

## ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика.  
Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 271–280

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025,  
vol. 25, iss. 2, pp. 271–280

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-271-280>

EDN: WOGCCJ

Научная статья

УДК 681.5.015

### Структурно-параметрическая идентификация граничных условий в обратных задачах теплопроводности с использованием ансамбля классов корректности

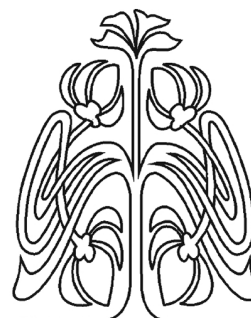
А. Н. Дилигенская<sup>✉</sup>, В. В. Золотарёва

Самарский государственный технический университет, Россия, 443100,  
г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244

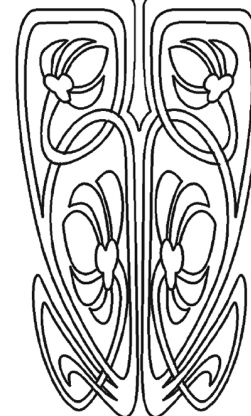
**Дилигенская Анна Николаевна**, доктор технических наук, профессор кафедры автоматизации и управления в технических системах, [adiligenskaya@mail.ru](mailto:adiligenskaya@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0002-9867-9781>, SPIN: 6950-2416, AuthorID: 312097

**Золотарёва Виктория Владимировна**, аспирант кафедры автоматизации и управления в технических системах, [zolotarvika@mail.ru](mailto:zolotarvika@mail.ru), <https://orcid.org/0009-0003-9877-8178>, SPIN: 2972-3715, AuthorID: 1214855

**Аннотация.** Предложен подход к структурно-параметрической идентификации граничных условий процессов технологической теплофизики на основе решения обратных задач теплопроводности. В условиях априорной неопределенности этап структурной идентификации сводится к генерации альтернатив возможных классов решений, заданных в виде компактных множеств. Производится декомпозиция исходной некорректно поставленной задачи к совокупности условно-корректных задач, учитывающих ограничения на принадлежность решения соответствующим классам. На этапе параметрической идентификации с учетом заданной модельной структуры проводится параметризация идентифицируемой характеристики и соответствующей ей результирующей функции состояния и осуществляется редукция полученных задач к задаче параметрической оптимизации. Их решение реализуется на основе методов оптимального управления системами с распределенными параметрами при оценивании температурной невязки в равномерной метрике. Аналитический метод минимаксной оптимизации, учитывающий альтернативные свойства оптимальных распределений, обеспечивает решение задач математического программирования относительно значений вектора параметров для каждой из сформулированных альтернатив. Выбор адекватной математической модели из всех доступных вариантов осуществляется на базе минимаксного критерия, и ее структура может быть уточнена за счет расширения классов решений. Представленный подход демонстрирует удовлетворительное качество идентификации при типовых режимах работы тепловых установок на множествах достаточно гладких функций с минимально возможным для требуемой точности решения числом параметров. Подход направлен на обеспечение информационной поддержки процесса принятия решения



Научный  
отдел





о структуре модельного оператора в обратных задачах теплопроводности. Улучшение качества идентификации при сложных режимах работы оборудования осуществляется за счет генерации гипотез в виде классов корректности, параметризуемых вектором параметров более высокой размерности.

**Ключевые слова:** обратная задача теплопроводности, структурная идентификация, параметрическая идентификация, генерирование модельных операторов, компактные множества решений, минимаксная оптимизация, принятие решения

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-29-00521, <https://rscf.ru/project/23-29-00521/>).

**Для цитирования:** Дилигенская А. Н., Золотарёва В. В. Структурно-параметрическая идентификация граничных условий в обратных задачах теплопроводности с использованием ансамбля классов корректности // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 271–280. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-271-280>, EDN: WOGCCJ  
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Structural-parametric identification of boundary conditions in inverse heat conduction problems using an ensemble of correctness classes

A. N. Diligenskaya<sup>✉</sup>, V. V. Zolotaryova

Samara State Technical University, 244 Molodogvardeyskaya St., Samara 443100, Russia

**Anna N. Diligenskaya**, [adiligenskaya@mail.ru](mailto:adiligenskaya@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0002-9867-9781>, SPIN: 6950-2416, AuthorID: 312097

**Victoria V. Zolotaryova**, [zolotarvika@mail.ru](mailto:zolotarvika@mail.ru), <https://orcid.org/0009-0003-9877-8178>, SPIN: 2972-3715, AuthorID: 1214855

