

ISSN 1810-3189 (print)  
ISSN 2782-294X (online)  
Подписной индекс 72674

# **ФИЗИКА ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ И РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ**

**PHYSICS OF WAVE PROCESSES  
AND RADIO SYSTEMS**

**2022**

**Том 25 | Vol. 25  
№ 1 | No. 1**

# ФИЗИКА ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ И РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Периодический теоретический и научно-практический журнал  
2022. Том 25, № 1

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук.

Журнал включен в библиографические базы данных ВИНТИ (<http://www.viniti.ru>), ULRICHS Periodical Directory (<http://www.ulrichsweb.com>) и РИНЦ (<http://www.elibrary.ru>).

---

**Учредитель и издатель журнала:**

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева

**Соучредитель и издатель журнала:**

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики

**Главный редактор:**

д.ф.-м.н., доц. *Клюев Д.С.*

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики (г. Самара, Россия)

**Зам. главного редактора:**

д.ф.-м.н., проф. *Завершинский И.П.*

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева (г. Самара, Россия)

**Редакционная коллегия:**

д.ф.-м.н., проф. *Бобрешов А.М.*

Воронежский государственный университет (г. Воронеж, Россия)

д.т.н., проф. *Бузов А.Л.*

АО «Самарское Инновационное Предприятие Радиосистем» (г. Самара, Россия)

проф. *Ван Лил Э.*

Лёвенский католический университет (г. Лёвен, Бельгия)

д.т.н., проф. *Волобуев А.Н.*

Самарский государственный медицинский университет (г. Самара, Россия)

д.т.н., проф. *Воскресенский Д.И.*

Московский авиационный институт (государственный технический университет) (г. Москва, Россия)

д.ф.-м.н., акад. РАН *Гуляев Ю.В.*

Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН (г. Москва, Россия)

д.т.н., проф. *Дмитриков В.Ф.*

Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций имени проф. М.А. Бонч-Бруевича (г. Санкт-Петербург, Россия)

д.ф.-м.н., проф. *Ивахник В.В.*

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева (г. Самара, Россия)

д.ф.-м.н., проф. *Ильинский А.С.*

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (г. Москва, Россия)

проф. *Кузаев Г.А.*

Норвежский университет естественных и технических наук (г. Тронхейм, Норвегия)

д.т.н., проф. *Мещанов В.П.*

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (г. Саратов, Россия)

д.т.н., проф. *Морозов Г.А.*

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева (г. Казань, Россия)

д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН *Никитов С.А.*

Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН (г. Москва, Россия)

д.ф.-м.н. *Осипов О.В.*

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики (г. Самара, Россия)

д.т.н., проф. *Пихтелев А.И.*

Нижегородский научно-исследовательский приборостроительный институт «Кварц» (г. Нижний Новгород, Россия)

д.т.н., проф. *Пономарев Л.И.*

Московский авиационный институт (государственный технический университет) (г. Москва, Россия)

д.ф.-м.н., проф. *Потапов А.А.*

Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН (г. Москва, Россия)

д.ф.-м.н., проф. *Просвирнин С.Л.*

Радиоастрономический институт Национальной академии наук Украины (г. Харьков, Украина)

лект. *Сидоров К.А.*

Кардиффский университет (г. Кардифф, Великобритания)

н.с. *Чернокожин Е.В.*

Тель-Авивский университет (г. Тель-Авив, Израиль)

проф. *Черняков М.С.*

Бирмингемский университет (г. Бирмингем, Великобритания)

д.ф.-м.н., проф. *Шевяхов Н.С.*

Саровский физико-технический институт НИЯУ МИФИ (г. Саров, Россия)

д.т.н., проф. *Яцьишен В.В.*

Волгоградский государственный университет (г. Волгоград, Россия)

д.т.н., проф. *Яшин А.А.*

Медицинский институт Тульского государственного университета (г. Тула, Россия)

**Ответственный секретарь:**

д.ф.-м.н. *Табаков Д.П.*

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики (г. Самара, Россия)

**Выпускающий редактор:** *Мурзинова Т.А.*

**Лит. редактирование и корректура:** *Мурзиновой Т.А.*

**Информация на английском языке:** *Стрельникова М.С.*

**Компьютерный набор и верстка:** *Градинарь И.М.*

**Адрес редакции:**

443010, Россия, Самарская обл., г. Самара, ул. Л. Толстого, 23

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, к. 342

Тел. (846) 339-11-21, e-mail: klyuevd@yandex.ru

URL: <https://journals.ssau.ru/index.php/pwp>

**Адрес издателя:**

443086, Россия, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34, корп. 22а, 312б,

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,

Центр периодических изданий Самарского университета.

Тел. (846) 334-54-06, e-mail: murzinova.tatjana@yandex.ru

Издается с 1998 г. Выходит 4 раза в год.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций – ПИ № ФС 77-68199 от 27.12.2016



Все статьи распространяются по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция»)

4.0 Всемирная. Для подробной информации посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>

© Самарский национальный исследовательский университет

имени академика С.П. Королева, 2022

© Поволжский государственный университет

телекоммуникаций и информатики, 2022

Подписано в печать 31.03.2022. Дата выхода в свет 15.04.2022

Формат 60 × 84/8. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 11

Цена свободная. 0+. Тираж 100 экз. Заказ №

Отпечатано с готового оригинала-макета в типографии Самарского университета

443086, Россия, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34.

URL: <https://ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

# PHYSICS OF WAVE PROCESSES AND RADIO SYSTEMS

**Fizika volnovykh processov  
i radiotekhnicheskie sistemy**

**Theoretical and Scientific Journal**

**2022, vol. 25, no. 1**

The journal is included by the Higher Attestation Commission into the List of leading scientific journals and publications in the Russian Federation, where basic scientific results of doctoral theses should be published (Bulletin of the Higher Attestation Commission of the Ministry of Education and Science).

The journal is included in bibliographic databases VINITI (<http://www.viniti.ru>), ULRICH'S Periodical Directory (<http://www.ulrichsweb.com>), and the Russian Science Citation Index (<http://www.elibrary.ru>).

---

## **Journal Founders and Publishers**

Samara National Research University

**and**

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics

## **Editor in Chief:**

asst. prof. *D.S. Klyuev*

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics (Samara, Russia)

## **Deputy Chief Editor:**

prof. *I.P. Zavershinsky*

Samara National Research University (Samara, Russia)

## **Editorial Board:**

prof. *A.M. Bobreshov*

Voronezh State University (Voronezh, Russia)

prof. *A.L. Buzov*

Samara Innovative Radio Systems Enterprise (Samara, Russia)

prof. *M.S. Cherniakov*

University of Birmingham (Birmingham, UK)

researcher *E.V. Chernokozhin*

Tel Aviv University (Tel Aviv, Israel)

prof. *V.F. Dmitrikov*

The Bonch-Bruевич Saint Petersburg State University of Telecommunications (Saint Petersburg, Russia)

academician of RAS *Yu.V. Gulyaev*

Institute of Radio Engineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

prof. *A.S. Ilyinsky*

Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russia)

prof. *V.V. Ivakhnik*

Samara National Research University (Samara, Russia)

prof. *G.A. Kouzaev*

Norwegian University of Science and Technology (Trondheim, Norway)

prof. *V.P. Meshchanov*

Saratov State University (Saratov, Russia)

prof. *G.A. Morozov*

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI (Kazan, Russia)

corresp. member of RAS *S.A. Nikitov*

Institute of Radio Engineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

prof. *O.V. Osipov*

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics (Samara, Russia)

prof. *A.I. Pikhtele*

Nizhny Novgorod Research Instrument Engineering Institute «Quartz» (Nizhny Novgorod, Russia)

prof. *L.I. Ponomarev*

Moscow Aviation Institute (State Technical University) (Moscow, Russia)

prof. *A.A. Potapov*

Institute of Radio Engineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

prof. *S.L. Prosvirnin*

Radio Astronomy Institute of the National Academy of Sciences of Ukraine (Kharkiv, Ukraine)

prof. *N.S. Shevyakhov*

Sarov Physics and Technology Institute of the National Research Nuclear University MEPhI (Sarov, Russia)

lecturer *K.A. Sidorov*

Cardiff University (Cardiff, UK)

prof. *E. Van Lil*

KU Leuven (Leuven, Belgium)

prof. *A.N. Volobuev*

Samara State Medical University (Samara, Russia)

prof. *D.I. Voskresensky*

Moscow Aviation Institute (State Technical University) (Moscow, Russia)

prof. *A.A. Yashin*

Medical Institute of Tula State University (Tula, Russia)

prof. *V.V. Yatsyshen*

Volgograd State University (Volgograd, Russia)

**Executive Editor:**

asst. prof. *D.P. Tabakov*

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics (Samara, Russia)

**Commissioning Editor:** *T.A. Murzinova*

**Proofreading:** *T.A. Murzinova*

**Language Editor:** *M.S. Strelnikov*

**Typesetting:** *I.M. Gradinar*

**Editorial Office:** 23, L. Tolstoy St., Rm. 342, Samara, 443010, Samara Region, Russia

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatic.

Tel. (846) 339-11-21, e-mail: [klyuevd@yandex.ru](mailto:klyuevd@yandex.ru)

URL: <https://journals.ssau.ru/index.php/pwp>

**Publisher Office:** 34, bldg. 22a, Moskovskoye shosse, rm. 312b, Samara, 443086, Samara Region, Russia, Samara National Research University, Center of Periodical Publications of Samara University. Tel. (846) 334-54-06, e-mail: [murzinova.tatjana@yandex.ru](mailto:murzinova.tatjana@yandex.ru)

Published since 1998. Frequency 4 times a year.

Edition is registered by The Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media – PI N° FS 77-68199 of 27.12.2016



All articles are licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

For more information, see <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>

© Samara National Research University, 2022

© Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 2022


## Содержание

<i>Е.К. Башкиров</i> Перепутывание двух сверхпроводящих кубитов, индуцированное тепловым шумом резонатора со средой Керра, при наличии начальной атомной когерентности.....	7
<i>В.Н. Тарасов</i> Математическая модель задержки на основе СМО с гиперэкспоненциальным и эрланговским распределениями .....	16
<i>В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева</i> Модель задержки на основе сдвинутых гиперэкспоненциального и эрланговского распределений.....	21
<i>А.А. Головков, В.А. Головков</i> Принципы построения и основные характеристики перспективной курсо-глиссадной системы .....	27
<i>Р.Р. Диязитдинов</i> Итерационный алгоритм оценки смещения, масштаба и поворота для совмещения телевизионных сигналов при влиянии аддитивных и мультипликативных помех.....	36
<i>А.А. Головков, В.А. Головков</i> Алгоритм параметрического синтеза каскадно-включенных согласующих смешанных четырехполюсников по критерию обеспечения стационарного режима генерации .....	45
<i>М.Ю. Зуев</i> Комплексное повышение эффективности радиоэлектронных устройств и систем передачи информации с OFDM на основе нелинейных систем с динамическим хаосом .....	55
<u><i>В.С. Казакевич</i></u> , <i>И.Л. Ключац, Г.А. Мордовин</i> Неравновесное охлаждение и нагревание жидкого кристалла МББА при фазовом переходе первого рода в длинной кювете .....	65
<i>М.И. Смольков, А.Ф. Крутов</i> Разработка программного обеспечения для реализации модели пористых структур на основе трехпериодических поверхностей .....	71
<i>А.Н. Волобуев, С.В. Краснов, К.А. Адыширин-Заде, Т.А. Антипова, Н.Н. Александрова</i> Изменение формы вертикально стоящего упругого резервуара с жидкостью .....	80
К сведению авторов .....	87

## Contents

<i>Evgeny K. Bashkirov</i> Entanglement of two superconducting qubits induced by a thermal noise of a cavity with Kerr medium taking into account the atomic coherence .....	7
<i>Veniamin N. Tarasov</i> Mathematical delay model based on QS with hyperexponential and Erlang distributions.....	16
<i>Veniamin N. Tarasov, Nadezhda F. Bakhareva</i> Delay model based on shifted hyperexponential and Erlang distributions.....	21
<i>Alexander A. Golovkov, Vladimir A. Golovkov</i> Principles of construction and basic characteristics of perspective noiseproof course-glide system.....	27
<i>Rinat R. Diyazitdinov</i> Iterative algorithm for offsets, scale and rotate estimation for television image superposition with additive and multiplicative noise .....	36
<i>Alexander A. Golovkov, Vladimir A. Golovkov</i> Algorithm for parametric synthesis of cascade-connected matching mixed quadripoles according to the criterion of ensuring stationary generation mode.....	45
<i>Maxim Yu. Zuev</i> Complex improvement of the efficiency of radio electronic devices and information transmission systems with OFDM based on nonlinear systems with dynamic chaos.....	55
<u>Vladimir S. Kazakevich</u> , <i>Igor L. Klyukach, Gennady A. Mordovin</i> Non-equilibrium cooling and heating of an MBBA liquid crystal at the first-order phase transition in a long cell.....	65
<i>Mikhail I. Smolkov, Alexander F. Krutov</i> Software development for implementing a model of porous structures based on three periodic surfaces .....	71
<i>Andrey N. Volobuev, Sergei V. Krasnov, Kaira A. Adyshirin-Zade, Tatyana A. Antipova, Natalia N. Aleksandrova</i> Change of the form of the vertical elastic tank with a liquid .....	80
Information for authors .....	87

## Перепутывание двух сверхпроводящих кубитов, индуцированное тепловым шумом резонатора со средой Керра, при наличии начальной атомной когерентности

Е.К. Башкиров 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева  
443086, Российская Федерация, г. Самара,  
Московское шоссе, 34

*Аннотация* – Рассмотрена система, состоящая из двух идентичных искусственных атомов (кубитов), резонансно взаимодействующих с модой квантового поля идеального микроволнового резонатора при наличии керровской нелинейности. Для рассматриваемой модели получено точное решение квантового уравнения Лиувилля для полной матрицы плотности системы «два кубита + мода поля резонатора». Для решения квантового уравнения эволюции использовано представление «одетых» состояний, то есть собственных функций гамильтониана. Найден полный набор «одетых» состояний рассматриваемой модели. С его помощью первоначально найдено решение уравнения эволюции для когерентных начальных состояний кубитов и фоковских состояний поля, то есть состояний с определенным числом фотонов в резонаторной моде. Затем проведено обобщение указанного решения на случай теплового состояния поля резонатора. Усредняя полную матрицу плотности по переменным поля резонатора, мы нашли редуцированную матрицу плотности двух кубитов. Двухкубитная матрица плотности использована для вычисления параметра перепутывания кубитов в аналитическом виде. В качестве количественного критерия перепутывания кубитов выбрана согласованность. Ввиду особой громоздкости полученного выражения для согласованности проведено численное моделирование временной зависимости согласованности кубитов для различных параметров модели и начальных состояний кубитов. Наиболее интересным представляется результат, заключающийся в том, что учет начальной когерентности кубитов в модели с керровской нелинейностью приводит к существенному увеличению максимальной степени перепутывания кубитов, индуцированного тепловым полем, даже в случае больших интенсивностей поля резонатора.

*Ключевые слова* – сверхпроводящие кубиты; микроволновый копланарный резонатор; тепловой шум; керровская нелинейность; перепутывание; отрицательность; начальная когерентность кубитов.

### Введение

Исследование взаимодействия между квантовыми подсистемами имеет фундаментальное значение в области квантовой обработки информации, поскольку оно является источником перепутывания состояний таких подсистем. Система, состоящая из двух взаимодействующих кубитов, является одной из самых простых квантовых систем, демонстрирующих совместные неклассические особенности, такие как перепутывание. Воздействие на отдельные кубиты, а также связывание удаленных кубитов в единую квантовую систему обычно осуществляется с помощью электромагнитных полей резонаторов. Такой тип связи требует детального изучения особенностей взаимодействия кубитов и фотонов резонаторов. Такой тип взаимодействия активно изучается как теоретически, так и экспериментально в разделе квантовой оптики и квантовой информатики, называемой квантовой электродинамикой резонаторов (РКЭД) [1]. В последние годы предложено множество схем для генерации, управления контроля и защиты перепутывания кубитов раз-

личной физической природы в РКЭД-системах, таких как ионы в ловушках Пауля, нейтральные ридберговские атомы, сверхпроводящие джозефсоновские кольца, электронные и ядерные спины в твердых телах, квантовые точки, азотозамещенные вакансии в алмазе, квантовые оптомеханические системы, гибридные квантовые системы [2–9]. Теоретические исследования различных систем РКЭД основаны на модели Джейнса – Каммингса (МДК) и ее обобщениях [10]. Многоатомные обобщения МДК часто в квантовой оптике и квантовой информатике называют моделями Тависа – Каммингса (МТК). Хорошо известно, что обобщения МТК, которые описывают взаимодействие естественных или искусственных двухуровневых атомов (кубитов) или многоуровневых атомов (кутриды, кудиты и т. д.) с выделенными модами различных резонаторов, позволяют описать все известные квантовые эффекты взаимодействия атомов с веществом [11–14]. В последнее время особое внимание уделялось изучению моделей типа Тависа – Каммингса с нелинейностями, в частности с керровской нелинейностью (см. библиографический список в [15–20]). Как известно



материал, показатель преломления которого пропорционален квадрату напряженности светового поля, называется средой Керра. Световой пучок, проходящий через такой материал, приобретает фазовый сдвиг  $\phi = X\tau I$ , где  $X$  – постоянная Керра,  $\tau$  – время взаимодействия светового поля с материалом и  $I$  – интенсивность луча. Эффект Керра широко используется в нелинейной квантовой оптике для генерации квадратурных и амплитудных сжатых состояний электромагнитного поля, параметрического преобразования частот, создания сверхбыстрых импульсов и т. д. Однако в оптическом диапазоне керровские нелинейности  $\chi$  малы по сравнению со скоростью потери фотонов к из резонатора, что затрудняет использование данного эффекта для управления неклассическими состояниями света и атомов, в частности перепутыванием кубитов. Однако ситуация принципиально меняется для искусственных атомов в микроволновых резонаторах. В частности, для сверхпроводящих джозефсоновских кубитов прямой аналог оптического эффекта Керра естественным образом создается за счет нелинейной индуктивности джозефсоновских контактов. Недавно такой эффект был использован для создания джозефсоновского параметрического усилителя [21]. В работе [22] удалось экспериментально реализовать режим однофотонного взаимодействия кубита с полем резонатора в среде Керра, соединив сверхпроводящий кубит (транзмон) в сапфировой среде с двумя трехмерными высокодобротными сверхпроводящими микроволновыми резонаторами. При этом удалось достичь значения постоянной Керра  $X/2\pi = 325$  кГц, что по порядку величины совпадает со значением параметра кубит-фотонного взаимодействия в таких системах [5].

Хорошо известно, что взаимодействие квантовых систем с окружающей средой обычно оказывает разрушительное воздействие на такие свойства, как нелокальные квантовые корреляции подсистем или перепутывание. Однако в некоторых случаях взаимодействие с окружением может, напротив, приводить к перепутыванию подсистем. В частности к перепутыванию квантовых подсистем может приводить их взаимодействие с тепловым шумом. Возможность генерации перепутывания двух двухуровневых атомов с однофотонными переходами, взаимодействующих с тепловым полем резонатора, была впервые показана П. Найтом и соавторами [23]. Перепутывание в двухатомной системе с двухфотонным взаимодействием, инду-

цированное тепловым шумом, было рассмотрено в работах [24–27]. Интересно отметить, что двухфотонное взаимодействие может значительно увеличить степень перепутывания атомов. Обобщение результатов работы [23] на случай нерезонансной двухатомной модели Джейнса – Каммингса было проведено в работе [28]. При этом автор показал, что включение расстройки может привести к существенному увеличению степени перепутывания кубитов. Кроме того, для системы двух кубитов с одно- и двухфотонными переходами, резонансно взаимодействующими с одномодовым тепловым полем, было показано, что степень перепутывания кубитов, индуцированная тепловым полем резонатора, сильно зависит от выбора их начального состояния [29; 30]. В частности, при наличии начальной когерентности состояний кубитов она приводит к увеличению степени их перепутывания. Представляет интерес рассмотреть особенности перепутывания кубитов для двухкубитной модели с нелинейностью другого типа, а именно керровской нелинейностью.

Недавно нами было исследовано влияние керровской нелинейности на динамику перепутывания двух кубитов, индуцированного тепловым шумом резонатора, в случае сепарабельных некогерентных [31] и перепутанных начальных состояний кубитов [32]. Представляет интерес обобщить результаты работы [31] на случай когерентных начальных состояний кубитов. Поэтому в настоящей работе мы исследуем влияние начальной атомной когерентности на динамику перепутывания двух идентичных кубитов, взаимодействующих с модой интенсивного теплового микроволнового электромагнитного поля идеального резонатора со средой Керра.

## 1. Модель и точное решение временного уравнения Шредингера

Рассмотрим два одинаковых сверхпроводящих кубита  $A_1$  и  $A_2$ , резонансно взаимодействующих с полем одномодового резонатора. Предположим, что константы связи между кубитами и полем резонатора равны. Предположим также, что в резонаторе имеется дополнительная среда Керра. Тогда гамильтониан взаимодействия для рассматриваемой системы в приближении вращающейся волны можно записать в виде

$$H = \sum_{i=1}^2 \hbar g (\sigma_i^+ a + \sigma_i^- a^\dagger) + \hbar X a^\dagger a^2, \quad (1)$$

где  $\sigma_i^+ = |+\rangle_i\langle -|$  и  $\sigma_i^- = |-\rangle_i\langle +|$  – операторы переходов между возбужденным  $|+\rangle_i$  и основным состоянием  $|-\rangle_i$  в  $i$ -м кубите ( $i = 1, 2$ ),  $a$  и  $a^-$  – операторы рождения и уничтожения фотонов резонаторной моды,  $g$  – константа взаимодействия между кубитами и полем резонатора и  $X$  – константа нелинейности Керра.

Будем полагать, что в начальный момент времени кубиты приготовлены в сепарабельном, т. е. в не перепутанном состоянии. В самом общем виде такое начальное состояние кубитов можно представить в виде когерентной суперпозиции возбужденного и основного состояния:

$$\begin{aligned} |\Psi(0)\rangle_{A_1} &= \cos\theta_1 |+\rangle_1 + \sin\theta_1 |-\rangle_1, \\ |\Psi(0)\rangle_{A_2} &= \cos\theta_2 |+\rangle_2 + \sin\theta_2 |-\rangle_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\theta_1$  и  $\theta_2$  – параметры, определяющие степень начальной когерентности кубитов  $A_1$  и  $A_2$  соответственно. Такие начальные состояния для естественных или искусственных атомов (кубитов) можно получить в РКЭД с помощью микроволновых импульсов определенной длительности. Заметим, что, в отличие от оптики, мы под термином «когерентность», как это принято в РКЭД, понимаем наличие суперпозиции основного и возбужденного состояний кубита. Выбирая определенным образом параметры  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , мы можем получить четыре некогерентных сепарабельных начальных состояния кубитов:  $|+, +\rangle$ ,  $|+, -\rangle$ ,  $|-, +\rangle$ ,  $|-, -\rangle$ . Например, состоянию  $|+, -\rangle$  соответствуют параметры  $\theta_1 = 0$  и  $\theta_2 = \pi/2$ , а состоянию  $|+, +\rangle$  соответствуют параметры  $\theta_1 = 0$  и  $\theta_2 = 0$ .

Соответственно, полная начальная волновая функция системы кубитов есть

$$|\Psi(0)\rangle_A = |\Psi(0)\rangle_{A_1} \otimes |\Psi(0)\rangle_{A_2}. \quad (3)$$

В качестве начального состояния поля выберем одномодовое тепловое состояние с матрицей плотности вида

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle\langle n|.$$

Весовые функции имеют здесь вид

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{n+1}},$$

где  $\bar{n}$  – среднее число тепловых фотонов, определяемое формулой Бозе – Эйнштейна

$$\bar{n} = \left( \exp\left[\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right] - 1 \right)^{-1},$$

$k_B$  – постоянная Больцмана и  $T$  – температура микроволнового резонатора. В зависимости от физической природы кубитов температура резона-

тора может меняться от комнатных температур для азотозамещенных вакансий в алмазе до нК в случае нейтральных атомов и ионов в магнитных ловушках [5]. Поэтому в резонаторе всегда имеются тепловые фотоны.

Поставим перед собой задачу найти точную динамику подсистемы кубитов при наличии их взаимодействия с тепловым полем. Для решения поставленной задачи будем следовать схеме [33]. Начнем решение поставленной задачи в случае фоковских начальных состояний электромагнитного поля, а затем обобщим результаты на случай теплового поля. В случае фоковского начального состояния поля  $|\Psi(0)\rangle_F = |n\rangle$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) состояние полной системы мы можем в любой момент времени задать с помощью волновой функции  $|\Psi(t)\rangle_n$ , удовлетворяющей временному уравнению Шредингера вида

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_n = H |\Psi(t)\rangle_n \quad (4)$$

с начальным условием

$$|\Psi(0)\rangle_n = |\Psi(0)\rangle_A |n\rangle$$

и стандартными для квантовой механики граничными условиями.

Формальное решение уравнения (4) можно представить в виде

$$|\Psi(t)\rangle_n = e^{-iHt/\hbar} |\Psi(0)\rangle_n. \quad (5)$$

Эволюция волнового вектора  $|\Psi(t)\rangle$  происходит в 4-мерном гильбертовом пространстве. Для начального состояния кубитов (2) и фоковского состояния поля  $|n\rangle$  в качестве базиса гильбертова пространства, в котором эволюционирует волновая функция системы, следует выбрать векторы вида

$$|-, -, n+1\rangle, |+, -, n\rangle, |-, +, n\rangle, |+, +, n-1\rangle.$$

При этом в случае  $n = 0$  базис гильбертова пространства сужается до трех состояний вида

$$|-, -, 1\rangle, |+, -, 0\rangle, |-, +, 0\rangle.$$

Для нахождения явного вида вектора состояния (5) удобно использовать так называемые «одетые» состояния, т. е. собственные функции гамильтониана (1). В случае  $n > 0$  собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned} |\Psi_{in}\rangle &= w_{in} (C_{i1n} |-, -, n+1\rangle + C_{i2n} |+, -, n\rangle + \\ &+ C_{i3n} |-, +, n\rangle + C_{i4n} |+, +, n-1\rangle) \end{aligned} \quad (6)$$

( $i = 1, 2, 3, 4$ ),

где

$$w_{in} = 1 / \sqrt{|C_{i1n}|^2 + |C_{i2n}|^2 + |C_{i3n}|^2 + |C_{i4n}|^2},$$

$$\begin{aligned}
C_{11n} &= -\alpha_{1n} / \gamma_{1n}, & C_{12n} &= \lambda_{1n} + \beta_{1n} / \delta_{1n}, \\
C_{13n} &= -\beta_{1n} / \delta_{1n}, & C_{14n} &= 1, \\
C_{21n} &= -(\alpha_{2n} + nE_{2n}) / \gamma_{2n}, \\
C_{22n} &= \lambda_{2n} + \beta_{2n} / \delta_{2n}, \\
C_{23n} &= -\beta_{2n} / \delta_{2n}, & C_{24n} &= 1, \\
C_{31n} &= -(\alpha_{3n} + nE_{3n}) / \gamma_{3n}, \\
C_{32n} &= \lambda_{3n} + \beta_{3n} / \delta_{3n}, \\
C_{33n} &= -\beta_{3n} / \delta_{3n}, & C_{34n} &= 1, \\
C_{41n} &= 0, & C_{42n} &= -1, & C_{43n} &= 1, & C_{44n} &= 0
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\alpha_{in} &= -2\chi + n\chi + 2n^2\chi - n^3\chi + E_{in}, \\
\beta_{in} &= 2\chi - n\chi - n^2\chi + 2n^3\chi - E_{in} - 2nE_{in}, \\
\gamma_{in} &= \sqrt{n}\sqrt{n+1}(n\chi + n^2\chi - E_{in}), \\
\delta_{in} &= \sqrt{n}(-n^2\chi^2 + n^4\chi^2 - 2n^2\chi E_{in} + E_{in}^2), \\
\lambda_{in} &= -(2\chi - 3n\chi + n^2\chi - E_{in}) / \sqrt{n}.
\end{aligned}$$

и  $\chi = X / \gamma$ . Соответствующие собственные значения энергии есть

$$\begin{aligned}
E_{1n} / \hbar g &= \\
&= A_n + \operatorname{Re} \left[ \frac{2B_n}{3(D_n + F_n)^{1/3}} + \frac{1}{3}(D_n + F_n)^{1/3} \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{2n} / \hbar g &= A_n - \operatorname{Re} \left[ \frac{(1+i\sqrt{3})B_n}{3(D_n + F_n)^{1/3}} + \right. \\
&\left. + \frac{1}{6}(-1+i\sqrt{3})(D_n + F_n)^{1/3} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{2n} / \hbar g &= A_n - \operatorname{Re} \left[ \frac{(1-i\sqrt{3})B_n}{3(D_n + F_n)^{1/3}} - \right. \\
&\left. - \frac{1}{6}(1+i\sqrt{3})(D_n + F_n)^{1/3} \right],
\end{aligned}$$

$$E_{4n} / \hbar g = (-n + n^2)\chi,$$

где

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{3}(2 + 3(-1+n)n)\chi, \\
B_n &= (3 + 6n + 2(1+3(-1+n)n)\chi^2), \\
C_n &= 64(9(-1+n)\chi + (2+9(-1+n)n)\chi^3)^2, \\
D_n &= -36\chi + 36n\chi + 8\chi^3 - 36n\chi^3 + 36n^2\chi^3,
\end{aligned}$$

$$F_n = \frac{1}{2}\sqrt{-32A_n^3 + C_n}.$$

Для случая  $n=0$  собственные функции есть

$$\begin{aligned}
|\Psi(0)\rangle_1 &= (1/2)(-\sqrt{2} |-, -, 1\rangle + |+, -, 0\rangle + |-, +, 0\rangle), \\
|\Psi(0)\rangle_2 &= (1/2)(\sqrt{2} |-, -, 1\rangle + |+, -, 0\rangle + |-, +, 0\rangle), \\
|\Psi(0)\rangle_3 &= (1/\sqrt{2})(|+, -, 0\rangle - |-, +, 0\rangle).
\end{aligned} \tag{7}$$

Соответствующие значения энергии

$$E_1^{(0)} / \hbar g = -2, \quad E_2^{(0)} / \hbar g = 2, \quad E_3^{(0)} / \hbar g = 0.$$

Теперь для нахождения явного вида волновой функции (5) достаточно выразить начальный вектор состояния через собственные функции гамильтониана (1). Выполним это действие для начального состояния вида  $|\Psi(0)\rangle = |+, -, n\rangle$  в случае  $n > 0$ . Имеем

$$\begin{aligned}
|+, -, n\rangle &= C_{12n}^* |\Psi_{1n}\rangle + C_{22n}^* |\Psi_{2n}\rangle + \\
&+ C_{32n}^* |\Psi_{3n}\rangle + C_{42n}^* |\Psi_{4n}\rangle.
\end{aligned} \tag{8}$$

Подставляя (8) в правую часть формулы (5), получаем окончательно явный вид временной волновой функции в случае начального состояния  $|+, -, n\rangle$

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle_n &= Z_{12,n} |-, -, n+1\rangle + Z_{22,n} |+, -, n\rangle + \\
&+ Z_{32,n} |-, +, n\rangle + Z_{42,n} |+, +, n\rangle,
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
Z_{i2,n} &= e^{-iE_{1n}t/\hbar} w_{1n} C_{i2n}^* C_{1in} + \\
&+ e^{-iE_{2n}t/\hbar} w_{2n} C_{i2n}^* C_{2in} + e^{-iE_{3n}t/\hbar} w_{3n} C_{i2n}^* C_{3in} + \\
&+ e^{-iE_{4n}t/\hbar} w_{4n} C_{i2n}^* C_{4in} \\
&(i = 1, 2, 3, 4).
\end{aligned}$$

Для случая  $n=0$  временная волновая функция имеет, соответственно, вид

$$|\Psi(t)\rangle_0 = Z_{12}^{(0)} |-, -, 1\rangle + Z_{22}^{(0)} |+, -, 0\rangle + Z_{32}^{(0)} |-, +, 0\rangle, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
Z_{12}^{(0)} &= -i \sin(\sqrt{2}\gamma t) / \sqrt{2}, & Z_{22}^{(0)} &= \cos^2(\gamma t / \sqrt{2}), \\
Z_{32}^{(0)} &= -\sin^2(\gamma t / \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Аналогичным образом мы можем найти временную волновую функцию полной системы для начального состояния кубитов вида  $|+, +, n-1\rangle$ ,  $|-, +, n\rangle$  и  $|-, -, n+1\rangle$ . Для указанных состояний в случае  $n > 0$  временные волновые функции будут иметь вид (9) при замене  $Z_{i2n}^*$  на  $Z_{i4n}^*$ ,  $Z_{i3n}^*$  и  $Z_{i1n}^*$  соответственно. Для начального состояния  $|-, +, 0\rangle$  временная волновая функция системы принимает вид

$$|\Psi(t)\rangle_0 = Z_{13}^{(0)} |-, -, 1\rangle + Z_{23}^{(0)} |+, -, 0\rangle + Z_{33}^{(0)} |-, +, 0\rangle, \quad (11)$$

где

$$Z_{13}^{(0)} = X_{12}^{(0)}, \quad Z_{23}^{(0)} = Z_{22}^{(0)}, \quad Z_{33}^{(0)} = X_{32}^{(0)}.$$

Для начального состояния  $|-, -, 1\rangle$  временная волновая функция есть

$$Psi(t) = Z_{14}^{(0)} |-, -, 1\rangle + Z_{24}^{(0)} |+, -, 0\rangle + Z_{34}^{(0)} |-, +, 0\rangle, \quad (12)$$

$$Z_{14}^{(0)}(t) = e^{-(1/2)i(\alpha-2\delta)t} \left( (8 + (\alpha + 2\delta)^2) \cos(\Omega t / 2) + (\alpha + 2\delta)\Omega i \sin(\Omega t / 2) \right) / \Omega^2,$$

$$Z_{24}^{(0)}(t) = Z_{34}^{(0)}(t) = -2ie^{-\frac{1}{2}it(\alpha-2\delta)} \sin(\Omega t / 2) / \Omega.$$

Наконец, для начального состояния  $|-, -, 0\rangle$  имеем  $|\Psi(t)\rangle = |-, -, 0\rangle$ . (13)

Комбинируя выражения (6)-(13), мы легко можем получить временную волновую функцию полной системы для когерентных начальных состояний кубитов. Явное выражение для временной волновой функции здесь не приводится ввиду его громоздкости.

В случае теплового начального состояния поля и начального состояния кубитов (2) временная матрица плотности полной системы удовлетворяет квантовому уравнению Лиувилля

$$i \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [H, \rho(t)]$$

с начальным состоянием вида  $\rho(0) = |\Psi(0)\rangle_{AA} \langle\Psi(0)| \otimes \rho_F(0)$ .

Формальное решение уравнения Лиувилля может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \rho(t) &= e^{-iHt/\hbar} \rho(0) e^{+iHt/\hbar} = \\ &= e^{-iHt/\hbar} |\Psi(0)\rangle_{AA} \langle\Psi(0)| \otimes \rho_F(0) e^{+iHt/\hbar} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n e^{-iHt/\hbar} |\Psi(0)\rangle_{AA} \langle\Psi(0)| e^{+iHt/\hbar} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n |\Psi(t)\rangle_n \langle\Psi(t)|. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя в (14) найденные волновые функции  $|\Psi(t)\rangle_n$  для соответствующих некогерентных сепарабельных начальных состояний кубитов или комбинации таких функций для когерентного начального состояния кубитов, мы можем получить точное выражение полной матрицы плотности изучаемой модели. Окончательное выражение для полной матрицы плотности не приводится ввиду его громоздкости.

Полученное точное решение может быть использовано для получения временных зависи-

мостей любых наблюдаемых для подсистемы кубитов и резонаторного поля. В качестве иллюстрации возможного применения полученного точного решения для полной матрицы плотности рассматриваемой задачи используем указанное решение для нахождения временной зависимости параметра перепутывания кубитов. Для решения поставленной задачи нам необходимо получить из полной матрицы плотности  $\rho(t)$  редуцированную двухкубитную матрицу плотности. Для этого необходимо усреднить полную матрицу плотности по переменным поля

$$\rho_A(t) = Tr_F \rho(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \rho(t) | n \rangle.$$

Удобно записать  $\rho_A(t)$  в матричной форме, используя двухкубитный базис

$|-, -\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle, |+, +\rangle,$

$$\rho_A(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ * & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{13}^* & * & \rho_{33} & \rho_{34} \\ * & * & * & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Нами найдены явные выражения для элементов редуцированной матрицы плотности, однако здесь они не приводятся ввиду их громоздкого вида.

## 2. Динамика перепутывания кубитов

Для двухкубитной системы, описываемой матрицей атомной плотности  $\rho_A(t)$ , мера перепутывания или отрицательности может быть определена в терминах отрицательных собственных значений  $\mu_i^-$  частично транспонированной редуцированной атомной матрицы плотности ( $\rho_A^T$ ) для (15)

$$\varepsilon = -2 \sum \mu_i^-. \quad (16)$$

В случае когда  $\varepsilon = 0$ , два кубита являются сепарабельными (т. е. они не перепутаны), а условие  $\varepsilon > 0$  означает наличие атом-атомного перепутывания. Случай  $\varepsilon = 1$  указывает на максимальное перепутывание.

Результаты численного моделирования временной зависимости отрицательности (16) для теплового состояния поля резонатора представлены на рис. 1, 2. Безразмерный параметр керровской нелинейности для кривых, представленных на рисунках, выбран равным  $\tilde{\chi} = 1$ . В качестве начальных состояний кубитов выбраны состояния: некогерентное состояние  $|\Psi(0)\rangle_A = |+, -\rangle$  (штриховая линия) и когерентное состояние  $|\Psi(0)\rangle_{A1} =$

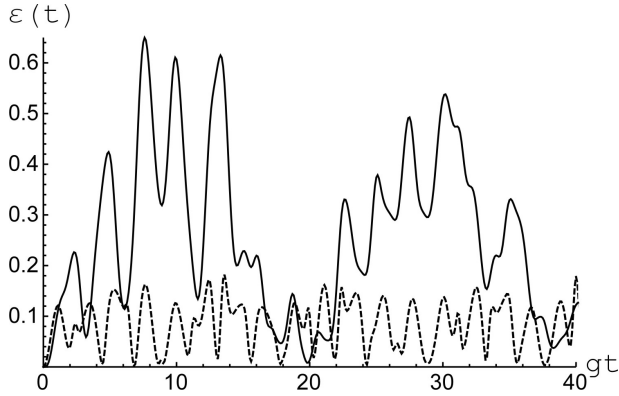


Рис. 1. Временная зависимость отрицательности от безразмерного времени  $gt$  в случае начального состояния кубитов  $|+, -\rangle$  (штриховая линия) и когерентного состояния (2) с  $\theta_1 = \pi/4$  и  $\theta_2 = -\pi/4$ . Безразмерный параметр керровской нелинейности  $\tilde{\chi} = 1$ . Среднее число тепловых фотонов  $\bar{n} = 0,5$

Fig. 1. Time dependence of negativity on dimensionless time  $gt$  in the case of the initial state of qubits  $|+, -\rangle$  (dashed line) and coherent state (2) with  $\theta_1 = \pi/4$  and  $\theta_2 = -\pi/4$ . Dimensionless parameter of the Kerr nonlinearity  $\tilde{\chi} = 1$ . Average number of thermal photons is  $\bar{n} = 0,5$

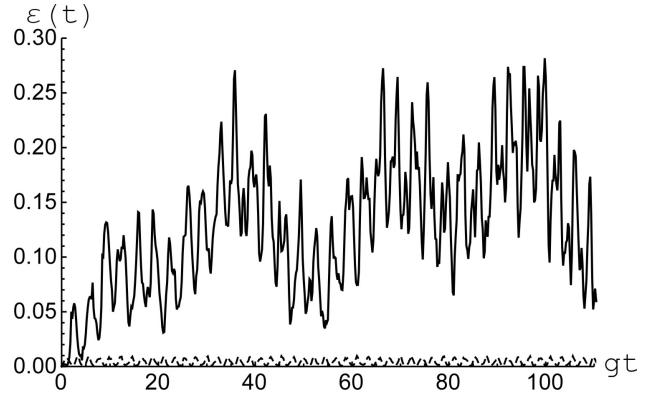


Рис. 2. Временная зависимость отрицательности от безразмерного времени  $gt$  в случае начального состояния кубитов  $|+, -\rangle$  (штриховая линия) и когерентного состояния (2) с  $\theta_1 = \pi/4$  и  $\theta_2 = -\pi/4$ . Безразмерный параметр керровской нелинейности  $\tilde{\chi} = 1$ . Среднее число тепловых фотонов  $\bar{n} = 20$

Fig. 2. Time dependence of negativity on dimensionless time  $gt$  in the case of the initial state of qubits  $|+, -\rangle$  (dashed line) and coherent state (2) with  $\theta_1 = \pi/4$  and  $\theta_2 = -\pi/4$ . Dimensionless parameter of the Kerr nonlinearity  $\tilde{\chi} = 1$ . Average number of thermal photons is  $\bar{n} = 20$

$= (1/\sqrt{2})(|+\rangle_2 + |-\rangle_2)$ ,  $|\Psi(0)\rangle_{A2} = (1/\sqrt{2})(|+\rangle_2 - |-\rangle_2)$  (сплошная линия). Вычисления проведены для случая теплового поля резонатора с  $\bar{n} = 0,5$  (рис. 1) и  $\bar{n} = 20$  (рис. 2). Из рисунков хорошо видно, что при наличии керровской нелинейности начальная атомная когерентность приводит к существенному увеличению степени перепутывания кубитов даже для интенсивных тепловых полей резонатора. Таким образом, приготовив кубиты в когерентном начальном состоянии, мы можем добиться существенного увеличения степени их перепутывания.

### Заключение

Таким образом, в настоящей работе мы нашли точное решение уравнения эволюции для двухку-

битной модели Тависа – Каммингса с керровской нелинейностью и тепловым полем резонатора для когерентного начального состояния кубитов. Полученное точное решение использовано для анализа временной динамики перепутывания кубитов, индуцированного тепловым полем резонатора. Показано, что для модели с керровской нелинейностью наведение начальной когерентности кубитов приводит к существенному увеличению максимальной степени перепутывания кубитов даже в случае интенсивного теплового поля резонатора. Полученные результаты могут быть полезны при выборе оптимальных режимов функционирования квантовых устройств, таких как квантовые компьютеры и квантовые сети.

### Список литературы

1. Dutra S.M. Cavity Quantum Electrodynamics: The Strange Theory of Light in a Box. Hoboken: John Wiley & Sons, 2005. 389 p. DOI: <https://doi.org/10.1002/0471713465>
2. Buluta I., Ashab S., Nori F. Neutral and artificial atoms for quantum computation // Rep. Prog. Phys. 2011. Vol. 74, no. 10. P. 104401. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>
3. Cavity quantum electrodynamics / H. Walther [et al.] // Rep. Prog. Phys. 2006. V. 69. P. 1325–1382. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/69/5/R02>
4. Quantum dynamics of single trapped ions / D. Leibfried [et al.] // Rev. Mod. Phys. 2003. Vol. 75. P. 281–324. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.75.281>
5. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems / Z.-L. Xiang [et al.] // Rev. Mod. Phys. 2013. Vol. 85. P. 623–653. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>
6. Georgescu I.M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation // Rev. Mod. Phys. 2014. Vol. 88. P. 153–186. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>
7. Microwave photonics with superconducting quantum circuits / X. Gu [et al.] // Phys. Repts. 2017. Vol. 718–719. P. 1–102. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>
8. Wendin G. Quantum information processing with superconducting circuits: a review // Rep. Prog. Phys. 2017. Vol. 80. P. 106001. DOI: <https://doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>

9. Li G.-Q., Pan X.-Y. Quantum information processing with nitrogen–vacancy centers in diamond // *Chinese Physics*. 2018. Vol. 27, no. 2. P. 020304. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/27/2/020304>
10. Jaynes E.T., Cummings F.W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theory with application to the beam maser // *Proc. IEEE*. 1963. Vol. 51, no. 1. P. 89–109. DOI: <https://doi.org/10.1109/PROC.1963.1664>
11. Shore B.W., Knight P.L. The Jaynes–Cummings model // *J. Mod. Opt.* 1993. Vol. 40. P. 1195–1238. DOI: <https://doi.org/10.1080/09500349314551321>
12. Larson J. Dynamics of the Jaynes–Cummings and Rabi models: Old wine in new bottles // *Physica Scripta*. 2007. Vol. 76. P. 146–160. DOI: <https://doi.org/10.1088/0031-8949/76/2/007>
13. Quantum correlations between light and the kilogram-mass mirrors of LIGO / H. Yu [et al.] // *Nature*. 2020. Vol. 583, no. 12. P. 43–47. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2420-8>
14. Dai H., Fu S., Luo S. Atomic nonclassicality in the Jaynes–Cummings model // *Phys. Lett. A*. 2020. Vol. 384, no. 12. P. 126371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2020.126371>
15. Puri S., Boutin S., Blais A. Engineering the quantum states of light in a Kerr-nonlinear resonator by two-photon driving // *Quantum Information*. 2017. Vol. 3, no. 1. P. 18. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41534-017-0019-1>
16. Effects of Kerr medium in coupled cavities on quantum state transfer / A.F. Al Naim [et al.] // *J. Nonlin. Opt. Phys. Mater.* 2018. Vol. 27, no. 3. P. 1850035. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218863518500352>
17. Effects of Kerr medium and Stark shift parameter on Wehrl entropy and the field purity for two-photon Jaynes–Cummings model under dispersive approximation / A.F. Al Naim [et al.] // *J. Rus. Las. Res.* 2019. Vol. 40, no. 1. P. 20–29. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10946-019-09764-w>
18. Anwar S.J., Ramzan M., Khan M.K. Effect of Stark- and Kerr-like medium on the entanglement dynamics of two three-level atomic systems // *Quant. Inform. Process.* 2019. Vol. 18, no. 6. P. 192. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11128-019-2277-7>
19. Аданмитонде А.Ж., Авосву Г.И.Ю., Доса Ф.А. О квантовании некоторых обобщенных моделей Джейнса – Каммингса в керроподобной среде // *Теор. матем. физ. Физ.-мат. науки*. 2020. Т. 203, № 3. С. 451–466. DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9835>
20. Aldaghfag S.A., Berrada K., Abdel-Khalek S. Entanglement and photon statistics of two dipole-dipole coupled superconducting qubits with Kerr-like nonlinearities // *Results in Phys.* 2020. Vol. 16. P. 102978. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.102978>
21. Phase-preserving amplification near the quantum limit with a Josephson ring modulator / N. Bergeal [et al.] // *Nature*. 2010. Vol. 465, no. 7294. P. 64–68. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature09035>
22. Observation of quantum state collapse and revival due to the single-photon Kerr effect / G. Kirchmair [et al.] // *Nature*. 2013. Vol. 495, no. 7440. P. 205–209. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature11902>
23. Entanglement induced by a single-mode heat environment / M.S. Kim [et al.] // *Phys. Rev. A*. 2002. Vol. 65, no. 4. P. 040101. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>
24. Zhou L., Song H.S. Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement // *J. Opt. B*. 2002. Vol. 4, no. 6. P. 425–429. DOI: <https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/6/310>
25. Bashkirov E.K. Entanglement induced by the two-mode thermal noise // *Laser Phys. Lett.* 2006. Vol. 3, no. 3. P. 145–150. DOI: <https://doi.org/10.1002/lapl.200510081>
26. Bashkirov E.K., Stupatskaya M.P. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms induced by nondegenerate two-mode thermal noise // *Laser Phys.* 2009. Vol. 19, no. 3. P. 525–530. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1054660X09030281>
27. Bashkirov E.K., Mastyugin M.S. The influence of the dipole-dipole interaction and atomic coherence on the entanglement of two atoms with degenerate two-photon transitions // *Opt. Spectr.* 2014. Vol. 116, no. 4. P. 630–634. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0030400X14040067>
28. Zhang B. Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field // *Opt. Commun.* 2010. Vol. 283, no. 23. P. 4676–4679. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2010.06.094>
29. Coherence-enhanced entanglement between two atoms at high temperature / Y.-H. Hu [et al.] // *Chin. Phys. B*. 2008. Vol. 17, no. 5. P. 1784–1790. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/17/5/039>
30. Башкиров Е.К., Мангулова Е.Г. Перепутывание атомов, индуцированное двухмодовым тепловым шумом, при наличии диполь-дипольного взаимодействия и атомной когерентности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2013. Т. 2, № 31. С. 177–184. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1160>
31. Evseev M.M., Bashkirov E.K. Thermal entanglement in Tavis–Cummings model with Kerr nonlinearity // *2020 International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT)*. 2020. P. 9253347. DOI: <https://doi.org/10.1109/ITNT49337.2020.9253347>
32. Bashkirov E.K. Entanglement in Tavis–Cummings model with Kerr nonlinearity induced by a thermal noise // *Proc. SPIE*. 2021. Vol. 11846. P. 210–219. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2588673>
33. Bashkirov E.K. Entanglement of two dipole-coupled qubits interacting with a detuned cavity thermal field // *Proc. SPIE*. 2019. Vol. 11066. P. 115–121. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2522476>

## References

1. Dutra S.M. *Cavity Quantum Electrodynamics: The Strange Theory of Light in a Box*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2005, 389 p. DOI: <https://doi.org/10.1002/0471713465>

2. Buluta I., Ashab S., Nori F. Neutral and artificial atoms for quantum computation. *Rep. Prog. Phys.*, 2011, vol. 74, no. 10, p. 104401. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>
3. Walther H. et al. Cavity quantum electrodynamics. *Rep. Prog. Phys.*, 2006, vol. 69, pp. 1325–1382. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/69/5/R02>
4. Leibfried D. et al. Quantum dynamics of single trapped ions. *Rev. Mod. Phys.*, 2003, vol. 75, pp. 281–324. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.75.281>
5. Xiang Z.-L. et al. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems. *Rev. Mod. Phys.*, 2013, vol. 85, pp. 623–653. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>
6. Georgescu I.M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation. *Rev. Mod. Phys.*, 2014, vol. 88, pp. 153–186. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>
7. Gu X. et al. Microwave photonics with superconducting quantum circuits. *Phys. Repts.*, 2017, vol. 718–719, pp. 1–102. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>
8. Wendin G. Quantum information processing with superconducting circuits: a review. *Rep. Prog. Phys.*, 2017, vol. 80, p. 106001. DOI: <https://doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>
9. Li G.-Q., Pan X.-Y. Quantum information processing with nitrogen-vacancy centers in diamond. *Chinese Physics*, 2018, vol. 27, no. 2, p. 020304. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/27/2/020304>
10. Jaynes E.T., Cummings F.W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theory with application to the beam maser. *Proc. IEEE*, 1963, vol. 51, no. 1, pp. 89–109. DOI: <https://doi.org/10.1109/PROC.1963.1664>
11. Shore B.W., Knight P.L. The Jaynes–Cummings model. *J. Mod. Opt.*, 1993, vol. 40, pp. 1195–1238. DOI: <https://doi.org/10.1080/09500349314551321>
12. Larson J. Dynamics of the Jaynes–Cummings and Rabi models: Old wine in new bottles. *Physica Scripta*, 2007, vol. 76, pp. 146–160. DOI: <https://doi.org/10.1088/0031-8949/76/2/007>
13. Yu H. et al. Quantum correlations between light and the kilogram-mass mirrors of LIGO. *Nature*, 2020, vol. 583, no. 12, pp. 43–47. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2420-8>
14. Dai H., Fu S., Luo S. Atomic nonclassicality in the Jaynes–Cummings model. *Phys. Lett. A*, 2020, vol. 384, no. 12, p. 126371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2020.126371>
15. Puri S., Boutin S., Blais A. Engineering the quantum states of light in a Kerr-nonlinear resonator by two-photon driving. *Quantum Information*, 2017, vol. 3, no. 1, p. 18. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41534-017-0019-1>
16. Al Naim A.F. et al. Effects of Kerr medium in coupled cavities on quantum state transfer. *J. Nonlin. Opt. Phys. Mater.*, 2018, vol. 27, no. 3, p. 1850035. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218863518500352>
17. Al Naim A.F. et al. Effects of Kerr medium and Stark shift parameter on Wehrl entropy and the field purity for two-photon Jaynes–Cummings model under dispersive approximation. *J. Rus. Las. Res.*, 2019, vol. 40, no. 1, pp. 20–29. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10946-019-09764-w>
18. Anwar S.J., Ramzan M., Khan M.K. Effect of Stark- and Kerr-like medium on the entanglement dynamics of two three-level atomic systems. *Quant. Inform. Process*, 2019, vol. 18, no. 6, p. 192. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11128-019-2277-7>
19. Adanmitonde A.J., Avosvu G.I.Yu., Dosa F.A. On the quantization of some generalized Jaynes–Cummings models in a Kerr-like environment. *Teor. matem. fiz. Fiz.-mat. nauki*, 2020, vol. 203, no. 3, pp. 451–466. DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9835> (In Russ.)
20. Aldaghfag S.A., Berrada K., Abdel-Khalek S. Entanglement and photon statistics of two dipole-dipole coupled superconducting qubits with Kerr-like nonlinearities. *Results in Phys.*, 2020, vol. 16, p. 102978. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.102978>
21. Bergeal N. et al. Phase-preserving amplification near the quantum limit with a Josephson ring modulator. *Nature*, 2010, vol. 465, no. 7294, pp. 64–68. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature09035>
22. Kirchmair G. et al. Observation of quantum state collapse and revival due to the single-photon Kerr effect. *Nature*. 2013. Vol. 495, no. 7440, pp. 205–209. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature11902>
23. Kim M.S. et al. Entanglement induced by a single-mode heat environment. *Phys. Rev. A*, 2002, vol. 65, no. 4, p. 040101. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>
24. Zhou L., Song H.S. Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement. *J. Opt. B*, 2002, vol. 4, no. 6, pp. 425–429. DOI: <https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/6/310>
25. Bashkirov E.K. Entanglement induced by the two-mode thermal noise. *Laser Phys. Lett.*, 2006, vol. 3, no. 3, pp. 145–150. DOI: <https://doi.org/10.1002/lapl.200510081>
26. Bashkirov E.K., Stupatskaya M.P. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms induced by nondegenerate two-mode thermal noise. *Laser Phys.*, 2009, vol. 19, no. 3, pp. 525–530. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1054660X09030281>
27. Bashkirov E.K., Mastuyugin M.S. The influence of the dipole-dipole interaction and atomic coherence on the entanglement of two atoms with degenerate two-photon transitions. *Opt. Spectr.*, 2014, vol. 116, no. 4, pp. 630–634. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0030400X14040067>
28. Zhang B. Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field. *Opt. Commun.*, 2010, vol. 283, no. 23, pp. 4676–4679. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2010.06.094>
29. Hu Y.-H. et al. Coherence-enhanced entanglement between two atoms at high temperature. *Chin. Phys. B*, 2008, vol. 17, no. 5, pp. 1784–1790. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/17/5/039>
30. Bashkirov E.K., Mangulova E.G. Atomic entanglement induced by two-mode thermal noise in the presence of dipole-dipole interaction and atomic coherence. *Vestn. Sam. gos. tehn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*, 2013, vol. 2, no. 31, pp. 177–184. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1160> (In Russ.)

