимо мало с практической точки зрения. При значениях $L \geq 8$ система линеаризованных уравнений (4.6) и (4.7) при учете (4.8), из которой в данный момент времени вычисляются коэффициенты полиномиального представления температуры (3.5), становится плохо обусловленной, поэтому зависимость $\hat{\Theta}(L)$ получается расходящейся. В силу этого обстоятельства соответствующие участки кривых при $L \geq 8$ на рис. 3 не изображены.

В квазистатических расчетах традиционно принято аппроксимировать температуру по толщине тонкостенной конструкции полиномом первого ($L = 1$) или второго ($L = 2$) порядка [1, 5, 10, 11]. Однако сопоставление ординат точек на обеих кривых рис. 3 при значениях $L = 1$ или $L = 2$ и при $L = 7$ свидетельствует о том, что при динамическом упругопластическом деформировании гибких КМ-пластин линейная или квадратичная аппроксимация температуры по их толщине приводит к значительному занижению наибольших значений расчетной температуры. Для адекватного же расчета температурного поля в случаях такого нагружения КМ-конструкции температуру по ее толщине целесообразно аппроксимировать полиномом 7-го порядка (см. (3.5) при $L = 7$).

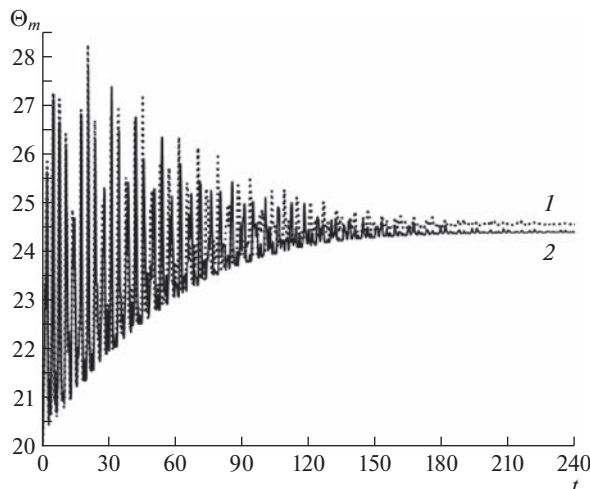


Рис. 4. Зависимости от времени максимальных значений температуры в КМ-пластине, рассчитанные с использованием разных теорий неупругого деформирования компонентов ее композиции.

На рис. 4 изображены зависимости осцилляций наибольших значений температуры Θ_m (в $^{\circ}\text{C}$) в КМ-пластине от времени t (в мс): $\Theta_m(t) = \max_{\mathbf{r}} \Theta(t, \mathbf{r})$, $|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$ и $|x_3| \leq h$. При этом, согласно полученным выше результатам, в формуле (3.5) было принято $L = 7$. Кривые 1 и 2 на рис. 4 рассчитаны при тех же условиях, что и аналогичные кривые на рис. 3. Поведение кривых на рис. 4 показывает, что к моменту времени $t \approx 220$ мс осцилляции функции $\Theta_m(t)$ в обоих расчетах практически прекращаются.

При этом наибольшее значение температуры $\hat{\Theta} = \max_{t \geq 0} \Theta_m(t) = \Theta_m(28.25 \times 10^{-3}) \approx 28^{\circ}\text{C}$ в

обоих случаях превышает температуру естественного состояния Θ^0 примерно на 8°C . К моменту же времени $t = 220$ мс зависимости $\Theta_m(t)$ стабилизируются и имеют значения, близкие к 24.4°C . Как видно из сравнения кривых 1 и 2, при учете зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования (кривая 1) значения $\hat{\Theta}$ и $\Theta_m(t)$ при $t \geq 220$ мс получаются несколько большими, чем в случае расчета, не учитывающем эту зависимость (кривая 2). Об этом же свидетельствует и поведение кривых 1 и 2 на рис. 3.

На рис. 5 изображены зависимости остаточных прогибов w (в мм) от координаты x_2 (в м), определенные в центральном поперечном сечении ($x_1 = 0$) при $t = 500$ мс, когда КМ-пластина практически перестала колебаться. Кривые 1 и 2 на рис. 5 получены при тех же условиях, что и кривые на рис. 3 и 4. Штриховые кривые 1' и 2' на рис. 5 приведены для сравнения и рассчитаны при тех же данных, что и сплошные кривые 1 и 2, но без учета теплового отклика (т.е. кривая 1' определена по теории, разработанной в [22]). Поведение кривых 1 и 1' свидетельствует о том, что при учете чувствительности пластических свойств материалов композиции к скорости их деформирования остаточный прогиб КМ-конструкции имеет традиционный $\cap$ -образный вид. Поведение же кривых 2 и 2' показывает, что при неучете указанной зависимости остаточный прогиб имеет М-образный вид, т.е. согласно таким расчетам КМ-пластина после динамического пластического деформирования приобретает гофрированную остаточную

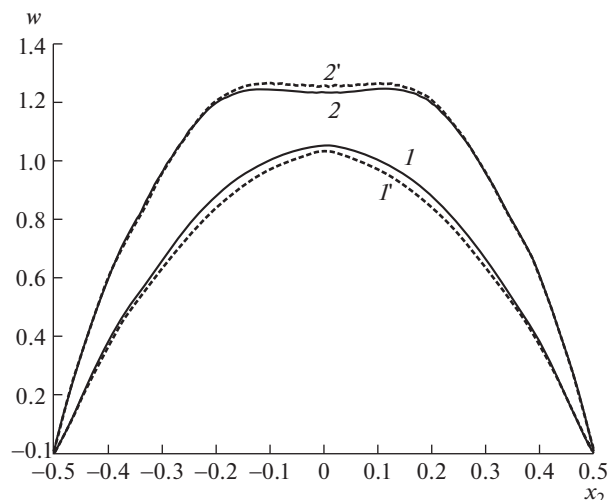


Рис. 5. Зависимости остаточного прогиба в центральном сечении прямоугольной удлиненной КМ-пластины, рассчитанные по разным теориям с учетом и без учета теплового отклика.

форму со складками, ориентированными в продольном направлении Ox_1 . Следовательно, расчеты, проводимые без учета чувствительности пластических свойств компонентов композиции к скорости их деформирования, могут приводить к качественно неверным представлениям о форме остаточных прогибов КМ-пластины (даже в тех случаях, когда такая зависимость является весьма слабой, как в рассматриваемом случае стеклопластиковой конструкции).

Сравнение максимальных значений ординат точек на кривых 1 и 2 на рис. 5 демонстрирует, что наибольший остаточный прогиб, вычисленный без учета чувствительности пластических свойств материалов композиции к скорости их деформирования (кривая 2), на 17% больше, чем в случае учета этой чувствительности (кривая 1). Если тепловой отклик КМ-конструкции не принимается во внимание, то такое различие в величинах максимальных остаточных прогибов составляет 22% (см. кривые 1' и 2').

Сравнение же наибольших значений ординат точек на кривых 1 и 1' (при $x_2 = 0$) показывает, что в случае неучета теплового отклика (кривая 1') максимальный остаточный прогиб КМ-пластины всего на 1.9% меньше, чем в неизотермическом случае (кривая 1). Для кривых же 2 и 2' это различие, наоборот, на 2.4% больше. Очевидно: такое малое различие максимальных значений остаточных прогибов, рассчитанных с учетом и без учета температурных полей в КМ-пластине, объясняется тем, что рассматриваемая стеклопластиковая конструкция в процессе осцилляций нагревается незначительно как при учете, так и неучете зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования (см. рис. 4). Однако несмотря на это, неучет теплового отклика в динамически нагружаемой тонкостенной конструкции может привести к существенному искажению полей остаточных деформаций компонентов композиции.

