

Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

*Выпуск 103
Май 2023*

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2023

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 103

Москва – 2023

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики: Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Куржанский А.Б., Новиков Д.А., Попков Ю.С., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Галеев А.А., Савватеев А.В.; д-ра техн. наук: Кузнецов О.П. (ИПУ РАН), Кульба В.В. (ИПУ РАН), Павлов Б.В. (ИПУ РАН), Поляк Б.Т. (ИПУ РАН), Рутковский В.Ю. (ИПУ РАН).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: академик Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Калимулина Э.Ю. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИТМО), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ, ГУ ВШЭ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук: проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН); д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН); д-р техн. наук доцент Коргин Н.А. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (ИПУ РАН); д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН); д-р биол. наук проф. Михальский А.И. (ИПУ РАН); д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Райгородский А.М. (МФТИ), проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН); д-ра техн. наук: проф. Самуилов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Соловуков А.С. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ); д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Арзамас – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. (АПИ НГТУ); **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – д-р техн. наук проф. Зоркальцев В.И. (ЛИН СО РАН), д-ра физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодин А.К., проф. Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И.; **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в интернете: ubs.mtas.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Вишневский В.М., Клименок В.И., Ларионов А.А., Мухтаров А.А., Соколов А.М.	
<i>Исследование характеристик приоритетной мультисервисной системы ММАР/РН/М/Н с использованием метода Монте-Карло</i>	6

Корепанов В.О., Чхартишвили А.Г., Шумов В.В.	
<i>Базовые модели боевых действий</i>	40

Математическая теория управления

Бубнова Е.С.	
<i>Множества достижимости и обобщённая Н₂-норма линейной дискретной дескрипторной системы</i>	78

Анализ и синтез систем управления

Белов И.Р., Кустов А.Ю.	
<i>О применении фильтра Калмана в задаче оценивания при слабо окрашенных входных шумах.....</i>	94
Мухин А.В.	
<i>Критерий существования статического регулятора по выходу.....</i>	121

Управление в социально-экономических системах

Корнеенко В.П.	
<i>Методы выбора медианы ранжирования согласованности экспертных оценок по критерию близости в ранговой шкале</i>	135

*Управление техническими системами
и технологическими процессами*

Стецюра Г.Г.

*Синхронизация распределенного эксперимента
с обратной связью (на базе IEEE 1588 – PTP
и WHITE RABBIT).....* 171

Управление подвижными объектами и навигация

Гаракоев А.М., Гладышев А.И.

*Идентификация динамической системы
«Летательный аппарат + пилот» при выполнении
аэрогеофизической съёмки.....* 190

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИОРИТЕТНОЙ МУЛЬТИСЕРВИСНОЙ СИСТЕМЫ ММАР/РН/М/Н С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО¹

Вишневский В. М.²

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Клименок В. И.³

(Белорусский государственный университет, Минск)
Ларионов А. А.⁴, Мухтаров А. А.⁵, Соколов А. М.⁶

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Представлены результаты исследования приоритетной многолинейной системы массового обслуживания (СМО) с маркированным марковским входным потоком (ММАР), обслуживанием фазового типа РН и очередью конечной ёмкости. Приоритетные классы трафика различаются вероятностью присоединения к очереди, зависящей от количества заявок в ней, и РН-распределением времени обслуживания. Если очередь заполнена, заявка не присоединяется к системе. Для частного случая такой СМО с двумя классами трафика разработана и исследована аналитическая модель, а также предложен алгоритм вычисления стационарных вероятностей состояния системы, вероятностей потерь, среднего числа заявок в системе и других характеристик. Для общего случая системы с К-классами построена имитационная модель, исследованы характеристики системы.

Ключевые слова: многолинейная система массового обслуживания, метод Монте-Карло, стационарный режим.

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-29-00795, <https://rscf.ru/project/23-29-00795>.

² Владимир Миронович Вишневский, д.т.н., профессор (vishn@inbox.ru).

³ Валентина Ивановна Клименок, д.ф-м.н., профессор (klimenok@bsu.by).

⁴ Андрей Алексеевич Ларионов, к.т.н. (larioandr@gmail.com).

⁵ Амир Амангельдыевич Мухтаров, к.т.н. (mukhtarov.amir.a@gmail.com).

⁶ Александр Михайлович Соколов, аспирант ИПУ РАН
(aleksandr.sokolov@phystech.edu).

1. Введение

Системы массового обслуживания с приоритетами, являющиеся важным разделом теории очередей, эффективно используются при анализе реальных технических и социальных систем [1, 2, 7, 9, 19, 20, 22]. Примерами систем с приоритетным трафиком являются цифровое телевидение, в котором передача синхронизирующих сигналов имеет более высокий приоритет, чем передача видео, оптические сети нового поколения с поддержкой приоритетных классов обслуживания (QoS), в частности – системы Интернета вещей (IoT) [2, 7, 20, 22], информационные сервисы с различными категориями пользователей [19], а также любые социальные системы с клиентами разного типа, например, больницы. В качестве примера последних можно привести исследования [1, 9], в которых изучается эффективность алгоритмов распределения мест в очереди на пересадку органов для пациентов в зависимости от тяжести их заболевания. Кроме того, приоритетные системы используются для предоставления пользователям приоритетного входа в систему при работе с различными сервисами. Так в статье [19] приведён анализ влияния приоритетов на загруженность веб-сервисов, время проведения транзакции и другие характеристики, исследована производительность различных баз данных для пользователей с разными приоритетами доступа.

Как известно, трафик в современных компьютерных сетях является коррелированным [11], и для его моделирования необходимо использовать марковские входные потоки *MAP*[4]. Естественным обобщением *MAP*-потоков на случай приоритетного неоднородного трафика являются маркированные марковские входные потоки (*Marked MAP*, *MMAP*) [4], которые позволяют описывать коррелированные поступления заявок для произвольного числа классов трафика.

Системы с *MMAP*-потоками слабо исследованы в мировой литературе по сравнению с классическими *MAP*-потоками [3, 4, 17]. В статье [10] анализируется размер очереди приоритетной системы *MMAP/MAP/1*. Исследование условий ста-

ционарного режима многолинейной СМО с входящим *MMAP*-потоком представлено в статье [9]. Однако в ней отсутствует описание алгоритма расчёта стационарных вероятностей состояний и других характеристик производительности системы. В недавних работах [5, 13] была исследована проблема поиска стационарного решения для приоритетных систем с входным *MMAP*-потоком для случая одного обслуживающего прибора. В статье [13] исследуется очередь с относительным приоритетами, в [5] – с абсолютным приоритетом.

В статье [14] рассмотрена сложная многолинейная СМО с входящим *MMAP*-потоком с двумя классами приоритетов и отсутствием буфера. Настоящая работа является развитием и обобщением этой статьи. Принципиальным отличием настоящей статьи от [14] является наличие буфера конечного размера и произвольного числа классов заявок. Такое обобщение, с одной стороны, значительно усложняет математический анализ даже для двух классов приоритетов, но, с другой стороны, расширяет область практического применения рассматриваемой модели.

Формальная постановка задачи и описание модели приведены в разделе 2. В разделе 3 приводится аналитическое решение для частного случая рассматриваемой модели. Дано описание многомерной марковской цепи, алгоритма расчёта вероятностей стационарного состояния и других характеристик системы. В разделе 4 приведены результаты численного исследования основных характеристик рассматриваемой многолинейной СМО, включая вероятность потери заявок и времени пребывания заявок в системе.

2. Постановка задачи

Рассматривается N -линейная система массового обслуживания с буфером размера R . Заявки разных типов поступают в *MMAP*-потоке под управлением неприводимой цепи Маркова с непрерывным временем ν_t , $t \geq 0$, которая принимает значения в множестве $\{0, 1, 2, \dots, W\}$. Процесс ν_t пребывает в состоянии ν в течение экспоненциально распределенного времени

с параметром λ_ν , $\nu = \overline{0, W}$, после чего с вероятностью $p_k(\nu, \nu')$ переходит в состояние ν' и генерируется заявка k -го типа, $k \in \{1, 2, \dots, K\}$, или с вероятностью $p_0(\nu, \nu')$ цепь переходит в состояние ν' без генерации заявки, причем $p_0(\nu, \nu) = 0$. Процесс ν_t называется управляющим процессом *MMAP*-потока. Для указанных вероятностей выполняются естественные ограничения: $\sum_{k=1}^K \sum_{\nu'=0}^W p_k(\nu, \nu') = 1$, $\nu, \nu' = \overline{0, W}$.

Таким образом, *MMAP*-поток задается:

– размерностью пространства состояний управляющего процесса, $W + 1$;

– количеством классов заявок, K ;

– интенсивностями времен пребывания управляющего процесса в соответствующих состояниях, λ_ν , $\nu = \overline{0, W}$;

– вероятностями переходов, $p_k(\nu, \nu')$, $k = \overline{1, K}$, $\nu, \nu' = \overline{0, W}$.

Всю информацию о *MMAP* удобно хранить в виде набора матриц D_k , $k = \overline{1, K}$, порядка $(W + 1) \times (W + 1)$, элементы которых определяются как

$$(D_k)_{\nu, \nu'} = \lambda_\nu p_k(\nu, \nu'), \quad \nu, \nu' = \overline{0, W}, k = \overline{1, K},$$

$$(D_0)_{\nu, \nu'} = \begin{cases} -\lambda_\nu, & \nu = \nu' = \overline{0, W}, \\ \lambda_\nu p_0(\nu, \nu'), & \nu \neq \nu', \nu, \nu' = \overline{0, W}. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что элементами матриц D_k , $k = \overline{1, K}$, являются интенсивности переходов процесса ν_t , сопровождающиеся генерацией заявки k -го типа. Аналогичный смысл имеют недиагональные элементы матрицы D_0 , а диагональные элементы этой матрицы – это взятые с противоположным знаком интенсивности выхода процесса ν_t из соответствующих состояний.

Естественное требование к матрицам D_k , $k = \overline{1, K}$, состоит в том, что не все они нулевые. При выполнении этого требования матрица D_0 является невырожденной и, более того, устойчивой, так как все ее собственные значения имеют отрицательную действительную часть.

Матрицы D_k , $k = \overline{1, K}$, можно задавать их матричной производящей функцией $D(z) = \sum_{k=0}^K D_k z^k$, $|z| < 1$. Отметим, что значение этой функции в точке $z = 1$ — матрица $D(1)$ — является инфинитезимальным генератором управляющего процесса ν_t , $t \geq 0$. Стационарное распределение этого процесса, представленное в виде вектора-строки θ , определяется как решение системы линейных алгебраических уравнений $\theta D(1) = \mathbf{0}$, $\theta \mathbf{e} = 1$. Здесь и далее \mathbf{e} — вектор-столбец, состоящий из единиц.

Интенсивность λ_k поступления заявок k -го типа в *MMAP*-потоке задается формулой

$$\lambda_k = \theta D_k \mathbf{e}, \quad k = \overline{1, K},$$

а суммарная интенсивность поступления заявок λ — по формуле

$$\lambda = \theta \sum_{k=1}^K D_k \mathbf{e}.$$

Дисперсия v_k длин интервалов между моментами поступления групп заявок k -го типа вычисляется по формуле

$$v^{(k)} = \frac{2\theta(-D_0 - \sum_{l=1, l \neq k}^K D_l)^{-1} \mathbf{e}}{\lambda_k} - \left(\frac{1}{\lambda_k}\right)^2, \quad k = \overline{1, K}.$$

Коэффициент корреляции $c_{cor}^{(k)}$ длин двух соседних интервалов между моментами поступления групп заявок k -го типа вычисляется по формуле

$$c_{cor}^{(k)} = \left[\frac{\theta(D_0 + \sum_{l=1, l \neq k}^K D_l)^{-1} \mathbf{e}}{\lambda_k} - D_k(D_0 + \sum_{l=1, l \neq k}^K D_l)^{-1} \mathbf{e} - \left(\frac{1}{\lambda_k}\right)^2 \right] v_k^{-1},$$

$$k = \overline{1, K}.$$

Более подробное описание *MMAP* можно найти, например, в [9]. Отметим, что стационарный пуассоновский поток является частным случаем *MMAP*-потока при $W = 0$, $K = 1$, $D_0 = -\lambda$, $D_1 = \lambda$.

В общем случае заявки разных типов отличаются приоритетами и параметрами *PH* – распределения времени обслуживания. Более подробно эти отличия будут описаны ниже. Полагаем, что все обслуживающие приборы одинаковы и независимы друг от друга. Время обслуживания любым прибором заявки k -го, $k = 1, \dots, K$, типа имеет фазовое распределение (*PH-Phase type distribution*), которое задается парой (β_k, S_k) . Здесь β_k – вектор-строка порядка M_k , а S_k – квадратная матрица порядка M_k . Таким образом заданное время обслуживания интерпретируется как время, за которое некоторая управляющая цепь Маркова $m_t^{(k)}$, $t \geq 0$, с пространством состояний $\{1, \dots, M_k, M_k + 1\}$ достигнет единственного поглощающего состояния $M_k + 1$. Переходы цепи $m_t^{(k)}$, $t \geq 0$, в пространстве несущественных состояний $\{1, \dots, M_k\}$ задаются субгенератором S_k , а интенсивности переходов в поглощающее состояние задаются вектором $S_0^{(k)} = -S_k \mathbf{e}$. В момент начала обслуживания состояние процесса $m_t^{(k)}$, $t \geq 0$, выбирается из пространства состояний $\{1, \dots, M_k\}$ на основании вероятностного вектора-строки β_k . Интенсивности обслуживания задаются как $\mu_k = -(\beta_k S_k^{-1} \mathbf{e})^{-1}$.

Предполагаем, что заявки типа $k' < k$, $k, k' = 1, K$ обладают относительным приоритетом. Это означает, что более приоритетные заявки стоят в буфере впереди всех менее приоритетных заявок. Поступающая заявка типа k' , заставшая все приборы занятыми и в очереди i , $i = \overline{0, R - 1}$, заявок, с вероятностью $q_i^{(k')}$ становится впереди всех неприоритетных заявок типов $k = k' + 1, k' + 2, \dots, K$ и в конце очереди приоритетных заявок типов $k = 1, 2, \dots, k'$. С вероятностью $1 - q_i^{(k')}$ новая заявка решает не присоединяться к очереди и уходит из системы навсегда. Если заявка любого типа, поступающая в систему, застает систему полностью занятой, то она покидает систему навсегда. Для упрощения записи в случае $K = 2$ типов заявок будем обозначать

вероятности присоединения к очереди длины i приоритетных заявок класса $k = 1$ как $q_i \equiv q_i^{(1)}$, а неприоритетных заявок класса $k = 2$ – как $f_i \equiv q_i^{(2)}$.

Нашей целью является расчет стационарных вероятностей системы и характеристик производительности, включая вероятности потерь и время отклика системы.

3. Система $MMAP/PH/M/N$ с двумя классами заявок

3.1. Цепь Маркова, описывающая состояние системы

Пусть в момент времени t :

- i_t – количество заявок в буфере, $i_t = \overline{0, R}$;
- k_t – количество приоритетных заявок в буфере, $k_t = \overline{0, i_t}$;
- n_t – количество занятых приборов, $n_t = \overline{0, N}$;
- r_t – количество приборов, занятых обслуживанием приоритетных заявок, $r_t = \overline{0, n_t}$;
- $n_t^{(m_t^{(1)})}$ – количество приборов, обслуживающих приоритетные заявки на фазе $m_t^{(1)}$, $n_t^{(m_t^{(1)})} = \overline{0, r_t}$, $m_t^{(1)} = \overline{1, M_1}$;
- $\tilde{n}_t^{(m_t^{(2)})}$ – количество приборов, обслуживающих неприоритетные заявки на фазе $m_t^{(2)}$, $\tilde{n}_t^{(m_t^{(2)})} = \overline{0, n_t - r_t}$, $m_t^{(2)} = \overline{1, M_2}$;
- ν_t – состояние управляющего процесса $MMAP$, $\nu_t = \overline{0, W}$.

Процесс изменения состояний системы описывается регулярной неприводимой цепью Маркова ξ_t с непрерывным временем

$$\xi_t = \{(i_t, k_t, r_t, n_t, \nu_t, n_t^{(1)}, n_t^{(2)}, \dots, n_t^{(M_1)}, \tilde{n}_t^{(1)}, \tilde{n}_t^{(2)}, \dots, \tilde{n}_t^{(M_2)}\}, t \geq 0,$$

и пространством состояний

$$\Omega = \{(i, n, r, \nu, n^{(1)}, n^{(2)}, \dots, n^{(M_1)}, \tilde{n}^{(1)}, \tilde{n}^{(2)}, \dots, \tilde{n}^{(M_2)}),$$

$$i = 0, n = \overline{0, N}, r = \overline{0, n}, \nu = \overline{0, W}$$

$$n^{(m)} = \overline{0, r}, m = \overline{1, M_1}, \tilde{n}^{(\tilde{m})} = \overline{0, n - r}, \tilde{m} = \overline{1, M_2}\} \bigcup$$

$$\bigcup\{(i, k, n, r, \nu, n^{(1)}, n^{(2)}, \dots, n^{(M_1)}, \tilde{n}^{(1)}, \tilde{n}^{(2)}, \dots, \tilde{n}^{(M_2)}),$$

$$i = \overline{1, R}, k = \overline{0, i}, n = N, r = \overline{0, n}, \nu = \overline{0, W}, n^{(m^{(1)})} = \overline{0, r},$$

$$m^{(1)} = \overline{1, M_1}, \tilde{n}^{(m^{(1)})} = \overline{0, N-r}, m^{(2)} = \overline{1, M_2},$$

$$\sum_{m^{(1)}=1}^{M_1} n^{(m^{(1)})} = r, \sum_{m^{(2)}=1}^{M_2} \tilde{n}^{(m^{(2)})} = N-r\}$$

Количество векторов пространства состояний при $i = 0$ есть

$$K_0 = (W+1) \sum_{n=0}^N \sum_{r=0}^n C_{r+M_1-1}^{M_1-1} C_{n-r+M_2-1}^{M_2-1}$$

и для любого фиксированного $i = \overline{1, R}$ количество векторов есть

$$K = (i+1)(W+1) \sum_{r=0}^N C_{r+M_1-1}^{M_1-1} C_{N-r+M_2-1}^{M_2-1}.$$

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

- $I(O)$ – тождественная (нулевая) матрица подходящего порядка;
- $\bar{W} = W + 1$;
- $\otimes (\oplus)$ – символ кронекерова произведения (суммы) матриц, см., например, [8];
- $C_n^l = \frac{n!}{l!(n-l)!}$;
- $d_r^{(1)} = C_{r+M_1-1}^{M_1-1}$;
- $d_r^{(2)} = C_{r+M_2-1}^{M_2-1}$;
- $diag\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – блочная диагональная матрица, у которой диагональные блоки равны элементам, перечисленным в скобках, а остальные блоки нулевые;
- $diag^+\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – квадратная блочная матрица, у которой наддиагональные блоки равны элементам, перечисленным

в скобках, а остальные блоки нулевые, т.е. это матрица вида

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

– $diag^-\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – квадратная блочная матрица, у которой поддиагональные блоки равны элементам, перечисленными в скобках, а остальные блоки нулевые, т.е. это матрица вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & 0 \end{pmatrix};$$

– $\bar{q}_i = 1 - q_i$, $\bar{f}_i = 1 - f_i$;
– $\mathbf{n}_t^{(1)} = \{n_t^{(1)}, n_t^{(2)}, \dots, n_t^{(M_1)}\}$ – процесс обслуживания заявок 1 типа;
– $\mathbf{n}_t^{(2)} = \{\tilde{n}_t^{(1)}, \dots, \tilde{n}_t^{(M_2)}\}$ – процесс обслуживания заявок 2 типа;

С двумя последними обозначениями рассматриваемая цепь Маркова ξ_t , $t \geq 0$, может быть записана в виде

$$\xi_t = \{(i_t, k_t, r_t, n_t, \nu_t, \mathbf{n}_t^{(1)}, \mathbf{n}_t^{(2)})\}, t \geq 0.$$

В дальнейшем будем предполагать, что состояния цепи Маркова ξ_t , $t \geq 0$, упорядочены следующим образом: первые четыре компоненты $\{i_t, k_t, r_t, \nu_t\}$ упорядочены в прямом лексикографическом порядке, а состояния каждого из процессов \mathbf{n}_t и $\tilde{\mathbf{n}}_t$ упорядочены в обратном лексикографическом порядке. Упорядочение в обратном лексикографическом порядке требуется для дальнейшего описания интенсивностей переходов процессов \mathbf{n}_t и $\tilde{\mathbf{n}}_t$ с использованием введенных в статьях [21, 18] матриц $P_i(\cdot)$, $A_i(\cdot, \cdot)$, и $L_i(\cdot, \cdot)$.

Дадим краткое объяснение вероятностных значений этих матриц. Введем в рассмотрение матрицы $\tilde{S}_l = \begin{pmatrix} 0 & O \\ S_0^{(l)} & S_l \end{pmatrix}$, $l = 1, 2$, тогда:

– $L_k(n, \tilde{S}_l)$ – матрица порядка $C_{n-k+M_l-1}^{M_l-1} \times C_{n-k+M_l-2}^{M_l-1}$. Матрица содержит интенсивности переходов процесса $\mathbf{n}_t^{(l)}$, приводящих к освобождению одного из $n - k$ приборов, которые обслуживают заявки l -го типа (k есть число свободных приборов, n – общее число свободных приборов и приборов, которые обслуживают заявки l -го типа);

– $P_n(\beta_l)$ – матрица порядка $C_{n+M_l-1}^{M_l-1} \times C_{n+M_l}^{M_l-1}$. Матрица содержит интенсивности переходов процесса $\mathbf{n}_t^{(l)}$, приводящих к увеличению числа приборов, которые обслуживают заявки l -го типа, с n до $n + 1$;

– $A_n(k, \tilde{S}_l)$ – матрица порядка $C_{n+M_l-1}^{M_l-1} \times C_{n+M_l}^{M_l-1}$. Матрица содержит интенсивности переходов процесса $\mathbf{n}_t^{(l)}$ в его пространстве состояний без увеличения или уменьшения числа приборов, которые обслуживают заявки l -го типа (n есть число приборов, которые обслуживают заявки l -го типа, k – общее число свободных приборов и приборов, которые обслуживают заявки l -го типа).

В дальнейшем полагаем $L_0(0) = A_0(\cdot) = P_{-1}(\cdot) = 0$. Алгоритм вычисления матриц $P_i(\cdot)$, $A_i(\cdot, \cdot)$, и $L_i(\cdot, \cdot)$ следует из результатов В. Рамасвами и Д. Лукантони, опубликованных в статьях [18, 21]. Четко по шагам этот алгоритм описан в [6]. Соответствующее описание мы приводим далее в разделе 3.4.

Теорема 1. Инфинитезимальный генератор цепи Маркова ξ_t имеет следующую блочную структуру:

$$Q = \begin{pmatrix} T & Q_{0,1} & O & \dots & O & O \\ Q_{1,0} & Q_{1,1} & Q_{1,2} & \dots & O & O \\ O & Q_{2,1} & Q_{2,2} & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \dots & Q_{R-1,R-1} & Q_{R-1,R} \\ O & O & O & \dots & Q_{R,R-1} & Q_{R,R} \end{pmatrix},$$

где ненулевые блоки T , $Q_{i,i'}$ определяются следующим образом.

1. Блок $T = (T_{n,n'})_{n,n'=\overline{0,N}}$ есть блочная трехдиагональная матрица, где

а) $T_{n,n}, n = \overline{0, N-1}$, – квадратная матрица порядка $\bar{W} \sum_{r=0}^n d_r^{(1)} d_{n-r}^{(2)}$,

$$T_{n,n} = \text{diag}\{D_0 \oplus A_r(N-n+r, S_1) \oplus A_{n-r}((N-r, S_2), r = \overline{0, n})\},$$

$$n = \overline{0, N-1},$$

б) $T_{N,N}$ – квадратная матрица порядка $\bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)}$,

$$T_{N,N} = \text{diag}\{\bar{D} \oplus A_r(r, S_1) \oplus A_{N-r}((N-r, S_2), r = \overline{0, N})\},$$

$$\bar{D} = D_0 + \bar{q}_0 D_1 + \bar{f}_0 D_2,$$

в) $T_{n,n-1}$ – матрица порядка $\bar{W} \sum_{r=0}^n d_r^{(1)} d_{n-r}^{(2)} \times \bar{W} \sum_{r=0}^{n-1} d_r^{(1)} d_{n-r-1}^{(2)}$,

$$T_{n,n-1} = \left(\frac{\text{diag}\{I_{\bar{W}d_r^{(1)}} \otimes L_{N-n}(N-r, \tilde{S}_2), r = \overline{0, n-1}\}}{O_{\bar{W}d_n^{(1)} \times \bar{W} \sum_{r=0}^{n-2} d_r^{(1)} d_{n-r-1}^{(2)}} \mid I_{\bar{W}} \otimes L_{N-n}(N, \tilde{S}_1)} \right) +$$

$$+ \left(\frac{\text{diag}^-\{I_{\bar{W}} \otimes L_{N-n}(N-n+r, \tilde{S}_1) \otimes I_{d_{n-r}^{(2)}} \mid r = \overline{1, n-1}\}}{O_{\bar{W}d_n^{(1)} \times \bar{W} \sum_{r=0}^{n-1} d_r^{(1)} d_{n-r-1}^{(2)}}} \right),$$

$$n = \overline{1, N},$$

г) $T_{n,n+1}$ – матрица порядка $\bar{W} \sum_{r=0}^n d_r^{(1)} d_{n-r}^{(2)} \times \bar{W} \sum_{r=0}^{n+1} d_r^{(1)} d_{n-r+1}^{(2)}$,

$$T_{n,n+1} = \left(\text{diag}\{D_2 \otimes I_{d_r^{(1)}} \otimes P_{n-r}(\beta_2), r = \overline{0, n}\} \mid O_{\bar{W} \sum_{r=0}^n d_r^{(1)} d_{n-r}^{(2)} \times \bar{W} d_{n+1}^{(1)}} \right) +$$

$$+ \left(\frac{O_{\bar{W} \sum_{r=0}^{n-1} d_r^{(1)} d_{n-r}^{(2)} \times \bar{W} \sum_{r=0}^{n+1} d_r^{(1)} d_{n-r+1}^{(2)}}}{O_{\bar{W}d_n^{(1)} \times \bar{W} \sum_{r=0}^n d_r^{(1)} d_{n-r+1}^{(2)}} \mid D_1 \otimes P_n(\beta_1)} \right) +$$

$$+ \left(\begin{array}{l} diag^+ \{ D_1 \otimes P_r(\beta_1) \otimes I_{d_{n-r}^{(2)}}, r = \overline{0, n-1} \} \mid O_{\bar{W} \sum_{r=0}^n d_r^{(1)} d_{n-r}^{(2)} \times \bar{W} d_{n+1}^{(1)}} \end{array} \right),$$

$$n = \overline{0, N-1},$$

2. Блок $Q_{0,1}$ – это матрица порядка $\bar{W} \sum_{n=0}^N \sum_{r=0}^n d_r^{(1)} d_{n-r}^{(2)} \times 2\bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)}$, которая имеет вид:

$$Q_{0,1} = \left(\begin{array}{c|c} O_{\bar{W} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=0}^n d_r^{(1)} d_{n-r}^{(2)} \times 2\bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)}} & \\ \hline H_1 & H_2 \end{array} \right)$$

где квадратные матрицы H_1, H_2 порядка $\bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)}$ имеют вид

$$H_1 = f_0 diag \{ D_2 \otimes I_{d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)}}, r = \overline{0, N} \},$$

$$H_2 = q_0 diag \{ D_1 \otimes I_{d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)}}, r = \overline{0, N} \},$$

3. Блок $Q_{1,0}$ – это матрица порядка $2\bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)} \times \bar{W} \sum_{n=0}^N \sum_{r=0}^n d_r^{(1)} d_{n-r}^{(2)}$, которая имеет вид:

$$Q_{1,0} = \left(\begin{array}{c|c} O_{\bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)} \times \bar{W} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=0}^n d_r^{(1)} d_{n-r}^{(2)}} & F_1 \\ \hline O_{\bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)} \times \bar{W} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=0}^n d_r^{(1)} d_{n-r}^{(2)}} & F_2 \end{array} \right),$$

где квадратные матрицы F_1, F_2 порядка $\bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)}$ имеют вид

$$F_1 = diag \{ I_{\bar{W} d_r^{(1)}} \otimes L_0(N-r, \tilde{S}_2) P_{N-r-1}(\beta_2), r = \overline{0, N-1}, O_{\bar{W} d_N^{(1)} d_0^{(2)}} \} +$$

$$+ diag^- \{ I_{\bar{W}} \otimes L_0(r, \tilde{S}_1) \otimes P_{N-r}(\beta_2), r = \overline{1, N} \},$$

$$F_2 = \text{diag}\{O_{\bar{W}d_N^{(2)}}, I_{\bar{W}} \otimes L_0(r, \tilde{S}_1)P_{r-1}(\beta_1) \otimes I_{d_{N-r}^{(2)}}, r = \overline{1, N}\} +$$

$$+ \text{diag}^+\{I_{\bar{W}} \otimes P_r(\beta_1) \otimes L_0(N-r, \tilde{S}_2), r = \overline{0, N-1}\}.$$

4. Блок $Q_{i,i-1}, i = \overline{2, R}$, порядка $(i+1)\bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)} \times i\bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)}$ имеет вид

$$Q_{i,i-1} = \left(\frac{F_1}{I_i \otimes F_2}, \frac{O_{\bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)} \times (i-1)\bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)}}}{I_i \otimes F_2} \right), i = \overline{2, R},$$

5. Блок $Q_{i,i}, i = \overline{1, R-1}$, – квадратная матрица порядка $(i+1)\bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)}$, которая имеет вид:

$$Q_{i,i} = I_{i+1} \otimes T_{N,N} + \Delta^{(i)}, i = \overline{1, R-1}.$$

6. Блок $Q_{R,R}$ – квадратная матрица порядка $(R+1)\bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)}$, которая имеет вид:

$$Q_{R,R} = I_{R+1} \otimes \hat{T}_{N,N} + \Delta^{(R)},$$

где матрица $\hat{T}_{N,N}$ получена из матрицы $T_{N,N}$ путем замены кронекеровых множителей \bar{D} на множители $D(1)$.

7. Блок $Q_{i,i+1}$ порядка $(i+1)\bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)} \times (i+2)\bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)}$ имеет вид:

$$Q_{i,i+1} =$$

$$= \left(I_{i+1} \otimes \text{diag}\{f_i D_2 \otimes I_{d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)}}, r = \overline{0, N}\} \mid O_{(i+1)\bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)} \times \bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)}} \right) +$$

$$+ \hat{I}_{i+1} \otimes \text{diag}\{q_i D_1 \otimes I_{d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)}}, r = \overline{0, N}\}, i = \overline{0, R-1},$$

где \hat{I}_{i+1} – матрица порядка $(i+1) \times (i+2)$ вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь матрицы $\Delta^{(i)}, i = \overline{0, R}$ – это диагональные матрицы, образованные таким образом, что выполняется равенство $Q\mathbf{e} = \mathbf{0}^\top$. Поясним более подробно, как можно вычислить матрицы $\Delta_i, i = \overline{0, R}$. Пусть $i = 0$. Вычислим вектор-столбец $T\mathbf{e} + Q_{0,1}\mathbf{e}$. Тогда элементы этого вектора, взятые со знаком минус, являются диагональными элементами матрицы Δ_0 . Аналогично, чтобы сформировать матрицу Δ_i для $i = \overline{1, R}$, нужно вычислить вектор-столбец $Q_{i,i-1}\mathbf{e} + Q_{i,i}\mathbf{e} + Q_{i,i+1}\mathbf{e}$. Тогда элементы этого вектора, взятые со знаком минус, являются диагональными элементами матрицы Δ_i .

3.2. Стационарное распределение

Пусть \mathbf{p} является вектором-строкой стационарного распределения вероятностей состояний цепи. Этот вектор определяется как единственное решение системы линейных алгебраических уравнений

$$(1) \quad \mathbf{p}Q = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}\mathbf{e} = 1.$$

В случае большой размерности системы (1) для ее решения целесообразно использовать алгоритм, описанный в [15]. Для этого представим вектор \mathbf{p} как $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \dots, p_R)$, где вектор p_0 имеет порядок $\bar{W} \sum_{n=0}^N \sum_{r=0}^n d_r^{(1)} d_{n-r}^{(2)}$, а вектор p_i имеет порядок

$$(i+1)\bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)}, \quad i = \overline{1, R}.$$

1. Находим матрицы $G_{R-1}, G_{R-2}, \dots, G_0$, из уравнения обратной рекурсии:

$$G_i = (-Q_{i+1,i+1} - Q_{i+1,i+2}G_{i+1})^{-1} Q_{i+1,i}, \quad i = R-2, R-1, \dots, 0,$$

где полагаем

$$G_{R-1} = (-Q_{R,R})^{-1}Q_{R,R-1}.$$

2. Вычисляем матрицы $\bar{Q}_{i,i}, \bar{Q}_{i,i+1}$ по формулам

$$\bar{Q}_{R,R} = Q_{R,R},$$

$$\bar{Q}_{i,i} = Q_{i,i} + Q_{i,i+1}G_i, \quad i = \overline{0, R-1},$$

$$\bar{Q}_{i,i+1} = Q_{i,i+1}, \quad i = \overline{0, R-1}.$$

3. Находим матрицы Φ_i из рекуррентных соотношений:

$$\Phi_0 = I, \quad \Phi_i = \Phi_{i-1}\bar{Q}_{i-1,i}(-\bar{Q}_{i,i})^{-1}, \quad i = \overline{1, R}.$$

4. Вычисляем вектор \mathbf{p}_0 как единственное решение СЛАУ:

$$(2) \quad \mathbf{p}_0(-\bar{Q}_{0,0}) = 0, \quad R$$

$$(3) \quad \mathbf{p}_0(\mathbf{e} + \sum_{i=1}^R \Phi_i \mathbf{e}) = 1.$$

5. Вычисляем векторы \mathbf{p}_i по формулам $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_0\Phi_i, i = \overline{1, R}$.

Замечание 1. При решении системы линейных алгебраических уравнений (2)–(3) надо знать, что система (2) имеет ранг на единицу меньший ее размерности. Однако, заменив одно из уравнений, например, первое, этой системы на уравнение (3), получим систему, которая имеет единственное решение. Такую модификацию надо сделать, прежде чем решать систему.

Замечание 2. Чтобы определить стационарное распределение, надо решить систему линейных алгебраических уравнений (1) или, расписывая по блокам $Q_{i,j}$,

$$(4) \quad \sum_{j=\max\{i-1, 0\}}^{\min\{i+1, R\}} \mathbf{p}_i Q_{i,j} = \mathbf{0}, \quad i = \overline{0, R}, \quad \sum_{i=0}^R \mathbf{p}_i \mathbf{e} = 1.$$

Однако ранг этой системы равен $\bar{W} \sum_{n=0}^N \sum_{r=0}^n d_r^{(1)} d_{n-r}^{(2)} +$

$+ \sum_{i=1}^R (i+1) \bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)}$ и при больших значениях R, N и размерностях $MMAP$ и PH ранг этой системы становится настолько большим, что не представляется возможностей решить эту систему непосредственно, например, используя обратную матрицу.