31. Evseev M.M., Bashkirov E.K. Thermal entanglement in Tavis–Cummings model with Kerr nonlinearity. *2020 International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT)*, 2020, p. 9253347. DOI: <https://doi.org/10.1109/ITNT49337.2020.9253347>
32. Bashkirov E.K. Entanglement in Tavis–Cummings model with Kerr nonlinearity induced by a thermal noise. *Proc. SPIE*, 2021, vol. 11846, pp. 210–219. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2588673>
33. Bashkirov E.K. Entanglement of two dipole-coupled qubits interacting with a detuned cavity thermal field. *Proc. SPIE*, 2019, vol. 11066, pp. 115–121. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2522476>


---

## Physics of Wave Processes and Radio Systems 2022, vol. 25, no. 1, pp. 7–15

DOI 10.18469/1810-3189.2022.25.1.7-15

Received 11 June 2021  
Accepted 12 July 2021

### Entanglement of two superconducting qubits induced by a thermal noise of a cavity with Kerr medium taking into account the atomic coherence

Evgeny K. Bashkirov 

Samara National Research University  
34, Moskovskoye shosse,  
Samara, 443086, Russian Federation

*Abstract* – The system consisting of two identical artificial atoms (qubits), resonantly interacting with the mode of quantum field of an ideal microwave cavity in the presence of Kerr nonlinearity, is considered. For the considered model, an exact solution of the quantum Liouville equation for the full density matrix of the system «two qubits + resonator field mode» is obtained. To solve the quantum equation of evolution, the representation of «dressed» states, that is, the eigenfunctions of the Hamiltonian, was used. A complete set of «dressed» states of the considered model is found. With its help, the solution of the evolution equation was initially found for coherent initial states of qubits and Fock states of the field, that is, states with a certain number of photons in the resonator mode. Then, the above solution was generalized to the case of the thermal state of the resonator field. A reduced density matrix of two qubits is found by averaging over the field variables. The two-qubit density matrix is used to calculate the parameter of qubit entanglement in the analytical form. Concurrence was chosen as a quantitative criterion for qubit entanglement. A numerical simulation of the time dependence of the consistency of qubits for various parameters of the model and the initial states of qubits was carried out. The most interesting result seems to be that taking into account the initial coherence of qubits in the model with Kerr nonlinearity leads to a significant increase in the maximum degree of entanglement of qubits induced by the thermal field, even in the case of high intensities of the resonator field.

*Keywords* – superconducting qubits; microwave coplanar resonator; thermal noise; Kerr nonlinearity; entanglement; negativity; initial qubits coherence.

---

### Информация об авторе

**Башкиров Евгений Константинович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Самарского государственного университета, г. Самара, Россия. В 1978 г. окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета и в 1984 г. – аспирантуру при Московском государственном университете. Автор более 350 научных работ.

*Область научных интересов:* квантовая оптика и квантовая радиофизика, квантовая информатика, теория неравновесных явлений.

*E-mail:* bash@samsu.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0003-2569-1322>

### Information about the Author

**Evgeny K. Bashkirov**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, Samara, Russia. In 1978 he graduated from the Faculty of Physics of the Kuibyshev State University and in 1984 – postgraduate studies at the Moscow State University. Author of more than 350 scientific papers.

*Research interests:* quantum optics and quantum radiophysics, quantum informatics, theory of nonequilibrium phenomena.

*E-mail:* bash@samsu.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0003-2569-1322>



## Математическая модель задержки на основе СМО с гиперэкспоненциальным и эрланговским распределениями

В.Н. Тарасов

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики  
443010, Россия, г. Самара,  
ул. Л. Толстого, 23

*Аннотация* – Настоящая статья посвящена исследованию и получению решения в замкнутой форме для средней задержки требований в очереди для системы массового обслуживания, образованной двумя потоками с гиперэкспоненциальным и эрланговским законами распределения интервалов. Сочетание этих законов распределений обеспечивает коэффициент вариации интервалов входного потока больше единицы, а для времени обслуживания – меньше единицы. Учет коэффициентов вариации как числовых характеристик в теории массового обслуживания важен, т. к. главная характеристика системы массового обслуживания – средняя задержка связана с этими коэффициентами вариации квадратичной зависимостью. В теории массового обслуживания исследования систем G/G/1 актуальны в связи с тем, что они могут быть использованы при моделировании систем передачи данных различного назначения. Для решения поставленной задачи использован метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли. Данный метод позволил получить спектральное разложение, а через него решение для средней задержки требований в очереди для рассматриваемой системы в замкнутой форме. Для практического применения полученных результатов использован метод моментов теории вероятностей.

*Ключевые слова* – гиперэкспоненциальное и эрланговское распределения; интегральное уравнение Линдли; метод спектрального разложения; преобразование Лапласа.

### Введение

Настоящая статья посвящена анализу системы массового обслуживания (СМО)  $H_2/E_2/1$  с гиперэкспоненциальным ( $H_2$ ) и эрланговским ( $E_2$ ) входными распределениями второго порядка и является продолжением исследований [1–4]. В теории массового обслуживания исследования систем G/G/1 актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телетрафика при моделировании систем передачи данных различного назначения, к тому же нельзя получить решения для таких систем в конечном виде для общего случая. Проблему можно было бы решить с помощью законов распределений Вейбулла или Гамма наиболее общего вида, которые обеспечивают диапазон изменения коэффициентов вариаций от 0 до  $\infty$  в зависимости от величины их параметров. Но, как оказалось, преобразование Лапласа функции плотности распределения Вейбулла не может быть выражено в элементарных функциях. Преобразование Лапласа функции плотности гамма-распределения включает параметр  $\alpha$  этого закона в показатели степени

$$F^*(s) = \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha-1} e^{-t/\beta} dt =$$

$$= \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{\beta}{\beta s + 1} \right)^{\alpha-1} \Gamma(\alpha) = \frac{1}{(\beta s + 1)^{\alpha-1}},$$

и этот закон распределения в теории массового обслуживания можно использовать только в частных случаях при целочисленных значениях  $\alpha \geq 2$ . В конечном итоге это приводит нас к известному распределению Эрланга.

В качестве основного метода решения задачи использован метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли [5; 6], а вспомогательного – приемы аппроксимации законов распределений методом моментов теории вероятностей [7–9]. Вычислительные эксперименты по полученным в работе аналитическим результатам подтверждаются данными имитации [10–12]. Схожие результаты современных исследований по системам массового обслуживания приведены в работах [13–16].

### 1. Постановка и решение задачи

В работе ставится задача вывода решения по средней задержке требований в очереди в системе  $H_2/E_2/1$  с гиперэкспоненциальным и эрланговским входными распределениями второго порядка как основной характеристики любой СМО.

Для системы  $H_2/E_2/1$  законы распределения интервалов входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности вида

$$a(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad (1)$$

$$b(t) = 4\mu^2 t e^{-2\mu t}. \quad (2)$$

Запишем преобразования Лапласа функций (1) и (2):

$$A^*(s) = p \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + (1-p) \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2},$$

$$B^*(s) = \left( \frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2.$$

Тогда выражение  $A^*(-s)B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ , где  $A^*(s)$ ,  $B^*(s)$  – преобразования Лапласа функций плотности (1), (2), а  $\varphi_+(s)$ ,  $\varphi_-(s)$  – некоторые дробно-рациональные функции  $s$ , для спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли для системы  $H_2/E_2/1$  примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} &= \\ &= \left[ p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s} \right] \left( \frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2 - 1 = \\ &= \frac{-s(s + s_1)(s + s_2)(s - s_3)}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(2\mu + s)^2}, \end{aligned}$$

т. к. многочлен 4-й степени в числителе этого выражения можно представить в виде разложения  $-s(s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0)$  с коэффициентами  $c_2 = 4\mu - \lambda_1 - \lambda_2$ ,  $c_1 = 4\mu(\mu - \lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2$ ,  $c_0 = 4\mu[\lambda_1 \lambda_2 + \mu(\lambda_1 p - \lambda_1 - \lambda_2 p)]$ . В свою очередь кубический многочлен  $s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0$  с такими коэффициентами в стационарном режиме функционирования СМО при загрузке  $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda < 1$  имеет два действительных отрицательных корня  $-s_1$ ,  $-s_2$  и один положительный корень  $s_3$ .

Окончательно

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{-s(s + s_1)(s + s_2)(s - s_3)}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(2\mu + s)^2}. \quad (3)$$

Поэтому с учетом специальных условий [5] за функцию  $\psi_+(s)$  примем

$$\psi_+(s) = s(s + s_1)(s + s_2) / (s + 2\mu)^2,$$

т. к. нули кубического многочлена  $s = 0$ ,  $s = -s_1$ ,  $s = -s_2$  и полюс  $s = -2\mu$  лежат в области  $\text{Re}(s) \leq 0$ , а за функцию

$$\psi_-(s) = -(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s) / (s - s_3).$$

На рисунке отображены нули и полюса отношения  $\psi_+(s)/\psi_-(s)$  на комплексной  $s$ -плоскости для

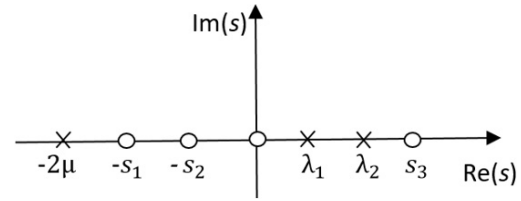


Рис. Нули и полюсы функции  $\psi_+(s)/\psi_-(s)$  для системы  $H_2/E_2/1$

Fig. Zeros and poles of  $\psi_+(s)/\psi_-(s)$  function for  $H_2/E_2/1$  system

исключения ошибок построения спектрального разложения. На рисунке полюсы отмечены крестиками, а нули – кружками.

Далее по методике спектрального разложения найдем константу  $K$ :

$$K = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{(s + s_1)(s + s_2)}{(s + 2\mu)^2} = \frac{s_1 s_2}{4\mu^2}.$$

Построим функцию  $\Phi_+(s) = K / \psi_+(s)$ , через которую найдем преобразование Лапласа функции плотности задержки:

$$W^*(s) = s\Phi_+(s) = \frac{s_1 s_2 (s + 2\mu)^2}{4\mu^2 (s + s_1)(s + s_2)}.$$

Окончательно

$$W^*(s) = \frac{s_1 s_2 (s + 2\mu)^2}{4\mu^2 (s + s_1)(s + s_2)}. \quad (4)$$

Производная от функции  $W^*(s)$  со знаком минус в точке  $s = 0$  и даст среднюю задержку требований в очереди:

$$\begin{aligned} -\frac{dW^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} &= -\frac{d}{ds} \left[ \frac{s_1 s_2 (s + 2\mu)^2}{4\mu^2 (s + s_1)(s + s_2)} \right] \Big|_{s=0} = \\ &= \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu}. \end{aligned}$$

Тогда средняя задержка в очереди для системы  $H_2/E_2/1$  будет равна:

$$\bar{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu}, \quad (5)$$

где  $s_1$ ,  $s_2$  – абсолютные значения отрицательных корней  $-s_1$  и  $-s_2$  кубического многочлена  $s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0$  с приведенными выше коэффициентами. Таким образом, средняя задержка для системы  $H_2/E_2/1$  однозначно определена в виде замкнутой формы (5).

Такой подход к использованию метода спектрального разложения позволяет определить не только среднюю задержку в очереди из (4), но и моменты высших порядков времени ожидания. Вторая производная от функции (4) при  $s = 0$

Таблица. Результаты экспериментов для СМО  $H_2/E_2/1$  в сравнении с  $H_2/M/1$   
Table. Results of experiments for QS  $H_2/E_2/1$  in comparison with  $H_2/M/1$

Входные параметры		Среднее время ожидания	
$\rho$	$c_\lambda$	для системы $H_2/E_2/1$	для системы $H_2/M/1$
0,1	1	0,083	0,111
	2	0,141	0,187
	4	0,171	0,230
	8	0,182	0,245
0,5	1	0,751	1,000
	2	1,764	2,162
	4	4,082	4,831
	8	8,911	10,402
0,9	1	6,752	9,000
	2	20,016	22,409
	4	73,321	75,786
	8	286,642	289,134

дает второй начальный момент времени ожидания. С учетом определения вариации задержки – джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания от его среднего значения [17] тем самым получим возможность определения джиттера через дисперсию времени ожидания.

Для практического применения расчетной формулы (5) необходимо определить числовые характеристики распределений (1)  $H_2$  и (2)  $E_2$ . Для этого воспользуемся свойством преобразования Лапласа воспроизведения моментов и запишем начальные моменты до третьего порядка для распределения (1):

$$\bar{\tau}_\lambda = \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2}, \quad \overline{\tau_\lambda^2} = \frac{2p}{\lambda_1^2} + \frac{2(1-p)}{\lambda_2^2},$$

$$\overline{\tau_\lambda^3} = \frac{6p}{\lambda_1^3} + \frac{6(1-p)}{\lambda_2^3}.$$
(6)

При аппроксимации с использованием первых двух моментов неизвестные параметры распределения (1)  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $p$  определяются с помощью следующих выражений [10]:

$$\lambda_1 = 2p / \bar{\tau}_\lambda, \quad \lambda_2 = 2(1-p) / \bar{\tau}_\lambda,$$

$$p = \frac{1}{2} [1 \pm \sqrt{(c_\lambda^2 - 1) / (c_\lambda^2 + 1)}].$$
(7)

Отсюда следует, что коэффициент вариации  $c_\lambda \geq 1$ . При аппроксимации с использованием первых трех моментов для нахождения параметров

распределения (3) необходимо в пакете Mathcad решить систему трех уравнений (6), полученных методом моментов. При этом необходимым и достаточным условием существования решения является выполнение условия:  $\overline{\tau_\lambda^3} \tau_\lambda \geq 1,5 \overline{\tau_\lambda^2}$  [9].

Для распределения (2) имеем:

$$\bar{\tau}_\mu = \frac{1}{\mu}, \quad \overline{\tau_\mu^2} = \frac{3}{2\mu^2}, \quad c_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, гиперэкспоненциальный закон распределения второго порядка может определяться полностью двумя первыми моментами и перекрывать весь диапазон изменения коэффициента вариации  $(1, \infty)$ . Величины  $\bar{\tau}_\lambda$ ,  $\bar{\tau}_\mu$ ,  $c_\lambda$ ,  $c_\mu$  будем считать входными параметрами для расчета среднего времени ожидания для системы  $H_2/E_2/1$  с использованием выражения (5). Тогда алгоритм расчета сведется к последовательному определению параметров распределения (1) из выражений (7) и к нахождению нужных корней многочлена  $s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0$  с приведенными выше коэффициентами, а затем к использованию расчетного выражения (5).

## 2. Результаты вычислительных экспериментов

В таблице приведены данные расчетов для системы  $H_2/E_2/1$  для различных случаев нагрузки (малой, средней и высокой)  $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$ . Для сравнения в правой колонке приведены данные для близкой системы  $H_2/M/1$ , образованной гиперэкспоненциальным ( $H_2$ ) и экспоненциальным ( $M$ ) законами распределения. Заметим, что коэффициент вариации для распределения  $M$  равен единице, т. е. больше, чем у распределения  $E_2$ . Тогда у последней системы средняя задержка будет больше. Коэффициент загрузки в данном случае определяется отношением средних интервалов  $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$ . Расчеты в таблице приведены для удобства для нормированного времени обслуживания  $\bar{\tau}_\mu = 1$ .

## Заключение

Таким образом, по результатам работы можно сделать следующие выводы.

**Научная новизна** полученных результатов заключается в том, что получено спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемой системы и с его помощью выведена расчетная формула для средней

задержки требований в очереди для этой системы в замкнутой форме. Данные численных экспериментов подтверждают полную адекватность полученных теоретических результатов, Предложенный подход к анализу систем также позволяет находить джиттер через преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания, т. к. он в [17] определен как разброс задержки требований в очереди вокруг среднего значения.

**Практическое значение** работы заключается в том, что полученные результаты с успехом могут быть применены в современной теории телетрафика, где задержки пакетов входящего трафика играют первостепенную роль. Для этого достаточно знать средние значения интервалов между пакетами входящего трафика и времени обслуживания, что не вызывает трудностей при использовании современных анализаторов трафика.

## Список литературы

1. Тарасов В.Н. Расширение класса систем массового обслуживания с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2018. № 12. С. 57–70. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117918120056>
2. Тарасов В.Н. Анализ и сравнение двух систем массового обслуживания с гиперэрланговскими входными распределениями // Радиоелектроніка, інформатика, управління. 2018. № 4. С. 61–70. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-4-6>
3. Тарасов В.Н. Исследование и сравнение двойственных систем  $E_2/M/1$  и  $M/E_2/1$  // Инфокоммуникационные технологии. 2019. Т. 17, № 2. С. 157–162. DOI: <https://doi.org/10.18469/ikt.2019.17.2.03>
4. Тарасов В.Н., Липилина Л.В., Бахарева Н.Ф. Автоматизация расчета характеристик систем массового обслуживания для широкого диапазона изменения их параметров // Информационные технологии. 2016. Т. 22, № 12. С. 952–957. URL: [http://novtex.ru/IT/it2016/it1216\\_web-952-957.pdf](http://novtex.ru/IT/it2016/it1216_web-952-957.pdf)
5. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / пер. с англ. под ред. В.И. Неймана. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
6. Brännström N. A Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems: master's thesis applied to HS-DSCH. Lulea University of Technology, 2004. 79 p. URL: <http://tu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1016709/FULLTEXT01>
7. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009. 363 с.
8. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change, ITC-13: proc. of congress. Copenhagen, Denmark. 19–26 June 1991. P. 683–688. URL: <https://gitlab2.informatik.uni-wuerzburg.de/itc-conference/itc-conference-public/-/raw/master/itc13/myskja911.pdf?inline=true>
9. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process, I: Two basic methods // Operation Research. 1982. Vol. 30, no. 1. P. 125–147. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.30.1.125>
10. Малахов С.В., Тарасов В.Н. Экспериментальные исследования производительности сегмента программно-конфигурируемой сети // Интеллект. Инновации. Инвестиции. 2013. № 2. С. 81–85.
11. Проектирование и моделирование сетей ЭВМ в системе OPNET MODELER / В.Н. Тарасов [и др.]. Самара: ПГАТИ, 2008. 233 с.
12. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Компьютерное моделирование вычислительных систем. Теория, Алгоритмы, Программы. Оренбург: ОГУ, 2005. 183 с.
13. Jennings O.B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues // Queueing Systems. 2016. Vol. 84, no. 1–2. P. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
14. Gromoll H.C., Terwilliger B., Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times // Queueing Systems. 2018. Vol. 89, no. 3–4. P. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
15. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates // Queueing Systems. 2018. Vol. 89, no. 3–4. P. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>
16. Jacobovic R., Kella O. Asymptotic independence of regenerative processes with a special dependence structure // Queueing Systems. 2019. Vol. 93, no. 1–2. P. 139–152. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09606-1>
17. Demichelis C., Chimento P. IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics. URL: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>

## References

1. Tarasov V.N. Extension of the class of queueing systems with delay. *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, no. 12, pp. 2147–2158. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117918120056>
2. Tarasov V.N. Analysis and comparison of two queueing systems with hyper-Erlang input distributions. *Radioelektronika, informatika, upravlinnja*, 2018, no. 4, pp. 61–70. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-4-6> (In Russ.)
3. Tarasov V.N. Study and comparison of dual systems  $E_2/M/1$  and  $M/E_2/1$ . *Infokommunikacionnye tehnologii*, 2019, vol. 17, no. 2, pp. 157–162. DOI: <https://doi.org/10.18469/ikt.2019.17.2.03> (In Russ.)
4. Tarasov V.N., Lipilina L.V., Bahareva N.F. Automation of calculating the characteristics of queueing systems for a wide range of changes in their parameters. *Informacionnye tehnologii*, 2016, vol. 22, no. 12, pp. 952–957. URL: [http://novtex.ru/IT/it2016/it1216\\_web-952-957.pdf](http://novtex.ru/IT/it2016/it1216_web-952-957.pdf) (In Russ.)
5. Klejnrok L. *Queueing Theory* / trans. from English ed. by V.I. Neumann. Moscow: Mashinostroenie, 1979, 432 p. (In Russ.)
6. Brännström N. A Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems: master's thesis applied to HS-DSCH. Lulea University of Technology, 2004, 79 p. URL: <http://tu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1016709/FULLTEXT01>

7. Aliev T.I. *Discrete Modeling Basics*. Saint Petersburg: SPbGU ITMO, 2009, 363 p. (In Russ.)
8. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. *Teletraffic and Datatrafic in a Period of Change, ITC-13: proc. of congress, Copenhagen, Denmark, 19-26 June 1991*, pp. 683-688. URL: <https://gitlab2.informatik.uni-wuerzburg.de/itc-conference/itc-conference-public/-/raw/master/itc13/myskja911.pdf?inline=true>
9. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process, I: Two basic methods. *Operation Research*, 1982, vol. 30, no. 1, pp. 125-147. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.30.1.125>
10. Malahov S.V., Tarasov V.N. Experimental studies of the performance of the SDN segment. *Intellekt. Innovatsii. Investitsii*, 2013, no. 2, pp. 81-85. (In Russ.)
11. Tarasov V.N. et al. *Design and Modeling of Computer Networks in the Opnet Modeler System*. Samara: PGATI, 2008, 233 p. (In Russ.)
12. Tarasov V.N., Bahareva N.F. *Computer Modeling of Computing Systems. Theory, Algorithms, Programs*. Orenburg: OGU, 2005, 183 p. (In Russ.)
13. Jennings O.B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues. *Queueing Systems*, 2016, vol. 84, no. 1-2, pp. 145-202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
14. Gromoll H.C., Terwilliger B., Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3-4, pp. 213-241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
15. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3-4, pp. 269-301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>
16. Jacobovic R., Kella O. Asymptotic independence of regenerative processes with a special dependence structure. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, no. 1-2, pp. 139-152. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09606-1>
17. Demichelis C., Chimento P. IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics. URL: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>

---

## Physics of Wave Processes and Radio Systems

### 2022, vol. 25, no. 1, pp. 16-20

DOI 10.18469/1810-3189.2022.25.1.16-20

Received 16 September 2021

Accepted 18 October 2021

## Mathematical delay model based on QS with hyperexponential and Erlang distributions

*Veniamin N. Tarasov*

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics  
23, L. Tolstoy Street,  
Samara, 443010, Russia

*Abstract* – This article is devoted to the study and obtaining a closed-form solution for the average delay of claims in the queue for a queuing system formed by two flows with hyperexponential and Erlang distributions of intervals. The combination of these distribution laws provides the coefficient of variation of the input flow intervals large units, and for the service time - less than unity. Considering the coefficients of variation as numerical characteristics in the queuing theory is important, because the main characteristic of the queuing system is that the average delay is related to these coefficients of variation by a quadratic dependence. In queuing theory, studies of G/G/1 systems are relevant due to the fact that they can be used in modeling data transmission systems for various purposes. To solve the problem posed, the method of spectral decomposition of the solution of the integral Lindley equation was used. This method made it possible to obtain a spectral decomposition, and through it a solution for the average delay of requests in the queue for the system under consideration in a closed form. For the practical application of the results obtained, the method of moments of the theory of probability was used.

*Keywords* – hyperexponential and Erlang distributions; Lindley integral equation; spectral decomposition method; Laplace transform.

---

### Информация об авторе

**Тарасов Вениамин Николаевич**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* информационные технологии, проектирование и моделирование компьютерных сетей, методы и модели исследования вычислительных систем и сетей, теория массового обслуживания.

*E-mail:* tarasov-vn@psuti.ru

### Information about the Author

**Veniamin N. Tarasov**, Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Department of Software and Management in Technical Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

*Research interests:* information technology, design and modeling of computer networks, methods and models for the study of computing systems and networks, queuing theory.

*E-mail:* tarasov-vn@psuti.ru

## Модель задержки на основе сдвинутых гиперэкспоненциального и эрланговского распределений

В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики  
443010, Россия, г. Самара,  
ул. Л. Толстого, 23

*Аннотация* – Настоящая статья посвящена выводу результатов для средней задержки требований в очереди для системы массового обслуживания, образованной двумя потоками с законами распределения интервалов в виде сдвинутых вправо гиперэкспоненциального и эрланговского распределений второго порядка. В теории массового обслуживания исследования систем  $G/G/1$  актуальны в связи с тем, что не существует решения в конечном виде для общего случая. Поэтому в качестве произвольного закона распределения  $G$  при исследовании таких систем используют различные частные законы распределений. В данном случае использование гиперэкспоненциального закона распределения обеспечивает коэффициент вариации интервалов входного потока больше единицы, а распределения Эрланга – меньше единицы. Для решения поставленной задачи использован метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли, который играет важную роль в теории массового обслуживания. Данный метод позволил получить решение для средней задержки требований в очереди для рассматриваемой системы в замкнутой форме. Как известно, остальные характеристики системы массового обслуживания являются производными от средней задержки требований.

*Ключевые слова* – сдвинутые гиперэкспоненциальное и эрланговское распределения; интегральное уравнение Линдли; метод спектрального разложения; преобразование Лапласа.

### Введение

В теории массового обслуживания исследования систем  $G/G/1$  актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телекоммуникации, к тому же нельзя получить решения для таких систем в конечном виде для общего случая.

Настоящая статья посвящена анализу СМО  $H_2/E_2/1$  со сдвинутыми вправо от нулевой точки гиперэкспоненциальными ( $H_2$ ) и эрланговскими ( $E_2$ ) входными распределениями второго порядка и является логическим продолжением исследований [1–3]. В результате этого будем иметь новую СМО с запаздыванием во времени, которую обозначим через  $H_2^-/E_2^-/1$  в отличие от обычной системы  $H_2/E_2/1$ . Рассматриваемая СМО относится к типу  $G/G/1$ . Всего систем со сдвинутыми законами распределений в теории массового обслуживания можно составить шестнадцать ( $4 \times 4 = 16$ ), если рассматривать четыре основных закона распределения: экспоненциальный, Эрланга, гиперэкспоненциальный и гиперэрланговский.

В работе [1] показано, что средняя задержка требований в очереди в системе  $M/M/1$  с запаздыванием во времени меньше, чем в классической системе  $M/M/1$  при одинаковом коэффициенте загрузки за счет того, что коэффициенты вариации времен поступления  $c_\lambda$  и обслуживания  $c_\mu$  становятся меньше единицы при параметре запаздывания

$t_0 > 0$ . Это связано с квадратичной зависимостью средней задержки от указанных коэффициентов вариаций. В авторских работах [2; 3] и других этот факт также полностью подтвердился. Убедимся также в этом в случае рассматриваемой СМО, используя метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли, одна из форм которого дается в виде [4]:

$$W(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^y W(y-u) dC(u), & y \geq 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Другой подход к решению интегрального уравнения Линдли использован в [5]. Здесь вместо термина «спектральное разложение» использована факторизация, а вместо функций  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  – компоненты факторизации  $\omega_+(z,t)$  и  $\omega_-(z,t)$  функции  $1 - z\chi(t)$ .

Такой подход для получения конечных результатов для рассматриваемых систем менее удобен, чем подход, описанный в [4] и проиллюстрированный многочисленными примерами для лучшего понимания. Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли занимает важное место при исследовании систем  $G/G/1$ , и он широко используется.

Кроме этого метода в работе использован опыт аппроксимации законов распределений [6–9].

Полученные результаты хорошо согласуются с результатами экспериментальных исследований [10–12]. Результаты современных исследований по системам массового обслуживания приведены в работах [13–16].

## 1. Постановка задачи

В работе ставится задача нахождения решения для задержки требований в очереди в СМО  $N_2^-/E_2^-/1$ . При кратком изложении метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли будем придерживаться подхода и символики автора классики теории массового обслуживания [4]. Суть решения методом спектрального разложения состоит в нахождении для выражения  $F_\lambda^*(-s)F_\mu^*(s)-1$  представления в виде произведения двух множителей, которое давало бы рациональную функцию от  $s$ . Здесь  $F_\lambda^*(s)$  и  $F_\mu^*(s)$  – преобразования Лапласа функций плотности распределения интервалов входного потока  $f_\lambda(t)$  и времени обслуживания  $f_\mu(t)$  соответственно. Следовательно, для нахождения закона распределения времени ожидания необходимо следующее спектральное разложение:  $F_\lambda^*(-s)F_\mu^*(s)-1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ , где  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  – некоторые рациональные функции от  $s$ , которые можно разложить на множители. Функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  должны удовлетворять следующим условиям согласно [4]:

– для  $\text{Re}(s) > 0$  функция  $\psi_+(s)$  является аналитической без нулей в этой полуплоскости;

– для  $\text{Re}(s) < D$  функция  $\psi_-(s)$  является аналитической без нулей в этой полуплоскости, где  $D$  – некоторая положительная константа, определяемая из условия:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{e^{-Dt}} < \infty.$$

Кроме того, функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  должны удовлетворять следующим условиям:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) > 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1; \quad (2)$$

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) < D} \frac{\psi_-(s)}{s} = -1.$$

Для решения поставленной задачи необходимо вначале построить для рассматриваемой системы спектральное разложение вида  $F_\lambda^*(-s)F_\mu^*(s)-1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$  с учетом условий (1), (2). Так, для системы  $N_2^-/E_2^-/1$  законы распределения интер-

валов входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности вида

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} p\lambda_1 e^{-\lambda_1(t-t_0)} + \\ + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2(t-t_0)}, & t > t_0, \\ 0, & 0 \leq t \leq t_0, \end{cases} \quad (3)$$

$$f_\mu(t) = \begin{cases} 4\mu^2(t-t_0)e^{-2\mu(t-t_0)}, & t > t_0, \\ 0, & 0 \leq t \leq t_0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $t_0 \geq 0$  – параметр сдвига закона распределения. Заметим также, что функция (4) – функция плотности нормированного распределения Эрланга второго порядка.

Преобразования Лапласа функций (3) и (4) будут, соответственно:

$$F_\lambda^*(s) = \left[ p \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + (1-p) \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2} \right] e^{-t_0 s};$$

$$F_\mu^*(s) = \left( \frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2 e^{-t_0 s}.$$

Тогда спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемой системы  $F_\lambda^*(-s)F_\mu^*(s)-1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$  примет вид:

$$F_\lambda^*(-s)F_\mu^*(s)-1 =$$

$$= \left[ p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s} \right] e^{t_0 s} \times$$

$$\times \left( \frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2 e^{-t_0 s} - 1 =$$

$$= \left[ p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s} \right] \left( \frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2 - 1. \quad (5)$$

Выражение (5) получено на основании теоремы о запаздывании в теории преобразования Лапласа. Здесь показатели степени у экспонент в спектральном разложении обнуляются, и операция сдвига во времени нивелируется. Таким образом, спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для системы со сдвинутыми распределениями  $N_2^-/E_2^-/1$  и для обычной системы  $N_2/E_2/1$  будут идентичными. Это позволяет утверждать, что спектральное разложение будет инвариантным к операции сдвига в законах распределения.

Дальнейшее разложение выражения (5) даст окончательное спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{-s(s+s_1)(s+s_2)(s-s_3)}{(\lambda_1-s)(\lambda_2-s)(2\mu+s)^2}, \quad (6)$$

т. к. многочлен 4-й степени в числителе выражения (5) можно представить в виде разложения  $-s(s^3+c_2s^2+c_1s+c_0)$  с коэффициентами  $c_2=4\mu-\lambda_1-\lambda_2$ ,  $c_1=4\mu(\mu-\lambda_1-\lambda_2)+\lambda_1\lambda_2$ ,  $c_0=4\mu[\lambda_1\lambda_2+\mu(\lambda_1p-\lambda_1-\lambda_2p)]$ . В свою очередь кубический многочлен  $s^3+c_2s^2+c_1s+c_0$  с такими коэффициентами в стационарном режиме функционирования СМО при  $\rho=\bar{\tau}_\mu/\bar{\tau}_\lambda < 1$  имеет два действительных отрицательных корня  $-s_1$ ,  $-s_2$  и один положительный корень  $s_3$ . Здесь  $\bar{\tau}_\lambda$  и  $\bar{\tau}_\mu$  – среднее значение интервалов поступления требований и среднее время обслуживания соответственно, а коэффициенты многочлена сформированы с помощью символьных операций Mathcad.

С учетом условий (1), (2) за функцию  $\psi_+(s)$  примем

$$\psi_+(s) = s(s+s_1)(s+s_2)/(s+2\mu)^2,$$

т. к. нули кубического многочлена  $s=0$ ,  $s=-s_1$ ,  $s=-s_2$  и полюс  $s=-2\mu$  лежат в области  $\text{Re}(s) \leq 0$ , а за функцию

$$\psi_-(s) = -(\lambda_1-s)(\lambda_2-s)/(s-s_3).$$

Теперь выполнение условий (1) и (2) для построенных функций  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  очевидно. Далее по методике спектрального разложения найдем константу  $K$ :

$$K = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{(s+s_1)(s+s_2)}{(s+2\mu)^2} = \frac{s_1s_2}{4\mu^2}.$$

Построим функцию  $\Phi_+(s) = K/\psi_+(s)$ , через которую найдем преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания  $W^*(s) = s\Phi_+(s)$ .

Окончательно

$$W^*(s) = \frac{s_1s_2(s+2\mu)^2}{4\mu^2(s+s_1)(s+s_2)}. \quad (7)$$

Производная от функции  $W^*(s)$  со знаком минус в точке  $s=0$  и даст среднюю задержку требований в очереди:

$$\begin{aligned} -\frac{dW^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} &= -\frac{d}{ds} \left[ \frac{s_1s_2(s+2\mu)^2}{4\mu^2(s+s_1)(s+s_2)} \right] \Big|_{s=0} = \\ &= \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu}. \end{aligned}$$

Тогда средняя задержка для системы  $N_2^-/E_2^-/1$  будет равна:

$$\bar{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu}, \quad (8)$$

где  $s_1$ ,  $s_2$  абсолютные значения отрицательных корней  $-s_1$  и  $-s_2$  кубического многочлена  $s^3+c_2s^2+c_1s+c_0$  с приведенными выше коэффициентами. Таким образом, среднее время для системы  $N_2^-/E_2^-/1$  однозначно определено в виде замкнутой формы (8).

## 2. Методика использования расчетной формулы (8)

Теперь предстоит найти все параметры формулы (8). Для этого определяем числовые характеристики сдвинутых распределений  $N_2^-$  (3) и  $E_2^-$  (4). Воспользуемся свойством преобразования Лапласа функции плотности воспроизводить моменты:

$$\begin{aligned} -\frac{dF_\lambda^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} &= \\ &= -\frac{d}{ds} \left\{ \left[ p \frac{\lambda_1}{s+\lambda_1} + (1-p) \frac{\lambda_2}{s+\lambda_2} \right] e^{-t_0s} \right\} \Big|_{s=0} = \\ &= p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0. \end{aligned}$$

Отсюда среднее значение интервала между поступлениями требований:

$$\bar{\tau}_\lambda = p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0. \quad (9)$$

Найдя вторую производную от преобразования  $F_\lambda^*(s)$  при  $s=0$ , определим 2-й начальный момент интервала между поступлениями:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_\lambda^2 &= 2[p\lambda_1^{-2} + (1-p)\lambda_2^{-2}] + t_0^2 + \\ &+ 2t_0[p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1}]. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда квадрат коэффициента вариации:

$$c_\lambda^2 = \frac{[(1-p^2)\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2p(1-p) + p(2-p)\lambda_2^2]}{[t_0\lambda_1\lambda_2 + (1-p)\lambda_1 + p\lambda_2]^2}. \quad (11)$$

Положив

$$\lambda_1 = 2p/(\bar{\tau}_\lambda - t_0), \quad \lambda_2 = 2(1-p)/(\bar{\tau}_\lambda - t_0) \quad (12)$$

и подставив (12) в (11), получим уравнение четвертой степени относительно параметра  $p$ . Решив его с учетом условия  $0 < p < 1$ , определяем параметр  $p$ :

$$p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2}{2[(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2 + c_\lambda^2 \bar{\tau}_\lambda^2]}}. \quad (13)$$

Подставив выражение (13) в (12), находим неизвестные параметры распределения (3)  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ . При этом в качестве  $p$  можно выбрать любое из двух значений.

Остается определить числовые характеристики распределения (4). Среднее время обслуживания в системе  $N_2^-/E_2^-/1$  равно



Таблица. Результаты экспериментов для СМО  $H_2^-/E_2^-/1$   
Table. Experimental results for QS  $H_2^-/E_2^-/1$

Входные параметры			Средняя задержка	
$\rho$	$c_\mu$	$t_0$	для системы $H_2^-/E_2^-/1$	для системы $H_2/E_2/1$
0,1	0,071	0,9	0,001	0,141
	0,354	0,5	0,035	
	0,636	0,1	0,114	
	0,700	<b>0,01</b>	<b>0,138</b>	
0,5	0,071	0,9	0,015	1,764
	0,354	0,5	0,472	
	0,636	0,1	1,480	
	0,700	<b>0,01</b>	<b>1,735</b>	
0,9	0,071	0,9	0,748	20,016
	0,354	0,5	14,769	
	0,636	0,1	19,157	
	0,700	<b>0,01</b>	<b>19,931</b>	

$$\bar{\tau}_\mu = \mu^{-1} + t_0. \quad (14)$$

Отсюда параметр  $\mu$  распределения (4) будет равен  $\mu = 1/(\bar{\tau}_\mu - t_0)$ .

А диапазон изменения параметра сдвига определится из условия  $0 < t_0 < \bar{\tau}_\mu$ .

Второй начальный момент времени обслуживания равен

$$\bar{\tau}_\mu^2 = t_0^2 + \frac{2t_0}{\mu} + \frac{3}{2\mu^2}.$$

Следовательно, коэффициент вариации времени обслуживания будет равен  $c_\mu = [\sqrt{2}(1 + \mu t_0)]^{-1}$ .

Таким образом, все параметры распределений (3) и (4) при задании значений  $\bar{\tau}_\lambda$ ,  $\bar{\tau}_\mu$ ,  $c_\lambda$ ,  $c_\mu$ ,  $t_0$  в качестве входных данных для системы  $H_2^-/E_2^-/1$  будут определены однозначно методом моментов.

Заметим, что коэффициенты вариации  $c_\lambda > 0$  и  $c_\mu < 1/\sqrt{2}$  при параметре сдвига  $t_0 > 0$ . Таким образом, очевидно, что система  $H_2^-/E_2^-/1$  также относится к типу G/G/1.

### 3. Результаты вычислительных экспериментов

В таблице приведены данные расчетов для системы  $H_2^-/E_2^-/1$  для случаев малой, средней и высокой нагрузки  $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$  при  $c_\lambda = 2$ . Заметим, что обычная система  $H_2/E_2/1$  применима при  $c_\lambda \geq 1$  и  $c_\mu = 1/\sqrt{2}$ , а система  $H_2^-/E_2^-/1$  – при  $c_\lambda > 0$  и  $c_\mu < 1/\sqrt{2}$ . Таким образом, система  $H_2^-/E_2^-/1$  применима для широкого диапазона

изменения параметров, чем обычная система  $H_2/E_2/1$  и расширяет ее возможности.

В правой колонке таблицы для сравнения приведены результаты для обычной системы  $H_2/E_2/1$ . Коэффициент загрузки в данном случае определяется отношением средних интервалов  $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$ . Расчеты в таблице приведены для удобства для нормированного времени обслуживания  $\bar{\tau}_\mu = 1$ .

Система  $H_2^-/E_2^-/1$  применима и в случае  $c_\lambda < 1$ , в частности при  $\rho = 0,9$ ,  $c_\lambda = 0,2$ ,  $t_0 = 0,9$ ,  $c_\mu = 0,071$ , среднее время ожидания будет равно  $\bar{W} = 0,072$  единиц времени, снизившись в несколько десятков раз по сравнению с обычной системой.

### Заключение

Таким образом, по результатам работы можно сделать следующие выводы.

Операция сдвига во времени уменьшает коэффициенты вариаций интервала между поступлениями и времени обслуживания требований. Так как среднее время ожидания в системе G/G/1 связано с коэффициентами вариаций интервалов поступления и обслуживания квадратичной зависимостью, среднее время ожидания в системе с запаздыванием будет меньше, чем в обычной системе при одинаковом коэффициенте загрузки. Например, для системы  $H_2^-/E_2^-/1$  при загрузке  $\rho = 0,9$  и параметре сдвига  $t_0 = 0,9$  коэффициент вариации интервалов поступления  $c_\lambda$  уменьшается с 2 для обычной системы до 1,105, коэффициент вариации времени обслуживания  $c_\mu$  уменьшается с  $1/\sqrt{2}$  до 0,071, а время ожидания уменьшается с 20,016 единицы времени для обычной системы до 0,748 единицы времени для системы с запаздыванием.

С уменьшением значения параметра  $t_0$  среднее время ожидания в системе  $H_2^-/E_2^-/1$  стремится к среднему времени ожидания в обычной системе  $H_2/E_2/1$ . Это полностью подтверждает адекватность построенной математической модели массового обслуживания.

Основным преимуществом системы со сдвинутыми распределениями является расширение диапазона применимости по сравнению с обычной СМО. Так, в данном случае диапазон для коэффициента вариации времени обслуживания  $0 < c_\mu \leq 1/\sqrt{2}$  при параметре сдвига  $t_0 \geq 0$ .