Так, на рис. 6 изображены осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций $\epsilon_*^{(k)}$ ($\epsilon_m^{(k)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \epsilon_*^{(k)}(t, \mathbf{r})$) материалов композиции рассматриваемой пластины от времени t (в мс) в окрестности начального момента (рис. 6,а) и в окрестности $t = 500$ мс (рис. 6,б). Номера кривых на рис. 6 соответствуют номеру k -го компонента

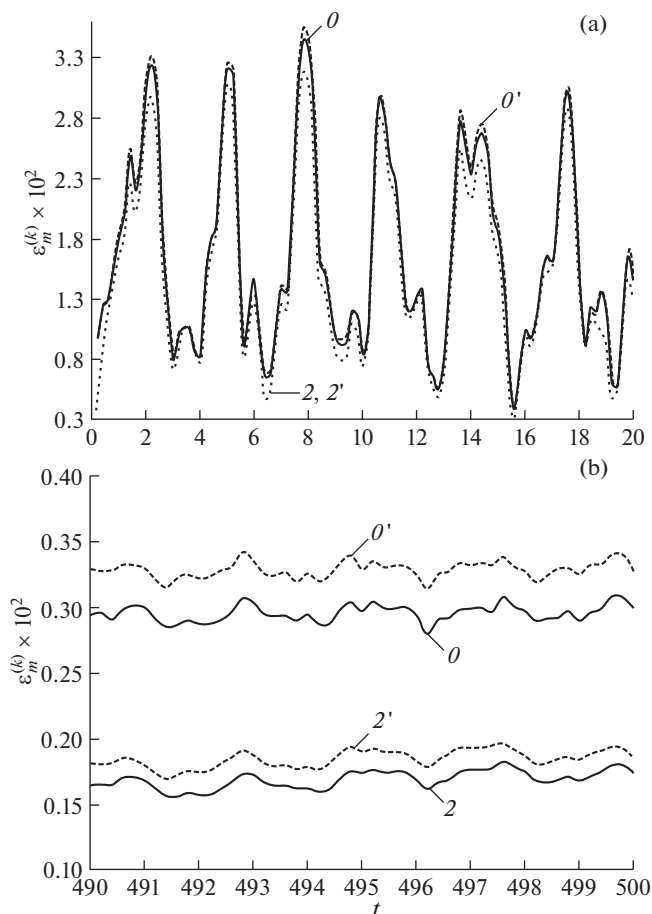


Рис. 6. Зависимости от времени наибольших значений интенсивности деформаций материалов композиции пластины, рассчитанные по вязкоупруго-вязкопластической теории в окрестности начального момента времени (а) и при $t \approx 500$ мс (б) с учетом и без учета теплового отклика.

композиции: $k = 0$ — связующая матрица, $k = 2$ — волокна второго семейства, уложенные в направлении Ox_2 и испытывающие наибольшее деформирование. Штрих у номера кривой имеет тот же смысл, что и на рис. 5. Кривые на рис. 6 получены при учете зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования. Для сравнения аналогичные зависимости изображены и на рис. 7, но они получены без учета указанной зависимости. Кривые 2, 2' на рис. 6,а и рис. 7 визуально практически не различаются. Кривые 0' и 2' на рис. 6 рассчитаны по теории, разработанной в [22].

Сравнение кривых 0 и 0' на рис. 6,а показывает, что максимальное значение $\epsilon_{\max}^{(0)} = \max_{t \geq 0} \epsilon_m^{(0)}(t) = \epsilon_m^{(0)}(7.8 \times 10^{-3})$ в связующем материале при неучете теплового отклика КМ-конструкции (кривая 0') всего на 2.9% больше, чем в случае учета температурного поля в пластине (кривая 0). Для арматуры второго семейства это различие еще меньше (см. кривые 2 и 2'). Однако сравнение кривых 0, 0' и 2, 2' на рис. 6,б свидетель-

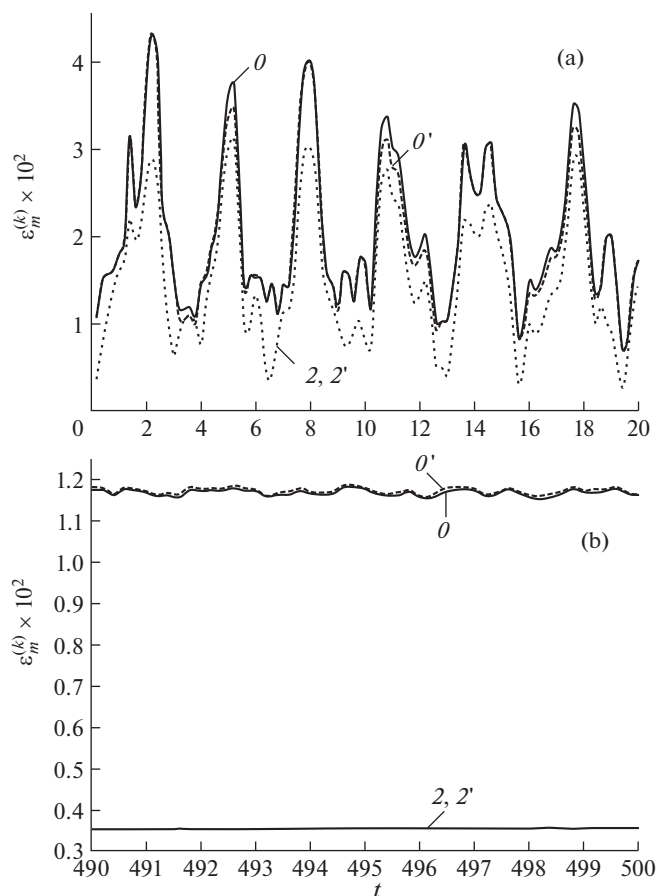


Рис. 7. Зависимости от времени наибольших значений интенсивности деформаций материалов композиции пластины, рассчитанные по вязкоупругопластической теории в окрестности начального момента времени (а) и при $t \approx 500$ мс (б) с учетом и без учета теплового отклика.

стует о том, что в момент времени $t = 500$ мс, когда конструкция практически перестала осциллировать, значение $\varepsilon_m^{(0)}$, полученное без учета теплового воздействия (кривая $0'$), уже на 9.7% больше такой же величины, рассчитанной в неизотермическом случае (кривая 0). Для кривых же 2 и $2'$ на рис. 6,б аналогичные значения $\varepsilon_m^{(2)}$, определенные при $t = 500$ мс, различаются еще больше — на 10.9%. Таким образом, в случае учета чувствительности пластических свойств компонентов композиции к скорости их деформирования расчет, выполненный без учета теплового отклика КМ-конструкции (т.е. по теории, разработанной в [22]), может привести к существенному искажению остаточных деформаций материалов композиции.

Аналогичное сравнение кривых 0 , $0'$ и 2 , $2'$ на рис. 7 демонстрирует, что в случае неучета зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования максимальные значения интенсивности деформаций (см. рис. 7,а) и остаточное деформированное состояние (см. рис. 7,б) компонентов композиции можно вполне обоснованно определять без учета теплового отклика в КМ-конструкции.

Однако интенсивности остаточных деформаций компонентов композиции при таких расчетах оказываются в несколько раз большими, чем в вязкоупруго-вязкопластическом случае (ср. ординаты точек на кривых с одинаковыми номерами на рис. 6,b и 7,b).