Поэтому представляется целесообразным использовать описанный выше алгоритм, в котором максимальный размер блока, используемого в вычислениях, равен $(R + 1)\bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)}$. Однако при малых значениях упомянутых параметров систему (1) (или (4)) можно использовать для проверки решения, полученного при помощи вышеприведенного алгоритма.

3.3. Характеристики производительности системы

Рассчитав стационарное распределение, можно найти ряд важных стационарных характеристик производительности системы. Приведем некоторые из них.

– Вектор вероятностей того, что буфер пустой и заняты n приборов:

$$\mathbf{p}_0(n) = \mathbf{p}_0 U(n),$$

где матрица $U(n)$ имеет вид:

$$U(n) = \begin{pmatrix} O_{\bar{W} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=0}^l d_m^{(1)} d_{l-m}^{(2)} \times \bar{W} \sum_{r=0}^n d_r^{(1)} d_{n-r}^{(2)}} \\ I_{\bar{W} \sum_{r=0}^n d_r^{(1)} d_{n-r}^{(2)}} \\ O_{\bar{W} \sum_{l=n+1}^N \sum_{m=0}^l d_m^{(1)} d_{l-m}^{(2)} \times \bar{W} \sum_{r=0}^n d_r^{(1)} d_{n-r}^{(2)}} \end{pmatrix}, \quad n = \overline{0, N}.$$

– Вероятность того, что буфер пустой, заняты n приборов и r из них заняты приоритетными заявками:

$$p_0(n, r) = \mathbf{p}(n) \mathbf{u}(n, r), \quad n = \overline{0, N}, r = \overline{0, n},$$

где вектор-столбец $\mathbf{u}(n, r)$ имеет вид:

$$\mathbf{u}(n, r) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T \\ \bar{W} \sum_{l=0}^{r-1} d_l^{(1)} d_{n-l}^{(2)} \\ \mathbf{e}_{\bar{W} d_r^{(1)} d_{n-r}^{(2)}} \\ \mathbf{0}^T \\ \bar{W} \sum_{l=r+1}^n d_l^{(1)} d_{n-l}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

– Вероятность того, что буфер пустой и заняты n приборов:

$$p_0(n) = \sum_{r=0}^n p_0(n, r), \quad n = \overline{0, N}.$$

– Вероятность того, что в буфере находятся i заявок, из них k приоритетных, и r приоритетных заявок находятся на обслуживании:

$$p_i(k, r) = \mathbf{p}_i \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T \\ k\bar{W} \sum_{n=0}^N d_n^{(1)} d_{N-n}^{(2)} \\ \mathbf{u}(N, r) \\ \mathbf{0}^T \\ (i-k)\bar{W} \sum_{n=0}^N d_n^{(1)} d_{N-n}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, R}, \quad k = \overline{0, i}, \quad r = \overline{0, N}.$$

– Вероятность того, что в буфере находятся i заявок, из них k приоритетных:

$$p_i(k) = \sum_{r=0}^N p_i(k, r), \quad i = \overline{1, R}, \quad k = \overline{0, i}.$$

– Вероятность того, что в буфере находятся i заявок:

$$p_i = \mathbf{p}_i \mathbf{e}, \quad i = \overline{1, R}.$$

Должно выполняться равенство $p_i = \sum_{k=0}^i p_i(k)$.

– Среднее число заявок в системе:

$$\bar{N}_{system} = \sum_{n=1}^N n p_0(n) + \sum_{i=1}^R (i + N) p_i.$$

– Среднее число приоритетных заявок в системе:

$$\bar{N}_{system}^{(1)} = \sum_{n=1}^N \sum_{r=1}^n r p_0(n, r) + \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^R \sum_{k=1}^i (r + k) p_i(k, r).$$

– Среднее число занятых приборов:

$$\bar{N}_{servers} = \sum_{n=1}^N np_0(n) + N \sum_{i=1}^R p_i.$$

– Среднее число приборов, занятых обслуживанием приоритетных заявок:

$$\bar{N}_{servers}^{(1)} = \sum_{n=1}^N \sum_{r=1}^n rp_0(n, r) + \sum_{i=1}^R \sum_{k=0}^i \sum_{r=1}^N rp_i(k, r).$$

– Среднее число заявок в буфере:

$$\bar{N}_{queue} = \sum_{i=1}^R ip_i.$$

3.4. Вычисление матриц $P_i(\cdot)$, $A_i(\cdot, \cdot)$, и $L_i(\cdot, \cdot)$.

1. Вычисляем матрицы $\tau^{(k)}(S)$, $k \in \{0, \dots, M-1\}$, которые получаются удалением k первых строк и k первых столбцов из матрицы S .

2. Вычисляем матрицы $T_j = \tau^{(M-2-j)}(S)$, $j \in \{1, \dots, M-2\}$.

3. Вычисляем матрицы $L_i^{(w)}(T_j)$, используя следующие рекуррентные формулы:

$$L_i^{(0)}(T_j) = (N - i)t_{r_j, 1}^j, \quad i \in \{0, \dots, N-1\}, \quad j \in \{1, \dots, M-2\},$$

$$L_i^{(w)}(T_j) = \begin{pmatrix} t_0 & O & O & \cdots & O \\ l_0 & t_1 & O & \cdots & O \\ O & l_1 & t_2 & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & l_{N-i-2} & t_{N-i-1} \\ O & \cdots & O & \cdots & l_{N-i-1} \end{pmatrix},$$

где блоки матрицы равны $t_k = (N - i - k)t_{r_j - w, 1}^j I$, $l_k = L_{N-1-k}^{(w-1)}(T_j)$, где $k \in \{0, \dots, N-i-1\}$, $w \in \{1, \dots, r_j - 2\}$,

$i \in \{0, \dots, N-1\}$, $j \in \{1, \dots, M-2\}$, где $t_{k,l}^j$ есть (k,l) -й элемент матрицы T_j и r_j есть число строк матрицы T_j .

4. Вычисляем матрицы $U_i^{(w)}(T_j)$, используя следующие рекуррентные формулы:

$$U_i^{(0)}(T_j) = t_{1,r_j}^j, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad j \in \{1, \dots, M-2\},$$

$$U_i^{(w)}(T_j) = \begin{pmatrix} t_0 & u_0 & O & \cdots & O \\ O & t_1 & u_1 & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & O \\ \vdots & \vdots & t_{N-i-1} & u_{N-i-1} & O \\ O & O & O & t_{N-i} & u_{N-i} \end{pmatrix},$$

элементами матрицы являются блоки: $t_k = t_{1,r_j-w}^j I$, $u_k = U_{N-k}^{(w-1)}(T_j)$, где $k \in \{0, \dots, N-i\}$.

5. Вычисляем матрицы $L_i(N, T_j) = L_i^{(r_j-2)}(T_j)$, $i \in \{0, \dots, N-1\}$, и $U_i(N, T_j) = iU_i^{(r_j-2)}(T_j)$, $i \in \{1, \dots, N\}$, $j \in \{1, \dots, M-2\}$.

6. Вычисляем матрицы $A_i^{(w)}$, используя следующие рекуррентные формулы:

$$A_i^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & iS_{M-1,M} & 0 & \cdots & 0 \\ S_{M,M-1} & 0 & (i-1)S_{M-1,M} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & S_{M-1,M} \\ 0 & 0 & \cdots & iS_{M,M-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$i \in \{1, \dots, N\},$$

$$A_i^{(j)} = \begin{pmatrix} O & u_0 & O & \cdots & O \\ l_0 & a_0 & u_1 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \ddots & l_{i-2} & a_{i-2} & u_{i-1} \\ O & \cdots & \cdots & l_{i-1} & a_{i-1} \end{pmatrix},$$

где элементы данной матрицы: $l_k = L_{N-k-1}(N, T_j)$, $a_k = A_{k+1}^{j-1}$, $u_k = \frac{(i-k)U_{N-k}(N, T_j)}{N-k}$, где $k \in \{0, \dots, i-1\}$,

7. Вычисляем матрицы $A_i(N, S)$ следующим образом $A_0(N, S) = O_{1 \times 1}$, $A_i(N, S) = A_i^{(M-2)}$, $i \in \{1, \dots, N\}$.

8. При вычислении матриц $L_i(N, \tilde{S})$ мы идем на шаг 3, где игнорируем матрицы T_j и вместо них рассматриваем одну матрицу \tilde{S} . Также заменяем M на $\tilde{M} = M + 1$, поскольку порядок матрицы \tilde{S} на единицу больше размерности матрицы S .

Искомые матрицы $L_i(N, \tilde{S})$ вычисляем следующим образом: $L_i(N, \tilde{S}) = L_i^{(M-1)}(\tilde{S})$, $i \in \{0, \dots, N-1\}$, $L_N(N, \tilde{S}) = O_{1 \times 1}$. Здесь в верхнем индексе уже имеется в виду, что M – порядок исходной матрицы S .

9. Вычисляем матрицы $P_i^{(j)}$ размерности $(i+1) \times (i+2)$, используя следующие рекуррентные формулы:

$$P_i^{(0)} = \begin{pmatrix} \beta_{M-1} & \beta_M & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{M-1} & \beta_M & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{M-1} & \beta_M \end{pmatrix}, i \in \{1, \dots, N-1\},$$

$$P_i^{(j)} = \begin{pmatrix} \beta_{M-j-1} & \mathbf{z}^{(j)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \beta_{M-j-1} I & P_1^{(j-1)} & O & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}^T & O & O & \cdots & \beta_{M-j-1} I & P_i^{(j-1)} \end{pmatrix},$$

$$j \in \{1, \dots, M-2\}, i \in \{1, \dots, N-1\},$$

где векторы $\mathbf{z}^{(j)} = (\beta_{M-j}, \beta_{M-j+1}, \dots, \beta_M)$, $j \in \{1, \dots, M-2\}$.

10. Вычисляем матрицы $P_i(\beta)$ следующим образом: $P_0(\beta) = \beta$, $P_i(\beta) = P_i^{(M-2)}$, $i \in \{1, \dots, N-1\}$.

4. Использование метода Монте-Карло для расчёта характеристик приоритетной системы

Аналитическое решение построено только для приоритетных систем с двумя классами трафика. Для систем в общем

виде практически невозможно построить генератор цепи Маркова, найти стационарное распределение и вычислить все необходимые характеристики производительности системы. При числе классов большем двух оценки характеристик удается найти только с помощью численных методов. В настоящей статье для расчета характеристик используется имитационная модель СМО, реализующая метод Монте-Карло. Алгоритм для расчета аналитической модели и интерфейс имитационной модели были реализованы на языке Python с использованием библиотеки питчуру. Ядро имитационной модели было разработано на языке C++, а для того чтобы иметь возможность работать с ней из Python, использовалась библиотека Cython. Исходный код доступен на GitLab по адресу <https://gitlab.com/lab69/priority-queues>.

4.1. Влияние входных параметров на время расчёта аналитической модели

На практике возможность получения численных результатов даже для двухприоритетной системы ($K = 2$) с помощью аналитической модели оказывается ограниченной из-за быстрого роста порядка матрицы инфинитезимального генератора Q . Порядок матрицы Q можно оценить по ее диагональным элементам. Для этого просуммируем порядки каждого из блоков матрицы Q : $T, Q_{1,1}, Q_{2,2}, \dots, Q_{R,R}$. Обозначим $P(T)$ - порядок матрицы T , а $P_{Q_{sum}}$ - суммарный порядок матриц $Q_{1,1}, Q_{2,2}, \dots, Q_{R,R}$:

$$P_T = \bar{W} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=0}^n d_r^{(1)} d_{n-r}^{(2)} + \bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)},$$

$$P_{Q_{sum}} = \bar{W} \sum_{i=1}^{R-1} (i+1) \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)} + (R+1) \bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)} =$$

$$= \bar{W} \sum_{i=1}^R (i+1) \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)} = \frac{R(R+3)}{2} \bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)}.$$

Суммарный порядок P генератора Q будет равен

$$\begin{aligned}
 P = P_T + P_{Q_{sum}} &= \bar{W} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=0}^n d_r^{(1)} d_{n-r}^{(2)} + \bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)} + \\
 &+ \frac{R(R+3)}{2} \bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)} = \\
 &= \bar{W} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=0}^n d_r^{(1)} d_{n-r}^{(2)} + \frac{(R+1)(R+2)}{2} \bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 d_r^{(1)} &= C_{r+M_1-1}^{M_1-1} = \frac{(r+M_1-1)!}{(M_1-1)!r!}, \\
 d_r^{(2)} &= C_{r+M_2-1}^{M_2-1} = \frac{(r+M_2-1)!}{(M_2-1)!r!}. \\
 d_{N-r}^{(2)} &= C_{N-r+M_2-1}^{M_2-1} = \frac{(N-r+M_2-1)!}{(M_2-1)!(N-r)!}.
 \end{aligned}$$

Приведем оценку сверху данного выражения. Максимум первого слагаемого достигается при $n = N$, заменим все слагаемые максимальным значением:

$$\begin{aligned}
 P &\leq \bar{W}(N+1) \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)} + \frac{(R+1)(R+2)}{2} \bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)} = \\
 &= \frac{(R+1)(R+2) + 2N + 2}{2} \bar{W} \sum_{r=0}^N d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)} \leq \\
 &\leq \frac{(R+1)(R+2) + 2N + 2}{2} \bar{W}(N+1) \max(d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)})
 \end{aligned}$$

Исходя из данного выражения, ограничивающего размер инфинитезимального генератора сверху, видим, что порядок квадратично зависит от размера буфера $P \sim O(R^2)$, зависит линейно

от порядка входного *MAP*-потока $P \sim O(W)$. Оценим вклад множителя $\max(d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)})$. Для этого рассмотрим функцию $p(r)$:

$$p(r) = d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)} = \frac{(r+M)!(N-r+M)!}{(M!)^2 r!(N-r)!}.$$

Для оценки факториалов воспользуемся формулой Стирлинга:

$$\begin{aligned} p(r) &= d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)} \approx \frac{(r+M)^{r+M+\frac{1}{2}} (N-r+M)^{N-r+M+\frac{1}{2}}}{M^{2M+1} r^{r+\frac{1}{2}} (N-r)^{N-r+\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{e^{(r+M+\frac{1}{2}) \ln(r+M)} e^{(r+M+\frac{1}{2}) \ln(N-r+M)}}{M^{2M+1} e^{(r+\frac{1}{2}) \ln(r)} e^{(N-r+\frac{1}{2}) \ln(N-r)}}. \end{aligned}$$

Найдем точки экстремума $p(r)$. Вычислим производную числителя, обозначим $a(r) = e^{(r+M+\frac{1}{2}) \ln(r+M)}$ и $b(r) = e^{(N-r+M+\frac{1}{2}) \ln(N-r+M)}$, тогда

$$\begin{aligned} a'(r) &= a(r) \left(\ln(r+M) + \frac{r+M+\frac{1}{2}}{r+M} \right) \\ b'(r) &= b(r) \left(-\ln(N-r+M) - \frac{(N-r+M+\frac{1}{2})}{N-r+M} \right) \end{aligned}$$

$$u'(r) = (a(r)b(r))' = a'(r)b(r) + a(r)b'(r) =$$

$$= a(r)b(r) \left(\ln \frac{(r+M)}{(N-r+M)} + \frac{1}{2(r+M)} - \frac{1}{2(N-r+M)} \right)$$

Вычислим производную знаменателя. Пусть $c(r) = e^{(r+\frac{1}{2}) \ln(r)}$ и $d(r) = e^{(N-r+\frac{1}{2}) \ln(N-r)}$, тогда

$$v'(r) = (c(r)d(r))' = c(r)'d(r) + c(r)d(r)' =$$

$$\begin{aligned}
&= c(r)d(r) \left(\ln r + \frac{r + \frac{1}{2}}{r} - \ln(N - r) - \frac{(N - r + \frac{1}{2})}{N - r} \right) = \\
&= c(r)d(r) \left(\ln \frac{r}{N - r} + \frac{1}{2(r)} - \frac{1}{2(N - r)} \right).
\end{aligned}$$

Вычисляем производную по формуле:

$$p'(r) = \frac{u(r)'v(r) - u(r)v(r)'}{v^2(r)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a(r)b(r)c(r)d(r) \left(\ln \frac{(r+M)(N-r)}{(N-r+M)r} + \frac{(2r-N)M(M+N)}{(r+M)r(N+M-r)(N-r)} \right)}{(c(r)d(r))^2} = \\
&= \frac{a(r)b(r)c(r)d(r)(f(r) + g(r))}{(c(r)d(r))^2},
\end{aligned}$$

где $f(r) = \ln \frac{(r+M)(N-r)}{(N-r+M)r}$ и $g(r) = \frac{(2r-N)M(M+N)}{(r+M)r(N+M-r)(N-r)}$. Привянем производную к 0 и найдем точку экстремума. Так как функции $a(r), b(r), c(r), d(r)$ положительны на интервале $(0, N)$, то производная рана 0, когда $f(r) + g(r) = 0$. Получаем

$$\ln \frac{(r+M)(N-r)}{(N-r+M)r} + \frac{(2r-N)M(M+N)}{(r+M)r(N+M-r)(N-r)} = 0.$$

Обратим внимание, что $r = \frac{N}{2}$ – корень уравнения, так как $f(\frac{N}{2}) = 0$ и $g(\frac{N}{2}) = 0$. Докажем, что больше корней у данного уравнения на интервале $(0, N)$ нет. Функция $f(r)$ на интервале $(0, \frac{N}{2})$ отрицательна, на интервале $(\frac{N}{2}, N)$ положительна и $f(\frac{N}{2}) = 0$. Аналогичными свойствами обладает функция $g(r)$. Таким образом, на $(0, \frac{N}{2})$ функция $h(r) < 0$, в точке $\frac{N}{2}$ равна нулю и на интервале $(\frac{N}{2}, N)$ функция $h(r) > 0$. Единственной точкой экстремума является $\frac{N}{2}$.

Значение в точке $r = \frac{N}{2}$ является локальным минимумом, так как $h(r)$ меняет знак с минуса на плюс. Таким образом, максимум будем искать на краевых точках интервала $(0, N)$. $p(0) = p(N) = \frac{(N+M)^{(N+M+\frac{1}{2})}}{M^{M+\frac{1}{2}} N^{N+\frac{1}{2}}}$ – значения функции в точках 0, N равны. Оценим влияние N и M на величину данного выражения и оценим $O(N, M)$. Подставляя максимум в формулу для порядка генератора, получим оценку сверху:

$$\max(d_r^{(1)} d_{N-r}^{(2)}) = \frac{(N+M)^{(N+M+\frac{1}{2})}}{M^{M+\frac{1}{2}} N^{N+\frac{1}{2}}},$$

$$P \leq \frac{(R+1)(R+2) + 2N + 2}{2} \bar{W}(N+1) \frac{(N+M)^{(N+M+\frac{1}{2})}}{M^{M+\frac{1}{2}} N^{N+\frac{1}{2}}}$$

В качестве иллюстрации влияния входных параметров на размер системы в таблице 1 приведено время, требуемое для *MAP*-потока порядка 5, *PH*-распределения порядка 5 и очереди емкости 1, на компьютере, имеющем процессор Intel Core i7-9750H и 16 гб ОЗУ. При числе обслуживающих приборов $N = 5$ не хватило ресурсов персонального компьютера для получения численного результата.

Таблица 1. Зависимость времени построения генератора от количества приборов

Число приборов	Время, сек
1	0,027
2	1,184
3	34,485
4	1155,581
5	Недостаточно памяти

Из рис. 1 видно, что размер матрицы генератора, описывающего процесс обработки заявок в приоритетной системе, экспоненциально зависит от порядка матрицы генератора *MAP*-распределения и от количества обслуживающих приборов, кро- 30

ме того линейно зависит от порядка матрицы PH -распределения и квадратично – от размера буфера.

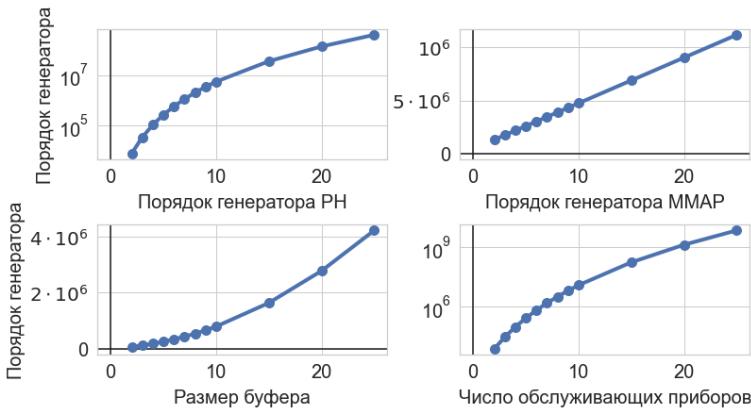


Рис. 1. Зависимость размера матрицы генератора в зависимости от различных входных параметров системы

4.2. Численные результаты

Численный эксперимент состоял из двух этапов. На первом этапе мы произвели валидацию имитационной модели, сравнив результаты ее расчетов с аналитическими расчетами на одних и тех же входных параметрах. На втором этапе мы исследовали влияние различных характеристик СМО на вероятность потери, время отклика и среднее число заявок в системе для заявок приоритетных и неприоритетных классов.

Для валидации были использованы матрицы небольшой размерности. Итоговые характеристики можно было рассчитать вручную. С помощью этих примеров валидировалась аналитическая модель, а уже с помощью аналитической модели валидировалась имитационная модель на различных примерах с ограничением на количество классов, $K \leq 2$.

Для сравнения результатов расчетов, полученных аналитически и с помощью имитационного моделирования, на вход подавались одинаковые входные данные. Так как число классов

сов в аналитической модели $K = 2$, $MMAP$ -поток задается матрицами D_0, D_1, D_2 , а обслуживание задается двумя PH -распределениями с матрицами S_1, S_2 и векторами начальных состояний β_1, β_2 . Вероятности присоединения задаются двумя векторами f, q для приоритетных и неприоритетных заявок соответственно. Пример входных параметров:

$$D_0 = \begin{pmatrix} -22 & 1 & 7 \\ 0 & -23 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, D_1 = D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_1 = S_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta_1 = \beta_2 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$R = 5, N = 2, f = q = [1, 1, 1, 1, 1], q = [1, 1, 1, 1, 1].$$

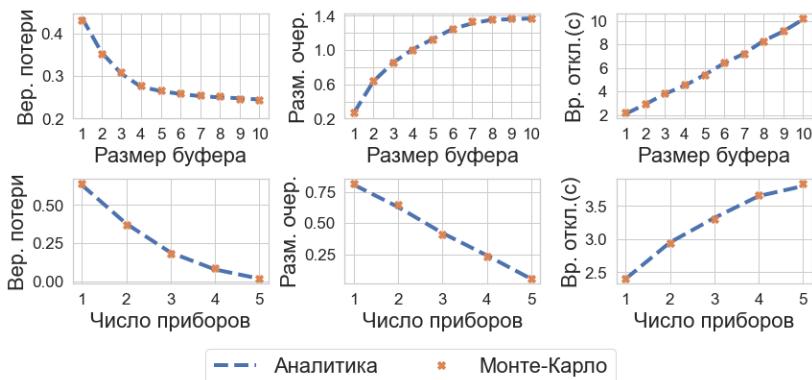


Рис. 2. Валидация имитационной модели. Сравнение результатов выполнения имитационной модели и аналитического решения

На рис. 2 показан результат сравнения работы имитационной модели и аналитических расчетов в зависимости от изменяющихся параметров: размера очереди и числа обслуживающих

приборов. Точность результата, полученного с помощью метода Монте-Карло зависит от количества сгенерированных заявок. В данном случае мы запускали симуляцию на десяти миллионах заявок, погрешность составила не более одного процента для каждого параметра.

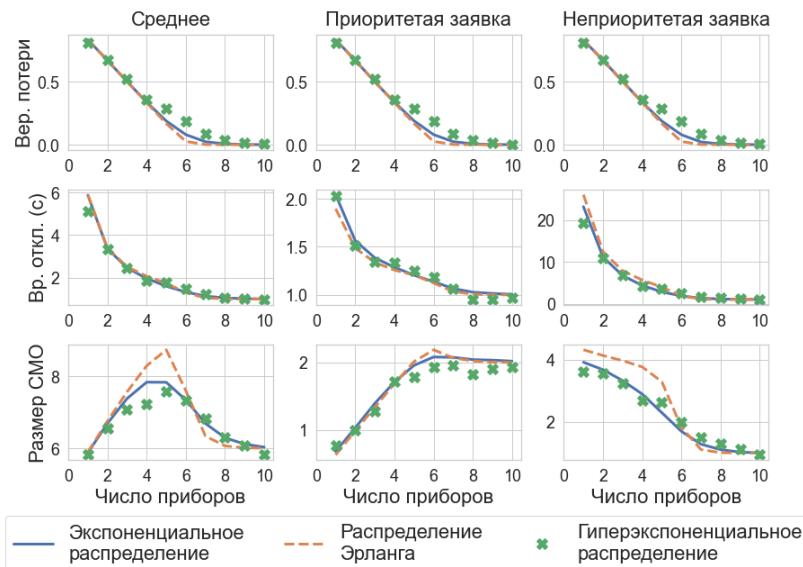


Рис. 3. Зависимость различных параметров системы от количества обслуживающих приборов

На втором этапе мы исследовали систему с $K = 5$ классами. В качестве входящего потока мы использовали MAP , в котором интенсивность поступления заявок для приоритетных заявок в два раза больше чем для неприоритетных ($\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$), коэффициент вариации $c_v = 0,5$, коэффициент асимметрии $\gamma = 0,5$, лаг распределения $\rho_1 = 0,1$. В качестве PH -распределений времени обработки заявок были исследованы распределение Эрланга с параметрами $\lambda = 1, c_v = 0,1$, экспоненциальное с параметром $\lambda = 1$ и гиперэкспоненциальное распределение с параметрами $\lambda = 1, c_v = 25$. Для восстановления MAP и построения

матриц D_i и восстановления PH по трем моментам мы использовали метод, описанный в статье[12]. Остальные параметры системы варьировались в ходе эксперимента. Также в данном эксперименте заявки любого типа всегда присоединялись к очереди, если там были свободные места, т.е. вероятность присоединения заявки всегда равна единице в независимости от класса заявки и от числа заявок в очереди.

На рис. 3 и рис. 4 показаны зависимости вероятности потери, времени отклика системы и размера системы для заявок наиболее и наименее приоритетного класса в зависимости от числа обслуживающих приборов и от размера буфера соответственно. Также приведены результаты для усредненного значения по всем классам. При исследовании зависимости характеристик системы от числа обслуживающих приборов размер буфера был равен 5, а при исследовании зависимости от размера буфера, число обслуживающих приборов также было равно 5.

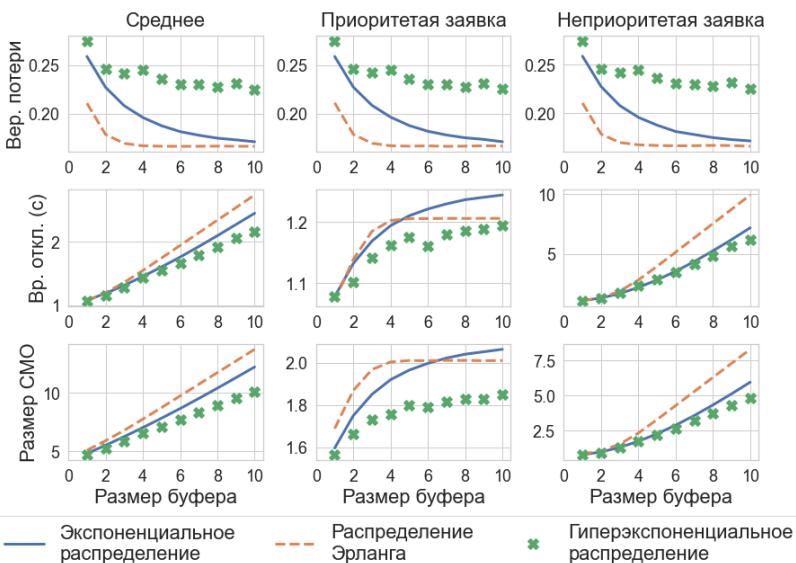


Рис. 4. Зависимость различных параметров системы от размера буфера

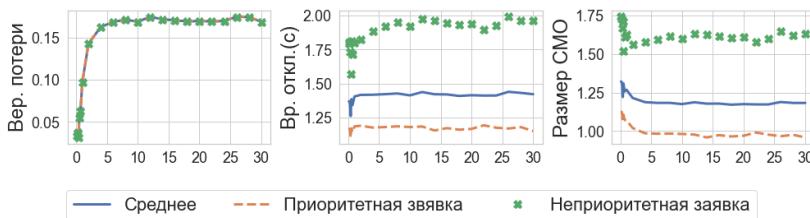


Рис. 5. Зависимость различных параметров системы от c_v

Стоит отметить, что наибольшая вероятность потери наблюдается при числе приборов меньше либо равно 6 (рис. 3), что равно среднему числу заявок, поступающих в секунду. При числе сервером большем 6 вероятность потери значительно уменьшается. Гиперэкспоненциальное распределение демонстрирует наибольшую вероятность потери для заявок для всех классов. Чуть больший размер системы наблюдается для распределения Эрланга, особенно это выражено при малом количестве обслуживающих приборов. Время отклика для всех распределений практически одинаковое при любом числе обслуживающих проборов.

На рис. 4 показаны различные характеристики системы в зависимости от размера буфера для различных РН-распределений. Наибольшая вероятность потерь наблюдается для гиперэкспоненциального распределения для всех видов заявок, при этом время отклика системы минимально. Противоположный результат демонстрирует распределение Эрланга, для которого вероятность потери минимальна, а время отклика максимально.

На рис. 5 показаны зависимости вероятности потери, времени отклика и размера системы от коэффициента вариации (c_v), когда число обслуживающих приборов равно 5 и размер буфера также равен 5, остальные параметры системы такие же как и в предыдущих экспериментах. Результаты показали, что для системы такого вида вероятность потери приоритетной заявки практически совпадает с вероятностью потери неприоритетной заявки. Время отклика для приоритетной заявки практически меньше в 2 раза при всех значениях c_v . В среднем число неприоритетных заявок в 1,5 раза больше чем приоритетных.

5. Заключение

В данной работе мы представили результаты исследования приоритетной мультисервисной СМО с входящим *MMAP*-потоком, буфером ограниченной длины, произвольным числом приоритетных классов и временем обслуживания, распределенного по *PH*. Для случая, когда в системе предусмотрено два класса ($K = 2$), в работе найдено стационарное распределение, получены формулы для вычисления различных характеристик СМО: среднее число заявок в системе, среднее число занятых приборов, среднее число заявок в буфере и других. Для оценок характеристик приоритетных СМО с большим числом классов в работе использовалась имитационная модель, использующая метод Монте-Карло, написанная на языке C++. Для валидации имитационной модели мы использовали математическую модель. Реализация расчетов математической модели выполнена на языке Python. В работе приведен пример СМО с пятью приоритетными классами, для которой исследованы вероятность потери, время отклика и количество заявок в системе для приоритетных и неприоритетных заявок.

Литература

1. AKAN M. et al. *A broader view of designing the liver allocation system* // Oper. Res. – 2012. – Vol. 60, No. 4. – P. 757–770.
2. AWAN I., YOUNAS M., NAVEED W. *Modelling QoS in IoT applications* // Proc. 2014 Int. Conf. Network-Based Inf. Syst. NBiS-2014. – 2014. – P. 99–105.
3. BOCHAROV P.P., D'APICE C., PECHINKIN A.V. *Queueing Theory*. – Berlin, Boston: De Gruyter, 2003.
4. DUDIN A.N., KLIMENOK V.I., VISHNEVSKY V.M. *The theory of queueing systems with correlated flows*. // Springer Publishing Company, Inc., 2019. – Iss. 1. – P. 1–410.
5. DUDIN S. et al. *Improvement of the fairness of non-preemptive priorities in the transmission of heterogeneous traffic* // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, No. 6.

6. DUDINA O., KIM C., DUDIN S. *Retrial queuing system with Markovian arrival flow and phase-type service time distribution* // Comput. Ind. Eng. – 2013. – Vol. 66, No. 2. – P. 360–373.
7. EMARA M., ELSAWY H., BAUCH G. Prioritized Multistream Traffic in Uplink IoT Networks: Spatially Interacting Vacation Queues // IEEE Internet of Things Journal. – 2021. – Vol. 8(3). – P. 1477–1491. – DOI: <https://doi.org/10.1109/JIOT.2020.3012515>.
8. GRAHAM A. *Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications*. – Courier Dover Publications, 2018.
9. HE Q.M., XIE J., ZHAO X. *Priority queue with customer upgrades* // Nav. Res. Logist. – 2012. – Vol. 59, No. 5. – P. 362–375.
10. HORVATH G. *Efficient analysis of the queue length moments of the MMAP/MAP/1 preemptive priority queue* // Perform. Eval. – 2012. – Vol. 69, No. 12. – P. 684–700.
11. HEYMAN D.P., LUCANTONI D. *Modeling Multiple IP Traffic Streams with Rate Limits* // IEEE/ACM Trans. Netw. – 2003. – Vol. 11, No. 6. – P. 948–958.
12. JOHNSON M.A., TAAFFE M.R. *Matching moments to phase distributions: Mixtures of erlang distributions of common order* // Commun. Stat. Stoch. Model. – 1989. – Vol. 5, No. 4. – P. 711–743.
13. KLIMENOK V. et al. *Queuing system with two types of customers and dynamic change of a priority* // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, No. 5.
14. KLIMENOK V., DUDIN A., VISHNEVSKY V. *Priority multi-server queueing system with heterogeneous customers* // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, No. 9.
15. KLIMENOK V. et al. *Lack of invariant property of the erlang loss model in case of MAP input* // Queueing Syst. – 2005. – Vol. 49, No. 2. – P. 187–213.
16. LUCANTONI D.M. *New results on the single server queue with a batch markovian arrival process* // Commun. Stat. Stoch.

- Model. – 1991. – Vol. 7, No. 1. – P. 1–46.
17. NEUTS M.F. *Matrix-Geometric Solutions to Stochastic Models* // DGOR / Eds: H. Steckhan et al. – Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1984. – P. 425.
18. LUCANTONI D.M. *Algorithms for the Multi-Server Queue with Phase Type Service* // Commun. Stat. Stoch. Model. – 1985. – Vol. 1, No. 3. – P. 393–417.
19. MCWHERTER D.T. et al. *Priority mechanisms for OLTP and transactional Web applications* // Proc. Int. Conf. Data Eng. – 2004. – Vol. 20. – P. 535–546.
20. MURALIDHARAN S., ROY A., SAXENA N. *MDP-IoT: MDP based interest forwarding for heterogeneous traffic in IoT-NDN environment* // Futur. Gener. Comput. Syst. – 2018. – Vol. 79. – P. 892–908.
21. RAMASWAMI V. *Independent Markov Processes in Parallel* // Commun. Stat. Stoch. Model. – 1985. – Vol. 1, No. 3. – P. 419–432.
22. TACHIBANA T., FURUICHI T., MINENO H. *Implementing and evaluating priority control mechanism for heterogeneous remote monitoring IOT system* // ACM Int. Conf. Proceeding Ser. – 2016. – Vol. 28 – November. – P. 239–244.

PERFORAMNCE EVALUATION OF THE PRIORITY MULTI-SERVICE SYSTEM MMAP/PH/M/N USING THE MONTE CARLO METHOD.

Vladimir Vishnevsky, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doc.Sc., professor (vishn@inbox.ru).