**Abstract.** An approach to structural-parametric identification of boundary conditions of technological thermal physics processes based on the solution of inverse heat conduction problems is proposed. The stage of structural identification under conditions of a priori uncertainty is reduced to generation of alternatives of possible classes of solutions, which are given in the form of compact sets. Taking into account the restrictions on the membership of the solution to the corresponding classes, the initial incorrectly posed problem was decomposed into a set of conditionally correct problems. Parametrization of the identified characteristic and the resulting state function corresponding to it is carried out at the stage of parametric identification on the basis of the given model structure. Thus, the obtained problems are reduced to parametric optimization problems. Its solution is realized on the basis of methods of optimal control of systems with distributed parameters estimating of temperature discrepancy in a uniform metric. The analytical method of minimax optimisation, considering alternance properties of optimal distributions, allows solving mathematical programming problems concerning the values of the parameter vector for each of the formulated alternatives. The minimax criterion is used to select an appropriate mathematical model from all available variants. If necessary, the structure of the model can be refined by extending the classes of solutions. The presented approach demonstrates satisfactory quality of identification at typical modes of operation of thermal plants on sets of sufficiently smooth functions with the minimum possible number of parameters for the required accuracy of the solution. The aim of the approach is to provide information support for the decision making process on the structure of the model operator in inverse heat conduction problems. By generating hypotheses in the form of correctness classes parameterised by a vector of parameters of higher dimensionality, the quality of identification is improved in complex equipment operating modes.

**Keywords:** inverse heat conduction problem, structural identification, parametric identification, generation of model operators, compact sets of solutions, minimax optimization, decision making

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-29-00521, <https://rscf.ru/en/project/23-29-00521/>).

**For citation:** Diligenskaya A. N., Zolotaryova V. V. Structural-parametric identification of boundary conditions in inverse heat conduction problems using an ensemble of correctness classes. *Izvestiya of Saratov University*.



## Введение

Одним из ключевых факторов, определяющих эффективность решения задач управления технологическими процессами и проектирования технических систем, является достоверность, точность и адекватность их математического описания. В сфере технологической теплофизики методы и средства математического моделирования, основанные на заданной проектно или экспериментально полученной информации, играют одну из ведущих ролей при получении всесторонней информации о тепловом состоянии процесса. Несмотря на рост и развитие большого числа методов, направленных на восстановление информации о математической модели сложных теплотехнических систем, проблема их структурной идентификации остается чрезвычайно широкой, сложной и трудноформализуемой. В большинстве случаев ее решение осуществляется применительно к частным случаям и сводится к параметрической или функциональной идентификации [1].

Одним из эффективных средств идентификации тепловых процессов по их косвенным проявлениям или оптимального проектирования теплотехнических систем и в то же время фундаментальным научным направлением является методология решения обратных задач теплопроводности (ОЗТ). Разработанные методы итерационной регуляризации [2, 3], автоматизированного подбора [4], оптимальной динамической фильтрации [4, 5], спектральных функций [4] и другие [6–8] доказали свою эффективность при решении широкого спектра ОЗТ при идентификации начальных и граничных условий, теплофизических, внутренних и геометрических характеристик [9, 10].

Использование методов теории оптимального управления, применение к решению ОЗТ экстремального подхода позволяет свести обратную задачу к вариационной, осуществляющей минимизацию целевого функционала в пространстве возможных решений. Сужение множества решений до класса корректности обеспечивает переход к условно-корректным задачам, для которых могут быть найдены устойчивые приближения решения [11, 12]. Сложностью такого подхода является отсутствие в большинстве случаев априорной информации о возможных классах решений. Для преодоления этого в статье рассмотрены стандартные для тепловых процессов множества корректности, соответствующие типовым режимам работы оборудования.

В реальных условиях идентификацию процессов теплообмена приходится производить в условиях структурно-параметрической неопределенности, относящейся как к структуре, так и к характеристикам изучаемого объекта. В такой ситуации возрастает необходимость разработки научных подходов, обеспечивающих информационную поддержку и позволяющих свести исходную трудноформализованную проблему к серии хорошо формализуемых [13, 14].

Сочетание традиционных методов теории некорректных задач и теплопроводности, учитывающих сущность протекающих явлений, и средств искусственного интеллекта, поддерживающих процедуру принятия решения в условиях неопределенности, способствует повышению качества идентификации. Совместное применение элементов системного подхода и гипотетико-дедуктивного метода научных исследований может повысить достоверность построения математической модели процессов технологической теплофизики, в первую очередь, за счет решения задачи структурной идентификации.

В работе рассмотрены задачи построения математических моделей процессов и систем технологической теплофизики, относящихся к бесконечномерным системам и описываемых уравнениями математической физики параболического типа. Предлагается возможный подход к структурно-параметрической идентификации, на первом этапе генерирующий набор



возможных альтернатив для математического оператора модели, каждая из которых задается на выбранных классах корректности и параметризуется соответствующим вектором параметров. На втором этапе решается задача параметрической идентификации с использованием методов оптимального управления системами с распределенными параметрами. Аналитический метод минимаксной оптимизации [15, 16] позволяет последовательно строить устойчивые приближения к решению на основе минимизации максимального отклонения модельного температурного распределения от заданного. Далее реализуется этап проверки гипотез и выбора наилучшей адекватной математической модели на базе принятого функционального (минимаксного) критерия. При необходимости производится расширение возможных классов решений, и процедура поиска решений повторяется.