6. Заключение. Разработанная модель неизоотермического вязкоупруго-вязкопластического поведения многонаправленно армированных пластин позволяет рассчитывать остаточные перемещения и остаточное НДС в компонентах композиции после интенсивного динамического нагружения при учете теплового отклика КМ-конструкций и зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования.

Анализ вязкоупругопластического и вязкоупруго-вязкопластического динамического поведения стеклопластиковой пластины (компоненты композиции которой слабо чувствительны к скорости их деформирования) при учете и без учета теплового отклика в ней показал, что в случае учета зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования необходимо проводить неизоотермический расчет динамики таких КМ-конструкций даже при отсутствии внешних источников тепла немеханического происхождения. Если вязкоупруго-вязкопластический расчет проводить без учета теплового отклика КМ-пластины, то остаточное деформированное состояние компонентов композиции может существенно (на десятки процентов) отличаться от случая неизоотермического расчета. Если же чувствительностью материалов композиции к скорости их деформирования можно пренебречь (вязкоупругопластичность), то при отсутствии внешних источников тепла немеханического происхождения динамический расчет тонкостенной КМ-пластины можно проводить без учета теплового отклика в ней, так как нагрев такой конструкции незначителен (порядка 4–8°C).

Вязкоупругопластический расчет динамики относительно тонкой стеклопластиковой удлиненной пластины как в изотермическом, так и неизоотермическом случаях предсказывает, что после затухания осцилляций такая КМ-конструкция приобретает гофрированную остаточную форму с ориентацией складок в продольном направлении. Аналогичные же расчеты, проведенные по вязкоупруго-вязкопластической модели показывают, что как при учете, так и неучете теплового отклика КМ-конструкции в остаточном состоянии гофрированная форма не образуется. Таким образом, расчеты, выполненные по вязкоупругопластической модели деформирования материалов композиции, приводят не только к количественно, но и качественно неверным представлениям об остаточном состоянии КМ-конструкции после ее интенсивного динамического нагружения.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030900260-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987. 360 с.
2. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
3. Bannister M. Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective // Compos. Part A Appl. 2001. V. 32. № 7. P. 901–910.
[https://doi.org/10.1016/S1359-835X\(01\)00008-2](https://doi.org/10.1016/S1359-835X(01)00008-2)
4. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // Compos. Struct. 2001. V. 53. № 1. P. 21–42.
[https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(00\)00175-6](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(00)00175-6)
5. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н. Новгород: ННГУ, 2002. 391 с.

6. Куликов Г.М. Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 2. С. 33–42.
7. Soutis C. Fibre reinforced composites in aircraft construction // Prog. Aerosp. Sci. 2005. V. 41. № 2. P. 143–151.
<https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2005.02.004>
8. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. N.Y.: CRC Press, 2004. 831 p.
9. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // Compos. Struct. 2010. V. 93. P. 14–31.
10. Vasiliev V.V., Morozov E. Advanced mechanics of composite materials and structural elements. Amsterdam: Elsevier, 2013. 412 p.
11. Андреев А. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. Saarbrücken (Deutschland): Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 с.
12. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P.S. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass fiber reinforced plastic composites // Front. Mech. Eng. 2013. V. 8. P. 187–200.
<https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x>
13. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // Int. J. Non Linear Mech. 2011. V. 46. № 5. P. 807–817.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>
14. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.А., Андришин В.А. Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: Физматлит, 2014. 407 с.
15. Moriniere F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review // Int. J. Impact Eng. 2014. V. 67. P. 27–38.
<https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004>
16. Gibson R.F. Principles of composite material mechanics. Taylor & Francis Group, LLC, 2015. 815 p.
17. Димитриенко Ю.И. Механика композитных конструкций при высоких температурах. М.: Физматлит, 2018. 447 с.
18. Vena P., Gastaldi D., Contro R. Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites // Int. J. Plast. 2008. V. 24. № 3. P. 483–508.
<https://doi.org/10.1016/j.jiplas.2007.07.001>
19. Leu S.-Y., Hsu H.-C. Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders // Int. J. Mech. Sci. 2010. V. 52. № 12. P. 1579–1587.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.07.006>
20. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle // Int. J. Plast. 2012. V. 36. P. 86–112.
<https://doi.org/10.1016/j.jiplas.2012.03.010>
21. Ахундов В.М. Инкрементальная каркасная теория сред волокнистого строения при больших упругих и пластических деформациях // Мех. композ. материалов. 2015. Т. 51. № 3. С. 539–558.
22. Янковский А.П. Моделирование вязкоупруго-вязкопластического поведения гибких армированных пластин // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 5. С. 27–44.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921040140>
23. Янковский А.П. Моделирование термоупруговязкопластического деформирования гибких армированных пластин // ПММ. 2022. Т. 86. № 1. С. 121–150.
<https://doi.org/10.31857/S003282352201009X>
24. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. М.: Машиностроение, 1965. 566 с.
25. Композиционные материалы. Справочник. Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
26. Reissner E. The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech. 1945. V. 12. № 2. P. 69–77.
27. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // Comput. Struct. 1987. V. 26. № 1–2. P. 1–15.
[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X)

-
28. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
 29. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 332 с.
 30. *Хажинский Г.М.* Модели деформирования и разрушения металлов. М.: Научный мир, 2011. 231 с.
 31. *Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.* Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 498 с.
 32. *Янковский А.П.* Моделирование процессов теплопроводности в пространственно-армированных композитах с произвольной ориентацией волокон // Прикладная физика. 2011. № 3. С. 32–38.
 33. Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник / *Ю.М. Тарнопольский, И.Г. Жигун, В.А. Поляков.* М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
 34. *Луканин В.Н., Шатров М.Г., Камфер Г.М. и др.* Теплотехника. М.: Высш. шк., 2003. 671 с.
 35. Справочник по композитным материалам. Кн. 1. М.: Машиностроение, 1988. 448 с.

УДК 539.3

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КЛИНА С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ

© 2023 г. Е. Д. Пожарская^{а,*}, Д. А. Пожарский^{а,**}, Б. В. Соболев^{а,***}

^аДонской государственный технический университет,
Ростов-на-Дону, Россия

* e-mail: pozharskaya.elizaveta@rambler.ru

** e-mail: pozharda@rambler.ru

*** e-mail: b.sobol@mail.ru

Поступила в редакцию 17.01.2023 г.

После доработки 27.01.2023 г.

Принята к публикации 30.01.2023 г.

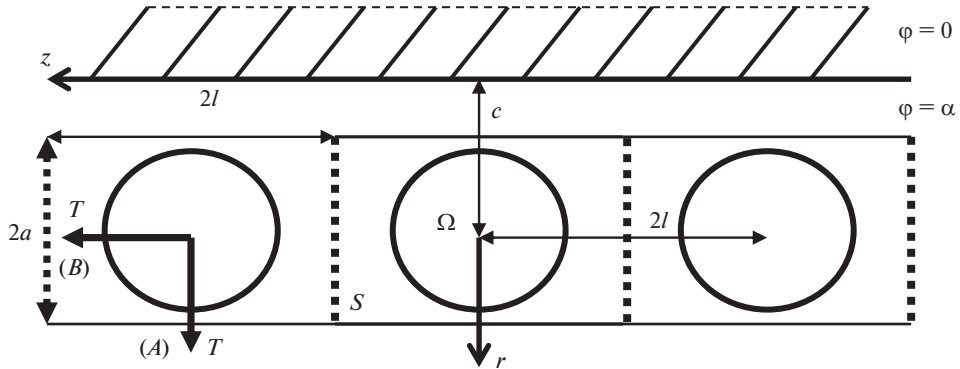
Рассматриваются периодические контактные задачи для трехмерного упругого клина (двухгранного угла, полупространство и четверть пространства являются частными случаями) при учете сил трения Кулона в неизвестных областях контакта. Одна грань клина жестко закреплена, а другая грань взаимодействует с бесконечной прямолинейной цепочкой одинаковых жестких штампов, ось цепочки параллельна ребру клина. Учитываются силы трения перпендикулярные или параллельные ребру клина. Выведены интегральные уравнения, в которых ряды, порожденные компонентами Черрути вклада сил трения, точно просуммированы. Для решения задач применяется метод нелинейных интегральных уравнений, позволяющий одновременно определить область контакта и контактные давления. Рассчитаны механические характеристики, изучен переход от дискретной к непрерывной области контакта бесконечной длины.