Valentina Klimenok, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Belarusian State University, Minsk, Doc.Sc., professor (klimenok@bsu.by).

Andrey Larionov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (larioandr@gmail.com).

Amir Mukhtarov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (mukhtarov.amir.a@gmail.com).

Aleksandr Sokolov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, post-graduate student (aleksandr.sokolov@phystech.edu).

Abstract: In this paper, we present the results of a study of a priority multiline queueing system with a marked Markov arrival process (MMAP), phase-type service time (PH), and a buffer with finite capacity. Priority traffic classes differ in the probability of joining the queue, which depends on the number of customers in buffer, and in the service time PH distribution. If the buffer is full, customers don't join the system. An analytical model has been developed and studied for a particular case of a queueing system with two priority classes. We present an algorithm for calculating stationary probabilities of the system state, loss probabilities, the average number of customers in the queue, and other performance characteristics for this particular case. For the general case of a system with K-classes, a simulation model is constructed, with the help of which various characteristics of the system are studied.

Keywords: multiservice queueing systems, Monte Carlo method, stationary mode.

УДК 519.6

ББК 22.1

DOI: 10.25728/ubs.2023.103.1

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии М.Ф. Караваев.*

Поступила в редакцию 17.04.2023.

Дата опубликования 31.05.2023.

БАЗОВЫЕ МОДЕЛИ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ

Корепанов В. О.¹, Чхартишвили А.Г.²

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН)

Шумов В. В.³

(Международный научно-исследовательский институт
проблем управления, Москва)

Представлены три подхода к описанию боевых действий и результаты их моделирования: теоретико-игровые модели оптимального распределения сил и средств сторон по направлениям и эшелонам (задачам) в тактических моделях встречного боя, наступления и обороны; расширение моделей динамики боевых действий Осипова – Ланчестера; имитационные модели боя подразделений. В качестве показателя эффективности боевых действий предложено использовать вероятностную функцию победы одной из сторон, зависящую от их численностей и боевого превосходства одной из сторон. Теоретико-игровые модели «наступление–оборона» (встречный бой) решаются в два этапа. На первом этапе по одному из трех критерии (прорыв слабейшего пункта, прорыв хотя бы одного пункта, средневзвешенная вероятность прорыва с учетом ценности пунктов) находятся оптимальные распределения сил и средств сторон по пунктам (по фронту) и значения игры. На втором этапе по двум критериям находятся оптимальные распределения сил и средств между тактическими задачами (эшелонами) в предположении, что при решении ближайшей задачи стороны руководствуются критерием прорыва слабейшего пункта обороны. Также приведена формулировка задачи маскировки с использованием подхода рефлексивных игр. В последнем разделе предложен алгоритм с дискретным временем для моделирования боя подразделений. Предложено учитывать характеристики места боя, динамику положения боевых единиц сторон, типы единиц (от которых зависит средняя скорость единиц, дальность обнаружения и эффективного поражения), БЛА, угол обстрела, влияние маскировки. Для проверки предложенного алгоритма построена имитационная модель встречного боя, с помощью которой получены зависимости победы одной стороны от параметра решительности. Обсуждаются перспективы подходов.

Ключевые слова: боевые действия, модели наступления–обороны, распределение сил и средств, теория игр, динамика боевых действий, имитационная модель, функция победы, бой подразделений, маскировка, рефлексивные игры.

¹ Всеволод Олегович Корепанов, к.т.н., с.н.с. (vkorepanov@ipu.ru).

² Александр Гедеванович Чхартишвили, д.ф.-м.н., г.н.с. (sandro_ch@mail.ru).

³ Владислав Вячеславович Шумов, д.т.н., профессор (v.v.shumov@yandex.ru).

1. Введение

Под боевыми действиями понимаются организованные действия частей, соединений, объединений при выполнении поставленных боевых (оперативных) задач. Боевые действия сухопутных войск ведутся в форме общевойсковых боев подразделений (частей и соединений), операций и сражений армий (фронтов) [1].

Модели боевых действий можно классифицировать по разным основаниям.

Первое основание – метод моделирования. Различаются теоретико-игровые, вероятностные, оптимизационные, имитационные и др. (подробная классификация представлена в [13]).

Второе основание – элементы замысла¹ командира (командующего), для обоснования которых предназначены модели:

- модели для обоснования направлений (районов) сосредоточения основных усилий (направлений главного и других ударов);

- модели для обоснования оперативного построения группировки войск (боевого порядка), т.е. распределения сил и средств по задачам;

- модели для обоснования форм и способов выполнения поставленной задачи (способов ведения операции) – какие группировки, где, в какой последовательности и как разгромить, порядок огневого поражения и меры по обману противника.

Третье основание – фазы управления боевыми действиями: модели подготовки и модели ведения боевых действий.

Четвертое основание – масштаб боевых действий: модели тактического, оперативного и оперативно-стратегического уровней.

Пятое основание – виды боевых действий: модели наступления и обороны, модели встречного боя и др.

Модели боевых действий обычно опираются на результаты моделирования на операционном уровне (исследование образцов

¹ Замысел операции (боя) – главная идея способа выполнения группировками войск (сил) поставленных боевых задач; основа решения на операцию (бой).

вооружения и военной техники и оценка их боевых возможностей, описание действий на поле боя отдельных единиц и т.д.).

Объектом настоящего исследования являются боевые действия общевойсковых подразделений, частей, соединений и объединений. Примеры и основные результаты представлены для тактического уровня. Предмет исследования – базовые модели боевых действий, т.е. модели, предназначенные для обоснования элементов замысла командира (командующего).

Основоположником моделирования боевых и военных действий по праву считается Михаил Павлович Осипов. В статье «Влияние численности сражающихся сторон на их потери» [15] М.П. Осипов обосновал и нашел решение модели динамики боя (ныне известная как модель Ф. Ланчестера), а также сформулировал принципы моделирования (неразрывная связь военной статистики, военного искусства и математического моделирования; предпочтительность аналитических моделей, основанных на тактических принципах и физических законах, в сравнении со статистическими; свидетельством «правильности» моделей является соответствие результатов моделирования принципам военного искусства и др.). Им же определены основные факторы, подлежащие учету в моделях боя: искусство полководца; моральное настроение войск; качество оружия, воспитание, организация и обучение войска; местность, укрепления и образ действий.

Структурно работа организована так.

Во втором разделе представлены решения теоретико-игровых задач поиска оптимальных решений на распределение сил и средств сторон по направлениям и эшелонам в тактических моделях встречного боя, наступления и обороны. Обосновано применение рефлексивных игр для моделирования мер маскировки.

В третьем разделе рассмотрены модели динамики боевых действий и расширение модели Осипова – Ланчестера, в которой потери определяются отношением сил и средств сторон.

Четвертый раздел посвящен имитационному моделированию боя подразделений. В нем выполнена постановка задачи на моделирование и рассмотрена простейшая компьютерная модель встречного боя.

2. Теоретико-игровые модели боевых действий

Теоретико-игровые модели боевых действий, в частности, исследовали Е. Борель (игра полковника Блотто), Ю.Б. Гермейер (модель «нападение–защита», [6]), Д.А. Новиков (иерархические модели боя [13]) и др. В настоящее время модели боя входят в учебные курсы теории игр и исследования операций [1, 4].

2.1. ФУНКЦИЯ ПОБЕДЫ В БОЮ, СРАЖЕНИИ, ОПЕРАЦИИ

Функция победы устанавливает зависимость между выделенными сторонами ресурсами на объект (пункт, в район) и исходом боя на этом объекте.

Первыми использовали функцию победы (в неявном виде) при решении теоретико-игровых задач О. Гросс и Ю.Б. Гермейер. В модели «нападение–защита» О. Гросс определил функцию выигрыша нападающего в виде [4]

$$(1) \quad f(x, y) = \sum_{i=1}^n k_i \max[x_i - y_i, 0],$$

где k_i – коэффициент важности пункта i для сторон (нападение и защита); x_i (y_i) – количество ресурса, выделенного нападением (защитой) на i -й пункт, n – число пунктов защиты. Единицы ресурса сторон полагаются одинаково эффективными.

В силу стохастической природы боя выражение $\max[x_i - y_i, 0]$ можно трактовать как математическое ожидание числа единиц нападения, прорвавшихся на пункте i , с ограничением: если ресурс нападения на этом пункте меньше ресурса защиты, то прорыва нет. Тогда вероятность прорыва единицы нападения на пункте i равна

$$\pi_i(x_i, y_i) = \max \left[\frac{x_i - y_i}{x_i}, 0 \right].$$

Отсюда получаем (1) как сумму математических ожиданий числа прорвавшихся единиц с учётом важности пунктов. Функцией победы будем считать вероятность прорыва защиты нападением.

Предположим только, что функция победы зависит от вероятности прорыва. Введем естественные предположения: во-первых, при равенстве сил сторон на пункте ($x_i = y_i$, $\pi_i(x_i, y_i) = 0$) значение функции победы равно 0,5; во-вторых, при $x_i > 0$, $y_i = 0$ (отсутствие защиты), $\pi_i(x_i, y_i) = 1$ – значение функции победы равно 1. Рассмотрим простейший, линейный по $\pi_i(x_i, y_i)$, случай вида функции победы: $p_x(x_i, y_i) = 1/2 + \pi_i(x_i, y_i)/2$. Тогда функция победы О. Гросса имеет вид

$$(2) \quad p_i(x_i, y_i) = \frac{2x_i - y_i}{2x_i}, \quad 2x_i \geq y_i.$$

Ю.Б. Гермейер использовал следующую целевую функцию (ожидаемую сумму прорвавшихся единиц нападения по всем пунктам) [6]:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \max[x_i - \mu_i y_i, 0],$$

где μ_i – количество средств нападения, которое может уничтожить одна единица средств защиты на пункте i . Поскольку в бою поражение противнику наносят обе стороны, то параметр μ_i можно трактовать как параметр боевого превосходства единицы защиты над единицей нападения.

Рассуждая аналогично, получим следующую функцию победы Ю.Б. Гермейера [24]:

$$(3) \quad p_x(x_i, y_i) = \frac{2\beta_i x_i - y_i}{2\beta_i x_i}, \quad 2\beta_i x_i \geq y_i, \quad \beta_i = 1/\mu_i.$$

Отмечаются следующие недостатки моделей (2) и (3): во-первых, они являются функцией на основе разности сил сторон, тогда как в оперативно-тактических расчетах обычно используют функции на основе отношения сил, во-вторых, модели (и целевые функции) не учитывают того факта, что единицы в бою делятся на три группы: ведущие бой, пораженные и отказавшиеся от участия в бою (например, в силу высоких потерь).

В работах [22, 23] обосновано использование при моделировании военных, боевых и специальных действий функции (вероятности победы первой стороны на пункте i):

$$(4) \quad p_x(x_i, y_i) = \frac{(\beta_i x_i)^m}{(\beta_i x_i)^m + (y_i)^m} = \frac{(q_i)^m}{(q_i)^m + 1}, \quad q_i = \frac{\beta_i x_i}{y_i} > 0,$$

где $\beta_i > 0$ – параметр боевого (морального и технологического) превосходства первой стороны над второй на пункте i ; q_i – отношение сил сторон на пункте; m – параметр масштаба.

Под боевой единицей здесь и далее понимается личный состав подразделений, частей и соединений (включая отдельных бойцов, членов боевых экипажей, командиров и личный состав боевых и обеспечивающих подразделений). Такое определение боевой единицы, во-первых, отражает тот факт, что бой – это главным образом деятельность¹, он характеризуется такими чертами, как решительность, активность, выносливость, творчество командиров и бойцов (всякий бой есть психологический акт, заканчивающийся отказом от него одной из сторон [7]), во-вторых, отвечает требованиям военной науки и военной статистики (первейший и важнейший показатель сторон в бою, операции – численный состав войск), в-третьих, позволяет учесть как моральные факторы войск, так и тактико-технические характеристики оружия и военной техники.

Использование функции победы в форме вероятности объясняется следующими причинами. Во-первых, законы обнаружения и поражения целей имеют вероятностный характер. Во-вторых, из военной статистики известно, что чем выше отношение сил сторон (а следовательно, и вероятность победы), тем меньшие потери несет более сильная сторона и тем быстрее она решает поставленную задачу.

Если сделать замену переменной, то получим распределение Парето:

$$(5) \quad p_x(z) = \frac{q^m}{q^m + 1} = \frac{z^m - 1}{z^m} = 1 - z^{-m}, \quad z^m = q^m + 1, \quad z \geq 1,$$

обладающее свойством самоподобия (распределение значений, превышающих величину $z_0 \geq 1$, также является распределением

¹ Деятельность – целенаправленная активность человека.

Парето). Содержательно это означает, что боевые действия батальона, полка могут быть описаны тем же распределением, что и боевые действия дивизии, в составе которой они действуют. Математическому свойству самоподобия соответствует важнейший принцип военного искусства, требующий учета одних и тех же факторов, определяющих успех любого боя, сражения и операции [17].

На достаточно большом объеме данных статистики оценены значения параметра масштаба (таблица 1).

Таблица 1. Значения параметра масштаба функции победы

Значение параметра масштаба	$m = 0,5$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
Характеристика	Боевые действия с нерегулярными формированиями, специальные действия	Боевые действия на тактическом уровне	Боевые действия на оперативном уровне	Военные действия на стратегическом уровне

Далее, второй параметр модели (2.4) – параметр β боевого превосходства¹ – можно оценить аналитически [23]:

$$(6) \quad \beta = \alpha \rho, \quad \alpha = \frac{\lambda_x}{\lambda_y}, \quad \rho = \sqrt[4]{\rho_s \rho_v \rho_p \rho_m},$$

где α – параметр морального превосходства первой стороны над второй, ρ – параметр технологического превосходства².

Параметр α морального превосходства оценивается процентами потерь (λ_x и λ_y), при достижении которых стороны все еще способны вести боевые действия. Этот параметр имеет решающее значение на исход боя. По М. Осипову, «победа зависит не от продолжительности боя, а главным образом от понесенных сторонами потерь; поэтому вернее будет считать, что бой длится до тех пор, пока потери одной из сторон не достигнут некоторого определенного %. Таким % в среднем можно считать 20%...» [15].

¹ Индекс *i* опущен.

² В шкале отношений допустимым средним является среднее геометрическое.

В настоящее время уровень боеспособности оценивается по четырем степеням [1]: боеспособные (имеют не менее 75% боеспособных орг. структур); ограниченно боеспособные (50 – 75%); частично боеспособные (30 – 50%); небоеспособные (менее 30% боеспособных орг. структур). Следовательно, в первом приближении¹, можно считать, что боевые формирования должны быть способными вести боевые действия до тех пор, пока потери не достигнут 50–70%.

Компоненты параметра ρ вытекают из определения боя (бой представляет собой совокупность согласованных по цели, месту и времени ударов, огня и маневра войск для уничтожения (разгрома) противника, отражения его ударов и выполнения других задач); ρ_s (ρ_v , ρ_p , ρ_m) – превосходство первой стороны над второй в согласованности действий (соответственно, в разведке, огневых возможностях и маневренности). Согласованность действий зависит, во-первых, от опыта командира и слаженности действий подчиненных, во-вторых, от ожидаемого времени с момента обнаружения цели до ее поражения. Частные коэффициенты ρ_v , ρ_p и ρ_m вычисляются как отношения количественных характеристик боевых единиц сторон с учетом противодействия противника. Например, дальности эффективного поражения противника следует вычислять с учетом имеющихся у него средств индивидуальной и коллективной защиты; дальности обнаружения – с учетом возможностей по маскировке (задымлению) и т.д. В общем случае параметр ρ (а следовательно, и параметр β боевого превосходства) зависит как от возможностей сил и средств сторон, так и от характеристик местности, на которой ведутся боевые действия.

Имея функцию победы и методику оценки ее значений для различных типов местности и типовых организационных структур сторон боя, можно ставить и решать теоретико-игровые задачи в интересах поиска оптимальных решений по распределению сил сторон по направлениям и задачам.

¹ Если заменить долю боеспособных организационных структур на долю боеспособных боевых единиц.

2.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВСТРЕЧНОГО БОЯ, НАСТУПЛЕНИЯ И ОБОРОНЫ

Пусть имеется n пунктов (районов, участков, полос) с номерами $i = 1, \dots, n$. Обозначим R_x и R_y – количества боевых средств у наступающих (первая сторона) и обороняющихся¹ (вторая сторона). Ресурсы R_x и R_y полагаются бесконечно делимыми, что позволит учесть действия своих, прианных и поддерживающих единиц, когда их усилия попеременно направлены на различные пункты и задачи.

Первая сторона состоит из боевых единиц, предназначенных для решения ближайшей (прорыва обороны противника) и последующей (отражения контратаки резервов противника, занятия рубежа или объекта в глубине обороны) задачи. Ее вектор средств:

$$(7) \quad x = (x_1, \dots, x_n, u) \in X = \left\{ x \mid \sum_{i=1}^n x_i + u = R_x \right\}, \quad r_x = R_x - u,$$

где $x_i \geq 0$ – количество средств решения ближайшей задачи (первого эшелона), действующих на пункте i ; r_x – суммарное количество средств решения ближайшей задачи; $u > 0$ – количество средств решения последующей задачи (второго эшелона).

Вторая сторона состоит из войск первого эшелона и резерва (или второго эшелона). Задача первого эшелона заключается в недопущении прорыва пунктов обороны, задача резерва (второго эшелона) – в нанесении контрудара в случае прорыва обороны или удержании второй линии обороны. Ее вектор средств:

$$(8) \quad y = (y_1, \dots, y_n, w) \in Y = \left\{ y \mid \sum_{i=1}^n y_i + w = R_y \right\}, \quad r_y = R_y - w,$$

где $y_i \geq 0$ – количество средств первого эшелона, имеющих задачу обороны пункта i ; r_y – суммарное количество средств решения первой задачи (удержания пунктов обороны); $w > 0$ – количество средств резерва, предназначенных для нанесения контрудара в случае прорыва пункта i (вторая задача).

¹ Во встречном бою обе стороны являются наступающими.

Решения теоретико-игровых задач ниже представлены только для тактического уровня (параметр масштаба функции победы $m = 1$).

Положим, что стороны обладают общим знанием, принимают решения одновременно и независимо. Тогда мы имеем антагонистическую игру (выигрыш первой стороны есть проигрыш второй) и для поиска оптимальных решений следует найти равновесие Нэша.

Сначала рассмотрим оптимальные распределения сил сторон по направлениям (между пунктами, объектами, районами).

2.3. РЕШЕНИЯ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ СИЛ И СРЕДСТВ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ

Задача обоснования направлений главного и других ударов и направлений сосредоточения основных усилий может быть решена исходя из различных критерииев.

Критерий «прорыв слабейшего пункта». Данному критерию соответствует целевая функция первой стороны:

$$(9) \quad f(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} \frac{\beta_i x_i}{\beta_i x_i + y_i}$$

и ограничения, наложенные на ресурсы сторон:

$$(10) \quad \sum_{i=1}^n x_i = r_x, \quad \sum_{i=1}^n y_i = r_y.$$

Доказано [24], что оптимальная стратегия обороняющихся (распределение ресурса по пунктам обороны) равна

$$(11) \quad y_i^0 = \frac{\beta_i}{B} r_y, \quad B = \sum_{j=1}^n \beta_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

а наступающие используют смешанную стратегию, распределяя весь ресурс на один из пунктов с вероятностями

$$(12) \quad \pi_i^0 = \frac{\beta_i}{B}, \quad i = 1, \dots, n.$$

При этом значение игры при прорыве пунктов обороны равно

$$(13) \quad v_1 = \frac{r_x B}{r_x B + r_y}.$$

Критерий «прорыв хотя бы одного пункта». Данному критерию соответствует целевая функция первой стороны:

$$(14) \quad G(x, y) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_x(x_i, y_i)) = 1 - \prod_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{\beta_i x_i + y_i} \right)$$

с ограничениями (10).

Доказано [24], что оптимальные стратегии сторон и значение игры равны:

$$(15) \quad x_i^0 = \frac{\beta_i r_x}{S(\beta_i r_x + r_y)}, \quad S = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\beta_k r_x + r_y}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(16) \quad y_i^0 = \frac{\beta_i r_y}{S(\beta_i r_x + r_y)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(17) \quad v_2 = 1 - \prod_{i=1}^n \frac{r_y}{\beta_i r_x + r_y}.$$

Критерий «средневзвешенная вероятность прорыва».

Пусть пункты характеризуются ценностями $V_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, тогда целевые функции сторон будут иметь вид:

$$(18) \quad f_x(x, y) = \sum_{i=1}^n V_i \frac{\beta_i x_i}{\beta_i x_i + y_i}, \quad f_y(x^0, y^0) = \sum_{i=1}^n V_i \frac{r_y}{\beta_i r_x + r_y}$$

с ограничениями (10).

Доказано [13], что оптимальные стратегии сторон и значения игры равны:

$$(19) \quad x_i^0 = \frac{V_i \beta_i r_x}{S_2 (\beta_i r_x + r_y)^2}, \quad S_2 = \sum_{k=1}^n \frac{V_k \beta_k}{(\beta_k r_x + r_y)^2}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(20) \quad y_i^0 = \frac{V_i \beta_i r_y}{S_2 (\beta_i r_x + r_y)^2}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(21) \quad f_x(x^0, y^0) = \sum_{i=1}^n V_i \frac{\beta_i r_x}{\beta_i r_x + r_y}, \quad f_y(x^0, y^0) = \sum_{i=1}^n V_i \frac{r_y}{\beta_i r_x + r_y}.$$

Заметим, что по первому критерию (прорыв слабейшего пункта) для поиска оптимальных решений сторон не требуется знание численности противника. Достаточно знать ожидаемую

типовую структуру подразделений противника, степень оборудования позиций и характеристики местности, от которых зависят значения параметров превосходства на пунктах.

Пример 1. Пусть $r_x = 200$, $r_y = 100$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0,5$, $\beta_3 = 0,5$, $V_1 = V_2 = V_3 = 1/3$, $n = 3$. Оптимальные решения сторон и значения игры по трем критериям прорыва пунктов обороны представлены в таблице 2.

Таблица 2. Решения сторон по трем критериям

Показатели	Прорыв слабейшего пункта обороны	Прорыв хотя бы одного пункта обороны	Средневзвешенная вероятность прорыва
Оптимальная стратегия первой стороны	Вероятности выбора пункта для удара всеми силами: 0,5; 0,25; 0,25	Распределение единиц по пунктам: 80; 60; 60	Распределение единиц по пунктам: 61,5; 69,2; 69,2
Оптимальная стратегия второй стороны	Распределение единиц по пунктам: 50; 25; 25	Распределение единиц по пунктам: 40; 30; 30	Распределение единиц по пунктам: 30,8; 34,6; 34,6
Значение игры	0,8	0,92	0,56; 0,44

Из результатов расчетов видно, что наступающим невыгодно использование последнего критерия.

Если известна ожидаемая численность противника, то сторонам целесообразно руководствоваться вторым критерием (при котором у первой стороны максимальное значение игры), иначе – первым.

Зная решения по распределению сил сторон между пунктами, можно найти оптимальное распределение ресурса между ближайшей и последующей задачами, т.е. обосновать боевой порядок сторон.

2.4. РЕШЕНИЯ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ СИЛ И СРЕДСТВ ПО ЗАДАЧАМ

Критерий первой стороны в модели «наступление–оборона» (в модели встречного боя) можно сформулировать так: максимизация вероятности прорыва пунктов обороны (ближайшая задача) и захвата объекта в глубине обороны (разгрома резервов противника – последующая задача).

Если обе стороны при решении ближайшей задачи руководствуются критерием прорыва слабейшего пункта обороны, то мы имеем на тактическом уровне ($m = 1$) следующую целевую функцию первой стороны:

$$(22) \quad F(u, w) = \frac{B(R_x - u)}{B(R_x - u) + (R_y - w)} \times \frac{\delta u}{\delta u + w},$$

$$0 < u < R_x, \quad 0 < w < R_y,$$

где δ – параметр боевого превосходства первой стороны при решении ею последующей задачи. Первый сомножитель отражает решение ближайшей задачи, второй – последующей.

Доказано [24], что сторонам целесообразно использовать чистые стратегии:

$$(23) \quad u^0 = R_x D, \quad w^0 = R_y D, \quad D = \frac{R_y + BR_x}{2R_y + (B + \delta)R_x}.$$

Содержательно значение параметра D есть доля войск, выделенных во второй эшелон (резерв). Эта доля существенно зависит от значения параметра δ и в меньшей степени – от значения параметра B и отношения ресурсов сторон.

Найденные зависимости распределения боевых единиц обороняющейся стороны по задачам (эшелонам) соответствуют взглядам военных специалистов США на подготовку и ведение оборонительных действий. В частности, когда обороняющиеся не уступают наступающим в мобильности и при поспешно занимаемой обороне организуется мобильная оборона, при которой значительная часть сил и средств (до двух третьих) выделяется во второй эшелон (резерв) с целью разгрома вклинившегося противника в ходе контратак. Позиционная оборона основывается на прочном удержании в течение определенного времени заранее подготовленных в инженерном отношении оборонительных позиций, максимальном использовании огневых средств, расположении главных сил и средств в основном районе обороны соединения.

В наступательных операциях важнейшей проблемой является прорыв хорошо подготовленной обороны, когда противник может разместить основные силы первого эшелона на основной

или вспомогательной позициях (см. [17]). Тогда у первой стороны ближайшей задачей будет прорыв первой позиции обороны, а последующей – второй позиции. В данной задаче первой стороне целесообразно использовать критерий гарантированного результата и целевую функцию вида

$$(24) \quad F(u, w) = \min \left(\frac{B(R_x - u)}{B(R_x - u) + R_y - w}; \frac{\delta u}{\delta u + w} \right)$$

(наступающие оценивают вероятность прорыва слабейшего пункта обороны и вероятность выполнения последующей задачи и принимают в качестве критерия минимальное значение, подлежащее максимизации) с ограничениями

$$0 \leq u \leq R_x, \quad 0 \leq w \leq R_y, \quad B > \delta.$$

Соответственно, цель второй стороны может быть оценена критерием $1 - F(u, w)$.

Доказано [24], что в антагонистической игре с целевой функцией (24) оптимальное количество сил и средств, выделяемое наступающими для решения последующей задачи, равно:

$$(25) \quad u^0 = \frac{B}{B + \delta} R_x.$$

Доля сил и средств, выделяемых наступающими на решение последующей задачи, определяется значениями параметра B боевого превосходства наступающих при прорыве пунктов обороны и параметра δ боевого превосходства наступающих в глубине обороны противника (при отражении его контратаки). Соответственно, оптимальное количество сил и средств, выделяемых для решения ближайшей задачи, равно $R_x - u^0$.

Оптимальная смешанная стратегия обороняющихся заключается в следующем. Обороняющиеся с вероятностью $\frac{\delta}{B + \delta}$ распределяют все силы и средства на второй линии обороны, а с вероятностью $\frac{B}{B + \delta}$ – на первой. При этом оптимальное значение игры равно

$$(26) \quad v = \frac{\delta B R_x}{\delta B R_x + (B + \delta) R_y}.$$

Найденные решения на содержательном уровне соответствуют планированию и результатам операций [17].

Таким образом, нами рассмотрены модели, предназначенные для обоснования направлений главного и других ударов (направлений сосредоточения основных усилий) и боевого порядка.

Перспективными направлениями исследований являются, во-первых, решение неантагонистических задач, когда стороны руководствуются несовпадающими критериями, во-вторых, решение задач маскировки и введения противника в заблуждение.

2.5. МОДЕЛИРОВАНИЕ МАСКИРОВКИ

Маскировка – это комплекс мероприятий, направленных на скрытие от противника войск и объектов и на введение его в заблуждение [12].

По предмету маскировки можно выделить следующие задачи моделирования:

- воздействия на моральное состояние своих войск и войск противника;
- скрытие численности своих сил и средств, объектов или показ несуществующих (имитация и демонстративные действия);
- воздействия, направленные на изменение значений параметров технологического превосходства на объектах обороны;
- введение противника в заблуждение относительно намерений командования (каким критерием при распределении единиц по объектам обороны стороны руководствуются).

Для моделирования маскировки представляется обоснованным использовать рефлексивные игры (см. [14]). В терминах рефлексивных игр с двумя игроками результатом маскировки является наличие у противника искаженных представлений о важных параметрах ситуации. Рассмотрим формальную модель.

Пусть целевые функции двух сторон конфликта $f(\theta, x, y)$ и $g(\theta, x, y)$ (наступающих и обороняющихся соответственно) зависят от стратегий сторон $x \in X$ и $y \in Y$, а также значения характеризующего ситуацию параметра θ (в типичных случаях множества X и Y являются векторами). Тогда результатом успешной маскировки

является появление у другой стороны конфликта искаженного представления $\tilde{\theta}$, не совпадающего с реальным, т.е. $\tilde{\theta} \neq \theta$.

Для определенности предположим, что операции по маскировке проводит сторона наступления. Если маскировка была успешной, то сторона обороны субъективно играет в игру с целевыми функциями $f(\tilde{\theta}, x, y)$ и $g(\tilde{\theta}, x, y)$. Рассмотрим случай, когда эта игра имеет единственное решение (пару равновесных стратегий), которое обозначим через $(x^*(\tilde{\theta}), y^*(\tilde{\theta}))$. Тогда сторона наступления, проводя операции по маскировке, может расчитывать на следующее значение своей целевой функции:

$$\max_{x \in X} f(\theta, x, y^*(\tilde{\theta})).$$

Обозначим через Θ множество всех значений параметра $\tilde{\theta}$, которые могут быть реализованы как результат маскировочных операций. Тогда для принятия решения о выборе оптимальных операций по маскировке требуется решить следующую задачу оптимизации:

$$\max_{x \in X} f(\theta, x, y^*(\tilde{\theta})) \xrightarrow{\tilde{\theta} \in \Theta} \max.$$

Пример решения одной из задач маскировки представлен в работе [11].

3. Модели динамики боевых действий

Первая модель динамики боевых действий разработана М.П. Осиповым в 1915 г. В своей работе М.П. Осипов, используя результаты сражений за XIX – начало XX века, нашел зависимость хода и результатов сражений от начальной численности сторон. Причем им исследованы как однородные, так и разнородные группировки. Обзор моделей динамики боевых действий можно найти в работах [13, 27, 28, 29]. Уроки из опыта моделирования боевых действий изложены в работе С. Бондера «Исследование армейских операций – исторические перспективы и извлеченные уроки» [25] и информационном меморандуме [26].

3.1. МОДЕЛЬ ОСИПОВА – ЛАНЧЕСТЕРА

Уравнения Осипова – Ланчестера можно записать в виде [28]

$$(27) \quad \frac{dx}{dt} = -a_y y^p x^q, \quad \frac{dy}{dt} = -a_x x^p y^q,$$

где x (y) – численности войск первой (второй) стороны в момент времени t ; a_x (a_y) – эффективность огня первой (второй) стороны (число поражаемых целей противника в единицу времени)¹; p и q – параметры степени.

В начальный момент времени заданы численности сторон: $x(0) = x_0$ и $y(0) = y_0$. В дискретной форме модель имеет вид:

$$(28) \quad x(t + \Delta t) = x(t) - \Delta t \frac{dx}{dt}, \quad y(t + \Delta t) = y(t) - \Delta t \frac{dy}{dt}.$$

Выделяются следующие разновидности модели Осипова – Ланчестера (27). Если $p = q = 1$ (в общем случае, $p - q = 0$), то это линейная модель боя с условием равенства сил:

$$(29) \quad a_x[x_0 - x(t)] = a_y[y_0 - y(t)].$$

Если $p = 1$, $q = 0$ (в общем случае, $p - q = 1$), то это квадратичная модель боя с условием равенства сил:

$$(30) \quad a_x[(x_0)^2 - (x(t))^2] = a_y[(y_0)^2 - (y(t))^2].$$

Наконец, если $p = 0$, $q = 1$ (в общем случае, $q - p = 1$), то это логарифмическая модель боя.

Также выделяются асимметричные модели, в которых стороны имеют разные возможности по разведке, способам ведения огня, пополнению резервов и т.д. (см. [13, 29]).

К. фон Клаузевиц отмечал, что военное дело просто и вполне доступно здравому уму человека, но воевать сложно. Модель М. П. Осипова [15]

$$(31) \quad \frac{dx}{dt} = -a_y y, \quad \frac{dy}{dt} = -a_x x$$

отличается обоснованностью, убедительностью и простотой. Но для реалистического планирования и прогнозирования боя приходится усложнять модель, учитывать действия разнородных группировок, одновременные и последовательные сражения в разных районах, способы маневра и т.д.

¹ Параметры a_x и a_y могут трактоваться как тактические параметры, характеризующие поражение противника.

Отметим недостаток модели (31). В ней полагается, что ход и исход боя (и связанные с ним потери сторон) целиком определяется поражающими (огневыми) возможностями сторон. Для учета таких характеристик боя, как согласованность, маневр и т.д. М.П. Осипову приходится выходить за рамки модели, объясняя, например, победу Наполеона в Аустерлицком сражении, в котором противник имел численное превосходство.

3.2. РАСШИРЕНИЕ МОДЕЛИ М.П. ОСИПОВА

Из военной статистики известно, что успех боя (сражения, операции) главным образом зависит от отношения сил сторон. В таблице 3 показаны суммарные данные (сгруппированные по годам) по начальным численностям сторон в стратегических операциях, а также доли безвозвратных потерь советских войск от начальных численностей¹ (данные взяты из [5]). Положено, что значение параметра боевого превосходства во всех операциях $\beta = 1$.

Таблица 3. Отношение сил и потери советских войск в стратегических операциях Великой Отечественной войны

Год	Численность советских войск	Численность немецких войск	Численное превосходство немецких войск, s_i	Доля безвозвратных потерь советских войск от начальных численностей, d_i
1941	7 973 648	9 121 260	1,144	34,9%
1942	5 044 068	4 095 800	0,812	24,7%
1943	9 282 906	6 491 300	0,699	10,0%
1944	9 245 827	7 022 000	0,759	8,9%
1945	8 908 161	4 070 000	0,457	4,2%

В таблице 4 показаны коэффициенты корреляции между численным превосходством (в степенях, отражающих масштаб действий) и долей безвозвратных потерь.

¹ Стратегические операции, переходящие на другой год отнесены к году, в котором их продолжительность больше. Например, Сталинградская стратегическая наступательная операция (19 ноября 1942 г. – 2 февраля 1943 г.) отнесена к 1942 году.

Таблица 4. Коэффициенты корреляции между численным превосходством немецких войск (в четырех степенях) и долей безвозвратных потерь советских войск

Степень	d_i	$(d_i)^2$	$(d_i)^3$	$(d_i)^4$
К-т корреляции	0,92	0,92	0,91	0,89

Из таблицы можно сделать вывод, что стратегические операции протекали в форме сражений фронтовых объединений (степень $m = 3$), армий и корпусов ($m = 2$), а на вспомогательных направлениях – в форме боев дивизий и полков ($m = 1$), что и обусловило те или иные потери сторон.

Вместе с тем, отдельные стратегические операции характеризуются следующими особенностями:

- численное превосходство одной из сторон почти всегда приводит к победе;
- слабая зависимость потерь и результатов операций (глубина и темп наступления или отхода) от отношения сил.