## Список литературы

1. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Блатов И.А. Анализ и расчет системы массового обслуживания с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2015. № 11. С. 51–59. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117915110041>
2. Тарасов В.Н. Расширение класса систем массового обслуживания с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2018. № 12. С. 57–70. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117918120056>
3. Тарасов В.Н. Анализ и сравнение двух систем массового обслуживания с гиперэрланговскими входными распределениями // Радиоэлектроника, информатика, управління. 2018. № 4. С. 61–70. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-4-6>
4. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / пер. с англ. под ред. В.И. Неймана. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
5. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М.: РУДН, 1995. 529 с.
6. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009. 363 с.
7. Алиев Т.И. Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 2 (84). С. 88–93. URL: [https://ntv.ifmo.ru/ru/article/4127/approksimaciya\\_veroyatnostnyh\\_raspredeleniy\\_v\\_modelyah\\_massovogo\\_obslyzhvaniya.htm](https://ntv.ifmo.ru/ru/article/4127/approksimaciya_veroyatnostnyh_raspredeleniy_v_modelyah_massovogo_obslyzhvaniya.htm)
8. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change, ITC-13: proc. of congress. Copenhagen, Denmark. 19–26 June 1991. P. 683–688. URL: <https://gitlab2.informatik.uni-wuerzburg.de/itc-conference/itc-conference-public/-/raw/master/itc13/myskja911.pdf?inline=true>
9. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process, I: Two basic methods // Operation Research. 1982. Vol. 30, no. 1. P. 125–147. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.30.1.125>
10. Малахов С.В., Тарасов В.Н. Экспериментальные исследования производительности сегмента программно-конфигурируемой сети // Интеллект. Инновации. Инвестиции. 2013. № 2. С. 81–85.
11. Тарасов В.Н., Липилина Л.В., Бахарева Н.Ф. Автоматизация расчета характеристик систем массового обслуживания для широкого диапазона изменения их параметров // Информационные технологии. 2016. Т. 22, № 12. С. 952–957. URL: [http://novtex.ru/IT/it2016/it1216\\_web-952-957.pdf](http://novtex.ru/IT/it2016/it1216_web-952-957.pdf)
12. Проектирование и моделирование сетей ЭВМ в системе OPNET MODELER / В.Н. Тарасов [и др.]. Самара: ПГАТИ, 2008. 233 с.
13. Jennings O.B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues // Queueing Systems. 2016. Vol. 84, no. 1–2. P. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
14. Gromoll H.C., Terwilliger B., Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times // Queueing Systems. 2018. Vol. 89, no. 3–4. P. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
15. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates // Queueing Systems. 2018. Vol. 89, no. 3–4. P. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>
16. Jacobovic R., Kella O. Asymptotic independence of regenerative processes with a special dependence structure // Queueing Systems. 2019. Vol. 93, no. 1–2. P. 139–152. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09606-1>

## References

1. Tarasov V.N., Bahareva N.F., Blatov I.A. Analysis and calculation of queuing system with delay. *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76, no. 11, pp. 1945–1951. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117915110041>
2. Tarasov V.N. Extension of the class of queueing systems with delay. *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, no. 12, pp. 2147–2158. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117918120056>
3. Tarasov V.N. Analysis and comparison of two queueing systems with hyper-Erlang input distributions. *Radioelektronika, informatika, upravlinnja*, 2018, no. 4, pp. 61–70. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-4-6> (In Russ.)
4. Klejnrok L. *Queueing Theory* / trans. from English ed. by V.I. Neumann. Moscow: Mashinostroenie, 1979, 432 p. (In Russ.)
5. Bocharov P.P., Pechinkin A.V. *Queueing Theory*. Moscow: RUDN, 1995, 529 p. (In Russ.)
6. Aliev T.I. *Discrete Modeling Basics*. Saint Petersburg: SPbGU ITMO, 2009, 363 p. (In Russ.)
7. Aliev T.I. Approximation of probability distributions in queuing models. *Nauchno-tehnicheskij vestnik informatsionnyh tehnologij, mehaniki i optiki*, 2013, no. 2 (84), pp. 88–93. URL: [https://ntv.ifmo.ru/ru/article/4127/approksimaciya\\_veroyatnostnyh\\_raspredeleniy\\_v\\_modelyah\\_massovogo\\_obslyzhvaniya.htm](https://ntv.ifmo.ru/ru/article/4127/approksimaciya_veroyatnostnyh_raspredeleniy_v_modelyah_massovogo_obslyzhvaniya.htm) (In Russ.)
8. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. *Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change, ITC-13: proc. of congress*, Copenhagen, Denmark, 19–26 June 1991, pp. 683–688. URL: <https://gitlab2.informatik.uni-wuerzburg.de/itc-conference/itc-conference-public/-/raw/master/itc13/myskja911.pdf?inline=true>
9. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process, I: Two basic methods. *Operation Research*, 1982, vol. 30, no. 1, pp. 125–147. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.30.1.125>
10. Malahov S.V., Tarasov V.N. Experimental studies of the performance of the SDN segment. *Intellekt. Innovatsii. Investitsii*, 2013, no. 2, pp. 81–85. (In Russ.)
11. Tarasov V.N., Lipilina L.V., Bahareva N.F. Automation of calculating the characteristics of queueing systems for a wide range of changes in their parameters. *Informatsionnye tehnologii*, 2016, vol. 22, no. 12, pp. 952–957. URL: [http://novtex.ru/IT/it2016/it1216\\_web-952-957.pdf](http://novtex.ru/IT/it2016/it1216_web-952-957.pdf) (In Russ.)
12. Tarasov V.N. et al. *Design and Modeling of Computer Networks in the Opnet Modeler System*. Samara: PGATI, 2008, 233 p. (In Russ.)

13. Jennings O.B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues. *Queueing Systems*, 2016, vol. 84, no. 1–2, pp. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
14. Gromoll H.C., Terwilliger B., Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3–4, pp. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
15. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3–4, pp. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>
16. Jacobovic R., Kella O. Asymptotic independence of regenerative processes with a special dependence structure. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, no. 1–2, pp. 139–152. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09606-1>

---

## Physics of Wave Processes and Radio Systems

### 2022, vol. 25, no. 1, pp. 21–26

DOI 10.18469/1810-3189.2022.25.1.21-26

Received 16 September 2021

Accepted 18 October 2021

## Delay model based on shifted hyperexponential and Erlang distributions

*Veniamin N. Tarasov, Nadezhda F. Bakhareva*

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics  
23, L. Tolstoy Street,  
Samara, 443010, Russia

*Abstract* – This article is devoted to the derivation of results for the average delay of requests in the queue for a queuing system formed by two flows with the laws of interval distributions in the form of second-order hyperexponential and Erlang distributions shifted to the right. In queuing theory, studies of G/G/1 systems are relevant due to the fact that there is no solution in the final form for the general case. Therefore, in the study of such systems, various particular distribution laws are used as an arbitrary distribution law for G. In this case, the use of the hyperexponential distribution law ensures the coefficient of variation of the input flow intervals is large units, and the Erlang distribution is less than one. To solve the problem posed, the method of spectral decomposition of the solution of the integral Lindley equation was used, which plays an important role in the queuing theory. This method made it possible to obtain a solution for the average delay of requests in the queue for the system under consideration in a closed form. As is known, the remaining characteristics of the queuing system are derived from the average delay of requests.

*Keywords* – shifted hyperexponential and Erlang distributions; Lindley integral equation; spectral decomposition method; Laplace transform.

---

### Сведения об авторах

**Тарасов Вениамин Николаевич**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* информационные технологии, проектирование и моделирование компьютерных сетей, методы и модели исследования вычислительных систем и сетей, теория массового обслуживания.

*E-mail:* tarasov-vn@psuti.ru

**Бахарева Надежда Федоровна**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и вычислительной техники Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* анализ производительности компьютерных сетей.

*E-mail:* bakhareva-nf@psuti.ru

### Information about the Authors

**Veniamin N. Tarasov**, Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Department of Software and Management in Technical Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

*Research interests:* information technology, design and modeling of computer networks, methods and models for the study of computing systems and networks, queuing theory.

*E-mail:* tarasov-vn@psuti.ru

**Nadezhda F. Bakhareva**, Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Department of Informatics and Computer Engineering, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

*Research interests:* analysis of the performance of computer networks.

*E-mail:* bakhareva-nf@psuti.ru

## Принципы построения и основные характеристики перспективной курсо-глицсадной системы

А.А. Головков, В.А. Головков

ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»  
394064, Россия, г. Воронеж,  
ул. Старых Большевиков, 54а

**Аннотация – Введение:** на основе анализа известной литературы показано, что современные курсо-глицсадные системы имеют недостатки, связанные с наличием в них генераторов несущего сигнала, отсутствием частотной и пространственной селекции сигнала и помехи. **Цель работы:** разработать принципы построения перспективной помехоустойчивой курсо-глицсадной системы на основе совместного использования обратно направленных отражателей, апертурных антенн и электродинамических управляемых слоистых неоднородных структур. Управляемые слои представляют собой периодические решетки проводящих элементов с включенными в их разрывы нелинейными элементами. Неуправляемые слои – это диэлектрические слои без потерь и периодические решетки проводящих элементов. **Материалы и методы:** алгоритмы параметрического синтеза управляемых и неуправляемых слоев электродинамических неоднородных структур, экспериментальные методы анализа моностатических и бистатических диаграмм обратного рассеяния, экспериментальные методы определения частотных характеристик электродинамических неоднородных структур в различных состояниях управляемых слоев. **Результаты:** показана возможность проектирования перспективной курсо-глицсадной системы с заданными характеристиками, обеспечивающими новый способ радиосвязи без использования собственного генератора несущего сигнала. **Заключение:** предлагаемая курсо-глицсадная система может быть использована для решения многих задач, которые с помощью известной курсо-глицсадной системы решить нельзя. К таким задачам относятся имитация движущихся и стационарных объектов вооружения и военной техники; скрытная передача информации в условиях отсутствия собственного источника несущего сигнала; радиоэлектронное подавление систем радиосвязи и управления, радиолокационных систем управления оружием вероятного противника.

**Ключевые слова** – курсо-глицсадная система; управляемые и неуправляемые слои электродинамической неоднородной структуры.

### Введение

Анализ возможностей известных курсо-глицсадных систем (КГС) [1–6] показывает, что по сути функционирования эти системы являются системами извлечения информации, обеспечивающими безопасность посадки самолетов и идентификацию аэропортов. У экипажа имеется возможность приема сообщений от диспетчера. Поэтому традиционные КГС имеют недостатки, связанные с наличием в КГС генератора несущего сигнала. Это увеличивает энергопотребление, стоимость и массогабаритные характеристики. Отсутствуют частотная и пространственная селекция сигнала и помехи. Отражения сигналов КГС, возникающие из-за наличия различных объектов в ее области действия, например гор, холмов, домов, ангаров, самолетов и автомобилей, создают определенные искажения сигналов (помехи) для систем летательных аппаратов (ЛА), определяющих местоположение относительно глицсады. Кроме того, известная КГС может служить только для прямых заходов, поскольку линия равной интенсивности маяков всего одна.

В данной статье делается попытка разработки предложений по устранению указанных недостат-

ков. Для этого целесообразно проанализировать существующие и перспективные способы радиосвязи и системы их реализации.

### 1. Новый способ радиосвязи для перспективных курсо-глицсадных систем

В традиционных системах радиосвязи дальность связи ограничивается пределом прямой видимости при крупных препятствиях и условиями дифракции электромагнитных волн при препятствиях, размеры которых малы по сравнению с длиной волны или соизмеримы с ней. Для устранения такого ограничения используется способ радиосвязи, отличающийся тем, что при больших расстояниях между абонентами, превышающих пределы прямой видимости, для переотражения модулированного сигнала одного абонента в сторону другого абонента, в интересах огибания препятствия используют искусственные или естественные неоднородности. Реализация этого способа осуществляется путем применения ионосферы в качестве естественной неоднородности. В качестве искусственной неоднородности могут

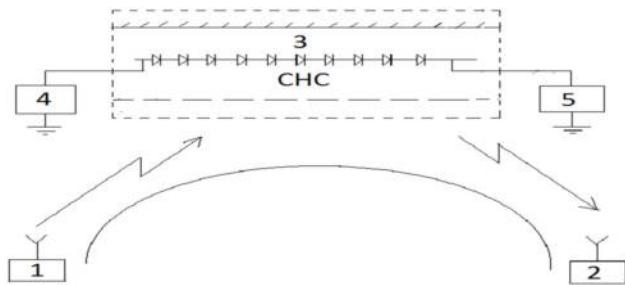


Рис. 1. Система реализации способа радиосвязи на основе пассивной или активной СНС отражательного типа  
 Fig. 1. A system for implementing radio communications based on a passive or active SNS of a reflective type

быть задействованы экраны в виде сеток, выполненных из металлических проводников. Этот способ и система его реализации имеют недостатки, состоящие в том, что третий абонент, находящийся вблизи неоднородности, без традиционного приемопередатчика не может принимать участия в процессе обмена информацией. Для устранения этих недостатков может быть избран способ радиосвязи (рис. 1), отличающийся от предыдущего тем, что в качестве искусственной неоднородности используется пассивная или активная управляемая слоистая неоднородная структура (СНС) отражательного типа.

Выбор параметров управляемых слоев (УС) и неуправляемых слоев (НС) (толщин диэлектрических слоев и проводимостей решеток проводящих элементов) таких СНС осуществляется по критерию одновременного обеспечения демодуляции падающего сигнала и модуляции отраженного сигнала [7–16]. Этот способ радиосвязи является радиотехническим аналогом известного способа получения информации человеком об окружающем мире в отраженном и преобразованном естественном (солнечном, лунном) или искусственном свете (в оптическом диапазоне) [10].

## 2. Варианты построения управляемых слоистых неоднородных структур для предлагаемых курсо-глиссадных систем

На основе этого способа радиосвязи может быть построена КГС, практически свободная от известных недостатков. Предлагаемая КГС может содержать сверхвысокочастотную (СВЧ) антенну (например, линзу Лüneберга для формирования широкой диаграммы обратного рассеяния – ДОР), на полусфере которой расположена управляемая СНС, и плоскую управляемую СНС для формирования узкой ДОР. СНС состоит из управляемого слоя (УС-решетки с нелинейными элементами)

и неуправляемых слоев (НС – диэлектрических слоев, неуправляемых решеток и проводящего экрана). Микрофон, наушники и источник низкочастотного (НЧ) управляющего сигнала подключены к УС. КГС размещается в радиопрозрачном обтекателе.

Благодаря этому СНС обеспечивает функции антенны, модулятора, демодулятора, согласующего устройства и фильтра. Первый и второй абоненты с традиционными приемопередающими станциями (1, 2) расположены в одном и том же полупространстве относительно плоскости неоднородности. Третий абонент находится в месте расположения СНС (3) и имеет возможность с ее помощью принимать, демодулировать сигналы первого и второго абонентов и регистрировать с помощью устройства (4). Одновременно переотраженный сигнал первого абонента может быть с помощью СНС промодулирован информационным сигналом третьего абонента с некоторой поднесущей частотой, который формируется с помощью устройства (5), и передан второму абоненту. Переотраженный сигнал второго абонента может быть с помощью СНС промодулирован информационным сигналом третьего абонента и передан первому абоненту.

Для построения и функционирования предлагаемой КГС функции первого и второго абонентов совмещаются на ЛА. Это бортовая РЛС и летчик. Третий абонент – это диспетчер аэродрома с КГС. Управляемые СНС могут быть использованы совместно с различными другими апертурными антеннами (антенной Кассэгрена, антенной Грегори, уголковыми отражателями, волноводно-рупорными решетками и т. д.). На рис. 2 показаны возможные варианты совместного использования апертурных антенн и СНС.

Благодаря этому переотражение обеспечивается в заданном диапазоне углов (в заданном секторе пространства, определяемом шириной моностатической диаграммы обратного рассеяния – ДОР) только в сторону ЛА, заходящего на посадку. При этом сохраняется равносигнальная зона (линия равной интенсивности). Поэтому имеется возможность захода на посадку в широком секторе углов. Отсутствуют отражения сигналов КГС, возникающих из-за присутствия разных объектов в ее области действия, например домов, ангаров. Находящиеся вблизи радиомаяков самолеты и автомобили практически не вызывают искажения сигналов. Это связано с малой шириной бистатической ДОР. Таким образом, третий абонент, не имеющий источника несущего сигнала,

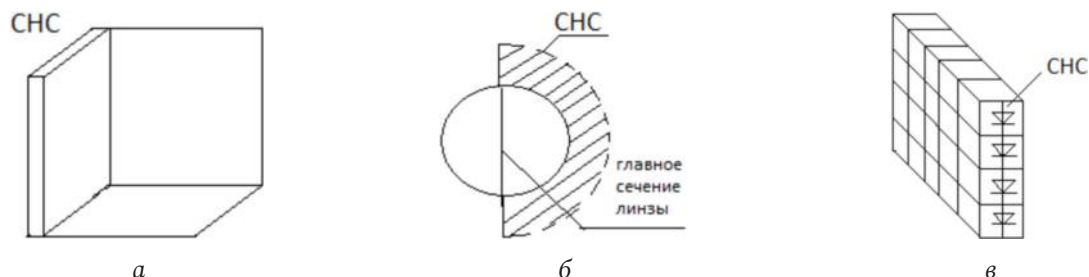


Рис. 2. Варианты совместного использования СНС с уголковым отражателем (а), линзой Луненберга (б) и волноводной решеткой (в)  
 Fig. 2. Options for joint use of SNS with a corner reflector (a), a Luneberg lens (b) and a waveguide grating (c)

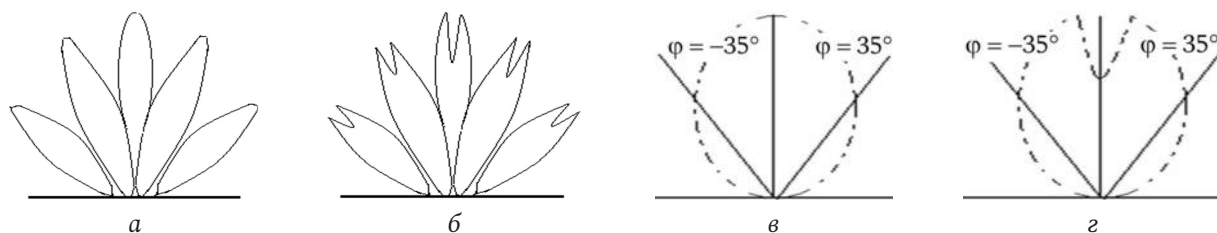


Рис. 3. Типичные моностатические (при совпадении углов падения волны от ЛА и углов измерения отраженного сигнала) ДОР линзы Луненберга при периоде решетки УС, большем длины волны (а, б), при периоде решетки УС, меньшем половины длины волны (в, г), синфазном питании диодов в соседних столбцах решетки УС (а, в) и противофазном питании (б, г)  
 Fig. 3. Typical monostatic (when the angles of incidence of the wave from the aircraft and the angles of measurement of the reflected signal coincide) DOR of the Luneberg lens with the US grating period greater than the wavelength (a, b), with the US grating period less than half the wavelength (c, d), common-mode power supply of diodes in adjacent columns of the US array (a, c) and anti-phase power supply (b, d)

оказывается полноправным участником процесса обмена информацией и с первым, и со вторым абонентами. Достоинствами такого способа являются повышенная (по сравнению с обычным способом радиосвязи) скрытность передачи информации третьим абонентом и помехозащищенность, достигаемая за счет пространственной и частотной селекции полезного сигнала и помехи. Применение управляемых СНС с различными обратно направленными отражателями позволяет перенести спектр несущей частоты в ту область спектра, где фоновый сигнал отсутствует, и, следовательно, получить четкое изображение на экране РЛС. Перенос спектра частот в необходимую область можно осуществить, например, при помощи  $\pi$ -манипуляции фазы отраженного сигнала. В качестве несущего сигнала третьим абонентом используется отраженный от неоднородности сигнал первого и второго абонента, следствием чего является осуществление радиосвязи между тремя абонентами на несущих сигналах первого и второго абонентов.

В результате формируются новые перспективные радиотехнические системы – системы, состоящие из совокупности обыкновенных обратно направленных отражателей или типовых антенн и СНС. Такие системы переотражают в заданном направлении (на источник падающего сигнала) и с заданной шириной моностатической и бистатической ДОР) высокочастотный сигнал (в общем случае – на

гармониках падающего сигнала), амплитуда и фаза которого оказываются модулированными по заданному закону. В этом режиме к управляемому слою подключен источник первичного сигнала. Если параметры падающего сигнала промодулированы информационным сигналом, то при подключении к управляемому слою наушников возможна демодуляция падающего сигнала. Оба режима могут функционировать совместно. Для этого необходима оптимизация параметров неуправляемых слоев по выбранному критерию. В случае использования уголкового отражателя (рис. 2, а) СНС отражательного типа размещается на одной или нескольких гранях. При использовании линзы Луненберга СНС отражательного типа располагается на определенной части сферы (рис. 2, б). При использовании волноводно-рупорных решеток СНС отражательного или смешанного типа включается внутри каждого волновода (рис. 2, в). При этом ширина моностатической ДОР составляет примерно  $\varphi = \pm(35^\circ \div 40^\circ)$ , то есть примерно 70–80 градусов. Нормированные моностатические ДОР на основной (первой) гармонике падающего сигнала приведены на рис. 3.

Ширина  $\theta$  бистатической ДОР определяется поперечным размером антенны (диаметром линзы  $D$ ) и длиной облучающей волны  $\lambda$  ( $\theta = \lambda D^{-1} 57,3^\circ$ ). Например, при длине волны  $\lambda = 3$  см,  $D = 40$  см ширина бистатической ДОР составляет примерно  $\theta = 4,3^\circ$ . Экспериментальные бистатические ДОР

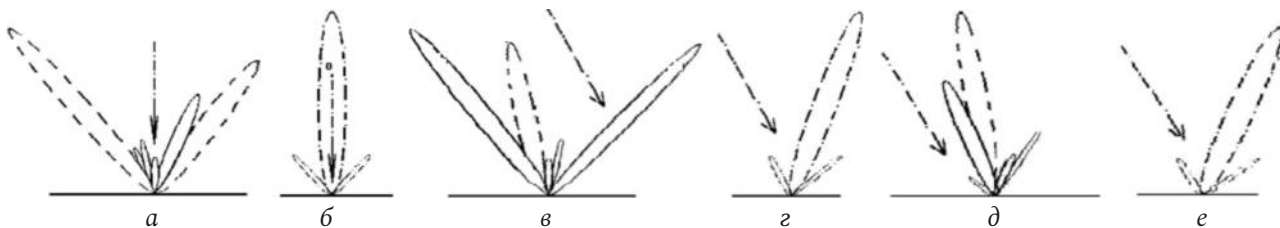


Рис. 4. Типичные бистатические (при разное углов падения волны от ЛА и углов измерения отраженного сигнала) ДОР на плоскую СНС при синфазном питании диодов в соседних столбцах решетки УС  
 Fig. 4. Typical bistatic (when the angles of incidence of the wave from the aircraft and the angles of measurement of the reflected signal are separated) DOR to a flat SNS with in-phase power supply of diodes in adjacent columns of the US array

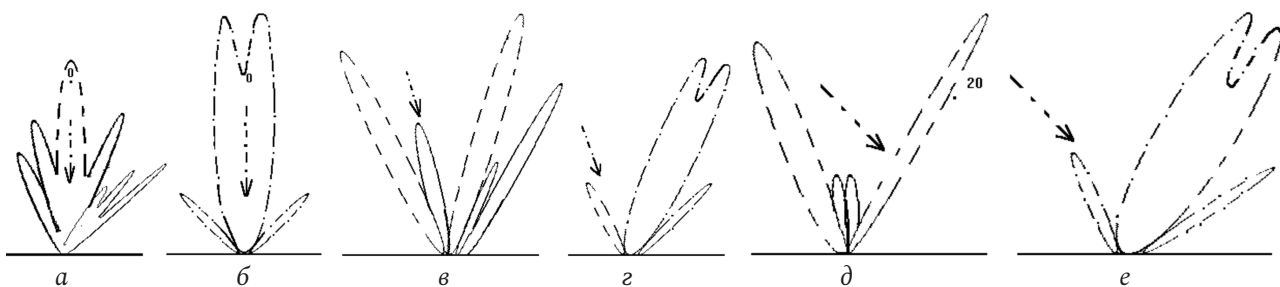


Рис. 5. Типичные бистатические (при разное углов падения волны от ЛА и углов измерения отраженного сигнала) ДОР на плоскую СНС при противофазном питании диодов в соседних столбцах решетки УС  
 Fig. 5. Typical bistatic (when the angles of incidence of the wave from the aircraft and the angles of measurement of the reflected signal are separated) DOR to a flat SNS with anti-phase power supply of diodes in adjacent columns of the US array

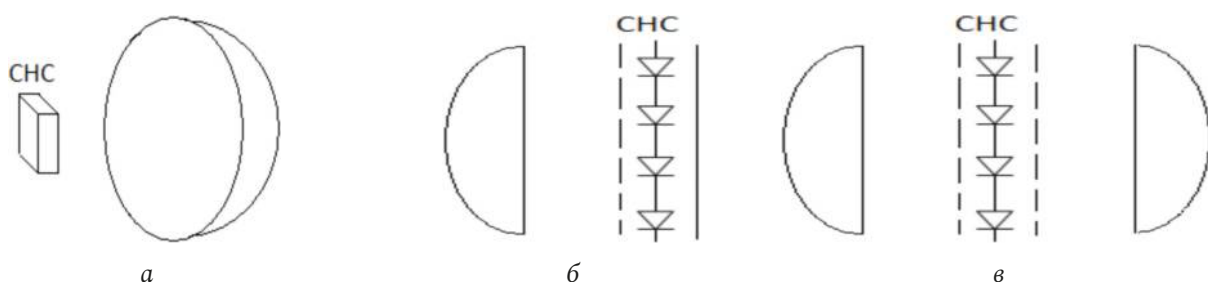


Рис. 6. Варианты совместного использования СНС отражательного типа с зеркальной антенной (а), бифокальной линзой (б) и СНС смешанного типа с двумя бифокальными линзами (в)  
 Fig. 6. Options for joint use of a reflective type SNS with a reflector antenna (a), a bifocal lens (b) and a mixed type SNS with two bifocal lenses (c)

плоской СНС с периодом решетки УС, меньшим половины длины волны, приведены на рис. 4–5 [7–10; 16]. На рис. 4 нормированные ДОР соответствуют углам падения волны 0°, 22° и 30°. Принятые обозначения соответствуют нормированным ДОР на 1-й (---) и 2-й гармониках падающей электромагнитной волны, причем (---) – главный максимум 2-й гармоники и (-----) – добавочный максимум 2-й гармоники. Пусть нелинейные элементы (диоды) располагаются с периодом в половину длины волны. Тогда количество диодов на полусфере ≈ 1110 шт. Количество диодов на плоской СНС ≈ 710 шт.

На рис. 5 ДОР соответствуют углам падения 0°, 21° и 29°.

При увеличении периода решетки УС пропорционально уменьшается количество диодов. ДОР становится многолучевой. При противофазном

питании диодов в соседних столбцах решетки УС в каждом лепестке ДОР появляется провал (рис. 5). В случае использования параболического зеркала СНС отражательного типа помещается в фокусе (рис. 6, а). Размер фокусного пятна составляет примерно  $1,5\lambda \times 1,5\lambda$ . Количество диодов уменьшается до 9 шт. В составе бифокальной линзы СНС отражательного типа включается в фокусе (рис. 6, б). При использовании двух бифокальных линз СНС смешанного типа включается в фокусе между линзами (рис. 6, в). Независимо от конструктивных особенностей и использования типов антенн или отражателей основным (базовым) элементом (узлом) в каждом типе описанных радиотехнических систем является СНС [7–16]. Независимо от выбора структуры СНС основным принципом их построения становится определение значений параметров неуправляемых и управляемых слоев, при

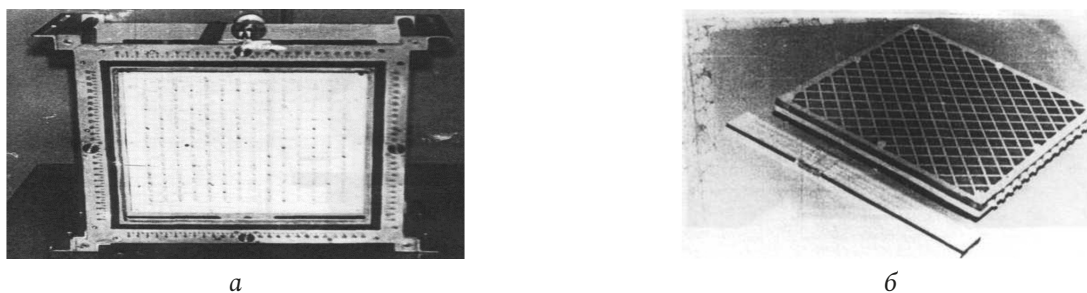


Рис. 7. Макеты КГС в виде плоской СНС смешанного типа с перестраиваемыми толщинами слоев (а) и плоской СНС отражательного типа с постоянными (неперестраиваемыми) параметрами (б)  
Fig. 7. Models of CGS in the form of a flat mixed-type SSS with tunable layer thicknesses (a) and a flat reflective-type SSS with constant (non-tunable) parameters (b)

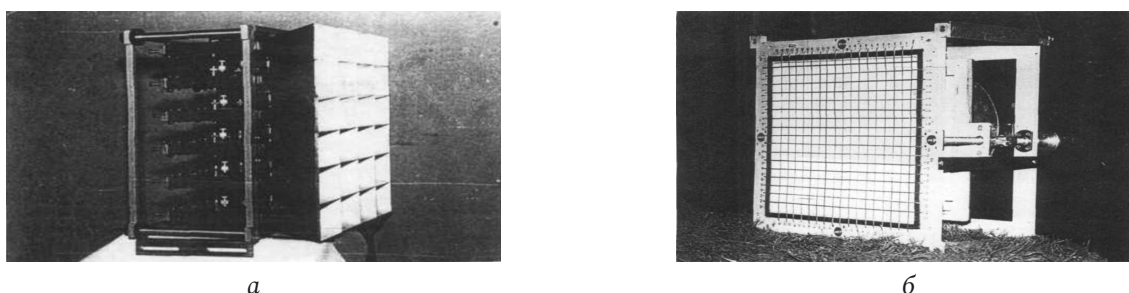


Рис. 8. Макеты КГС в виде волноводно-рупорной решетки с использованием СНС внутри волноводов (а) и с использованием СНС отражательного типа и параболического рефлектора (б)  
Fig. 8. Models of CGS in the form of a waveguide-horn grating using SNS inside waveguides (a) and using SNS of a reflective type and a parabolic reflector (b)

которых обеспечивается возможность реализации с их помощью предлагаемых способов радиосвязи, основанных на комплексировании функций многих радиотехнических устройств в одном [7–10].

Одним из главных недостатков известных подсистем навигации и посадки можно выделить высокую мощность потребляемой энергии питания, а следовательно, невозможность применения в отдельных районах в экстремальных ситуациях, в условиях наличия помех и режима молчания. Возможность использования современных РЛС летательных аппаратов ограничена погрешностью привязки к определенной местности, т. к. порой значительные фоновые помехи от второстепенных элементов земной и надводной поверхности затрудняют или приводят к невозможности выделения места посадки.

Предлагаемые новые радиотехнические системы могут быть использованы для решения и других задач. Варианты размещения и количество размещаемых отражателей выбираются из условий решаемых задач. К числу таких задач можно отнести определение точек земных координат; определение точки десантирования личного состава и выброски грузов; определение границ взлетно-посадочной полосы, ее заданного посадочного курса; применение в качестве индиви-

дуальных средств спасения экипажей морских и воздушных судов; имитацию движения техники с заданной скоростью; создание помех.

### 3. Экспериментальные исследования управляемых слоистых неоднородных структур как основных узлов предлагаемых курсо-гладных систем

Макеты управляемых СНС, содержащие различное количество управляемых и неуправляемых слоев, исследовались на предмет определения возможности одновременного или последовательного обеспечения функций усилителей и генераторов, модуляторов и демодуляторов, преобразователей и умножителей частоты, согласующих устройств и фильтров (рис. 7–13) [7–16]. Получены экспериментальные результаты, показывающие возможность однократной и двойной амплитудной и фазовой модуляции проходного или отраженного сигнала, амплитудной и фазовой демодуляции падающего сигнала с помощью этих макетов без изменения параметров неуправляемых слоев при переходе от режима модуляции к режиму демодуляции. Теоретические и экспериментальные результаты (характеристики и параметры) удовлетворительно совпадают.



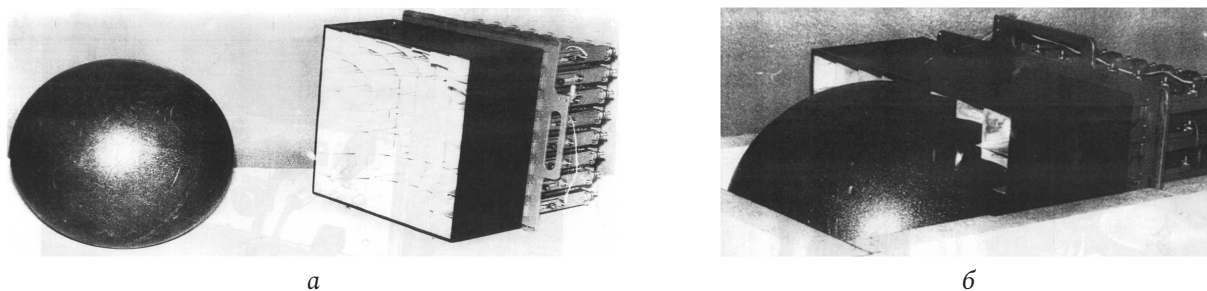
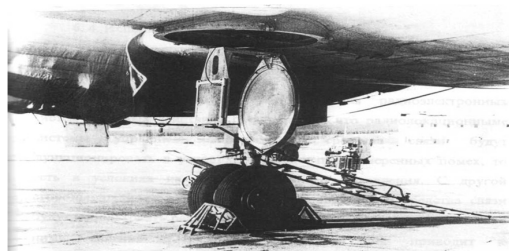
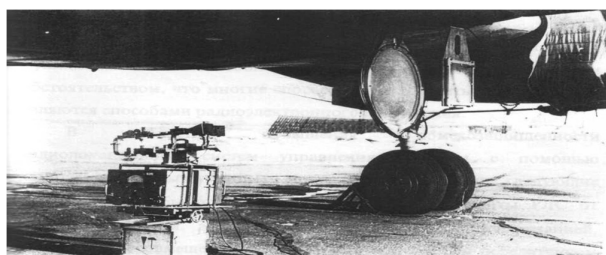


Рис. 9. Макет КГС на основе волноводно-рупорной решетки и линзы Лунеберга в разобранном (а) и собранном виде (б)  
 Fig. 9. Model of the CGS based on a waveguide-horn grating and a Luneberg lens, disassembled (a) and assembled (b)



а



б

Рис. 10. Макет КГС на основе пассивной СНС отражательного типа и бифокальной линзы на борту самолета Ил-14 (а) и установка для измерения модуля и фазы коэффициента отражения макета управляющего устройства СВЧ на основе пассивной СНС отражательного типа и бифокальной линзы в двух состояниях управляемых элементов под бортом самолета Ил-14 (б)  
 Fig. 10. A model of the CGS based on a passive reflective type SNS and a bifocal lens on board an IL-14 aircraft (a) and an installation for measuring the modulus and phase of the reflection coefficient of a microwave control device layout based on a passive reflective type SNS and a bifocal lens in two states of controlled elements under board of the IL-14 aircraft (b)

На рис. 12 показаны типичные зависимости модулей и фаз коэффициентов отражения СНС от частоты в двух состояниях УС, определяемых двумя уровнями управляющего сигнала, в режиме обеспечения  $\pi$ -манипуляции фазы отраженного сигнала (разность фаз  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = 180^\circ$ ; отношение модулей коэффициентов отражения СНС  $m = H_2 \times H_1^{-1} = 1$ ) на средней частоте  $f_0 = 830$  МГц.

Рабочая полоса частот СНС зависит от количества  $N$  оптимизируемых параметров НС. Пусть  $n$  – количество параметров, оптимальных по критерию обеспечения заданных значений  $m$  и  $\Delta\phi$  на средней частоте [10]. На рис. 13 показаны типичные зависимости относительной рабочей полосы частот СНС от количества оптимизируемых

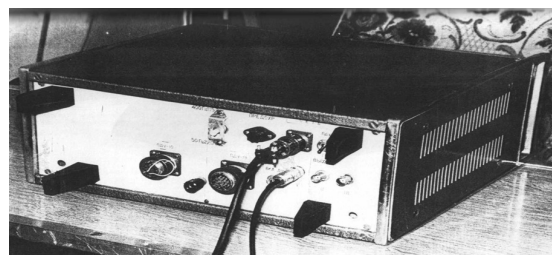
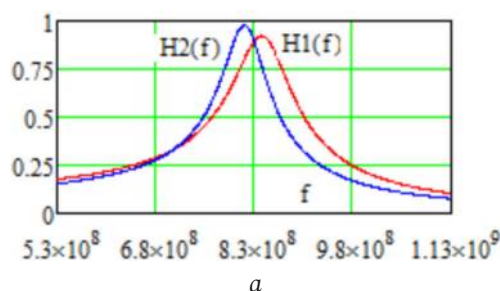
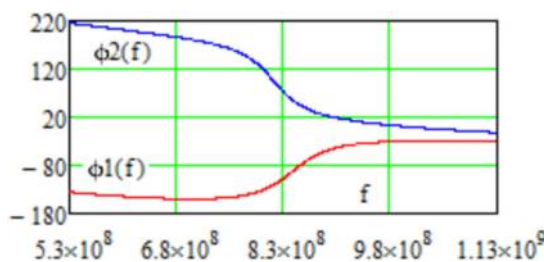


Рис. 11. Внешний вид генератора низкочастотных управляющих сигналов

Fig. 11. Appearance of the generator of low-frequency control signals



а



б

Рис. 12. Примеры зависимостей модулей (а) и фаз (б) коэффициентов отражения СНС от частоты в двух состояниях УС, определяемых двумя уровнями управляющего сигнала  
 Fig. 12. Examples of the dependences of the modules (a) and phases (b) of the SNS reflection coefficients on the frequency in two states of the US, determined by two levels of the control signal

параметров НС при двух вариантах ограничений на  $m$  и  $\Delta\phi$ .

### Заключение

Анализ известной литературы [1–16] показывает, что все возможности, имеющиеся в известных КГС, сохраняются в предлагаемой КГС и основаны на использовании СНС. Многие недостатки,



Рис. 13. Зависимость широкополосности СНС с одним пассивным управляемым слоем на основе параметрических диодов ПД и p-i-n-диодов, содержащих со стороны свободного пространства два диэлектрических слоя (1) и один диэлектрический слой и неуправляемую решетку (2), от количества оптимизируемых параметров при ограничениях ( $0,5 \leq m \leq 1,0$ ;  $160^\circ \leq \Delta\varphi \leq 200^\circ$ ) (3) и ( $0,5 \leq m \leq 1,0$ ;  $80^\circ \leq \Delta\varphi \leq 100^\circ$ ) (4)

Fig. 13. Dependence of the bandwidth of SNS with one passive controllable layer based on parametric PD diodes and pin diodes containing two dielectric layers (1) and one dielectric layer and an uncontrolled grating (2) on the side of free space on the number of optimized parameters under restrictions ( $0,5 \leq m \leq 1,0$ ;  $160^\circ \leq \Delta\varphi \leq 200^\circ$ ) (3) and ( $0,5 \leq m \leq 1,0$ ;  $80^\circ \leq \Delta\varphi \leq 100^\circ$ ) (4)

имеющиеся в известных КГС, в предлагаемой КГС практически отсутствуют. Предлагаемая КГС может быть использована для решения многих задач, которые с помощью известной КГС решить нельзя. К таким задачам относятся имитация движущихся и стационарных объектов вооружения и

военной техники; скрытная передача информации в условиях отсутствия собственного источника несущего сигнала; радиоэлектронное подавление систем радиосвязи и управления, радиолокационных систем управления оружием вероятного противника.

### Список литературы

1. ГОСТ 26121-84. Системы инструментального захода самолетов на посадку радиомаячные. Термины и определения. М.: Издание стандартов, 1985. 8 с.
2. Большая Советская Энциклопедия. 2. М., 1958. Т. 51. 460 с.
3. Сарайский Ю.Н., Алешков И.И. Аэронавигация. Т. 1. Основы навигации и применение геотехнических средств. СПб.: СПбГУГА, 2010. 302 с.
4. Лобанов М.М. Развитие советской радиолокационной техники. М.: Воениздат, 1982. 239 с.
5. Никитин Д.А. Курсо-глиссадные системы посадки в гражданской авиации СССР // Научный вестник МГТУ ГА. 2006. № 101. С. 34–38.
6. Наземное радиооборудование системы посадки ILS 734 // НПО «РТС». Авиационная радионавигация. Справочник. М.: Транспорт, 1990. 264 с.
7. Головков А.А. Комплексированные радиоэлектронные устройства и их роль в традиционной и перспективной технике радиосвязи // Всероссийская конференция по повышению помехоустойчивости систем технических средств охраны: сб. докладов. Воронеж; М.: Радио и связь, 1995. С. 109–110.
8. Головков А.А. Комплексированные радиоэлектронные устройства. М.: Радио и связь, 1996. 128 с.
9. Головков А.А. Теория синтеза комплексированных радиоэлектронных устройств и основные направления их использования // Всероссийская конференция по основным направлениям развития средств и систем радиосвязи. Воронеж, 1996. Т. 1. С. 252–264.
10. Головков А.А. Синтез комплексированных радиоэлектронных устройств с управляемыми характеристиками и их использование в радиотехнических системах: дис. ... д-ра. тех. наук. М.: Моск. энерг. ин-т (тех. ун-т), 1997. 386 с.
11. Способ радиосвязи и системы его реализации / А.А. Головков [и др.]. Патент 2271065 РФ. № 2004117675; заявл. 09.06.2004; опубл. 27.02.2006. Бюл. 6.
12. Головков А.А., Волобуев А.Г. Алгоритмы синтеза и анализа активных многофункциональных плоскостойких сред отражательного и смешанного типов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2003. Т. 6, № 2. С. 39–43.
13. Головков А.А., Вербицкий А.В. Управляемая неоднородность. Патент 2269188 РФ. № 2004122350; заявл. 20.07.2004; опубл. 27.01.2006. Бюл. 3.
14. Головков А.А., Вербицкий А.В. Управляемая неоднородность. Патент 2277295 РФ. № 2004132659; заявл. 09.11.2004; опубл. 27.05.2006. Бюл. 15.
15. Головков А.А., Головков В.А. Параметрический синтез радиотехнических устройств и систем. Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА», 2018. 588 с.
16. Головков А.А., Михайлов Г.Д. Синтез плоскостойкой среды, усиливающей отраженную электромагнитную волну // Радиотехника и электроника. 1984. №3. С. 579–585.

### References

1. GOST 26121-84. Radio Beacon Systems for Instrumental Approach of Aircraft. Terms and Definitions. Moscow: Izdanie standartov, 1985, 8 p. (In Russ.)

2. Great Soviet Encyclopedia. 2. Moscow, 1958. V. 51. 460 p.
3. Sarajsky Yu.N., Aleshkov I.I. *Air Navigation. Vol. 1. Basics of Navigation and the use of Geotechnical Tools*. Saint Petersburg: SPbGUGA, 2010, 302 p. (In Russ.)
4. Lobanov M.M. *Development of Soviet Radar Technology*. Moscow: Voenizdat, 1982, 239 p. (In Russ.)
5. Nikitin D.A. Course-glide path landing systems in civil aviation of the USSR. *Nauchnyi vestnik MGTU GA*, 2006, no. 101, pp. 34–38. (In Russ.)
6. *Ground Radio Equipment of the Landing System ILS 734*. NPO «RTS». Aviation Radio Navigation. Directory. Moscow: Transport, 1990, 264 p. (In Russ.)
7. Golovkov A.A. Integrated radio electronic devices and their role in traditional and advanced radio communication technology. *Vserossijskoj konferentsii po povysheniju pomehoustojchivosti sistem tehniceskikh sredstv ohrany: sb. dokladov*. Voronezh; M.: Radio i svjaz', 1995, pp. 109–110. (In Russ.)
8. Golovkov A.A. *Integrated Radio Electronic Devices*. Moscow: Radio i svjaz', 1996, 128 p. (In Russ.)
9. Golovkov A.A. Theory of synthesis of complex radio-electronic devices and the main directions of their use. *Vserossijskaja konferentsija po osnovnym napravlenijam razvitiya sredstv i sistem radiosvjazi*. Voronezh, 1996, vol. 1, pp. 252–264. (In Russ.)
10. Golovkov A.A. Synthesis of Integrated Radio Electronic Devices with Controlled Characteristics and their Use in Radio Engineering Systems. Diss. ... Doc. Tech. Sciences. Moscow: Mosk. energ. in-t (tehn. un-t), 1997, 386 p. (In Russ.)
11. Golovkov A.A. et al. Method of radio communication and systems for its implementation. Patent 2271065 RF. No. 2004117675; dec. 09.06.2004; publ. 27.02.2006. Bull. 6. (In Russ.)
12. Golovkov A.A., Volobuev A.G. Algorithms for the synthesis and analysis of active multifunctional flat-layered media of reflective and mixed types. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2003, vol. 6, no. 2, pp. 39–43. (In Russ.)
13. Golovkov A.A., Verbitsky A.V. Controlled inhomogeneity. Patent 2269188 RF. No. 2004122350; dec. 20.07.2004; publ. 27.01.2006. Bull. 3. (In Russ.)
14. Golovkov A.A., Verbitsky A.V. Controlled inhomogeneity. Patent 2277295 RF. No. 2004132659; dec. 09.11.2004; publ. 27.05.2006. Bull. 15. (In Russ.)
15. Golovkov A.A., Golovkov V.A. *Parametric Synthesis of Radio Engineering Devices and Systems*. Voronezh: VUNTs VVS «VVA», 2018, 588 p. (In Russ.)
16. Golovkov A.A., Mihajlov G.D. Synthesis of a flat-layered medium that amplifies the reflected electromagnetic wave. *Radiotekhnika i elektronika*, 1984, no. 3, pp. 579–585. (In Russ.)

---

## Physics of Wave Processes and Radio Systems 2022, vol. 25, no. 1, pp. 27–35

DOI 10.18469/1810-3189.2022.25.1.27-35

Received 17 July 2021  
Accepted 20 August 2021

### Principles of construction and basic characteristics of perspective noiseproof course-glide system

*Alexander A. Golovkov, Vladimir A. Golovkov*

Military Educational and Scientific Centre of the Air Force N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy (Voronezh)  
the Ministry of Defence of the Russian Federation  
54a, Staryh Bolshevikov Street,  
Voronezh, 394064, Russia

**Abstract – Introduction:** based on the analysis of the known literature, it is shown that modern course-glide systems have disadvantages associated with the presence of carrier signal generators in them, the lack of frequency and spatial selection of the signal and interference. **The purpose of the work:** to develop the principles of constructing a promising noise-resistant course-glide system based on the joint use of inversely directed reflectors, aperture antennas and electrodynamic controlled layered inhomogeneous structures. The controlled layers are periodic lattices of conducting elements with nonlinear elements included in their discontinuities. Uncontrolled layers are lossless dielectric layers and periodic lattices of conducting elements. **Materials and methods:** algorithms for parametric synthesis of controlled and uncontrolled layers of electrodynamic inhomogeneous structures, experimental methods for analyzing monostatic and bistatic backscattering diagrams, experimental methods for determining the frequency characteristics of electrodynamic inhomogeneous structures in various states of controlled layers. **Results:** the possibility of designing a promising course-glide system with specified characteristics that provide a new method of radio communication without using its own carrier signal generator is shown. **Conclusion:** the proposed course-glide system can be used to solve many problems that cannot be solved with the help of a known course-glide system. Such tasks include imitation of moving and stationary objects of weapons and military equipment; covert transmission of information in the absence of its own carrier signal source; radio-electronic suppression of radio communication and control systems, radar control systems for weapons of a likely enemy.

**Keywords** – course-glide system; operated in uncontrollable layers of electrodynamic non-uniform structure.

---

## Информация об авторах

**Головков Александр Афанасьевич**, 1953 г. р., доктор технических наук, профессор кафедры авиационных систем и комплексов радионавигации и радиосвязи ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Россия.

*Область научных интересов:* способы и средства формирования, извлечения и обработки сигналов, приема, передачи, защиты и разрушения информации.

*E-mail:* vaiu@mil.ru

**Головков Владимир Александрович**, 1983 г. р., младший научный сотрудник отдела ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Россия.

*Область научных интересов:* способы и средства формирования и обработки сигналов, приема и передачи информации.

*E-mail:* valgol2595@gmail.com

## Information about the Authors

**Alexander A. Golovkov**, born in 1953, Doctor of Technical Sciences, professor of the Department of Aviation Systems and Radio Navigation and Radio Communication Complexes, Military Educational and Scientific Centre of the Air Force N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy (Voronezh) the Ministry of Defence of the Russian Federation, Voronezh, Russia.

*Research interests:* ways and means of generating, extracting and processing signals, receiving, transmitting, protecting and destroying information.

*E-mail:* vaiu@mil.ru

**Vladimir A. Golovkov**, born in 1983, junior researcher of the department, Military Educational and Scientific Centre of the Air Force N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy (Voronezh) the Ministry of Defence of the Russian Federation, Voronezh, Russia.

*Research interests:* ways and means of generating and processing signals, receiving and transmitting information.

*E-mail:* valgol2595@gmail.com

**Неганов, В.А.**

**Современная теория и практические применения антенн:** монография / В.А. Неганов, Д.П. Табаков, Г.П. Яровой; предисл. акад. Ю.В. Гуляева; под ред. В.А. Неганова. – М.: Радиотехника, 2009. – 720 с.



ISBN 978-5-88070-222-0

УДК 621.396.67


ББК 32.845

Рассмотрены основные разделы теории и техники антенн. Освещены вопросы расчета и построения различных типов антенн (от вибраторных до рупорных и антенных решеток, включая фазированные). Основное внимание уделено антеннам СВЧ и расчетам их электромагнитных полей в ближней зоне, т. е. вопросам электромагнитной совместимости.