Ключевые слова: периодический контакт, упругий клин, интегральные уравнения

DOI: 10.31857/S0572329923600056, **EDN:** QACECL

Введение. Исследования задач периодического контакта актуально в связи с инженерными приложениями [1, 2]. Одним из основных подходов является метод локализации, применяемый для круговых инденторов [3–5]. Изучались двоякопериодические контактные задачи для регулярных поверхностей, слоя и полупространства [6–8]. Учитывался вклад сил трения, износа, сцепления и адгезии при периодическом контакте упругих тел [9–12]. Для нерегулярных поверхностей при наличии угловой линии периодический контакт рассматривался на примере несжимаемого упругого клина без учета сил трения [13]. В случае периодической заданной области контакта применялся асимптотический метод [6, 13], а при неизвестной области — метод быстрого преобразования Фурье с анализом перколяции (слияния областей контакта) [7], а также метод нелинейных граничных интегральных уравнений [8, 13], разработанный Б.А. Галановым [14]. Рассматривались пространственные контактные задачи о взаимодействии клина при учете трения с единичным штампом [15, 16].

В настоящей статье на основе известных фундаментальных решений [15, 16] получены интегральные уравнения линейно-периодических контактных задач для трехмерного упругого клина при учете сил трения. Жесткая заделка одной грани клина обеспечивает корректность интегральных уравнений с символом ядра типа тангенса


 Рис. 1. Схема контакта на грани $\varphi = \alpha$.

гиперболического, который обеспечивает сходимость ядерных рядов. В отличие от задач для несжимаемого материала [13] учитываются силы трения Кулона, действующие перпендикулярно или параллельно ребру клина при произвольном коэффициенте Пуассона. В частном случае, когда клин разворачивается в полупространство, интегральное уравнение для перпендикулярных ребру сил трения совпадает с выведенным ранее [8]. В ядрах уравнений выделены главные члены, из которых связанные с трением точно просуммированы, а несвязанные содержат интегрируемые особенности на линиях возможного слияния соседних областей контакта. Изучена возможность перехода от дискретного к непрерывному пространственному линейно-периодическому контакту на грани клина.

1. Постановка задач. Рассмотрим упругий клин $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$, $|z| < \infty$, ребро которого совпадает с осью z цилиндрической системы координат. Грань клина $\varphi = 0$ жестко заделана. Изучим квазистатические периодические контактные задачи о линейной цепочке одинаковых жестких штампов (период $2l$, ось цепочки параллельна ребру клина и удалена от нее на расстояние c), внедренных в грань $\varphi = \alpha$ на величину δ и начинающих достаточно медленно двигаться без перекоса перпендикулярно или параллельно ребру клина (задачи А и В соответственно, рис. 1). Учитываем силы трения Кулона коллинеарные направлению движения и направленные против движения. Задача А симметрична по z . К штампам приложены нормальные силы P на расстоянии H от ребра и касательные силы $T = \mu P$ (μ — коэффициент трения Кулона). Предполагается, что неизвестные области контакта априори содержатся в заданных соприкасающихся прямоугольниках со сторонами $2l$ и $2a$ (рис. 1, $a < c$). Ближний к началу координат прямоугольник S содержит область контакта Ω , в которой подошва штампа описывается функцией $f(r, z)$, периодически продолжающейся по z вне S с периодом $2l$. Для определенности далее берем

$$f(r, z) = \frac{(r - c)^2}{2R_1} + \frac{z^2}{2R_2} \quad (1.1)$$

где $R_1 \leq R_2$ для задачи А и $R_1 \geq R_2$ для задачи В.

Граничные условия контактных задач имеют вид (Ω^* — объединенная область контакта)

$$\begin{aligned} \varphi = \alpha: \quad & u_\varphi = -(\delta - f(r, z)), \quad (r, z) \in \Omega^*; \quad \sigma_\varphi = 0, \quad (r, z) \notin \Omega^* \\ (A) \quad & \tau_{r\varphi} = \mu\sigma_\varphi, \quad \tau_{\varphi z} = 0; \quad (B) \quad \tau_{r\varphi} = 0, \quad \tau_{\varphi z} = \mu\sigma_\varphi \\ \varphi = 0: \quad & u_\varphi = u_r = u_z = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

При заданных параметрах упругости G (модуль сдвига), ν (коэффициент Пуассона), величинах α , a , c , l , δ , μ и функции $f(r, z)$ требуется определить область контакта Ω и контактное давление $\sigma_\varphi(r, \alpha, z) = -q(r, z)$, $(r, z) \in \Omega$, затем при использовании интегральных условий равновесия штампов могут быть найдены величины P и H .

2. Интегральные уравнения. Для трехмерного упругого клина с одной жестко закрепленной гранью функции Грина содержат решения вспомогательных интегральных уравнений Фредгольма второго рода [15, 16]. Используя эти функции для условий (1.2), принцип суперпозиции и периодичность контактных задач, относительно контактного давления получим интегральные уравнения ($\theta = G/(1 - \nu)$, $n = 1, 2$ для задач А и В соответственно)

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} q(x, y) K(x, y, r, z) dx dy &= 2\pi\theta[\delta - f(r, z)], \quad (r, z) \in \Omega \quad (2.1) \\ K(x, y, r, z) &= K_0(x, y, r, z) - \mu K_n(x, y, r, z) \\ K_n(x, y, r, z) &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \text{sh}(\pi u) W(u) K_{iu}(\beta r) \left\{ \theta_n(u, \beta x) + \frac{\Psi_n(u, \beta x)}{\text{ch}(\pi u/2)} \right\} \sum_{k=-\infty}^\infty c_{kn}(\beta, z - y) du d\beta \\ W(u) &= \frac{2\Delta(u)}{2\kappa \text{ch}(2\alpha u) + 4u^2 \sin^2 \alpha + \kappa^2 + 1} \\ \Delta(u) &= \kappa \text{sh}(2\alpha u) - u \sin(2\alpha), \quad \kappa = 3 - 4\nu \\ \theta_0(u, \beta x) &= K_{iu}(\beta x), \quad c_{k0}(\beta, t) = c_{k1}(\beta, t) = \cos(\beta(t + 2lk)) \\ \theta_1(u, \beta x) &= \frac{h_0(u)}{u} K_{iu}(\beta x) - \nu_* \int_0^\infty h(t) \frac{\text{sh}(\pi t) K_{it}(\beta x) dt}{\text{ch}(\pi t) - \text{ch}(\pi u)}, \quad \nu_* = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \\ \theta_2(u, \beta x) &= \frac{h_0(u)}{u} x K'_{iu}(\beta x) + h_1(u) K_{iu}(\beta x) - \int_0^\infty \text{sh}(\pi t) \frac{\nu_* h(t) x K'_{it}(\beta x) - h_0(t) K_{it}(\beta x) dt}{\text{ch}(\pi t) - \text{ch}(\pi u)} \\ c_{k2}(\beta, t) &= \frac{\sin(\beta(t + 2lk))}{\beta x}, \quad h_0(u) = \frac{2u^2 \sin^2 \alpha}{\Delta(u)}, \quad h(t) = \frac{2\kappa \text{sh}^2(\alpha t)}{\Delta(t)} - \frac{h_0(t)}{1 - 2\nu} \\ h_1(u) &= -u h_0(u) \left[1 + \frac{2(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{u^2 \sin^2 \alpha} \right], \quad K'_{it}(\beta x) = \frac{d}{dx} K_{it}(\beta x) \end{aligned}$$