Приведем некоторые примеры:

- стратегическая оборонительная операция в Белоруссии (22 июня – 9 июля 1941 г.): $s_i = 1,22$, $d_i = 0,51$;
- Московская стратегическая наступательная операция (17 ноября – 2 декабря 1941 г.): $s_i = 0,75$, $d_i = 0,13$;
- Киевская стратегическая наступательная операция (3–13 ноября 1943 г.): $s_i = 1,21$, $d_i = 0,02$.

Существенные различия в потерях (относительно средних) можно объяснить следующими причинами: во-первых, статистика оперирует начальными численностями сторон и не всегда учитывает пополнения в ходе операций, во-вторых, велика роль особенностей театра военных действий, «военного счастья», когда результаты действий не совпадают с возможностями войск.

Данные военной статистики (см. таблицы 3 и 4 в предположении, что параметр боевого превосходства равен 1) дают основания записать уравнения динамики боя (сражения, операции) в виде

$$(32) \quad \frac{dx}{dt} = -k_x \left(\frac{y}{\beta x} \right)^{\mu_y}, \quad \frac{dy}{dt} = -k_y \left(\frac{\beta x}{y} \right)^{\mu_x},$$

где β – параметр боевого превосходства первой стороны над второй, μ_x и μ_y – параметры формы поражения; k_x и k_y – коэффициенты размерности (отражают, как общее превосходство переводится в нанесение потерь противнику).

Иными словами, темп потерь определяется отношением сил сторон (см. выражение (4)). Поражение противнику может наноситься средствами тактического (находящихся в распоряжении командира дивизии и ниже), оперативного и стратегического уровней. Тогда параметр формы поражения (нижний индекс опущен) вычисляется по формуле:

$$(33) \quad \mu = \frac{z_1 + 2z_2 + 3z_3}{z_1 + z_2 + z_3}$$

где z_1 (z_2 , z_3) – ожидаемые потери противника (или их доли) за счет средств поражения тактического (оперативного, стратегического) уровня; $m = 1, 2, 3$ – значения параметра масштаба.

Для нахождения условия равенства сил разделим первое уравнение (32) на второе и после преобразований получим

$$(34) \quad k_y \beta^\nu (x^{\nu+1} - x_0^{\nu+1}) = k_x (y^{\nu+1} - y_0^{\nu+1}),$$

где $\nu = \mu_x + \mu_y$.

Если коэффициенты совпадают $k_x = k_y$, то условие равенства сил примет вид

$$(35) \quad y_0 = \beta^{\nu/(v+1)} x_0.$$

Для сравнения, в квадратичной модели боя М.П. Осипова условие равенства сил имеет вид

$$(36) \quad y_0 = \gamma^{1/2} x_0, \quad \gamma = \frac{a_x}{a_y},$$

где γ – превосходство первой стороны в огневых возможностях и разведке.

Пусть $\mu = \mu_x = \mu_y$, $x_0 = 1000$ и $y_0 = 2000$. Тогда для равенства сил в квадратичной модели требуется обеспечить $\gamma = 4$, а в модели на основе отношения сил – $\beta \approx 2,83$ при $\mu = 1$, $\beta \approx 2,38$ при $\mu = 2$ и $\beta \approx 2,24$ при $\mu = 3$.

Заметим, что если у сторон одинаковые возможности по маневренности и согласованности действий, тогда с учетом выражения (6) получим $\beta = \sqrt{\gamma}$. М.П. Осипов при построении модели

использовал данные крупнейших сражений XIX – начала XX веков, т.е. рассматривал стратегический уровень ($m = 3$). В нашей модели на основе отношения сил параметр боевого превосходства ($\beta \approx 2,24$) незначительно превосходит значение параметра превосходства в разведке и поражении ($\sqrt{4} = 2$).

Рассмотренная модель динамики является простейшей и имеет нормативный характер (отвечает на вопрос «как должно быть?»). Для решения задач управления боем, обоснования форм и способов выполнения поставленных боевых задач ее необходимо масштабировать (дискретное время, разнородные и разномасштабные действия) и верифицировать на примере ряда стратегических операций Великой Отечественной войны, боевых действий современных войн, учений и командно-штабных тренировок.

Для анализа динамики действий подразделений (батальонные и ротные тактические группы и т.д.) модели Осипова – Ланчестера (модели динамики средних) малоприменимы. Вместо них целесообразно использовать имитационные модели боя.

4. Имитационные модели боя подразделений

В настоящем разделе выполнена постановка задачи на моделирование боя подразделений и рассмотрена компьютерная реализация простейшей модели встречного боя.

4.1. ЗАКОНЫ ПОРАЖЕНИЯ И ОБНАРУЖЕНИЯ ЦЕЛЕЙ

Под законом поражения объекта (цели) понимается зависимость вероятности поражения цели от нанесенного ей ущерба или факторов, его определяющих [8].

При выполнении огневых задач по поражению цели задачами стрельбы подразделений артиллерии могут быть: уничтожение, разрушение, подавление и изнурение [16]. **Уничтожение** цели заключается в нанесении ей таких потерь (повреждений), при которых она полностью теряет свою боеспособность. **Разрушение** цели заключается в приведении ее в непригодное для дальнейшего использования состояние. **Подавление** цели заключается в нанесении ей потерь (повреждений) и в создании таких

условий, при которых она временно лишается боеспособности, ограничивается (воспрещается) ее маневр или нарушается управление. *Изнурение* заключается в морально-психологическом воздействии на живую силу противника ведением беспокоящего огня ограниченным количеством орудий и боеприпасов в течение установленного времени.

В зависимости от величины ущерба, нанесенного составным объектам, достигаются различные степени поражения. Обычно для качественно различных степеней поражения объектов устанавливаются следующие значения ущербов:

до 0,2 – изнурение;

0,2 – 0,3 – подавление;

0,3 – 0,5 – среднее поражение (сильное подавление);

0,5 – 0,6 (0,6 – 0,9) – сильное поражение (разрушение) целей, не содержащих (содержащих) средства ядерного нападения;

более 0,7 (0,9) – уничтожение целей, не содержащих (содержащих) средства ядерного нападения.

Исходя из определения закона поражения цели, рассмотрим зависимости поражения объектов от: а) числа попаданий в них и б) дальности до этих объектов.

Под показателем системы стрельбы обычно понимается математическое ожидание числа попаданий в цель или вероятность получения некоторого числа попаданий [9].

По А.Н. Колмогорову вероятность поражения цели в точности при r -м попадании подчиняется степенному закону и равна

$$(37) \quad P(A | r) = 1 - e^{-\alpha r}, \quad \alpha = -\ln\left(1 - \frac{1}{\omega}\right),$$

где A – событие поражения цели; α – параметр, ω – среднее число попаданий в цель, необходимое для ее поражения. Если имеется взаимная независимость попаданий в цель, то вероятность поражения цели равна [9]

$$(37) \quad P(A) = 1 - \prod_i \left(1 - \frac{p_i}{\omega}\right),$$

где p_i – вероятность попадания в цель при i -м выстреле. Иными словами, вероятность поражения цели $P(A)$ равна той вероятно-

сти, которая получилась бы, если бы поражение заведомо достигалось уже при первом попадании, но с заменой вероятностей p_i на p_i/ω .

Учитывая принципы стабилизации и управления полетом боеприпаса, можно выделить типовые зависимости вероятности поражения целей от дальности до них (рис. 1).

Отсутствие зависимости вероятности поражения целей от дальности до них характерно для дорогих высокоточных боеприпасов (управляемый снаряд «Краснополь», ОТРК «Искандер» и др.). Зависимость в форме полуконстанты характерна, например, для стрельбы артиллерии с закрытых огневых позиций (см. [16, 19]). Для стрельбы артиллерии прямой наводкой и стрельбы из стрелкового оружия [19, 20] характерна зависимость в форме экспоненты.

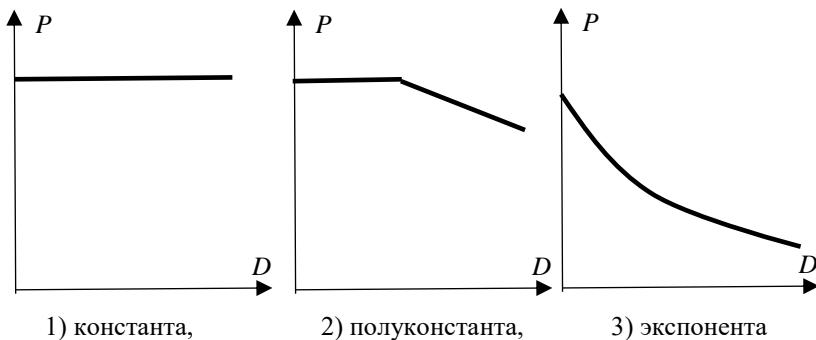


Рис. 1. Типовые зависимости вероятности поражения целей от дальности до них

Прежде чем поразить цель, она должна быть обнаружена. Возможности по обнаружению целей зависят от используемых физических полей, наличия препятствий естественного или искусственного характера, используемых средств маскировки и противодействия и т.д.

При поиске цели наблюдателями решаются следующие задачи [18]: обнаружение (выделение объекта из фона), опознавание (определение основных характеристик объекта), идентифи-

кация (определение типа цели и ее принадлежности). Вероятность обнаружения цели может быть снижена за счет применения типовых методов маскировки: сокрытия, деформации или имитации.

Для примера рассмотрим рекомендации по комплексной маскировке пехотинца [18]. Его маскировка сводится к трем диапазонам волн: оптическому, ближнему инфракрасному и тепловому.

Меры маскировки в оптическом диапазоне (лицевая маска, маскировочные рукавицы, чехлы на оружие и бронешлем) позволяют уменьшить дальность обнаружения в 2–3 и более раз. В тепловом диапазоне также можно добиться существенного снижения дальности обнаружения за счет использования перчаток, лицевой маски, свободной плотной одежды (плащ-накидки), каски, бронежилета и т.д.

Для защиты бронетехники и других объектов от средств воздушного нападения могут использоваться аэрозольные завесы, комбинированные аэрозольно-дипольные помехи, маскировочные радиопоглощающие комплекты.

Для оценки возможностей по обнаружению целей в моделях боя могут использоваться следующие зависимости вероятности обнаружения целей в зависимости от дальности до них:

- равномерный закон (вероятность обнаружения принимается близкой к единице на некотором интервале дальности до цели и равной нулю за границами интервала);

- степенной закон, целесообразно использовать при малом количестве естественных или искусственных помех [10];

- показательный закон, используется при наличии неопределенностей о возможностях противника по маскировке, на пересеченной и закрытой местности, при наличии ограничений на время обнаружения цели и т.д.

Далее рассмотрим постановку задачи на разработку имитационной модели наступательного, оборонительного (встречного) боя подразделений (ротных тактических групп).

4.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НА МОДЕЛИРОВАНИЕ

Пусть имеется поле боя прямоугольной формы и разграничительные линии сторон (рис. 2).

Разграничительные линии наносятся на глубину боевой задачи (на предельную дальность стрельбы штатных и приданых (поддерживающих) средств, в тыл – на глубину построения боевого порядка. Также учитываются разграничительные линии с соседями. Возможны два варианта: боевым единицам или запрещается выходить за разграничительные линии, или, в случае выхода за них, назначается штраф (снижается эффективность достижения поставленной задачи и т.д.). Учет рельефа местности на электронной карте обычно выполняется с помощью регулярной сетки (квадраты, прямоугольники, треугольники) или триангуляционной сети, что, в частности, позволяет оперативно рассчитывать зоны видимости. Также по карте определяется проходимость местности (для техники только по дорогам или везде) и другие ее характеристики.

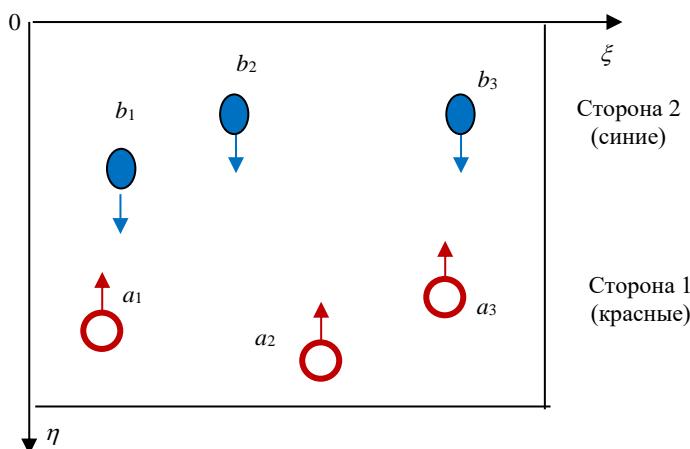


Рис. 2. Поле боя и боевые единицы сторон

В распоряжении сторон имеются боевые единицы $a_i, i = 1, \dots, R_a$ и $b_j, j = 1, \dots, R_b$. Каждая единица принадлежит некоторому типу k (пехотинец, БТР, ПТУР, танк и т.д.), $k = 1, \dots, K$, где K – количество типов единиц. Факт принадлежности некоторой единицы к определенному типу может быть учтен с помощью векторов $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_{R_a})$ и $y = (y_1, \dots, y_j, \dots, y_{R_b})$, где x_i и y_j –

номера типов боевых единиц. Для каждого типа k заданы численности экипажа (расчета) боевой единицы первой N_k^a и второй N_k^b стороны, $k = 1, \dots, K$. Обычно единицы первого типа ($k = 1$) являются самыми массовыми и малоэффективными, например, пехотинец с автоматической винтовкой (автоматом) и ручными гранатами. С увеличением номера типа ценность боевой единицы растет. Для упрощения компьютерной реализации модели можно положить, что величины a_i и b_j имеют значения численностей их экипажей.

У первой (второй) стороны имеется M_x (M_y) групп, действующих относительно самостоятельно: каждой из групп назначается место в боевом порядке (например, танки должны действовать, не отрываясь от пехоты) и основное направление (маршрут) движения. Вместе с тем, группам дается возможность отклоняться от поставленной задачи для решения внезапно возникающих задач. Факт принадлежности единицы к s -й группе будем обозначать a_{is} и b_{js} .

Заданы начальные координаты единиц (в момент времени $t = 0$): $(\xi_i^a(0), \eta_i^a(0))$, $i = 1, \dots, R_a$ и $(\xi_j^b(0), \eta_j^b(0))$, $j = 1, \dots, R_b$, причем расстояние между единицей i первой стороны и единицей j второй равно

$$(38) \quad l_{ij}(t) = \sqrt{(\xi_i^a(t) - \xi_j^b(t))^2 + (\eta_i^a(t) - \eta_j^b(t))^2}.$$

Боевые единицы сторон (по типам) имеют следующие характеристики (могут меняться в зависимости от особенностей рельефа, растительности и других особенностей местности):

– v_k (w_k) – средняя скорость боевого перемещения единицы типа k первой (второй) стороны, км/час;

– G (H) – матрица дальностей обнаружения противника боевыми единицами первой (второй) стороны с вероятностью 0,9, км;

– C (D) – матрица дальностей эффективного поражения противника боевыми единицами первой (второй) стороны с вероятностью 0,9, км.

Для учета особенностей оборонительного боя указанные характеристики должны учитывать степень подготовки обороны (при заранее подготовленной обороне поразить обороняющихся

сложнее) и, возможно, зависеть от времени, чтобы учесть в динамике подготовку обороны.

Матрицы дальностей квадратные размера K , например, $C = (c_{ij})$, где c_{ij} – дальность поражения единицы противника j -го типа единицей первой стороны типа i . Отметим, что вместо дальностей значениями матриц могут быть величины параметров показательного закона. Дальности обнаружения целей ограничены значением d_Δ – максимально возможная дальность обнаружения, зависящая от рельефа местности и растительного покрова.

Дополнительно сторонами могут использоваться разведчики (беспилотные летательные аппараты – БЛА), эффективность которых задана долями π_x и π_y обнаруживаемых единиц противника на каждом шаге боя. Доли со временем не меняются.

Предположим, что время дискретно и меняется с шагом Δt (например, 1 минута или 10 минут), $t_{i+1} = t_i + \Delta t$, $t_0 = 0$. Положим, что перемещение единицы за время Δt может выполняться в любом направлении (с учетом ограничений на выход с поля боя). Возможные направления дискретны, т.е. равны:

$$(39) \quad \Delta\alpha\tau, \quad \tau = 0, \dots, K_\tau, \quad \Delta\alpha = \frac{2\pi}{K_\tau}.$$

После перемещения¹ в выбранном направлении единица готовится к стрельбе в этом направлении. В общем случае эффективность поражения одиночной цели (как подвижной, так и движущейся) зависит от угла ее обстрела (в лоб, сбоку, с тыла), см. рис. 3.

На рисунке пунктирная линия есть линия стрельбы боевых единиц сторон, а линии со стрелками – направления их перемещения и готовности к стрельбе.

¹ Обороняющиеся единицы могут находиться на месте.

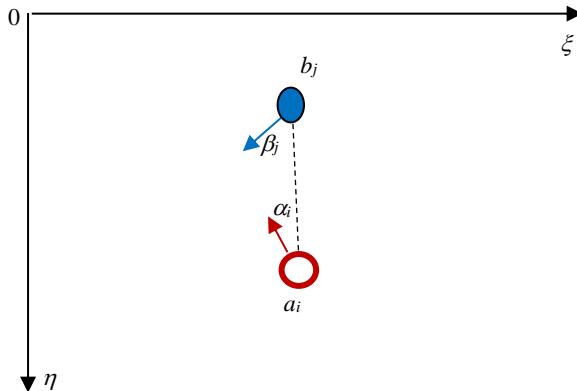


Рис. 3. Углы стрельбы и поражения боевых единиц

Вероятность поражения противника минимальна при стрельбе по нему в лоб. Если угол поражения (угол между линией стрельбы и направлением перемещения) увеличивается, то вероятность поражения снижается. С достаточной для тактической модели точностью можно ограничиться линейной зависимостью вероятностей поражения от угла:

$$(40) \quad p_{ij}(\beta_j) = 1 - (1 - p_{ij}) \frac{\pi - s_k \beta_j}{\pi},$$

$$(41) \quad q_{ji}(\alpha_i) = 1 - (1 - q_{ji}) \frac{\pi - s_k \alpha_i}{\pi},$$

где p_{ij} (q_{ji}) – вероятность поражения i -й единицей цели j (j -й единицей цели i) при стрельбе в лоб (см. матрицы P и Q); α_i (β_j) – угол поражения цели i (цели j); $0 \leq s_k \leq 1$ – параметр поражения цели k -го типа. При $s_k = 0$ вероятность поражения цели не зависит от угла поражения, при $s_k = 1$ стрельба с тыла ($\alpha_i = \pi$, $\beta_j = \pi$) обеспечивает гарантированное поражение цели.

Основными способами маскировки боевых единиц являются скрытие и имитация (включая демонстративные действия). Положим, что помимо индивидуальных средств маскировки подразделение имеет возможность выделить средства для скрытия единиц некоторых групп и имитации единиц других групп.

Скрытие (имитация) единиц учитывается, во-первых, снижением (увеличением) дальностей обнаружения противником (см. матрицы G и H) и, во-вторых, изменением вероятностей π_x и π_y обнаруживаемых единиц с помощью БЛА.

Основными видами маневра в бою являются: охват, обход, отход и смена позиций. Положим, что группам (отделениям) указывается только направление (маршрут) дальнейшего наступления (перемещения). В каком порядке перемещаться на поле боя (походном, предбоевом или боевом, см. рис. 4), решает командир подразделения, исходя из оценки обстановки и данных разведки. Перемещение в походном порядке выполняется с увеличенной скоростью. Если группа разнородна, то ее скорость в походном порядке берется максимальной¹ из всех входящих в ее состав единиц (например, пехотинцы перемещаются на БМП или десантом на танке). При этом для каждой группы указывается, на какой единице перемещается вся группа. В предбоевом и боевом порядке скорость перемещения группы берется минимальной из всех входящих в ее состав единиц.

Перемещение в предбоевом и походном порядках выполняется вдоль направления (маршрута) дальнейшего наступления. Перемещение в боевом порядке выполняется в линию. Линия может быть под углом $\pi/2$ к направлению перемещения или уступом.

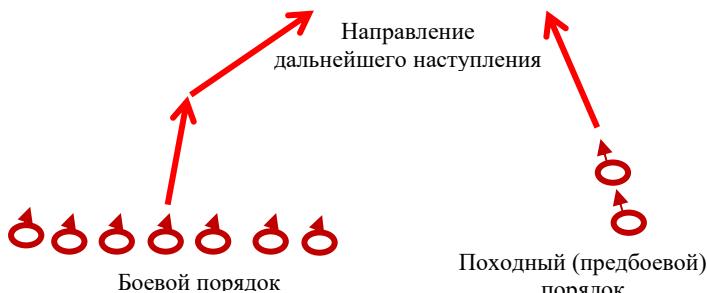


Рис. 4. Перемещение боевых единиц

¹ Если группа – это взвод или рота, то скорость определяется как минимальное значение из максимальных скоростей отделений (танков).

Возможны две задачи моделирования встречного боя.

Первая задача. Заданы начальные положения групп и состав каждой из них. Требуется найти оптимальные действия сторон.

Вторая задача. Задан состав подразделения (боевые единицы по типам). Требуется сформировать оптимальный состав групп.

В обеих задачах в начальный момент боя группы расположены в походном порядке на определенном расстоянии между ними по фронту в начале (конце) поля боя. Далее будем рассматривать только первую задачу. Для каждой группы указано место каждой единицы в группе и расстояние между единицами ρ_x и ρ_y .

На начальном шаге боя ($t_0 = 0$) командиры подразделений оценивают по данным разведки положение противника и назначают своим группам направления (маршруты) перемещения. В общем случае группы могут быть разведывательно-боевыми (с задачей своевременно обнаружить противника и вынудить его развернуться в боевой порядок) и боевыми.

За шаг боя Δt группы сторон или перемещаются, или остаются на месте, или разворачиваются в боевой (предбоевой, походный) порядок. После перемещения выполняется стрельба по противнику.

Целевые функции первой и второй стороны:

$$(42) \quad W_x(t) = \alpha_x \sum_{i \in I(t)} \sum_{j \in J(t)} p_{xij}(l_{ij}) \pi_{xij}(l_{ij}) R_x(i, j) + \\ + (1 - \alpha_x) \sum_{j \in J(t)} \sum_{i \in I(t)} p_{yji}(l_{ij}) \pi_{yji}(l_{ij}) R_y(j, i),$$

$$(43) \quad W_y(t) = \alpha_y \sum_{j \in J(t)} \sum_{i \in I(t)} p_{yji}(l_{ij}) \pi_{yji}(l_{ij}) R_y(j, i) + \\ + (1 - \alpha_y) \sum_{i \in I(t)} \sum_{j \in J(t)} p_{xij}(l_{ij}) \pi_{xij}(l_{ij}) R_x(i, j),$$

где $0 < \alpha_x (\alpha_y) < 1$ – параметр решительности первой (второй) стороны; p_{xij} (p_{yji}) – вероятность обнаружения j -й единицы противника i -й единицей первой стороны (i -й единицей противника j -й единицей второй стороны); π_{xij} (π_{yji}) – вероятность поражения j -й единицы противника i -й единицей второй стороны (i -й единицей противника j -й единицей второй стороны); $I(t)$ и $J(t)$ – множества непораженных боевых единиц сторон на шаге t ; $R_x(i, j)$ и

$R_y(j, i)$ – правила выбора цели для поражения. Вероятности обнаружения единиц противника рассчитываются с учетом возможностей средств воздушной разведки (вероятности π_x и π_y) и значений матриц G и H . С помощью датчика случайных чисел по вероятностям π_x и π_y на каждом шаге определяются конкретные цели противника, которые достоверно обнаружены.

Боевая единица на каждом шаге выполняет стрельбу по следующему правилу:

1) стрельбу начинает первая по порядку боевая единица при условии, что хотя бы одна цель противника обнаружена с вероятностью не ниже критической (например, $P_{kr} > 0,4$);

2) среди обнаруженных целей выбирается цель с максимальной вероятностью обнаружения и ее поражения. Если таких целей несколько, то выбирается ближайшая;

3) факт поражения цели (реализуется с использованием датчика случайных чисел, соответствующие значения величин a_i и b_j принимаются равными нулю) сразу становится известным обоим сторонам. В последующем по пораженным целям стрельба не ведется.

Бой прекращается, если на шаге t потери одной из сторон достигли определенного предела. Эта сторона признается проигравшей. Если у обоих сторон на шаге t потери достигли заданного предела, то признается ничья.

Условие прекращения боя первой и второй стороны:

$$(44) \quad \frac{\sum_{i \in I(t)} a_i}{\sum_{i \in I(0)} a_i} \geq \varepsilon_x, \quad \frac{\sum_{j \in J(t)} b_j}{\sum_{j \in J(0)} b_j} \geq \varepsilon_y,$$

где ε_x и ε_y – доли потерь, выдерживаемые первой и второй стороной.

4.3. ПРОСТЕЙШАЯ ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ВСТРЕЧНОГО БОЯ

По М.П. Осипову свидетельством правильности моделей боя является соответствие результатов моделирования принципам ведения боевых действий.

Для проверки алгоритма разработана простейшая имитационная модель встречного боя (рис. 5, 6).

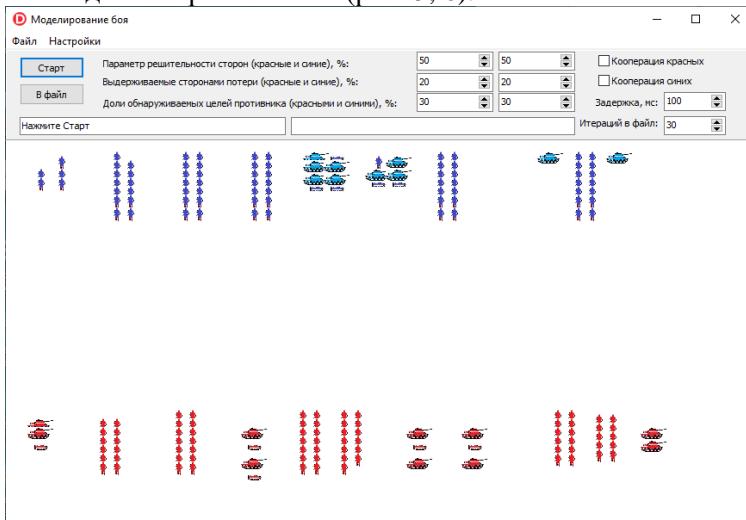


Рис. 5. Начальное положение единиц на поле боя

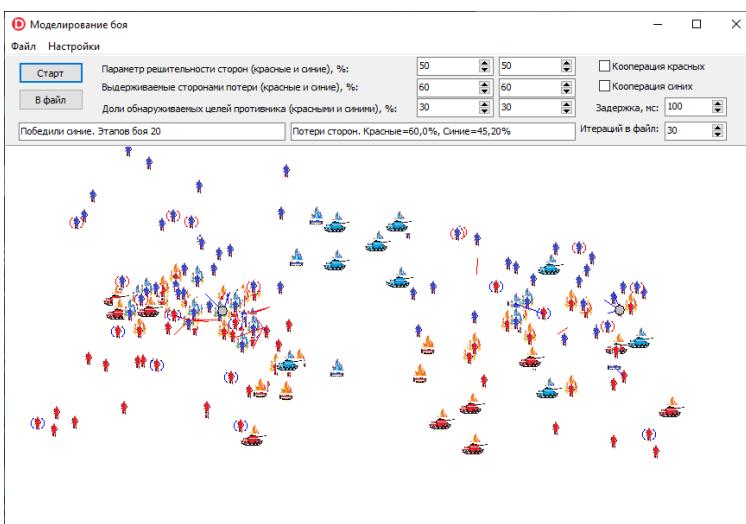


Рис. 6. Результат боя

Начальное положение единиц на поле боя, их тактические характеристики (по трем типам) и количество задаются пользователем.

В программе также задаются:

- параметры решительности сторон;
- выдерживаемые сторонами проценты потерь;
- доли обнаруживаемых целей противника с помощью БЛА на каждом шаге боя.

Возможен как отдельный розыгрыш боя, так и серия боев (итераций) с сохранением результатов по каждому бою в серии.

Отдельные единицы в группы не объединяются. Каждая единица выбирает точку следующего перемещения с учетом параметра решительности (при малом значении параметра перемещение происходит в точку, где меньше вероятность поражения единицы противником; при большом – в точку с максимальной вероятностью поражения противника).

При равном количестве боевых единиц (90 единиц у каждой стороны) с одинаковыми возможностями по трем типам (пехотинцы, танки и ПТУР), 60% выдерживаемых потерь и 30% обнаружений целей противника с помощью БЛА каждой стороной выполнены серии по 30 боев в каждой итерации.

Зависимость исхода боев от параметра решительности первой стороны (красных) показана на рис. 7.

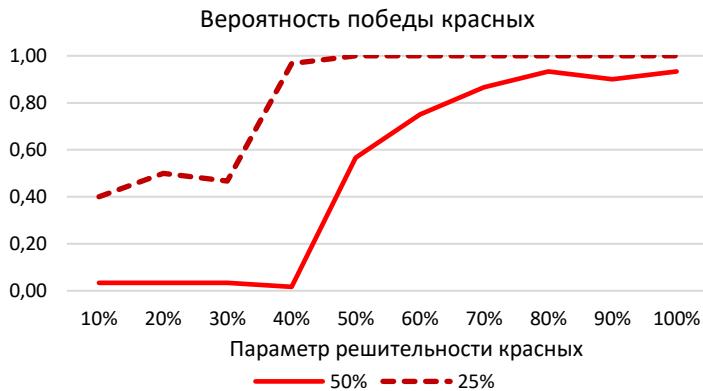


Рис. 7. Зависимость вероятности победы красных от решительности их единиц

На рисунке сплошная линия – вероятность победы красных при решительности синих 50%, пунктирная линия – при 25% решительности синих.

Таким образом, результаты моделирования подтверждают важнейший принцип общевойскового боя – высокая активность, решительность и непрерывность ведения боя.

5. Перспективы

Базовые модели боевых действий предназначены для обоснования элементов замысла командира (командующего). Элементы замысла командира (командующего) и соответствующие им модели показаны в таблице 5.

Таблица 5. Элементы замысла и базовые модели

Элементы замысла	Базовые модели
Направления (районы) сосредоточения основных усилий (направления главного и других ударов)	Теоретико-игровые модели боевых действий
Оперативное построение группировки войск (боевой порядок)	Модели Осипова – Ланчестера, имитационные модели, рефлексивные модели
Формы и способы выполнения поставленной задачи – какие группировки, где, в какой последовательности и как разгромить, порядок огневого поражения и меры по обману противника	

Полученные результаты позволяют сформулировать следующие перспективные направления развития базовых моделей боевых действий.

Во-первых, решение теоретико-игровых задач нахождения оптимальных распределений сил и средств по направлениям и задачам (элементам боевого порядка) с различными целевыми функциями сторон (антагонистические и неантагонистические задачи) на тактическом, оперативном и оперативно-стратегическом уровнях.

Во-вторых, решение рефлексивных задач управления маскировкой.

В-третьих, разработка имитационных моделей боя подразделений (ротных и батальонных тактических групп), оценка возможности их расширения до боя полка (бригады).

В-четвертых, разработка дискретных моделей динамики боя разнородных группировок сил и средств.

В-пятых, интеграция моделей боевых и специальных действий.

Литература

1. *Боевая способность*. – URL: <https://encyclopedia.mil.ru/encyclopedia/dictionary/details.htm?id=3465@morfDictionary> (дата обращения: 10.08.2022).
2. *Боевые действия*. –URL: <https://encyclopedia.mil.ru/encyclopedia/dictionary/details.htm?id=3555@morfDictionary> (дата обращения: 10.08.2022).
3. ВАСИН А.А., КРАСНОЩЕКОВ П.С., МОРОЗОВ В.В. *Исследование операций* : учебное пособие. – М.: Академия, 2008. – 464 с.
4. ВАСИН А.А., МОРОЗОВ В.В. *Теория игр и модели математической экономики* : учебное пособие. – М.: Макс-Пресс, 2005. – 272 с.
5. *Великая Отечественная война 1941–1945 гг. Кампании и стратегические операции в цифрах*. В 2 томах. – М.: Объединенная редакция МВД России, 2010. Том I. – 608 с.; Том II. – 784 с.
6. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций*. – М.: Наука, 1971. – 384 с.
7. ГОЛОВИН Н.Н. *Исследование боя. Исследование деятельности и свойств человека как бойца*. Книга 2. Статьи и письма. – М.: ВАГШ, 1995. – 303 с.
8. *Закон поражения объекта (цели)*. – URL: <https://encyclopedia.mil.ru/encyclopedia/dictionary/details.htm?id=13098@morfDictionary> (дата обращения: 10.08.2022).
9. КОЛМОГОРОВ А.Н. *Число попаданий при нескольких выстрелах и общие принципы оценки эффективности системы стрельбы* // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1945. – Т. 12. – С. 7–25.
10. КОРЕПАНОВ В.О., НОВИКОВ Д.А. *Задача о диффузной бомбе* // Проблемы управления. – 2011. – №5. – С. 66–73.

11. КОРЕПАНОВ В.О., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г., ШУМОВ В.В. *Теоретико-игровые и рефлексивные модели боевых действий* // Компьютерные исследования и моделирование. – 2022. – Т. 14, №1. – С. 179–203.
12. КОРОЛЁВ А.Ю., КОРОЛЁВА А.А., ЯКОВЛЕВ А.Д. *Маскировка вооружения, техники и объектов*. – СПб: Университет ИТМО, 2015. – 155 с.
13. НОВИКОВ Д.А. *Иерархические модели военных действий* // Управление большими системами. – 2012. – Вып.37. – С. 25–62.
14. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Рефлексия и управление: математические модели*. – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2012. – 412 с.
15. ОСИПОВ М.П. *Влияние численности сражающихся сторон на их потери* // Военный сборник. – 1915. – №6. – С. 59–74; №7. – С. 25–36; №8. – С. 31–40; №9. – С. 25–37.
16. *Правила стрельбы и управления огнем артиллерии. Дивизион, батарея, взвод, орудие (ПСиУО-96)*. – Ч. 1. – М.: Воениздат, 1996.
17. *Речь Г.К. Жукова на военно-научной конференции, декабрь 1945 г.* // Военная мысль. – 1985. – Спец. выпуск (февраль). – С. 3, 17–33.
18. СМИРНОВ В.П., КАЛАШНИКОВА Н.М., СМОЛИН С.И. *Маскировка подвижных наземных объектов в современных условиях*. – М.: РадиоСофт, 2015. – 80 с.
19. *Таблицы стрельбы 122-мм гаубицы Д-30. ТС № 145. 4-е изд.* – М.: Воениздат, 1984. – 224 с.
20. *Таблицы стрельбы по наземным целям из стрелкового оружия калибров 5,45 и 7,62 мм. 2-е изд., доп.* – М.: Воениздат, 1977. – 262 с.
21. ШУМОВ В.В. *Иерархия моделей боевых действий и пограничных конфликтов* // Управление большими системами. – 2019. – Вып. 79. – С. 86–111.
22. ШУМОВ В.В. *Исследование функции победы в бою (сражении, операции)* // Проблемы управления. – 2020. – №6. – С. 19–30.
23. ШУМОВ В.В., КОРЕПАНОВ В.О. *Математические модели боевых и военных действий* // Компьютерные исследования и моделирование. – 2020. – Т. 12, №1. – С. 217–242.