## 1. Декомпозиция некорректной задачи

Исследуется граничная обратная задача теплопроводности, относящаяся к классу некорректно поставленных задач, в экстремальной постановке. Предлагаемый подход универсален по отношению к виду математической модели исследуемого явления. В работе для сохранения особенностей бесконечномерных процессов он рассмотрен на примере базового процесса теплопроводности, который описывается типовым аналитическим линейным одномерным уравнением математической физики параболического типа, дополненным начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < R, \quad 0 < t < t^*; \quad (1)$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=R} = q(t). \quad (2)$$

Граничная обратная задача сформулирована в экстремальной постановке, при которой в задаче (1), (2) входной доступной информацией является результирующая функция состояния — температура  $T(x^*, t)$ , заданная проектно или полученная экспериментально на заданном интервале  $t \in [0, t^*]$  в некоторой фиксированной точке  $x^*$ , а выходной искомой величиной — плотность граничного теплового потока  $q(t)$ . Тем самым ставится задача восстановления сосредоточенной функции  $q(t)$ , обеспечивающей минимизацию максимального абсолютного значения температурного отклонения  $T(x^*, t) - T_M(x^*, q_M(t), t)$  экспериментального распределения  $T(x^*, t)$  от модельного  $T_M(x^*, q_M(t), t)$ , соответствующего искомой функции

$$I(q_M(t)) = \max_{t \in [0, t^*]} |T(x^*, t) - T_M(x^*, t, q_M(t))| \rightarrow \min_{q_M(t) \in V}. \quad (3)$$

Оценка невязки реализуется в равномерной метрике, исключающей локальные выбросы в отдельных точках, как правило, на границах интервала идентификации.

Задача формулируется как задача оптимального управления, в которой необходимо отыскать подчиненное условию принадлежности некоторому заданному множеству  $V$  достаточно гладких функций управляющее воздействие, доставляющее минимакс на интервале идентификации. Использование аналитического представления решения позволяет провести всесторонний анализ существенных свойств и характеристик объекта.

В условиях априорной структурной неопределенности искомой характеристики  $q(t)$  производится декомпозиция задачи (3) на серию задач, оперирующих в каждом случае с отдельным классом  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  физически реализуемых функций, принадлежащих компактному множеству. Задание конкретных классов решений в форме компактных множеств соответствует редукции исходной задачи к совокупности условно-корректных задач. Вопрос выбора компактных множеств не имеет очевидного решения. В общем случае такой выбор осуществляется на основе очевидных физических соображений в предметной области, теоретических сведений о физических закономерностях и априорной информации о процессе для каждой конкретной ситуации. Как правило, процессы технологической теплофизики



характеризуются инерционностью, что приводит к отсутствию резких скачкообразных изменений в характеристиках объекта, во внешних воздействиях и в выходной величине, которые, соответственно, могут быть описаны достаточно гладкими функциями. При отсутствии импульсных воздействий класс решений зачастую может быть ограничен непрерывными и непрерывно-дифференцируемыми функциями.

В рассматриваемой задаче выбор компактных множеств производился на основе анализа [17], и в качестве классов решений были выделены множества постоянных, экспоненциальных (возрастающих, убывающих), линейных, параболических и т.д. функций [18].

Тем самым на первом этапе на основе физического смысла задачи генерируется совокупность конечного числа  $N$  альтернатив для модельного оператора искомой функции, которые однозначно определены своими векторами параметров. Таким образом, этап структурной идентификации сводится к выработке гипотез о возможном модельном операторе, которые будут подтверждены или опровергнуты на последующем этапе параметрической идентификации и редукции исходной некорректной задачи к совокупности условно-корректных задач.

## 2. Минимаксная оптимизация на классах корректности

Принадлежность заданным множествам корректности рассматривается как ограничение на класс решения. На этапе декомпозиции получена совокупность условно корректных задач, в каждой из которых требуется найти подчиненное условию принадлежности  $q_M(t) \in V_i, i = 1, \dots, N$  заданному классу корректности управляющее воздействие  $q_M(t)$ , при котором на интервале идентификации достигается выполнение минимаксного соотношения (3).

Модельная температурная реализация, соответствующая решению  $q_M(t)$ , получена на основе точной математической модели процесса теплопроводности, позволяющей учесть все существенные особенности процесса, в виде бесконечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{T}_n(\mu_n, t)}{dt} = -\mu_n^2 \bar{T}_n(\mu_n, t) + \bar{g}_n(\mu_n, t), \quad \bar{T}_n(\mu_n, 0) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

где  $\bar{T}_n(\mu_n, t)$ ,  $\bar{g}_n(\mu_n, t)$ ,  $\bar{T}_n(\mu_n, 0)$  — коэффициенты разложения в бесконечный ряд по собственным функциям тепловой задачи функции температуры, граничного воздействия и начального пространственного распределения.