Здесь $K_{iu}(r)$ – цилиндрическая функция Бесселя, а функции $\Psi_n(u, \beta x)$ при фиксированном значении βx удовлетворяют интегральным уравнениям Фредгольма второго рода ($0 \leq u < \infty$)

$$\begin{aligned} \Psi_n(u, \beta x) &= (1 - 2\nu) \int_0^\infty L(u, \tau) \left[\Psi_n(\tau, \beta x) + \text{ch} \frac{\pi \tau}{2} F_n(\tau, \beta x) \right] d\tau \quad (2.2) \\ L(u, \tau) &= 2 \text{ch} \frac{\pi u}{2} \text{sh} \frac{\pi \tau}{2} W(\tau) \int_0^\infty \frac{\text{sh}(\pi t) g(t) dt}{[\text{ch}(\pi t) + \text{ch}(\pi u)][\text{ch}(\pi t) + \text{ch}(\pi \tau)]} \\ g(t) &= -\frac{\text{th}(\alpha t) \sin^2(2\alpha)}{\text{ch}(2\alpha t) + \cos(4\alpha)} + \\ &+ \{\sin^2 \alpha (g_0(t)[2g_1(t) - tg_2(t)] - g_3(t)[2g_2(t) + tg_1(t)]) - \\ &- 2(1 - \nu) \sin \alpha (g_0(t)[\sin(3\alpha) - \text{ch}(2\alpha t) \sin \alpha] - g_3(t) \text{sh}(2\alpha t) \cos \alpha)\} / g_4(t) \\ g_0(t) &= \kappa \text{sh}(2\alpha t) \cos(2\alpha) - t \sin(2\alpha), \quad g_1(t) = -\text{ch}(2\alpha t) + \cos(2\alpha) + \sin^2(2\alpha) \end{aligned}$$

$$g_2(t) = \operatorname{th}(\alpha t) \sin(2\alpha)(1 + \cos(2\alpha)), \quad g_3(t) = (\kappa \operatorname{ch}(2\alpha t) - 1) \sin(2\alpha)$$

$$g_4(t) = [g_0^2(t) + g_3^2(t)](\operatorname{sh}^2(\alpha t) + \cos^2(2\alpha))$$

$$F_0(\tau, \beta x) = \theta_0(\tau, \beta x), \quad F_1(\tau, \beta x) = \theta_1(\tau, \beta x) + \frac{\tau K_{i\tau}(\beta x)}{2(1-\nu)(1-2\nu)W(\tau)}$$

$$F_2(\tau, \beta x) = \theta_2(\tau, \beta x) + \frac{4(1-\nu)^2 \tau K_{i\tau}(\beta x) + \tau x K'_{i\tau}(\beta x)}{2(1-\nu)(1-2\nu)W(\tau)}$$

Для сходимости ряда в ядре $K_0(x, y, r, z)$ важно, что его символ $W(u)$ типа тангенса гиперболического. Интегральное уравнение (2.1) для задачи А при $\alpha = \pi$ совпадает с выведенным ранее для полупространства [8]. При $\nu = 0.5$ ядра интегральных уравнений (2.1) приводятся к форме

$$K(x, y, r, z) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \operatorname{sh}(\pi u) W_n(u) K_{iu}(\beta x) K_{iu}(\beta r) \sum_{k=-\infty}^\infty c_{\kappa 1}(\beta, z-y) du d\beta \quad (2.3)$$

$$W_1(u) = W_*(u) - \mu f_*(u) \left(1 - x \frac{d}{dx}\right), \quad W_2(u) = W_*(u) + \mu f_*(u) x \frac{d}{dz}$$

$$W_*(u) = \frac{\operatorname{sh}(2\alpha u) - u \sin(2\alpha)}{2(\operatorname{ch}^2(\alpha u) + u^2 \sin^2 \alpha)}, \quad f_*(u) = \frac{u \sin^2 \alpha}{\operatorname{ch}^2(\alpha u) + u^2 \sin^2 \alpha}$$

где $n = 1, 2$ для задач А и В соответственно. При $\mu=0$ формулы (2.3) дают известное ядро [13].

Для упрощения ядра уравнения (2.1) воспользуемся представлением [17]

$$\sum_{k=-\infty}^\infty \exp(i\beta(z-y+2lk)) = 2\pi \exp(i\beta(z-y)) \sum_{k=-\infty}^\infty \delta(2\beta l - 2\pi k) \quad (2.4)$$

где $\delta(x)$ — δ -функция Дирака, отделяя в нем действительную и мнимую часть. При вычислении интегралов с δ -функцией (2.4) требуются значения пределов

$$\frac{2}{\pi} \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^\infty \operatorname{sh}(\pi u) W(u) K_{iu}(\beta x) K_{iu}(\beta r) du = \int_0^\infty \frac{W(u)}{u} \cos\left(u \ln \frac{r}{x}\right) du \quad (2.5)$$

$$\frac{2}{\pi} \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{W(u) h(t) \operatorname{sh}(\pi u) \operatorname{sh}(\pi t)}{\operatorname{ch}(\pi t) - \operatorname{ch}(\pi u)} K_{iu}(\beta x) K_{iu}(\beta r) dt du = - \int_0^\infty \frac{W(u) h(u)}{u} \sin\left(u \ln \frac{r}{x}\right) du$$

возникающих в ядре (2.1) при $k = 0$; также используем предел, получаемый почленным дифференцированием по x второй формулы (2.5).

Пределы (2.5) связаны с соответствующей плоской задачей. Если удержать в ядре уравнения (2.1) задачи А лишь слагаемое при $k = 0$ (единичный штамп) для полосовой области контакта вдоль ребра клина, применить преобразование Фурье по z и совершить предельный переход $\beta \rightarrow 0$ при учете формул (2.5), придем к известному ядру интегрального уравнения плоской задачи с трением для клина [15]

$$K(x, r) = \int_0^\infty \frac{W(u)[u - \mu h_0(u)]}{u^2} \cos\left(u \ln \frac{r}{x}\right) du - \mu \nu \int_0^\infty \frac{W(u) h(u)}{u} \sin\left(u \ln \frac{r}{x}\right) du \quad (2.6)$$

Выделим главные члены ядра уравнения (2.1). Для функции $K_0(x, y, r, z)$ возьмем интегралы и ряд [15, 18, 19] (C — постоянная Эйлера)

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ut) - \exp(-u)}{u} du = -\ln|t|, \quad \int_0^\infty \operatorname{ch}(\pi u) K_{iu}(tx) K_{iu}(tr) du = \frac{\pi}{2} K_0(t|r-x|)$$

$$\frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} K_0(\pi_k |r-x|) \cos(\pi_k(z-y)) = \frac{1}{R} + \frac{1}{l} \left(C + \ln \frac{|r-x|}{4l} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{R_k^+} + \frac{1}{R_k^-} - \frac{1}{kl} \right]$$

$$R = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y)^2}, \quad R_k^{\pm} = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y \pm 2kl)^2}, \quad \pi_k = \pi k/l$$