24. ШУМОВ В.В., КОРЕПАНОВ В.О. *Исследование теоретико-игровых моделей боевых действий* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2021. – Т. 13, Вып. 2. – С. 80–117.
25. BONDER S. *Army operations research – historical perspectives and lessons learned* // Operation Research. – 2002. – Vol. 50, No. 1. – P. 25–34.
26. FREDLAKE C.P., WANG K. *EINSTEIN Goes to War a Primer on Ground Combat Models*. – CNA, 2008. – 72 p.
27. KRESS M. *Lanchester Models for Irregular Warfare* // Mathematics, MDPI. – 2020. – Vol. 8(5). – P. 1–14.
28. LUCAS T.W., TURKES T. *Fitting Lanchester Equations to the Battles of Kursk and Ardennes* // Naval Research Logistics. – 2004. – Vol. 51. – P. 95–116.
29. MACKAY N. *Lanchester combat models* // Department of Mathematics, University of York. – 2005. – 8 p.

BASIC COMBAT MODELS

Vsevolod Korepanov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Senior Researcher, PhD (vkorepanov @ipu.ru).

Alexander Chkhartishvili, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, Doctor of Sciences (sandro_ch@mail.ru).

Vladislav Shumov, International Research Institute for Advanced Systems, Moscow, Doctor of Sciences, Professor (v.v.shumov@yandex.ru).

Abstract: The paper presents three approaches to the description of combat operations and the modeling results: game-theoretic models of the optimal distribution of forces and means of the parties in directions and echelons (tasks) in tactical models of oncoming combat offensive and defense; expansion of the Osipov-Lanchester models of the dynamics of combat operations; simulation models of combat units. As an indicator of the effectiveness of combat operations, it is proposed to use the probability function of the victory of one of the parties, depending on their numbers and the combat superiority of one of the parties. Game-theoretic models of "offensive-defense" (oncoming combat) are solved in two stages. At the first stage, according to one of the three criteria (breakthrough of the weakest point, breakthrough of at least one point, weighted average probability of a breakthrough taking into account the value of the points), the optimal distribution of the forces and means of the parties by points (along the front) and the value of the game are found. At the second stage,

according to two criteria, the optimal distribution of forces and means between tactical tasks (echelons) is found under the assumption that when solving the immediate task, the parties are guided by the criterion of breaking through the weakest point of defense. The formulation of the masking problem using the approach of reflexive games is also given. The last section proposes a discrete-time algorithm for simulating units combat. It is proposed to take into account the characteristics of the battlefield, the dynamics of the position of combat units of the parties, the types of units (which determine the average speed of units, the range of detection and effective defeat), UAVs, the angle of fire, the effect of camouflage. To test the proposed algorithm, a simulation model of an oncoming battle was built, with the help of which the dependencies of the victory of one side on the decisiveness parameter were obtained. The perspectives of the approaches are discussed.

Keywords: combat operations, offensive-defense models, distribution of forces and resources, game theory, dynamics of combat operations, simulation model, victory function, units combat, camouflage, reflexive games.

УДК 519.8

ББК 22.18

DOI: 10.25728/ubs.2023.103.2

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Д.А. Новиковым.*

*Поступила в редакцию 08.09.2022.
Опубликована 31.05.2023.*

МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ И ОБОБЩЁННАЯ H_2 -НОРМА ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ДЕСКРИПТОРНОЙ СИСТЕМЫ¹

Бубнова Е. С.²

(Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород)

Рассматривается линейная дискретная дескрипторная система, не обладающая свойством причинности, на конечном горизонте при допустимых начальных условиях и возмущении ограниченной энергии, т.е. ограниченной l_2 -нормы. Вводится понятие обобщённой H_2 -нормы как нормы линейного оператора, порождённого этой системой. Приводится метод вычисления обобщённой H_2 -нормы с помощью решения разностных проекционных уравнений Ляпунова. Показано, что если сумма квадратичных форм начального и конечного состояний и суммы квадратичных форм возмущения на конечном интервале времени ограничена сверху заданной величиной, то множеством достижимости данной системы является изменяющийся во времени эллипсоид, матрица которого удовлетворяет разностному проекционному уравнению Ляпунова. Установлено, что обобщённая H_2 -норма системы при ненулевых начальных условиях совпадает с величиной максимальной на заданном интервале времени полуоси эллипсоидального множества достижимости для данного выхода системы. В качестве иллюстрации полученных результатов приводится пример дескрипторной системы четвёртого порядка, для которой вычислена обобщённая H_2 -норма и построены множества достижимости. Приводятся графики результатов численного моделирования и проекций множеств достижимости на плоскости, соответствующие прямой и обратной подсистемам.

Ключевые слова: дескрипторная система, обобщённая H_2 -норма, множество достижимости, проекционное уравнение Ляпунова.

1. Введение

Дескрипторные системы позволяют составлять математические модели широкого класса систем, в том числе физических систем с нединамическими ограничениями или скачкообразным поведением [6, 11, 17]. При отсутствии сингулярности дескрип-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект FSWR-2023-0034) и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

² Елена Сергеевна Бубнова, аспирант (bubnova@itmm.unn.ru).

торные системы включают в себя обыкновенные системы, описываемые только дифференциальными или только разностными уравнениями. Для многих фундаментальных понятий и результатов из теории обыкновенных систем получены обобщения на дескрипторные системы: исследование управляемости и наблюдаемости [6, 11], устойчивость и стабилизация [15], теоремы и уравнения Ляпунова [6, 17], \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ управление [13, 14, 18], робастное управление [9, 21], анизотропное управление [5, 8].

Одним из важных показателей качества функционирования объекта управления является мера его реакции на внешнее воздействие и ненулевые начальные условия. Если под реакцией объекта понимаются максимальные значения целевых переменных, то такой мерой является обобщённая \mathcal{H}_2 -норма. Понятие обобщённой \mathcal{H}_2 -нормы, отвечающее максимальному уклонению при внешнем возмущении ограниченной энергии и нулевых начальных условиях, было введено в [19]. Вычисление обобщённой \mathcal{H}_2 -нормы для линейной непрерывной нестационарной системы на конечном горизонте при ненулевых начальных условиях показано в [2], для дискретной системы – в [1]. Обобщённая \mathcal{H}_2 -норма линейной дескрипторной системы непрерывного времени на бесконечном горизонте при нулевых начальных условиях вычислена в [7].

Для непрерывных и дискретных линейных нестационарных систем в [3, 4] продемонстрирована связь обобщённой \mathcal{H}_2 -нормы с множествами достижимости системы при совместном ограничении на начальное состояние и внешнее возмущение. Показано, что множествами достижимости системы являются эллипсоиды, в том числе вырожденные в случае вырожденных квадратичных форм в совместном ограничении на начальное состояние и возмущение. Установлено, что величина максимальной на заданном интервале времени полуоси эллипсоидального множества достижимости для данного выхода системы совпадает с обобщённой \mathcal{H}_2 -нормой системы при ненулевых начальных условиях. Эллипсоидальные оценки множеств достижимости дескрипторных систем с ограниченными по ∞ -норме входными возмущениями

получены в [12] для безымпульсных систем непрерывного времени с нулевыми начальными условиями и в [10, 16, 20] для систем дискретного времени, обладающих свойством причинности.

В данной работе понятие обобщённой \mathcal{H}_2 -нормы распространяется на линейные дискретные дескрипторные системы, в том числе не обладающие свойством причинности. Приводится способ вычисления обобщённой \mathcal{H}_2 -нормы таких систем с использованием обобщённых проекционных уравнений Ляпунова. Так как текущее состояние систем, не обладающих свойством причинности, зависит не только от предыдущих моментов времени, но и от последующих, определение обобщённой \mathcal{H}_2 -нормы из [1] не может быть использовано. Для систем, обладающих свойством причинности, введённая обобщённая \mathcal{H}_2 -норма совпадает с обобщённой \mathcal{H}_2 -нормой прямой подсистемы. Показано, что множествами достижимости таких систем являются эллипсоиды, матрицы которых удовлетворяют обобщённому проекционному уравнению Ляпунова. Полученные результаты продемонстрированы на примере.

2. Предварительные сведения

Рассмотрим линейную дискретную дескрипторную систему, определённую на конечном горизонте и описываемую уравнениями

$$(1) \quad \begin{aligned} Ex_{k+1} &= Ax_k + Bv_k, \\ z_k &= Cx_k, \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние объекта, $v = \{v_k\} \in l_2([0, L-1], \mathbb{R}^{n_v})$ – внешнее возмущение, $z_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ – целевой выход, $E \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_v}$, $C \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ – стационарные матрицы, $\text{rank}(E) < n_x$. Будем считать, что матричный пучок $(\lambda E - A)$ является регулярным, т.е. существует постоянная $\alpha \in \mathbb{C}$, для которой $\det(\alpha E - A) \neq 0$. В этом случае его можно представить в канонической форме Вейерштрасса [6, 17], что означает существование невырожденных матриц W и T таких, что:

$$E = W \begin{bmatrix} I_{n_f} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} T, \quad A = W \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n_\infty} \end{bmatrix} T,$$

здесь I_m – единичная матрица порядка m , J и N – жордановы матрицы, N – нильпотентная матрица индекса ν , т.е. $N^\nu = 0$, а $N^s \neq 0$, $s = 1, \dots, \nu - 1$, n_f и n_∞ – размерности подпространств, являющихся линейными оболочками собственных векторов, отвечающих конечным и бесконечным собственным числам соответственно. Представим матрицы B и C системы (1) следующим образом:

$$(2) \quad B = W \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \quad C_2] T,$$

где разбиение на блоки соответствует разбиению матриц E и A , и сделаем замену переменных $\xi = Tx$, $\xi = \text{column}(\xi_1, \xi_2)$, тогда после домножения слева на матрицу W^{-1} получим декомпозицию системы (1):

$$(3) \quad \begin{aligned} \xi_{1,k+1} &= J\xi_{1,k} + B_1 v_k, \\ N\xi_{2,k+1} &= \xi_{2,k} + B_2 v_k, \\ z &= C_1 \xi_{1,k} + C_2 \xi_{2,k}. \end{aligned}$$

Система (3) имеет единственное решение для начальных условий $\xi_{1,0}$, конечных условий $\xi_{2,L}$ и внешнего возмущения $\{v_k\}$:

$$(4) \quad \begin{aligned} \xi_{1,k} &= J^k \xi_{1,0} + \sum_{j=0}^{k-1} J^{k-j-1} B_1 v_j, \\ \xi_{2,k} &= N^{L-k} \xi_{2,L} - \sum_{j=0}^{L-k-1} N^j B_2 v_{k+j}. \end{aligned}$$

Отметим, что в системе допускается нарушение свойства причинности – текущее состояние системы может зависеть от будущих значений входного сигнала и конечного состояния ξ_L . Будем считать, что начальные условия x_0 системы (1) являются допустимыми, т.е. принадлежат следующему множеству:

$$(5) \quad \chi_0 = \left\{ T^{-1} \begin{bmatrix} \xi_{1,0} \\ N^L \xi_{2,L} - \sum_{j=0}^{L-1} N^j B_2 v_j \end{bmatrix} : \begin{array}{l} \xi_{1,0} \in \mathbb{R}^{n_f} \\ \xi_{2,L} \in \mathbb{R}^{n_\infty} \end{array} \right\},$$

тогда решение может быть записано в виде

$$(6) \quad x_k = F_k E x_0 + F_{k-L-1} A x_L + \sum_{j=0}^{L-1} F_{k-j-1} B v_j,$$

где

$$F_k = \begin{cases} T^{-1} \begin{bmatrix} J^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W^{-1}, & k = 0, 1, 2, \dots, \\ T^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -N^{-k-1} \end{bmatrix} W^{-1}, & k = -1, -2, \dots \end{cases}$$

Для дальнейшего изложения нам также потребуются левый P_l и правый P_r проекторы на подпространство матричного пучка $(\lambda E - A)$, соответствующее конечным собственным значениям:

$$P_l = W \begin{bmatrix} I_{n_f} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W^{-1}, \quad P_r = T^{-1} \begin{bmatrix} I_{n_f} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T.$$

3. Обобщённая \mathcal{H}_2 -норма

Система (1) порождает линейный оператор S , отображающий последовательность возмущений $v = \{v_k\}$ и проекции граничных состояний x_0, x_L в последовательность целевых выходов $z = \{z_k\}$. Введём в рассмотрение l_2 -норму внешнего возмущения и l_∞ -норму целевого выхода:

$$\|v\|_{l_2} = \left(\sum_{k=0}^{L-1} |v_k|^2 \right)^{1/2}, \quad \|z\|_{l_\infty} = \sup_{k=0, \dots, L} |z_k|.$$

Определим обобщённую \mathcal{H}_2 -норму системы (1) как норму линейного оператора S соотношением

$$(7) \quad \|S\|_{\infty/2}^2 = \sup_{(x_0, x_L, v) \neq 0} \frac{\|z\|_{l_\infty}^2}{\|v\|_{l_2}^2 + x_0^\top R_0 x_0 + x_L^\top R_L x_L},$$

где R_0 и R_L – весовые матрицы, отражающие относительную важность учёта неопределённостей граничных условий и внешнего возмущения. Будем полагать, что данные матрицы удовлетворяют условиям

$$R_0 = P_r^\top R_0 P_r = R_0^\top \succcurlyeq 0, \quad \text{rank } R_0 = n_f,$$

$$R_L = (I - P_r)^\top R_L (I - P_r) = R_L^\top \succcurlyeq 0, \quad \text{rank } R_L = n_\infty,$$

что позволяет учитывать неопределенность проекций начального и конечного состояний на подпространства, отвечающие конечным и бесконечным собственным значениям соответственно.

Теорема 1. *Обобщённая \mathcal{H}_2 -норма линейной дескрипторной стационарной системы (1) на конечном горизонте может быть вычислена как*

$$(8) \quad \gamma = \sup_{k=0,\dots,L} \lambda_{\max}^{1/2}(CY_kC^\top),$$

где $Y_k = Y_k^\top \succcurlyeq 0$ – решение проекционного дискретного уравнения Ляпунова

(9)

$$EY_{k+1}E^\top = AY_kA^\top + P_lBB^\top P_l^\top - (I - P_l)BB^\top(I - P_l)^\top,$$

$$P_rY = YP_r^\top$$

с граничными условиями

$$(10) \quad R_0Y_0R_0 = R_0, \quad R_LY_LR_L = R_L.$$

Доказательство. Обобщённая \mathcal{H}_2 -норма системы (1) в каноническом представлении Вейерштрасса принимает вид:

$$(11) \quad \|S\|_{\infty/2}^2 = \sup_{(\xi_{1,0}, \xi_{2,L}, v) \neq 0} \frac{\sup_{k=0,\dots,L} |z_k|^2}{\|v\|_{l_2}^2 + \xi_{1,0}^\top R_{11} \xi_{1,0} + \xi_{2,L}^\top R_{22} \xi_{2,L}},$$

где $T^{-\top}R_0T^{-1} = \text{diag}(R_{11}, 0)$, $T^{-\top}R_LT^{-1} = \text{diag}(0, R_{22})$.

Построим вспомогательные векторы целевого выхода $\hat{z} = \text{column}(z_0, z_1, \dots, z_L)$ и входа $\hat{v} = \text{column}(R_{11}^{1/2}\xi_{1,0}, v_0, \dots, v_{L-1}, R_{22}^{1/2}\xi_{2,L})$ системы (3). В этом случае оператор $S : \hat{v} \mapsto \hat{z}$ задаётся следующей матрицей:

$$(12) \quad \begin{bmatrix} C_1R_{11}^{-1/2} & -C_2B_2 & -C_2NB_2 & \dots & C_2N^L R_{22}^{-1/2} \\ C_1JR_{11}^{-1/2} & C_1B_1 & -C_2B_2 & \dots & C_2N^{L-1} R_{22}^{-1/2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1J^L R_{11}^{-1/2} & C_1J^{L-1}B_1 & C_1J^{L-2}B_1 & \dots & C_2R_{22}^{-1/2} \end{bmatrix}.$$

Обобщённая \mathcal{H}_2 -норма может быть вычислена с помощью двойственного оператора S^* следующим образом:

$$(13) \quad \|S\|_{\infty/2} = \|S^*\|_{2/1} = \|S^\top\|_{2/1} = \lambda_{\max}^{1/2}(SS^\top),$$

здесь через $\lambda_{\max}(M)$ обозначено обобщённое максимальное собственное число некоторой квадратной матрицы M ,

т.е. $\lambda_{gmax}(M) = \max_i \lambda_{max}(M_{i,i})$, где $M_{i,i} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ – i -й диагональный блок матрицы M при разбиении на блоки размерности $n_z \times n_z$.

Диагональный блок матрицы SS^\top можно представить в виде
(14) $(SS^\top)_{k,k} = C_1 X_k^1 C_1^\top + C_2 X_k^2 C_2^\top, \quad k = 0, \dots, L$,
где матрицы X_k^1 и X_k^2 удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$(15) \quad \begin{aligned} X_0^1 &= R_{11}^{-1}, & X_k^1 &= J X_{k-1}^1 J^\top + B_1 B_1^\top, & k &= 1, \dots, L, \\ X_N^2 &= R_{22}^{-1}, & X_{k-1}^2 &= N X_k^2 N^\top + B_2 B_2^\top, & k &= 1, \dots, L. \end{aligned}$$

Положим

$$(16) \quad Y_k = T^{-1} \begin{bmatrix} X_k^1 & 0 \\ 0 & X_k^2 \end{bmatrix} T^{-\top},$$

тогда уравнения (15) после перехода к исходным матрицам примут вид (9), (10).

Замечание 1. Если в системе (1) выполняется свойство причинности по отношению к целевому выходу и внешнему возмущению, т.е. $C_2 N^k B_2 = 0$, $k \geq 0$, обобщённая \mathcal{H}_2 -норма может быть вычислена как (8), где $Y_k = Y_k^\top \succcurlyeq 0$ – решение проекционного дискретного уравнения Ляпунова

$$(17) \quad E Y_{k+1} E^\top = A Y_k A^\top + P_l B B^\top P_l^\top, \quad Y = P_r Y$$

с начальными условиями, удовлетворяющими уравнению $R_0 Y_0 R_0 = R_0$.

Замечание 2. Предположим, что начальные условия системы (1) не являются допустимыми, тогда в функционале (7) можно учесть невязку начальных условий целевого выхода

$$z_{-1} = C_2 \left(\xi_{2,0} - N^L \xi_{2,L} + \sum_{j=0}^{L-1} N^j B_2 v_j \right)$$

и определить обобщённую \mathcal{H}_2 -норму системы (1) как

$$(18) \quad \|S\|_{\infty/2}^2 = \sup_{(x_0, x_L, v) \neq 0} \frac{\sup_{k=-1, \dots, L} |z_k|^2}{\|v\|_{l_2}^2 + x_0^\top R_0 x_0 + x_L^\top R_L x_L}.$$

Данный функционал может быть вычислен по формуле

$$\gamma = \sup_{k=-1, \dots, L} \lambda_{\max}^{1/2}(CY_k C^\top),$$

где $Y_{-1} = T^{-1} \operatorname{diag}(0, X_{-1}^2) T^{-\top}$, здесь X_{-1}^2 определяется рекуррентным соотношением (15) при $k = 0$.

Теорема 2. *Предположим, что обобщённая \mathcal{H}_2 -норма линейной дескрипторной системы (1) равна γ^* и достигается в момент времени $k = k^*$, тогда наихудшие граничные условия и внешние возмущения определяются соотношениями:*

$$(19) \quad \begin{aligned} [I_{n_f} & \quad 0] Tx_0 &= \frac{1}{\gamma^*} R_{11}^{-1} (J^\top)^{k^*} C_1^\top e^*, \\ [0 & \quad I_{n_\infty}] Tx_L &= \frac{1}{\gamma^*} R_{22}^{-1} (N^\top)^{L-k^*} C_2^\top e^*, \\ v_k &= \frac{1}{\gamma^*} B^\top F_{k^*-k-1}^\top C^\top e^*, \end{aligned}$$

где $k = 0, \dots, L-1$, $e^* = e_{\max}(CY_{k^*} C^\top)$ – нормированный собственный вектор матрицы, соответствующий максимальному собственному числу.

Доказательство. Для получения выражения (19) предположим, что значение обобщённой \mathcal{H}_2 -нормы равно γ^* и достигается в момент времени $k = k^*$. В этом случае элемент, на котором достигается значение нормы, может быть выбран как

$$\hat{z}^* = \operatorname{column}(0, \dots, 0, z_{k^*}, 0, \dots, 0), \quad z_{k^*} = e_{\max}(CY_{k^*} C^\top).$$

Тогда справедливы следующие вычисления:

$$\|\hat{z}^*\|_{(1,2)} = |e^*| = 1, \quad \|S^* \hat{z}^*\|_{(2,2)} = e^{*\top} (CY_{k^*} C^\top) e^* = \gamma^*.$$

Наихудшие граничные условия и внешнее возмущение определяются как $\hat{v}^* = S^* \hat{z}^*$. Нормируя вектор \hat{v}^* , приходим к выражению (19).

4. Эллипсоидальные множества достижимости

Предположим, что начальное состояние x_0 , конечное состояние x_L и возмущение $v = \{v_k\}$, $k = 0, \dots, L-1$, системы (1) принадлежат множеству допустимых граничных условий и возмущений, определяемому следующим образом:

$$(20) \quad \mathcal{S}_k(Q_0, Q_L, G) = \left\{ (x_0, x_L, v) : x_0 = Q_0^{1/2} \eta, \quad x_L = Q_L^{1/2} \zeta, \right. \\ \left. v_s = G_s^{1/2} \omega_s, \quad |\eta|^2 + |\zeta|^2 + \sum_{s=0}^{L-1} |\omega_s|^2 \leq 1 \right\}$$

для заданных весовых матриц $Q_0 = Q_0^\top \succ 0$, $Q_L = Q_L^\top \succ 0$, $G = \{G_s = G_s^\top \succ 0\}_{s=0}^{L-1}$, удовлетворяющих условиям

$$Q_0 = P_r Q_0 P_r^\top, \quad Q_L = (I - P_r) Q_L (I - P_r)^\top.$$

Поставим задачу описать множество состояний, в которых система может оказаться в произвольный промежуточный момент времени k при всевозможных граничных состояниях и возмущениях, принадлежащих множеству $\mathcal{S}_k(Q_0, Q_L, G)$.

Введём в рассмотрение множество

$$\mathcal{E}(Q) = \{x = Q^{1/2} \varkappa \quad \forall \varkappa \in \mathbb{R}^n : |\varkappa| \leq 1\},$$

которое описывает эллипсоид в пространстве \mathbb{R}^n . Заметим, что если $Q \succ 0$, то данное множество можно переписать в виде стандартного уравнения эллипса $\mathcal{E}(Q) = \{x : x^\top Q^{-1} x \leq 1\}$. Если $Q \succcurlyeq 0$, то $\mathcal{E}(Q)$ – вырожденный эллипсоид, размерность которого совпадает с рангом матрицы Q .

Множеством достижимости $\mathcal{D}_k(Q_0, Q_L, G)$ системы (1) в момент времени k будем называть множество всевозможных состояний системы в момент времени k при всех допустимых граничных условиях x_0 , x_L и возмущениях v_s , $s = 0, \dots, L-1$, принадлежащих множеству $\mathcal{S}_k(Q_0, Q_L, G)$.

Теорема 3. *Множеством достижимости системы (1) в момент времени $k \geq 0$ при всех допустимых начальных состояниях и возмущениях, принадлежащих множеству $\mathcal{S}_k(Q_0, Q_L, G)$,*

$k = 0, \dots, L$, является эллипсоид

$$(21) \quad \mathcal{D}_k(Q_0, Q_L, G) = \mathcal{E}(Y_k),$$

матрица Y_k которого является решением проекционного дискретного уравнения Ляпунова

$$(22) \quad \begin{aligned} EY_{k+1}E^\top &= AY_kA^\top + P_l\hat{G}_kP_l^\top - (I - P_l)\hat{G}_k(I - P_l)^\top, \\ P_rY_k &= Y_kP_r^\top, \end{aligned}$$

$\hat{G}_k = BG_kB^\top$, с граничными условиями

$$(23) \quad P_rY_0P_r^\top = Q_0, \quad (I - P_r)Y_L(I - P_r)^\top = Q_L.$$

Доказательство. С учетом (20) запишем (6) в виде

$$(24) \quad x_k = S_k g_k, \quad g_k^\top g_k \leq 1,$$

где

$$(25) \quad S_k = \begin{bmatrix} F_k E Q_0^{\frac{1}{2}} & F_{k-1} B G_0^{\frac{1}{2}} & \cdots & F_{k-L} B G_{L-1}^{\frac{1}{2}} & F_{k-L-1} A Q_L^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что следующие два множества равны [4]:

$$(26) \quad \begin{aligned} \{x = S_k g \quad \forall g \in \mathbb{R}^{2n_x + Ln_v} : |g| \leq 1\} &= \\ &= \{x = (S_k S_k^\top)^{1/2} w \quad \forall w \in \mathbb{R}^{n_x} : |w| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Поэтому для нахождения множества достижимости вычислим матрицу соответствующего эллипсоида $S_k S_k^\top$:

$$(27) \quad \begin{aligned} S_k S_k^\top &= F_k E Q_0 E^\top F_k^\top + F_{k-L-1} A Q_L A^\top F_{k-L-1}^\top + \\ &+ \sum_{j=0}^{L-1} F_{k-j-1} B G_j B^\top F_{k-j-1}^\top. \end{aligned}$$

Заметим, что $S_k S_k^\top = Y_k \succcurlyeq 0$, где Y_k – решение уравнений (22) с граничными условиями (23), что и завершает доказательство теоремы.

Далее рассмотрим множество всевозможных выходов z_k системы (1) в момент времени k . Если $x_k \in \mathcal{E}(Y_k)$, тогда

$$(28) \quad z_k \in \{z = (CY_k C^\top)^{1/2} \varkappa \quad \forall \varkappa \in \mathbb{R}^{n_z} : |\varkappa| \leq 1\}.$$

Таким образом, множество возможных выходов системы образует эллипсоид $\mathcal{E}(CY_k C^\top)$, а максимальное значение евклидовой нормы выхода совпадает с величиной максимальной полуоси этого эллипсоида:

$$\max_{(x_0, x_L, v) \in \mathcal{S}_k(Q_0, Q_L, G)} |z_k| = \lambda_{\max}^{1/2}(CY_k C^\top).$$

Если $Q_0 R_0 = P_r$, $Q_L R_L = (I - P_r)$, $G_s = I$, $s = 0, \dots, L-1$, то максимальное значение этой величины на заданном отрезке времени $[0, L]$ совпадает с обобщённой \mathcal{H}_2 -нормой системы (1) при ненулевых граничных условиях.

5. Результаты численного моделирования

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим линейную дескрипторную систему (1), матрицы которой имеют вид

$$(29) \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0,75 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B^\top = [0 \ 1 \ 1 \ -1], \quad C = [0 \ 1 \ 1 \ 0].$$

Для численного моделирования выберем отрезок $[0, 100]$ и весовые матрицы

$$R_0 = \text{diag}(R_{11}, 0), \quad R_{11} = \begin{bmatrix} 5,112 & -4,888 \\ -4,888 & 5,112 \end{bmatrix}.$$

$$R_L = \text{diag}(0, I_2),$$

В результате решения уравнений (9), (10) получено значение обобщённой \mathcal{H}_2 -нормы системы $\gamma^* = 2,07$, которое достигается в момент времени $k^* = 48$. На рис. 1 представлен график зависимости от времени целевого выхода z_k системы (29), отвечающего наихудшим граничным условиям и внешнему возмущению (19). Из представленного графика видно, что целевой выход достигает значения обобщённой \mathcal{H}_2 -нормы в момент времени $k = 48$ и не превосходит его на всём отрезке времени.

Для данной системы построим множества достижимости при выбранных параметрах $Q_0 = \text{diag}(R_{11}^{-1}, 0)$, $Q_L = \text{diag}(0, I_2)$, $G_k = 1$, $k = 0, \dots, 99$. В результате решения уравнений (22), (23) получены эллипсоидальные множества (21). На рис. 2 представлены проекции множеств достижимости на плоскости (x_1, x_2) и (x_3, x_4) в моменты времени $k = 0$, $k = 3$, $k = 100$. Отметим, что рассматриваемая система записана в канонической форме Вейерштрасса, поэтому начиная с некоторого момента времени проекция множества достижимости на плоскость (x_1, x_2) перестает

изменяться, так как влияние начальных условий становится несущественным. Проекция множества достижимости на плоскость (x_3, x_4) , напротив, стационарна в начале и меняется в конце временного отрезка из-за влияния проекции граничного условия x_L .

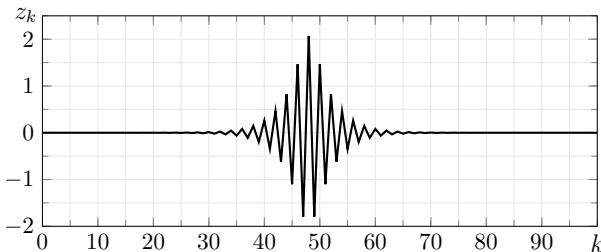


Рис. 1. График зависимости от времени целевого выхода z_k при наихудших граничных условиях и внешнем возмущении

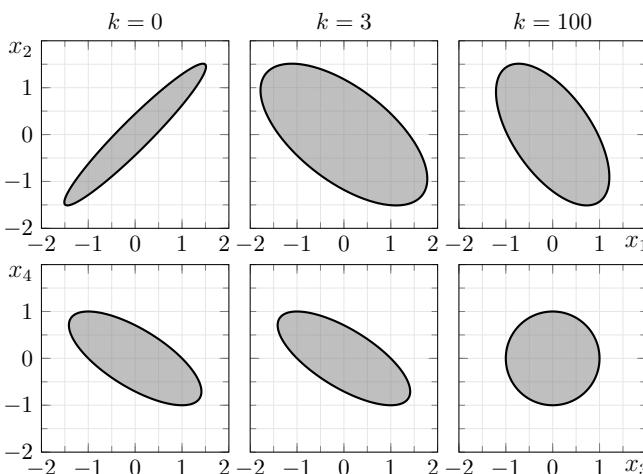


Рис. 2. Проекции множеств достижимости на плоскости (x_1, x_2) , (x_3, x_4) в моменты времени $k = 0$, $k = 3$, $k = 100$

6. Заключение

Для линейных дискретных дескрипторных систем на конечном промежутке времени вводится понятие обобщённой \mathcal{H}_2 -нормы и приводится алгоритм её вычисления, основанный на решении разностного проекционного уравнения Ляпунова. Показано, что множествами достижимости таких систем при совместном ограничении на начальные и конечные условия и внешнее возмущение являются эллипсоиды, матрицы которых могут быть получены при решении разностного проекционного уравнения Ляпунова. Проиллюстрировано, что величина максимальной на заданном интервале времени полуоси эллипсоидального множества достижимости для данного выхода системы совпадает с обобщённой \mathcal{H}_2 -нормой системы. Возможность использования полученных результатов подтверждается с помощью численного моделирования.

Литература

1. БАЛАНДИН Д.В., БИРЮКОВ Р.С., КОГАН М.М. *Минимаксное управление уклонениями выходов линейной дискретной нестационарной системы* // Автоматика и телемеханика – 2019. – №12. – С. 3–23.
2. БАЛАНДИН Д.В., БИРЮКОВ Р.С., КОГАН М.М. *Оптимальное управление максимальными уклонениями выходов линейной нестационарной системы* // Автоматика и телемеханика. – 2019. – №10. – С. 37–61.
3. БАЛАНДИН Д.В., БИРЮКОВ Р.С., КОГАН М.М. *Эллипсоидальные множества достижимости линейных нестационарных систем в задачах управления и оценивания* // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, №11. – С. 1485–1498.
4. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Управление и оценивание в линейных нестационарных системах на основе эллипсоидальных множеств достижимости* // Автоматика и телемеханика. – 2020. – №8. – С. 8–28.

5. БЕЛОВ А.А., АНДРИАНОВА О.Г. Синтез субоптимальных анизотропийных регуляторов по состоянию для дескрипторных систем на основе линейных матричных неравенств // Автоматика и телемеханика. – 2016. – №10. – С. 40–56.
6. БЕЛОВ А.А., КУРДЮКОВ А.П. Дескрипторные системы и задачи управления. – М.: Физматлит, 2015. – 270 с.
7. БУБНОВА Е.С., БИРЮКОВ Р.С. Обобщённая H_2 -норма дескрипторных систем // Тезисы научной конференции «Летняя школа робототехники в Сириусе–2022». – С. 11–12.
8. ANDRIANOVA O.G., BELOV A.A. Robust Anisotropy-Based Control for Uncertain Descriptor Systems with Transient Response Constraints // IFAC-PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, No. 32. – P. 515–520.
9. BELOV A.A., ANDRIANOVA O.G. Robust state-feedback H_∞ control for discrete-time descriptor systems with norm-bounded parametric uncertainties // Int. Journal of Systems Science. – 2019. – Vol. 50, No. 6. – P. 1303–1312.
10. CAO Y., FENG Z., LIU Y. Real-time Reachable Set Estimation of Discrete-time Singular Systems // Int. Conf. on Information, Cybernetics, and Computational Social Systems. – 2021. – P. 127–130.
11. DUAN G. Analysis and Design of Descriptor Linear Systems. – Springer, 2010.
12. FENG Z., LAM. J. On reachable set estimation of singular systems // Automatica. – 2015. – Vol. 52. – P. 146–153.
13. FENG Y., YAGOUBI M. On State Feedback H_∞ Control for Discrete-Time Singular Systems // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2013. – Vol. 58, No. 10. – P. 2674–2679.
14. ISHIHARA J.Y., TERRA M.H., SALES R.M. The full information and state feedback H_2 optimal controllers for descriptor systems // Automatica – 2003. – Vol. 39. – P. 391–402.

15. LEE L., CHEN J.L. *Strictly positive real lemma and absolute stability for discrete-time descriptor systems* // IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. – 2003. – Vol. 50, No. 6. – P. 788–794.
16. LI J., FENG Z., ZHANG C. *Reachable Set Estimation for Discrete-Time Singular Systems* // Asian Journal of Control. – 2017. – Vol. 19. – P. 1862–1870.
17. STYKEL T. *Analysis and numerical solution of generalized Lyapunov equations*: Ph.D. thesis, Institut fur Mathematik, Techische Universitat Berlin. – Berlin, 2002.
18. STYKEL T. *On some norms for descriptor systems* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2006. – Vol. 51, No. 5. – P. 842–847.
19. WILSON D.A. *Convolution and Hankel Operator Norms for Linear Systems* // IEEE Trans. Autom. Control. – 1989. – Vol. 34. – P. 94–97.
20. ZHANG Z., FENG Z. *Enclosing ellipsoid-based reachable set estimation for discrete-time singular systems* // Int. Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2022. – Vol. 32. – P. 9294–9306.
21. ZHAO Y., LIU Y., MA Y. *Robust finite-time sliding mode control for discrete-time singular system with time-varying delays* // Journal of the Franklin Institute. – 2021. – Vol. 358. – P. 4848–4863.

REACHABILITY SETS AND THE GENERALIZED H_2 -NORM OF A LINEAR DISCRETE DESCRIPTOR SYSTEM

Elena Bubnova, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, post-graduate student (bubnova@itmm.unn.ru).