Предварительная параметризация идентифицируемой характеристики  $q_M(\Delta, t)$  на множествах корректности приводит к ее однозначному представлению с помощью вектора параметров  $\Delta$ . На основе точного решения краевой задачи осуществляется переход к параметрическому представлению температурной реализации  $T_M(x^*, \Delta, t)$  на замкнутом множестве параметров. Тем самым осуществляется редукция задачи (3) к специальным негладким задачам математического программирования

$$I(\Delta_i^{(K)}) = \max_{t \in (0, t^*)} |T(x^*, t) - T_M(x^*, t, \Delta_i^{(K)})| \rightarrow \min_{\Delta_i^{(K)} \in V_i} \quad (5)$$

относительно искомого вектора параметров  $\Delta_i^{(K)}$  для каждого множества решений  $V_i, i = 1, \dots, N$ .

Полученная задача (5) реализует оценивание температурного отклонения расчетного состояния от заданного на временном интервале в равномерной (чебышевской) метрике. Эта задача предусматривает экстремизацию минимаксного функционала конечного числа  $K$  переменных с бесконечным числом ограничений по временной переменной. Далее, для решения полученных задач параметрической оптимизации (ЗПО) могут быть использованы различные численные подходы теории некорректных задач.





Авторами применен основанный на теории оптимального управления системами с распределенными параметрами специальный метод параметрической оптимизации, учитывающий альтернативные свойства оптимальных решений [15, 16]. Данные свойства позволяют задать конфигурацию температурной невязки, которая характеризуется тем, что ее величина достигает знакопеременяющихся предельных значений в отдельных точках на интервале идентификации. Отличительным свойством предложенного метода является то, что число таких точек однозначно связано с числом искомых параметров, а конкретнее, превышает его на единицу. Для каждого варианта  $i = 1, \dots, N$  предложенных компактных множеств в зависимости от числа искомых параметров  $K = K_i$  в параметризованном представлении идентифицируемой функции  $q_M(\Delta_i^{(K)}, t)$  составляется замкнутая система расчетных соотношений для максимальных по абсолютной величине значений температурной невязки относительно всех неизвестных – вектора параметров и величины минимаксного отклонения. Последовательное численное решение всех полученных систем расчетных соотношений приводит к приближенным решениям на выбранных компактных множествах, с разной степенью точности аппроксимирующих искомую характеристику.

### 3. Анализ альтернатив и принятие решения

На заключительном этапе выполняется проверка выдвинутых гипотез об адекватности полученных моделей с заданными структурными операторами искомому воздействию. Выбор достоверной математической модели из возможных вариантов осуществляется на базе минимаксного или квадратичного критерия подбора на доступных для наблюдения экспериментальных (или проектных)  $T(x^*, t)$  и расчетных  $T_M(x^*, \Delta_i^{(K)}, t)$  данных для температурного состояния.

В типовых случаях, когда при реализации теплового процесса используются базовые режимы работы технологического оборудования (постоянные значения управляющего воздействия, линейно нарастающие, апериодические режимы), найденное приближенное решение на одном из представленных множеств может обладать достаточной точностью. По результатам начальных этапов структурно-параметрической идентификации делается заключение об адекватности полученной модели или о необходимости расширения ансамбля классов решений. Если ни одна из полученных моделей не удовлетворяет требованиям точности, проводится анализ решений и предусматриваются рекомендации по генерации альтернатив, содержащих функциональные зависимости более высокого порядка, обладающие необходимой динамикой. При идентификации более сложных тепловых режимов даже гипотеза с наименьшим отклонением может не удовлетворять физическому смыслу и требованиям точности. В таком случае, например, может быть использована кусочно-параболическая аппроксимация, позволяющая теоретически получить любую требуемую точность за счет увеличения числа параметров кубической сплайн-аппроксимации [15, 16]. Изложенный подход к структурно-параметрической идентификации представлен на рис. 1.

### 4. Демонстрация результатов

Для демонстрации предложенного подхода были выполнены исследования на некоторых модельных функциях, приближенно описывающих типовые режимы работы теплового оборудования. Была проведена серия вычислительных экспериментов, где в качестве идентифицируемых функций использовалась линейная комбинация из экспоненциальных, затухающих колебательных, синусоидальных составляющих с весовыми коэффициентами, которые задавали наличие той или иной тенденции. Остальные составляющие имитировали присутствие возмущающих факторов. Проведенные эксперименты симулировали режимы работы оборудования: плавное увеличение управляющего воздействия (эксперимент № 1), плавное нарастание и убывание (эксперимент № 2), плавный пуск и выход на установившийся режим (эксперимент № 3).