Принципиальное отличие книги от известных заключается в последовательном применении метода физической регуляризации (самосогласованного метода) к расчету электромагнитного поля антенн, позволяющего осуществлять непрерывный переход с излучающей поверхности антенны к пространству вне ее. С помощью самосогласованного метода получены новые результаты по теории антенн: установлены связь между поверхностной плотностью тока на вибраторной антенне и напряженностью электромагнитного поля, однонаправленный режим излучения для кольцевой (рамочной антенны), режимы стоячих и бегущих волн в цилиндрической спиральной антенне, входное сопротивление практически для всех типов антенн. Теоретический материал подкреплен примерами применения многолучевых антенн.

*Предназначено для разработчиков антенно-фидерных устройств, аспирантов и докторантов, занимающихся вопросами проектирования антенных систем различного назначения, студентов радиотехнических специальностей высших учебных заведений.*

## Итерационный алгоритм оценки смещения, масштаба и поворота для совмещения телевизионных сигналов при влиянии аддитивных и мультипликативных помех

Р.Р. Диязитдинов 

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики  
443010, Россия, г. Самара,  
ул. Л. Толстого, 23

*Аннотация* – В статье представлен итерационный алгоритм совмещения телевизионных изображений. Совмещение определяется параметрами смещения, масштабом и поворотом. Также на изображения оказывают влияние аддитивная и мультипликативная помеха. Алгоритм разрабатывался с целью уменьшения времени обработки изображений при вычислении параметров совмещения. Уменьшение времени обработки происходит за счет значительного сокращения вариантов перебора реперных точек, от которых зависит результат совмещения. Первоначально выбранные координаты реперных точек уточняются в ходе работы алгоритма и обеспечивают приемлемое совмещение телевизионных сигналов. Параметры совмещения разделены на две группы: смещения вдоль координатных осей (первая группа), масштаб и поворот (вторая группа). Они оцениваются отдельно друг от друга. Итерационная процедура заключается в использовании смещений для оценки масштаба и поворота, а затем в использовании масштаба и поворота для оценки смещений. Этот процесс повторяется несколько раз, и с каждой новой итерацией вычисленные параметры приближаются к действительным значениям. Разработанный алгоритм позволил уменьшить время обработки в 25 раз по сравнению с алгоритмом полного перебора для изображений, использованных для тестирования. Первое изображение имело размеры 288 × 384 пикселя, второе – 128 × 128 пикселя. Второе изображение являлось фрагментом первого. В заключении статьи приведены результаты численного моделирования, определяющие зависимость погрешности оценки параметров от мощности шума.

*Ключевые слова* – совмещение; изображение; итерационный; смещение; масштаб; поворот; аддитивный; мультипликативный.

### Введение

Совмещение телевизионных изображений является важной задачей в научных исследованиях и технических приложениях. Вопросы совмещения решаются в медицине (совмещение гистологических изображений, трехмерная реконструкция и т. д.) [1], в авиационной технике (совмещение подстилающей поверхности) [2; 3], в железнодорожной сфере (поиск эталонных изображений в видеопотоке для оценки смещения рельсов относительно шпальной решетки), а также в различных системах индексации данных (сопоставление портретных фотографий, поиск изображения по фрагменту и т. д.) [4–7].

Из-за большого объема данных, содержащихся в изображениях, использование алгоритмов оценки параметров, основанных на методе полного перебора, приводит к существенному снижению производительности алгоритма совмещения.

Оценка параметров происходит по метрике (как правило, по коэффициенту корреляции). Количество метрик равно количеству сочетаний оцениваемых параметров. При этом снижение производительности связано с преобразованием

изображений, которых будет столько же, сколько и сочетаний параметров.

По этой причине актуальной проблемой является разработка принципов оценки параметров, отличных от принципов полного перебора. Они должны обеспечивать более высокую производительность. Одним из таких принципов является итерационный метод оценки параметров. В данной статье представлен алгоритм совмещения, в основе которого лежит итерационная процедура.

### Обзор существующих работ

Задача совмещения изображений известна очень давно, и по этой причине разработаны различные подходы, позволяющие повысить скорость обработки.

Также следует отметить, что ряд подходов не являются универсальными и позволяют решить задачу, если выполняются определенные ограничения.

Если совмещаемые изображения связаны между собой только плоскопараллельным смещением, то для повышения скорости вычислений может быть использовано:

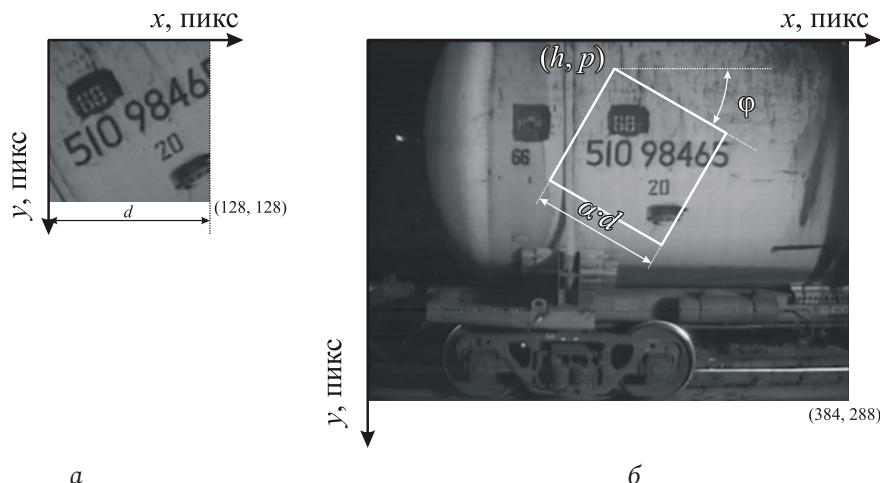


Рис. 1. Исходные изображения:  $f(x, y)$  (а),  $g(x, y)$  (б)  
Fig. 1. Initial images:  $f(x, y)$  (a),  $g(x, y)$  (b)

– расчет сверток на базе преобразования Фурье [4; 7–9];

– метод «пирамид изображений» для уменьшения размерности данных в  $2^n \times 2^n$  раз [10; 11].

Если совмещаемые изображения связаны между собой плоскопараллельным смещением и смещение сравнимо по величине с шагом дискретизации, то для повышения скорости вычислений может быть использован метод линеаризации [12]. Производится разложение сигналов в ряд, и параметры оцениваются в результате решения системы линейных уравнений.

Также существует модификация этого метода для учета поворота, если угол не превышает  $15^\circ$ . Авторы статьи [13] предлагают кроме разложения сигналов в ряд вводить замену тригонометрических функций синуса и косинуса на приближенные значения. Повышение скорости вычислений также обеспечивается за счет решения в аналитическом виде.

Если совмещаемые изображения связаны между собой смещением, масштабом и поворотом, то для повышения скорости вычислений может быть использован метод сопоставления реперных точек. Реперные точки – это, как правило, локальные экстремумы. Сопоставление реперных точек проводится за счет совмещения фрагментов в окрестности этих точек. Фрагменты содержат меньшее количество элементов, чем исходные изображения. За счет этого получается выигрыш в скорости обработки. Этот метод часто ассоциируется с дескрипторами [14–16], которые представляют собой вектор, описывающий фрагмент изображения, малочувствительный к масштабным искажениям и повороту. Серьезным недостатком

этого метода является неверное сопоставление отдельных фрагментов и, соответственно, последующее исправление данной ситуации.

Если смещение не превышает  $\pm 10\%$  исходного изображения, масштаб  $\pm 20\%$ , а поворот  $\pm 30^\circ$ , то можно использовать метод раздельной оценки [4–7]. В методе отдельно друг от друга оцениваются две группы параметров:

- смещения вдоль координатных осей;
- масштаб и поворот.

При этом используются декартовая и логарифмически-полярная системы координат. Метод позволяет уменьшить число преобразований изображений (в сравнении с методом проверки всех возможных комбинаций), тем самым обеспечивая повышение скорости обработки.

Разработанный итерационный алгоритм наиболее близок к алгоритмам раздельной оценки параметров совмещения. Но он характеризуется менее строгими ограничениями по масштабу ( $\pm 50\%$ ) и повороту ( $\pm 180^\circ$ ).

#### Исходные данные

На рис. 1 представлены изображения, которые будут использованы для совмещения.

На рис. 1, а содержится изображение  $f(x, y)$ , которое является фрагментом изображения  $g(x, y)$ . На рис. 1, б на изображении  $g(x, y)$  показана область, соответствующая  $f(x, y)$ .

Параметры совмещения:

- смещение вдоль оси абсцисс:  $h = 200$  пикселей;
- смещение вдоль оси ординат:  $p = 20$  пикселей;
- масштаб:  $\alpha = 0,8$ ;
- поворот:  $\varphi = 30^\circ$ ;
- мультипликативная помеха:  $\lambda = 1,2$ ;

– аддитивная помеха:  $\gamma = 20$  у. е.

*Примечание:* у. е. описывает яркости пикселя изображения, кодируемые числом от 0 до 255 у. е.

Эти сигналы будут использованы для проведения численного моделирования для тестирования разработанного алгоритма.

### Исходные данные

Изображение представляет собой двумерный сигнал с равномерным шагом дискретизации.

Параметрическая модель, связывающая между собой изображения, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} f(x_i, y_i) = s(x_i, y_i) + k(x_i, y_i); \\ g(x_i, y_i) = \lambda s(u_i, w_i) + \gamma + m(x_i, y_i), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u_i = \alpha x_i \cos(\varphi) - \alpha y_i \sin(\varphi) + h; \\ w_i = \alpha x_i \sin(\varphi) + \alpha y_i \cos(\varphi) + p, \end{cases} \quad (2)$$

где  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  – совмещаемые изображения;  $h, p$  – смещения вдоль оси абсцисс и ординат;  $\alpha$  – масштаб;  $\varphi$  – поворот;  $\lambda, \gamma$  – мультипликативная и аддитивная помехи.

Совмещение определяется параметрами  $\{h, p, \alpha, \varphi, \lambda, \gamma\}$ . Для оценки параметров будет использован критерий максимума коэффициента корреляции:

$$\begin{aligned} R(\theta) = & \left\{ \left( \sum_{i=1}^N g(x_i, y_i) \cdot f(x_i, y_i, \theta) \right) / N - \right. \\ & \left. - \left( \left( \sum_{i=1}^N g(x_i, y_i) \right) / N \right) \left( \left( \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i, \theta) \right) / N \right) \right\} / \\ & \left\{ \left( \sum_{i=1}^N g^2(x_i, y_i) - \left( \sum_{i=1}^N g(x_i, y_i) \right)^2 / N \right)^{1/2} \right. \\ & \left. \times \left( \sum_{i=1}^N f^2(x_i, y_i, \theta) - \left( \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i, \theta) \right)^2 / N \right)^{1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\theta = \arg \max_{\theta} (R(\theta)), \quad (4)$$

где  $\theta = \{h, p, \alpha, \varphi, \lambda, \gamma\}$ ,  $N$  – это количество пикселей изображения.

Критерий, основанный на вычислении коэффициента корреляции, не зависит от параметров  $\lambda$  и  $\gamma$ . В этом можно убедиться, рассчитав коэффициент корреляции для двух произвольных векторов  $\{I_i, Y_i\}$  и для  $\{Z_i = \lambda I_i + \gamma, Y_i\}$ . Коэффициент корреляции для  $\{I_i, Y_i\}$  будет равен коэффициенту для  $\{Z_i, Y_i\}$ .

По этой причине, если оценены параметры  $\{h, p, \alpha, \varphi\}$ , то параметры  $\{\lambda, \gamma\}$  могут быть оценены по методу наименьших квадратов:

$$\begin{aligned} \langle \lambda, \gamma \rangle = \\ = \arg \min_{\lambda, \gamma} \left( \sum_{i=1}^N (\lambda f(x_i, y_i, \theta) + \gamma - g(x_i, y_i))^2 \right). \end{aligned} \quad (5)$$

$$\lambda = \frac{Sg \cdot Sf - N \cdot Sfg}{Sf^2 - N \cdot Ef}, \quad (6)$$

$$\gamma = \frac{Sg \cdot Sfg - Sg \cdot Ef}{Sf^2 - N \cdot Ef}, \quad (7)$$

где

$$Sf = \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i, \theta), \quad Sg = \sum_{i=1}^N g(x_i),$$

$$Sfg = \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i, \theta) g(x_i),$$

$$Ef = \sum_{i=1}^N f^2(x_i, y_i, \theta), \quad \theta = \{h, p, \alpha, \varphi\},$$

$f(x_i, y_i, \theta)$  – сигнал после преобразования с учетом найденных смещений, масштаба и угла поворота.

Таким образом, количество параметров, которые достаточно оценить, уменьшается с шести до четырех.

### Оценка масштаба и поворота

Если известно соответствие между двумя точками на изображениях, то можно оценить масштаб и поворот, используя логарифмически-полярную систему координат.

Пусть точка  $(x_0, y_0)$  изображения  $f$  соответствует точке  $(u_0, w_0)$  изображения  $g$  и пусть эти точки связаны между собой выражением (2), т. е. индекс  $i = 0$ . Пусть некоторая точка  $(x, y)$  изображения  $f$  соответствует точке  $(u, w)$  изображения  $g$ .

Обозначим координату точки  $(x, y)$  относительно  $(x_0, y_0)$  в логарифмически-полярной системе координат как  $(r, \text{ang})$ . Их значения будут определяться по формулам:

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (8)$$

$$r = \log_2(\rho), \quad (9)$$

$$\text{ang} = \text{atan2}(x - x_0, y - y_0). \quad (10)$$

*Примечание:*  $\text{atan2}$  – это функция с двумя параметрами, возвращает значение арктангенса выражения  $(y - y_0)/(x - x_0)$  в радианах, в отличие от арктангенса имеет область значений  $(-\pi; \pi)$  (в арктангенса  $(-\pi/2; \pi/2)$ ).

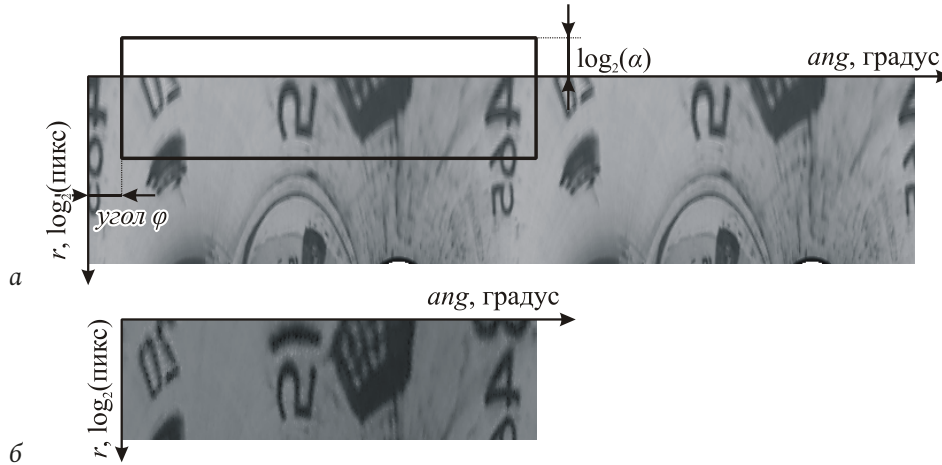


Рис. 2. Оценка масштаба и поворота  
 Fig. 2. Evaluation of scale and rotation

Координаты точки  $(u, w)$  относительно  $(u_0, w_0)$  в логарифмически-полярной системе координат обозначим как  $(r', ang')$ . Ниже представлен вывод выражений для них.

$$u - u_0 = \alpha(\cos(\varphi)x - \sin(\varphi)y).$$

$$w - w_0 = \alpha(\sin(\varphi)x + \cos(\varphi)y).$$

$$\begin{aligned} \rho' &= \sqrt{(u - u_0)^2 + (w - w_0)^2} = \\ &= |\alpha| \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \end{aligned}$$

С учетом того что  $\alpha > 0$ , получаем:

$$\rho' = \alpha \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \alpha \rho.$$

$$r' = \log_2(\rho') = \log_2(\alpha) + \log_2(\rho) = \log_2(\alpha) + r. \quad (11)$$

Рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(ang') &= \frac{w - w_0}{u - u_0} = \\ &= \frac{\sin(\varphi)(x - x_0) + \cos(\varphi)(y - y_0)}{\cos(\varphi)(x - x_0) - \sin(\varphi)(y - y_0)}. \end{aligned}$$

Если умножить числитель и знаменатель дроби на выражение  $\frac{1}{\cos(\varphi)(x - x_0)}$ , то выражение  $\operatorname{tg}(ang')$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(ang') &= \frac{\operatorname{tg}(\varphi) + \frac{(y - y_0)}{(x - x_0)}}{1 - \operatorname{tg}(\varphi) \frac{(y - y_0)}{(x - x_0)}} = \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\varphi) + \operatorname{tg}(ang)}{1 - \operatorname{tg}(\varphi) \operatorname{tg}(ang)} = \operatorname{tg}(\varphi + ang). \end{aligned}$$

$$ang' = ang + \varphi. \quad (12)$$

Таким образом, можно записать, что

$$(r', ang') = (r + \log_2(\alpha), ang + \varphi). \quad (13)$$

Это означает, что оценить масштаб и поворот можно путем оценки смещения по изображениям, представленным в логарифмически-полярной системе координат.

На рис. 2 показан пример оценки масштаба и поворота по изображениям в логарифмически-полярной системе координат. На рис. 2, а показано изображение  $g$ . На рис. 2, б приведен фрагмент, соответствующий изображению  $f$ . Он выделен прямоугольником. Смещения вдоль осей определяют масштаб и поворот.

При известном значении масштаба и поворота изображение  $f$  можно преобразовать таким образом, чтобы оно являлось фрагментом изображения  $g$ , которое можно совместить плоскопараллельным смещением. Оценить смещения можно известными способами [8–11].

Сложность реализации описанного подхода заключается в том, что неизвестны реперные точки  $(x_0, y_0)$  и  $(u_0, w_0)$  на изображениях  $f$  и  $g$ , которые позволили бы оценить сначала масштаб и поворот, а затем смещения.

Однако если координаты этих точек известны с некоторой погрешностью, то разработанный алгоритм позволяет уточнить первоначально выбранные координаты реперных точек, тем самым обеспечивая совмещение телевизионных сигналов.

### Описание алгоритма

Исходными данными являются:  $f(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  – первое изображение,  $g(u_j, w_j)$ ,  $j = 1, \dots, K$  – второе изображение.

*Примечание:* координаты пикселей сигнала  $g$  переобозначены как  $(u, w)$  вместо  $(x, y)$ , чтобы было очевидно, какое изображение обрабатывается на том или ином шаге алгоритма.



Выходными данными являются:  $h$ ,  $p$  – смещения вдоль координатных осей;  $\varphi$ ,  $\alpha$  – угол поворота и масштаб;  $\gamma$ ,  $\lambda$  – значение аддитивной и мультипликативной помех.

Алгоритм состоит из следующих шагов.

1. Загрузка изображений  $f(x_i, y_i)$  и  $g(u_j, w_j)$ .

2. Предварительный выбор точек  $(x_0, y_0)$  и  $(u_0, w_0)$ .

*Примечание:* так как изображение  $f$  является фрагментом изображения  $g$ , то координаты  $(x_0, y_0)$  фиксируются и не меняются; для удобства представления в логарифмически-полярной системе они равняются координатам центрально пикселя (т. е. при размере  $128 \times 128$  пикселей,  $(x_0, y_0) = (64, 64)$ ); координаты  $(u_0, w_0)$  неизвестны, по этой причине используется метод перебора, однако шаг может выбираться из условия 0,1 размера изображения, при размерах  $128 \times 128$  пикселей шаг был выбран равным 10 пикселей (т. е. немного меньше, чем 12,8); другими словами, проверялись координаты  $u_0 = 1, 11 \dots 381$ ,  $w_0 = 1, 11, \dots 281$  (размер изображения  $g$  равняется  $288 \times 384$ ).

3. Выбор количества итераций  $L$  (*примеч.*: в работе  $L = 4$ ).

4. Инициализация матрицы преобразования в соответствии с количеством итераций:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots M_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Цикл по количеству итераций,  $k = 1$ .

5.1. Определение промежуточной матрицы преобразования  $Mres$ :

если  $k = 1$ , то  $Mres = M_1$ ,

если  $k = 2$ , то  $Mres = M_2 M_1$ ,

...

если  $k = L$ , то  $Mres = M_L \dots M_2 M_1$ .

5.2. Вычисление положения точек первого изображения  $(x'_i, y'_i)$  в соответствии с матрицей преобразования  $Mres$ :

$$x'_i = x_i Mres(1,1) + y_i Mres(1,2) + Mres(1,3),$$

$$y'_i = x_i Mres(2,1) + y_i Mres(2,2) + Mres(2,3).$$

5.3. Вычисление координат реперных точек, относительно которых происходит преобразование из декартовой в логарифмически-полярную систему координат:

$$X_0 = x_0 Mres(1,1) + y_0 Mres(1,2) + Mres(1,3),$$

$$Y_0 = x_0 Mres(2,1) + y_0 Mres(2,2) + Mres(2,3),$$

$$U_0 = X_0,$$

$$W_0 = Y_0.$$

5.4. Вычисление матрицы  $M_k$  по данным  $f(x'_i, y'_i)$ ,  $(X_0, Y_0)$ ,  $g(u_j, w_j)$ ,  $(U_0, W_0)$  согласно процедуре отдельной оценки параметров (процедура описана ниже).

5.5. Проверка на выход из цикла:  $k = k + 1$ , если  $k \geq L$ , то выход из цикла, в противном случае переход к п. 5.1.

6. Оценка параметров  $h$ ,  $p$ ,  $\varphi$ ,  $\alpha$  по матрице  $Mres$ :

$$h = Mres(1,3), \quad p = Mres(2,3),$$

$$\alpha = \sqrt{Mres^2(1,1) + Mres^2(1,2)},$$

$$\varphi = \arcsin \left( \frac{Mres(2,1)}{\sqrt{Mres^2(1,1) + Mres^2(1,2)}} \right) 180 / \pi.$$

7. Оценка параметров  $\gamma$ ,  $\lambda$  по формулам (6)–(7):

8. Выход из программы.

Ниже описана процедура отдельной оценки параметров (п. 5.4).

Входные данные:  $f(x'_i, y'_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  – первое изображение,  $g(u_j, w_j)$ ,  $j = 1, \dots, K$  – второе изображение.  $(X_0, Y_0)$ ,  $(U_0, W_0)$  – реперные точки.

Выходные данные:  $M$  – матрица преобразования размером  $[3 \times 3]$ .

1. Преобразование координат  $(x'_i, y'_i)$  в логарифмически-полярную систему координат относительно точки  $(X_0, Y_0)$ .

2. Преобразование координат  $(u_j, w_j)$  в логарифмически-полярную систему координат относительно точки  $(U_0, W_0)$ .

3. Совмещение сигналов  $f$  и  $g$  в логарифмически-полярной системе. В результате оцениваются смещения  $\log_2(ar)$  и  $\varphi r$  (см. рис. 2).

4. Вычисление промежуточной матрицы преобразования:

$$mA = \begin{bmatrix} ar \cos(\varphi r) & -ar \sin(\varphi r) \\ ar \sin(\varphi r) & ar \cos(\varphi r) \\ 0 & 0 \\ U_0 - (x_0 \cos(\varphi r) - y_0 \sin(\varphi r)) \\ W_0 - (x_0 \sin(\varphi r) + y_0 \cos(\varphi r)) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Преобразование координат  $(x'_i, y'_i)$  в соответствии с матрицей  $mA$ . Формирование  $(x''_i, y''_i)$ .

6. Совмещение сигналов  $f(x''_i, y''_i)$  и  $g(u, w)$  в декартовой системе координат. В результате оцениваются смещения вдоль координатных осей  $hr$  и  $pr$ .

7. Вычисление промежуточной матрицы преобразования:

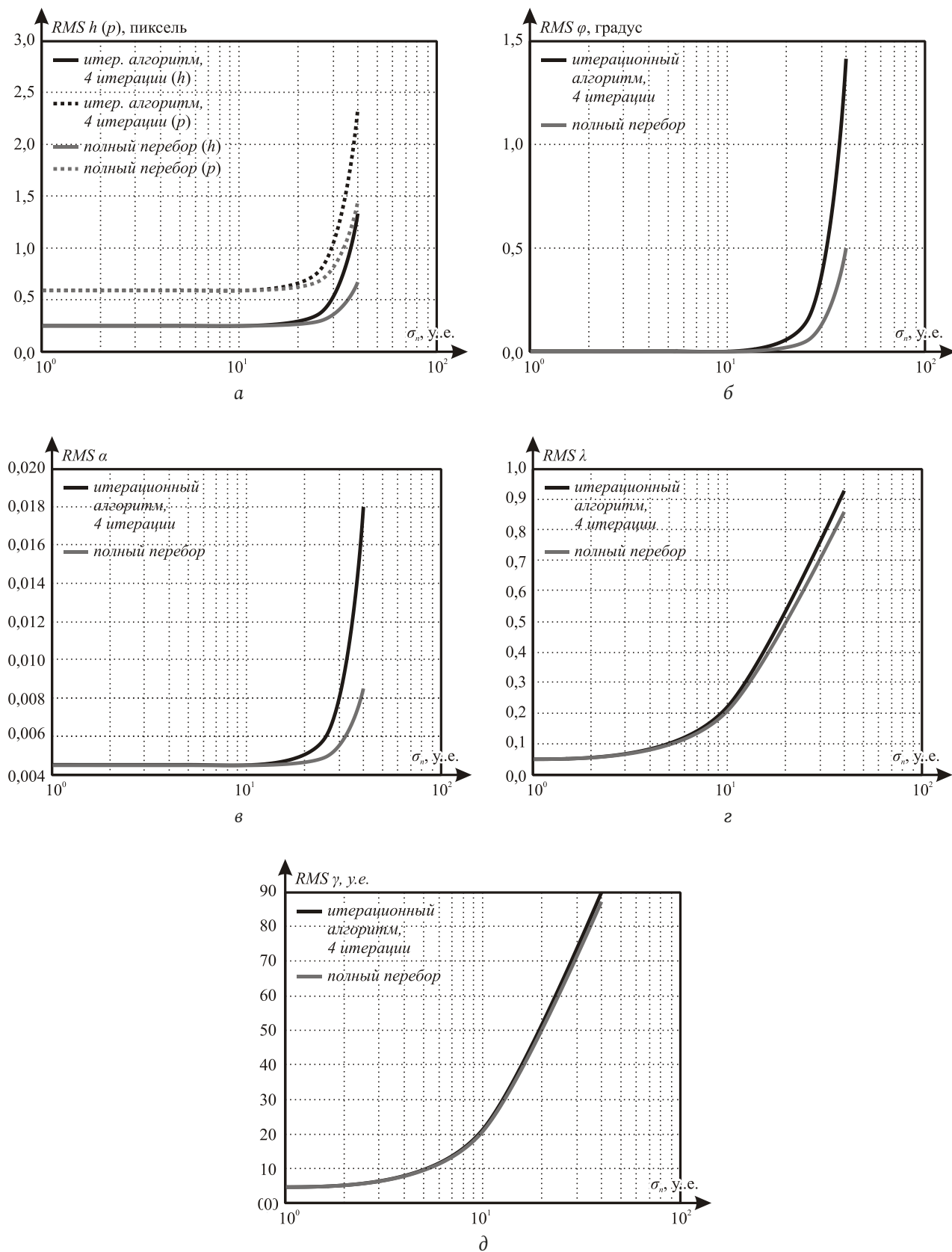


Рис. 3. Погрешность оценки параметров  
 Fig. 3. Error in parameter estimation

$$mB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & hr \\ 0 & 1 & pr \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Вычисление выходной матрицы  $M$ :

$$M = mB \cdot mA.$$

### Численное моделирование

Для определения погрешности оценки параметров совмещения было проведено численное моделирование, которое заключалось в добавлении помехи с гауссовым распределением к ординатам одномерных сигналов.

При выбранном значении мощности (дисперсии помехи,  $\sigma_n^2$ ) проводилась серия опытов, по которым оценивалась погрешность оценки параметра.

В качестве погрешности выступало значение среднеквадратичной величины (RMS):

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (a_i - a)^2}{n}}, \quad (14)$$

где  $a$  – действительное значение параметра;  $a_i$  – измеренное значение параметра в  $i$ -м опыте;  $n$  – количество опытов.

По результатам численного моделирования был построен график зависимости RMS от среднеквадратичного отклонения (СКО) помехи ( $\sigma_n$ ).

Результаты численного моделирования приведены на рис. 3.

Разработанный алгоритм сравнивался с алгоритмом полного перебора: проверялись все возможные варианты точки  $(u_0, w_0)$ , т. е.  $u_0 = 1,2 \dots 384$ ,  $w_0 = 1,2 \dots 288$ . И для каждой точки происходило преобразование в логарифмически-полярную си-

стему координат. Погрешности у обоих алгоритмов почти совпадают. Различия наблюдаются при мощности шума  $\sigma_n > 20$  у. е. Различия возникают вследствие того, что итерационный процесс не приводит к верной оценке параметров за четыре итерации. При увеличении количества итераций до шести графики погрешностей у сравниваемых алгоритмов совпадают. Однако увеличение итераций ожидаемо приводит к снижению скорости обработки и оправдано только при высоком уровне шума, который, как правило, свидетельствует о нештатной работе телевизионного оборудования.

Скорость вычисления у разработанного алгоритма при четырех итерациях в 25 раз выше, чем у алгоритма полного перебора.

Таким образом, разработанный алгоритм характеризуется погрешностью оценки параметров, как в алгоритме полного перебора, но обладает более высоким быстродействием.

### Заключение

Разработанный алгоритм был апробирован для поиска изображений в потоковом видео в видеосистеме вагона-путьеизмерителя в рамках задачи индексации («быстрого поиска»).

Разработанный алгоритм может быть использован в медицинских целях, в аэрокосмической отрасли, охранных системах и для расширения функциональных возможностей многокамерных систем технического зрения.

Разработанный алгоритм обеспечивает высокую скорость обработки видеоданных и может быть использован в задачах совмещения изображений, ориентированных на работу в режиме реального времени.

### Список литературы

1. Сунгатуллина Д.И. Быстрый алгоритм совмещения контуров изображений, связанных изотропным аффинным преобразованием // Графикон 2014. 2014. С. 92–95.
2. Ефимов А.И. Разработка и исследование алгоритмов совмещения изображений от бортовых видеодатчиков с виртуальной моделью местности: дис. ... канд. тех. наук. Рязань: Издательство Рязанского государственного радиотехнического университета, 2016. 172 с.
3. Ефимов А.И., Новиков А.И. Алгоритм поэтапного уточнения проективного преобразования для совмещения изображений // Компьютерная оптика. 2016. Т. 40, № 2. С. 258–265. DOI: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-2016-40-2-258-265>
4. Мясников Е.В. Определение параметров геометрических трансформаций для совмещения портретных изображений // Компьютерная оптика. 2007. Т. 31, № 3. С. 77–82.
5. Reddy B., Chatterji B. An FFT-based technique for translation, rotation, and scale-invariant image registration // IEEE Transactions on Image Processing. 1996. Vol. 5, no. 27. P. 1266–1271. DOI: <https://doi.org/10.1109/83.506761>
6. Phase correlation based image alignment with subpixel accuracy / A. Alba [et al.] // 11th Mexican International Conference on Artificial Intelligence (MICAI 2012). 2012. Vol. 7629. P. 171–182. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-37807-2\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-642-37807-2_15)
7. Evangelidis G., Psarakis E. Parametric image alignment using enhanced correlation coefficient maximization // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2008. Vol. 30, no. 27. P. 1858–1865. DOI: <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2008.113>
8. Богатырева В.В., Дмитриев А.Л. Оптические методы обработки информации. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009. 74 с.

9. Акаев А.А., Майоров С.А. Оптические методы обработки информации: репринтное воспроизведение издания 1988 года. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2005. 259 с.
10. Pyramid methods in image processing / E.H. Adelson [et al.] // *Computer Science*. 1988. P. 33–41.
11. Бессмельцев В.П., Булушев Е.Д., Быстрый алгоритм совмещения изображений для контроля качества лазерной микрообработки // *Компьютерная оптика*. 2014. Т. 38, № 2. С. 343–350.
12. Lucas B.D., Kanade T. An iterative image registration technique with an application to stereo vision // *Proceedings of the 7th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI, Vancouver, Canada, 24–28 August 1981)*. 1981. P. 121–130.
13. Мачнев А.М., Жук С.Я. Беспойсковый алгоритм определения угла поворота изображений // *Вісник Національного технічного університету України «КПІ»*. 2008. № 37. С. 33–37.
14. Lowe D.G. Distinctive image features from scale-invariant keypoints // *International Journal Computer Vision*. 2004. Vol. 60, no. 2. P. 91–110. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:VISI.0000029664.99615.94>
15. Applicability of the SIFT operator to geometric SAR image registration / P. Schwind [et al.] // *International Journal Remote Sens*. 2010. Vol. 31, no. 8. P. 1959–1980. DOI: <https://doi.org/10.1080/01431160902927622>
16. SURF: Speeded up robust features / H. Bay [et al.] // *Computer Vision and Image Understanding*. 2008. Vol. 110, no. 3. P. 346–359. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cviu.2007.09.014>

## References

1. Sungatullina D.I. Fast algorithm for combining edges of images connected by isotropic affine transform. *Grafikon 2014*, 2014, pp. 92–95. (In Russ.)
2. Efimov A.I. Development and Research of Algorithms for Combining Images from On-Board Video Sensors with a Virtual Terrain Model: Diss. ... Cand. Techn. Sciences. Rjazan': Izdatel'stvo Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta, 2016, 172 p. (In Russ.)
3. Efimov A.I., Novikov A.I. Algorithm for step-by-step refinement of the projective transformation for image alignment. *Komp'yuternaja optika*, 2016, vol. 40, no. 2, pp. 258–265. DOI: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-2016-40-2-258-265> (In Russ.)
4. Mjasnikov E.V. Determination of parameters of geometric transformations for combining portrait images. *Komp'yuternaja optika*, 2007, vol. 31, no. 3, pp. 77–82. (In Russ.)
5. Reddy B., Chatterji B. An FFT-based technique for translation, rotation, and scale-invariant image registration. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1996, vol. 5, no. 27, pp. 1266–1271. DOI: <https://doi.org/10.1109/83.506761>
6. Alba A. et al. Phase correlation based image alignment with subpixel accuracy. *11th Mexican International Conference on Artificial Intelligence (MICA I 2012)*. 2012. Vol. 7629, pp. 171–182. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-37807-2\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-642-37807-2_15)
7. Evangelidis G., Psarakis E. Parametric image alignment using enhanced correlation coefficient maximization. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2008, vol. 30, no. 27, pp. 1858–1865. DOI: <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2008.113>
8. Bogatyreva V.V., Dmitriev A.L. *Optical Methods of Information Processing*. Saint Petersburg: SPbGU ITMO, 2009, 74 p. (In Russ.)
9. Akaev A.A., Majorov S.A. *Optical Methods of Information Processing: Reprint Reproduction of the 1988 Edition*. Saint Petersburg: SPbGU ITMO, 2005, 259 p. (In Russ.)
10. Adelson E.H. et al. Pyramid methods in image processing. *Computer Science*, 1988, pp. 33–41.
11. Bessmel'tsev V.P., Bulushev E.D. Fast image algorithm for quality control of laser micromachining. *Komp'yuternaja optika*, 2014, vol. 38, no. 2, pp. 343–350. (In Russ.)
12. Lucas B.D., Kanade T. An iterative image registration technique with an application to stereo vision. *Proceedings of the 7th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI, Vancouver, Canada, 24–28 August 1981)*, 1981, pp. 121–130.
13. Machnev A.M., Zhuk S.Ya. Searchless algorithm for determining the angle of rotation of images. *Visnik Natsional'nogo tehnicnogo universitetu Ukraїni «KPI»*, 2008, no. 37, pp. 33–37. (In Russ.)
14. Lowe D.G. Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *International Journal Computer Vision*, 2004, vol. 60, no. 2, pp. 91–110. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:VISI.0000029664.99615.94>
15. Schwind P. et al. Applicability of the SIFT operator to geometric SAR image registration. *International Journal Remote Sens*, 2010, vol. 31, no. 8, pp. 1959–1980. DOI: <https://doi.org/10.1080/01431160902927622>
16. Bay H. et al. SURF: Speeded up robust features. *Computer Vision and Image Understanding*, 2008, vol. 110, no. 3, pp. 346–359. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cviu.2007.09.014>

---

## Physics of Wave Processes and Radio Systems 2022, vol. 25, no. 1, pp. 36–44

DOI 10.18469/1810-3189.2022.25.1.36-44

Received 1 October 2021  
Accepted 1 November 2021

### Iterative algorithm for offsets, scale and rotate estimation for television image superposition with additive and multiplicative noise

Rinat R. Diyazitdinov 

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics  
23, L. Tolstoy Street,  
Samara, 443010, Russia

*Abstract* – We describe the iterative algorithm for television image superposition. The superposition is defined by offsets, scale, and rotates. Also additive and multiplicative noise influences the image. The main aim of developing this algorithm is to reduce the time of processing images for estimation superposition parameters. Reducing processing time is provided by reducing the set of reference points, which defines the superposition. The initial coordinate of the reference points is refined at the process of the algorithm work for acceptable superposition of the television images. The superposition parameters are divided into two groups. Offsets belong to the first group, scale and rotate belong to the second group. The parameters in each group are estimated independently. The iterative procedure uses the offsets for estimation scale and rotate, and after it uses scale and rotates for estimation of the offsets. This process is repeated. The next iteration approximates the rate to the real value of the superposition parameters. The developed algorithm allows reducing processing time at 25 times faster than the brute force algorithm for the test data. The test data include two images; the first image has the resolution  $288 \times 384$  pixels, the second image has the resolution  $128 \times 128$  pixels. The second image is the fragment of the first image. Also at the end of the article, the numerical simulation had been presented. The simulation shows the dependences of error estimation of parameters from the noise power.

*Keywords* – superposition; image; iterative; offsets; scale; rotate; additive; multiplicative.

## Информация об авторе

Диязитдинов Ринат Радмирович, кандидат технических наук, доцент кафедры сетей и систем связи Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* обработка изображений, компьютерная оптика, триангуляционные системы.

*E-mail:* rinat.diyazitdinov@gmail.com

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0001-6360-0351>

## Information about the Author

Rinat R. Diyazitdinov, Candidate of Technical Sciences, associate professor of the Department of Networks and Communication Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

*Research interests:* image processing, computer optics, triangulation system.

*E-mail:* rinat.diyazitdinov@gmail.com

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0001-6360-0351>

Неганов, В.А.

**Теория и применение устройств СВЧ: учебн. пособие для вузов / В.А. Неганов, Г.П. Яровой; под ред. В.А. Неганова.** – М.: Радио и связь, 2006. – 720 с.



ISBN 5-256-01812-4

УДК 621.396.67

ББК 32.840

Н 41

В учебном пособии рассматриваются методы проектирования и конструктивной реализации устройств СВЧ: линий передачи различных видов, резонаторов, согласующих и трансформирующих устройств, фильтров, фазовращателей, аттенюаторов, тройниковых соединений, направленных ответвителей, различных мостовых соединений, ферритовых устройств (вентилей, циркуляторов, фазовращателей) и СВЧ-устройств на полупроводниковых диодах (умножителей, смесителей, переключателей, выключателей). Приводятся примеры применения устройств СВЧ в радиосвязи, радиолокации, измерительной аппаратуре и т. д. В книгу вошел оригинальный материал, полученный авторами. Учебное пособие может использоваться как справочник по устройствам СВЧ.

*Для специалистов в области теории и техники СВЧ, преподавателей вузов, докторантов, аспирантов, студентов старших курсов радиотехнического и радиофизического профиля.*

## Алгоритм параметрического синтеза каскадно-включенных согласующих смешанных четырехполюсников по критерию обеспечения стационарного режима генерации

А.А. Головков, В.А. Головков

ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»  
394064, Россия, г. Воронеж,  
ул. Старых Большевиков, 54а

**Аннотация** – **Введение:** анализ известной литературы показывает, что использование различных типов четырехполюсников (реактивных, резистивных, комплексных) позволяет увеличить область физической реализуемости стационарного режима генерации. **Цель работы:** увеличение области физической реализуемости стационарного режима генерации за счет оптимизации параметров согласующих смешанных четырехполюсников. Одна часть таких четырехполюсников состоит только из резистивных элементов, а вторая – только из реактивных элементов. **Материалы и методы:** теория четырехполюсников, матричная алгебра, метод декомпозиции, метод синтеза управляющих устройств СВЧ, иммитансный критерий устойчивости. **Результаты:** получены математические модели согласующих смешанных четырехполюсников в виде взаимосвязей между элементами их матрицы передачи и зависимостей сопротивлений их двухполюсников от частоты, оптимальных по критерию обеспечения стационарного режима генерации. **Заключение:** сравнительный анализ теоретических результатов (АЧХ и ФЧХ автогенератора в режиме усиления), полученных путем математического моделирования в системе MathCad, и экспериментальных результатов, полученных путем схемотехнического моделирования в системах OrCad (в режиме усиления) и MicroCap (в режиме генерации), показывает их удовлетворительное совпадение. АЧХ и ФЧХ в режиме усиления подобны амплитудному и фазовому спектрам формируемых колебаний в режиме генерации.

**Ключевые слова** – иммитансный критерий устойчивости; стационарный режим генерации; параметрический синтез согласующих смешанных четырехполюсников.

### Введение

В работах [1–4] разработаны алгоритмы параметрического синтеза согласующих реактивных, резистивных и комплексных типовых четырехполюсников, оптимальных по критерию обеспечения заданных характеристик различных радиотехнических устройств и систем, в том числе и автогенераторов. Двухполюсники первого типа четырехполюсников построены только на реактивном базисе, двухполюсники второго типа четырехполюсников – только на резистивном базисе, а двухполюсники третьего типа – на базисе  $R, L, C$ . Показано, что изменение базиса согласующих по заданному критерию четырехполюсников изменяет область физической реализуемости выбранного критерия в пространстве исходных данных (полоса, частот, тип нелинейного элемента и нагрузки, величина и крутизна квазилинейного участка выбранной характеристики и т. д.). Поэтому интереса увеличения области физической реализуемости стационарного режима генерации автогенераторов в данной работе делается попытка разработки алгоритма параметрического синтеза согласующих смешанных четырехполюсников (ССЧ), одна часть двухполюсников которых вы-

полнена только на резистивных элементах, а вторая часть – только на реактивных элементах.

### 1. Параметрический синтез автогенераторов с вариантом расположения нелинейной части между согласующим смешанным четырехполюсником и нагрузкой

Сформируем структурные схемы, содержащие нелинейную часть (НЧ) в виде цепи прямой передачи (ЦПП) и цепи обратной связи (ЦОС), а также ССЧ, выходные сопротивления предыдущего каскада  $z_0 = r_0 + jx_0$  и сопротивления нагрузки  $z_n = r_n + jx_n$  (рис. 1). При выборе типовых схем четырехполюсников для ЦОС обязательно надо применять принцип регулярности [5].

Для определения минимального количества и значений параметров ССЧ, при которых обеспечивается стационарный режим генерации, запишем иммитансный критерий устойчивости [6] в виде равенства нулю суммы выходного и входного сопротивлений [1] в выбранном сечении между ССЧ и НЧ:

$$Z_{\text{вых}} + Z_{\text{вх}} = 0, \quad (1)$$

где

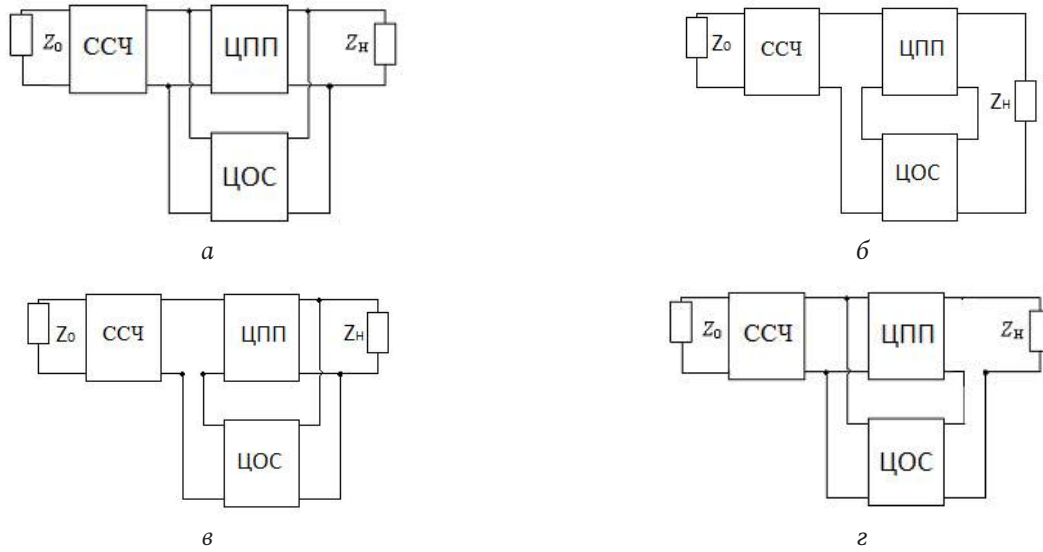


Рис. 1. Структурные схемы высокочастотных частей исследуемых автогенераторов с параллельной по напряжению (а), последовательной по току (б), последовательной по напряжению (в), параллельной по току (г) цепями обратной связи и цепью прямой передачи, включенными между ССЧ и нагрузкой

Fig. 1. Structural diagrams of the high-frequency parts of the oscillators under study with parallel voltage (a), series current (b), series voltage (c), parallel current (d) feedback circuits and a direct transmission circuit connected between the SFS and the load

$$Z_{\text{ВЫХ}} = \frac{d_1 z_0 + b_1}{c_1 z_0 + a_1}$$

– выходное сопротивление ССЧ;

$$Z_{\text{ВХ}} = \frac{a_2 z_{\text{Н}} + b_2}{c_2 z_{\text{Н}} + d_2}$$

– входное сопротивление НЧ;  $a_1, b_1, c_1, d_1$  – элементы классической матрицы передачи ССЧ,  $a_2, b_2, c_2, d_2$  – элементы классической матрицы передачи НЧ.