а для зависящих от u слагаемых ядра выделим интегралы и ряды [15, 18, 19]

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{U(t, u) K_{iu}(\beta x) K_{iu}(\beta r)}{\operatorname{ch}(\pi t) - \operatorname{ch}(\pi u)} \cos(\beta(z-y)) d\beta dt du &= -\frac{r-x}{R^2} \\ \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{U(t, u) K'_{iu}(\beta x) K_{iu}(\beta r)}{\operatorname{ch}(\pi t) - \operatorname{ch}(\pi u)} \sin(\beta(z-y)) \frac{d\beta}{\beta} dt du &= -\frac{z-y}{R^2} \\ U(t, u) &= \operatorname{ch}(\pi t) \operatorname{ch}(\pi u) - 1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r-x}{(R_k^+)^2} &= \frac{\pi \operatorname{sh}(\pi(r-x)/l)}{2l [\operatorname{ch}(\pi(r-x)/l) - \cos(\pi(z-y)/l)]} \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z-y+2lk}{(R_k^+)^2} &= \frac{\pi \sin(\pi(z-y)/l)}{2l [\operatorname{ch}(\pi(r-x)/l) - \cos(\pi(z-y)/l)]} \end{aligned}$$

Ряды (2.7) позволяют точно просуммировать члены, порожденные решением задачи Черрути для полупространства.

В результате представим ядра уравнения (2.1) в форме

$$\begin{aligned} K_0(x, y, r, z) &= \frac{1}{R} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{R_k^+} + \frac{1}{R_k^-} - \frac{1}{kl} \right] + \frac{C}{l} + \frac{1}{l} \ln \frac{|r-x|}{4l |\ln(r/x)|} + \\ &\quad + \frac{1}{l} \int_0^{\infty} \left\{ [W(u) - 1] \cos \left(u \ln \frac{r}{x} \right) + \exp(-u) \right\} \frac{du}{u} + \\ &\quad + \frac{4}{\pi l} \int_0^{\infty} \operatorname{sh}(\pi u) \left\{ [W(u) - \operatorname{cth}(\pi u)] \Sigma_0(u, u) + \frac{W(u) \Sigma_0(u)}{\operatorname{ch}(\pi u/2)} \right\} du \\ K_1(x, y, r, z) &= \frac{\pi v_* \operatorname{sh}(\pi(r-x)/l)}{2l [\operatorname{ch}(\pi(r-x)/l) - \cos(\pi(z-y)/l)]} + \\ &\quad + \frac{v_*}{l} \int_0^{\infty} [W(u) h(u) - 1] \sin \left(u \ln \frac{r}{x} \right) \frac{du}{u} + \\ &\quad + \frac{4}{\pi l} \int_0^{\infty} \operatorname{sh}(\pi u) W(u) \left[\frac{h_0(u)}{u} \Sigma_1(u, u) + \frac{\Sigma_1(u)}{\operatorname{ch}(\pi u/2)} \right] du - \\ &\quad - \frac{4v_*}{\pi l} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{W(u) h(t) \operatorname{sh}(\pi u) \operatorname{sh}(\pi t) - U(t, u) \Sigma_1(t, u)}{\operatorname{ch}(\pi t) - \operatorname{ch}(\pi u)} dt du \\ K_2(x, y, r, z) &= \frac{\pi v_* \sin(\pi(z-y)/l)}{2l [\operatorname{ch}(\pi(r-x)/l) - \cos(\pi(z-y)/l)]} - \\ &\quad - \frac{z-y}{lx} \int_0^{\infty} \left\{ v_* [W(u) h(u) - 1] \cos \left(u \ln \frac{r}{x} \right) + \frac{W(u) h_0(u)}{u} \sin \left(u \ln \frac{r}{x} \right) \right\} du + \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{4}{\pi l} \int_0^\infty \operatorname{sh}(\pi u) W(u) \left[\frac{h_0(u)}{u} \Sigma(u, u) + h_1(u) \Sigma_2(u, u) + \frac{\Sigma_2(u)}{\operatorname{ch}(\pi u/2)} \right] du - \\
 & - \frac{4v_*}{\pi l} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{W(u) h(t) \operatorname{sh}(\pi u) \operatorname{sh}(\pi t) - U(t, u)}{\operatorname{ch}(\pi t) - \operatorname{ch}(\pi u)} \Sigma(t, u) dt du + \\
 & + \frac{4}{\pi l} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{W(u) h_0(t) \operatorname{sh}(\pi u) \operatorname{sh}(\pi t)}{\operatorname{ch}(\pi t) - \operatorname{ch}(\pi u)} \Sigma_2(t, u) dt du \\
 \Sigma_n(t, u) & = \sum_{k=1}^\infty K_{it}(\pi_k x) K_{iu}(\pi_k r) s_{kn}(z - y), \quad s_{k0}(t) = s_{k1}(t) = \cos(\pi_k t) \\
 \Sigma_n(u) & = \sum_{k=1}^\infty \Psi_n(u, \pi_k x) K_{iu}(\pi_k r) s_{kn}(z - y), \quad s_{k2}(t) = \frac{\sin(\pi_k t)}{\pi_k x} \\
 \Sigma(t, u) & = x \sum_{k=1}^\infty K'_{it}(\pi_k x) K_{iu}(\pi_k r) s_{k2}(z - y)
 \end{aligned}$$

В формулах (2.8) улучшена сходимость всех интегралов с учетом асимптотического поведения символов в бесконечности. Ядра (2.8) содержат слагаемые, входящие в ядра известных интегральных уравнений пространственных и плоских контактных задач с трением для одного штампа; в пределе при $l \rightarrow \infty$ они стремятся к известным ядрам для одного штампа. Логарифмический член ядра $K_0(x, y, r, z)$ обладает устранимой особенностью при $r \rightarrow x$ [8, 13].

3. Численный метод. Для решения контактных задач используем метод, развитый Галановым [14], который позволяет определить область контакта и давления в этой области одновременно. В данном методе интегрирование в уравнении (2.1), (1.1) распространяется на прямоугольник S , содержащий область Ω (рис. 1). В условиях отсутствия контакта и обращения в нуль давления в дополнительной области $S \setminus \Omega$ приходим к системе интегрального уравнения и интегрального неравенства

$$\begin{aligned}
 \int_S q(N) K(N, M) dN & = d(M), \quad q(M) \geq 0, \quad M \in \Omega \\
 \int_S q(N) K(N, M) dN & > d(M), \quad q(M) = 0, \quad M \in S \setminus \Omega \\
 N & = x, y, \quad M = r, z, \quad d(M) = 2\pi\theta [\delta - f(M)]
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

После введения нелинейных операторов

$$p^+(M) = \sup\{p(M), 0\}, \quad p^-(M) = \inf\{p(M), 0\}$$

и представления искомого давления в форме

$$q = q(M) = q^+(M) + q^-(M)$$

система (3.1) сводится к решению нелинейного операторного уравнения типа Гаммерштейна

$$\Theta p = 0 \quad (M \in \Omega), \quad \Theta p \equiv p^- + Kp^+ - d \tag{3.2}$$

где $p = p(M)$, $p^\pm = p^\pm(M)$, $d = d(M)$,

$$Kp^+ = \int_S p^+(N) K(N, M) dN \tag{3.3}$$

Интегральное неравенство (3.1) удовлетворяется автоматически. Можно доказать эквивалентность системы (3.1) и уравнения (3.2) [14, 15].