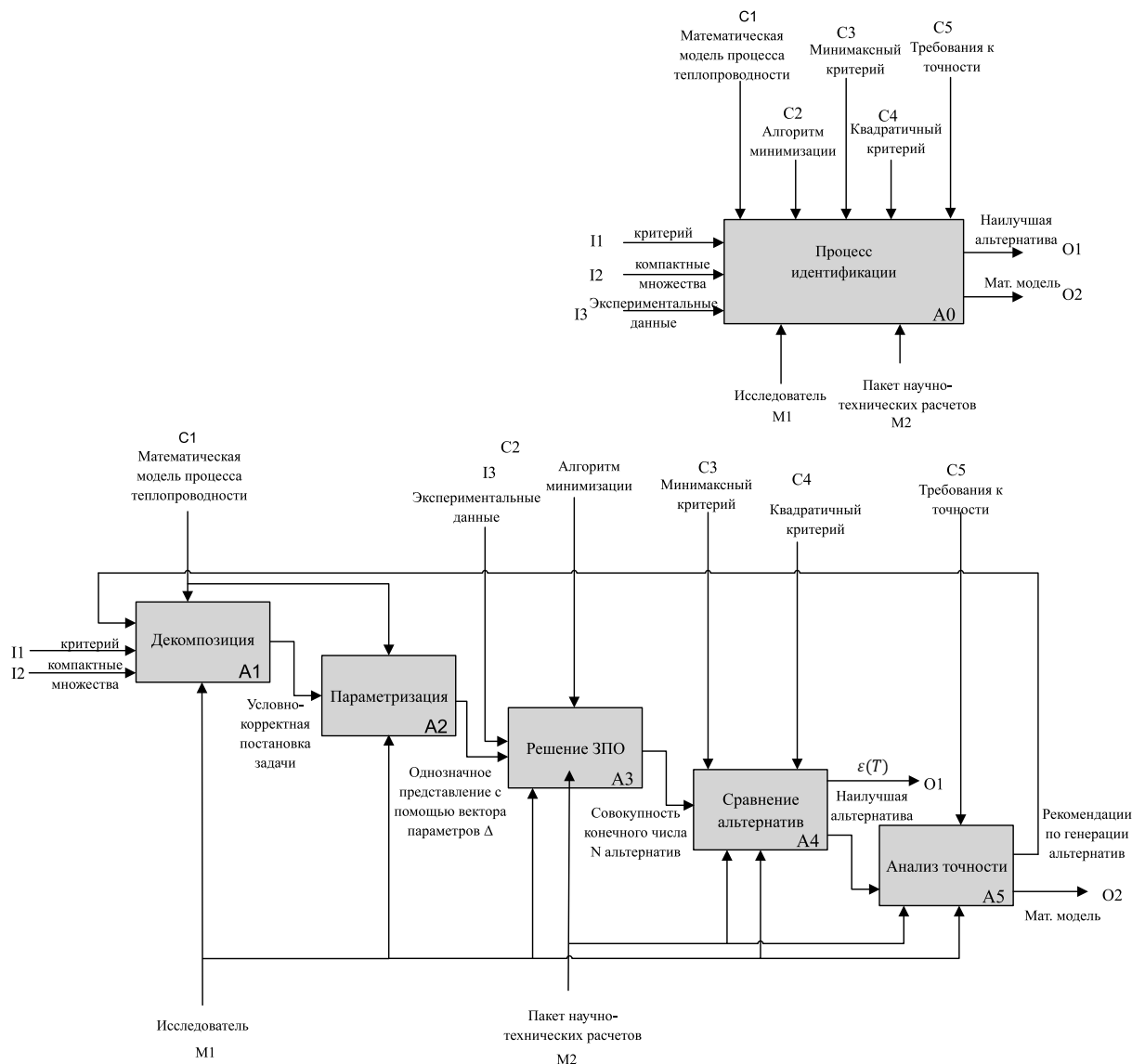


Рис. 1. Схема структурно-параметрической идентификации процессов теплопроводности с использованием ансамбля классов корректности

Fig. 1. Scheme of structural-parametric identification of heat conduction processes using an ensemble of correctness classes

В качестве классов решений были выбраны следующие компактные множества:

- множество  $V_1$  постоянных функций  $f(t) = \Delta = \text{const}$ , заданных одним параметром  $\Delta_1^{(1)}$ ;
- множество  $V_2$  линейных функций  $f(t) = \Delta_1 t + \Delta_2$  с вектором параметров  $\Delta_2^{(2)}$ ;
- множество  $V_3$  экспоненциально возрастающих функций  $f(t) = \Delta_1(e^{\Delta_2 t} - 1)$  с вектором  $\Delta_3^{(2)}$ ;
- множество  $V_4$  экспоненциальных зависимостей с выходом на установившийся режим  $f(t) = \Delta_1(1 - e^{-\Delta_2 t})$  с вектором  $\Delta_4^{(2)}$ ;
- множество  $V_5$  синусоидальных функций  $f(t) = \Delta_1(\sin \Delta_2 \pi t + \Delta_3)$  с вектором  $\Delta_5^{(3)}$ ;
- множество  $V_6$  параболических функций  $f(t) = \Delta_1 t^2 + \Delta_2 t + \Delta_3$  с вектором  $\Delta_6^{(3)}$ .