Левая часть уравнения (1) идентична знаменателю передаточной функции (коэффициента усиления усилителя с положительной обратной связью) автогенератора в режиме усиления (до начала стационарного режима генерации). Поэтому уравнение (1) можно считать характеристическим уравнением [7] рассматриваемых схем автогенераторов. Уравнение (1) можно также записать в виде взаимосвязи между элементами классической матрицы передачи ССЧ:

$$a_1 = - \left( \frac{1}{Z_{\text{ВХ}}} b_1 + z_0 c_1 + \frac{z_0}{Z_{\text{ВХ}}} d_1 \right). \quad (2)$$

Первый вариант исследуемых автогенераторов с параллельной по напряжению ЦОС (рис. 1, а) на практике применяется наиболее часто. В этом случае:

$$Z_{\text{ВХ}} = \frac{1 - Y_{22} z_{\text{Н}}}{Y_{11} - z_{\text{Н}} |Y|} = \frac{g_{2\text{Н}} + j b_{2\text{Н}}}{g_{1\text{Н}} + j b_{1\text{Н}}} = \frac{g_{1\text{Н}} g_{2\text{Н}} + b_{1\text{Н}} b_{2\text{Н}}}{g_{1\text{Н}}^2 + b_{1\text{Н}}^2} + j \frac{g_{1\text{Н}} b_{2\text{Н}} - b_{1\text{Н}} g_{2\text{Н}}}{g_{1\text{Н}}^2 + b_{1\text{Н}}^2} = r_{\text{ВХ}} + j x_{\text{ВХ}}, \quad (3)$$

где

$$r_{\text{ВХ}} < 0;$$

$$g_{1\text{Н}} =$$

$$= g_{11} + r_{\text{Н}} (b_{11} b_{22} + g_{12} g_{21} - b_{12} b_{21} - g_{11} g_{22}) +$$

$$+ x_{\text{Н}} (g_{22} b_{11} + b_{22} g_{11} - b_{12} g_{21} - b_{21} g_{12});$$

$$g_{2\text{Н}} = 1 - g_{22} r_{\text{Н}} + b_{22} x_{\text{Н}};$$

$$b_{1\text{Н}} = b_{11} + r_{\text{Н}} (b_{12} g_{21} + g_{12} b_{21} - b_{11} g_{22} - g_{11} b_{22}) +$$

$$+ x_{\text{Н}} (b_{11} b_{22} + g_{12} g_{21} - g_{11} g_{22} - b_{12} b_{21});$$

$$b_{2\text{Н}} = -(g_{22} x_{\text{Н}} + b_{22} r_{\text{Н}}); \quad Y_{11} = g_{11} + j b_{11};$$

$$Y_{12} = g_{12} + j b_{12}; \quad Y_{21} = g_{21} + j b_{21};$$

$$Y_{22} = g_{22} + j b_{22};$$

$$Y_{11} = y_{11}^{\text{НЭ}} + y_{11}^{\text{ОС}}, \quad Y_{12} = y_{12}^{\text{НЭ}} + y_{12}^{\text{ОС}}, \quad Y_{21} = y_{21}^{\text{НЭ}} + y_{21}^{\text{ОС}},$$

$$Y_{22} = y_{22}^{\text{НЭ}} + y_{22}^{\text{ОС}} - \text{суммарные элементы матриц проводимостей ЦПП и ЦОС}; \quad |Y| = Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}.$$

Для второго варианта исследуемых автогенераторов (рис. 1, б):

$$Z_{\text{ВХ}} = \frac{Z_{11} z_{\text{Н}} - |Z|}{z_{\text{Н}} - Z_{22}} = \frac{g_{2\text{Н}} + j b_{2\text{Н}}}{g_{1\text{Н}} + j b_{1\text{Н}}} = r_{\text{ВХ}} + j x_{\text{ВХ}}, \quad (4)$$

где

$$g_{1\text{Н}} = r_{\text{Н}} - r_{22}; \quad b_{1\text{Н}} = x_{\text{Н}} - x_{22};$$

$$g_{2\text{Н}} = r_{12} r_{21} - r_{11} r_{22} + r_{11} r_{\text{Н}} +$$

$$+ x_{11} x_{22} - x_{12} x_{21} - x_{11} x_{\text{Н}};$$

$$Z_{11} = r_{11} + j x_{11}; \quad Z_{12} = r_{12} + j x_{12};$$

$$Z_{21} = r_{21} + j x_{21}; \quad Z_{22} = r_{22} + j x_{22};$$

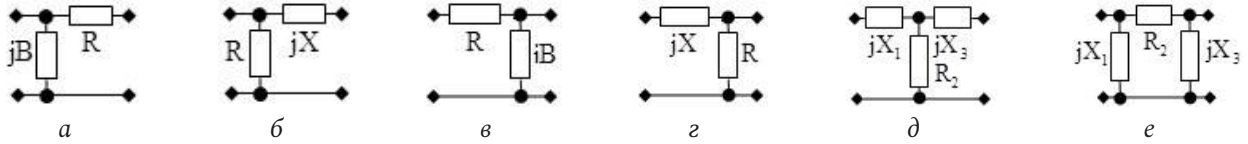


Рис. 2. Примеры синтезированных ССЧ  
 Fig. 2. Examples of synthesized SFSS

$$b_{2H} = r_{12}x_{21} - r_{11}x_{22} + x_{12}r_{21} - x_{11}r_{22} + r_{11}x_H + x_{11}r_H;$$

$$Z_{11} = z_{11}^{H\Theta} + z_{11}^{OC}, \quad Z_{12} = z_{12}^{H\Theta} + z_{12}^{OC}, \quad Z_{21} = z_{21}^{H\Theta} + z_{21}^{OC},$$

$$Z_{22} = z_{22}^{H\Theta} + z_{22}^{OC} - \text{суммарные элементы матриц сопротивлений ЦПП и ЦОС; } |Z| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}.$$

Для третьего варианта исследуемых автогенераторов (рис. 1, в):

$$Z_{Bx} = \frac{H_{11} - z_H |H|}{1 - z_H H_{22}} = \frac{g_{2H} + jb_{2H}}{g_{1H} + jb_{1H}} = r_{Bx} + jx_{Bx}; \quad (5)$$

где

$$g_{1H} = 1 + n_{22}x_H - t_{22}r_H; \quad b_{1H} = -(n_{22}r_H + t_{22}x_H);$$

$$|H| = H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}; \quad H_{11} = t_{11} + jn_{11};$$

$$H_{12} = t_{12} + jn_{12}; \quad H_{21} = t_{21} + jn_{21}; \quad H_{22} = t_{22} + jn_{22};$$

$$g_{2H} = r_H(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21} - t_{11}t_{22} + t_{12}t_{21}) + t_{11} + x_H(n_{11}t_{22} - n_{12}t_{21} - n_{21}t_{12} + n_{22}t_{11});$$

$$b_{2H} = x_H(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21} - t_{11}t_{22} + t_{12}t_{21}) + n_{11} - r_H(n_{11}t_{22} - n_{12}t_{21} - n_{21}t_{12} + n_{22}t_{11});$$

$$H_{11} = h_{11}^{H\Theta} + h_{11}^{OC}, \quad H_{12} = h_{12}^{H\Theta} + h_{12}^{OC}, \quad H_{21} = h_{21}^{H\Theta} + h_{21}^{OC},$$

$$H_{22} = h_{22}^{H\Theta} + h_{22}^{OC} - \text{суммарные элементы смешанных матриц } H \text{ для ЦПП и ЦОС.}$$

Для четвертого варианта исследуемых автогенераторов (рис. 1, г):

$$Z_{Bx} = \frac{z_H - F_{22}}{F_{11}z_H - |F|} = \frac{g_{2H} + jb_{2H}}{g_{1H} + jb_{1H}} = r_{Bx} + jx_{Bx}; \quad (6)$$

где

$$g_{2H} = r_H - \tau_{22}; \quad b_{2H} = x_H - v_{22};$$

$$g_{1H} = \tau_{11}r_H + v_{11}v_{22} + \tau_{12}\tau_{21} - v_{12}v_{21} - \tau_{11}\tau_{22} - v_{11}x_H;$$

$$F_{11} = \tau_{11} + jv_{11}; \quad F_{12} = \tau_{12} + jv_{12};$$

$$b_{1H} = v_{11}r_H + v_{12}\tau_{21} + \tau_{12}v_{21} - v_{11}\tau_{22} - \tau_{11}v_{22} + \tau_{11}x_H;$$

$$F_{21} = \tau_{21} + jv_{21}; \quad F_{22} = \tau_{22} + jv_{22};$$

$$F_{11} = f_{11}^{H\Theta} + f_{11}^{OC}, \quad F_{12} = f_{12}^{H\Theta} + f_{12}^{OC}, \quad F_{21} = f_{21}^{H\Theta} + f_{21}^{OC},$$

$$F_{22} = f_{22}^{H\Theta} + f_{22}^{OC} - \text{суммарные элементы смешанных матриц } F \text{ ЦПП и ЦОС; } |F| = F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}.$$

Для отыскания выражений для определения параметров типовых схем ССЧ необходимо взять известные формулы для элементов  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $d_1$  [1; 8], выраженные через проводимости или сопротивления двухполюсников, подставить их и  $Z_{Bx}$  из (3), (4), (5) или (6) в (1) или (2). Затем надо разделить между собой действительную и мнимую части полученного комплексного характеристического уравнения и решить сформированную систему двух алгебраических действительных уравнений относительно сопротивлений или проводимостей двух двухполюсников выбранной типовой схемы ССЧ. Здесь в качестве примера приводятся некоторые из решений, полученных для структурных схем, показанных на рис. 1, а, при использовании типовых схем ССЧ (рис. 2). На этом рисунке:  $B$  и  $X$  – реактивные проводимости и сопротивления двухполюсников;  $R$  – резистивные сопротивления двухполюсников. При использовании ССЧ в виде Г-образного соединения (рис. 2, а) эти параметры определяются следующим образом:

$$R = \frac{-(r_0^2 + x_0^2 + 2r_0r_{Bx}) + Q}{2r_0};$$

$$B = \frac{r_0^2 + x_0^2 + 2x_0x_{Bx} + Q}{2x_{Bx}(r_0^2 + x_0^2)}; \quad (7)$$

$$Q = \pm \sqrt{(r_0^2 + x_0^2)^2 - 4r_0^2x_{Bx}^2}.$$

Если в формулах типа (7)  $B > 0$ , то здесь и далее реактивный двухполюсник реализуется емкостью  $C = B/\omega$  ( $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  – частота), а если  $B < 0$ , то индуктивностью  $L = -1/B\omega$ . Поэтому минимальное количество элементов ССЧ равно двум. Однако реактивный двухполюсник может быть выполнен сколь угодно сложным. При использовании ССЧ в виде второго Г-образного соединения (рис. 2, б) можно получить, что:

$$R = \frac{-(r_0^2 + x_0^2 + 2r_0r_{Bx}) + Q}{2(r_0 + r_{Bx})};$$

$$X = \frac{-(r_0^2 + x_0^2 + 2x_0x_{Bx}) + Q}{2x_0}; \quad (8)$$

$$Q = \pm \sqrt{(r_0^2 + x_0^2)^2 - 4x_0^2r_{Bx}^2}.$$



Если в формулах типа (8)  $X < 0$ , то здесь и далее реактивный двухполюсник реализуется емкостью  $C = -1/X\omega$ , а если  $X > 0$ , то индуктивностью  $L = X/\omega$ .

При использовании ССЧ в виде обратного Г-образного звена (рис. 2, в):

$$\begin{aligned} R &= \frac{-(r_{\text{BX}}^2 + x_{\text{BX}}^2 + 2r_0 r_{\text{BX}}) + Q}{2r_{\text{BX}}}; \\ B &= \frac{r_{\text{BX}}^2 + x_{\text{BX}}^2 + 2x_0 x_{\text{BX}} + Q}{2x_0(r_{\text{BX}}^2 + x_{\text{BX}}^2)}; \\ Q &= \pm \sqrt{(r_{\text{BX}}^2 + x_{\text{BX}}^2)^2 - 4x_0^2 r_{\text{BX}}^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

При использовании ССЧ в виде второго обратного Г-образного звена (рис. 2, з):

$$\begin{aligned} R &= \frac{-(r_{\text{BX}}^2 + x_{\text{BX}}^2 + 2r_0 r_{\text{BX}}) + Q}{2(r_0 + r_{\text{BX}})}; \\ X &= \frac{-(r_{\text{BX}}^2 + x_{\text{BX}}^2 + 2x_0 x_{\text{BX}}) + Q}{2x_{\text{BX}}}; \\ Q &= \pm \sqrt{(r_{\text{BX}}^2 + x_{\text{BX}}^2)^2 - 4r_0^2 x_{\text{BX}}^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

При использовании ССЧ в виде Т-образного соединения возможны три решения (рис. 2, д):

$$\begin{aligned} X_1 &= \left( -\frac{R_2 + r_0}{R_2 + r_{\text{BX}}} \right) Q_1 - x_0; \quad X_3 = Q_1 - x_{\text{BX}}; \\ Q_1 &= \pm \sqrt{\frac{(R_2 + r_{\text{BX}})[(R_2 + r_0)r_{\text{BX}} + R_2 r_0]}{R_2 + r_0}}; \\ X_1 &= \frac{-[(X_3 + x_{\text{BX}})^2 + 2x_0(X_3 + x_{\text{BX}}) + r_{\text{BX}}^2] + Q_2}{2(X_3 + x_{\text{BX}})}; \\ R_2 &= \frac{-[(X_3 + x_{\text{BX}})^2 + r_{\text{BX}}(2r_0 + r_{\text{BX}})] + Q_2}{2(r_0 + r_{\text{BX}})}; \\ Q_2 &= \pm \sqrt{[(X_3 + x_{\text{BX}})^2 + r_{\text{BX}}^2]^2 - [2r_0(X_3 + x_{\text{BX}})]^2}; \\ X_3 &= \frac{-[(X_1 + x_0)^2 + 2x_{\text{BX}}(X_1 + x_0) + r_0^2] + Q_3}{2(X_1 + x_0)}; \\ R_2 &= \frac{-[(X_1 + x_0)^2 + r_0(r_0 + 2r_{\text{BX}})] + Q_3}{2(r_0 + r_{\text{BX}})}; \\ Q_3 &= \pm \sqrt{[(X_1 + x_0)^2 + r_0^2]^2 - [2r_{\text{BX}}(X_1 + x_0)]^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Три решения для варианта использования ССЧ в виде П-образного соединения (рис. 2, е):

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{R_2 x_0 (r_{\text{BX}}^2 + R_2 r_{\text{BX}} + x_{\text{BX}}^2) + Q}{(R_2 + r_0)(r_{\text{BX}}^2 + x_{\text{BX}}^2) + r_{\text{BX}}[(R_2 + r_0)^2 + x_0^2]}; \\ X_3 &= -\frac{R_2 x_{\text{BX}} (r_0^2 + R_2 r_0 + x_0^2) + Q}{(R_2 + r_{\text{BX}})(r_0^2 + x_0^2) + r_0[(R_2 + r_{\text{BX}})^2 + x_{\text{BX}}^2]}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} Q &= \pm \sqrt{-R_2(r_0^2 + R_2 r_0 + x_0^2)(r_{\text{BX}}^2 + R_2 r_{\text{BX}} + x_{\text{BX}}^2) \times} \\ &\times [r_{\text{BX}}(r_0^2 + R_2 r_0 + x_0^2) + r_0(r_{\text{BX}}^2 + x_{\text{BX}}^2)]; \\ X_1 &= \left( -\{(r_0^2 + x_0^2)[(X_3 + x_{\text{BX}})^2 + r_{\text{BX}}^2] + \right. \\ &+ 2x_0[X_3^2 x_{\text{BX}} + X_3(r_{\text{BX}}^2 + x_{\text{BX}}^2)]\} + Q) / \\ &/ \left( 2\{x_0[(X_3 + x_{\text{BX}})^2 + r_{\text{BX}}^2] + x_{\text{BX}} X_3^2 + \right. \\ &+ X_3(r_{\text{BX}}^2 + x_{\text{BX}}^2)\} \}; \\ R_2 &= \frac{-\{(r_0^2 + x_0^2)[(X_3 + x_{\text{BX}})^2 + r_{\text{BX}}^2] + 2r_0 r_{\text{BX}} X_3^2\} + Q}{2r_0[(X_3 + x_{\text{BX}})^2 + r_{\text{BX}}^2]}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= \pm \sqrt{(r_0^2 + x_0^2)[(X_3 + x_{\text{BX}})^2 + r_{\text{BX}}^2]^2 -} \\ &- [2r_0 X_3(r_{\text{BX}}^2 + x_{\text{BX}}^2 + X_3 x_{\text{BX}})]^2}; \\ X_3 &= \left( -\{(r_{\text{BX}}^2 + x_{\text{BX}}^2)[(X_1 + x_0)^2 + r_0^2] + \right. \\ &+ 2x_{\text{BX}} X_1[x_0 X_1 + r_0^2 + x_0^2]\} + Q) / \\ &/ \left( 2\{x_{\text{BX}}[(X_1 + x_0)^2 + r_0^2] + \right. \\ &+ x_0 X_1^2 + X_1(r_0^2 + x_0^2)\} \}; \\ R_2 &= \frac{-\{(r_{\text{BX}}^2 + x_{\text{BX}}^2)[(X_1 + x_0)^2 + r_0^2] + 2r_0 r_{\text{BX}} X_1^2\} + Q}{2r_{\text{BX}}[(X_1 + x_0)^2 + r_0^2]}; \\ Q &= \pm \sqrt{(r_{\text{BX}}^2 + x_{\text{BX}}^2)[(X_1 + x_0)^2 + r_0^2]^2 -} \\ &- [2r_{\text{BX}} X_1(r_0^2 + x_0^2 + X_1 x_0)]^2}. \end{aligned}$$

## 2. Параметрический синтез автогенераторов с вариантом расположения согласующего смешанного четырехполюсника между нелинейной частью и нагрузкой

Для группы схем, показанных на рис. 3, характеристическое уравнение (1) удобно записать для сечения между НЧ и ССЧ. Поэтому в этом уравнении  $Z_{\text{ВЫХ}}$  – это выходное сопротивление НЧ;  $Z_{\text{ВХ}}$  – входное сопротивление ССЧ:

$$Z_{\text{ВЫХ}} = \frac{d_2 z_0 + b_2}{c_2 z_0 + a_2}; \quad Z_{\text{ВХ}} = \frac{a_1 z_{\text{Н}} + b_1}{c_1 z_{\text{Н}} + d_1}. \quad (13)$$

Поэтому (1) с учетом (13) можно представить в виде следующей взаимосвязи между элементами классической матрицы передачи ССЧ:

$$d_1 = -\left( \frac{z_{\text{Н}}}{Z_{\text{ВЫХ}}} a_1 + \frac{1}{Z_{\text{ВЫХ}}} b_1 + z_{\text{Н}} c_1 \right). \quad (14)$$

Сравнение (2) и (14) показывает, что эти взаимосвязи между элементами  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $d_1$  транс-

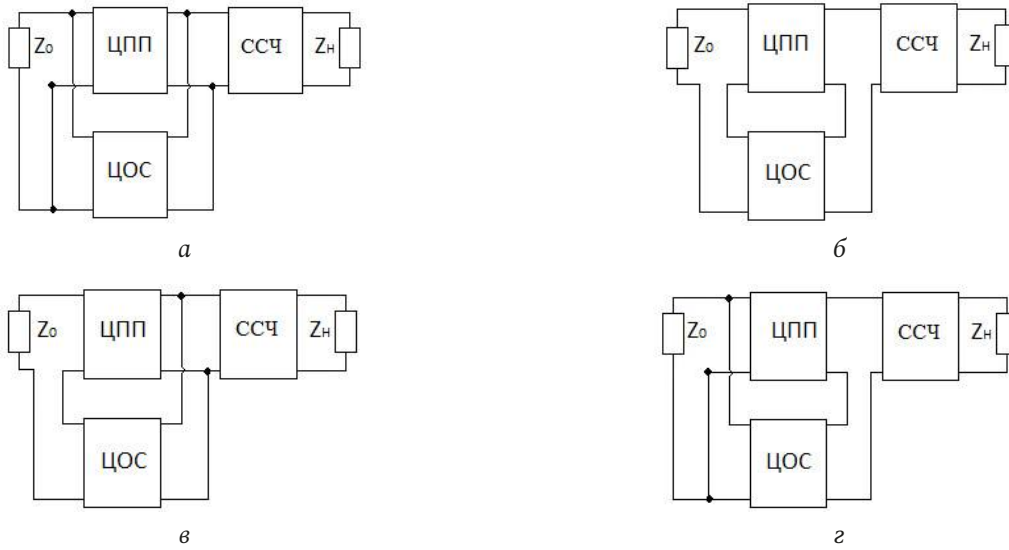


Рис. 3. Структурные схемы высокочастотных частей исследуемых автогенераторов с параллельной по напряжению (а), последовательной по току (б), последовательной по напряжению (в), параллельной по току (г) цепями обратной связи и СФЧ, расположенным между нелинейной частью и нагрузкой

Fig. 3. Structural diagrams of the high-frequency parts of the oscillators under study with parallel voltage (a), series current (b), series voltage (c), parallel current (d) feedback circuits and SFS located between the nonlinear part and the load

формируются одна в другую путем использования следующих перестановок  $a_1 \leftrightarrow d_1$ ;  $z_0 \leftrightarrow z_n$ ;  $Z_{\text{вх}} \leftrightarrow Z_{\text{вых}}$ .

Выходное сопротивление НЧ для варианта автогенератора с параллельной по напряжению ЦОС (рис. 3, а):

$$Z_{\text{вых}} = \frac{1 + Y_{11}z_0}{-(Y_{22} + z_0|Y|)} = \frac{g_{10} + jb_{10}}{g_{20} + jb_{20}} = r_{\text{вых}} + jx_{\text{вых}}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} r_{\text{вых}} &< 0; \quad g_{10} = 1 + g_{11}r_0 - b_{11}x_0; \\ g_{20} &= -g_{22} + r_0(b_{11}b_{22} + g_{12}g_{21} - b_{12}b_{21} - g_{11}g_{22}) + \\ &+ x_0(g_{22}b_{11} + b_{22}g_{11} - b_{12}g_{21} - b_{21}g_{12}); \\ b_{10} &= g_{11}x_0 + b_{11}r_0; \\ b_{20} &= -b_{22} + r_0(b_{12}g_{21} + g_{12}b_{21} - b_{11}g_{22} - g_{11}b_{22}) + \\ &+ x_0(b_{11}b_{22} + g_{12}g_{21} - g_{11}g_{22} - b_{12}b_{21}). \end{aligned}$$

Для варианта автогенератора с последовательной по току ЦОС (рис. 3, б):

$$Z_{\text{вых}} = \frac{-(Z_{22}z_0 + |Z|)}{Z_{11} + z_0} = \frac{g_{10} + jb_{10}}{g_{20} + jb_{20}} = r_{\text{вых}} + jx_{\text{вых}}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} g_{10} &= r_{12}r_{21} - r_{11}r_{22} + x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} + x_{22}x_0 - r_{22}r_0; \\ g_{20} &= r_{11} + r_0; \\ b_{10} &= r_{12}x_{21} + x_{12}r_{21} - r_{11}x_{22} - x_{11}r_{22} - x_{22}r_0 - r_{22}x_0; \\ b_{20} &= x_{11} + x_0. \end{aligned}$$

Для варианта автогенератора с последовательной по напряжению ЦОС (рис. 3, в):

$$Z_{\text{вых}} = \frac{H_{11} + z_0}{-(H_{22}z_0 + |H|)} = \frac{g_{10} + jb_{10}}{g_{20} + jb_{20}} = r_{\text{вых}} + jx_{\text{вых}}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} g_{10} &= t_{11} + r_0; \\ g_{20} &= t_{12}t_{21} - t_{11}t_{22} + n_{11}n_{22} - \\ &- n_{12}n_{21} + n_{22}x_0 - t_{22}r_0; \\ b_{10} &= n_{11} + x_0; \\ b_{20} &= t_{12}n_{21} + n_{12}t_{21} - t_{11}n_{22} - \\ &- n_{11}t_{22} - n_{22}r_0 - t_{22}x_0. \end{aligned}$$

Для варианта автогенератора с параллельной по току ЦОС (рис. 3, г):

$$Z_{\text{вых}} = \frac{-(F_{22} + z_0|F|)}{F_{11}z_0 + 1} = \frac{g_{10} + jb_{10}}{g_{20} + jb_{20}} = r_{\text{вых}} + jx_{\text{вых}}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} g_{20} &= 1 + \tau_{11}r_0 - v_{11}x_0; \\ g_{10} &= -\tau_{22} + r_0(v_{11}v_{22} + \tau_{12}\tau_{21} - v_{12}v_{21} - \tau_{11}\tau_{22}) + \\ &+ x_0(\tau_{22}v_{11} + v_{22}\tau_{11} - v_{12}\tau_{21} - v_{21}\tau_{12}); \\ b_{20} &= \tau_{11}x_0 + v_{11}r_0; \\ b_{10} &= -v_{22} + r_0(v_{12}\tau_{21} + \tau_{12}v_{21} - v_{11}\tau_{22} - \tau_{11}v_{22}) + \\ &+ x_0(v_{11}v_{22} + \tau_{12}\tau_{21} - \tau_{11}\tau_{22} - v_{12}v_{21}). \end{aligned}$$

Для отыскания выражений для определения параметров типовых схем СФЧ необходимо взять известные формулы для элементов  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $d_1$  [1; 8], выраженные через проводимости или сопротивления двухполюсников, подставить их и  $Z_{\text{вых}}$  из (15), (16), (17) или (18) в (14). Здесь в каче-

стве примера приводятся некоторые из решений, полученных для структурной схемы, показанной на рис. 3, а, при использовании типовых схем ССЧ (рис. 2). Если используется ССЧ в виде Г-образного соединения (рис. 2, а), то его параметры определяются по формулам:

$$\begin{aligned} R &= \frac{-(r_{\text{ВЫХ}}^2 + x_{\text{ВЫХ}}^2 + 2r_{\text{ВЫХ}}r_{\text{Н}}) + Q}{2r_{\text{ВЫХ}}}; \\ B &= \frac{r_{\text{ВЫХ}}^2 + x_{\text{ВЫХ}}^2 + 2x_{\text{ВЫХ}}x_{\text{Н}} + Q}{2x_{\text{Н}}(r_{\text{ВЫХ}}^2 + x_{\text{ВЫХ}}^2)}; \\ Q &= \pm \sqrt{(r_{\text{ВЫХ}}^2 + x_{\text{ВЫХ}}^2)^2 - 4r_{\text{ВЫХ}}^2x_{\text{Н}}^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

При использовании ССЧ в виде Г-образного соединения (рис. 2, б):

$$\begin{aligned} R &= \frac{-(r_{\text{ВЫХ}}^2 + x_{\text{ВЫХ}}^2 + 2r_{\text{ВЫХ}}r_{\text{Н}}) + Q}{2(r_{\text{ВЫХ}} + r_{\text{Н}})}; \\ X &= \frac{-(r_{\text{ВЫХ}}^2 + x_{\text{ВЫХ}}^2 + 2x_{\text{ВЫХ}}x_{\text{Н}}) + Q}{2x_{\text{ВЫХ}}}; \\ Q &= \pm \sqrt{(r_{\text{ВЫХ}}^2 + x_{\text{ВЫХ}}^2)^2 - 4x_{\text{ВЫХ}}^2r_{\text{Н}}^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

При использовании ССЧ в виде обратного Г-образного соединения (рис. 2, в):

$$\begin{aligned} R &= \frac{-(r_{\text{Н}}^2 + x_{\text{Н}}^2 + 2r_{\text{ВЫХ}}r_{\text{Н}}) + Q}{2r_{\text{Н}}}; \\ B &= \frac{r_{\text{Н}}^2 + x_{\text{Н}}^2 + 2x_{\text{ВЫХ}}x_{\text{Н}} + Q}{2x_{\text{ВЫХ}}(r_{\text{Н}}^2 + x_{\text{Н}}^2)}; \\ Q &= \pm \sqrt{(r_{\text{Н}}^2 + x_{\text{Н}}^2)^2 - 4x_{\text{ВЫХ}}^2r_{\text{Н}}^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

При использовании ССЧ в виде обратного Г-образного соединения (рис. 2, г):

$$\begin{aligned} R &= \frac{-(r_{\text{Н}}^2 + x_{\text{Н}}^2 + 2r_{\text{ВЫХ}}r_{\text{Н}}) + Q}{2(r_{\text{Н}} + r_{\text{ВЫХ}})}; \\ X &= \frac{-(r_{\text{Н}}^2 + x_{\text{Н}}^2 + 2x_{\text{ВЫХ}}x_{\text{Н}}) + Q}{2x_{\text{Н}}}; \\ Q &= \pm \sqrt{(r_{\text{Н}}^2 + x_{\text{Н}}^2)^2 - 4r_{\text{ВЫХ}}^2x_{\text{Н}}^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Три решения при использовании ССЧ в виде Т-образного звена (рис. 2, д):

$$\begin{aligned} X_1 &= \left( -\frac{R_2 + r_{\text{ВЫХ}}}{R_2 + r_{\text{Н}}} \right) Q - x_{\text{ВЫХ}}; \quad X_3 = Q - x_{\text{Н}}; \\ Q &= \pm \sqrt{-\frac{(R_2 + r_{\text{Н}})[(R_2 + r_{\text{ВЫХ}})r_{\text{Н}} + R_2r_{\text{ВЫХ}}]}{R_2 + r_{\text{ВЫХ}}}}; \\ X_1 &= \frac{-[(X_3 + x_{\text{Н}})^2 + 2x_{\text{ВЫХ}}(X_3 + x_{\text{Н}}) + r_{\text{Н}}^2] + Q}{2(X_3 + x_{\text{Н}})}; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{-[(X_3 + x_{\text{Н}})^2 + r_{\text{Н}}(2r_{\text{ВЫХ}} + r_{\text{Н}})] + Q}{2(r_{\text{ВЫХ}} + r_{\text{Н}})}; \\ Q &= \pm \sqrt{[(X_3 + x_{\text{Н}})^2 + r_{\text{Н}}^2] - [2r_{\text{ВЫХ}}(X_3 + x_{\text{Н}})]^2}; \\ X_3 &= \frac{-[(X_1 + x_{\text{ВЫХ}})^2 + 2x_{\text{Н}}(X_1 + x_{\text{ВЫХ}}) + r_{\text{ВЫХ}}^2] + Q}{2(X_1 + x_{\text{ВЫХ}})}; \\ R_2 &= \frac{-[(X_1 + x_{\text{ВЫХ}})^2 + r_{\text{ВЫХ}}(r_{\text{ВЫХ}} + 2r_{\text{Н}})] + Q}{2(r_{\text{ВЫХ}} + r_{\text{Н}})}; \\ Q &= \pm \sqrt{[(X_1 + x_{\text{ВЫХ}})^2 + r_{\text{ВЫХ}}^2] - [2r_{\text{Н}}(X_1 + x_{\text{ВЫХ}})]^2}. \end{aligned}$$

Три решения при использовании ССЧ в виде П-образного соединения (рис. 2, е):

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{R_2x_{\text{ВЫХ}}(r_{\text{Н}}^2 + R_2r_{\text{Н}} + x_{\text{Н}}^2) + Q}{(R_2 + r_{\text{ВЫХ}})(r_{\text{Н}}^2 + x_{\text{Н}}^2) + r_{\text{Н}}[(R_2 + r_{\text{ВЫХ}})^2 + x_{\text{ВЫХ}}^2]}; \\ X_3 &= -\frac{R_2x_{\text{Н}}(r_{\text{ВЫХ}}^2 + R_2r_{\text{ВЫХ}} + x_{\text{ВЫХ}}^2) + Q}{(R_2 + r_{\text{Н}})(r_{\text{ВЫХ}}^2 + x_{\text{ВЫХ}}^2) + r_{\text{ВЫХ}}[(R_2 + r_{\text{Н}})^2 + x_{\text{Н}}^2]}; \\ Q &= \pm \sqrt{-R_2(r_{\text{ВЫХ}}^2 + R_2r_{\text{ВЫХ}} + x_{\text{ВЫХ}}^2)(r_{\text{Н}}^2 + R_2r_{\text{Н}} + x_{\text{Н}}^2) \times} \\ &\quad \times [r_{\text{ВЫХ}}(r_{\text{Н}}^2 + R_2r_{\text{Н}} + x_{\text{Н}}^2) + r_{\text{Н}}(r_{\text{ВЫХ}}^2 + x_{\text{ВЫХ}}^2)]; \\ X_1 &= \left( -\{(r_{\text{ВЫХ}}^2 + x_{\text{ВЫХ}}^2)[(X_3 + x_{\text{Н}})^2 + r_{\text{Н}}^2] + \right. \\ &\quad \left. + 2x_{\text{ВЫХ}}X_3[x_{\text{Н}}X_3 + r_{\text{Н}}^2 + x_{\text{Н}}^2]\} + Q \right) / \\ &\quad / \left( 2\{(X_3 + x_{\text{ВЫХ}})(r_{\text{Н}}^2 + x_{\text{Н}}^2) + \right. \\ &\quad \left. + (x_{\text{ВЫХ}} + x_{\text{Н}})X_3^2 + 2x_{\text{ВЫХ}}x_{\text{Н}}X_3 \} \right); \\ R_2 &= \left( -\{(r_{\text{ВЫХ}}^2 + x_{\text{ВЫХ}}^2)[(X_3 + x_{\text{Н}})^2 + r_{\text{Н}}^2] + \right. \\ &\quad \left. + 2r_{\text{ВЫХ}}r_{\text{Н}}X_3^2\} + Q \right) / \left( 2r_{\text{ВЫХ}}[(X_3 + x_{\text{Н}})^2 + r_{\text{Н}}^2] \right); \\ Q &= \pm \sqrt{(r_{\text{ВЫХ}}^2 + x_{\text{ВЫХ}}^2)[(X_3 + x_{\text{Н}})^2 + r_{\text{Н}}^2]^2 -} \\ &\quad - [2r_{\text{ВЫХ}}X_3(r_{\text{Н}}^2 + x_{\text{Н}}^2 + X_3x_{\text{Н}})]^2}; \\ X_3 &= \left( -\{(r_{\text{Н}}^2 + x_{\text{Н}}^2)[(X_1 + x_{\text{ВЫХ}})^2 + r_{\text{ВЫХ}}^2] + \right. \\ &\quad \left. + 2x_{\text{Н}}X_1[x_{\text{ВЫХ}}X_1 + r_{\text{ВЫХ}}^2 + x_{\text{ВЫХ}}^2]\} + Q \right) / \\ &\quad / \left( 2\{(X_1 + x_{\text{Н}})(r_{\text{ВЫХ}}^2 + x_{\text{ВЫХ}}^2) + \right. \\ &\quad \left. + (x_{\text{Н}} + x_{\text{ВЫХ}})X_1^2 + 2x_{\text{Н}}x_{\text{ВЫХ}}X_1 \} \right); \\ R_2 &= \left( -\{(r_{\text{Н}}^2 + x_{\text{Н}}^2)[(X_1 + x_{\text{ВЫХ}})^2 + r_{\text{ВЫХ}}^2] + \right. \\ &\quad \left. + 2r_{\text{ВЫХ}}r_{\text{Н}}X_1^2\} + Q \right) / \left( 2r_{\text{Н}}[(X_1 + x_{\text{ВЫХ}})^2 + r_{\text{ВЫХ}}^2] \right); \\ Q &= \pm \sqrt{(r_{\text{Н}}^2 + x_{\text{Н}}^2)[(X_1 + x_{\text{ВЫХ}})^2 + r_{\text{ВЫХ}}^2]^2 -} \\ &\quad - [2r_{\text{Н}}X_1(r_{\text{ВЫХ}}^2 + x_{\text{ВЫХ}}^2 + X_1x_{\text{ВЫХ}})]^2}. \end{aligned}$$

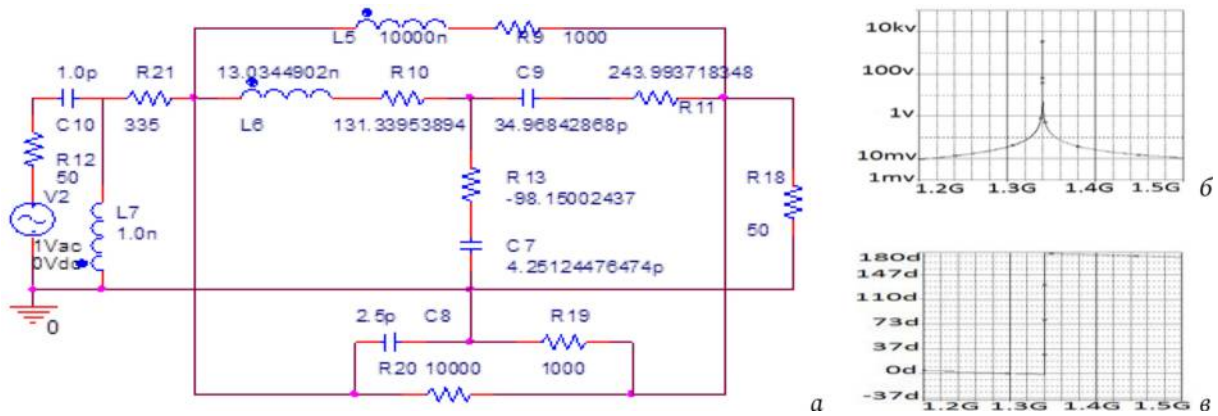


Рис. 4. Эквивалентная схема (а) автогенератора (рис. 6, а) и ее АЧХ (б) и ФЧХ (в), полученные путем схемотехнического моделирования в системе OrCad  
 Fig. 4. Equivalent circuit (a) of the self-oscillator (Fig. 6, a) and its frequency response (b) and phase response (c), obtained by circuit simulation in the «OrCad» system

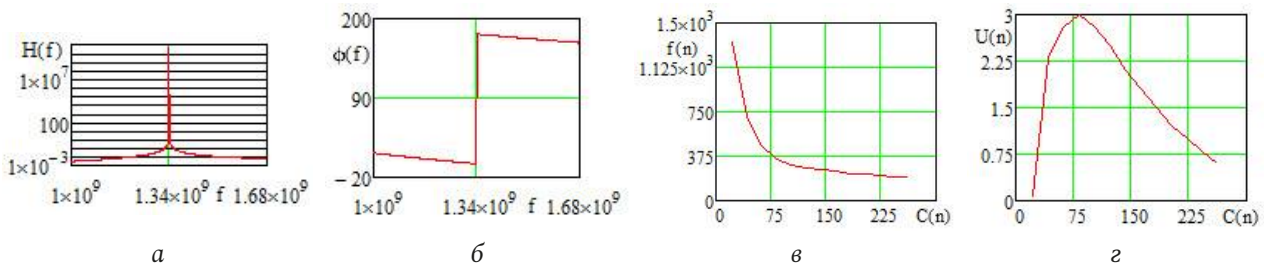


Рис. 5. АЧХ (а) и ФЧХ (б) эквивалентной схемы (рис. 4, а) автогенератора (рис. 6, а), полученные расчетным путем в системе Mathcad, зависимости частоты (МГц) (в) и амплитуды (В) (г) генерируемых колебаний от емкости  $C_{22}$  (пф), полученные в системе Microcap  
 Fig. 5. Frequency response (a) and phase response (b) of the equivalent circuit (Fig. 4, a) of the self-oscillator (Fig. 6, a), obtained by calculation in the «Mathcad» system, the dependences of frequency (MHz) (c) and amplitude (V) (d) generated fluctuations from capacitance  $C_{22}$  (pf), obtained in the «Microcap» system

Использование каскадно-включенных согласующих четырехполюсников для обеспечения режима генерации позволяет выбирать структуру и параметры ЦОС произвольно или из каких-либо других физических соображений, например исходя из условий обеспечения реализации частотного способа измерения электрических и неэлектрических величин [1; 7]. Для этого в ЦОС необходимо включить нелинейный элемент, параметры которого изменяются при изменении измеряемой величины. Для измерения используется основная характеристика автогенератора-датчика (зависимость частоты генерации от изменения параметров нелинейного элемента, прокалиброванная в размерности измеряемой величины).

### 3. Математическое и схемотехническое моделирование автогенераторов.

На рис. 4–6 в качестве примера показаны эквивалентная и принципиальная схемы автогенератора, соответствующие структурной схеме рис. 1, а, и их характеристики. В качестве нелинейного элемента автогенератора использован транзистор типа

BFQ17PH, включенный по схеме с общей базой по высокой частоте. Нагрузка выполнена на элементе  $R_{30}$ . Схема ССЧ собрана в виде Т-образного четырехполюсника на элементах  $C_{23}$ ,  $L_2$ ,  $R_{45}$ , параметры которых определялись по формулам:

$$X_1 = -x_0 - \frac{Q}{R_3 + r_{\text{BX}}}; \quad X_2 = -\frac{r_0 x_{\text{BX}} - Q}{R_3 + r_0 + r_{\text{BX}}}; \quad (25)$$

$$Q = \pm \sqrt{-r_0(R_3 + r_{\text{BX}})[(R_3 + r_{\text{BX}})(R_3 + r_0 + r_{\text{BX}}) + x_{\text{BX}}^2]},$$

причем реактивное сопротивление  $X_1 = -118,772345$  реализовано емкостью  $C_{23}$ , сопротивление  $X_2 = 8,419468$  – индуктивностью  $L_2$ , сопротивление  $R_3$  – резистором с заданным сопротивлением  $R_{45}$  (рис. 6, а).

Эквивалентная схема нелинейного элемента выполнена в виде перекрытого Т-образного четырехполюсника на элементах  $L_6$ ,  $R_{10}$ ,  $C_7$ ,  $R_{13}$ ,  $R_{11}$ ,  $C_9$ ,  $R_9$ ,  $L_5$ . Основанием для определения параметров этой схемы является выражение (3), которое определяет входное сопротивление реальной и эквивалентной НЧ:  $Z_{\text{BX}} = -335,241479 - j8,952427$  при заданных параметрах выбранной структуры ЦОС. Физический смысл и назначение

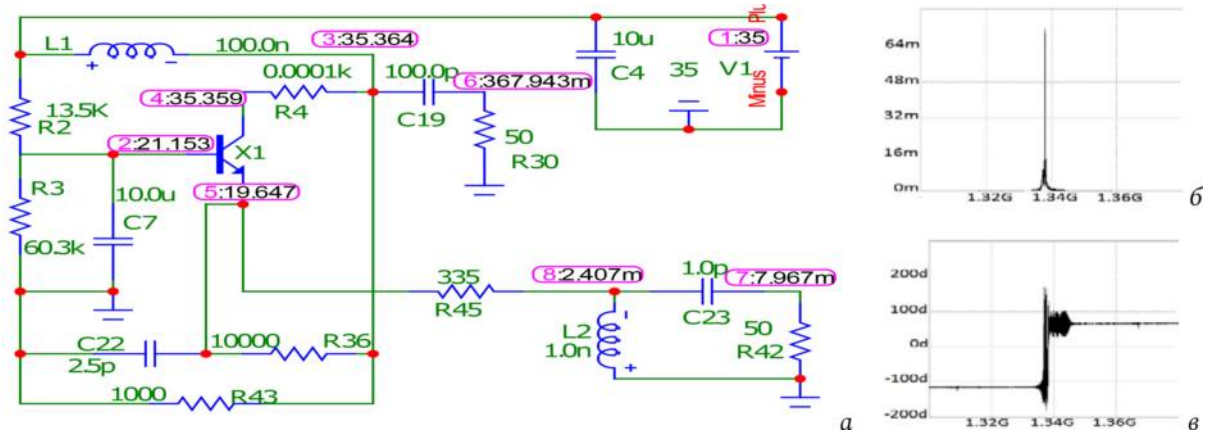


Рис. 6. Принципиальная схема автогенератора (а), типичные амплитудный (б) и фазовый (в) спектры генерируемого колебания, полученные в системе Microcap

Fig. 6. Schematic diagram of the self-oscillator (a), typical amplitude (b) and phase (c) spectra of the generated oscillation, obtained in the «Microcap» system

остальных элементов принципиальной и эквивалентной схем понятны из их рассмотрения.

Анализ показывает, что частотные характеристики эквивалентной схемы (рис. 4, а) автогенератора в режиме усиления, полученные экспериментально (рис. 4, б, в) и расчетным путем (рис. 5, а, б), подобны амплитудному и фазовому спектрам (рис. 6, б, в) генерируемого автогенератором (рис. 6, а) колебания с частотой  $f \approx 1340$  МГц. При использовании автогенератора в качестве датчика чувствительный к изменению измеряемой величины нелинейный элемент можно включить, например, вместо емкости  $C_{22}$ . На рис. 5, в, г показаны типичные зависимости частоты и амплитуды генерируемых колебаний от изменения этой величины. Экспериментальные и теоретические характеристики удовлетворительно совпадают. При полном совпадении структуры и параметров эквивалентной и принципиальной схем в общем

случае реализованные частоты генерации отличаются от заданных не более чем на 5 %.

## Заключение

Анализ показывает, что разработанный алгоритм параметрического синтеза ССЧ по критерию обеспечения стационарного режима генерации может быть использован для технического проектирования автогенераторов и различных датчиков на их основе для измерения электрических и неэлектрических величин, например углов ориентации летательного аппарата при использовании магниточувствительных элементов [1]. Применение ССЧ для этой цели наряду с реактивными, резистивными и комплексными согласующими четырехполюсниками [1–4] расширяет также область физической реализуемости генерируемых колебаний с заданным спектром.

## Список литературы

1. Головков А.А., Головков В.А. Параметрический синтез радиотехнических устройств и систем. Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА», 2018. 588 с.
2. Головков А.А., Головков В.А. Алгоритмы параметрического синтеза согласующих по критерию обеспечения многочастотного режима генерации комплексных четырехполюсников // Нелинейный мир. 2016. № 4. С. 17–26.
3. Головков А.А., Головков В.А. Алгоритмы параметрического синтеза согласующих по критерию обеспечения стационарного режима генерации комплексных четырехполюсников в цепи обратной связи автогенераторов // Электромагнитные волны и электронные системы. 2016. № 4. С. 20–29.
4. Головков А.А., Головков В.А. Алгоритмы параметрического синтеза согласующих по критерию обеспечения стационарного режима генерации реактивных и резистивных четырехполюсников в цепи обратной связи автогенераторов // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2016. № 3. С. 56–67.
5. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. М.: Гардарики, 2002. 638 с.
6. Куликовский А.А. Устойчивость активных линеаризованных цепей с усилительными приборами новых типов. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1962. 192 с.
7. Справочник по радиоэлектронике. Т. 3 / под ред. А.А. Куликовского. М.: Энергия, 1970. 413 с.
8. Гуревич И.В. Основы расчетов радиотехнических цепей (линейные цепи при гармонических воздействиях). М.: Связь, 1975. 368 с.

## References

1. Golovkov A.A., Golovkov V.A. *Parametric Synthesis of Radio Engineering Devices and Systems*. Voronezh: VUNTs VVS «VVA», 2018, 588 p. (In Russ.)
2. Golovkov A.A., Golovkov V.A. Algorithms for parametric synthesis of matching by the criterion of providing a multi-frequency regime for the generation of complex quadripoles. *Nelinejnyj mir*, 2016, no. 4, pp. 17–26. (In Russ.)
3. Golovkov A.A., Golovkov V.A. Algorithms for parametric synthesis of self-oscillators matching according to the criterion of ensuring the stationary mode of generation of complex quadripoles in the feedback circuit. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy*, 2016, no. 4, pp. 20–29. (In Russ.)
4. Golovkov A.A., Golovkov V.A. Algorithms for parametric synthesis of reactive and resistive two-terminal circuits matching according to the criterion of ensuring the stationary mode of generation in the feedback circuit of self-oscillators. *Informatsionno-izmeritel'nye i upravljajuschie sistemy*, 2016, no. 3, pp. 56–67. (In Russ.)
5. Bessonov L.A. *Theoretical Foundations of Electrical Engineering. Electrical Circuits*. Moscow: Gardariki, 2002, 638 p. (In Russ.)
6. Kulikovskiy A.A. *Stability of Active Linearized Circuits with Amplifying Devices of New Types*. Moscow; Leningrad: Gosenergoizdat, 1962, 192 p.
7. *Handbook of Radio Electronics*. Vol. 3. Ed. by A.A. Kulikovskiy. Moscow: Energija, 1970, 413 p. (In Russ.)
8. Gurevich I.V. *Fundamentals of Calculations of Radio Circuits (Linear Circuits with Harmonic Effects)*. Moscow: Svjaz', 1975, 368 p. (In Russ.)

---

## Physics of Wave Processes and Radio Systems 2022, vol. 25, no. 1, pp. 45–54

DOI 10.18469/1810-3189.2022.25.1.45-54

Received 19 July 2021  
Accepted 20 August 2021

### Algorithm for parametric synthesis of cascade-connected matching mixed quadripoles according to the criterion of ensuring stationary generation mode

Alexander A. Golovkov, Vladimir A. Golovkov

Military Educational and Scientific Centre of the Air Force N.E. Zhukovskiy and Y.A. Gagarin Air Force Academy (Voronezh)  
the Ministry of Defence of the Russian Federation  
54a, Staryh Bolshevikov Street,  
Voronezh, 394064, Russia

**Abstract – Introduction:** the analysis of the well-known literature shows that the use of various types of four-pole devices (reactive, resistive, complex) allows to increase the area of physical feasibility of the stationary generation mode. **The purpose of the work:** increasing the area of physical feasibility of the stationary mode of generation by optimizing the parameters of the matching mixed four-poles. One part of such four-pole devices consists only of resistive elements, and the second part consists only of reactive elements. **Materials and methods:** four-pole theory, matrix algebra, decomposition method, method of synthesis of microwave control devices, immittance stability criterion. **Results:** mathematical models of matching mixed four-pole devices are obtained in the form of relationships between the elements of their transmission matrix and the dependencies of the resistances of their two-pole devices on the frequency, optimal according to the criterion of ensuring a stationary generation mode. **Conclusion:** a comparative analysis of the theoretical results (frequency response and frequency response of the autogenerator in the amplification mode) obtained by mathematical modeling in the «MathCad» system, and the experimental results obtained by circuit modeling in the «OrCad» (in the amplification mode) and «MicroCap» (in the generation mode) systems shows their satisfactory coincidence. The frequency response and frequency response in the amplification mode are similar to the amplitude and phase spectra of the generated oscillations in the generation mode.

**Keywords** – imminency criterion of stability; a stationary mode of generation; parametrical synthesis matching by the mixed two-port networks.

---

## Информация об авторах

Головков Александр Афанасьевич, 1953 г. р., доктор технических наук, профессор кафедры авиационных систем и комплексов радионавигации и радиосвязи ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Россия.

Область научных интересов: способы и средства формирования, извлечения и обработки сигналов, приема, передачи, защиты и разрушения информации.

E-mail: vaiu@mil.ru

Головков Владимир Александрович, 1983 г. р., младший научный сотрудник отдела ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Россия.

Область научных интересов: способы и средства формирования и обработки сигналов, приема и передачи информации.  
E-mail: valgol2595@gmail.com

### Information about the Authors

**Alexander A. Golovkov**, born in 1953, Doctor of Technical Sciences, professor of the Department of Aviation Systems and Radio Navigation and Radio Communication Complexes, Military Educational and Scientific Centre of the Air Force N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy (Voronezh) the Ministry of Defence of the Russian Federation, Voronezh, Russia.

*Research interests:* ways and means of generating, extracting and processing signals, receiving, transmitting, protecting and destroying information.

E-mail: vaiu@mil.ru

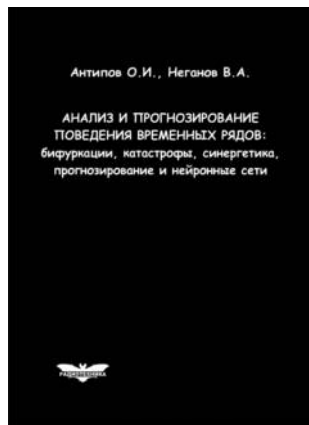
**Vladimir A. Golovkov**, born in 1983, junior researcher of the department, Military Educational and Scientific Centre of the Air Force N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy (Voronezh) the Ministry of Defence of the Russian Federation, Voronezh, Russia.