Abstract: The paper focuses on a linear discrete noncausal descriptor system on a finite horizon under consistent initial conditions and bounded external disturbances, i.e. a bounded l_2 norm. The notion of the generalized H_2 -norm for a linear discrete descriptor system is introduced as the induced norm of the linear operator generated by the system under consideration. This norm is characterized in terms of difference projected generalized Lyapunov equation solutions. It is demonstrated that if the sum of the quadratic forms of the initial and final states and the sum of the quadratic forms of the disturbance over a finite time interval is bounded by a given value from above, the reachability set of this system is a time-varying ellipsoid whose matrix satisfies the difference projected generalized Lyapunov equation. It is established that the generalized H_2 -norm of the system under non-zero initial conditions coincides with the value of the maximum half-axis of the reachability ellipsoidal set for a given output of the system. An example of a fourth-order descriptor system is provided as an illustration of the results. For this system a generalized H_2 -norm is calculated and reachability sets are constructed. The paper demonstrates the results of numerical simulations and projections of reachability sets on the plane corresponding to the forward and backward subsystems.

Keywords: descriptor system, generalized H_2 -norm, reachability set, projected Lyapunov equation.

УДК 519.7

ББК 22.18

DOI: 10.25728/ubs.2023.103.3

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.*

Поступила в редакцию 21.02.2023.

Дата опубликования 31.05.2023.

О ПРИМЕНЕНИИ ФИЛЬТРА КАЛМАНА В ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ ПРИ СЛАБО ОКРАШЕННЫХ ВХОДНЫХ ШУМАХ¹

Белов И. Р.², Кустов А. Ю.³

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва)

Рассматриваются задачи асимптотического представления анизотропийной нормы ЛДСС и приближенного вычисления матриц оценивателя при малых значениях средней анизотропии. Также представлено решение задачи определения предельного порога средней анизотропии внешнего возмущения, при котором фильтр Калмана с заданной точностью аппроксимирует анизотропийный оцениватель. Приведен численный пример решения задачи определения максимального порога средней анизотропии входного возмущения для линейной дискретной стационарной системы.

Ключевые слова: анизотропийная теория, задача оценивания, линейные дискретные стационарные системы, фильтр Калмана, H_2 -оптимизация.

1. Введение

Хорошо известно [8, 13, 18], что для эффективного управления объектом крайне важно обладать максимально полной информацией о его состоянии, которую исследователь может получить с установленных на объект датчиков. Однако получение полной и точной информации об их состояниях на основании измерений с датчиков представляется крайне трудоемкой задачей. В такой ситуации остается синтезировать закон управления исключительно на основе неполных данных, которые могут быть сильно зашумлены в силу технических особенностей имеющихся датчиков и процессов, протекающих в самих системах. Отсюда возникает круг задач оценивания, заключающихся в построении

¹ Авторы статьи благодарят И.Г. Владимирова за предоставление неоценимой помощи в выводе данного результата для оптимального случая, который описан в разделе 3.1 данной статьи, и В.Н. Тимина за обсуждение на начальном этапе исследования.

² Иван Романович Белов, к.ф.-м.н., с.н.с. (ivanb1993@mail.ru).

³ Аркадий Юрьевич Кустов, к.ф.-м.н., с.н.с. (arkadiykustov@yandex.ru).

оценки состояния или другой интересующей величины, характеризующей рассматриваемую систему. В задачах оптимального оценивания ищется оценка, доставляющая супремум/инфимум функционалу качества, а в задачах субоптимального оценивания для искомой оценки должно быть выполнено условие ограниченности критерия качества некоторым заданным числом.

Довольно часто в прикладных задачах случайные входные возмущения, действующие на систему, будь то шумы в датчиках, турбулентные порывы ветра или др., являются статистически неопределенными [2]. Поэтому при решении многих задач оценивания математическая модель случайных возмущений вводится с использованием той или иной неопределенности, что на уровне математической абстракции позволяет природе генерировать наихудшие возмущения из рассматриваемого класса.

Двумя известными методами решения задач оценивания являются методы \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -теорий [3, 6, 17]. В самом простом случае LQG/ \mathcal{H}_2 -оптимальный фильтр, или фильтр Калмана, если известна статистика сигнала на входе, используется при допущении, что входное возмущение системы является стандартным гауссовским белым шумом. Подобный фильтр обеспечивает минимальное значение следа ковариационной матрицы ошибки оценивания состояния системы. Однако, как известно, фильтр Калмана не является эффективным (т.е. существует более оптимальный оценщик), если указанные допущения не выполняются – к примеру, если входное возмущение не является белым шумом с заранее известной статистикой. Часто, если статистические свойства шумов не известны, используется \mathcal{H}_∞ -фильтр. При построении \mathcal{H}_∞ -фильтра математически конструируется наихудшее внешнее возмущение, в расчете на которое и происходит оценивание, ввиду чего в реальных ситуациях данный фильтр оказывается излишне консервативным, а в некоторых случаях практической реализации – неоправданно энергозатратным. Помимо многочисленных публикаций, посвященных методам синтеза \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -фильтров, большое количество научных работ посвящено решению задач синтеза фильтров, более эффективных с точки

зрения минимизации влияния возмущений на систему, как было в случае \mathcal{H}_2 -фильтра, но менее консервативных, чем \mathcal{H}_∞ -фильтры [5, 9, 12, 14, 15, 19, 23].

В 90-е годы с целью объединения подходов к описанию внешних возмущений и соответствующих ему методов решения задач управления и фильтрации И.Г. Владимировым была разработана так называемая анизотропийная теория управления и фильтрации [16, 20, 21, 22]. Фундаментальными понятиями этой теории являются анизотропия случайного вектора, средняя анизотропия (стационарной эргодической) последовательности случайных векторов и анизотропийная норма линейной дискретной стационарной системы. В последние годы выпущено немалое количество научных работ по решению задач анализа и синтеза оценивателя методами анизотропийной теории для стохастических [4, 10, 11, 24] и сетевых систем [25, 26, 27].

В [1] представлены асимптотические представления анизотропийной нормы для линейных дискретных стационарных систем при стремлении средней анизотропии входного возмущения к нулю и бесконечности. Тем не менее полученные асимптотики не учитывают влияние на систему соответственно регуляторов или фильтров. Решение задачи анизотропийного оценивания при стремлении средней анизотропии к нулю позволяет ответить на вопросы об аналитической связи хорошо известных и широко используемых \mathcal{H}_2 -регуляторов и оценивателей с анизотропийными регуляторами и оценивателями на уровне их асимптотики.

В данной работе рассмотрена задача исследования асимптотических представлений матриц анизотропийного оценивателя при стремлении максимального порога средней анизотропии входного возмущения системы к нулю. При этом определен максимальный порог средней анизотропии, при котором оптимальный \mathcal{H}_2 -фильтр с заданной точностью аппроксимирует анизотропийный оцениватель. Актуальность данной постановки обусловлена тем, что во многих прикладных задачах [7] по причине простоты численной реализации используются методы синтеза \mathcal{H}_2 -фильтров при предположении о поступлении на вход системы

случайных возмущений с неопределенными параметрами, а также отсутствия строгих ограничений на величины отклонений моментов от известных эталонных значений. Величина найденного максимального значения средней анизотропии задает порог, начиная с которого для получения качественного результата оценивания возникает необходимость использования анизотропийного оценивателя вместо \mathcal{H}_2 -фильтра.

В первом разделе данной статьи приведены краткое описание \mathcal{H}_2 -фильтра, основные положения анизотропийной теории и формулы оптимального анизотропийного оценивателя, которые используются для решения поставленных задач. Во втором разделе изложено решение задачи определения асимптотического представления анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания для оптимального анизотропийного оценивателя. Также второй раздел посвящен решению задачи определения максимального значения средней анизотропии, при котором фильтр Калмана аппроксимирует анизотропийный оцениватель с заданной точностью. Данные результаты используются в численном примере в третьем разделе статьи.

2. Предварительные сведения

2.1. Сокращения и обозначения

В данной работе используются следующие обозначения: \mathbb{R}^n – множество n -мерных вещественных векторов; $\mathbb{R}^{n \times m}$ – множество $(n \times m)$ -мерных вещественных матриц; \mathbb{C} – множество комплексных чисел; \mathbb{L}_2^n – множество n -мерных вещественно-значных интегрируемых с квадратом случайных векторов; $\mathcal{H}_\infty^{p \times m}$ – пространство Харди $(n \times m)$ -мерных комплексно-значных матричных функций, аналитических внутри единичного круга $\mathbb{C}_\odot = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и имеющих ограниченную \mathcal{H}_∞ -норму, определенную для $F \in \mathcal{H}_\infty^{p \times m}$ как $\|F\|_\infty = \sup_{|z|<1} \bar{\sigma}(F(z))$;

$\bar{\sigma}(X) = \max \sqrt{\lambda(X^* X)}$ – максимальное сингулярное число матрицы X ; $\lambda(X)$ – собственные числа матрицы X ; $X^* = \bar{X}^\top$ – комплексное транспонирование; $\mathcal{H}_2^{p \times m}$ – пространство Харди анали-

тических для всех $z \in \mathbb{C}_\odot$ матричных функций $F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k z^k$ с вещественными матричными коэффициентами $f_k \in \mathbb{R}^{p \times m}$ и ограниченной \mathcal{H}_2 -нормой, квадрат которой определяется выражением $\|F\|_2^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \text{tr}(f_k f_k^\top)$.

2.2. Класс рассматриваемых систем

Объектом исследования являются устойчивые линейные дискретные стационарные системы F вида

$$(1) \quad x_{k+1} = Ax_k + Bw_k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $x_k \in \mathbb{L}_2^n$ – вектор состояния, $x_0 = 0$; $w_k \in \mathbb{L}_2^m$ – вектор внешнего возмущения, таким образом, $\text{cov}(w_k) < +\infty$. Интересующие исследователя комбинации состояний системы (1) содержатся в последовательности векторов оцениваемого выхода

$$(2) \quad z_k = x_k.$$

В качестве данных для составления оценки выхода системы F используют наблюдения с датчиков, установленных на объект. Эти данные представляются в виде последовательности векторов $y_k \in \mathbb{L}_2^p$ измеряемого выхода

$$(3) \quad y_k = Cx_k + Dw_k.$$

Матрицы A , B , C , D являются известными вещественными матрицами соответствующих размеров. Системе уравнений вида (1), (3) ставится в соответствие передаточная функция $T_{yw}(z) = D + C(zI_n - A)^{-1}B$, определяемая четверкой матриц

$$(4) \quad T_{yw} \sim (A, B, C, D).$$

Общая постановка задачи оценивания: необходимо построить оцениватель, заданный четверкой матриц

$$(5) \quad T_{\hat{z}y} \sim (A - KC, K, I_n - MC, M)$$

с состоянием $\hat{x}_k \in \mathbb{L}_2^n$, входом $y_k \in \mathbb{L}_2^p$ и выходом $\hat{z}_k \in \mathbb{L}_2^m$, чтобы обеспечить выполнение некоторого критерия качества, к примеру, \mathcal{H}_2 - или \mathcal{H}_∞ -нормы системы в ошибках оценивания. В (5) определению подлежат матрицы $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$ и $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Далее представлены основные сведения о двух типах оценивателей

в зависимости от критерия качества: \mathcal{H}_2 -фильтре (критерием качества является след ковариационной матрицы ошибки оценивания) и анизотропийном оценивателе (критерием качества является анизотропийная норма системы в ошибках оценивания).

2.3. \mathcal{H}_2 -оптимальное оценивание

Задача оптимального \mathcal{H}_2 -оценивания [3, 17] заключается в поиске оценивателя, доставляющего минимум \mathcal{H}_2 -норме системы в ошибках оценивания для линейной системы с входным возмущением в виде стандартного гауссовского белого шума. Пусть дана линейная дискретная стационарная система F с уравнением динамики (1), вектором измерений y_k , описываемым уравнением (3), и выходом $z_k = x_k$. Оцениватель $T_{\tilde{z}y}$ выхода z_k по измерениям выхода y_k имеет вид (5). Ошибка оценивания $\tilde{z}_k = z_k - \hat{z}_k$ является выходом системы $T_{\tilde{z}w}$ вида

$$(6) \quad T_{\tilde{z}w} \sim (A - KC, B - KD, I_n - MC, -MD).$$

Критерием оптимальности полученной оценки \hat{z}_k является \mathcal{H}_2 -норма системы $T_{\tilde{z}w}$:

$$(7) \quad \|T_{\tilde{z}w}\|_2^2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \text{tr}(\mathbf{E}[\tilde{z}_k \tilde{z}_k^\top]) \doteq \text{tr}(\mathbf{E}[\tilde{z}_\infty \tilde{z}_\infty^\top]) \doteq J(K, M).$$

Задача \mathcal{H}_2 -оптимального оценивания заключается в поиске для системы F оценивателя $T_{\tilde{z}y}$ вида (5), доставляющего минимум функционалу (7). С учетом (6) функционал (7) имеет вид [3]

$$(8) \quad J(K, M) = \text{tr}(MD(MD)^\top + (I_n - MC)\mathbf{E}[\tilde{x}_\infty \tilde{x}_\infty^\top](I_n - MC)^\top).$$

Матрица $\mathbf{E}[\tilde{x}_\infty \tilde{x}_\infty^\top]$ в (8) представляет собой ковариационную матрицу состояния на установившемся режиме. Обозначим эту матрицу через P . Уравнение для P с учетом (6) имеет вид

$$(9) \quad P = (A - KC)P(A - KC)^\top + (B - KD)(B - KD)^\top.$$

Задача минимизации (8), связанная с нахождением матриц K и M , решается в два этапа. На первом этапе определяется оптимальное значение матрицы M как функции матрицы $P = P(K)$:

$$(10) \quad M_*(K) = \arg \min_M J(K, M) = PC^\top T^{-1},$$

где

$$(11) \quad T = CPC^\top + DD^\top.$$

На втором этапе решается задача нахождения матрицы K :

$$(12) \quad K_* = \arg \min_K J(K, M_*(K)) = (APC^\top + BD^\top)T^{-1}.$$

Таким образом, решением описанной выше задачи является оптимальный \mathcal{H}_2 -оцениватель $T_{\hat{z}_y}$ вида (5) с матрицами K_* и M_* , удовлетворяющими (12) и (10), соответственно. Далее приведены основные положения анизотропийной теории управления, использующиеся в работе.

2.4. Анизотропийное оценивание

Предположим, что на вход рассматриваемой системы (1) поступает стационарная последовательность гауссовых случайных векторов $W = (w_k)_{0 < k < +\infty}$, $w_k \in \mathbb{L}_2^m$, с неизвестной точно статистикой. Для описания статистической неопределенности в распределении отдельных векторов и последовательности в целом будут использоваться понятия анизотропии случайного вектора и средней анизотропии последовательности случайных векторов, соответственно. Анизотропия случайного вектора w определяется выражением [20]

$$\mathbf{A}(w) = \min_{\lambda > 0} \mathbf{D}(f \| p_{m,\lambda}),$$

где $\mathbf{D}(f \| p_{m,\lambda})$ – относительная энтропия плотности распределения вероятности f вектора w относительно плотности нормального распределения вероятности $p_{m,\lambda}$ с нулевым математическим ожиданием и скалярной ковариационной матрицей λI_m , $\lambda > 0$.

Векторы последовательности $W = (w_k)_{0 < k < +\infty}$ могут быть представлены в виде

$$w_j = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k v_{j-k},$$

где $V = (v_k)_{0 \leq k \leq +\infty}$ – стандартный m -мерный гауссовский белый шум; $G(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k z^k \in \mathcal{H}_2^{m \times m}$ – передаточная функция так называемого формирующего фильтра. В рамках анизотропийной теории последовательность случайных векторов характеризуется ее средней анизотропией, которая определяется следующей фор-

мулой [20]:

$$\bar{A}(W) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \left(\frac{m\hat{G}(w)(\hat{G}(w))^*}{\|G\|_2^2} \right) dw,$$

где $\hat{G}(w) = \lim_{r \rightarrow 1-0} G(re^{iw})$, $i^2 = -1$. В дальнейшем для средней анизотропии наряду с $\bar{A}(W)$ также будет использоваться обозначение $\bar{A}(G)$.

Мерой отклика системы F вида (4) на входное возмущение с ограниченной средней анизотропией $\bar{A}(G) \leq a$ является анизотропийная норма системы [21]:

$$(13) \quad \|F\|_a = \sup \{ \|FG\|_2 / \|G\|_2 \mid G \in \mathbf{G}_a \},$$

где $\mathbf{G}_a = \{G \in \mathcal{H}_2^{m \times m} : \bar{A}(G) \leq a\}$. Ниже приведена формулировка леммы о вычислении анизотропийной нормы (13) для линейной дискретной стационарной системы.

Лемма 1 [21]. *Пусть дана устойчивая линейная дискретная стационарная система F вида (4), для которой выполнено условие несферичности $\|F\|_2 / \sqrt{m} < \|F\|_\infty$. Для любого $a > 0$ существует единственная пара (q, R) , состоящая из скалярного параметра $q \in (0, \|F\|_\infty^{-2})$, удовлетворяющего уравнению*

$$(14) \quad -\frac{1}{2} \ln \det \frac{m\Sigma}{\text{tr}(LPL^\top + \Sigma)} = a,$$

и неотрицательно-определенной матрицы R , являющейся решением уравнения Рикката

$$(15a) \quad R = A^\top RA + qC^\top C + L^\top \Sigma^{-1} L,$$

$$(15b) \quad \Sigma = (I_m - qD^\top D - B^\top RB)^{-1},$$

$$(15c) \quad L = \Sigma(B^\top RA + qD^\top C).$$

Анизотропийная норма системы F вычисляется как

$$(16) \quad \|F\|_a = \left(\frac{1}{q} \left(1 - \frac{m}{\text{tr}(LPL^\top + \Sigma)} \right) \right)^{1/2},$$

где неотрицательно определенная матрица P удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$(17) \quad P = (A + BL)P(A + BL)^\top + B\Sigma B^\top.$$

Матрицы Σ , L , R и P зависят от параметра q .

Формирующий фильтр вида

$$(18) \quad G \sim (A + BL, B\Sigma^{1/2}, L, \Sigma^{1/2}),$$

где матрицы L и Σ заданы уравнениями (15), называется наихудшим формирующим фильтром, и ему отвечает супремум отношения $\|FG\|_2/\|G\|_2$. Справедливость (14) гарантирует, что средняя анизотропия выхода фильтра (18) точно равна числу a .

Задача синтеза оптимального анизотропийного оценивателя заключается в нахождении неизвестных матриц K и M линейного стационарного оценивателя вида (5), минимизирующего значение анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания вида (6). Далее в работе этой системе будет соответствовать четверка матриц

$$(19) \quad (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}) = (A - KC, B - KD, I_n - MC, -MD).$$

По аналогии с представленным в [22] решением задачи оптимального оценивающего анизотропийного регулятора можно найти решение задачи синтеза оптимального анизотропийного оценивателя вида (5). Матрицы K и M оценивателя будут определяться выражениями

$$(20a) \quad K = ((A + BL)P(C + DL)^\top + B\Sigma D^\top)T^{-1},$$

$$(20b) \quad M = P(C + DL)^\top T^{-1},$$

$$(20c) \quad T = (C + DL)P(C + DL)^\top + D\Sigma D^\top,$$

где матрицы Σ , L и P удовлетворяют (14), (15), (17). Рассуждения относительно связи анизотропийного оценивателя с \mathcal{H}_2 -фильтром приведены в следующем разделе работы.

3. Левая асимптотика анизотропийной нормы

В работе [1] были получены формулы асимптотического поведения анизотропийной нормы в окрестности ее предельных значений. При $a \rightarrow 0 + 0$ эта зависимость имеет вид

$$(21) \quad \|F\|_a = \frac{\|F\|_2}{\sqrt{m}} \left(1 + \sqrt{\frac{Qa}{m}} + \bar{o}(\sqrt{a}) \right),$$

где

$$Q = \frac{m\|F\|_4^4 - \|F\|_2^4}{\|F\|_2^4}.$$

Приведенное выражение справедливо для устойчивых систем с известным представлением в пространстве состояний. В случае, когда система F представляет собой систему в ошибках оценивания, а потому сама зависит от выбранного в задаче синтеза уровня средней анизотропии, формула (21) нуждается в правке. Сформулируем основную задачу данной работы:

Задача 1. Для линейной дискретной стационарной системы вида (4) и оценивателя (5) определить асимптотические представления $K(a)$, $M(a)$, $\|F\|_a$ для системы в ошибках оценивания при малых значениях максимального порога a средней анизотропии входного возмущения. Также необходимо вычислить максимальный уровень средней анизотропии a_{max} , при котором с заданной точностью ε допустимо использование фильтра Калмана для решения задачи оценивания, т.е. справедливо неравенство

$$\frac{\|F\|_a}{\|F_0\|_2/\sqrt{m}} - 1 < \varepsilon.$$

Основные рассуждения хода решения задачи представлены в следующих разделах работы.

3.1. Случай оптимального анизотропийного оценивателя

Для начала кратко разберем оптимальный случай, когда $F = F(E)$ – система, зависящая от коэффициентов оптимального a -анизотропийного оценивателя. Обозначим через $J_a(F)$ среднеквадратичный коэффициент усиления для системы с неизвестными переменными (на уровне задачи фильтрации такая система является системой в ошибках оценивания, проведенного с помощью фильтра E) при условии, что на ее вход поступает наихудшее внешнее возмущение со средней анизотропией a :

$$J_a(F) = \|FG_*\|_2/\|G_*\|_2 \Big|_{G_*=\arg\max\{\|FG\|_2/\|G\|_2 \mid G \in \mathbf{G}_a\}}.$$

Для него справедливо представление

$$(22) \quad J_a(F) = c_0(F) + \sqrt{a}c_1(F) + \frac{1}{2}ac_2(F) + \dots$$

при малых значениях $a \geq 0$. Достаточно очевидно, что оптимальный \mathcal{H}_2 -фильтр E_0 является решением задачи

$$(23) \quad J_0(F) = c_0(F) \rightarrow \min_E,$$

т.е. $E_0 = \arg \min_E c_0(F) \big|_{F=F(E)}$, при этом для «макета» системы будет справедливо соотношение $F = F(E_0)$. Однако при отклонении величины средней анизотропии от нуля для случая, когда система замыкается оптимальным a -анизотропийным оценивателем E_a , формула (22), если в нее подставить $E = E_a$, принимает вид

$$(24) \quad J_a(F_a) = c_0(F_a) + \sqrt{a}c_1(F_a) + \frac{1}{2}ac_2(F_a) + \dots,$$

где $F_a = F(E_a)$, переставая, таким образом, быть содержательной в плане явного представления $J_a(F_a)$ в виде степенного ряда по \sqrt{a} . Следующие рассуждения позволяют уточнить зависимость анизотропийной нормы для системы $F(E_a)$.

Прежде всего, легко убедиться, что при условии достаточной гладкости функции $J_a(F)$ имеют место соотношения

$$c_0(F) = J_0(F), \quad c_k(F) = \partial_{\sqrt{a}}^k J_a(F) \big|_{a=0},$$

дающие выражения для коэффициентов разложения (22). Тогда поскольку из (23) следует, что

$$F_0 = \arg \min_{F(E)} c_0(F(E)),$$

справедливыми будут также выражения

$$(25) \quad \partial_F c_0(F) \big|_{F=F_0} = 0, \quad \partial_F^2 c_0(F) \big|_{F=F_0} \geq 0,$$

где ∂_F – производная Фреше. Для сокращения записи введем обозначения

$$\partial J_a = \partial_F J_a(F) \big|_{F=F_a}, \quad \partial^2 J_a = \partial_F^2 J_a(F) \big|_{F=F_a}.$$

Из (25) следует, что для всех сколь угодно малых значений $a \geq 0$ выполнены необходимые условия минимума

$$\partial J_a = 0, \quad \partial^2 J_a \geq 0,$$

ввиду чего

$$\frac{d(\partial J_a)}{d\sqrt{a}} = \partial^2 J_a \cdot \frac{dF_a}{d\sqrt{a}} + \partial_{\sqrt{a}}(\partial J_a) = 0.$$

Таким образом, получаем соотношение

$$(26) \quad \frac{dF_a}{d\sqrt{a}} = -\partial_{\sqrt{a}}(\partial J_a) \cdot (\partial^2 J_a)^{-1},$$

выполненное при $\partial^2 J_a > 0$. Из (26), в частности, следует, что

$$(27) \quad \frac{dF_a}{d\sqrt{a}} \Big|_{a=0} = -\frac{\partial_F c_1(F)}{\partial_F^2 c_0(F)} \Big|_{F=F_0}.$$

Следовательно,

$$(28) \quad \frac{d(J_a(F_a))}{d\sqrt{a}} = \partial_{\sqrt{a}}(J_a(F_a)).$$

При повторном дифференцировании получим

$$(29) \quad \frac{d^2(J_a(F_a))}{da} = \partial_{\sqrt{a}}^2(J_a(F_a)) - \left(\partial_{\sqrt{a}}(\partial J_a) \right)^2 \cdot (\partial^2 J_a)^{-1}.$$

Значит, при $a = 0$ формулы (28) и (29) примут вид

$$(30) \quad \frac{dJ_a(F_a)}{d\sqrt{a}} = c_1(F_0), \quad \frac{d^2J_a(F_a)}{da} = c_2(F_0) - \frac{(\partial_F c_1(F_0))^2}{\partial_F^2 c_0(F_0)}.$$

В результате окончательная модификация формулы (22) для случая зависимости системы F от оптимального анизотропийного оценивания E_a будет иметь вид

$$(31) \quad J_a(F_a) = c_0(F_0) + \sqrt{a}c_1(F_0) + \frac{1}{2}a \left(c_2(F_0) - \frac{(\partial_F c_1(F_0))^2}{\partial_F^2 c_0(F_0)} \right) + \bar{o}(a).$$

Интересен тот факт, что отличие полученной формулы от (22) при подстановке в последнюю $F = F_0$ наблюдается начиная со слагаемого порядка a . Иными словами, если исследователя удовлетворяет точность порядка $\bar{o}(\sqrt{a})$ при аппроксимации формулы анизотропийной нормы (21), то достаточно сделать просто замену $F = F_0$ в ее правой части. Однако для ее эффективного

использования необходимо все равно находить оптимальный *a*-анизотропийный оцениватель, что сопряжено с решением нелинейных уравнений.

Поскольку в рамках решаемой задачи система таких уравнений соответствует малым значениям уровня *a*, можно ограничиться лишь приближенными формулами для нахождения *a*-анизотропийного оценивателя. В следующем параграфе будет показано, к чему приведет использование приближенных вычислений в задаче оценивания.

3.2. Приближенное вычисление анизотропийных оценивателей

Прежде всего отметим, что загрубление оптимального оценивателя путем вычисления его приближенного варианта приведет к потере точности, связанной с представлением анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания формулой (31). Это фактически означает, что происходит потеря связи между тем уровнем средней анизотропии, для которого синтезируется оцениватель, и тем, для которого вычисляется анизотропийная норма соответствующей системы в ошибках оценивания. Иными словами, если перейти от использования оптимального анизотропийного оценивателя, для которого при малых значениях *a* справедливо разложение

$$E_a = E_0 + \sqrt{a}E_1 + \frac{1}{2}aE_2 + \dots,$$

к приближенному оценивателью $E'_a = E_0 + \sqrt{a}E_1$, то величину *a* в общем случае нужно заменить на некоторую другую *b*, от которой все еще требуется выполнение условия малости $b = \bar{o}(1)$. Далее приведены основные рассуждения о выводе уравнений для E'_b , а также формулы *a*-анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания $F_b = F(E'_b)$.

Сформулируем полученные результаты решения поставленных задач в виде следующей леммы:

Лемма 2. *Даны линейная стационарная система вида (4), оцениватель (5) и $\varepsilon > 0$. При малых значениях средней анизотропии $a = \bar{o}(1)$ входных возмущений (так называемой «слабой*

окрашенности») справедливы следующие асимптотические разложения матриц K и M анизотропного оценивателя:

$$(32a) \quad X(a) = X_0 + \sqrt{a}X_1 + o(\sqrt{a}), \quad X \in \{K, M\},$$

$$(32b) \quad K_0 = (AP_0C^\top + BD^\top)T_0^{-1},$$

$$(32c) \quad K_1 = (AP_1C^\top + BL_1P_0C^\top + AP_0(DL_1)^\top - K_0T_1)T_0^{-1},$$

$$(32d) \quad M_0 = P_0C^\top T_0^{-1},$$

$$(32e) \quad M_1 = (P_1C^\top + P_0(DL_1)^\top - M_0T_1)T_0^{-1},$$

Матрицы P_0 , P_1 , T_0 , T_1 определяются (9), (11) и следующими выражениями:

$$(33a) \quad P_1 = \mathcal{A}_0P_1\mathcal{A}_0^\top + \mathcal{B}_0\Sigma_1\mathcal{B}_0^\top + Y_{P_1} + Y_{P_1}^\top,$$

$$(33b) \quad T_1 = CP_1C^\top + D\Sigma_1D^\top + Y_{T_1} + Y_{T_1}^\top,$$

где $Y_{P_1} = \mathcal{A}_0P_0(\mathcal{A}_1 + \mathcal{B}_0L_1)^\top - \mathcal{B}_0\mathcal{B}_1^\top$, $Y_{T_1} = CP_0(DL_1)^\top$, а матрицы Σ_1 , L_1 удовлетворяют выражениям

$$(34a) \quad \Sigma_1 = q_1(\mathcal{B}_0^\top \mathcal{Q}\mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_0^\top \mathcal{D}_0),$$

$$(34b) \quad L_1 = q_1(\mathcal{B}_0^\top \mathcal{Q}\mathcal{A}_0 + \mathcal{D}_0^\top \mathcal{C}_0),$$

где \mathcal{Q} – решение уравнения Ляпунова

$$\mathcal{Q} = \mathcal{A}_0^\top \mathcal{Q}\mathcal{A}_0 + \mathcal{C}_0^\top \mathcal{C}_0,$$

а q_1 определяется по формуле

$$(35a) \quad q_1^2 = 4m \left(\text{mtr} \left(2(\mathcal{B}_0^\top \mathcal{Q}\mathcal{A}_0 + \mathcal{D}_0^\top \mathcal{C}_0)P_0(\mathcal{A}_0^\top \mathcal{Q}\mathcal{B}_0 + \mathcal{C}_0^\top \mathcal{D}_0) + \right. \right.$$

$$(35b) \quad \left. \left. + (\mathcal{B}_0^\top \mathcal{Q}\mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_0^\top \mathcal{D}_0)^2 \right) - (\text{tr}(\mathcal{B}_0^\top \mathcal{Q}\mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_0^\top \mathcal{D}_0))^2 \right)^{-1}.$$

При этом анизотропная норма системы в ошибках оценивания имеет следующее представление:

$$(36a) \quad \|F_b\|_a = \frac{\|F_0\|_2}{\sqrt{m}} \left(1 + \frac{q_1\|F_0\|_4^4}{2\|F_0\|_2^2} \sqrt{a} + \frac{\text{tr}(\Sigma_2)}{2q_1\|F_0\|_2^2} \sqrt{b} \right).$$

$$(36b) \quad \cdot \left(1 - \frac{q_1\|F_0\|_2^2}{2m} \sqrt{a} \right) + \bar{o}(\max\{\sqrt{a}, \sqrt{b}\}),$$

где Σ_2 определяется выражениями

$$(37a) \quad R_2 = \mathcal{A}_0^\top R_2 \mathcal{A}_0 + Y_{R_2} + Y_{R_2}^\top,$$

$$(37b) \quad R_3 = \mathcal{A}_0^\top R_3 \mathcal{A}_0 + L_1^\top L_1,$$

$$(37c) \quad \Sigma_2 = \mathcal{B}_0^\top R_2 \mathcal{B}_0 + Y_{\Sigma_2} + Y_{\Sigma_2}^\top,$$

$$(37d) \quad \Sigma_3 = \mathcal{B}_0^\top R_3 \mathcal{B}_0 + \Sigma_1^2,$$

где $Y_{R_2} = q_1(\mathcal{A}_1^\top \mathcal{Q} \mathcal{A}_0 + \mathcal{C}_1^\top \mathcal{C}_0)$, $Y_{\Sigma_2} = q_1(\mathcal{B}_1^\top \mathcal{Q} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_1^\top \mathcal{D}_0)$.

Максимальный уровень средней анизотропии a_{max} , при котором относительное отклонение анизотропийной нормы $\|F_b\|_a$ от масштабированной \mathcal{H}_2 -нормы не превышает заданного ε , определяется по формуле

$$(38) \quad a_{max} = \varepsilon^2 \left(\sqrt{\frac{Q}{m}} + \frac{\text{tr}(\Sigma_2)}{2q_1\|F_0\|_2^2} \right)^{-2}.$$

Доказательство. Следствием результатов работы [1] является тот факт, что для случая $a = 0$ решениям соответствующих уравнений леммы 1 соответствуют матрицы $R_0 = 0$, $\Sigma_0 = I_m$, $L_0 = 0$ и число $q_0 = 0$. Соответствующая им ковариационная матрица P_0 состояния на установившемся режиме определяется выражением (9), соответствующем случаю Несложно показать, что матрица K_0 фильтра примет вид (12). Ковариационная матрица $P_z = \text{cov}(\tilde{z}_\infty)$ ошибки оценивания вектора z_k на установившемся режиме при нулевой анизотропии входного возмущения определяется в соответствии с формулой

$$(39) \quad P_{z0} = (I_n - M_0 C) P_0 (I_n - M_0 C)^\top + M_0 D (M_0 D)^\top,$$

где матрица M_0 фильтра примет вид (10).

Как уже было отмечено, при равенстве средней анизотропии оценивателя нулю ($b = 0$) ковариационная матрица ошибки оценивания и сами матрицы оценивателя соответствуют фильтру Калмана. По этой причине при малых значениях $b = \bar{o}(1)$ будем описывать анизотропийный оцениватель в терминах отклонений от фильтра Калмана, т.е. все переменные будем представлять в виде

$$(40) \quad X(b) = X_0 + \Delta_X(b), \quad \Delta_X(0) = 0,$$

где $X \in \{P, P_z, R, \Sigma, L, K, M, q, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$. Выражения (40) и определяют асимптотику анизотропийного оценивателя вида (5) в окрестности нулевой средней анизотропии. Для решения задачи асимптотического представления анизотропийного оценивателя при малых значениях $b > 0$ нужно определить порядок малости $\Delta_X(b)$ в выражении выше. Вернувшись к формуле (14), обратимся к представлению матричного логарифма в виде степенного ряда

$$(41) \quad \ln(I + X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} X^k}{k}, \quad \|X\| < 1.$$

С учетом пренебрежения слагаемых старше второй степени в (41) выражение (14) примет вид

$$\text{tr}\left(X - \frac{1}{2}X^2\right) \approx -2b,$$

где

$$X = \frac{m(I_m + \Delta_\Sigma(b))}{m + \text{tr}(\Delta_L(b)P(b)\Delta_L^\top(b) + \Delta_\Sigma(b))} - I_m,$$

что после проведения несложных преобразований приводит к

$$(42a) \quad 4bm + (\text{tr}(\Delta_\Sigma(b)))^2 - m\text{tr}(\Delta_\Sigma^2(b)) -$$

$$(42b) \quad -2m\text{tr}(\Delta_L(b)P_0\Delta_L^\top(b)) \approx 0.$$

Таким образом, величины $\Delta_L(b)P_0\Delta_L^\top(b)$ и $\Delta_\Sigma^2(b)$ имеют порядок малости b , а матрицы $\Delta_L(b)$ и $\Delta_\Sigma(b)$ как функции b представимы в виде

$$(43a) \quad \Delta_\Sigma(b) = \Sigma_1\sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}),$$

$$(43b) \quad \Delta_L(b) = L_1\sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}),$$

где Σ_1 и L_1 будут определены позже. Для определения порядка малости функции $\Delta_R(b)$ рассмотрим уравнение Риккати (15)

с учетом (40) (как и ранее, пренебрегая частью слагаемых наименьшего порядка):

$$(44a) \quad \Delta_R(b) \approx \mathcal{A}_0^\top \Delta_R(b) \mathcal{A}_0 + \Delta_q(b) \mathcal{C}_0^\top \mathcal{C}_0,$$

$$(44b) \quad \Sigma_1 \sqrt{b} \approx \Delta_q(b) \mathcal{D}_0^\top \mathcal{D}_0 + \mathcal{B}_0^\top \Delta_R(b) \mathcal{B}_0,$$

$$(44c) \quad L_1 \sqrt{b} \approx \mathcal{B}_0^\top \Delta_R(b) \mathcal{A}_0 + \Delta_q(b) \mathcal{D}_0^\top \mathcal{C}_0.$$

Таким образом, функции $\Delta_R(b)$ и $\Delta_q(b)$ представимы в виде

$$(45a) \quad \Delta_R(b) = R_1 \sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}),$$

$$(45b) \quad \Delta_q(b) = q_1 \sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b})$$

с некоторыми R_1 и q_1 . Наряду с полученными формулами также имеем соотношения (34) для матриц Σ_1 , L_1 и \mathcal{Q} .