Для численного решения уравнения (3.2) применяется модифицированный метод Ньютона, который базируется на построении последовательных приближений по формулам

$$p_{n+1} = p_n - (F'/p_n)^{-1} \Theta p_n, \quad p_n = p_n(M), \quad n = 0, 1, \dots, \quad p_0 = d$$

где F – дифференцируемый оператор, аппроксимирующий оператор Θ по равномерной метрике [14, 15].

В отличие от задач для одного штампа [14, 15] первое ядро (2.8) в прямоугольнике S имеет не только классическую особенность R^{-1} , но и дополнительные интегрируемые особенности $(R_1^\pm)^{-1}$ в точках $r = x$, $z - y = \pm 2l$ на сторонах S , обозначенных точками на рис. 1. При расчете значений ядра в интегралах типа (3.3) особенности сглаживались по формуле ($k = 0; 1$)

$$(r - x)^2 + (z - y \pm 2kl)^2 \rightarrow (r - x)^2 + (z - y \pm 2kl)^2 + \frac{h_1 h_2}{16}$$

где h_1 и h_2 – шаги сетки соответственно по осям r и z .

Введем безразмерные обозначения (штрихи далее опускаем)

$$r' = \frac{r - c}{l}, \quad x' = \frac{x - c}{l}, \quad z' = \frac{z}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad A = \frac{l}{2R_1}, \quad B = \frac{l}{2R_2}, \quad \lambda = \frac{c}{l}$$

$$q'(r', z') = \frac{q(r, z)}{2\pi\theta}, \quad \varepsilon = \frac{a}{l}, \quad \delta' = \frac{\delta}{l}, \quad P' = \frac{P}{2\pi\theta l^2}, \quad S' \leftrightarrow S, \quad \Omega' \leftrightarrow \Omega$$

Параметр λ характеризует относительную удаленность цепочки штампов от ребра клина.

В табл. 1 и 2 приведены соответственно зависимости $P(\delta)$ ($\lambda = 2$, $\nu = 0.5$, $\mu = 0.2$, $\varepsilon = 1$) и $P(\lambda)$ ($\delta = 1$, $\nu = 0.5$, $\mu = \pm 0.2$, $\varepsilon = 1$) для разных углов клина α , рассчитанные при $A = 1$ и $B = 0.2$ для задачи А и $A = 0.2$ и $B = 1$ для задачи В. Значения вдавливающей силы P растут при увеличении угла клина и осадки штампов и снижаются при отдалении цепочки от ребра клина. Для упругой четверти пространства соответствующие значения больше, чем для полупространства, что объясняется приближением зоны контакта к жесткой заделке по угловой координате. Для несжимаемого полупространства в задаче А, а также для произвольного клина в задаче В, знак μ не влияет на значение P (см. уравнения (2.1) и (2.3)). Существенное влияние направления сил трения на вдавливающую силу P при $\nu = 0.5$ наблюдается в задаче А при контакте вблизи ребра остроугольного клина. Для несжимаемой четверти пространства при $\mu < 0$ (силы трения направлены в положительном направлении полуоси r) значения P меньше, чем при $\mu > 0$ (см. табл. 2). Противоположная ситуация отмечалась для сжимаемого полупространства ($\alpha = \pi$, $\nu = 0.25$) [8]. Такое поведение интегральной характеристики контактных давлений коррелирует со знаком связанной с μ части фундаментального решения плоской задачи (2.6), которое является нормальным перемещением (с обратным знаком), вызванным действием касательной силы, приложенной в точке $r = x$ и направленной к углу клина [15]. При $r < x$ для полуплоскости указанное нормальное перемещение точек границы $u_\phi(r, \alpha = \pi) \leq 0$ ($\nu = 0.25$) [8], тогда как для несжимаемой четверти плоскости $u_\phi(r, \alpha = \pi/2) \geq 0$ ($\nu = 0.5$), что по-разному может влиять на контакт.

Для достаточно вытянутых вдоль ребра клина штампов при росте осадки δ наблюдается выход области контакта на боковые стороны прямоугольника S (показаны точками на рис. 1), что означает начало перколяции (слияние областей контакта). На рис. 2 показаны зависимости (а) $\min \delta(\lambda)$ и (б) $\min P(\lambda)$, при которых начинается слияние областей контакта для задачи А ($\nu = 0.5$, $A = \varepsilon = 1$, $B = \mu = 0.2$; сплошные линии для $\alpha = 3\pi/2$, пунктир – $\alpha = \pi$, точки – $\alpha = \pi/2$). Значения $\min P(\lambda)$ при $\alpha = \pi$ и $\alpha = \pi/2$ отличаются

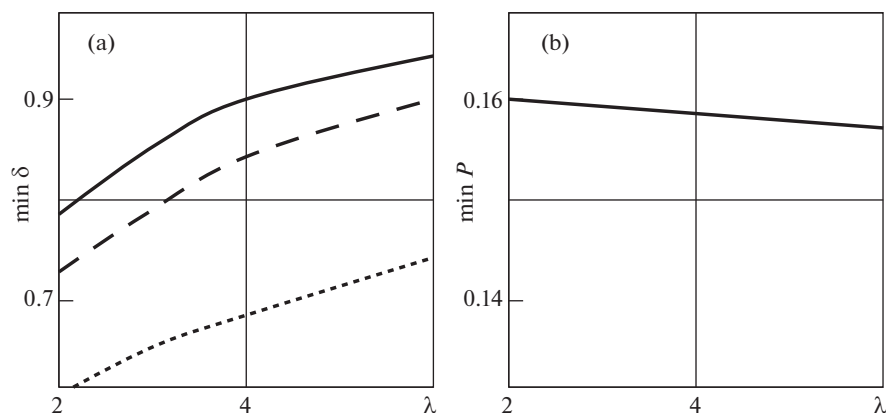
Таблица 1. Значения силы P в зависимости от осадки δ

Задача	А			В		
δ	0.5	1	1.5	0.5	1	1.5
$\alpha = \pi/2$	0.132	0.332	0.444	0.147	0.375	0.628
$\alpha = \pi$	0.0996	0.235	0.309	0.109	0.267	0.442
$\alpha = 3\pi/2$	0.0918	0.214	0.281	0.0985	0.236	0.389

 Таблица 2. Значения силы P в зависимости от параметра λ

Задача	А			В		
λ	1.5	2.5	3.5	1.5	2.5	3.5
$\alpha = \pi/2, \mu = 0.2$	0.383	0.303	0.268	0.451	0.335	0.291
$\alpha = \pi/2, \mu = -0.2$	0.341	0.278	0.248	0.451	0.335	0.291
$\alpha = \pi, \forall \mu$	0.258	0.221	0.202	0.306	0.246	0.222
$\alpha = 3\pi/2, \mu = 0.2$	0.233	0.202	0.186	0.266	0.220	0.202
$\alpha = 3\pi/2, \mu = -0.2$	0.227	0.198	0.183	0.266	0.220	0.202

от соответствующих значений при $\alpha = 3\pi/2$ не более, чем на 2%, и не показаны на рис. При уменьшении угла раствора клина снижается осадка, при которой наступает перколяция. При отдалении цепочки штампов от ребра клина указанная осадка, наоборот, возрастает. При этом вдавливающая сила меняется незначительно. На рис. 3 внутри прямоугольника S показаны границы половинок симметричных по z областей контакта Ω (задача А, $v = 0.5$, $A = \varepsilon = 1$, $B = \mu = 0.2$). При развитии перколяции с ростом осадки δ наблюдается увеличение линии слияния соседних областей при $z = 1$ и площади Ω , смещение области Ω к ребру клина относительно точки начального касания (рис. 3,а, $\alpha = \pi/2$, $\delta = 1$, $\lambda = 2$). Область контакта растет также при уменьшении угла остроугольного клина (рис. 3,б, $\delta = 0.5$, $\lambda = 1.5$, сплошная линия для $\alpha = \pi$, пунктир — $\alpha = \pi/2$).