*Research interests:* ways and means of generating and processing signals, receiving and transmitting information.

E-mail: valgol2595@gmail.com

**Антипов, О.И.**

**Анализ и прогнозирование поведения временных рядов: бифуркации, катастрофы, синергетика, фракталы и нейронные сети** / О.И. Антипов, В.А. Неганов. – М.: Радиотехника, 2011. – 350 с.



ISBN 978-5-88070-294-7

УДК 530.1:621.372+621.396

ББК 32.96


Монография посвящена объединению нескольких направлений в науке: бифуркаций в нелинейных динамических (или детерминированных) системах, причем внимание уделяется бифуркациям-кризисам, которые отождествляются с катастрофами в синергетике – науке о самоорганизации в сложных системах, где велика роль коллективных, кооперативных эффектов, возникновения порядка – фрактальных структур в турбулентности (или хаосе). В синергетике общим является принцип подчинения, который позволяет исключать большое число переменных в сложных системах и описывать в них сложные процессы. Использование в роли одной из основных количественных характеристик катастроф фрактального показателя Херста связывает фракталы с бифуркациями. Объединение этих четырех направлений позволяет упростить проектирование прогнозирующих нейронных сетей, которое в настоящее время отчасти является искусством.

Даны авторские модификации некоторых известных фрактальных методов, позволяющие проводить более глубокий анализ хаотических процессов. Эти результаты, на наш взгляд, должны являться необходимой частью полного алгоритма построения прогностических моделей, описанного в книге. В частности, описан авторский алгоритм определения временного лага, необходимого для реконструкции аттрактора динамической системы, и модификация метода ближайших ложных соседей, которую можно использовать в качестве индикатора приближающейся катастрофы.

Приведены конкретные примеры из таких областей науки, как радиотехника, экономика и медицина.

*Монография представляет интерес для научных работников, аспирантов и докторантов, работающих в области прикладных задач анализа, моделирования и прогнозирования хаотических процессов в нелинейных системах из различных отраслей науки и техники.*

## Комплексное повышение эффективности радиоэлектронных устройств и систем передачи информации с OFDM на основе нелинейных систем с динамическим хаосом

М.Ю. Зуев 

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева – КАИ  
420111, Россия, г. Казань,  
ул. К. Маркса, 10

*Аннотация* – В данной статье представлены результаты моделирования системы передачи информации с OFDM с использованием цифровых радиоэлектронных устройств, реализующих метод скремблирования передаваемых сигналов и маскирования передаваемой информации. В качестве источников маскирующих сигналов в работе рассматриваются псевдослучайные последовательности, полученные с помощью генераторов, построенных на основе модифицированных систем с динамическим хаосом. Получены оценки вероятности битовой ошибки рассматриваемой системы передачи информации, оценен пик-фактор сигналов, корреляционные характеристики скремблированной и исходной информации, получена оценка энтропии передаваемой информации. Результаты работы могут быть использованы при проектировании современных систем передачи информации с целью повышения безопасности передаваемой информации и снижения пик-фактора формируемых сигналов.

*Ключевые слова* – псевдослучайная последовательность; OFDM; скремблирование сигналов; маскирование информации; информационная безопасность; пик-фактор.

### Введение

В настоящее время в области систем телекоммуникаций и радиосвязи наблюдается тенденция по разработке малогабаритных портативных устройств передачи информации и снижению их энергопотребления. Все большую актуальность приобретают вопросы повышения информационной безопасности, улучшения энергетической и спектральной эффективности современных систем передачи информации, а также устройств, работающих в коммуникационных линиях device-to-device, vehicle-to-vehicle, machine-to-machine и т. д. [1].

Повышение требований к конфиденциальности передачи информации делает актуальным использование хаотической динамики в системах связи (маскирование информации динамическим хаосом, переключение хаотических режимов и т. д.) [2]. В отличие от аналоговых реализаций радиоэлектронных динамических систем с хаотической динамикой цифровые реализации этих систем на основе процедур численного интегрирования дифференциальных уравнений позволяют получить воспроизводимость характеристик как на передающем, так и на приемном концах канала связи. Одним из возможных вариантов повышения эффективности радиоэлектронных устройств с хаотической динамикой является формирование

квазирезонансных управляющих воздействий на параметры динамических систем. Таким образом можно улучшить статистические характеристики формирователей сигналов, генерируемых нелинейными системами с динамическим хаосом [1; 3]. Оценки статистических характеристик систем с динамическим хаосом, функционирующих в условиях квазирезонансных воздействий, приведены в работах [4–7]. Для решения задачи комплексного повышения эффективности радиоэлектронных устройств и систем передачи информации с OFDM и упрощения их реализации на основе цифровой техники вместо воспроизводимых генераторов хаоса, в которых операции производятся с плавающей или фиксированной запятой, более привлекательными являются генераторы псевдослучайных сигналов, в которых операции производятся над целочисленными полями Галуа  $GF(2^P)$  [8].

Одними из наиболее известных методов улучшения энергетической эффективности современных систем связи с OFDM являются использование дискретного преобразования Фурье, адаптивного предсказания информации, блочного и сверточного кодирования [9; 10].

В работе [11] представлен метод скремблирования полезной информации последовательностями, полученными на основе динамического хаоса, используемого для повышения информационной безопасности на физическом уровне (TRANSEC)



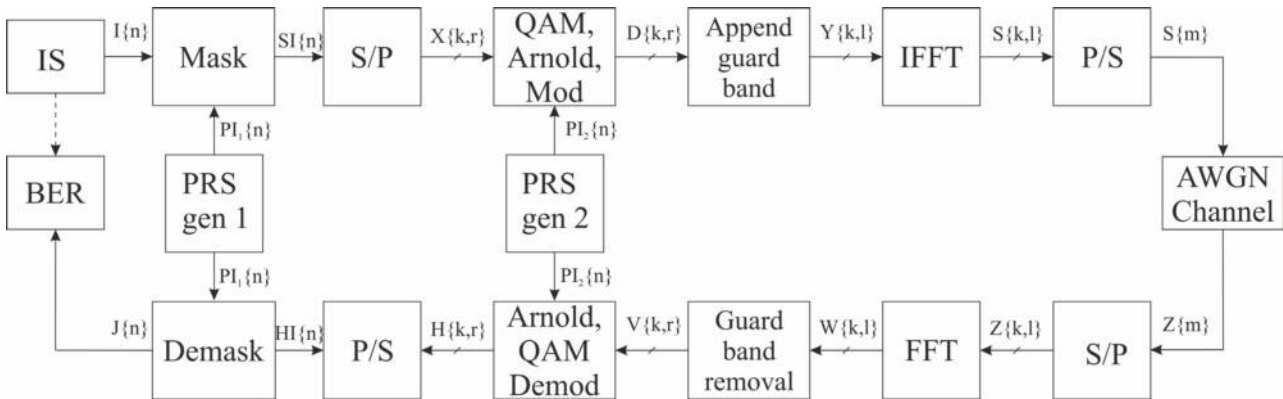


Рис. 1. Структурная схема исследуемой OFDM-системы, используемая для статистического моделирования  
Fig. 1. Block diagram of the investigated OFDM system used for statistical modeling

и уменьшения значения пик-фактора (PAPR) в оптической системе передачи информации на основе OFDMA.

В статье [12] предложен метод снижения PAPR, заключающийся в обработке поднесущих частот группового спектра и повороте сигнального созвездия с помощью матрицы предкодирования. Функция предкодирования реализуется таким образом, чтобы амплитудные выбросы сигнала не появлялись в одно и то же время. Для этого разрабатывается одна основная часть функции, а остальная порождается циклическими сдвигами излучения в интервале времени, равном периоду. В статье произведена оценка эффективности снижения PAPR такими функциями, как: дискретное преобразование Хартли, дискретное косинусное преобразование, дискретное синусное преобразование, быстрое преобразование Уолша – Адамара, дискретное преобразование Фурье, представлена имитационная модель с использованием полученных функций предкодирования.

В работе [13] предлагается метод адаптивного кодирования с предварительным искажением. Метод кодирования используется для исправления ошибок, а также снижения пик-фактора, а метод предварительного искажения обеспечивает такую форму передаваемых данных или входного сигнала усилителя (предыскаженного сигнала), чтобы выходной сигнал усилителя был менее искажен. Предварительное искажение также улучшает спектр плотности мощности передаваемого сигнала и характеристику битовой ошибки.

Проблема комплексного повышения эффективности радиоэлектронных устройств и систем передачи информации включает в себя проблемы энергетической эффективности и информационной безопасности на физическом уровне (TRANSEC).

Задача разработки новых методов и средств повышения энергетической эффективности и информационной безопасности для систем передачи информации с ортогональным частотным мультиплексированием является актуальной из-за высокой спектральной эффективности, способности работать в условиях многолучевого распространения радиоволн и высокой пропускной способности этих систем.

Целью работы является анализ возможности комплексного повышения эффективности функционирования радиотехнических устройств и систем передачи информации с OFDM на основе использования нелинейных систем с динамическим хаосом, реализованных над конечным полем Галуа  $GF(2^p)$ .

## 1. Описание структурной схемы, используемой для статистического моделирования

В данной работе рассматривается модель системы связи с OFDM, в которой передаваемая информация скремблируется с помощью псевдослучайных последовательностей, сформированных на основе системы Лоренца, реализованной над полем  $GF(2^p)$ :

$$\begin{cases} X_{i+1} = X_i \oplus t \cdot c \cdot (X_i \oplus Y_i), \\ Y_{i+1} = Y_i \oplus t \cdot (r \cdot X_i \oplus Y_i \oplus X_i \cdot Z_i), \\ Z_{i+1} = Z_i \oplus t \cdot (b \cdot Z_i \oplus X_i \cdot Y_i), \end{cases} \quad (1)$$

где  $\oplus$  – операция исключающее «ИЛИ», « $\cdot$ » – операция умножения,  $p$  – степень полинома, образующего поле, полином образующий поле  $g(x) = x^{16} + x^{12} + x^3 + x + 1$ .

Структурная схема исследуемой модели системы передачи информации с OFDM, используемая для оценки вероятностных и энергетических характеристик, приведена на рис. 1.

В работе рассматривается сопоставление одно-контурного и двухконтурного методов повышения эффективности функционирования устройств и систем передачи информации с OFDM. Первый метод заключается в одноконтурном скремблировании сигнального QAM созвездия с помощью преобразования Арнольда, коэффициентами которого являются элементы псевдослучайной последовательности, формируемой на основе системы Лоренца, реализованной над полем Галуа. Второй метод состоит в маскировании исходной информации с помощью псевдослучайных последовательностей, также получаемой на основе системы Лоренца и скремблировании сигнального QAM созвездия с помощью преобразования Арнольда.

На структурной схеме (рис. 1) IS – источник информации формирует исходный байтовый поток  $I\{n\}$ , затем блок маскирования (Mask) маскирует этот поток последовательностью  $PI_1\{n\}$ , сформированной целочисленным генератором псевдослучайных последовательностей (PRS gen 1), полученный байтовый массив  $SI\{n\}$  последовательно-параллельным преобразователем (S/P) преобразуется в матрицу  $X\{k, r\}$ , которая квадратурно-амплитудным модулятором (QAM mod) преобразуется в квадратурный сигнал, который затем с помощью преобразования Арнольда (Arnold Mod) скремблируется с массивом  $PI_2\{n\}$ , сформированным целочисленным генератором псевдослучайных последовательностей (PRS gen 2), к полученному массиву  $D\{k, r\}$  добавляется защитная полоса (Append guard band), над матрицей  $Y\{k, l\}$  производится построчное обратное преобразование Фурье IFFT, полученный массив  $S\{k, l\}$  параллельно-последовательным преобразователем преобразуется в одномерный массив  $S\{m\}$ , затем с помощью блока (AWGN Channel) производится имитация канала связи с аддитивным белым гауссовым шумом.

На приемной стороне оцифрованная принятая смесь сигнала с шумом  $Z\{m\} = S\{m\} + G_n\{m\}$  (где  $G_n\{m\}$  – реализация шума) проходит последовательно-параллельное преобразование S/P, затем полученный массив построчно пропускается через блок прямого преобразования Фурье (FFT), в блоке (Guard interval removal) производится удаление защитного интервала  $V\{k, r\}$ , затем, используя массив  $PI_2\{n\}$ , сформированный целочисленным генератором псевдослучайных последовательностей (PRS gen 2), производится обратное преобразование Арнольда (Arnold Demod) полученного ком-

плексного массива, после которого производится квадратурная демодуляция (QAM demod) принятого сигнала, полученный символьный массив  $H\{k, r\}$  последовательно-параллельным преобразователем преобразуется в массив  $HI\{n\}$ , перемешивая который с последовательностью  $PI_1\{n\}$ , сформированной целочисленным генератором псевдослучайных последовательностей (PRS gen 1), производится демаскирование полученного сигнала (Demask), полученный в результате преобразований массив  $J\{n\}$  в блоке BER сравнивается с исходным битовым потоком  $I\{n\}$ , затем оценивается зависимость вероятности ошибки от  $E_b/N_0$ .

Отличие исследуемой структурной схемы от используемой в классической системе передачи информации с OFDM состоит в добавлении маски, сформированной генератором псевдослучайных последовательностей с помощью преобразования Арнольда и посимвольного скремблирования.

Реализация генераторов PRS gen1, PRS gen2 на основе системы Лоренца над полем Галуа и в программируемой логической интегральной схеме была рассмотрена в работах [5; 6; 8]. Преимуществом генераторов, реализованных на поле Галуа, является отсутствие операций с плавающей либо фиксированной точкой, что обеспечивает их реализацию в относительно простых устройствах, имеющих низкую стоимость.

Требованиями, предъявляемыми к скремблирующим последовательностям, генерируемым данными генераторами, являются равномерность формируемых чисел с доверительной вероятностью не менее 0,95 и период автокорреляционной функции не менее 100 000 отсчетов.

В работе для анализа характеристик устройств комплексного повышения эффективности систем передачи информации используется метод компьютерного моделирования в среде Matlab.

## 2. Оцениваемые показатели

В современных системах передачи информации возникновение ошибок является неизбежным. Ошибки являются следствием воздействия аддитивных шумов и помех, искажений, связанных с многолучевым распространением радиоволн, частотной, фазовой или символьной рассинхронизации. В связи с этим при проектировании и разработке систем передачи информации следует учитывать комплекс характеристик этих систем [14]. В качестве характеристик, оценивающих эффективность решения задач улучшения инфор-

мационной безопасности, в работе используются: коэффициент корреляции между соседними столбцами и строками  $C$ , энтропия маскированной информации  $H(x)$  и степень скремблирования  $SD$ . Для оценки возможности повышения энергетической эффективности взяты такие характеристики, как: пик-фактор  $PAPR$  и кумулятивная функция распределения сигнала (CCDF).

Функция BER является вероятностью ошибочного приема при передаче одного бита информации, усредненной для статистически большого объема передаваемой информации, и используется для верификации разработанной статистической модели системы. Например, в случае QAM-модуляции и канала с аддитивным белым гауссовым шумом BER может быть теоретически оценена как:

$$BER \leq \frac{1}{\log_2 M} \left[ 1 - \left( 1 - 2 \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{3 \log_2 M E_b}{M-1 N_0}} \right) \right)^2 \right], \quad (2)$$

где  $\operatorname{erf}$  – интеграл ошибок,  $M$  – число позиций для многопозиционных видов модуляции,  $E_b$  – энергия, необходимая для передачи одного бита информации,  $N_0$  – спектральная плотность мощности белого шума в канале.

Одним из основных показателей степени улучшения информационной безопасности системы является коэффициент корреляции (3). Коэффициент корреляции между соседними парами векторов хаотической перестановки используется для оценки способности противостоять статистической атаке [1], оценивается по следующей формуле:

$$C(u, v) = \frac{\sum_{i=1}^N (u_i - E(u))(v_i - E(v))}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (u_i - E(u))^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N (v_i - E(v))^2}}, \quad (3)$$

где  $u$  и  $v$  – сгенерированные перестановки, порожденные хаотическими последовательностями;  $N$  – число перестановок;  $E(u)$  и  $E(v)$  – средние значения  $u$  и  $v$ , соответственно.

В то же время степень скремблирования ( $SD$ ) также используется для оценки безопасности систем защиты информации. Чем больше степень скремблирования, тем лучше маскируется исходная информация. В работе [1]  $SD$  оценивается по следующей формуле:

$$SD = \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^N R(t, n)}{TN} 100 \%, \quad (4)$$

$$R(t, n) = \begin{cases} 0, & c_n(t) = w_n(t), \\ 1, & c_n(t) \neq w_n(t), \end{cases} \quad (5)$$

где  $c_n(t)$  и  $w_n(t)$  – символы QAM до и после скремблирования соответственно;  $T$  – количество дискретных отсчетов;  $t$  – номер отсчета;  $n$  – индекс поднесущей.

Энтропия является мерой неопределенности информационной системы, в частности это функция непредсказуемости появления какого-либо символа первичного алфавита. Чем больше независимость сформированной информации, тем система считается более безопасной с точки зрения информационной безопасности. Выделяют общую и локальную энтропию.

Общая энтропия оценивается как:

$$H(X) = - \sum_{i=1}^m p(x_i) \log(p(x_i)). \quad (6)$$

Вычисление локальной энтропии сводится к нахождению для каждого отсчета изображения энтропии его окрестности – фрагмента размером  $m \times n$ :

$$H(X) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(e_{i,j}) \log(p(e_{i,j})), \quad (7)$$

событием ( $e_{i,j}$ ) считается конкретное значение яркости пикселя, вероятность его ( $p(e_{i,j})$ ) оценивается подсчетом количества вхождений этого значения по всему фрагменту изображения размером  $m \times n$  и делением на количество пикселей во фрагменте.

Известным недостатком систем передачи информации, в которых применяется OFDM, является высокое отношение пиковой мощности к средней ее величине – высокий пик-фактор ( $PAPR$ ) сигнала, который оценивается по следующей формуле:

$$PAPR_{dB} = 10 \log_{10} \frac{|x|_{peak}^2}{x_{rms}^2}, \quad (8)$$

где  $x_{peak}^2$  – квадрат максимальной амплитуды,  $x_{rms}^2$  – квадрат среднего значения амплитуды сигнала. Поэтому в данной работе выполнены оценки пик-фактора сигналов, полученных при моделировании схемы, приведенной на рис. 1.

Для оценки распределения получаемых значений пик-фактора формируемых сигналов удобно использовать кумулятивную функцию распределения (CCDF).

В качестве модели исходной информации с целью наглядного представления используются 8-битные изображения: перца, женщины, а также изображения клеток разной интенсивности и размера. Размер передаваемых изображений составлял  $256 \times 256$  пикселей. Следует отметить,

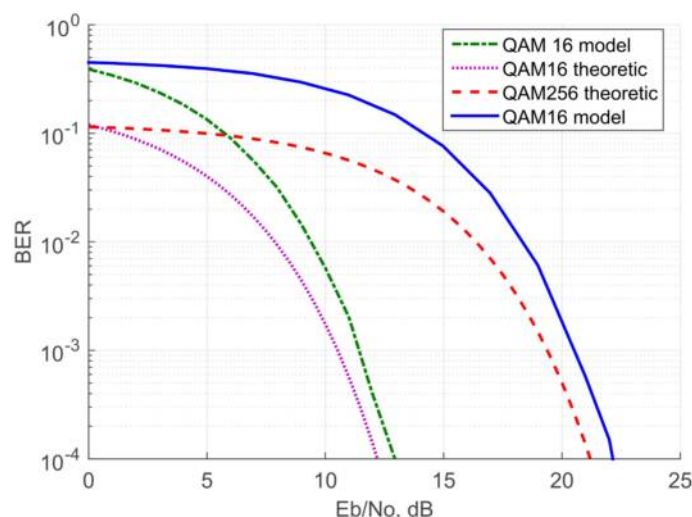


Рис. 2. Зависимости оценки вероятности битовой ошибки от отношения сигнал/шум  $E_b/N_0$   
Fig. 2. Dependences of the estimate of the bit error probability on the signal-to-noise ratio  $E_b/N_0$

что значения пик-фактора (8), оцененные в работе и использованные для построения CCDF, рассчитаны по массиву всей информации, несущей изображение.

### 3. Результаты компьютерного моделирования

В эксперименте в системе связи информация об изображении передавалась с помощью 256 поднесущих, а в качестве модуляции использовались QAM-16 и QAM-256. К квадратурам передаваемого сигнала добавлялся аддитивный белый гауссов шум AWGN. Затем полученные символы сигнального созвездия с помощью преобразования Арнольда скремблировались со псевдослучайной последовательностью.

С целью верификации разработанной модели в статье проведены оценки вероятности ошибки на бит BER от отношения энергии на бит к спектральной плотности мощности шума  $E_b/N_0$  для OFDM-сигнала, маскированного псевдослучайной последовательностью, полученные зависимости приведены на рис. 2.

Из рис. 2 теоретически достижимые (theoretic) и полученные методом статистического моделирования (model) зависимости вероятности битовой ошибки от энергии на бит к спектральной плотности мощности близки, что подтверждает соответствие исследуемой модели системе связи с OFDM [15].

На рис. 3 показаны передаваемые изображения женщины, перца, мелко и крупнозернистой клетки.

На рис. 3, а содержится изображение женщины, используемое в эксперименте по оценке пик-

фактора, на рис. 3, б приведено изображение клетки размером 4 пикселя, используемое для оценки пик-фактора, на рис. 3, в приведено изображение клетки размером 16 пикселей, на рис. 3, г – изображение до передачи по каналу связи, д – скремблированное изображение в канале связи, е – маскированное и прошедшее скремблирование изображение. Рис. 3 иллюстрирует, что в процессе передачи изображения по каналу связи производится скремблирование формируемого сигнала и маскирование передаваемой информации, после которых невозможно визуально восстановить очертания передаваемого изображения рис. 3, е, а следовательно, будет затруднительно восстановить информацию, скрытую исследуемыми методами. При этом следует учитывать, что для QAM-16 одноконтурный метод рис. 3, д не так эффективен, как двухконтурный (рис. 3, е).

Для определения влияния коррелированности передаваемой информации на пик-фактор сигнала в работе проведена оценка зависимости среднего значения пик-фактора от зернистости (размера клетки) передаваемого изображения до и после скремблирования сигнала (рис. 4).

Из рис. 4 видно, что при увеличении размера клетки увеличивается значение пик-фактора формируемого сигнала. Показано, что после скремблирования информации во всех экспериментах наблюдается снижение значения пик-фактора сформированных сигналов.

В целях анализа влияния формы передаваемой информации при экспериментальных проверках было проведено сопоставление оценок значений CCDF для изображений, несущих смысловую ин-

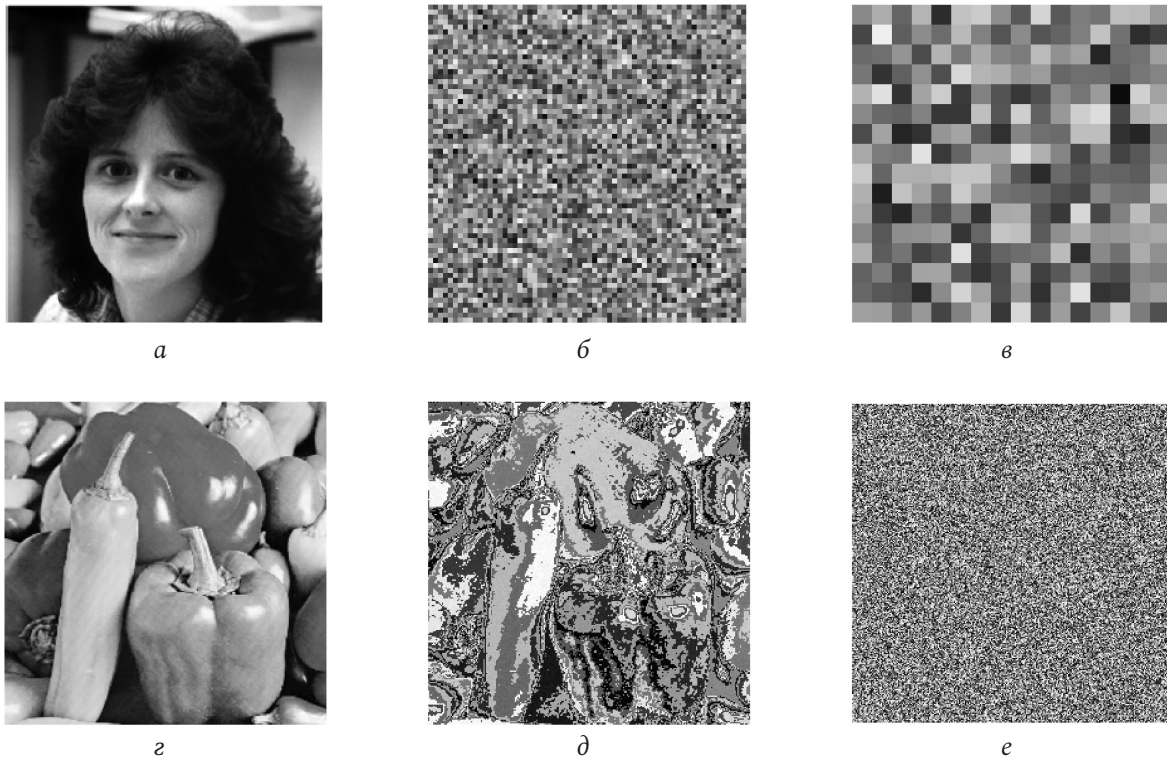


Рис. 3. Исходные фотографии и результаты их преобразования  
Fig. 3. Initial photos and the results of their scrambling

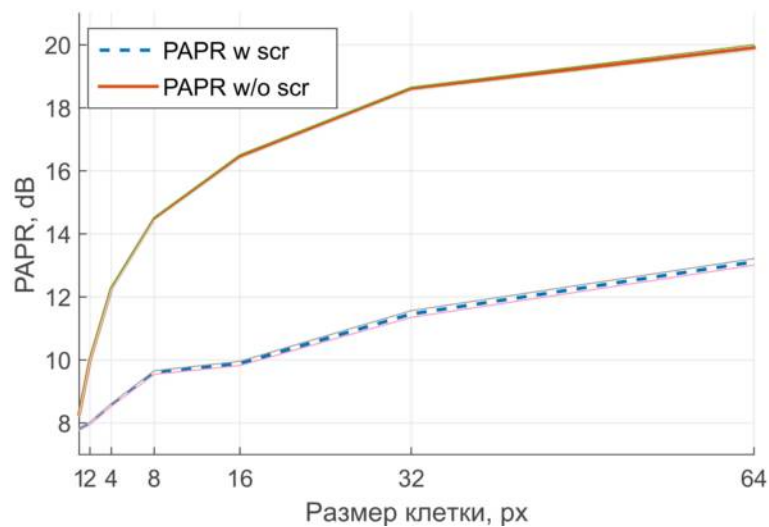


Рис. 4. Зависимость пик-фактора от размера клетки  
Fig. 4. Dependence of the peak-to-average power ratio on the cell size

формацию, а также мелко- и крупнозернистых изображений.

На рис. 5 приведены кумулятивные функции распределения пик-фактора OFDM-сигнала, несущего информацию об изображении, с размерностью обратного преобразования Фурье 256 и исходного сигнала QAM-16.

Из рис. 5 видно, что для скремблированных сигналов при передаче изображения типа перца (pepper) значение пик-фактора принимаемых сиг-

налов превышает 15,5 дБ с вероятностью не более 0,001, выигрыш составляет 1 дБ, для изображения типа женщины (woman) пик-фактор принимаемых сигналов превышает 13,5 дБ с вероятностью не более 0,001 и выигрыш составляет 3 дБ. Для маскированной информации и скремблированных сигналов при передаче изображения типа перца (pepper) значение пик-фактора принимаемых сигналов превышает 11 дБ с вероятностью не более 0,001, выигрыш составляет 5 дБ, для изо-

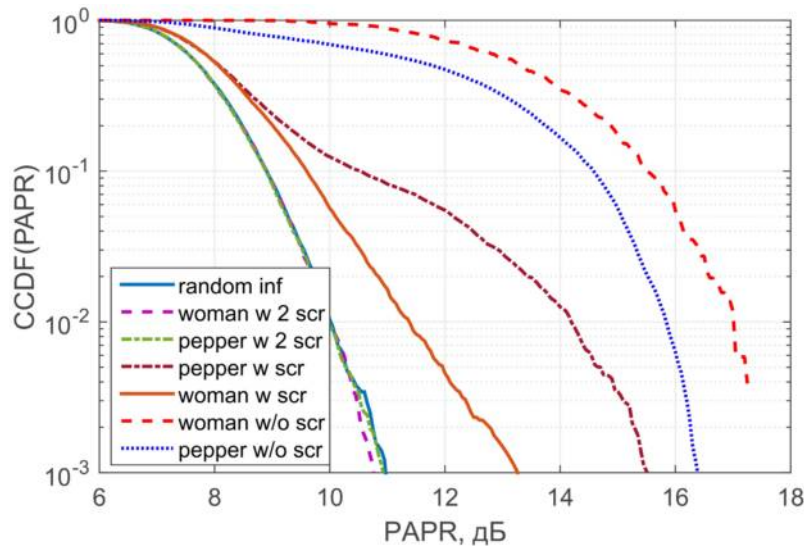


Рис. 5. Кумулятивная функция распределения  
 Fig. 5. Cumulative distribution function

бражения типа женщины (woman) пик-фактор принимаемых сигналов превышает 11 дБ с вероятностью не более 0,001 и выигрыш составляет 7 дБ. Из приведенных зависимостей видно, что на снижение пик-фактора формируемых сигналов в одноконтурной схеме влияет форма исходной информации. В двухконтурной схеме влияние информации на пик-фактор формируемого сигнала минимально.

Немаловажную роль в современных системах коммуникаций играет информационная безопасность. Скремблирование позволяет повысить конфиденциальность информации и тем самым улучшить информационную безопасность. Для скремблирования на передающей и приемной сторонах системы связи используются идентичные псевдослучайные последовательности. Несанкционированный пользователь как постороннее лицо не имеет информации о начальных условиях, используемых генератором для формирования псевдослучайных последовательностей и не может демаскировать передаваемую информацию.

В таблице приведены результаты оценок характеристик информационной безопасности и улучшения энергетической эффективности, полученные при проведении экспериментов по передаче изображения, приведенного на рис. 3, 2, рассматриваемыми методами.

Из таблицы видно, что для одноконтурной схемы маскирования изображения получены приемлемые результаты по снижению пик-фактора как для QAM-16, так и для QAM-256, степень скремблирования для двухконтурной схемы достигает значений не менее 97 %. Общая энтропия увели-

Таблица. Характеристики информационной безопасности и улучшения энергетической эффективности  
 Table. Characteristics of information security and energy efficiency improvements

Передаваемое изображение	Маскированное изображение	Дважды маскированное изображение	Передаваемое изображение	Маскированное изображение	Дважды маскированное изображение
QAM-16			QAM-256		
Энтропия			Энтропия		
7,749	7,974	7,997	7,749	7,978	7,998
Локальная энтропия			Локальная энтропия		
6,685	7,583	7,813	6,685	7,801	7,910
Пик-фактор			Пик-фактор		
17,93	13,09	10,4	20,14	11,3 ~ 11,8	9,8 ~ 10,5
Степень скремблирования			Степень скремблирования		
0	0,73	0,97	0	0,95	0,99

чивается и для одноконтурной схемы позволяет достичь значений 7,974, для двухконтурной – 7,998, локальная энтропия увеличивается от значений 6,685 до 7,910 для двухконтурной схемы, что является подтверждением лучшего перемешивания передаваемой информации.

На рис. 6 приведены гистограммы распределения по градациям яркости исходного, маскиро-

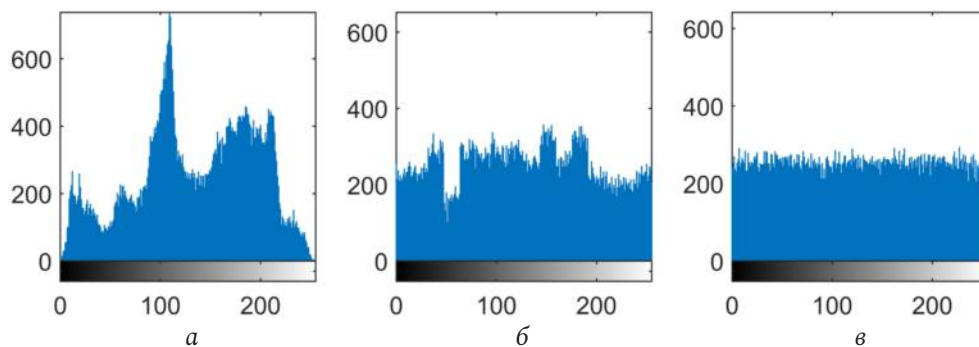


Рис. 6. Распределение градаций яркости исходного и маскированного изображений  
Fig. 6. Distribution of shades of the original and masked images

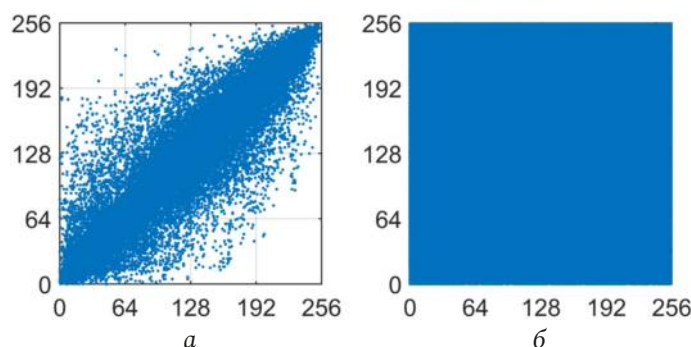


Рис. 7. Диаграмма рассеяния исходного и маскированного изображений  
Fig. 7. Correlation diagram of the original and masked images

ванного и дважды маскированного изображения фотографии перца (рис. 3, з).

Из рис. 6, а видно, что передаваемое (исходное) изображение имеет сильно выраженные значения яркости, что может представлять полезную информацию для несанкционированного пользователя при приеме сигнала, на рис. 6, б видно, что передаваемая информация имеет менее выраженные значения яркости при использовании одноконтурной схемы, из рис. 6, в видно, что передаваемая информация не имеет выраженных значений яркости при использовании двухконтурной схемы, поэтому несанкционированное восстановление информации будет затруднено.

На рис. 7 отражены зависимости коэффициента корреляции исходного и маскированного изображений.

На рис. 7 приведены диаграммы рассеяния исходного и маскированного изображений. Из приведенных распределений видно, что на рис. 6, а можно выделить корреляцию между соседними строками изображения, которая пропадает при перемешивании информации (рис. 6, б). Аналогичные зависимости были получены при сопоставлении столбцов и диагональных линий изображения.

## Заключение

В работе проведен анализ возможности комплексного повышения эффективности функционирования радиотехнических устройств и систем передачи информации с OFDM на основе использования нелинейных систем с динамическим хаосом, реализованных над конечным полем Галуа  $GF(2^P)$ . Основным результатом применения предлагаемых методов является комплексное повышение информационной безопасности и энергетической эффективности устройств и систем передачи информации на основе OFDM.

В работе выполнены оценки зависимостей вероятности битовой ошибки, пик-фактора, кумулятивной функции распределения, энтропии маскированного изображения, степени скремблирования информации и коэффициента корреляции исходного и скремблированного изображений. При одноконтурном методе маскирования степень скремблирования изображения составляет не менее 90 % для QAM-256 и не менее 70 % при QAM-16, в случае двухконтурного метода (скремблирования сигнала и маскирования изображения) – не менее 99 % для QAM-256 и 97 % для QAM-16. Энтропия маскированного монохромного изображения приближается к энтропии случайного источника сообщений.

## Список литературы

1. A chaotic images encryption algorithm with the key mixing proportion factor / E. Dong [et al.] // 2008 International Conference on Information Management, Innovation Management and Industrial Engineering. 2008. P. 169–174. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICIII.2008.25>
2. Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2002. 252 с.
3. Lerner I.M., Il'in V.I. New precision algorithm to effective memory estimation for channel with memory // 2020 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO). 2020. P. 1–7. DOI: <https://doi.org/10.1109/SYNCHROINFO49631.2020.9166112>
4. Логинов С.С., Зуев М.Ю. Статистические характеристики генераторов псевдослучайных сигналов на основе систем Лоренца, Чуа и Дмитриева-Кислова, реализованных над конечным полем Галуа // Инженерный вестник Дона. 2018. № 4. С. 1–13. URL: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5358>
5. Loginov S.S., Zuev M.Y., Testing of generators of pseudo-random signals based on a Lorenz system, realized over a Galois finite field // 2018 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO). 2018. P. 1–4. DOI: <https://doi.org/10.1109/SYNCHROINFO.2018.8457039>
6. Loginov S.S., Zuev M.Y. Chaotic systems based pseudo-random signal generators realized over a Galois Finite Field // 2019 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO). 2019. P. 1–4. DOI: <https://doi.org/10.1109/SYNCHROINFO.2019.8814039>
7. Loginov S.S., Zuev M.Y., Agacheva Y.G. A pseudorandom signal generator based on the Lorentz system subjected to quasi-resonant action // 2020 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECOF). 2020. P. 1–4. DOI: <https://doi.org/10.1109/WECOF48837.2020.9131530>
8. Zuev M.Y., Loginov S.S. Practical implementation of a pseudo-random signal generator based on the Lorenz system realized on FPGA // 2019 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO). 2019. P. 1–4. DOI: <https://doi.org/10.1109/SYNCHROINFO.2019.8814209>
9. Шинаков Ю.С. Пик-фактор сигналов OFDM и нелинейные искажения в радиооборудовании систем беспроводного доступа // Цифровая обработка сигналов. 2012. № 4. С. 58–65. URL: [http://www.dsps.ru/articles/year2012/jour12\\_4/art12\\_4\\_11.pdf](http://www.dsps.ru/articles/year2012/jour12_4/art12_4_11.pdf)
10. Han S.H., Lee J.H. An overview of peak-to-average power ratio reduction techniques for multicarrier transmission // IEEE Wireless Communications. 2005. Vol. 12, no. 2. P. 56–65. DOI: <https://doi.org/10.1109/MWC.2005.1421929>
11. Wei Z., Zhang C., Chen C. Chaos based IQ encryption for PAPR reduction and security enhancement in OFDMA PON system // Procedia Engineering. 2016. Vol. 140. P. 30–35. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.09.234>
12. Султанов А.Х., Мешков И.К., Ишмиряев А.А. Метод повышения энергетической эффективности систем OFDM, основанный на уменьшении пик-фактора // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2018. Т. 21, № 3. С. 25–31. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7014>
13. Sharma C., Tomar S.K., Gupta A.K. PAPR reduction in OFDM system using adapting coding technique with pre distortion method // WSEAS Transactions on Communications. 2011. Vol. 10. P. 255–262.
14. Lerner I.M., Fayzullin R.R. The study of features of functioning of channel with memory and APSK-N-signal. The possibilities of increasing its spectral efficiency // 2019 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECOF). 2019. P. 1–7. doi: <https://doi.org/10.1109/WECOF.2019.8840586>
15. Гаранин М.В., Журавлев В.И., Кунегин С.В. Системы и сети передачи информации. М.: Радио и связь, 2001. 336 с.

## References

1. Dong E. et al. A chaotic images encryption algorithm with the key mixing proportion factor. 2008 International Conference on Information Management, Innovation Management and Industrial Engineering, 2008, pp. 169–174. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICIII.2008.25>
2. Dmitriev A.S., Panas A.I. *Dynamic Chaos: New Information Carriers for Communication Systems*. Moscow: Izd-vo fiz.-mat. lit., 2002, 252 p. (In Russ.)
3. Lerner I.M., Il'in V.I. New precision algorithm to effective memory estimation for channel with memory. 2020 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO), 2020, pp. 1–7. DOI: <https://doi.org/10.1109/SYNCHROINFO49631.2020.9166112>
4. Loginov S.S., Zuev M.Yu. Statistical characteristics of pseudo-random signal generators based on Lorentz, Chua and Dmitriev-Kislov systems implemented over a finite Galois field. *Inzhenernyj vestnik Dona*, 2018, no. 4, pp. 1–13. URL: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5358> (In Russ.)
5. Loginov S.S., Zuev M.Y. Testing of generators of pseudo-random signals based on a Lorenz system, realized over a Galois finite field. 2018 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO), 2018, pp. 1–4. DOI: <https://doi.org/10.1109/SYNCHROINFO.2018.8457039>
6. Loginov S.S., Zuev M.Y. Chaotic systems based pseudo-random signal generators realized over a Galois Finite Field. 2019 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO), 2019, pp. 1–4. DOI: <https://doi.org/10.1109/SYNCHROINFO.2019.8814039>
7. Loginov S.S., Zuev M.Y., Agacheva Y.G. A pseudorandom signal generator based on the Lorentz system subjected to quasi-resonant action. 2020 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECOF), 2020, pp. 1–4. DOI: <https://doi.org/10.1109/WECOF48837.2020.9131530>



8. Zuev M.Y., Loginov S.S. Practical implementation of a pseudo-random signal generator based on the Lorenz system realized on FPGA. *2019 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO)*, 2019, pp. 1–4. DOI: <https://doi.org/10.1109/SYNCHROINFO.2019.8814209>
9. Shinakov Yu.S. Crest factor of OFDM signals and nonlinear distortions in radio equipment of wireless access systems. *Tsifrovaja obrabotka signalov*, 2012, no. 4, pp. 58–65. URL: [http://www.dsps.ru/articles/year2012/jour12\\_4/art12\\_4\\_11.pdf](http://www.dsps.ru/articles/year2012/jour12_4/art12_4_11.pdf) (In Russ.)
10. Han S.H., Lee J.H. An overview of peak-to-average power ratio reduction techniques for multicarrier transmission. *IEEE Wireless Communications*, 2005, vol. 12, no. 2, pp. 56–65. DOI: <https://doi.org/10.1109/MWC.2005.1421929>
11. Wei Z., Zhang C., Chen C. Chaos based IQ encryption for PAPR reduction and security enhancement in OFDMA PON system. *Procedia Engineering*, 2016, vol. 140, pp. 30–35. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.09.234>
12. Sultanov A.H., Meshkov I.K., Ishmiyarov A.A. OFDM system energy efficiency increasing method based on peak-factor decrease. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2018, vol. 21, no. 3, pp. 25–31. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7014> (In Russ.)
13. Sharma C., Tomar S.K., Gupta A.K. PAPR reduction in OFDM system using adapting coding technique with pre distortion method. *WSEAS Transactions on Communications*, 2011, vol. 10, pp. 255–262.
14. Lerner I.M., Fayzullin R.R. The study of features of functioning of channel with memory and APSK-N-signal. The possibilities of increasing its spectral efficiency. *2019 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF)*, 2019, pp. 1–7. DOI: <https://doi.org/10.1109/WECONF.2019.8840586>
15. Garanin M.V., Zhuravlev V.I., Kunegin S.V. *Information Transmission Systems and Networks*. Moscow: Radio i svjaz', 2001, 336 p. (In Russ.)

---

## Physics of Wave Processes and Radio Systems

2022, vol. 25, no. 1, pp. 55–64

DOI 10.18469/1810-3189.2022.25.1.55-64

Received 1 November 2021  
Accepted 3 December 2021

### Complex improvement of the efficiency of radio electronic devices and information transmission systems with OFDM based on nonlinear systems with dynamic chaos

Maxim Yu. Zuev 

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI  
10, Karl Marx Street,  
Kazan, 420111, Russia

*Abstract* – This article presents the results of modeling a communication system with OFDM using the methods of scrambling the transmitted signals and masking the transmitted information. The paper considers a method of scrambling the transmitted information with pseudo-random sequences obtained by a generator built on the basis of modified dynamic systems. Estimates of the probability of a bit error of the communication system under consideration are obtained, the peak-factor of signals, the correlation characteristics of the scrambled and initial information are estimated, and the entropy of the transmitted information. The results of the article can be used in the design of modern communication systems in order to increase the security of transmitted information and reduce the peak to average power ratio of the generated signals.

*Keywords* – pseudo-random sequence; OFDM; signal scrambling; information masking; information security; peak to average power ratio.

---

### Информация об авторе

Зуев Максим Юрьевич, инженер, окончил аспирантуру кафедры электронных и квантовых средств передачи информации Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева – КАИ (КНИТУ-КАИ), г. Казань, Россия.

*Область научных интересов:* динамический хаос, радиоэлектронные динамические системы, системы связи с ортогональным мультиплексированием, широкополосные системы связи.

*E-mail:* maxzv93@mail.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0002-1570-4751>

### Information about the Author

**Maxim Yu. Zuev**, engineer, post-graduate student of the Department of Electronic and Quantum Means of Information Transmission, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan, Russia

*Research interests:* dynamic chaos, radioelectronic dynamic systems, communication systems with orthogonal multiplexing, wideband communication systems.

*E-mail:* maxzv93@mail.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0002-1570-4751>

## Неравновесное охлаждение и нагревание жидкого кристалла МББА при фазовом переходе первого рода в длинной кювете

В.С. Казакевич, И.Л. Клюкач, Г.А. Мордовин

Самарский филиал Физического института имени П.Н. Лебедева РАН  
443011, Россия, г. Самара,  
ул. Ново-Садовая, 221

*Аннотация* – Методом критической опалесценции исследован фазовый переход первого рода нематического жидкого кристалла МББА с примесью бензола при большой толщине кюветы. Опалесценция наблюдалась в двух критических точках перехода. По дифракции Фраунгофера определены поперечные пространственные параметры доменов. Предложена гипотеза о равенстве продольного параметра корреляции доменов длине кюветы.

*Ключевые слова* – жидкий поликристалл; степень неравновесности; критическая опалесценция.

### Введение

В своей лекции лауреат Нобелевской премии В.Л. Гинзбург писал, что исследование фазовых переходов первого рода является актуальной задачей на начало XXI века [1]. В конце XX века в фазовых переходах второго рода были обнаружены по две критические точки. Они наблюдались А.А. Собяниным в кристалле сегнетовой соли [2; 3]. Уникальной особенностью этого сегнетоэлектрика является наличие двух точек Кюри. Это возможно для кристалла, лежащего свободно (незажатого). Других таких материалов в природе не существует. Две критические точки наблюдались также в работах [4–7] при фазовом переходе второго рода в жидком кристалле (ЖК) из нематической фазы в смектическую  $\alpha$ -фазу при добавлении примеси (6OSB или 8OSB). В работах [4–7] пространственные параметры корреляции были измерены с помощью рентгеновского рассеяния и корреляционные параметры были равны 200 ангстрем. Двойные критические точки обнаружены И.Л. Фабелинским [8] при фазовом переходе второго рода в бинарных растворах, содержащих гваякол и глицерин с добавлением воды. В [8] представлены измерения температурных зависимостей пространственных параметров флуктуации концентрации методом рассеяния Рэлея. Параметры корреляции не превышали 3 мкм. В перечисленных работах критические точки находились в крайних точках фазовых переходов второго рода. В работах [2–8] использовалась приближенная феноменологическая теория Ландау – де Жена [9; 10], в которой все параметры корреляции близки друг другу.

В тонких слоях нематических ЖК обнаружены домены при акустическом сдвиге и при действии электрического поля [11].

Жидкие кристаллы обладают высокой нелинейностью [12–16]. Нелинейность жидких кристаллов равна  $1 \text{ см}^2/\text{Вт}$ . Однако в опытах по нелинейной оптике толщина кювет с ЖК не превышала 340 мкм из-за непрозрачности мезофазы [13; 14]. Представляет интерес изучение нелинейных свойств ЖК в длинных кюветах для увеличения нелинейной длины взаимодействия.

Методом критической опалесценции был исследован неравновесный фазовый переход первого рода в нематическом ЖК МББА с примесью в длинной кювете. В ЖК МББА с примесью были найдены две особые и критические температурные точки внутри фазового перехода.

Объектом исследования был нематический жидкий кристалл МББА (n-(4-метоксибензилиден)-4-бутиланилин). Химическая формула  $\text{C}_{18}\text{H}_{21}\text{NO}$ . Молекула МББА представляет собой «стержень» длиной 40 ангстрем с поперечным сечением порядка 5 ангстрем. Кислород слева порождает дипольный момент.

Две молекулы МББА с дипольным моментом создают неполярные структуры с нулевым дипольным моментом. Нематический ЖК МББА представляет собой поликристалл с хаотической ориентацией нитей [17; 18].