Некоторые результаты проведенных исследований представлены в табл. 1 и на рис. 2, 3.

На рис. 2 представлены ошибки аппроксимации температурного распределения (эксперимент № 3) на компактных множествах  $V_4$  и  $V_6$ . На рис. 3 представлены заданная зависимость (эксперимент № 3) и построенные модельные распределения на компактах  $V_4$  и  $V_6$ .

Таблица 1 / Table 1

Точность решения задачи на множествах корректности, %  
Accuracy of problem solving on correctness sets, %

Номер эксперимента	Погрешность	Компактное множество решений					
		$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$V_6$
1	$\varepsilon^{(1)}(T)$	—	6.411	0.83	13.984	—	1.258
	$\varepsilon^{(1)}(q)$	—	53.255	11.63	>80	—	17.074
2	$\varepsilon^{(2)}(T)$	5.7	1.576	—	1.961	0.414	0.182
	$\varepsilon^{(2)}(q)$	6.45	9.259	—	9.143	2.071	1.387
3	$\varepsilon^{(3)}(T)$	22.1	5.93	—	2.44	2.63	1.47
	$\varepsilon^{(3)}(q)$	>80	19.8	—	6.9	8.6	5.2

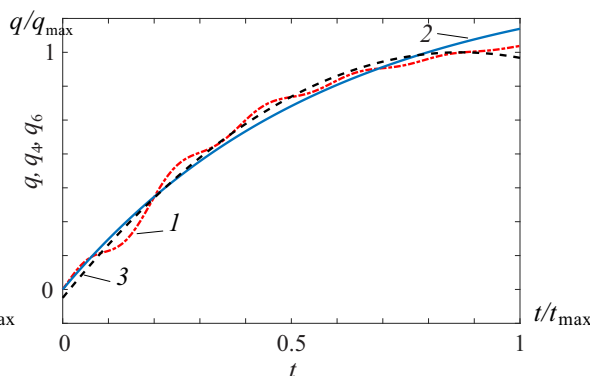
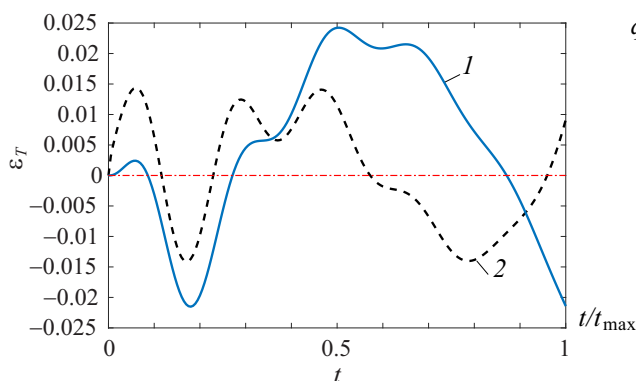


Рис. 2. Оптимальная конфигурация температурной погрешности: 1 —  $(T(x^*, t) - T_M(x^*, \Delta_4^{(2)}, t))$ ; 2 —  $(T(x^*, t) - T_M(x^*, \Delta_6^{(3)}, t))$   
Fig. 2. Optimal configuration of temperature error: 1 —  $(T(x^*, t) - T_M(x^*, \Delta_4^{(2)}, t))$ ; 2 —  $(T(x^*, t) - T_M(x^*, \Delta_6^{(3)}, t))$

Рис. 3. Аппроксимация плотности теплового потока: 1 —  $q(t)$ ; 2 —  $q(\Delta_4^{(2)}, t)$ ; 3 —  $q(\Delta_6^{(3)}, t)$   
Fig. 3. Approximation of heat flux density: 1 —  $q(t)$ ; 2 —  $q(\Delta_4^{(2)}, t)$ ; 3 —  $q(\Delta_6^{(3)}, t)$

Анализ полученных результатов показывает, что практически для всех случаев сохраняется общая тенденция зависимости между абсолютными значениями погрешности  $\varepsilon(T) = |T(x^*, t) - T_M(x^*, \Delta_i^{(K)}, t)|$  температурной аппроксимации и ошибки приближения граничных условий  $\varepsilon(q) = |q^*(t) - q_M(\Delta_i^{(K)}, t)|$ . Уменьшение невязки между заданной  $T(x^*, t)$  и расчетной  $T_M(x^*, \Delta_i^{(K)}, t)$  температурными кривыми соответствует снижению отклонения модельного распределения  $q_M(\Delta_i^{(K)}, t)$  от идентифицируемого  $q^*(t)$  и наоборот (за исключением решения на  $V_1$  в эксперименте № 2). Отсутствие численных значений в оценках температурной невязки и погрешности соответствуют тому, что выбранная функциональная зависимость, соответствующая рассматриваемому классу решений, противоречит физической сущности идентифицируемого режима, и полученное решение расходится или точность решения излишне велика.