 Рис. 2. Зависимости (а) $\min \delta(\lambda)$ и (б) $\min P(\lambda)$ для начала перколяции.

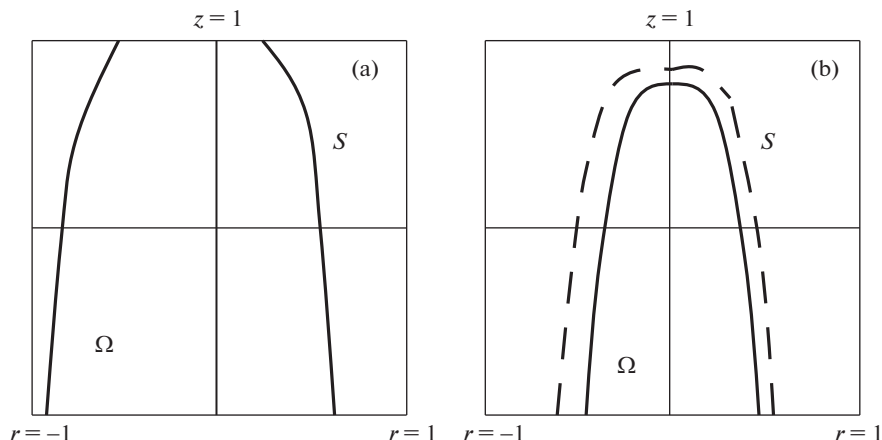


Рис. 3. Границы половинок зон контакта (а) после и (б) до перколяции.

Заключение. Закрепление одной грани пространственного упругого клина позволяет получить корректные интегральные уравнения при линейно-периодическом контакте с трением Кулона. Установлена структура ядер интегральных уравнений задач линейно-периодического контакта с трением для клина, которая включает известные члены ядер интегральных уравнений соответствующих плоских и пространственных контактных задач с трением для одного штампа. На линиях возможной перколяции возникают дополнительные интегрируемые особенности ядра порядка R^{-1} . При уменьшении острого угла клина характеристики контакта могут существенно отличаться от случая полупространства.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (код проекта 22-21-00013).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Xu Y., Jackson R.L. Periodic contact problems in plane elasticity: the fracture mechanics approach // ASME J. Trib. 2018. V. 140. № 1. P. 011404. <https://doi.org/10.1115/1.4036920>
2. Пожарский Д.А. Периодические контактные и смешанные задачи теории упругости (обзор) // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2021. № 2. С. 22–33. <https://doi.org/10.18522/1026-2237-2021-2-22-33>
3. Горячева И.Г. Периодическая контактная задача для упругого полупространства // ПММ. 1998. Т. 62. № 6. С. 1036–1044.
4. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
5. Goryacheva I., Yakovenko A. The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space // Tribol. Int. 2021. V. 161. P. 107078. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2021.107078>
6. Александров В.М. Двоякопериодические контактные задачи для упругого слоя // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 308–315.
7. Yastrebov V.A., Anciaux G., Molinari J.-F. The contact of elastic regular wavy surfaces revisited // Tribol. Lett. 2014. V. 56. P. 171–183. <https://doi.org/10.1007/s11249-014-0395-z>
8. Золотов Н.Б., Пожарский Д.А. Периодические контактные задачи для полупространства с частично закрепленной границей // ПММ. 2022. Т. 86. Вып. 3. С. 394–403. <https://doi.org/10.31857/S0032823522030122>

9. *Goryacheva I.G., Torskaya E.V.* Modeling of fatigue wear of a two-layered elastic half-space in contact with periodic system of indenters // *Wear*. 2010. V. 268. № 11–12. P. 1417–1422.
<https://doi.org/10.1016/j.wear.2010.02.018>
10. *Солдатенков И.А.* Периодическая контактная задача теории упругости. Учет трения, износа и сцепления // *ПММ*. 2013. Т. 77. Вып. 2. С. 337–351.
11. *Солдатенков И.А.* Пространственная контактная задача для упругого слоя и волнистого штампа при наличии трения и износа // *ПММ*. 2014. Т. 78. Вып. 1. С. 145–155.
12. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Y.* Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies // *Friction*. 2017. V. 5. P. 339–350.
<https://doi.org/10.1007/s40544-017-0179-1>
13. *Пожарский Д.А.* Периодическая контактная задача для упругого клина // *ПММ*. 2015. Т. 79. Вып. 6. С. 864–872.
14. *Галанов Б.А.* Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // *ПММ*. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 827–835.
15. *Пожарский Д.А.* Фундаментальные решения статики упругого клина и их приложения. Ростов-на-Дону: ООО “ДГТУ-Принт”, 2019. 312 с.
16. *Пожарский Д.А.* Пространственная контактная задача с трением для упругого клина // *ПММ*. 2008. Т. 72. Вып. 5. С. 852–860.
17. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.
18. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
19. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Л.А. ТОЛОКОННИКОВА

DOI: 10.31857/S0572329923600317, EDN: YDQDJX

7 июня 2023 года исполняется 100 лет со дня рождения известного советского и российского ученого-механика Леонида Александровича Толоконникова, заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, доктора физико-математических наук; основоположника Тульской школы механики, почетного профессора ТулГУ.

Научные исследования Л.А. Толоконникова были посвящены многим фундаментальным и прикладным проблемам механики деформируемого твердого тела. Среди них вопросы приложения нелинейной теории упругости и пластичности, анизотропной теории пластичности к технологическим проблемам обработки металлов давлением, вопросы теории разносопротивляющихся материалов, теории вязкоупругости, устойчивости, теории процессов пластического деформирования при больших деформациях и скоростях, вопросы классической механики применительные к описанию механических систем со многими степенями свободы при наличии сил трения и многое другое.

Л.А. Толоконников являлся членом Президиума научно-методического Совета Минобразования СССР и РФ по сопротивлению материалов, строительной механике, теории упругости и пластичности, экспертом Совета по механике и математике ВАК СССР и РФ, председателем диссертационного совета по механике деформируемого твердого тела Тульского политехнического института, а затем Тульского государственного университета, членом ряда докторских диссертационных советов в Москве и Твери.

Заслуги Леонида Александровича Толоконникова были отмечены высокими наградами: орденом Ленина, двумя орденами Трудового Красного Знамени, орденами Дружбы народов и “Знак почета”, званием “Заслуженный деятель науки и техники РСФСР”. Российская Академия наук наградила Л.А. Толоконникова Золотой медалью имени академика М.В. Келдыша — за вклад в создание ракетно-космической техники и подготовку научных кадров для оборонной отрасли. Он дважды лауреат премии имени С.И. Мосина.

Тем не менее главная его награда — общепризнанная научная школа по механике деформируемого твердого тела и многочисленные ученики, продолжающие его дело. Л.А. Толоконников обладал замечательной способностью объединять и увлекать способных молодых людей, желающих заниматься наукой, интересными и важными прикладными задачами. Именно поэтому он стал главой крупной школы механиков, воспитав за свою жизнь 21 доктора и более 130 кандидатов наук. Ученики Леонида Александровича составляют значительную часть профессорско-преподавательского состава Тульского государственного университета, работают в университетах Москвы, Орла, Липецка, Твери и других городов ближнего и дальнего зарубежья.