### 1. Схема эксперимента

В установке кювета с ЖК длиной 15 мм и диаметром 20 мм помещается в трехуровневый термостат. Имеется электронный блок управления

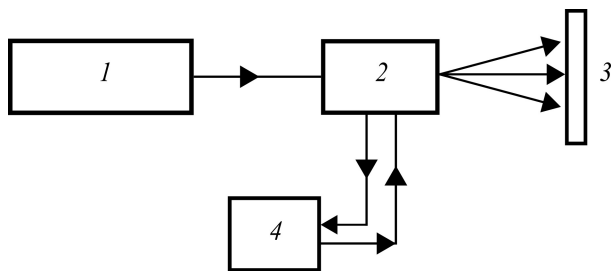


Рис. 1. Схема эксперимента по рассеянию в ЖК МББА: 1 – лазер; 2 – термостат; 3 – экран; 4 – электронный блок  
 Fig. 1. Scheme of the experiment on scattering in LC MBBA: 1 – laser; 2 – thermostat; 3 – screen; 4 – electronic unit

температурой внутри термостата. Блок управляет температурой в интервале от 303 до 311 К, используя положительную обратную связь. Электронный блок задает и контролирует температуру в термостате с точностью  $10^{-3}$  градусов. Рост температуры от времени при нагреве напоминает график заряда конденсатора. Ручное управление позволяет быстро попадать в заданный интервал температур, а затем медленно двигаться в этом интервале под управлением электронного блока (рис. 1).

Диагностика ЖК МББА осуществлялась по рассеянию на экране. Использовалось излучение одномодового лазера LCM-DJL-319-OJ, длина волны 0,53 мкм, длина импульса 6 нс, диаметр пучка 1,1 мм, расходимость  $0,5 \cdot 10^{-3}$  радиан, поляризация линейная (горизонтальная).

В управлении был использован принцип положительной обратной связи. В эксперименте использовался также и непрерывный лазер на смеси He и Ne мощностью 1 мВт, работающий в режиме многих поперечных мод. Рассеиваемое ЖК-излучение наблюдалось на экране, расположенном на расстоянии 1 м от кюветы.

Равновесные процессы состоят из следующих друг за другом состояний равновесия. Параметрами состояния нашей системы являются (давление, температура и концентрация примеси). При охлаждении и нагревании меняется только один параметр – температура. Скорость изменения температуры во времени определяет степень неравновесности. При неравновесном охлаждении скорость приблизительно равна один градус в секунду и зависит от температуры в лаборатории. Максимальная скорость при нагревании – один градус в секунду. Такой скорости нагрева удастся достичь при применении ручного управления. Однако использование при охлаждении и нагреве положительной обратной связи позволяет достичь скорости ноля градусов в секунду.

## 2. Особые точки фазового перехода

ЖК МББА в нашем эксперименте содержал примесь бензола с концентрацией 2 %. Характерная фазовая диаграмма для равновесного и квазиравновесного перехода смеси (МББА-бензол) представлена в [19].

При квазиравновесном изменении температуры ЖК попадает в узкую область с двумя фазами. Изотропная фаза и мезофаза при равновесном переходе разделяются пространственно. Процесс перехода идет с сохранением концентрации примеси 2 %.

При неравновесном нагреве до температуры  $T^* = 308,11 \text{ К} \pm 0,01 \text{ К}$  ЖК МББА будет прозрачен. При неравновесном охлаждении до температуры  $T^{**} = 303,46 \text{ К} \pm 0,01 \text{ К}$  весь ЖК МББА переходит в состояние мезофазы. Ширина фазового перехода равна  $T^* - T^{**} = \Delta T = 4,65 \text{ К} \pm 0,01 \text{ К}$ . Неравновесное охлаждение и нагревание позволяло наблюдать критическую опалесценцию при температурах  $T_{кр.охл} = 304,04 \text{ К} \pm 0,01 \text{ К}$  и  $T_{кр.наг} = 305,38 \text{ К} \pm 0,01 \text{ К}$ . Расстояние между этими точками  $T_{нер.} = (T_{кр.наг} - T_{кр.охл}) = 1,34 \text{ К} \pm 0,01 \text{ К}$ . Критическая опалесценция в начале наблюдается в критической точке охлаждения с температурой  $T_{кр.охл}$ , а затем при нагревании – в точке  $T_{кр.наг}$ . Порядок следования точек изменить нельзя.

Рассеянное доменами излучение состоит из отдельных ярких пятен, известных под названием спеклы (рис. 2, а и б). Спеклы движутся. Вблизи критических точек дрейф спеклов прекращается.

При охлаждении вблизи критической точки на экране наблюдается регулярная кольцевая структура, характерная для дифракции Фраунгофера на круглом отверстии (рис. 2, б).

Радиус первого темного кольца при дифракции равен  $3,5 \text{ см} \pm 0,1 \text{ см}$ . Осевая симметрия говорит о равенстве двух поперечных пространственных параметров корреляции. Формула Фраунгофера для первого темного кольца дает нам поперечные параметры доменов при различных температурах  $T > T_{кр.охл}$

$$R_{кор} = 0,61\lambda / \theta_{дифр}, \quad (1)$$

где  $\lambda$  – длина волны излучения,  $\theta_{дифр}$  – угол дифракции.

Поперечный пространственный параметр корреляции равен  $9,2 \text{ мкм} \pm 0,3 \text{ мкм}$  при температуре 304,15 К. Этот параметр поперечной корреляции проявляет себя на рис. 2, б. При достижении температуры  $T_{кр.охл} = 304,04 \text{ К} \pm 0,01 \text{ К}$  ЖК становится непрозрачным.

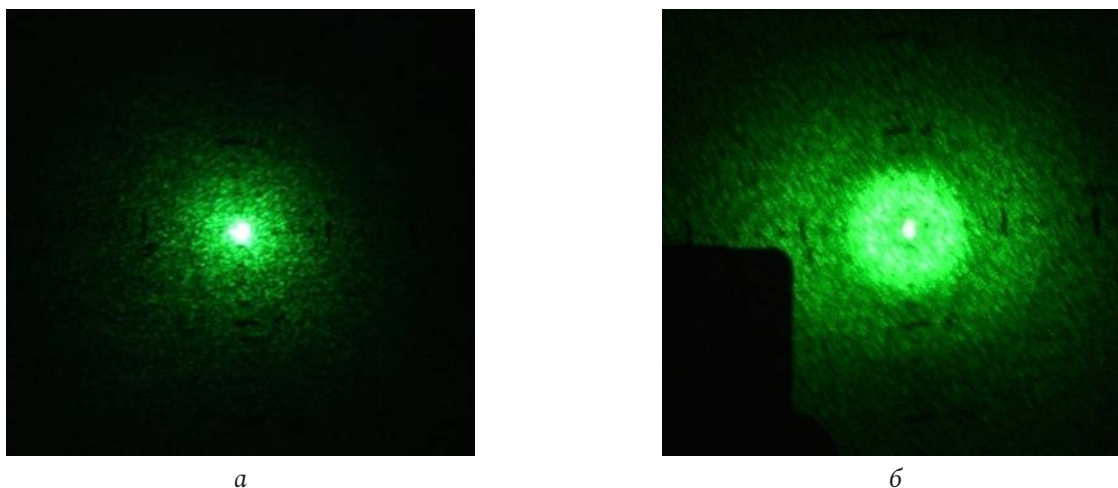


Рис. 2. Неравновесное охлаждение ЖК задолго до критической опалесценции (а). Неравновесное охлаждение вблизи точки  $T > T_{кр.охл}$  (б)  
Fig. 2. Nonequilibrium cooling of LC long before critical opalescence (a). Non-equilibrium cooling near the point  $T > T_{cr,cool}$  (b)

При неравновесном нагреве и достижении температуры  $T_{кр.наг} = 305,38 \text{ К} \pm 0,01 \text{ К}$  наблюдается вторая критическая точка опалесценции. Смесь двух фаз становится прозрачной при выходе из критической точки нагревания.

Неоднородность смеси фаз выше критических точек обусловлена наличием в смеси доменов. Домены здесь имеют меньшую плотность из-за наличия примеси бензола меньше 2 %. Смесь фаз, окружающая домены, более плотная и содержит процент бензола больше 2 %.

При неравновесном фазовом переходе мы имеем однородную и неоднородную смеси фаз. Однородная смесь двух фаз зафиксирована при охлаждении и нагревании ниже критических точек. Неоднородная смесь фаз имеет место от точки входа в фазовый переход до критических точек.

Точность измерений температуры гарантирована следующими обстоятельствами: а) измерения каждой температуры выполнены не менее 7 раз; б) когерентное излучение лазера порождает на экране спеклы. Вблизи критических точек движение спеклов скачком замедляется, что связано с достижением наибольшего числа доменов. При приближении к  $T_{кр.охл}$  интенсивность мало углового рассеяния растет согласно феноменологической теории Ландау – де Жена [9; 10].

### 3. Обсуждение результата охлаждения и нагревания

Коэффициенты поверхностного натяжения стекол ( $0,29\text{--}0,35 \text{ Дж/м}^2$ ), а ЖК МББА ( $0,04 \text{ Дж/м}^2$ ). Боковые стенки кюветы неполированные. Поэтому все домены перпендикулярны окнам кюветы так,

как здесь пространственный параметр корреляции в МББА имеет наибольшие значения, а группа симметрии неравновесной смеси доменов соответствует симметрии цилиндра. К нашей работе теория Ландау – де Жена оказалась неприменимой [9; 10], так как длина доменов была много больше поперечных параметров корреляции. Их длина определяет продольный параметр корреляции.

В координатах ( $y = I/I_0$ ,  $x = kT$ , где  $k$  – постоянная Больцмана) по оси абсцисс отложена энергия, а по оси ординат – нормированная интенсивность лазерного излучения. Интенсивность  $I_0$  измеряется на входе в кювету при температуре 306 К. Интенсивность  $I$  измеряется на выходе из кюветы при изменении температуры согласно графику. Два наложенных графика похожи на петлю гистерезиса. Обход по этой петле подобен обходу по петле гистерезиса при намагничивании ферромагнетика (рис. 3). Площадь петли измеряется энергией  $\Delta E = k\Delta T = 1,29 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}$ . Эта энергия много меньше энергии теплового движения одной молекулы  $E = kT$ . В критических точках коэффициенты поверхностного натяжения фаз, составляющих смесь, всегда равны друг другу. В нижней критической точке коэффициент поверхностного натяжения меньше, чем в верхней критической точке. Используются нейтральные светофильтры серии НС.

Упорядоченную структуру одного домена можно назвать жидким монокристаллом. В кювете, имеющей пучок из большого количества доменов, мы имеем дело с жидким упорядоченным поликристаллом. ЖК МББА в мезофазе является неупорядоченным поликристаллом [20]. Длина жидкого упорядоченного поликристалла равна длине

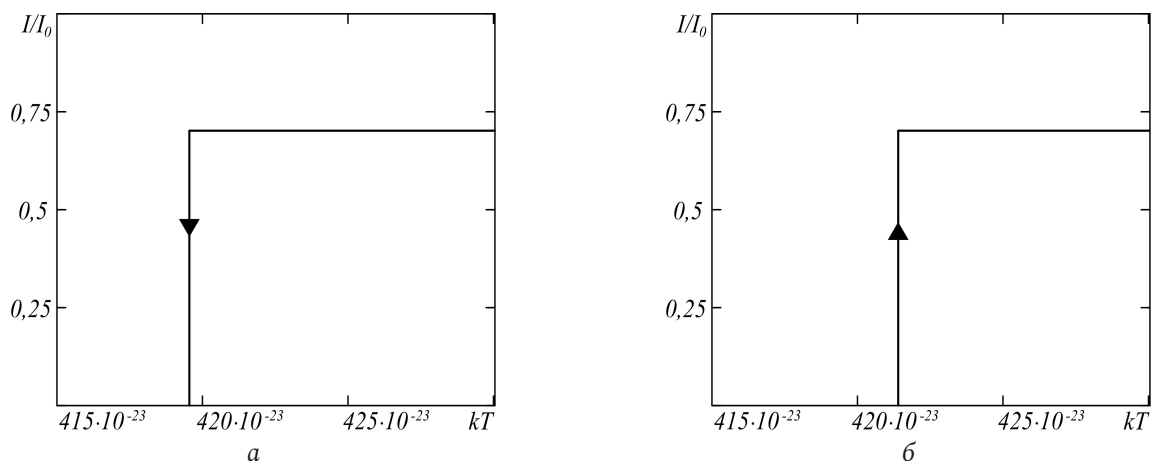


Рис. 3. Графики охлаждения (а) и нагревания (б) выделяют некоторую область, напоминающую петлю гистерезиса  
 Fig. 3. Graphs of cooling (a) and heating (b) highlight a certain area resembling a hysteresis loop

кюветы 15 мм, из-за большой разницы коэффициентов поверхностного натяжения стекла и ЖК.

### Заключение

Методом критической опалесценции изучены особенности фазового перехода первого рода в ЖК МББА с примесью. В эксперименте использовалась кювета длиной 15 мм что превышает размеры кювет в работах других авторов. В ЖК МББА открыты две критические точки, обладающие

рядом уникальных особенностей. Критическая точка охлаждения всегда наблюдается первой при опалесценции. Критическая точка нагревания всегда наблюдается после критической точки охлаждения. Длина кюветы, по нашей оценке, не должна превышать 15–30 мм. Обе критические точки (охлаждения и нагревания) находятся внутри фазового перехода первого рода, что не соответствует расположению критических точек при фазовых переходах второго рода [2–8].

### Список литературы

1. Гинзбург В.Л. О сверхпроводимости и сверхтекучести (что мне удалось сделать, а что не удалось), а также о «физическом минимуме» на начало XXI века // УФН. 2004. Т. 174, № 11. С. 1240–1255. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0174.200411g.1240>
2. Собянин А.А. Общие свойства систем с «двойной» критической точкой // УФН. 1986. Т. 149, № 2. С. 325–328. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0149.198606e.0325>
3. Новое о динамике кристаллов сегнетовой соли (системы с «двойной» критической точкой) / А.А. Волков [и др.] // УФН. 1986. Т. 149, № 2. С. 331–334. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0149.198606g.0331>
4. Guillon D., Cladis P.E., Stamatoff J. X-ray study and microscopic study of the reentrant nematic phase // Phys. Rev. Lett. 1978. Vol. 41, no. 23. P. 1598–1601. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.41.1598>
5. Polymorphisme des substances mésogènes a molécules polaires. I. Physico-chimie et structure / F. Hardouin [et al.] // J. Chim. Phys. 1983. Vol. 80. P. 53–64. DOI: <https://doi.org/10.1051/jcp/1983800053>
6. Nematic-smectic A-reentrant nematic transitions in 80CB/60CB mixtures / A.R. Kortan [et al.] // Journal de Physique. 1984. Vol. 45, № 3. P. 529–538. DOI: <https://doi.org/10.1051/jphys:01984004503052900>
7. High-resolution x-ray-scattering study of the nematic-smectic A-reentrant nematic transitions in 80CB/60CB mixtures / A.R. Kortan [et al.] // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 47, no. 17. P. 1206–1209. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.47.1206>
8. Фабелинский И.Л., Кривохижа С.В., Чайков Л.Л. Экспериментальное исследование растворов с «двойной» критической точкой // УФН. 1986. Т. 149, № 2. С. 328–331. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0149.198606f.0328>
9. Зубков Л.А., Романов В.П. Критическая опалесценция // УФН. 1988. Т. 154, № 4. С. 615–659. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0154.198804c.0615>
10. Де Жен П. Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977. 400 с.
11. Денисова О.А. Структурные переходы в жидких кристаллах, индуцируемые акустическими и электрическими полями. Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Челябинск, 2014. 294 с.
12. Ахманов С.А., Никитин С.Ю. Физическая оптика. М.: МГУ, 2004. 656 с.
13. Durbin S.D., Arakelian S.M., Shen Y.R. Laser-induced diffraction rings from a nematic-liquid-crystal film // Optics Letters. 1981. Vol. 6, no. 9. P. 411–413. DOI: <https://doi.org/10.1364/ol.6.000411>
14. Зельдович Б.Я., Табириян Н.В. Ориентационная оптическая нелинейность жидких кристаллов // УФН. 1985. Т. 147, № 4. С. 633–674. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0147.198512a.0633>

15. Бистабильность поля директора нематического жидкого кристалла в низкочастотном электрическом и пространственно ограниченном световом полях / А.С. Золотко [и др.] // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2004. № 3. С. 7–15.
16. Нелинейно-оптические свойства жидких кристаллов, допированных гребнеобразным полимером с азобензольными мезогенными группами / И.А. Будаговский [и др.] // Жидкие кристаллы и их практическое использование. 2006. Вып. 4 (18). С. 22–39. URL: <https://istina.msu.ru/publications/article/27991405/>
17. Блинов Л.М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М.: Наука, 1978. 384 с.
18. Блинов Л.М. Жидкие кристаллы: структура и свойства. М.: Книжный дом «Либроком», 2013. 480 с.
19. Жидкие кристаллы / под ред. С.И. Жданова. М.: Химия, 1979. 328 с.
20. Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. М.: Наука, 1969. 399 с.

## References

1. Ginzburg V.L. About superconductivity and superfluidity (what I managed to do and what I failed), as well as about the «physical minimum» at the beginning of the 21st century. *UFN*, 2004, vol. 174, no. 11, pp. 1240–1255. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0174.200411g.1240> (In Russ.)
2. Sobjanin A.A. General properties of systems with a «double» critical point. *UFN*, 1986, vol. 149, no. 2, pp. 325–328. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0149.198606e.0325> (In Russ.)
3. Volkov A.A. et al. New on the dynamics of Rochelle salt crystals (systems with a «double» critical point). *UFN*, 1986, vol. 149, no. 2, pp. 331–334. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0149.198606g.0331> (In Russ.)
4. Guillon D., Cladis P.E., Stamatoff J. X-ray study and microscopic study of the reentrant nematic phase. *Phys. Rev. Lett.*, 1978, vol. 41, no. 23, pp. 1598–1601. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.41.1598>
5. Hardouin F. et al. Polymorphisme des substances mésogènes a molécules polaires. I. Physico-chimie et structure. *J. Chim. Phys.*, 1983, vol. 80, pp. 53–64. DOI: <https://doi.org/10.1051/jcp/1983800053>
6. Kortan A.R. et al. Nematic-smectic A-reentrant nematic transitions in 80CB: 60CB mixtures. *Journal de Physique*, 1984, vol. 45, no. 3, pp. 529–538. DOI: <https://doi.org/10.1051/jphys:01984004503052900>
7. Kortan A.R. et al. High-resolution x-ray-scattering study of the nematic-smectic A-reentrant nematic transitions in 80CB/60CB mixtures. *Phys. Rev. Lett.*, 1981, vol. 47, no. 17, pp. 1206–1209. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.47.1206>
8. Fabelinskij I.L., Krivohizha S.V., Chajkov L.L. Experimental study of solutions with a «double» critical point. *UFN*, 1986, vol. 149, no. 2, pp. 328–331. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0149.198606f.0328> (In Russ.)
9. Zubkov L.A., Romanov V.P. Critical opalescence. *UFN*, 1988, vol. 154, no. 4, pp. 615–659. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0154.198804c.0615> (In Russ.)
10. De Zhen P. *Physics of Liquid Crystals*. Moscow: Mir, 1977, 400 p. (In Russ.)
11. Denisova O.A. Structural transitions in liquid crystals induced by acoustic and electric fields. Dis. ... dokt. fiz.-mat. nauk. Cheljabinsk, 2014. 294 p. (In Russ.)
12. Ahmanov S.A., Nikitin S.Yu. *Physical Optics*. Moscow: MGU, 2004, 656 p. (In Russ.)
13. Durbin S.D., Arakelian S.M., Shen Y.R. Laser-induced diffraction rings from a nematic-liquid-crystal film. *Optics Letters*, 1981, vol. 6, no. 9, pp. 411–413. DOI: <https://doi.org/10.1364/ol.6.000411>
14. Zel'dovich B.Ya., Tabirjan N.V. Orientational optical nonlinearity of liquid crystals. *UFN*, 1985, vol. 147, no. 4, pp. 633–674. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0147.198512a.0633> (In Russ.)
15. Zolot'ko A.S. et al. Bistability of the director field of a nematic liquid crystal in low-frequency electric and spatially limited light fields. *Kratkie soobsheniya po fizike FIAN*, 2004, no. 3, pp. 7–15. (In Russ.)
16. Budagovskij I.A. et al. Nonlinear optical properties of liquid crystals doped with a comb-shaped polymer with azobenzene mesogenic groups. *Zhidkie kristally i ih prakticheskoe ispol'zovanie*, 2006, no. 4 (18), pp. 22–39. URL: <https://istina.msu.ru/publications/article/27991405/> (In Russ.)
17. Blinov L.M. *Electro- and Magneto-Optics of Liquid Crystals*. Moscow: Nauka, 1978, 384 p. (In Russ.)
18. Blinov L.M. *Liquid Crystals: Structure and Properties*. Moscow: Knizhnyj dom «Librokom», 2013, 480 p. (In Russ.)
19. *Liquid Crystals*. Ed. by S.I. Zhdanov. Moscow: Himija, 1979, 328 p. (In Russ.)
20. Landau L.D., Ahiezer A.I., Lifshits E.M. *Course of General Physics. Mechanics and Molecular Physics*. Moscow: Nauka, 1969, 399 p. (In Russ.)

---

## Physics of Wave Processes and Radio Systems 2022, vol. 25, no. 1, pp. 65–70

DOI 10.18469/1810-3189.2022.25.1.55-64

Received 31 August 2021  
Accepted 1 October 2021

### Non-equilibrium cooling and heating of an MBBA liquid crystal at the first-order phase transition in a long cell

---

**Vladimir S. Kazakevich, Igor L. Klyukach, Gennady A. Mordovin**

Samara branch of P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences  
221, Novo-Sadovaya Street,  
Samara, 443011, Russia

*Abstract* – The first-order phase transition of an MBBA nematic liquid crystal with benzene impurity has been studied by the critical opalescence method at a large cell thickness. Opalescence has been observed at two critical transition points. The spatial transverse parameters of the domains are determined from the Fraunhofer diffraction. The hypothesis about the longitudinal correlation parameter of domains is equal to the cell length has been proposed.

*Keywords* – liquid polycrystal; degree of disequilibrium; critical opalescence.

---

**Информация об авторах**

**Казакевич Владимир Станиславович**, 1954–2019 гг., кандидат физико-математических наук, директор Самарского филиала Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* лазерная физика, нелинейная оптика.

**Ключах Игорь Леонидович**, 1945 г. р., кандидат физико-математических наук, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* лазерная физика, нелинейная оптика.

*E-mail:* i.klykach@yandex.ru

**Мордовин Геннадий Андреевич**, 1949 г. р., ведущий инженер Самарского филиала Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* лазерная физика, нелинейная оптика.

*E-mail:* mordovin.ga@yandex.ru

**Information about the Authors**

**Vladimir S. Kazakevich**, 1954–2019, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, head of the Samara branch of P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara, Russia.

*Research interests:* laser physics, nonlinear optics.

**Igor L. Klyukach** was born in 1945, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Samara, Russia.

*Research interests:* laser physics, nonlinear optics.

*E-mail:* i.klykach@yandex.ru

**Gennady A. Mordovin** was born in 1949, lead engineer of the Samara branch of P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara, Russia.

*Research interests:* laser physics, nonlinear optics.

*E-mail:* mordovin.ga@yandex.ru

## Разработка программного обеспечения для реализации модели пористых структур на основе трехпериодических поверхностей

М.И. Смольков<sup>1, 2</sup>, А.Ф. Крутов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Самарский государственный технический университет  
443100, Россия, г. Самара,  
ул. Молодогвардейская, 244

<sup>2</sup> Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики  
443010, Россия, г. Самара,  
ул. Л. Толстого, 23

*Аннотация* – На основе оригинального алгоритма генерации трехпериодических поверхностей, реализованного в информационно-аналитической системе ToposPro, была разработана математическая модель пористого материала. Написано программное обеспечение TPS Extractor для компьютерной реализации этой модели. В разработанном программном обеспечении были реализованы оригинальные алгоритмы триангуляции, трансляции, сглаживания и наращивания толщины. Разработанные алгоритмы триангуляции были использованы для построения 103 трехпериодических поверхностей, и на их основе были построены модели соответствующих пористых материалов. На основе моделей пористых материалов было проведено исследование работоспособности алгоритмов сглаживания и трансляции. С помощью алгоритма наращивания толщины были созданы модели пористого материала, подходящие для 3D-печати. Также была проведена распечатка образцов данных пористых моделей из термопластика методом послойного наплавления.

*Ключевые слова* – кристаллография; атомная сетка; топологическая структура; тайлинг; пористые материалы; вычислительная геометрия; объектно ориентированное программирование; 3D-моделирование; 3D-печать.

### Введение

Теория минимальных поверхностей уже давно стала предметом математических исследований (см., например, обзоры [1; 2]). Эта теория является объектом изучения для различных разделов математики: комплексного анализа, вариационных принципов, дифференциальной геометрии, топологии, теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории геометрических мер и других [2; 3]. В последнее время появился практический интерес к минимальным поверхностям и другим трехпериодическим поверхностям, в частности с точки зрения их механических свойств [4; 5].

Для разработки общих методов построения трехпериодических и минимальных поверхностей большое значение имеет серия работ [6–9]. В данных статьях используется тот факт, что трехпериодические минимальные поверхности делят трехмерное пространство на два непересекающихся конгруэнтных лабиринта, и способы построения таких поверхностей изучаются с точки зрения их свойств симметрии. Симметрии поверхности описываются группой  $G$ , которая является полной группой пространственных симметрий поверхности, и некоторой ее подгруппой  $H$  с индексом 2, которая не перемешивает данные лабиринты при

соответствующих преобразованиях. Далее в работах [6–9] использовались известные кристаллографические группы в качестве  $G$ - $H$  групп, и на их основе была построена серия трехпериодических минимальных поверхностей. Существуют и другие примеры построения трехпериодических и минимальных поверхностей [1; 2], тем не менее можно сказать, что в настоящее время не найдены общие методы генерации трехпериодических и минимальных поверхностей в трехмерном пространстве.

В данной работе мы предлагаем оригинальный обобщенный подход получения трехпериодических поверхностей, идея которого восходит к работам [6–9]. Наш подход основан на алгоритме получения трехпериодических поверхностей на основе их природных аналогов – кристаллов.

В качестве исходного инструмента используется известный в мире комплекс программ ToposPro [10; 11], который позволяет анализировать и определять топологическую и геометрическую структуру кристаллов. В частности, он может выделять отдельные структурные единицы решетки – тайлы и на их основе собирать элементарные ячейки кристаллов в виде каркасов. Так, на основе кристаллографических решеток т. н. цеолитов ToposPro строит элементарную ячейку трехмер-



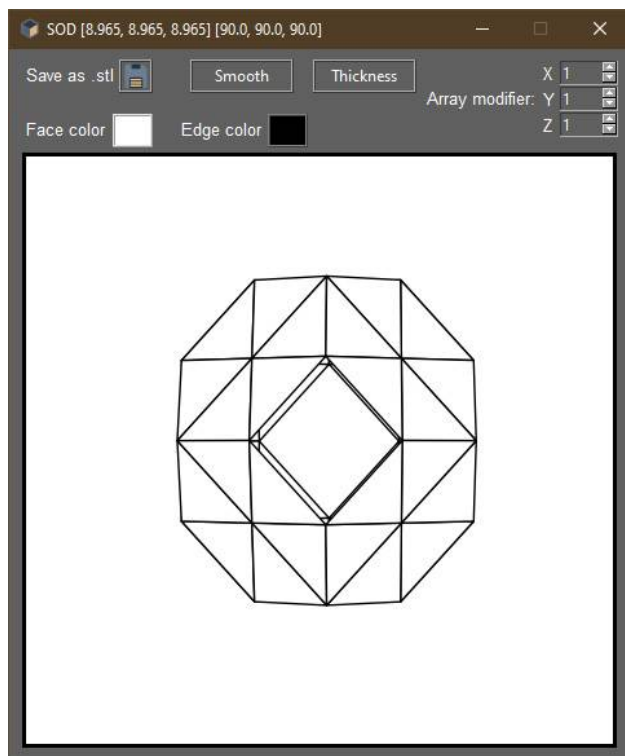


Рис. 1. Окно приложения TPS Extractor с открытым каркасом SOD

Fig. 1. TPS Extractor application window with SOD framework open

ной периодической поверхности. После удаления некоторых граней и открытия каналов элементарная ячейка принимает форму пористого скелета, образованного плоскими многоугольниками, – каркаса. Задача настоящей статьи заключается в разработке программного обеспечения для реализации модели пористых структур на основе сгенерированных в ToposPro каркасов различного топологического типа. Для получения трехмерной периодической поверхности с системой бесконечных непересекающихся лабиринтов необходимо сшить элементарные ячейки на границах. С этой целью была написана процедура трансляции элементарной ячейки, реализованная в разработанной в данной статье программе TPS Extractor.

Для получения гладкой поверхности из каркаса необходимо провести процедуру сглаживания. Эта процедура также реализована в созданной программе. В качестве параметра, определяющего качество сглаживания, мы выбрали так называемую среднюю кривизну, которая для минимальных поверхностей равна нулю в каждой точке поверхности. Таким образом, трехмерная периодическая поверхность будет представлять собой совокупность сшитых вместе малых элементарных поверхностей нулевой средней кривизны.

## 1. Программное обеспечение для моделирования пористого материала на основе трехпериодических поверхностей

Для получения трехпериодических поверхностей и моделирования пористых материалов на основе полученных в ToposPro каркасов было разработано программное обеспечение – TPS Extractor, позволяющее преобразовывать извлеченные из ToposPro каркасы, сохраненные в формате .t3g, в формат .stl или stereolithography – широко используемый формат для хранения трехмерных моделей объектов. Информация об объекте хранится как список треугольников, которые описывают его поверхность, и их нормалей. Этот формат является наиболее подходящим для печати этих каркасов на 3D-принтерах. Каркас, построенный с помощью ToposPro, представляет собой набор граней (колец) разного типа. Каждое кольцо – это набор точек с координатами вершин данного кольца в пространстве.

## 2. Форматы входных и выходных файлов

Извлеченные из ToposPro каркасы представляют собой текстовый файл формата .t3g, пример которого представлен ниже:

```
1 AFG: 3D surface formed by rings: 4a, 6a, 6c, 6d, 6f
2 12.54800 12.54800 20.78900
3 90.00 90.00 120.00
4 RING 4 a
5 0.08890 0.67060 0.37460
6 0.00350 0.75340 0.25000
7 0.24660 0.99650 0.25000
8 0.32940 0.91110 0.37460
9 ...
```

– Строка 1 содержит название каркаса (AFG), и все уникальные цепи атомов – кольца (4a, 6a, 6c, 6d, 6f);

– Строки 2 и 3 – параметры атомной ячейки: длина, ширина и высота ограничивающего параллелепипеда, а также углы его наклона относительно осей X, Y, Z;

– Строка 4 из ключевого слова RING и его типа (4 a);

– Строки с 5 по 8 – координаты атомов, составляющих замкнутую цепочку;

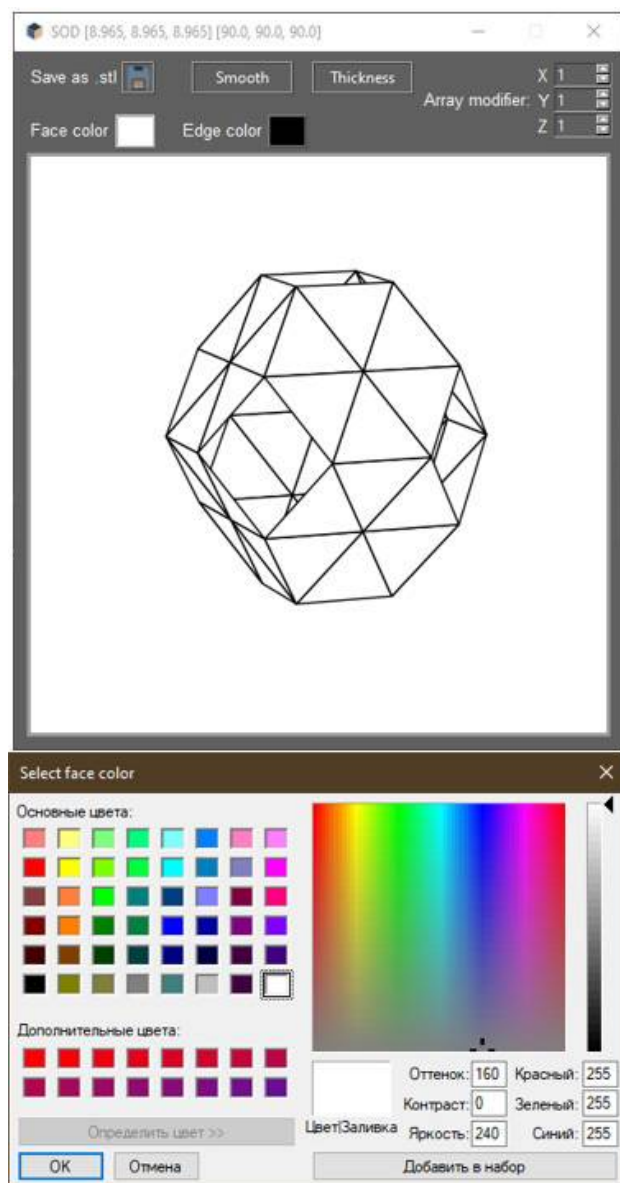


Рис. 2. Меню выбора цвета фасетов или граней созданной модели  
Fig. 2. Menu for selecting the color of facets or faces of the created model

– Оставшиеся строки аналогичны строкам с 4 по 8 для оставшихся колец.

На основе полученных данных разработанное приложение строит трехмерную модель каркаса, например содалита (SOD), как показано на рис. 1.

На рис. 1 также представлен интерфейс разработанного приложения. В заголовке окна описаны название каркаса (SOD) и параметры атомной ячейки.

Алгоритм конвертации из .t3g в .stl следующий:

Входной файл: набор колец из точек с координатами в пространстве.

1) Считываем .t3g файл и сохраняем имя каркаса (цеолита) и параметры атомной ячейки.

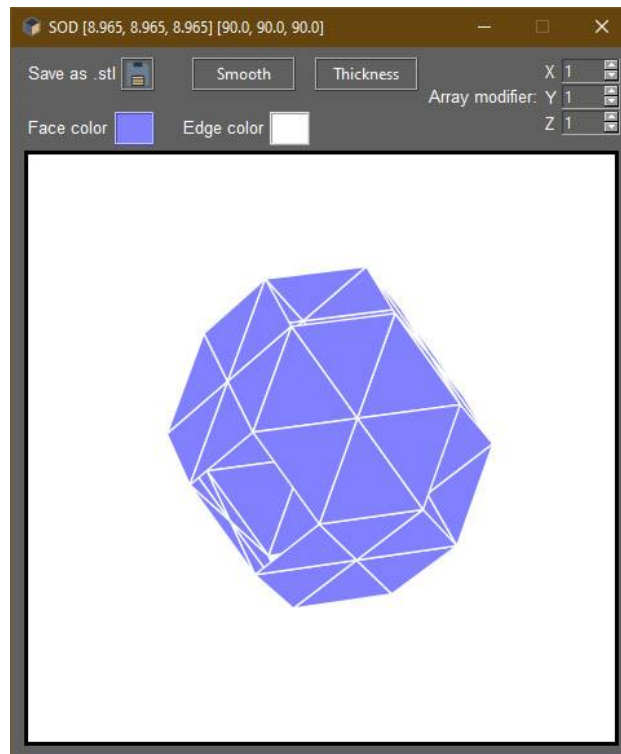


Рис. 3. Результат изменения цвета  
Fig. 3. Color change result

2) По метке ключевого слова RING считываем  $k$  координатных строк  $k$  вершин данного кольца.

3) Производим триангуляцию, находя центроид данного кольца. Координатами центроида кольца является среднее арифметическое координат его вершин. Создаем набор из  $k$  треугольников, отбирая точки обходя вершины кольца против часовой стрелки, причем каждая вторая точка в наборе – центроид кольца. В дальнейшем каждый треугольник из такого набора будем называть фасетом.

4) Полученный набор сохраняем для дальнейшего преобразования в некоторый массив данных.

5) Повторяем пункты 2, 3, 4 до конца файла.

6) Каждые координаты сохраненных наборов приводим к параметрам атомной ячейки, сохраненной прежде.

7) Формируем файл формата .stl согласно общепризнанному стандарту.

Выходной файл: STL-формат каркаса.

Параметр  $k$  в данном алгоритме равен количеству вершин кольца.

Разработанный графический интерфейс предоставляет возможности просмотра (вращение и увеличение масштаба) созданной 3D-модели, а также для удобства просмотра имеются возможности цветовой настройки фасетов и граней фигуры, как показано на рис. 2, 3.

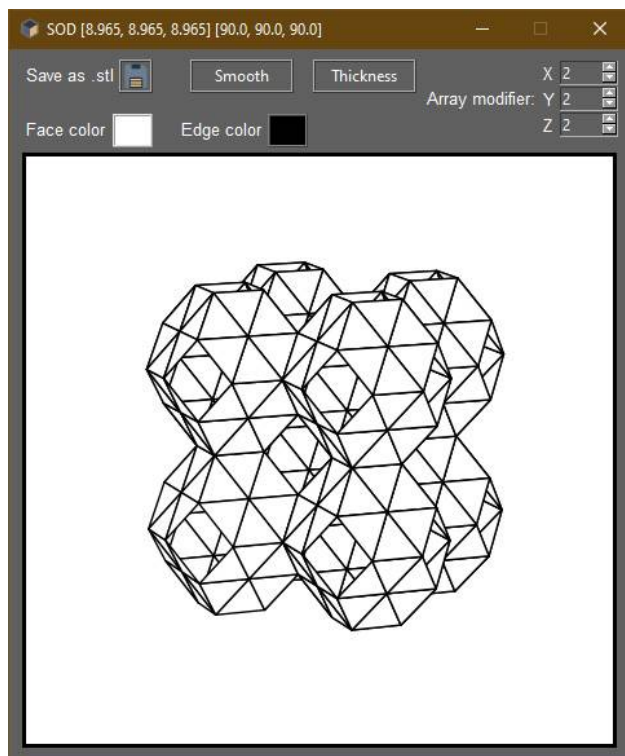


Рис. 4. Пример трансляции каркаса SOD  
Fig. 4. Example of SOD framework translation

Созданное приложение также позволяет сохранять полученную модель в файлы формата .stl. В разработанной программе присутствует конвертация в два типа формата файла STL:

- Бинарный – файл формата Binary .stl представляет собой особую структуру:

Заголовок в UINT8 – первые 80 байт, которые обычно игнорируются; используется для записи требуемой информации о модели;

Число треугольников в UINT32;

Для каждого фасета:

Координаты нормали фасета в REAL[32];

Координаты вершины №1 фасета в REAL[32];

Координаты вершины №2 фасета в REAL[32];

Координаты вершины №3 фасета в REAL[32];

Количество байт в UINT16

Конец файла

- ASCII – файл формата ASCII .stl представляет собой особую структуру:

Метка начала файла и название модели (необязательно)

Нормаль фасета и ее координаты

Начало фасета №1

Вершина №1 фасета и ее координаты

Вершина №2 фасета и ее координаты  
Вершина №3 фасета и ее координаты  
Конец фасета №1

...

Метка конца файла.

Для конвертации из формата .t3g, полученного с помощью программы ToposPro, в формат .stl были написаны алгоритм триангуляции и алгоритм расчета нормалей по правилу правой руки.

Алгоритм триангуляции производит разбиение полигонов полученного каркаса на фасеты и рассчитывает для них нормали с помощью алгоритма в соответствии с требованиями формата .stl: вектор нормали направлен наружу, вершины перечислены в порядке появления против часовой стрелки. Каркас в данном формате будет использоваться для печати на 3D-принтере.

### 3. Трансляция и сглаживание

Как было сказано ранее, для получения трехмерной периодической поверхности с системой каналов необходимо сшить элементарные ячейки на границах. Для этого была написана процедура трансляции.

В пространстве параллельный перенос в прямоугольной системе координат  $(x, y, z)$  выражается аналитически при помощи:

$$(x, y, z) \rightarrow (x + a, y + b, z + c),$$

где вектор  $\overline{MM_1} = (a, b, c)$  вычисляется из параметров элементарной ячейки. Пример трансляции представлен на рис. 4.

Для создания процедуры сглаживания необходимо было решить проблемы подсчета средней кривизны для триангулированных поверхностей и способ минимизации средней кривизны.

Подсчет средней кривизны был реализован с использованием результатов работы [12]. Для подтверждения работоспособности, написанного алгоритма был произведен численный эксперимент.

Для подтверждения правильности вычисления значения средней кривизны были созданы 120 экземпляров икосфер с разными радиусами. Пример икосферы представлен на рис. 5.

Известно, что средняя кривизна сферы в каждой точке равна константе и вычисляется по формуле:

$$H = \frac{1}{R},$$

где  $R$  – радиус сферы.

Результаты теоретического и численного расчета средней кривизны представлены в таблице.

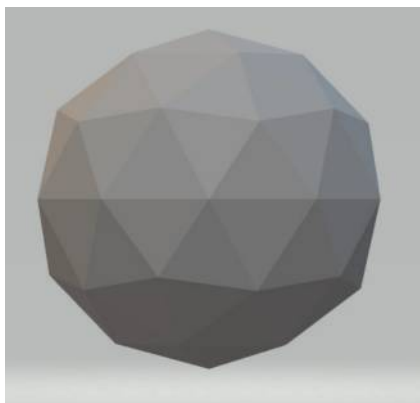


Рис. 5. Пример икосферы  
 Fig. 5. Example of an icosphere

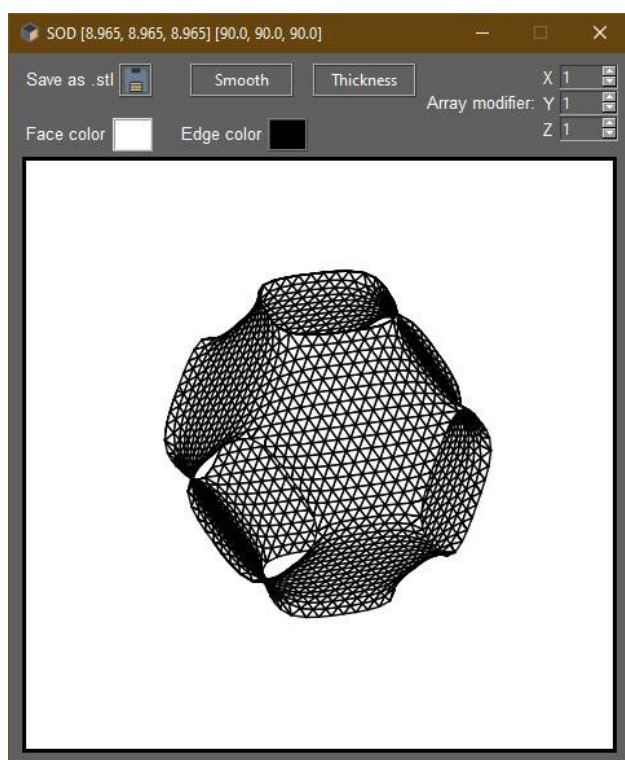


Рис. 6. Сглаженная трехпериодическая поверхность, полученная из каркаса SOD  
 Fig. 6. Smoothed three-period surface obtained from the SOD framework

Из представленных в таблице результатов видно, что разработанный численный алгоритм является приемлемым для расчета средней кривизны.

На основе расчета средней кривизны был разработан алгоритм сглаживания трехмерной поверхности.

Образец задания процедуры сглаживания:

`_smooth (mesh, n, min_angle, iterations),`

где *mesh* – несглаженный каркас; *n* – количество разбиений каркаса, выбирается пользователем; *min\_angle* – минимальный желательный угол между смежными гранями каркаса, при идеальном ва-

Таблица. Расчет средней кривизны  
 Table. Average curvature calculation

R	Значение <i>H</i>		
	Теоретическое	Расчетное	Разница
0,1	10	10,000128	1,20E-05
0,2	5	5,000064	1,20E-05
0,3	3,(3)	3,333376	1,20E-05
0,4	2,5	2,500032	1,20E-05
0,5	2	2,000032	1,3E-05
0,6	1,(6)	1,666688	1,28E-05
0,7	1,428	1,428658	6,06E-05
0,8	1,25	1,249199	0,0006408
0,9	1,(1)	1,111061	4,51E-05
1,0	1	0,999959	4,1E-05
1,1	0,9(09)	0,908746	0,0003794
1,2	0,8(3)	0,833295	4,6E-0,5
1,3	0,769	0,769249	2,37E-05
1,4	0,714	0,714027	0,0003622
1,5	0,(6)	0,666636	4,6E-05
1,6	0,625	0,627276	0,0036416
1,7	0,588	0,590166	0,0032822
1,8	0,(5)	0,556464	0,0016352
1,9	0,526	0,527584	0,0024096
2,0	0,5	0,500731	0,0014620

рианте равен 180 градусам; *iterations* – количество повторений операций смещения точек смежных граней с углом неравным *min\_angle*.

Алгоритм сглаживания заключается в следующем:

1) Разбиваем фигуру на большее количество треугольников в *n* раз.

2) Ищем точки смежных граней, угол между которыми меньше или больше *min\_angle*.

3) Пересчитываем координаты этих точек так, чтобы угол смежных граней стал равен 180 градусам:

3.1) Координаты данной точки *M* рассчитываются как координаты проекции этой точки на плоскость, содержащую все вершины смежных граней. Другими словами, находим точку пересечения прямой и плоскости в пространстве.

3.2) Присваиваем точке *M* координаты ее проекции.

4) Повторяем пункты 2 и 3, пока не останется углов меньших, чем *min\_angle*, либо пока количество итераций не станет равно *iterations*.

5) Возвращаем сглаженную фигуру в формате .stl. Результаты выполнения функции сглаживания и трансляции представлены на рис. 6, 7.

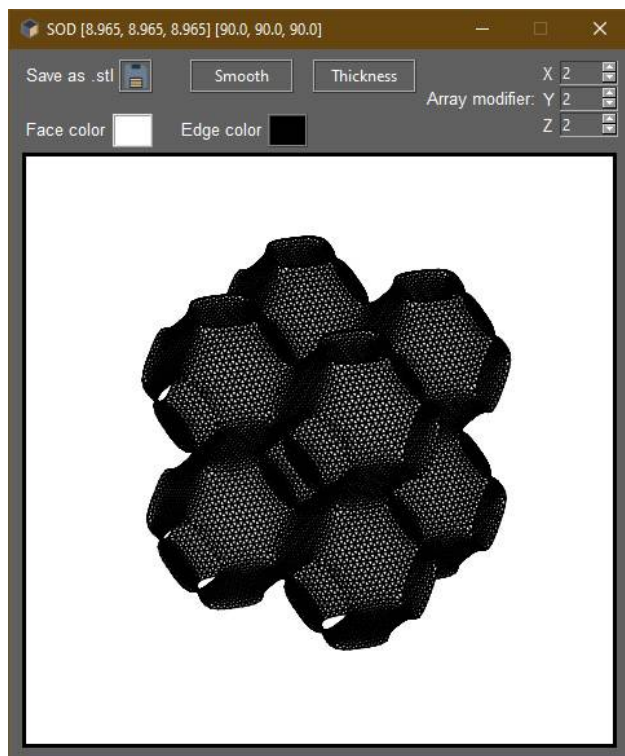


Рис. 7. Сглаженная и транслированная трехпериодическая поверхность, полученная из каркаса SOD  
Fig. 7. Smoothed and translated three-period surface obtained from the SOD framework

Логику данного алгоритма можно сформулировать следующим образом: чем ближе двугранный между соседними гранями стремится к развернутому углу, тем меньше средняя кривизна в общих точках этих граней.

Описанный выше алгоритм сглаживания по средней кривизне уменьшает значение средней кривизны в каждой точке поверхности. Чтобы показать это, был проведен расчет с разным значением  $n$  алгоритма сглаживания. Результаты представлены на рис. 8, 9.

Из графиков видно, что ближайшее значение средней кривизны в каждой точке к нулю получается при использовании параметра  $n = 3$ . Следовательно, можно модифицировать алгоритм следующим образом:

Образец задания процедуры сглаживания:

`_smooth (mesh, min_angle, iterations),`

где *mesh* – несглаженный каркас; *min\_angle* – минимальный желательный угол между смежными гранями каркаса, при идеальном варианте равен 180 градусам; *iterations* – количество повторений операций смещения точек смежных граней с углом неравным *min\_angle*.

Обновленный алгоритм сглаживания заключается в следующем.



Рис. 8. График расчета максимальной средней кривизны для поверхности, полученной из каркаса SOD  
Fig. 8. Graph of the calculation of the maximum average curvature for the surface obtained from the SOD wireframe

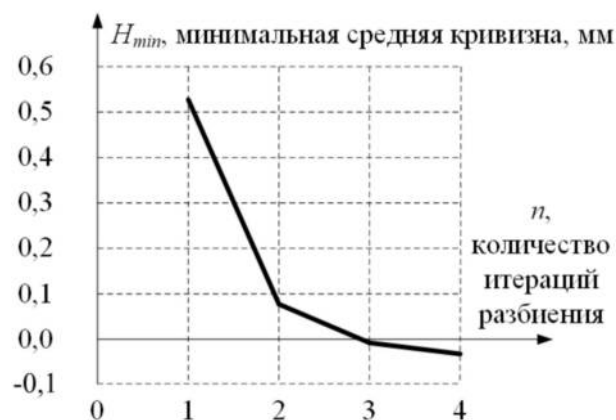


Рис. 9. График расчета минимальной средней кривизны для поверхности, полученной из каркаса SOD  
Fig. 9. Graph of the calculation of the minimum average curvature for the surface obtained from the SOD wireframe

1) Рассчитываем  $\Delta H_1 = H_{max} - H_{min}$  до сглаживания, присваиваем  $n = 2$ .