Можно заметить, что матрицы R_1 и \mathcal{Q} связаны друг с другом выражением $R_1 = q_1 \mathcal{Q}$. Далее определим порядок малости $\Delta_P(b)$. Подставив в уравнение (17) представления функций $\Sigma(b)$ и $L(b)$, и с учетом (9) получим

$$(46) \quad \Delta_P(b) \approx \mathcal{A}_0 \Delta_P(b) \mathcal{A}_0^\top + \sqrt{b} \mathcal{B}_0 \Sigma_1 \mathcal{B}_0^\top + Y_P + Y_P^\top,$$

где

$$Y_P = \sqrt{b} \mathcal{A}_0 P_0 (\mathcal{B}_0 L_1)^\top - (\mathcal{A}_0 P_0 C^\top + \mathcal{B}_0 D^\top) \Delta_K^\top(b),$$

откуда следует, что

$$(47) \quad \Delta_P(b) = P_1 \sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}),$$

$$(48) \quad \Delta_K(b) = K_1 \sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}).$$

Определение порядка малости $\Delta_{P_z}(b)$ и $\Delta_M(b)$ проходит по аналогии, что приводит к приближенному равенству

$$(49) \quad \Delta_{P_z}(b) \approx \sqrt{b} \mathcal{C}_0 P_1 \mathcal{C}_0^\top + \sqrt{b} \mathcal{D}_0 \Sigma_1 \mathcal{D}_0^\top - Y_{P_z} - Y_{P_z}^\top,$$

где

$$Y_{P_z} = \mathcal{D}_0 (\Delta_M(b) D)^\top + \mathcal{C}_0 P_0 (\Delta_M(b) C - D L_1 \sqrt{b})^\top.$$

Таким образом, функции $\Delta_{P_z}(b)$ и $\Delta_M(b)$ имеют вид

$$(50a) \quad \Delta_{P_z}(b) = P_{z1}\sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}),$$

$$(50b) \quad \Delta_M(b) = M_1\sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}).$$

Подставив формулы для $K(b)$ и $M(b)$ в (19), придем к тому, что

$$(51a) \quad \Delta_A(b) = A_1\sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}), \quad \Delta_B(b) = B_1\sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}),$$

$$(51b) \quad \Delta_C(b) = C_1\sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}), \quad \Delta_D(b) = D_1\sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}).$$

Легко убедиться, что $A_1 = -K_1C$, $B_1 = -K_1D$, $C_1 = -M_1C$, $D_1 = -M_1D$. С учетом приведенных выше выкладок выражение (42) примет вид

$$4m + \text{tr}^2(\Sigma_1) - m\text{tr}(\Sigma_1^2) - 2m\text{tr}(L_1 P_0 L_1^\top) = 0,$$

откуда с учетом (34) получаем формулу (35) для q_1 .

Для продолжения нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты, связывающие друг с другом нормы различных систем. Так, известно [1], что \mathcal{H}_4 -норма системы в ошибках оценивания фильтром Калмана определяется выражением

$$(52a) \quad \|F_0\|_4^4 = \text{tr}((C_0 P_0 C_0^\top + D_0 D_0^\top)^2) +$$

$$(52b) \quad + 2\text{tr}((C_0 P_0 A_0^\top + D_0 B_0^\top) Q (A_0 P_0 C_0^\top + B_0 D_0^\top)).$$

Согласно теореме Риса – Фреше, норма сопряженного оператора равна норме исходного оператора. Значит, часть выражений, справедливых для исходной системы, будут справедливыми и в терминах двойственной, т.е.

$$(53a) \quad \|F_0\|_2^2 = \text{tr}(B_0^\top Q B_0 + D_0^\top D_0) = \text{tr}(C_0 P_0 C_0^\top + D_0 D_0^\top),$$

$$(53b) \quad \|F_0\|_4^4 = 2q_1^{-2} \text{tr}(L_1 P_0 L_1^\top) + \text{tr}((B_0^\top Q B_0 + D_0^\top D_0)^2) =$$

$$(53c) \quad = \text{tr}((C_0 P_0 C_0^\top + D_0 D_0^\top)^2) + 2\text{tr}(\Gamma^\top Q \Gamma),$$

где $\Gamma = A_0 P_0 C_0^\top + B_0 D_0^\top$. Таким образом, выражение (35) принимает вид $q_1^2 = 4m/(Q\|F_0\|_2^4)$. Далее можно получить, что матрица P_1 удовлетворяет уравнению (33а) и

$$(54) \quad P_{z1} = C_0 P_1 C_0^\top + D_0 \Sigma_1 D_0^\top + Y_{P_{z1}} + Y_{P_{z1}}^\top,$$

где $Y_{P_{z_1}} = \mathcal{C}_0 P_0 (\mathcal{C}_1 + \mathcal{D}_0 L_1)^\top + \mathcal{D}_0 \mathcal{D}_1^\top$. Также с учетом результатов [1] и формул (20) несложно вывести выражения (32c), (32e), (33b).

Теперь, когда получены приближенные выражения для анизотропийного оценивателя при малых значениях средней анизотропии $b = \bar{o}(1)$, можно переходить к определению формулы для a -анизотропийной нормы при $a = \bar{o}(1)$. Повторим еще раз, что значения a и b не обязательно должны быть равны друг другу: нас интересует лишь порядок стремления анизотропийной нормы к своему точному значению при выполнении условия $\max\{a, b\} = \bar{o}(1)$. Для получения искомого выражения нужно получить разложение функции $\Phi \doteq \text{tr}(LPL^\top + \Sigma)$ в ряд по степеням \sqrt{a} до второй степени включительно (см. лемму 1). Стоит отметить, что матрицы L , P и Σ определяются одновременно значениями a и b . Это обусловлено тем, что в представлениях функций вида $\Delta_X(a, b) = X_1\sqrt{a} + \bar{o}(\sqrt{a})$ величина $\bar{o}(\sqrt{a})$ на самом деле задана суммой $\bar{o}(\sqrt{a}) = X_2\sqrt{ab} + X_3a + \bar{o}(\max\{a, \sqrt{ab}\})$, где $X \in \{R, \Sigma\}$ определяются выражениями (37a), (37b), (37c), (37d).

С учетом приведенных соотношений можно убедиться, что $\Phi(a, b) = \Phi_{0,0} + \Phi_{1,0}\sqrt{a} + \Phi_{1,1}\sqrt{ab} + \Phi_{2,0}a + \bar{o}(\max\{a, \sqrt{ab}\})$, где

$$(55a) \quad \Phi_{0,0} = m, \quad \Phi_{1,0} = \text{tr}(\Sigma_1) = q_1 \|F_0\|_2^2,$$

$$(55b) \quad \Phi_{1,1} = \text{tr}(\Sigma_2), \quad \Phi_{2,0} = \text{tr}(L_1 P_0 L_1^\top + \Sigma_3) = q_1^2 \|F_0\|_4^4.$$

В соответствии с последними рассуждениями и ввиду (16) a -анизотропийная норма системы в ошибках фильтрации, проведенной b -анизотропийным оценивателем, будет выражаться по формуле

$$(56) \quad \|F_b\|_a = \sqrt{\frac{1}{q(a)} \left(1 - \frac{m}{\Phi(a, b)} \right)}.$$

Подставив в (56) найденные выражения при $\max\{a, b\} \rightarrow 0 + 0$, получим асимптотическое представление анизотропийной нормы вида (36).

Несложно убедиться, что при $b = 0$ полученная формула совпадает с левой асимптотикой (21) анизотропийной нормы из задачи анализа для системы F_0 . Однако она уступает в точности

формуле (31) ввиду того, что здесь рассматривается анизотропийный оцениватель E'_b , уже не являющийся оптимальным. Преимущество полученного результата перед аналогичным из параграфа 3.1 заключается в том, что для вычисления оценивателя E'_b нужно решить достаточно простую систему линейных уравнений, в то время как для нахождения оптимального оценивателя нужно решить достаточно сложную систему нелинейных уравнений.

Важным замечанием является то, что формулой (36) можно пользоваться только при удовлетворении определенного условия на значения a и b . Это условие находится из того соображения, что для некоторого $0 < \varepsilon = \bar{o}(1)$ максимально возможные значения a и b должны удовлетворять неравенству

$$(57) \quad \|F_b\|_a - \frac{\|F_0\|_2}{\sqrt{m}} < \varepsilon \frac{\|F_0\|_2}{\sqrt{m}},$$

обеспечивающему с предъявляемой точностью относительную близость значений анизотропийной нормы и масштабированной \mathcal{H}_2 -нормы. Преобразуя (57), попутно заменяя обе величины a и b на $a_{\max} = \max\{a, b\}$, получим

$$(58) \quad a \leq a_{\max} = \varepsilon^2 \left(\sqrt{\frac{Q}{m}} + \frac{\text{tr}(\Sigma_2)}{2q_1\|F_0\|_2^2} \right)^{-2},$$

где правая часть неравенства в соответствии с решаемой задачей предполагается имеющей порядок $\bar{o}(\text{tr}(P_0))$. Формула для a_{\max} совпадает с (38). Лемма доказана.

В следующем разделе работы представлен пример решения разбираемой задачи для некоторой линейной дискретной стационарной системы.

4. Пример

Рассмотрим линейную стационарную устойчивую систему

$$(59) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + B\omega, \\ y = Cx + D\omega \end{cases}$$

в трех различных конфигурациях, заданных матрицами A_1, A_2, A_3 :

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & a_i \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1,25 & -1,5 \end{pmatrix},$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -8 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дискретизуем рассматриваемую систему (59) с шагом дискретизации $T_s = 10^{-6}$. В итоге получаем линейную стационарную дискретную систему, заданную четверкой (A_d, B_d, C_d, D_d) , где

$$A_d = e^{AT_s}, \quad B_d = \left(\int_0^{T_s} e^{A(T_s-\tau)} B d\tau \right), \quad C_d = C, \quad D_d = D.$$

Задача 2. При заданном ε определить максимальный порог средней анизотропии и для найденного порога вычислить приближенный анизотропийный оцениватель, который удовлетворяет условию $\frac{\|F_a\|_a}{\|F_0\|_2/\sqrt{m}} - 1 < \varepsilon$.

Используя представленные в работе результаты решения задач синтеза оценивателя и определения максимального порога анизотропии, проведены численные вычисления:

- 1) решений уравнений (9), (33а) относительно компонент P_0, P_1 соответственно и матриц P_{z0} и P_{z1} по формулам (39) и (54) со всеми сопутствующими выкладками;
- 2) компонент матриц K и M искомого анизотропийного оценивателя по формулам (32б), (32с), (32д) и (32е).
- 3) максимального порога анизотропии a_{max} по формуле (38) для различных уровней точности $\varepsilon \in (0; 1)$;
- 4) относительного отклонения

$$\delta_{rel} = \frac{\text{tr}(P_1)\sqrt{a}}{\text{tr}(P_0)} \cdot 100\%.$$

Результаты вычислений представлены в виде графиков, изображенных на рис. 1 и рис. 2. Соответствующие отклонения отложены по оси Oy , а по оси Ox – значения $\lg(a_{max})$.

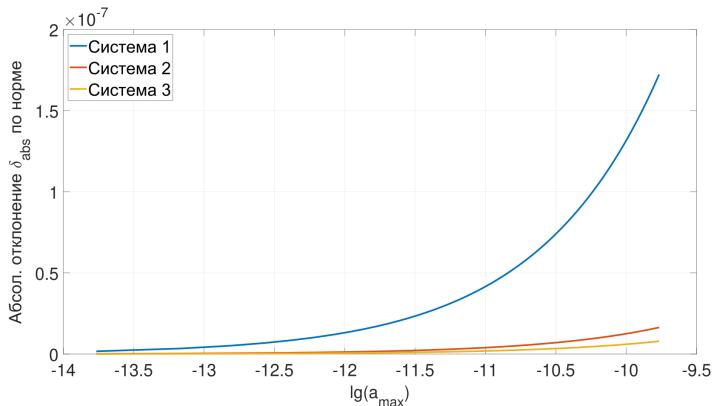


Рис. 1. Абсолютное отклонение следа ковариационной матрицы P от P_0

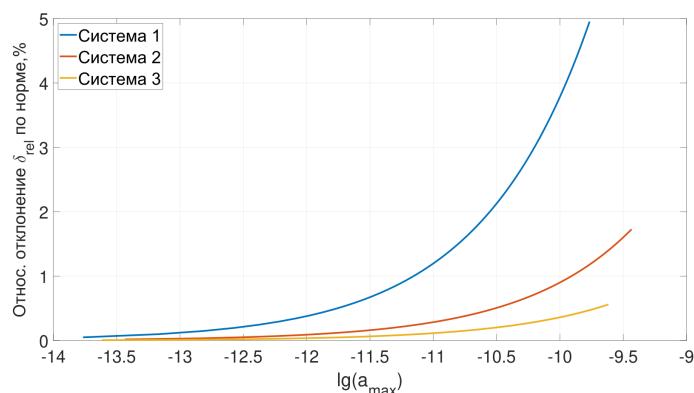


Рис. 2. Относительное отклонение δ_{rel} следа ковариационной матрицы P от P_0

В соответствии с графиками можно сделать вывод, что для линейных стационарных устойчивых систем с большей скоростью динамики (меньший спектральный радиус матрицы A) максимальный порог анизотропии при том же допуске ε существенно выше, чем для систем с низкой скоростью динамики. Видно, что относительное отклонение $\delta_{rel} = 5\%$ для системы с низкой скоростью динамики (система 1) достигается при пороге анизотропии $a_{max} \approx 10^{-10}$, а для системы с высокой скоростью динамики (система 3) то же относительное отклонение достигается при максимальном пороге анизотропии $a_{max} \gg 1$. Поскольку большинство реальных технических устойчивых систем обладают низкой скоростью динамики, можно ожидать, что диапазон отклонения статистических свойств входного случайного возмущения от свойств гауссовского белого шума очень узкий, и потому практически при любом отклонении внешних возмущений от белого шума эффективней будет использовать методы синтеза оптимального анизотропийного оценивания или, по крайней мере, использовать приближенные формулы его вычисления, полученные в данной работе.

5. Заключение

В данной работе рассмотрены задача синтеза анизотропийного оценивания при стремлении параметра анизотропии к нулю и задача определения максимального порога анизотропии, при котором анизотропийный оцениватель может быть с заданной точностью аппроксимирован фильтром Калмана. Получены асимптотические представления матриц оценивания и ковариационных матриц ошибки оценивания как функций верхней границы средней анизотропии. Также выведено выражение для вычисления анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания и проведено сравнение с ранее полученными результатами по левой асимптотике анизотропийной нормы для линейных дискретных стационарных систем. По результатам решения задачи об определении максимального порога анизотропии можно сделать вывод о большей эффективности анизотропийного оценивания в

большинстве задач оценивания по сравнению с фильтром Калмана при наличии на входе системы случайных возмущений с ненулевой анизотропией, т.е. отличающихся от гауссовского белого шума.

Литература

1. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Асимптотика анизотропийной нормы линейных стационарных систем* // Автоматика и телемеханика. – 1999. – №3. – С. 78–87.
2. ТИМИН В.Н., КУРДЮКОВ А.П. *Синтез робастной системы управления на режиме посадки самолета в условиях сдвига ветра* // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1993. – №6. – С. 200–208.
3. ANDERSON B.D.O., MOORE J.B. *Optimal Filtering*. – New Jersey: Prentice Hall. 1979.
4. BELOV I.R., YURCHENKOV A.V., KUSTOV A.YU. *Anisotropy-Based Bounded Real Lemma for Multiplicative Noise Systems: the Finite Horizon Case* // Proc. of the 27th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). – 2019.
5. DEY S., MOORE J.B. *Risk-sensitive filtering and smoothing via reference probability methods* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1997. – Vol. 42, No. 11. – P. 1587–1591.
6. HASSIBI B., SAYED A., KAILATH T. *Indefinite Quadratic Estimation and Control: A Unified Approach to \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Theories*. – Philadelphia: SIAM. 1999.
7. KAILATH T. *A view of three decades of linear filtering theory* // IEEE Trans. on Information Theory. – 1974. – Vol. 20, No. 2. – P. 146–181.
8. KALMAN R.E. *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems* // J. Basic Eng., Trans. ASME, Series D. – 1960. – Vol. 82, No. 1. – P. 35–45.

9. KOROTINA M., ARANOVSKIY S., BOBTSOV A. *Disturbance Frequency Estimation for an LTV System* // IFAC-PapersOnLine. – 2022. – Vol. 55, Is. 12. – P. 318–323.
10. KUSTOV A.YU., TIMIN V.N., YURCHENKOV A.V. *Anisotropic Norm Computation for Time-invariant Random System* // Proc. of the 15th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB). 2020.
11. KUSTOV A.YU., YURCHENKOV A.V. *Anisotropic Estimator Design for Time Varying System with Measurement Dropouts* // Proc. of the 15th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB). 2020.
12. KWON O.-K., DE SOUZA C.E., RYU H.-S. *Robust \mathcal{H}_∞ FIR filter for discrete-time uncertain systems* // Proc. of 35th IEEE Conf. on Decision and Control. – 1996. – Vol. 4. – P. 4819–4824.
13. OPPENHEIM A.V., SCHAFER R.W. *Digital Signal Processing*. – PrenticeHall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
14. POLYAK B.T., KHLEBNIKOV M.V. *Filtering with nonrandom noise: invariant ellipsoids technique* // IFAC Proc. Volumes (IFAC Papers-OnLine). – 2008. – Vol. 41.
15. PYRKIN A., BOBTSOV A., ORTEGA R., ISIDORI A. *An adaptive observer for uncertain linear time-varying systems with unknown additive perturbations* // Automatica. – 2023. – Vol. 147.
16. SEMYONOV A.V., VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P. *Stochastic approach to \mathcal{H}_∞ -optimization* // Proc. of the 33rd Conf. on Decision and Control, Florida, USA. – December 14–16, 1994. – Vol. 3. – P. 2249–2250.
17. SIMON D. *Optimal State Estimation: Kalman, \mathcal{H}_∞ , and Nonlinear Approaches*. – New Jersey: Wiley, 2006.
18. TERMAN F.E. *Electronic and Radio Engineering*. – McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.

19. THEODOR Y., SHAKED U. *Robust discrete-time minimum-variance filtering* // IEEE Trans. on Signal Processing. – 1996. – Vol. 44, No. 2. – P. 181–189.
20. VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V. *Anisotropy of Signals and the Entropy of Linear Stationary Systems* // Dokl. Math. – 1995. – Vol. 51. – P. 388–390.
21. VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A. P., SEMYONOV A.V. *On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete-Time-Invariant Systems* // Proc. 13 IFAC World Congress. – 1996. – P. 179–184.
22. VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V. *State-space solution to anisotropy-based stochastic \mathcal{H}_∞ -optimization problem* // Proc. of the 13th IFAC World Congress, San-Francisco, California, USA. – June 30-July 5, 1996. – V. H, Paper IFAC-3d-01.6. – P. 427–432.
23. XIE L., SOH Y.C., DE SOUZA C.E. *Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1994. – Vol. 39. – P. 1310–1314.
24. YURCHENKOV A.V. *Lemma on Boundedness of Anisotropic Norm for Systems with Multiplicative Noises under a Noncentered Disturbance* // Automation and Remote Control. – 2021. – P. 51–62.
25. YURCHENKOV A.V., KUSTOV A.YU. *Anisotropy-Based Approach to Communication Tuning for a Time-Varying Sensor Network System* // Dokl. Math. 2022. – Vol. 104. – P. 311–315.
26. YURCHENKOV A.V., KUSTOV A.YU., TIMIN V.N. *Anisotropy-based Approach of Sensors Network Filtration: Nonzero Mean Disurbance Case* // Proc. of the 16th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB). 2022.
27. YURCHENKOV A.V., KUSTOV A.YU., TIMIN V.N. *The sensor network estimation with dropouts: Anisotropy-based approach* // Automatica. – 2023. – Vol. 151.

ON THE APPLICATION OF KALMAN FILTER FOR THE ESTIMATION PROBLEM WITH WEAKLY COLOURED NOISES

Ivan Belov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., senior researcher (ivanb1993@mail.ru).

Arkadiy Kustov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., senior researcher (arkadiykustov@yandex.ru)

Abstract: The anisotropy-based estimation problem for linear discrete time invariant system is considered in the paper. The asymptotic formulas for estimator matrices, estimation error covariance matrice and anisotropic norm of estimation error system under the condition of small values of mean anisotropy of input disturbance are demonstrated. Also the maximum edge of external disturbance anisotropy, providing the prescribed accuracy of anisotropy-based estimator approximation by Kalman filter, is determined in the article. The stated problems solution is demonstrated in the graphical results of numerical modelling for linear discrete time invariant stable system.

Keywords: anisotropy-based theory, estimation problem, linear discrete time invariant systems, Kalman filter.

УДК 681.518.22; 681.514; 681.516.75

ББК 32.965.4; 32.965.6

DOI: 10.25728/ubs.2023.103.4

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

Поступила в редакцию 22.03.2023.

Дата опубликования 31.05.2023.

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАТИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА ПО ВЫХОДУ

Мухин А. В.¹

(Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород)

Рассматривается задача поиска критериев существования стабилизирующих статических регуляторов по выходу для линейных непрерывных стационарных систем. Дело в том, что имеющиеся ранговые критерии существования статических регуляторов применимы только в тех случаях, когда одна из матриц входа или выхода имеет полный ранг. Во всех остальных случаях, как правило, чаще всего встречающихся на практике, эти критерии оказываются неприменимыми. Для решения задачи введен класс линейных систем, для которого критерий для обратной связи по выходу также существует и может быть сформулирован в виде необходимых и достаточных условий. Основная идея состоит в приведении посредством невырожденного линейного преобразования матрицы выхода к определенному блочному виду.

Ключевые слова: статический регулятор по выходу, гурвицева матрица, стабилизуемость, линейное преобразование.

1. Введение

Управление в форме статической обратной связи по выходу представляет собой наиболее востребованный на практике способ стабилизации линейных систем [1, 4]. Очевидным преимуществом такого подхода к стабилизации по сравнению со стабилизацией по состоянию является то, что для ее реализации не требуется весь вектор состояния. Однако NP-трудность задачи [14], а также отсутствие критериев существования заметно усложняют синтез таких регуляторов [9, 12, 15, 16]. Изучены лишь некоторые частные случаи, в которых удается сформулировать критерии в виде необходимых и достаточных условий (например, [15]).

Статья посвящена решению задачи о существовании статического регулятора по выходу. Для решения задачи, так же как и в [6, 7], использовался вспомогательный класс матриц выхода, благодаря которому можно выделить класс линейных систем,

¹ Алексей Валерьевич Мухин, аспирант (*muhin-aleksei@yandex.ru*).

для которого удается сформулировать необходимые и достаточные условия существования статических регуляторов по выходу. Статья является продолжением работ [6, 7]. В отличие от последних никакие дополнительные требования к матрице входа или матрице системы не предъявлялись.

Остаточная часть статьи организована следующим образом. Во втором разделе сформулирована задача. В третьем разделе приведены используемые обозначения и показан выбор базиса, в котором матрица выхода принимает требуемый блочно-однородный вид. Четвертый раздел содержит доказательство теоремы, в которой сформулирован критерий существования статического регулятора по выходу для стабилизируемых по выходу линейных систем. В пятом разделе показано применение найденного критерия на нескольких примерах. Заключительные выводы даны в последнем разделе.

2. Формулировка задачи

Рассмотрим линейную непрерывную наблюдаемую стационарную систему

$$(1) \quad x = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0,$$

$$y = Cx,$$

где $x \in R^n$ – состояние; $u \in R^m$ – вход; $y \in R^p$ – измеряемый выход; $A \in R^{n \times n}$ – матрица системы; $B \in R^{n \times m}$ – матрица входа; $C \in R^{p \times n}$ – матрица выхода.

Будем считать, что относительно матриц B и C выполняются естественные ранговые условия:

$$\text{rank}(B) = m,$$

$$\text{rank}(C) = p,$$

где $m, p < n$.

В противном случае требуется сначала избавиться от избыточности в системе (1). Для стабилизации системы применим закон управления из класса статических обратных связей по выходу. Уравнение соответствующего регулятора имеет вид

$$(2) \quad u = Ky,$$

где $K \in R^{m \times p}$ – неизвестная матрица регулятора.

Тогда (1) с учетом (2) примет замкнутый вид:

$$(3) \quad x = (A + BKC)x = \widehat{A}_c x.$$

Задача состоит в поиске критериев, позволяющих сделать вывод относительно существования матрицы K , обеспечивающей устойчивость матрицы замкнутой системы (3). Стандартная математическая формулировка задачи звучит так [9]: *существует ли такая матрица K , которая для заданных матриц A , B и C обеспечивает устойчивость матрицы замкнутой системы (3)?*

3. Преобразование базиса

Введем используемые обозначения. Правую комплексную полуплоскость будем обозначать \mathbb{C}^+ , а левую полуплоскость – \mathbb{C}^- . Если $\lambda \in \mathbb{C}^-$, то $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Спектральную абсциссу квадратной матрицы \mathcal{M} , определяемую как $\max_{1 \leq i \leq n} \{\operatorname{Re} \lambda_i(\mathcal{M})\}$, обозначим $\operatorname{spa}(\mathcal{M})$. Это обозначение позаимствовано из [8]. Если \mathcal{M} гурвицева, то $\operatorname{spa}(\mathcal{M}) < 0$. Ядра матриц B^T и C будем обозначать $\mathcal{N}_{B^T} \in R^{n \times (n-m)}$ и $\mathcal{N}_C \in R^{n \times (n-p)}$ соответственно. Их можно найти из уравнений [11]

$$B^T \mathcal{N}_{B^T} = 0,$$

$$C \mathcal{N}_C = 0.$$

Для решения задачи введем вспомогательный класс матриц выхода, который назовем блочно-однородным. С этой целью выполним линейное преобразование системы (3) посредством невырожденной матрицы $S \in R^{n \times n}$ так, чтобы в новом базисе матрица выхода C приняла один из видов:

$$(4) \quad C = (I_p \ 0_{p \times (n-p)}),$$

$$(5) \quad C = (0_{p \times (n-p)} \ I_p).$$

Матрица C является блочно-однородной, если она имеет вид (4) или (5). В новом базисе матрица замкнутой системы будет равна

$$(6) \quad A_c = S(A + BKC)S^{-1} = A + BKC.$$

В силу подобия спектры матриц \widehat{A}_c и A_c совпадают [11]. Матрица преобразования может быть найдена из совместной системы уравнений

$$(7) \quad CS^{-1} = C.$$

Таким образом, любую матрицу выхода всегда можно привести к любому из видов (4) или (5). Отметим, что если C является блочно-однородной, то и матрица \mathcal{N}_C может быть записана в блочно-однородном виде:

$$\mathcal{N}_C = \begin{pmatrix} 0_{p \times (n-p)} \\ I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Заметим также, что

$$CC^T = I_p,$$

$$\mathcal{N}_C^T \mathcal{N}_C = I_{n-p}.$$

Произведение матриц CB является инвариантным по отношению к выбранному базису. В общем случае ранг произведения матриц CB заключен в следующий диапазон:

$$0 \leq \text{rank}(CB) \leq \min\{m, p\}.$$

Равенство $\text{rank}(CB) = 0$ реализуется в некоторых частных случаях, когда, например, C имеет вид (4), а B^T – вид (5). Пусть матрица выхода приведена к виду (4). Матрицу входа в новом базисе можно представить в блочном виде как

$$(8) \quad B = SB = \begin{pmatrix} CB \\ \mathcal{N}_C^T B \end{pmatrix},$$

где $B_{11} \in R^{p \times m}$ и $B_{21} \in R^{(n-p) \times m}$,

а матрицу системы в виде

$$(9) \quad A = SAS^{-1}.$$

Так как C имеет вид (4), то блоки B_{11} и B_{21} в (8) можно определить следующим образом:

$$B_{11} = CB,$$

$$B_{21} = \mathcal{N}_C^T B.$$

Введем новую матрицу

$$K_n = \begin{pmatrix} K & 0_{m \times (n-p)} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрицу (6) можно переписать в виде

$$(10) \quad A_c = A + BK_n.$$

Матрицу (10) можно также представить в блочном виде. С этой целью разобьем матрицу A на блоки с квадратными диагональными блоками $A_{11} \in R^{p \times p}$ и $A_{22} \in R^{(n-p) \times (n-p)}$. Тогда (10) можно также записать в виде суммы двух блочных матриц:

$$A_c = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} CBK & 0 \\ \mathcal{N}_C^T BK & 0 \end{pmatrix}.$$

С учетом того, что

$$A_{11} + CBK = CAC^T + CBKCC^T = C(A + BKC)C^T,$$

то A_c можно записать следующим образом:

$$A_c = \begin{pmatrix} CA_c C^T & A_{12} \\ A_{21} + \mathcal{N}_C^T BK & \mathcal{N}_C^T A \mathcal{N}_C \end{pmatrix}.$$

В некоторых случаях такое представление удобно при решении задачи синтеза [7]. Если матрица \widehat{A}_c в исходном базисе устойчива, то в силу подобия матрица A_c также устойчива. Аналогичную матрицу замкнутой системы можно получить и в случае, когда матрица выхода приведена к (5).

4. Необходимые и достаточные условия существования статического регулятора по выходу

Напомним, что система с обратной связью по состоянию, определяемая парой произвольных матриц (A, B) , стабилизируема, если (например, [3])

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^+ \rightarrow \text{rank}(\lambda I - A \quad B) = n.$$

Стабилизируемость системы является необходимым и достаточным условием существования статического регулятора по состоянию [4, 13]. Обратимся к матрице (10). В соответствии с формулой Бине – Коши [11] определитель произведения двух матриц

$$(\lambda I - A \quad B) \begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix}$$

равен сумме произведения всевозможных миноров $\det(\mathcal{A}_i^n(\lambda))$ порядка n матрицы $(\lambda I - A \quad B)$ на соответствующие миноры такого же порядка $\det(K_i^n)$ матрицы $\begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix}$:

$$(11) \det \left((\lambda I - A \quad B) \begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^{N_0} \det(\mathcal{A}_i^n(\lambda)) \det(K_i^n),$$

где $N_0 = \frac{(n+m)!}{m!n!}$ – число сочетаний из $(n+m)$ по n .

Так как матрица K_n содержит нулевой блок, то количество ненулевых миноров в матрице $\begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix}$ будет меньше N_0 . Запи-

шем матрицу $\begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix}$ в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} & I \\ -(K & I_n \\ & 0_{m \times (n-p)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_{11} & -k_{12} & \dots & -k_{1p} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ -k_{m1} & -k_{m2} & \dots & -k_{mp} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $k_{ij} \neq 0$.

Для дальнейшего рассмотрения ограничим размерность выхода:
 $p < n - 1$.

Это ограничение не является принципиальным и наложено лишь с целью уменьшения количества невырожденных $n \times n$ подматриц в матрице $\begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix}$. Количество таких подматриц, состоящих из последовательно расположенных строк, начиная со второй строки в этом случае, не превышает m :

(12) $N \leq m$,

а все остальные $n \times n$ подматрицы будут вырожденными. Если $p \geq m$, то $N = m$. С учетом этого перепишем (11) в виде суммы многочленов:

$$(13) P^n(\lambda) + \sum_{i=1}^{\min\{m,p\}} P_i^{n_i}(\lambda) \det(K_i^n) = 0,$$

в которой

$P^n(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ – многочлен степени n ;

$P_i^{n_i}(\lambda) = \det(\mathcal{A}_i^n(\lambda))$ – многочлены степени $n_i \leq n - 1$.

Многочлены $P_i^{n_i}(\lambda)$ появляются из уравнений определителей $\det(\mathcal{A}_i^n(\lambda))$, которые находятся в соответствии с определителями $\det(K_i^n)$. Перегруппируем слагаемые в (13) и приведем его к единому многочлену:

$$(14) \lambda^n + \left(a_{0(n-1)} + \sum_{i=1}^{\min\{m,p\}} \alpha_{i(n-1)} \det(K_i^n) \right) \lambda^{n-1} + \dots + \\ + \left(a_{00} + \sum_{i=1}^{\min\{m,p\}} \alpha_{i0} \det(K_i^n) \right) = 0,$$

где $\alpha_{i(n-j)}$ – элементы многочленов $P_i^{n_i}(\lambda)$.

В соответствии с теоремой Стодолы [10], для устойчивости многочлена (14) необходимо, чтобы все его коэффициенты были положительными. Для определенности положим, что $\min\{m, p\} = m$, и запишем необходимое условие устойчивости многочлена (14):

$$\begin{pmatrix} a_{0(n-1)} \\ a_{0(n-2)} \\ \dots \\ a_{00} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{1(n-1)} \\ \alpha_{1(n-2)} \\ \dots \\ \alpha_{10} \end{pmatrix} \det(K_1^n) + \dots + \begin{pmatrix} \alpha_{m(n-1)} \\ \alpha_{m(n-2)} \\ \dots \\ \alpha_{m0} \end{pmatrix} \det(K_m^n) > 0.$$

Эти неравенства можно переписать в компактном виде:

$$(15) \quad a^0 + \alpha^1 \det(K_1^n) + \dots + \alpha^m \det(K_m^n) > 0.$$

Получаем систему, состоящую из n линейных неравенств с m неизвестными. Элементами векторов в (15) являются коэффициенты многочленов соответствующих подматриц матрицы Хаутуса. Такая система будет гарантированно совместной, когда $m = n$. Добавим, что коэффициенты многочлена (14) должны также удовлетворять условиям теоремы Гурвица [5], поэтому в правую часть (15) необходимо добавить некоторый вектор, элементы которого являются коэффициентами устойчивого многочлена. Однако проверка совместности системы (15) в таком случае может оказаться затруднительной ввиду того, что правые части неизвестны. Введем класс линейных систем, для которых неравенства (15) будут выполняться при условии $m < n$ независимо от их правых частей: *систему с обратной связью по выходу* (10) будем называть *стабилизируемой по выходу, если в соответствующей матрице Хаутуса*

$$(16) \quad (\lambda I - A \quad B),$$

существует хотя бы одна квадратная подматрица $\mathcal{A}_i^n(\lambda)$ размерности $n \times n$, состоящая из последовательно расположенных столбцов, начиная со второго столбца, определитель которой обращается в ноль только при значениях $\lambda \in \mathbb{C}^-$.