### Заключение

В работе получены результаты, направленные на развитие методов решения проблемы структурно-параметрической идентификации процессов технологической теплофизики. Общая проблема структурной идентификации, сопровождающаяся априорной неопределенностью, является чрезвычайно широкой и содержащей трудноформализуемые условия.

Тем не менее, сформулирован новый подход к исследованию рассматриваемой проблемы, в условиях принятых ограничений позволяющий получить удовлетворительные результаты; определены необходимые этапы, представлены возможные классы моделей. Использование





представленного подхода для идентификации типовых режимов, особенно на начальных этапах исследования, сопровождается поиском структуры и построением модели, обладающей требуемой точностью, в пространстве решений с наименьшим числом параметров. Последующее развитие направлено на расширение множеств решений, содержащих более сложные зависимости идентифицируемых характеристик и параметризуемых векторами параметров большей размерности. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшей разработки методологического и математического обеспечения информационной поддержки выработки решения о структуре идентифицируемых характеристик.

### Список литературы

1. Мацевитый Ю. М., Гайшун И. В., Борухов В. Т., Костиков А. О. Параметрическая и функциональная идентификация тепловых процессов // Проблемы машиностроения. 2011. Т. 14, № 3. С. 40–47. EDN: VQXXCT
2. Алифанов О. М., Вабищевич П. Н., Михайлов В. В., Ненарокомов А. В., Полежаев Ю. В., Резник С. В. Основы идентификации и проектирования тепловых процессов и систем : учеб. пособие. Москва : Логос, 2001. 400 с.
3. Алифанов О. М., Ненарокомов А. В., Салосина М. О. Обратные задачи в тепловом проектировании и испытаниях космических аппаратов. Москва : Изд-во МАИ, 2021. 160 с. EDN: QCCQEV
4. Мацевитый Ю. М. Обратные задачи теплопроводности : в 2 т. Киев : Наукова думка, 2002. Т. 1. 405 с.
5. Мацевитый Ю. М., Маляренко В. А., Мултановский А. В. Применение метода оптимальной фильтрации при решении нелинейных задач теплопроводности // Проблемы машиностроения. 1977, № 5. С. 61–65.
6. Swati Agarwala, K. Narayan Prabhu. An experimental approach based on inverse heat conduction analysis for thermal characterization of phase change materials // Thermochemica Acta. 2020. Vol. 685. Art. 178540. <https://doi.org/10.1016/j.tca.2020.178540>
7. Ping Xiong Jian Deng, Tao Lu, Qi Lu, Yu Liu, Yong Zhang. A sequential conjugate gradient method to estimate heat for nonlinear inverse heat conduction problem // Annals of Nuclear Energy. 2020. Vol. 149. Art. 107798. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2020.107798>
8. Bowen Zhang, Jie Mei, Miao Cui, Xiao-wei Gao, Yuwen Zhang. A general approach for solving three-dimensional transient nonlinear inverse heat conduction problems in irregular complex structures // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2019. Vol. 140. P. 909–917. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.06.049>
9. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. Москва : Наука, 1981. 400 с.
10. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи : учебник для вузов. 4-е изд., перераб. и доп. Новосибирск : Изд-во Сибирского отд-ния РАН, 2018. 508 с. <https://doi.org/10.15372/INVERSE2018KSI>, EDN: UQAVAO
11. Вапник В. Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. Москва : Наука, 1979. 448 с.
12. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. Москва : Наука, 1978. 206 с.
13. Прангивили И. В., Лотоцкий В. А., Гинсберг К. С., Смолянинов В. В. Идентификация систем и задачи управления: на пути к современным системным методологиям // Проблемы управления. 2004. № 4. С. 2–15. EDN: HSQSZP
14. Гинсберг К. С. Концептуальные основы методологии структурной идентификации для создания систем автоматического управления с требуемыми свойствами // Информационные технологии и вычислительные системы. 2019. № 1. С. 38–48. <https://doi.org/10.14357/20718632190104>, EDN: ZAJQWT
15. Рапорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. Специальные методы оптимизации в обратных задачах теплопроводности // Известия Российской академии наук. Энергетика. 2002. № 5. С. 144–155.
16. Diligenskaya A. N., Rapoport E. Ya. Analytical methods of parametric optimization in inverse heat-conduction problems with internal heat release // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2014. Vol. 87, iss. 5. P. 1126–1134. <https://doi.org/10.1007/s10891-014-1114-1>
17. Алифанов О. М. Обратные задачи теплообмена. Москва : Машиностроение, 1988. 280 с.
18. Дилигенская А. Н., Золотарёва В. В. Параметрическая идентификация граничного воздействия на компактных множествах заданной формы // Математические методы в технологиях и технике. 2022. № 12, ч. 1. С. 7–10. [https://doi.org/10.52348/2712-8873\\_MMТТ\\_2022\\_12\\_07](https://doi.org/10.52348/2712-8873_MMТТ_2022_12_07), EDN: TGGYQJ