2) Разбиваем фигуру на большее количество треугольников в  $n$  раз.

3) Ищем точки смежных граней, угол между которыми меньше или больше *min\_angle*.

4) Пересчитываем координаты этих точек так, чтобы угол смежных граней стал равен 180 градусам.

4.1) Координаты данной точки  $M$  рассчитываются как координаты проекции этой точки на плоскость, содержащую все вершины смежных граней. Другими словами, находим точку пересечения прямой и плоскости в пространстве.

4.2) Присваиваем точке  $M$  координаты ее проекции.



Рис. 10. Напечатанная сглаженная модель пористого материала, полученная из каркаса SOD  
Fig. 10. Printed smoothed porous material model obtained from the SOD framework

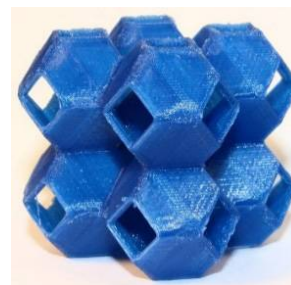


Рис. 11. Напечатанная несглаженная модель пористого материала, полученная из каркаса SOD  
Fig. 11. Printed non-smoothed porous material model obtained from the SOD framework

5) Повторяем пункты 2 и 3 пока не останется углов меньших, чем  $\text{min\_angle}$ , либо пока количество итераций не станет равно  $\text{iterations}$ .

6) Рассчитываем  $\Delta H_2 = H_{\text{max}} - H_{\text{min}}$  после сглаживания. Если  $\Delta H_2 < \Delta H_1$  то  $n = n + 1$ ,  $\Delta H_1 = \Delta H_2$ , и идем на пункт 3. Если  $\Delta H_2 > \Delta H_1$ , то возвращаем сглаженную фигуру в формате *.stl*, полученную на предыдущем шаге.

#### 4. 3D-печать

Для 3D-печати модель должна обладать некоторой толщиной. Для придания соответствующей модели необходимой толщины был написан алгоритм, образец задания процедуры которого:

*solid (model, thickness),*

где *model* – модель, не имеющая толщины; *thickness* – толщина в условных единицах.

Алгоритм наращивания толщины заключается в следующем.

1) Находим граничные точки модели, копируем их индексы и координаты в отдельный массив данных – *сору*.

2) У всех вершин из *сору* рассчитывается нормальный вектор, и координаты вершин сдвигаются на расстояние *thickness* вдоль нормального вектора.

3) Из полученных точек и их оригиналов, зная их индексы, создаем новые фасеты по правилу правой руки, которые будут являться ободом модели для печати.

4) Аналогично 2 копируем и передвигаем оставшиеся вершины модели и аналогично 3 восстанавливаем фасеты на этих вершинах.

5) Возвращаем фигуру с толщиной *thickness* в формате *.stl*.

Полученная модель (сглаженная и несглаженная) была распечатана на 3D-принтере Prusa i3 из PLA пластика, рис. 10 и 11.

#### Заключение

Полученные результаты позволят моделировать новые пористые и конструкционные материалы, прогнозировать их механические и адсорбционные свойства, необходимые для использования в нефтехимической промышленности, на предприятиях аэрокосмической, автомобильной и медицинской отрасли.

Работоспособность созданной системы моделирования пористых материалов на основе генерации пористых каркасов и получения на их основе трехпериодических поверхностей подтверждена путем генерации 103 примеров пористых каркасов, соответствующих им трехпериодических поверхностей с семействами непересекающихся пор и построения на их основе пористых материалов.

В следующих работах планируется сравнить разработанный алгоритм по быстродействию с алгоритмом приближенного отыскания гармонической функции методом конечных элементов с помощью решения уравнения Лапласа после триангуляции плоской области, получающейся проекцией кольца на некоторую плоскость.

#### Благодарность

Авторы выражают свою благодарность за ценные замечания и помощь в работе профессору Блатову В.А., профессору Блатову И.А. и Барабанову В.С. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 0778-2020-0005.

#### Список литературы

1. Оссерман Р. Минимальные поверхности // Успехи математических наук. 1967. Т. 22, №. 4 (136). С. 55–136. URL: <http://mi.mathnet.ru/eng/umn5776>
2. Perez J. A new golden age of minimal surfaces // Notices of the AMS. 2017. Vol. 64. P. 347–358. DOI: <https://doi.org/10.1090/noti1500>

3. Colding T.H., Minicozzi II W.P. *Minimal Surfaces (Courant Lecture Notes in Mathematics)*. New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, 1999. 124 p.
4. Minimal surface designs for porous materials: from microstructures to mechanical properties / X. Zheng [et al.] // *Journal of Materials Science*. 2018. Vol. 53, no. 14. P. 10194–10208. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10853-018-2285-5>
5. Park J.-H., Lee J.-Ch. Peculiar elastic behavior of mechanical metamaterials with various minimal surfaces // *Scientific Reports*. 2019. Vol. 9, no. 1. P. 2941. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-019-38660-1>
6. Fischer W., Koch E. New surface patches for minimal balance surfaces. I. Branched catenoids // *Acta Crystallographica Section A*. 1989. Vol. 45, no. 2. P. 166–169. DOI: <https://doi.org/10.1107/S0108767388010797>
7. Fischer W., Koch E. New surface patches for minimal balance surfaces. II. Multiple Catenoids // *Acta Crystallographica Section A*. 1989. Vol. 45, no. 2. P. 169–174. DOI: <https://doi.org/10.1107/S010876738801075X>
8. Fischer W., Koch E. New surface patches for minimal balance surfaces. III. Infinite Strips // *Acta Crystallographica Section A*. 1989. Vol. 45, no. 7. P. 485–490. DOI: <https://doi.org/10.1107/S010876738900317X>
9. Fischer W., Koch E. New Surface Patches for Minimal Balance Surfaces. IV. Catenoids with Spout-Like Attachments // *Acta Crystallographica Section A*. 1989. Vol. 45, no. 8. P. 558–563. DOI: <https://doi.org/10.1107/S0108767389003648>
10. Blatov V.A., Shevchenko A.P., Proserpio D.M. Applied topological analysis of crystal structures with the program package ToposPro // *Crystal Growth & Design*. 2014. Vol. 14, no. 7. P. 3576–3586. DOI: <https://doi.org/10.1021/cg500498k>
11. Underlying nets in three-periodic coordination polymers: topology, taxonomy and prediction from a computer-aided analysis of the Cambridge Structural Database / E.V. Alexandrov [et al.] // *CrystEngComm*. 2011. Vol. 13, no. 12. P. 3947–3958. DOI: <https://doi.org/10.1039/C0CE00636J>
12. Cohen-Steine D., Morvan J.-M. Restricted Delaunay triangulations and normal cycle // *Proceedings of the Nineteenth Annual Symposium on Computational Geometry*. 2003. P. 312–321. DOI: <https://doi.org/10.1145/777792.777839>

## References

1. Osserman R. Minimum surfaces. *Uspehi matematicheskikh nauk*, 1967, vol. 22, no. 4 (136), pp. 55–136. URL: <http://mi.mathnet.ru/eng/umn5776> (In Russ.)
2. Perez J. A new golden age of minimal surfaces. *Notices of the AMS*, 2017, vol. 64, pp. 347–358. DOI: <https://doi.org/10.1090/noti1500>
3. Colding T.H., Minicozzi II W.P. *Minimal Surfaces (Courant Lecture Notes in Mathematics)*. New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, 1999, 124 p.
4. Zheng X. et al. Minimal surface designs for porous materials: from microstructures to mechanical properties. *Journal of Materials Science*, 2018, vol. 53, no. 14, pp. 10194–10208. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10853-018-2285-5>
5. Park J.-H., Lee J.-Ch. Peculiar elastic behavior of mechanical metamaterials with various minimal surfaces. *Scientific Reports*, 2019, vol. 9, no. 1, p. 2941. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-019-38660-1>
6. Fischer W., Koch E. New surface patches for minimal balance surfaces. I. Branched catenoids. *Acta Crystallographica Section A*, 1989, vol. 45, no. 2, pp. 166–169. DOI: <https://doi.org/10.1107/S0108767388010797>
7. Fischer W., Koch E. New surface patches for minimal balance surfaces. II. Multiple Catenoids. *Acta Crystallographica Section A*, 1989, vol. 45, no. 2, pp. 169–174. DOI: <https://doi.org/10.1107/S010876738801075X>
8. Fischer W., Koch E. New surface patches for minimal balance surfaces. III. Infinite Strips. *Acta Crystallographica Section A*, 1989, vol. 45, no. 7, pp. 485–490. DOI: <https://doi.org/10.1107/S010876738900317X>
9. Fischer W., Koch E. New Surface Patches for Minimal Balance Surfaces. IV. Catenoids with Spout-Like Attachments. *Acta Crystallographica Section A*, 1989, vol. 45, no. 8, pp. 558–563. DOI: <https://doi.org/10.1107/S0108767389003648>
10. Blatov V.A., Shevchenko A.P., Proserpio D.M. Applied topological analysis of crystal structures with the program package ToposPro. *Crystal Growth & Design*, 2014, vol. 14, no. 7, pp. 3576–3586. DOI: <https://doi.org/10.1021/cg500498k>
11. Alexandrov E.V. et al. Underlying nets in three-periodic coordination polymers: topology, taxonomy and prediction from a computer-aided analysis of the Cambridge Structural Database. *CrystEngComm*, 2011, vol. 13, no. 12, pp. 3947–3958. DOI: <https://doi.org/10.1039/C0CE00636J>
12. Cohen-Steine D., Morvan J.-M. Restricted Delaunay triangulations and normal cycle. *Proceedings of the Nineteenth Annual Symposium on Computational Geometry*, 2003, pp. 312–321. DOI: <https://doi.org/10.1145/777792.777839>

## Physics of Wave Processes and Radio Systems 2022, vol. 25, no. 1, pp. 71–79

DOI 10.18469/1810-3189.2022.25.1.71-79

Received 10 December 2021  
Accepted 11 January 2022

### Software development for implementing a model of porous structures based on three periodic surfaces

Mikhail I. Smolkov<sup>1, 2</sup>, Alexander F. Krutov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya Street,  
443100, Samara, Russia

<sup>2</sup> Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics  
23, L. Tolstoy Street,  
Samara, 443010, Russia

*Abstract* – Based on the original algorithm for generating three periodic surfaces implemented in the ToposPro information and analytical system, a mathematical model of a porous material was developed. The TPS Extractor software for the computer implementation of this model was developed. This software implements original algorithms for triangulation, translation, smoothing, and model solidifying. The developed triangulation algorithms were used to construct a set of three periodic surfaces, and models of the corresponding porous materials were built on their basis. Based on models of porous materials, a study of the performance of smoothing and translation algorithms was conducted. Using a solidifying algorithm for increasing the model thickness, models of porous material were created that are suitable for 3D printing. Also, samples of porous models were printed out using fused deposition modeling technology.

*Keywords* – crystallography; atomic grid; topological structure; tiling; porous materials; computational geometry; object-oriented programming; 3D modeling; 3D printing.

---

## Информация об авторах

**Смольков Михаил Игоревич**, аспирант кафедры высшей математики Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* вычислительная геометрия и математика, наука о данных, машинное обучение, кристаллохимия, объектно-ориентированное программирование.

*E-mail:* m.smolkov97@gmail.com

**Крутов Александр Федорович**, доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник Международного научно-исследовательского центра по теоретическому материаловедению Самарского государственного технического университета, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* релятивистская теория составных систем, квантовая теория поля, квантовая механика, теория рассеяния, обратная задача теории рассеяния, методы математической физики, физика и химия интерметаллидов.

*E-mail:* krutov@ssau.ru

## Information about the Authors

**Mikhail I. Smolkov**, postgraduate student of the Department of Higher Mathematics, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

*Research interests:* computational geometry and mathematics, data science, machine learning, crystal chemistry, object-oriented programming.

*E-mail:* m.smolkov97@gmail.com




**Alexander F. Krutov**, Doctor of Physics and Mathematics, professor, senior researcher of Samara Center for Theoretical Materials Science, Samara State Technical University, Samara, Russia.

*Research interests:* relativistic theory of composite systems, quantum field theory, quantum mechanics, scattering theory, inverse problem of scattering theory, methods of mathematical physics, physics and chemistry of intermetallic compounds.

*E-mail:* krutov@ssau.ru



## Изменение формы вертикально стоящего упругого резервуара с жидкостью

А.Н. Волобуев , С.В. Краснов, К.А. Адьширин-Заде ,  
Т.А. Антипова , Н.Н. Александрова

Самарский государственный медицинский университет  
443099, Россия, г. Самара,  
ул. Чапаевская, 89

*Аннотация* – Обоснован вид уравнения гидростатики для упругого, вертикально стоящего резервуара, например топливного бака ракеты на стартовом столе. Уравнение гидростатики получено на основе уточненного уравнения Бернулли. Обоснование проведено с помощью формулы Лапласа для давления под упругой поверхностью жидкости, которая может возникнуть как за счет сил поверхностного натяжения, так и за счет упругой тонкостенной оболочки, как в настоящей задаче. Найдена форма вертикально расположенного упругого резервуара с жестким дном и жестким верхним обрубом, заполненного покоящейся жидкостью. Показано, что необходимо использовать особую запись закона Гука для получения формы резервуара. Проведен анализ этой формы. Показано распределение по высоте резервуара гидростатического давления, объемной плотности энергии растянутой упругой стенки, а также суммы этих величин. Найдено гидростатическое давление, на уровне которого возникает максимальное увеличение площади упругого резервуара.

*Ключевые слова* – упругий резервуар; уравнение Бернулли; закон Гука; покоящаяся жидкость; гидростатическое давление; форма резервуара.

### Введение

В процессе исследования покоящейся жидкости в вертикально стоящих упругих резервуарах, часто возникает вопрос о форме, которую принимает резервуар. Например, как изменяется форма заправленной топливом ракеты на стартовом столе, какова роль гидростатического давления в изменении формы грудного отдела аорты человека и т. д.

Решение этой задачи в классическом труде [1] основывается на т. н. «мембранной теории». В этой теории рассматриваются силы и моменты сил в элементе оболочки вертикально стоящего резервуара, заполненного покоящейся жидкостью. Составляется дифференциальное уравнение 4-го порядка для радиальной деформации резервуара. Несмотря на достаточно большую сложность и громоздкость преобразований, результат частного решения дифференциального уравнения оказывается достаточно тривиальным: относительная деформация площади сечения резервуара на определенном уровне пропорциональна гидростатическому давлению на этом уровне. В дальнейшем будет показано, что этот результат слишком грубый для правильной оценки формы резервуара.

Используется также другой подход, основанный на т. н. «безмоментной теории» [2]. В этой теории используется уравнение Лапласа, которое позво-

ляет приблизительно оценить напряженное состояние в стенках резервуара под действием внутреннего давления.

Достаточно разнообразно данная задача исследуется в биомеханике, например [3–5]. Задача исследуется с разной степенью сложности, но основное внимание часто уделяется биомеханическим особенностям стенок аорты и других кровеносных сосудов.

Целью настоящей работы является исследование способа нахождения формы вертикально расположенного упругого цилиндрического резервуара, заполненного покоящейся жидкостью, определение условий, необходимых для достижения корректного результата решения поставленной задачи.

### 1. Уравнение Бернулли для упругого трубопровода

Рассмотрим модельную задачу нахождения формы открытого вертикального цилиндрического резервуара с упругими стенками и жестким дном, рис. 1, в который налита жидкость (вода).

Пусть в сечении 1, у дна резервуара координата  $h = h_1$ , а гидростатическое давление  $P_{2/c} = P_{12/c}$ . На поверхности жидкости в сечении 2 находится начало координат  $h = 0$ , где давление  $P_{2/c} = 0$ . Используем давление, избыточное над атмосфер-

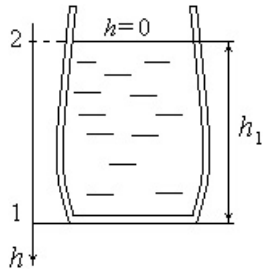


Рис. 1. Изменение формы упругого резервуара  
 Fig. 1. Changing the shape of an elastic reservoir

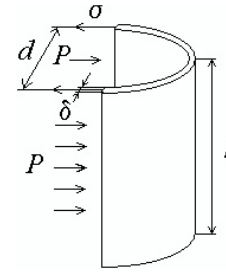


Рис. 2. Участок оболочки вертикального упругого резервуара  
 Fig. 2. Section of the shell of a vertical elastic tank

ным. Так как жидкость находится в состоянии покоя, то ее вязкость роли не играет.

На дне резервуара гидростатическое давление равно

$$P_{1z/c} = \rho g h_1, \quad (1)$$

где  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения,  $\rho$  – плотность жидкости.

Распределение гидростатического давления по высоте резервуара имеет вид

$$P_{2/c} = \rho g h, \quad (2)$$

Распределение гидростатического давления по высоте упругого резервуара, согласно формуле (2), носит линейный характер. Оно, очевидно, не должно зависеть от того, жесткие у резервуара стенки или упругие.

Для учета упругости стенок резервуара найдем уравнение Бернулли в упругом трубопроводе с движущейся в нем жидкостью.

В [4; 6; 7] рекомендуется для волнового процесса в упругом трубопроводе использовать уравнение импульса в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial X} + W \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial(PS)}{\rho S \partial X}, \quad (3)$$

где  $V$  и  $W$  – продольная и поперечная составляющие скорости жидкости,  $r$  – радиальная координата,  $X$  – продольная координата,  $t$  – время,  $S$  – поперечное сечение тонкостенного упругого трубопровода. Вязкость жидкости не учитываем.

Преобразуем уравнение (3) к виду

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho V \frac{\partial V}{\partial X} + \rho W \frac{\partial W}{\partial X} &= -\frac{\partial(PS)}{S \partial X} = \\ &= -\frac{\partial P}{\partial X} - P \frac{\partial S}{S \partial X} = -\frac{\partial P}{\partial X} + P \frac{\partial P}{D \partial X}, \end{aligned} \quad (4)$$

При записи (4) использован закон Гука для упругого трубопровода в виде [3]:

$$\partial P = -D \frac{\partial S}{S}, \quad (5)$$

где  $D$  – упругость стенки трубопровода. Формула (5) характеризует связь распределенной реак-

ции упругой стенки трубопровода  $P$  и его площади сечения  $S$ , поэтому знаки дифференциалов разные. Эта форма записи закона Гука фактически получена в [1] на основе «мембранной теории» при решении уравнения для радиальной деформации тонкостенного упругого резервуара, если принять  $D = E\delta/d$  [8], где  $\delta$  – толщина стенки резервуара,  $d$  – его диаметр,  $E$  – модуль упругости материала оболочки резервуара.

Принято также, что вихрей в потоке не образуется, течение потенциальное [9], т. е.  $\text{rot} \mathbf{V} = 0$ , где  $\mathbf{V}$  – вектор скорости, следовательно,  $\frac{\partial W}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial r}$ .

Преобразуем уравнение (4), считая жидкость несжимаемой, т. е.  $\rho = \text{const}$ :

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\rho V^2}{2} + \frac{\rho W^2}{2} + P - \frac{P^2}{2D} \right) = 0. \quad (6)$$

Если течение жидкости стационарное, т. е.  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ , то уравнение (6) можно проинтегрировать:

$$\frac{\rho V^2}{2} + \frac{\rho W^2}{2} + P - \frac{P^2}{2D} = \text{const}. \quad (7)$$

Проанализируем более подробно причину возникновения последнего слагаемого в (7). Покажем, что оно является следствием закона Гука в форме (5), который для удобства преобразований запишем в виде  $P - P_0 = D\Delta S/S$ , где  $P_0$  – начало отсчета давления.

Исследуем более детально связь между упругостью стенок резервуара  $D$  и модулем упругости вещества стенок  $E$ , а также геометрическими размерами резервуара. Разрежем мысленно вдоль небольшой участок резервуара длиной  $l$  и средним диаметром  $d$ , рис. 2.

Сила давления, избыточного над  $P_0$ , растягивающая резервуар, равна силе сопротивления его стенок:

$$(P - P_0)ld = 2(\sigma - \sigma_0)\delta l,$$

где  $\sigma$  – механические напряжения в стенке резервуара толщиной  $\delta$ ,  $\sigma_0$  – механические напряжения в стенке резервуара при давлении  $P_0$ .

Следовательно, давление в резервуаре равно  $P - P_0 = 2(\sigma - \sigma_0)\delta/d$ . Полученное соотношение носит название формулы Лапласа. Однако формула Лапласа принципиально неточная. Термодинамический анализ показывает, что более точная формула  $\ln \frac{P}{P_0} = \frac{2(\sigma - \sigma_0)\delta}{Dd}$  [10]. Разлагая экспоненту в ряд, получаем

$$P - P_0 = P_0 \frac{2(\sigma - \sigma_0)\delta}{Dd} + \frac{1}{2} P_0 \left( \frac{2(\sigma - \sigma_0)\delta}{Dd} \right)^2.$$

Из первого слагаемого в правой части как первого приближения (формула Лапласа) следует  $P_0 = D$ .

Учитывая закон Гука  $\sigma - \sigma_0 = E\varepsilon = E\Delta d/d$ , где  $\varepsilon = \Delta L/L = \Delta(\pi d)/(\pi d) = \Delta d/d$  – относительная деформация длины окружности  $L$  стенки резервуара ( $L = \pi d$ ),  $\Delta d$  – изменение диаметра резервуара при его растяжении, получаем:

$$P - P_0 = \frac{2E\Delta d\delta}{d^2} + \frac{1}{2D} \left( \frac{2E\Delta d\delta}{d^2} \right)^2.$$

Найдем связь между относительным изменением площади сечения резервуара  $\Delta S/S$  и относительной деформацией его диаметра  $\Delta d/d$ . Учитывая связь между площадью сечения и диаметром резервуара  $S = \pi d^2/4$ , находим производную  $\frac{dS}{d(d)} \approx \frac{\Delta S}{\Delta d} = \frac{\pi d}{2}$ , следовательно,  $\frac{\Delta S}{S} = 2 \frac{\Delta d}{d}$ .

Поэтому для давления, избыточного над  $P_0$ , получаем:

$$P - P_0 = \frac{E\delta}{d} \frac{\Delta S}{S} + \frac{1}{2D} \left( \frac{E\delta}{d} \frac{\Delta S}{S} \right)^2 = D \frac{\Delta S}{S} + \frac{1}{2D} \left( D \frac{\Delta S}{S} \right)^2,$$

или

$$P - P_0 - \frac{(P - P_0)^2}{2D} = D \frac{\Delta S}{S}.$$

Полученный результат при  $P_0 = 0$  показывает, что если применить закон Гука в виде (5), то более правильно вместо давления  $P$  использовать величину  $P - \frac{P^2}{2D}$ , как это принято в формуле (7). Данный вывод не связан с течением жидкости.

В случае если на текущую по упругому трубопроводу жидкость действует гравитационная сила, в левую часть уравнения (7) необходимо добавить объемную плотность потенциальной энергии жидкости в гравитационном поле. В этом случае уравнение (7) приобретет вид

$$P - \frac{P^2}{2D} + \rho gh + \frac{\rho V^2}{2} + \frac{\rho W^2}{2} = \text{const}, \quad (8)$$

где  $h$  – высота рассматриваемого элемента жидкости над уровнем отсчета.

Величина  $P_c = \frac{P^2}{2D}$  представляет собой объемную плотность энергии растянутой упругой стенки. Величину  $P_c$  можно отождествить с некоторым давлением.

Полагая статическое давление:

$$P_{cm} = P - P_c, \quad (9)$$

получаем стандартную форму уравнения Бернулли. Будем использовать термин «давление» для величины  $P$ , учитывая, что оно не тождественно измеряемому статическому давлению.

Таким образом, уравнение Бернулли для упругого трубопровода ничем не отличается от такового для жесткого трубопровода. Так же как и в жестком трубопроводе, сумма статического  $P_{cm}$ , гидростатического  $P_{z/c} = \rho gh$  и динамического  $P_{дин} = \rho V^2/2 + \rho W^2/2$  давлений в каждом поперечном сечении упругого трубопровода остается постоянной.

Однако в уравнение Бернулли (8) входит не статическое давление  $P_{cm}$ , а давление  $P = P_{cm} + P_c$ , которое равно сумме статического давления и некоторого давления, которое равно объемной плотности энергии растянутой упругой стенки. Отметим, что в жестком трубопроводе при  $D \rightarrow \infty$  давление  $P = P_{cm}$ .

Найдем распределение всех давлений по высоте упругого резервуара.

Используя формулы (2) и (9), с учетом  $P_c = \frac{P^2}{2D}$  получим:

$$\rho gh = P - \frac{P^2}{2D}. \quad (10)$$

В отличие от уравнения (8), координата  $h$  направлена сверху вниз, рис. 1.

Решая квадратное уравнение (10) относительно давления  $P$ , найдем:

$$P = D - \sqrt{D^2 - 2D\rho gh}. \quad (11)$$

Знак плюс перед корнем неприемлем, т. к. при  $D \rightarrow \infty$  (жесткие стенки резервуара) величина  $P$  должна стремиться к гидростатическому давлению  $P \rightarrow \rho gh$ .

Давление, определяемое объемной плотностью энергии растянутой упругой стенки резервуара, найдем по формуле (9):

$$P_c = P - \rho gh = D - \sqrt{D^2 - 2D\rho gh} - \rho gh. \quad (12)$$

На рис. 3 показано распределение давлений по высоте резервуара с упругими стенками. Для расчета приняты следующие параметры: плотность

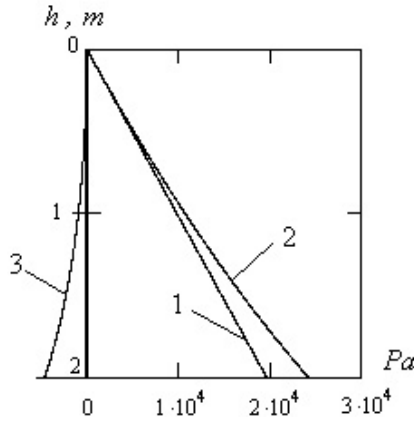


Рис. 3. Распределение давлений по высоте вертикального резервуара с упругими стенками: прямая 1 – гидростатическое давление  $P_{z/c}$ ; 2 – давление  $P = P_{z/c} + P_c$ ; 3 – объемная плотность энергии растянутой упругой стенки резервуара –  $P_c$   
 Fig. 3. Pressure distribution along the height of a vertical tank with elastic walls: straight line 1 – hydrostatic pressure  $P_{z/c}$ ; 2 – pressure  $P = P_{z/c} + P_c$ ; 3 – volumetric energy density of the stretched elastic tank wall –  $P_c$

жидкости (воды)  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ , упругость стенки резервуара (для наглядности, как у резины)  $D = 64000 \text{ Н/м}^2$ . Эта величина зависит от диаметра резервуара, толщины его стенки, модуля Юнга вещества стенки  $D = E\delta/d$  [8].

Все давления равны нулю на поверхности жидкости в упругом резервуаре и достигают максимального значения на дне резервуара.

Найдем форму стенки вертикального упругого резервуара, в который налита вода. Пусть высота жидкости в резервуаре  $H$ , а площадь жесткого дна резервуара  $S_H$ .

Заметим, что точность формул (10), (11) и (12) определяется справедливостью использованного закона Гука в виде (5).

## 2. Нахождение формы вертикального резервуара с упругими стенками

Применение закона Гука для упругой стенки резервуара в виде (5) при решении поставленной задачи невозможно, т. к. эта формула слишком грубо описывает зависимость давления и площади поперечного сечения резервуара. Действительно, если рассматривать формулу (5) как дифференциальное уравнение первого порядка, то в результате интегрирования возникает только одна постоянная интегрирования. Поэтому невозможно удовлетворить сразу двум граничным условиям: площадь поверхности жидкости в области жесткого верхнего обруча  $S = S_0$  и площадь жесткого дна упругого резервуара  $S = S_H$ .

Применим закон Гука в виде, аналогичном [2], где подобная запись используется при анализе относительного удлинения стержня:

$$\Delta P = -D \frac{\Delta(dS)}{dS}, \quad (13)$$

где  $\Delta(dS)$  – изменение дифференциала площади сечения резервуара. Знак минус определяется тем же, что и в случае формулы (5),  $\Delta P$  – это реакция упругой стенки резервуара на жидкость.

Учитывая зависимость площади сечения резервуара от высоты  $S = f(h)$ , перейдем от приращений к дифференциалам:

$$\begin{aligned} \frac{d(dS)}{dh} dh \\ dP = -D \frac{dh}{dS} = \\ = -D \frac{d^2S}{dh^2} dh^2 = -D \frac{d^2S/dh^2}{dS/dh} dh. \end{aligned} \quad (14)$$

Преобразуем формулу (14):

$$\frac{dP}{dh} = -D \frac{d}{dh} \left[ \ln \left( \frac{dS}{dh} \right) \right]. \quad (15)$$

Уравнение (15) можно один раз проинтегрировать:

$$\frac{P}{D} = -\ln \frac{1}{C_1} \left( \frac{dS}{dh} \right), \quad (16)$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования.

Следовательно:

$$\frac{dS}{dh} = C_1 \exp \left( -\frac{P}{D} \right). \quad (17)$$

Используем связь между давлением  $P$  и высотой  $h$  в виде (10). Нужно отметить, что формула (10) найдена из более простой формы закона Гука (5). Поэтому на данном этапе в проводимый анализ вносится некоторое приближение. Это приближение связано с тем, что решение уравнения импульса (3) совместно с законом Гука (13) в аналитическом виде затруднительно. Изменением высоты жидкости при изменении формы резервуара пренебрегаем, что предполагает небольшую деформацию формы резервуара.

Дифференцируя (10), имеем:

$$\frac{dh}{dP} = \frac{1}{\rho g} \left( 1 - \frac{P}{D} \right). \quad (18)$$

Умножив (17) на (18), получим:

$$\frac{dS}{dP} = \frac{C_1}{\rho g} \left( 1 - \frac{P}{D} \right) \exp \left( -\frac{P}{D} \right). \quad (19)$$

Интегрируя (19), находим:

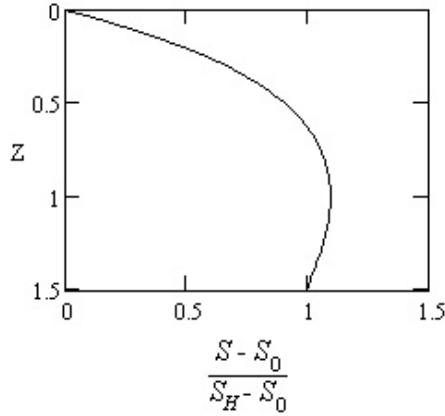


Рис. 4. Зависимость относительной площади поперечного сечения резервуара от безразмерной высоты жидкости в нем  $Z = \rho gh / D$

Fig. 4. Dependence of the relative cross-sectional area of the tank on the dimensionless height of the liquid in it  $Z = \rho gh / D$

$$S = \frac{C_1}{\rho g} P \exp\left(-\frac{P}{D}\right) + C_2, \quad (20)$$

где  $C_2$  – вторая постоянная интегрирования.

Если площадь поверхности жидкости в упругом резервуаре задана за счет жесткого обруча  $S = S_0$ , то, учитывая давление на поверхности жидкости  $P = 0$ , найдем  $C_2 = S_0$ . Следовательно, формулу (20) можно записать в виде

$$S - S_0 = \frac{C_1}{\rho g} P \exp\left(-\frac{P}{D}\right). \quad (21)$$

Кроме того, учитывая площадь жесткого дна резервуара  $S = S_H$ , найдем:

$$S_H - S_0 = \frac{C_1}{\rho g} \exp\left(-\frac{P_H}{D}\right) P_H, \quad (22)$$

где  $P_H$  – давление  $P$  на дне резервуара.

Поделив (22) на (21), получим:

$$\frac{S - S_0}{S_H - S_0} = \frac{P}{P_H} \exp\left[-\left(\frac{P}{D} - \frac{P_H}{D}\right)\right]. \quad (23)$$

В технике часто возникает задача определения деформации высокого вертикально стоящего резервуара с периодическими или непериодическими подкреплениями оболочки горизонтальными круговыми внутренними обручами с заданной площадью  $S_{0i}$ . Формула (23) позволяет оценить изменение формы оболочки на каждом участке такого резервуара. В этом случае постоянные  $C_{1i}$  и  $C_{2i}$  будут изменяться от участка к участку. Эти постоянные определяются по формуле (20) последовательно, начиная с верхнего участка, в соответствии с давлениями на верхней и нижней границах участков.

Проведем анализ полученной зависимости (23). Найдем, при каком давлении  $P$  площадь сечения

резервуара будет максимальной. Находя производную от (23) и приравнявая ее к нулю, имеем, что при давлении  $P_m = D$  площадь сечения резервуара  $S_m$  будет максимальной. Из формулы (23) находим:

$$\frac{S_m - S_0}{S_H - S_0} = \frac{P_m}{P_H} \exp\left[-\left(1 - \frac{P_H}{P_m}\right)\right]. \quad (24)$$

Формула (24) фактически характеризует изгибные свойства стенок упругого вертикального резервуара и позволяет найти в расчете связь величин площадей  $S_m$ ,  $S_0$  и  $S_H$ .

Приближенно, при достаточно жесткой стенке резервуара, т. е. при достаточно большой величине  $D$ , на данном заключительном этапе анализа, чтобы не увеличивать громоздкость формул, примем самую простую зависимость  $P = f(h)$ , а именно (10) при условии  $P \gg P_c = \frac{P^2}{2D}$ . Считаем, что давление  $P$  пропорционально высоте жидкости  $h$ , отсчитанной от поверхности ко дну резервуара,  $P \approx \rho gh$ . Фактически мы приравняли давление  $P$  к гидростатическому давлению  $P_{2/c}$ .

Для расчетного примера положим, что  $P_H / P_m = H / h_m = 3/2$ , где  $h_m$  – положение максимальной площади  $S_m$  поперечного сечения упругого резервуара. Таким образом, мы приняли, что максимальная площадь поперечного сечения упругого резервуара возникает на высоте  $1/3$  от его дна.

Следовательно:

$$\frac{S_m - S_0}{S_H - S_0} = \frac{P_m}{P_H} \exp\left[-\left(1 - \frac{P_H}{P_m}\right)\right] \approx 1,1. \quad (25)$$

Учитывая, что для данного случая  $P_H = \frac{3}{2} P_m = \frac{3}{2} D = \rho g H$ , найдем связь высоты жидкости в резервуаре и упругости его стенок  $H = \frac{3D}{2\rho g}$ .

При практических расчетах порядок анализа обычно иной. По заданным параметрам: высоте жидкости в резервуаре  $H$  и упругости его стенок  $D$  – находится положение  $h_m$  максимальной площади сечения резервуара. Кроме того, в практических расчетах предположение  $P \approx \rho gh$  вряд ли допустимо. По-видимому, для зависимости  $P = f(h)$  допустимо использовать также приближенную формулу (11), однако это делает выкладки значительно более громоздкими.

Учитывая  $P_m = D$  и  $P_H / P_m = \rho g H / D = 3/2$ , записываем формулу (25) в виде

$$\frac{S - S_0}{S_H - S_0} = \frac{2}{3} \frac{P}{D} \exp\left(\frac{3}{2} - \frac{P}{D}\right). \quad (26)$$

На рис. 4 показан график зависимости относительной площади сечения упругого резервуара от

величины  $Z = P/D \approx \rho gh/D$ , построенный по формуле (26).

### Заключение

На основе простейшей формы закона Гука, связывающей давление в упругом трубопроводе, по которому течет жидкость, и относительную деформацию площади поперечного сечения упругого трубопровода, найдено уравнение Бернулли для этого трубопровода. В это уравнение входит объемная плотность энергии растянутой упругой

стенки, которую можно отождествить с некоторым давлением.

Показано, что используемый вид закона Гука не позволяет найти форму модельного вертикально стоящего упругого резервуара с жестким дном и жестким верхним обручем, заполненного жидкостью.

Переход к более точной записи закона Гука позволил найти форму такого упругого резервуара. Проведен анализ этой формы. Найдено давление, на уровне которого возникает максимальное увеличение площади упругого резервуара.

### Список литературы

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. С. 535.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. С. 37.
3. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.
4. Биофизика для инженеров. Т. 2 / Е.В. Бигдай [и др.]. М.: Горячая линия – Телеком, 2008. С. 126.
5. Бранков Г. Основы биомеханики / пер. с болг. М.: Мир, 1981. 256 с.
6. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980. С. 161.
7. Волобуев А.Н. Нелинейные особенности течения жидкости в упругом трубопроводе // Математическое моделирование. 2019. Т. 31, № 6. С. 43–54. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0234087919060030>
8. Механика кровообращения / К. Каро [и др.]. М.: Мир, 1981. С. 121.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Т. 6. М.: Наука, 1986. 736 с.
10. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962. С. 583.

### References

1. Timoshenko S.P., Voynovsky-Kruger S. *Plates and Shells*. Moscow: Nauka, 1966, p. 535. (In Russ.)
2. Feodos'ev V.I. *Strength of Materials*. Moscow: Nauka, 1986, p. 37. (In Russ.)
3. Pedli T. *Hydrodynamics of Large Blood Vessels*. Moscow: Mir, 1983, 400 p. (In Russ.)
4. Bigday E.V. et al. *Biophysics for engineers*. Vol. 2. Moscow: Gorjachaja linija – Telekom, 2008, p. 126. (In Russ.)
5. Brankov G. *Fundamentals of Biomechanics*. Bulgarian trans. Moscow: Mir, 1981, 256 p. (In Russ.)
6. Budak B.M., Samarskiy A.A., Tihonov A.N. *Collection of Problems in Mathematical Physics*. Moscow: Nauka, 1980, p. 161. (In Russ.)
7. Volobuev A.N. Nonlinear features of fluid flow in an elastic pipeline. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2019, vol. 31, no. 6, pp. 43–54. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0234087919060030> (In Russ.)
8. Karo K. et al. *Mechanics of Blood Circulation*. Moscow: Mir, 1981, p. 121 p. (In Russ.)
9. Landau L.D., Lifshits E.M. *Hydrodynamics*. Vol. 6. Moscow: Nauka, 1986, 736 p. (In Russ.)
10. Levich V.G. *Course of Theoretical Physics*. Vol. 1. Moscow: Fizmatgiz, 1962, p. 583. (In Russ.)

---



## Physics of Wave Processes and Radio Systems 2022, vol. 25, no. 1, pp. 80–86

DOI 10.18469/1810-3189.2022.25.1.80-86

Received 26 November 2021

Accepted 27 December 2021

### Change of the form of the vertical elastic tank with a liquid

Andrey N. Volobuev , Sergei V. Krasnov,  
Kaira A. Adyshirin-Zade , Tatyana A. Antipova , Natalia N. Aleksandrova

Samara State Medical University  
89, Chapayevskaya Street,  
Samara, 443099, Russia

*Abstract* – The kind of a hydrostatic equation for the vertical elastic tank, for example, a fuel tank of a rocket on a starting table is proved. The hydrostatic equation is received on the basis of specified Bernoulli's equation. The substantiation is lead with the help of Laplace's formula for pressure under an elastic surface of a liquid which can arise both due to forces of a superficial tension, and due to an elastic thin-walled shell as in the present task. The form of the vertical elastic tank with a rigid bottom and the rigid top band, filled with a lied liquid is received. It is shown that it is necessary to use special record of the Gook's law for reception of the form of the tank. The analysis of this form is carried out. Distribution on height of the tank of hydrostatic pressure, volumetric density of energy of the stretched elastic wall, and also the sum of these sizes is shown. Hydrostatic pressure at which level there is a maximal increase in the area of the elastic tank is found.

*Keywords* – the elastic tank; Bernoulli's equation; Gook's law; a lied liquid; hydrostatic pressure; the form of the tank.

## Информация об авторах

**Волобуев Андрей Николаевич**, доктор технических наук, профессор кафедры медицинской физики, математики и информатики Самарского государственного медицинского университета, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* биофизика, гидромеханика, радиофизика, квантовая электродинамика, теория гравитации.

*E-mail:* volobuev47@yandex.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0001-8624-6981>

**Краснов Сергей Викторович**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой медицинской физики, математики и информатики Самарского государственного медицинского университета, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* биофизика, информационные технологии в медицине, теория искусственного интеллекта.

*E-mail:* krasnovtlt@mail.ru

**Адыширин-Заде Каира Алимовна**, кандидат педагогических наук, доцент кафедры медицинской физики, математики и информатики Самарского государственного медицинского университета, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* физика, педагогика.

*E-mail:* adysirinzade67@gmail.com

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0003-3641-3678>

**Антипова Татьяна Александровна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры медицинской физики, математики и информатики Самарского государственного медицинского университета, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* биофизика, радиофизика.

*E-mail:* antipovata81@gmail.com

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0001-5499-2170>

**Александрова Наталья Николаевна**, ассистент кафедры медицинской физики, математики и информатики Самарского государственного медицинского университета, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* биофизика, информатика.

*E-mail:* grecova81@mail.ru

## Information about the Authors

**Andrey N. Volobuev**, Doctor of Technical Sciences, professor of the Department of Medical Physics, Mathematics and Informatics, Samara State Medical University, Samara, Russia.

*Research interests:* biophysics, hydromechanics, radio physics, quantum electrodynamics, theory of gravity.

*E-mail:* volobuev47@yandex.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0001-8624-6981>

**Sergei V. Krasnov**, Doctor of Technical Sciences, professor, chief of the Department of Medical Physics, Mathematics and Informatics, Samara State Medical University, Samara, Russia.

*Research interests:* biophysics, information technologies in medicine, theory of artificial intellect.

*E-mail:* krasnovtlt@mail.ru

**Kaira A. Adyshirin-Zade**, Candidate of Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Medical Physics, Mathematics and Informatics, Samara State Medical University, Samara, Russia.

*Research interests:* physics, pedagogical.

*E-mail:* adysirinzade67@gmail.com

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0003-3641-3678>

**Tatyana A. Antipova**, Candidate of Physics and Mathematics Sciences, associate professor of the Department of Medical Physics, Mathematics and Informatics, Samara State Medical University, Samara, Russia.

*Research interests:* physics, radiophysics.

*E-mail:* antipovata81@gmail.com

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0001-5499-2170>

**Natalia N. Aleksandrova**, assistant of the Department of Medical Physics Mathematics and Informatics, Samara State Medical University, Samara, Russia.

*Research interests:* biophysics, informatics.

*E-mail:* grecova81@mail.ru

## К сведению авторов

В журнале «Физика волновых процессов и радиотехнические системы» могут быть опубликованы материалы, касающиеся оригинальных исследований и разработок, не публиковавшиеся ранее и не предназначенные для публикации в других изданиях. В зависимости от характера представляемых работ они классифицируются по следующим разделам: общая теория волновых процессов, математические методы в теории волновых процессов, вопросы анализа и синтеза радиотехнических устройств и систем, передача и обработка информации в радиотехнических системах, электродинамика и техника СВЧ и КВЧ, антенно-фидерные системы и распространение радиоволн, теория средств функциональной электроники, нелинейная электродинамика и хаос в радиотехнических системах, экологические и медико-биологические аспекты теории волновых процессов.

Все статьи проходят рецензирование и проверку в программе «Антиплагиат».

Материалы, сопровождаемые актом экспертизы о возможности опубликования, представляются в редакцию по почте и e-mail: klyuevd@yandex.ru). Текст статьи должен быть сохранен в формате **Microsoft Word**. Текст статьи печатается шрифтом **Times New Roman Cyr** (размер 14 пт) через 1,5 интервала на одной стороне стандартного листа формата А4. При использовании других TrueType шрифтов их необходимо прилагать в виде файлов.

Рисунки следует представлять только в виде файлов графических форматов **CDR, VSD, WMF** или **EPS** (векторная графика). Формат CDR предпочтительней. Текст на рисунках печатается шрифтом **Times New Roman Cyr** (размер 10 пт). В случае большой сложности рисунков допускается представление в виде графических форматов TIFF Bitmap и Windows Bitmap (растровая графика) и в виде распечатки на отдельных листах. Все рисунки должны быть приложены в виде отдельных графических файлов (для растровой графики – разрешением 600 dpi).

**Все формулы**, переменные, константы, а также размерности величин, содержащие надстрочные и(или) подстрочные символы, **в том числе и в рисунках**, должны быть набраны в редакторе формул **MathType 5**. Не допускается набор формул в текстовом виде без использования указанного редактора.

**Один из двух экземпляров распечатки должен быть размечен по общепринятым правилам:**

- во всех случаях, когда строчные и прописные буквы одинаковы по начертанию и отличаются только своими размерами (например, С и с, W и w и др.), необходимо подчеркивать прописные буквы двумя чертами снизу, а строчные – двумя чертами сверху;
- для различия между О (буквой) и 0 (нулем) букву О следует подчеркивать двумя чертами снизу;
- надстрочные знаки отчеркиваются дугой  $\cup$ , подстрочные – дугой  $\cap$  (например,  $a_k$ ;  $a^k$ );
- индексы, являющиеся сокращениями от русских слов, поясняются отдельно (предпочтительно использование индексов с латинскими символами);
- греческие буквы подчеркиваются красным карандашом (например,  $\beta$ );
- матрицы подчеркиваются синим карандашом (например,  $\underline{a}$ );
- векторы обозначаются стрелками над буквами, усредненные величины – чертой сверху.



**Внимание! Список литературы должен быть набран с соблюдением ГОСТ Р 7.0.5-2008 Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления.**

– Статьи должны присылаться с указанием авторов, названия (обязательно), полного названия журнала, года, тома, номера или выпуска, страниц. Инициалы следуют после фамилии авторов, в качестве разделителя между страницами используется среднее тире без пробелов, например, 67–78:

Житнюк В.С., Мелков Г.А., Соловьев Д.А. Исследование включения полупроводникового диода в диэлектрический резонатор // Известия вузов. Радиоэлектроника. 1998. Т. 31. № 7. С. 76–79.

– Книги должны присылаться с указанием авторов, названия, места издания, названия издателя, года, количества страниц. Если авторов трое, то они указываются в начале библиографического описания (Иванов В.П., Архатов З.И., Пономарев С.С. Исследования...); если авторов больше трех, то сначала идет название книги или статьи, а затем через косую фамилия первого автора и слова «и др.» в квадратных скобках, т. е. Исследования... / С.С. Иванов [и др.]:

Кинг Р., Тай-Цзунь У. Рассеяние и дифракция электромагнитных волн / пер. с англ. Г.В. Воскресенского; под ред. Э.Л. Бурштейна. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. 195 с.

Полупроводники / С.С. Игнашевич [и др.]; под ред. К.Т. Андреева. СПб., 1978. 34 с.

Жилищное право: электрон. журн. 2007. № 1. URL: <http://www.gilpravo.ru> (дата обращения: 20.08.07).

– Патенты должны присылаться с указанием авторов, названия, номера патента, даты приоритета:

Патент 2003109213/09 (009761 Российская Федерация. Селективное экранирующее покрытие для защиты от электромагнитного излучения / А.А. Долбичкин, В.А. Неганов, О.В. Осипов; приоритет от 01.04.2003. 3 с.

Статья представляется в редакцию в двух экземплярах. Незамеченный экземпляр распечатки должен быть подписан всеми авторами. Отдельно должен быть приложен реферат для ВИНИТИ в двух экземплярах.

Представленные материалы **обязательно** должны включать следующую информацию:

- индекс универсальной десятичной классификации (УДК);
- инициалы и фамилии авторов, ORCID ([orcid.org](http://orcid.org)) на русском и английском языках;
- название статьи на русском и английском языках;
- краткую аннотацию (100–200 слов) и ключевые слова на русском и английском языках;
- реферат для ВИНИТИ (в двух экземплярах);
- краткую (10–15 строк) творческо-биографическую справку, включающую фамилию, имя, отчество (полностью), ученую степень (звание, должность), область научных интересов;
- служебные и домашние адреса с обязательным указанием почтового индекса и номеров средств связи (телефон, e-mail).

При оформлении работ редакция просит руководствоваться приведенными ниже правилами:

- объем материала должен составлять не более 35 машинописных страниц формата А4, отпечатанных через полтора интервала;
- иллюстрации, таблицы выполняются в виде отдельного файла, нумерация проставляется только на распечатке. Обязательны названия на русском и английском языках;
- термины и определения, единицы физических величин, используемые в статье, должны соответствовать действующим ГОСТам;
- нумерация формул проставляется в круглых скобках, ссылки на использованные источники – в квадратных, сноски отмечаются звездочками.

*Рукописи, в которых не соблюдены данные правила, возвращаются авторам без рассмотрения.*

Редакция не ставит в известность авторов об изменениях и сокращениях рукописи, имеющих редакционный характер и не затрагивающих принципиальных вопросов.