## References

1. Matsevityi Yu. M., Gayshun I. V., Borukhov V. T., Kostikov A. O. Parametric and functional identification of thermal processes. *Problemy mashinostroeniya* [Problems of Mechanical Engineering], 2011, vol. 14, iss. 3, pp. 40–47 (in Russian). EDN: [VQXXCT](#)
2. Alifanov O. M., Vabishevich P. N., Mikhailov V. V., Nenarokomov A. V., Polezhaev Yu. V., Reznik S. V. *Osnovy identifikatsii i proektirovaniya teplovykh protsessov i system* [Fundamentals of identification and design of thermal processes and systems]. Moscow, Logos, 2001. 400 p. (in Russian).
3. Alifanov O. M., Nenarokomov A. V., Salosina M. O. *Obratnye zadachi v teplovom proektirovanii i ispytaniyakh kosmicheskikh apparatov* [Inverse problems in thermal design and testing of spacecrafts]. Moscow, MAI Publ., 2021. 160 p. (in Russian). EDN: [QCQEIV](#)
4. Matsevityi Yu. M. *Obratnye zadachi teploprovodnosti* [Inverse heat-conduction problems]. Vol. 1. Kiev, Naukova dumka, 2002. 405 p. (in Russian).
5. Matsevityi Yu. M., Malyarenko V. A., Multanovsky A. V. Application of the optimal filtering method in solving nonlinear heat conduction problems. *Problemy mashinostroeniya* [Problems of Mechanical Engineering], 1977, iss. 5, pp. 61–65 (in Russian).
6. Swati Agarwala, K. Narayan Prabhu. An experimental approach based on inverse heat conduction analysis for thermal characterization of phase change materials. *Thermochimica Acta*, 2020, vol. 685, art. 178540. <https://doi.org/10.1016/j.tca.2020.178540>
7. Ping Xiong Jian Deng, Tao Lu, Qi Lu, Yu Liu, Yong Zhang. A sequential conjugate gradient method to estimate heat for nonlinear inverse heat conduction problem. *Annals of Nuclear Energy*, 2020, vol. 149, art. 107798. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2020.107798>
8. Bowen Zhang, Jie Mei, Miao Cui, Xiao-wei Gao, Yuwen Zhang. A general approach for solving three-dimensional transient nonlinear inverse heat conduction problems in irregular complex structures. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2019, vol. 140, pp. 909–917. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.06.049>
9. Vasiliev F. P. *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Methods for solving extreme problems]. Moscow, Nauka, 1981. 400 p. (in Russian).
10. Kabanikhin S. I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and uncorrected problems]. Novosibirsk, Siberian Scientific Publishing House, 2009. 457 p. (in Russian).
11. Vapnik V. N. *Vosstanovlenie zavisimostey po empiricheskim dannym* [Restoration of dependencies on empirical data]. Moscow, Nauka, 1979. 448 p. (in Russian).
12. Ivanov V. K., Vasin V. V., Tanana V. P. *Teoriya lineynykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya* [Theory of linear ill-posed problems and its applications]. Moscow, Nauka, 1978. 206 p. (in Russian).
13. Prangishvili I. V., Lotockii V. A., Ginsberg K. S., Smoljaninov V. V. System identification and control problems: On the way to modern system methodologies. *Problemy Upravleniya*, 2004, iss. 4, pp. 2–15 (in Russian). EDN: [HSQSZP](#)
14. Ginsberg K. S. The structure identification methodology conceptual basis for the purpose of creating automatic control systems with the required properties. *Journal of Information Technologies and Computing Systems*, 2019, iss. 1, pp. 38–48 (in Russian). <https://doi.org/10.14357/20718632190104>, EDN: [ZAJQWT](#)
15. Rapoport E. Ya., Pleshivtseva Yu. E. Special optimization methods in inverse heat-conduction problems. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2002, iss. 5, pp. 144–155 (in Russian).
16. Diligenskaya A. N., Rapoport E. Ya. Analytical methods of parametric optimization in inverse heat-conduction problems with internal heat release. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2014, vol. 87, iss. 5, pp. 1126–1134. <https://doi.org/10.1007/s10891-014-1114-1>
17. Alifanov O. M. *Obratnye zadachi teploobmena* [Inverse heat-transfer problems]. Moscow, Mashinostroenie, 1988. 280 p. (in Russian).
18. Diligenskaya A. N., Zolotaryova V. V. Parametric identification of the boundary action on the specified compact sets. *Mathematical Methods in Technologies and Technics*, 2022, iss. 12, pt. 1, pp. 7–10 (in Russian). [https://doi.org/10.52348/2712-8873\\_MMTT\\_2022\\_12\\_07](https://doi.org/10.52348/2712-8873_MMTT_2022_12_07), EDN: [TGGYQJ](#)

Поступила в редакцию / Received 12.11.2024

Принята к публикации / Accepted 22.11.2024

Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025