Количество таких подматриц равно m . Первый столбец опускается, так как подматрица $(\lambda I - A)$ неустойчива. Для нумерации этих подматриц определим индекс $i \in [1, m]$. Из стабилизируемости по выходу следует, что

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^+ \rightarrow \text{rank}(\mathcal{A}_i^n(\lambda)) = n,$$

откуда вытекает стабилизуемость пары (A, B) . Таким образом, из стабилизуемости по выходу следует стабилизуемость пары (A, B) . Обратное, вообще говоря, неверно. Для нумерации этих подматриц определим индекс $i \in [1, m]$. Для введенного класса линейных систем сформулируем и докажем следующий результат:

Теорема. *Если линейная система (10) стабилизуема по выходу, то для существования статического регулятора по выходу необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $p \geq i_{\min}$.*

Доказательство. Предположим, что подматрица $\mathcal{A}_m^n(\lambda)$ устойчива. Это означает, что в (15) существует вектор α^m , элементами которого являются коэффициенты устойчивого многочлена подматрицы $\mathcal{A}_m^n(\lambda)$ матрицы Хаутуса. Запишем соответствующую подматрицу K_m^n в матрице $\begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix}$:

$$K_m^n = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_{11} & \cdots & -k_{1p} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -k_{m1} & \cdots & -k_{mp} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $p < m$. В таком случае подматрица K_m^n будет содержать $m - p$ нулевых столбцов. Следовательно, $\det(K_m^n) = 0$. Таким образом, если $p < i$, то статический регулятор не существует. Пусть $p \geq m$. Перепишем неравенства (15) за исключением первого неравенства в виде

$$(17) \quad \alpha^m \det(K_m^n) > -\left(a^0 + \alpha^1 \det(K_1^n) + \cdots + \alpha^{m-1} \det(K_{m-1}^n)\right).$$

Видно, что за счет выбора элементов $k_{m1}, k_{m2}, \dots, k_{mp}$ можно обеспечить такую величину $\det(K_m^n) \neq 0$, при которой система (17) будет разрешима. Если условие леммы выполняется в нескольких подматрицах $\mathcal{A}_i^n(\lambda)$, то $p \geq i_{\min}$. Теорема доказана.

Следует осветить еще один вопрос, связанный с выбором матрицы преобразования в (7). Для перехода к новому базису, в котором C является блочно-однородной, существует, вообще говоря, множество невырожденных матриц $S \in R^{n \times n}$. Так вот, если матрица A_c устойчива, то условие теоремы будет выполняться независимо от матрицы преобразования S . Действитель-

но, пусть при некоторой матрице преобразования S_i из (7) матрица A_c устойчива. Возьмем любую другую невырожденную матрицу S_j , так же как и S_i обеспечивающую блочно-однородный вид C . В силу подобия устойчивой будет и любая другая матрица \widetilde{A}_c в базисе, определяемом матрицей S_j . Таким образом, условие теоремы не зависит от выбора матрицы преобразования S .

5. Примеры

Рассмотрим статическую стабилизацию тела, вывешенного в электромагнитном подвесе [2]. Тело находится в поле действия силы тяжести и силы магнитного притяжения, действующей со стороны электромагнита. Если геометрическая сумма сил равна нулю, то тело покоятся. Матрица, описывающая уравнения линеаризованной системы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -7,5 \end{pmatrix}.$$

Зададим матрицу выхода

$$C = (1 \ 0 \ 0),$$

и матрицу входа

$$B^T = (0 \ 0 \ 1),$$

и покажем, что задача статической стабилизации по выходу неразрешима. Матрица Хаутуса (16) примет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda + 7,5 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрица $\begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix} -$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В такой матрице существует только одна невырожденная 3×3 подматрица, не считая единичной. Соответствующая подматрица в матрице Хаутуса будет равна

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 1 & \lambda + 7,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой подматрицы равен единице $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. Откуда следует, что система не является стабилизируемой по выходу, хотя пара (A, B) стабилизуема. Убедимся, что задача неразрешима. Запишем соответствующую матрицу замкнутой системы:

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ k & -1 & -7,5 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен этой матрицы имеет вид:

$$\lambda^3 + 7,5\lambda^2 - k - 7,5 = 0.$$

С помощью теоремы Стодолы [10] видим, что данный многочлен невозможно сделать устойчивым ни при каком значении k . К такому же выводу можно прийти путем рассмотрения системы (15) с нулевыми правыми частями, из несовместности которой следует неразрешимость задачи. Следовательно, статический регулятор не существует. Этот пример показывает, что неправильная комбинация матриц C и B может привести к неразрешимости задачи, хотя, как будет показано ниже, при тех же размерностях задача разрешима. Зададим теперь матрицу входа в виде

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а матрицу выхода оставим в прежнем виде. Матрица Хаутуса в данном случае будет равна

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda + 7,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix}$ сохраняет прежний вид. Рассмотрим соответствующую квадратную подматрицу:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 1 & \lambda + 7,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой подматрицы обращается в ноль при $\lambda = -7,5$, что обеспечивает условие стабилизируемости

по выходу. В силу равенства p и i условие теоремы выполняется. Соответствующая матрица замкнутой системы примет вид

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k_{11} + 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -7,5 \end{pmatrix},$$

а ее характеристический многочлен

$$\lambda^3 + 7,5\lambda^2 - k\lambda - 7,5(k + 1) = 0.$$

При $k < -1$ получаем устойчивый многочлен, а значит, и $spa(A_c) < 0$.

Рассмотрим еще один пример – статическую стабилизацию по выходу двухзвенного перевернутого маятника. Матрица такой системы равна [3]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зададим матрицу входа в виде

$$B^T = (0 \ 0 \ 1 \ 0),$$

а матрицу выхода в виде

$$C = (-18,0248 \ 19,9613 \ -4,0071 \ 10,5928).$$

Приведем C к виду (4). В качестве матрицы преобразования можно взять

$$S = \begin{pmatrix} -18,0248 & 19,9613 & -4,0071 & 10,5928 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате матрица входа и матрица системы в новом базисе, определяемые по формулам (8) и (9) соответственно, будут равны:

$$B^T = (-4,0071 \ 0 \ 0 \ 1),$$

$$A = \begin{pmatrix} 1,8844 & 4,7663 & -12,4226 & -10,4737 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,0944 & 1,7016 & -1,8844 & 0,3783 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу Хаутуса:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1,8844 & -4,7663 & 12,4226 & 10,4737 & -4,0071 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 & 0 \\ -0,0944 & -1,7016 & \lambda + 1,8844 & -0,3783 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем квадратную подматрицу:

$$\begin{pmatrix} -4,7663 & 12,4226 & 10,4737 & -4,0071 \\ \lambda & 0 & -1 & 0 \\ -1,7016 & \lambda + 1,8844 & -0,3783 & 0 \\ -2 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Функция определителя этой подматрицы, описывается многочленом

$$\lambda^3 + 4,5\lambda^2 + 3,29\lambda + 0,967 = 0.$$

Все коэффициенты этого многочлена положительные и, кроме того, удовлетворяют условиям теоремы Гурвица [5]. Приходим к выводу, что все корни такого многочлена расположены в \mathbb{C}^- . Условие теоремы также выполняется. Следовательно, статический регулятор по выходу существует. При $K = 1$ получаем $spa(A_c) < 0$.

6. Заключение

В статье показано, что для линейных систем, удовлетворяющих условию стабилизируемости по выходу, можно сформулировать критерий существования статического регулятора по выходу. Проверка такого условия проста и может быть выполнена стандартными методами линейной алгебры. В общем случае, когда система не является стабилизируемой по выходу, вопрос о существовании статического регулятора остается открытым, что порождает необходимость поиска дополнительных критериев.

Автор благодарен Дмитрию Владимировичу Баландину за ценные советы.

Литература

1. АНДРЕЕВ Ю.А. Управление конечномерными линейными объектами. – М.: Наука, 1976.
2. БАЛАНДИН Д.В., БИРЮКОВ Р.С., КОГАН М.М., ФЕДЮКОВ А.А. Оптимальная стабилизация тела в электромагнитном подвесе без изменения его положения // Известия РАН. ТиСУ. – 2017. – №3. – С. 12–24.

3. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств*. – М.: Физматлит, 2007.
4. КВАКЕРНААК Х, СИВАН Р. *Линейные оптимальные системы управления*. – М.: Мир, 1977.
5. МАЛКИН И.Г. *Теория устойчивости движения*. – М.: Наука, 1966.
6. МУХИН А.В. *О существовании статических регуляторов по выходу* // Управление большими системами. – 2022. – Вып. 96. – С. 16–30.
7. МУХИН А.В. *Пресечение множеств решений матричных неравенств в задачах синтеза статических регуляторов* // Управление большими системами. – 2022. – Вып. 100. – С. 107–119.
8. ПЕРОВ А.И., КОСТРУБ И.Д. *О спектральной абсолюте и логарифмической норме* // Математические заметки. – 2017. – №101. – С. 562–575.
9. ПОЛЯК Б.Т., ЩЕРБАКОВ П.С. *Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению* // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №5. – С. 4–46.
10. ПОСТНИКОВ М.М. *Устойчивые многочлены*. – М.: Наука, 1981.
11. ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч. *Матричный анализ*. – М.: Мир, 1989.
12. ASTOLFI A., COLANERI P. *Static output feedback stabilization of linear and nonlinear systems* // 39th Conf. on Decision and Control, Sydney, Australia, 2000.
13. HAUTUS M.L.J. *Controllability and observability conditions of linear autonomous systems* // Nedert. Acad. Wetensch. – 1969. – Proc. Ser. A72. – P. 443–448.
14. NEMIROVSKII A.A. *Several NP-hard problem arising in robust stability analysis* // Math. Control, Signals, Systems. – 1994. – Vol. 6. – P. 99–105.
15. SADABADI M. S., PEAUCELLE D. *From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey* // Annual Reviews in Control. – 2016. – Vol. 42. – P. 11–26.

16. SYRMOS V.L., ABDALLAH C.T., DORATO P., GRIGORIADIS K. *Static Output Feedback. A Survey* // Automatica. – 1997. – Vol. 33, No. 2. – P. 125–137.

THE STATIC OUTPUT FEEDBACK EXISTENCE CRITERION

Aleksey Mukhin, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, postgraduate student (myhin-aleksey@yandex.ru).

Abstract: The problem of finding criteria for the existence of stabilizing static output feedback for linear continuous stationary systems is considered. The fact is that the existing rank criteria for the existence of static state feedback are applicable only in cases where one of the input or output matrices has full rank. In all other cases, as a rule, frequent in practice, these criteria are not applicable. To solve the problem, a class of linear systems is introduced, for which a criterion for output feedback also exists and can be formulated as necessary and sufficient conditions. The main idea is to reduce the output matrix by means of a non-degenerate linear transformation to a certain block form.

Keywords: static output feedback, Hurvitz matrix, stabilizability.

УДК 517.977

ББК 22.18

DOI: 10.25728/ubs.2023.103.5

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким.*

*Поступила в редакцию 02.04.2023.
Опубликована 31.05.2023.*

МЕТОДЫ ВЫБОРА МЕДИАНЫ РАНЖИРОВАНИЯ СОГЛАСОВАННОСТИ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК ПО КРИТЕРИЮ БЛИЗОСТИ В РАНГОВОЙ ШКАЛЕ

Корнеенко В. П.¹

(ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

В развитии теории экспертных оценок выявлена исключительная роль расстояния и медианы ранжирования, известной как медиана Кемени. Однако для нахождения медианы ранжирований, представленных матрицами бинарных отношений по матричному критерию расстояния, не существует оптимального метода решения. Обоснованность оптимального решения задачи выбора медианы в пространстве ранговой шкалы измерения связана с тем, что между ранжированием, представленными матрицами бинарных отношений на множестве пар объектов, и ранжированием в ранговой шкале существует взаимнооднозначное соответствие. После нахождения медианы ранжирований важной задачей становится проверка согласованности мнений группы экспертов. Существующие статистические методы и методы ранговой корреляции не измеряют согласованность мнений экспертов, если под ней понимать меру близости между экспертными оценками объектов. В статье на конкретных примерах показано, что коэффициент конкордации Кендалла, до сих встречающийся в работах некоторых авторов, не позволяет реально оценивать согласованность ранжирований экспертов, что может приводить к ошибочным управленческим решениям. Предлагается метод оценки мнений как пары экспертов, так и группы экспертов в виде усреднённой согласованности экспертов относительно медианы ранжирований, представленной в ранговой шкале.

Ключевые слова: ранговая шкала, связанные (рациональные) ранги, медиана ранжирования объектов, матричный критерий, согласованность мнений экспертов.

1. Введение

Большое значение для практики имеет качественная оценка объектов (вариантов решений), которую проводят руководители в условиях дефицита времени или невозможности проведения количественных измерений. В связи с этим экспертные оценки –

¹ Виктор Павлович Корнеенко, к.т.н., доцент (vkorn@ipu.ru).

один из эффективных инструментов разработки и принятия управленческих решений [1, 3, 7, 21, 24, 30, 32, 33].

При многокритериальной оценке эффективности объектов в конкретной предметной области, оцениваемых экспертами, возникает задача выбора группового ранжирования объектов, представленных точечными или интервальными оценками [1, 5, 6, 20, 36, 37]. В развитии теории экспертных оценок выявлена исключительная роль медианы ранжирования [16, 20–22, 24].

В классической постановке задача построения результирующего ранжирования, известного как медиана Кемени, по матричному критерию близости ранжирований объектов, представленных матрицами бинарных отношений, относится к классу *NP*-полных комбинаторных задач [14]. В настоящее время для данного класса задач с матричным критерием не существует оптимального метода решения.

В связи с этим были предложены эвристические методы [16, 20, 22, 25]. По мнению автора работы [23], поскольку «...ответы экспертов измерены в порядковой шкале, а потому для них неправомерно проводить усреднение методом средних арифметических», то в [24] предлагается «метод построения кластеризованной ранжировки, согласованной со всеми рассматриваемыми кластеризованными ранжировками. В результате упорядоченность кластеров отражает общее мнение экспертов, точнее, то общее, что содержится одновременно во всех исходных ранжировках». Однако процедура построения «кластеризованной ранжировки по медианам рангов» не позволяет количественно определить степень согласованности мнений экспертов.

После того как решена проблема построения медианы ранжирования объектов, возникает задача оценки степени согласованности мнений экспертов при решении различных прикладных задач [2, 9, 10, 18, 26, 27, 34].

Существующие статистические методы [5] и методы ранговой корреляции М. Кендалла [12] не измеряют согласованность мнений экспертов, если под ней понимать меру близости между экспертными ранжированиями объектов.

Несмотря на то, что коэффициент конкордации (согласованности) Кендалла не позволяет точно оценивать согласованность

ранжирований экспертов в ранговой шкале, он до сих пор активно применяется для оценки согласованности мнений экспертов при решении прикладных задач [18, 27].

Так например, в работе [18, с. 57] не удалось в службе медицины катастроф принять правильное управленческое решение так как «... к сожалению, коэффициент конкордации не позволяет ответить на вопрос, какие из данных групп гемостатических средств можно исключить, а какие оставить».

В данной статье предлагается оптимизационный метод построения медианы ранжирования и новый подход оценивания степени согласованности мнений экспертов для объектов, измеренных в порядковой (ранговой, балльной) шкале и представленных в виде элементов (векторов) метрического пространства.

2. Преобразования экспертных оценок объектов в градации ранговой шкалы метрического пространства

Рассмотрим преобразования экспертных оценок в произвольной порядковой или количественной шкале измерения в градации ранговой шкалы метрического пространства.

Пусть $A = \{a_k | k = \overline{1, n}\}$ – множество объектов, n – число объектов; $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_i | i = \overline{1, m}\}$ – множество экспертов, оценивающие объекты в произвольной шкале измерения, m – число экспертов; $X_i = \{x_i^{(k)} | k = \overline{1, n}\}$ – множество результатов экспертного оценивания a_k объектов i -м экспертом.

Тогда результаты экспертного оценивания объектов можно представить в виде матрицы $M = (x_i^{(k)}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ размерности $n \times m$, где $x_i^{(k)}$ – результат экспертного оценивания объекта a_k по \mathcal{E}_i экспертом в произвольной порядковой балльной или количественной шкале измерения.

Рассмотрим ранжирование объектов, представляющие строгие отношения предпочтения. В результате сравнения всех объектов составляется упорядоченная последовательность

$$(1) \quad P_i: a_{i_1} > a_{i_2} > \dots > a_{i_k} > \dots > a_{i_n},$$

где объект с первым номером является наиболее предпочтительным из всех объектов, объект со вторым номером менее предпочтителен относительно первого объекта, но предпочтительнее всех остальных объектов, и т. д.

Свойствам отношения строгого порядка удовлетворяет числовая система шкалы измерения, элементами которой являются действительные числа, связанные между собой отношением строгого неравенства $>$ ($<$) [28]. Это означает, что упорядочению объектов P_i (1) экспертами $\mathcal{E}_i, i = \overline{1, m}$, соответствует упорядочение чисел, в которой наиболее предпочтительному объекту a_1 приписывается наибольшее число $x_i^{(1)}$:

$$(2) \quad x_i^{(1)} > x_i^{(2)} > \dots > x_i^{(n)} \text{ (убывающая последовательность).}$$

Возможна и обратная последовательность

(3) $x_i^{(1)} < x_i^{(2)} < \dots < x_i^{(n)}$ (возрастающая последовательность), в которой наиболее предпочтительному объекту a_1 приписывается наименьшее число $x_i^{(1)}$, характеризующее место или рейтинг объекта, и, по мере возрастания предпочтения в (3), объектам приписываются большие числа.

Соответствие между упорядоченной последовательности (1) и последовательностью (2) или (1) и (3), т.е. их изоморфизм или гомоморфизм можно осуществить, выбирая любые числовые представления.

В практике ранжирования чаще всего применяется числовое представление последовательностей (2) и (3) в виде натуральных чисел:

$$(4) \quad x_i^{(1)} = n, x_i^{(2)} = n - 1, \dots, x_i^{(n)} = 1$$

либо

$$(5) \quad x_i^{(1)} = 1, x_i^{(2)} = 2, \dots, x_i^{(n)} = n,$$

т.е. используются числовые последовательности типа (4) и (5).

При прямом ранжировании (2) числа $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(n)}$, удовлетворяющие соотношению (4) называются рангами, а при обратном ранжировании (3) и удовлетворяющие соотношению (5) называются местами и обычно обозначаются в виде

$$r_i^{(1)}, r_i^{(2)}, \dots, r_i^{(n)}.$$

В этом случае ранжирование n объектов $a_k \in A$ экспертом \mathcal{E}_i можно представить в виде векторной оценки

$$(6) \quad \vec{r}_i = (r_i^{(1)}, r_i^{(2)}, \dots, r_i^{(k)}, \dots, r_i^{(n)}).$$

В практике ранжирования объектов допускаются как отношения строгого упорядочения, так и нестрогого упорядочения, т.е. эквивалентность некоторых групп объектов.

Для эквивалентных объектов удобно, с точки зрения технологии последующей обработки экспертных оценок, назначать одинаковые ранги, равные среднему арифметическому значению рангов, присваиваемых одинаковым объектам. Такие ранги называют **связанными рангами** [12].

Пример 1. Пусть, кроме отношений строгого порядка, между 10 объектами имеется отношение эквивалентности. Упорядочение объектов в этом случае может иметь следующий вид:

$$P_i: a_1 > a_2 > \{a_3 \approx a_4 \approx a_5\} > a_6 > \{a_7 \approx a_8\} > \{a_9 \approx a_{10}\}.$$

В этом упорядочении эквивалентны между собой объекты a_3, a_4, a_5 , также a_7, a_8 и a_9, a_{10} , а само упорядочение образует нестрогое линейное упорядочение. Связанные ранги объектов a_3, a_4, a_5 будут одинаковыми и равными:

$$r_i^{(3)} = r_i^{(4)} = r_i^{(5)} = \frac{3+4+5}{3} = 4.$$

Связанные ранги объектов a_7, a_8 будут одинаковыми и равными их среднему арифметическому:

$$r_i^{(7)} = r_i^{(8)} = \frac{7+8}{2} = 7,5,$$

ранги a_9, a_{10} также будут одинаковыми и равными их среднему арифметическому:

$$r_i^{(9)} = r_i^{(10)} = \frac{9+10}{2} = 9,5.$$

Как следует из этого примера, связанные ранги могут оказаться дробными, т.е. рациональными числами. Удобство использования рангов, в том числе связанных рангов, заключается в том, что сумма рангов n объектов равна сумме натуральных чисел от единицы до n :

$$(7) \quad \sum_k^n r_i^{(k)} = \frac{1+n}{2} \cdot n, \quad i = \overline{1, m}.$$

При этом любые комбинации связанных рангов не изменяют эту сумму.

Определение 1. Будем называть ранговую шкалу канонической, если в качестве градаций при строгом ранжировании n объектов используются натуральные числа от 1 до n . В зависимости от направления возрастания предпочтения (прямого или обратного) каноническую ранговую шкалу будем называть соответственно прямой или обратной канонической ранговой шкалой.

При нестрогом ранжировании со связанными рангами натуральные числа заменяются средними арифметическими рангов эквивалентных объектов. С учётом как строгого упорядочения, так и нестрогого упорядочения, ранжирование объектов будем представлять в общем виде:

$$(8) \quad P_i: a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq \dots \geq a_{i_k} \geq \dots \geq a_{i_n},$$

где $a_{i_v} \geq a_{i_s} \Rightarrow (a_{i_v} > a_{i_s}) \vee (a_{i_v} \approx a_{i_s}) \forall v, s \in \overline{1, n}$.

Для порядкового типа шкал измерения в качестве допустимых преобразований принято множество монотонно возрастающих преобразований [28]. Таким преобразованием, например, является $\varphi(x) = x^2$, которое переводит линейные шкальные балльные оценки объектов в нелинейные. При этом упорядочение между объектами хотя и сохраняется, но сравнение объектов после преобразования в шкале разности теряет смысл, т.е. такие шкалы не являются эквивалентными.

В связи с этим переход от порядковой шкалы к количественной введём с помощью операции метризации расстояния между ранговыми оценками объектов, включая и оценки со связанными рангами. Рассмотрим векторную оценку \vec{r}_i (6) ранжирования P_i (8) объектов как точку в пространстве \mathbb{R}^n .

Очевидно, что множество $R = \{\vec{r}_i \in \mathbb{R}^n | i = \overline{1, m}\}$ векторов \vec{r}_i (6) из \mathbb{R}^n с расстоянием в виде евклидовой l_2 -нормы:

$$\rho_{l_2}(\vec{r}_i, \vec{r}_t) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (r_i^{(k)} - r_t^{(k)})^2}.$$

образует n -мерное евклидово пространство (R, ρ_{l_2}) .

Расстояние между ранжированиями P_i и P_t можно представить как расстояния между векторными оценками в виде l_1 -нормы:

$$(9) \quad \rho_{l_1}(\vec{r}_i, \vec{r}_t) = \sum_{k=1}^n |r_i^{(k)} - r_t^{(k)}|,$$

в котором отображение $\rho_1: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ также задаёт метрику пространства (R, ρ_{l_1}) .

Легко убедиться, что введённые расстояния между ранжированиемми объектов удовлетворяют традиционным аксиомам метрического пространства, а именно, аксиомам тождества, симметрии и треугольника [13].

3. Задача выбора медианы ранжирования по критерию близости матриц бинарных отношений

При анализе экспертных данных возникает задача проверки согласованности мнений экспертов, которой предшествует решение задачи получения коллективного (результатирующего) мнения экспертов. Для такой проверки согласованности вначале целесообразно использовать методы построения «коллективного мнения» [34].

Одним из первоначальных методов построения результатирующего ранжирования (медианы) n объектов по предпочтительности m экспертами был предложен Дж. Кемени и Дж. Снеллом в работе 1962 г. под названием «Mathematical Models in the Social Sciences» [35] и изданная на русском языке в 1972 г. [11].

В работе авторов упорядочения объектов представлены матрицами бинарных отношений на множестве пар объектов.

Ранжирование P_i (8) экспертами представляются в виде квадратных матриц бинарных отношений частичного и линейного порядка:

$$(10) M(P_i) = [p_{ks}^i], a_k, a_s \in A \quad \forall k, s = \overline{1, n},$$

где $p_{ks}^j = \begin{cases} 1, & \text{если объект } a_k \text{ в } P_j \text{ ранжирован} \\ & \text{предпочтительнее объекта } a_s; \\ -1, & \text{если объект } a_s \text{ в } P_j \text{ ранжирован} \\ & \text{предпочтительнее объекта } a_k; \\ 0, & \text{если объекты } a_s \text{ и } a_k \text{ в } P_j \text{ ранжированы} \\ & \text{равноценны.} \end{cases}$

Расстояние между произвольными ранжированиеми P_i и P_t можно рассчитывать по матричным l_1 -нормой и l_2 -нормой по формулам [31]

$$(11) \quad d_{l_1}(P_i, P_t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n |p_{ks}^i - p_{ks}^t|;$$

$$d_{l_2}(P_i, P_v) = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n (p_{ks}^i - p_{ks}^v)^2}.$$

В работе [11] даётся следующее определение медианы ранжирований.

Определение 2. Медианой данного множества упорядочений P_1, \dots, P_m (не обязательно различных) называется такое упорядочение P_* , для которой сумма расстояний

$$(12) \quad D_1(P_i, P_*) = \sum_{i=1}^m d(P_i, P_*)$$

минимальна, а средним значением – упорядочение P_* , для которой минимальна величина

$$(13) \quad D_2(P_i, P_*) = \sum_{i=1}^m d^2(P_i, P_*).$$

Расстояние (12), часто используемое как «расстояние Кемени», между произвольными ранжирований P_i и P_t , представленными в матричном виде $M(P_i)$, можно вычислить с помощью элементов, расположенных над главной диагональю по формуле

$$d(P_i, P_t) = \sum_{k < q} |p_{ks}^i - p_{ks}^t|.$$

По сути задача построения медианы Кемени по матричным критериям (12) или (13) относится к классу комбинаторных задач. Действительно, каждому произвольному ранжированию

$$P_\sigma: a_{\sigma_1} \geq a_{\sigma_2} \geq \dots \geq a_{\sigma_n}$$

соответствует матрица бинарных отношений $M(P_\sigma) = [p_{ks}^\sigma]$, $k, s = \overline{1, n}$, объектов, где $\sigma = (i_1, \dots, i_n)$ – перестановка на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ номеров объектов $a_k \in A$.

Тогда исходная задача выбора результирующего ранжирования $P_*(P_1, \dots, P_m)$ относительно мнений m экспертов сводится к поиску перестановки $\sigma^* = (i_1^*, \dots, i_n^*)$ объектов ранжирования, минимизирующая сумму расстояний до исходных ранжирований P_i , $i = \overline{1, m}$:

$$(14) \quad P_*(P_1, \dots, P_m) = \arg \min_{(i_1, \dots, i_n)} \sum_{i=1}^m d(P_i, P_\sigma),$$

где $d(P_i, P_\sigma) = \sum_{k < s} |p_{ks}^i - p_{ks}^\sigma|$.

Формально постановка задачи (14) построения медианы ранжирования относится к классу комбинаторных NP -полных

задач [14] при полном переборе множество ранжирований объектов состоит из $n!$ всевозможных перестановок только строгих, не считая нестрогих, которых тоже не менее $n!$.

Поэтому в [25] вместо классической медианы Кемени предлагается применять «модифицированную медиану Кемени», всегда совпадающую с мнением одного из экспертов, что позволяет избежать эффекта «центра дырки от бублика», т.е. по мнению автора, если предположить, что мнения экспертов равномерно распределены по поверхности тора, то классическая медиана Кемени – центр «дырки от бублика», что делает её расчёт бессмысленным (см. рис. 2 в [11, с. 30]).

Понятно, что такая «модифицированная» медиана медианой ранжирования не является. Представлению ранжирования (мнения эксперта) в виде матрицы бинарных отношений на множестве объектов соответствует связный граф, в котором вершинами служат объекты, а направления дуг задают порядок предпочтения.

4. Решение задачи выбора медианы Кемени по критерию близости ранжирований в ранговой шкале измерения

4.1. ВЗАИМОСВЯЗЬ РАНЖИРОВАНИЙ В ГРАДАЦИЯХ РАНГОВОЙ ШКАЛЫ С МАТРИЦАМИ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ НА МНОЖЕСТВЕ ПАР ОБЪЕКТОВ

Очевидно, что представление предпочтений объектов в виде матриц бинарных отношений не позволяет метрически определить расстояния между смежными или любыми парами объектов $a_s, a_k \in A$ ранжирования P_i (8). Однако это легко сделать, если установить взаимосвязь между ранговыми оценками объектов ранжирований и элементами матрицы $M(P_i)$ (10) бинарных отношений.

Теорема 1. Между ранговыми оценками объектов a_k ранжирований P_i и элементами $p_{ks}^i, i = \overline{1, m}$, матрицы $M(P_i)$ (10) бинарных отношений существует биекция, которую можно представить в виде соотношений:

а) для объектов с обратным порядком предпочтения

$$(15) r_{i\uparrow}^{(k)} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{s=1, k \neq s}^n (1 - p_{ks}^i);$$

б) для объектов с прямым порядком предпочтения

$$(16) r_{i\downarrow}^{(k)} = n - \frac{1}{2} \sum_{s=1, k \neq s}^n (1 - p_{ks}^i).$$

где \uparrow – обозначение возрастающей последовательности при обратном порядке предпочтения объектов; \downarrow – обозначение убывающей последовательности при прямом порядке предпочтения объектов.

Доказательство. Вначале, не умаляя общности, будем считать, что объекты строго ранжированы P_i (1) с прямым порядком предпочтения (наиболее предпочтительному объекту приписывается наибольшее число).

Тогда этому ранжированию будет соответствовать векторная оценка в ранговой шкале:

$$(17) \vec{r}_{i\downarrow} = (n, n-1, \dots, n-k, \dots, 1),$$

которой можно поставить в однозначное соответствие квадратную матрицу бинарных отношений линейного порядка:

$$(18) M(P_i) = [p_{ks}^i], k, s = \overline{1, n},$$

где $p_{ks}^i = 1$, если $k < s$ ($a_k > a_s$); $p_{ks}^i = -1$, если $k > s$ ($a_s > a_k$).

Обратно от элементов матрицы $M(P_i)$ (18) перейдём к рангам $\vec{r}_{i\downarrow}$ (17) ранжирования P_i (1).

Так как

$$p_{ks}^i = -1 \forall k > s = 1, 2, \dots, k-1 (a_s > a_k) \Rightarrow 1 - p_{ks}^i = 2;$$

$$p_{ks}^i = +1 \forall k < s = k+1, k+2, \dots, n (a_k > a_s) \Rightarrow 1 - p_{ks}^i = 0;$$

$$p_{ks}^i = 0, \text{ если } k = s, \text{ то для } r_{i\downarrow}^{(k)} \text{ (17) имеем}$$

$$r_{i\downarrow}^{(k)} = n - \frac{1}{2} \left[\sum_{s=1}^{k-1} (1 - p_{ks}^i) + \sum_{s=k+1}^n (1 - p_{ks}^i) \right] =$$

$$= n - \frac{1}{2} [2(k-1) + 0] = n - k + 1.$$

Откуда для $k = \overline{1, n}$ получим компоненты вектора $\vec{r}_{i\downarrow}$ (17).

Легко убедиться, что для равноважных объектов, для которых $p_{ks}^i = 0, k \neq s$, по формуле $r_{i\downarrow}^{(k)}$ (16) получим связанные ранги.

Пусть, например, объекты a_1 и a_2 равноважны: $a_1 \approx a_2$.

Убедимся, что для них связанный ранг равен $\frac{n+(n-1)}{2} = n - \frac{1}{2}$.

Так как $p_{12}^i = 0$; $p_{1s}^i = 1 \forall 3 \leq s < n$, то для a_1 имеем:

$$r_{i\downarrow}^{(1)} = n - \frac{1}{2} \left[(1 - p_{12}^i) + \sum_{s=3}^n (1 - p_{1s}^i) \right] = n - \frac{1}{2}.$$

Поскольку $p_{21}^i = 0$; $p_{2s}^i = 1 \forall s \in [3, n]$, то для a_2 имеем:

$$r_{i\downarrow}^{(2)} = n - \frac{1}{2} \left[(1 - p_{21}^i) + \sum_{s=3}^n (1 - p_{2s}^i) \right] = n - \frac{1}{2}$$

Аналогично легко вычисляется связанный ранг для любой группы равноважных объектов, что и требовалось доказать. ■

Пример 2. Рассмотрим ранжирования четырёх объектов $P_i: \{a_1 \approx a_2\} > a_3 > a_4$, для которых матрица бинарного нестрогого отношения примет вид:

$$M(P_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ранги для объектов, например, с прямым порядком предпочтения, по элементам матрицы $M(P_i)$:

$$r_{i\downarrow}^{(1)} = 4 - \frac{1}{2} [(1 - 0) + (1 - 1) + (1 - 1)] = 3,5;$$

$$r_{i\downarrow}^{(2)} = 4 - \frac{1}{2} [(1 - 0) + (1 - 1) + (1 - 1)] = 3,5;$$

$$r_{i\downarrow}^{(3)} = 4 - \frac{1}{2} [(1 + 1) + (1 + 1) + (1 - 0)] = 2;$$

$$r_{i\downarrow}^{(4)} = 4 - \frac{1}{2} [(1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1)] = 1;$$

Откуда $\vec{r}_{i\downarrow} = (3,5; 3,5; 2; 1)$, а для обратного порядка предпочтения вектор ранговых оценок имеет вид

$$\vec{r}_{i\uparrow} = (1,5; 1,5; 3; 4).$$

4.2. МЕТОД ВЫБОРА МЕДИАНЫ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА БЛИЗОСТИ В РАНГОВОЙ ШКАЛЕ

Задача нахождения медианы (результатирующего) ранжирования $P_*(P_1, \dots, P_m)$ в ранговой шкале заключается в нахождении переменных $\vec{q}_* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$, доставляющих при этом минимальное значение квадрату евклидовой нормы:

$$(19) Q(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_m) = \sum_{j=1}^m \rho(\vec{r}_i, \vec{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (r_i^{(k)} - q_k)^2,$$

где $\rho(\vec{r}_i, \vec{q}) = \sum_{k=1}^n (r_i^{(k)} - q_k)^2$.

Таким образом, математическая постановка задачи сводится к минимизации критерия (19) по переменным q_k , $k = \overline{1, n}$:

$$(20) \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (r_i^{(k)} - q_k)^2 \rightarrow \min_{(q_1, \dots, q_n)}$$

при условии:

$$(21) \sum_{k=1}^n q_k = \frac{1+n}{2} \cdot n.$$

Условие (21) означает, что поскольку для оценок объектов в шкале со связанными рангами выполняется соотношение (7), то это соотношение должно выполняться и для оценок объектов медианы ранжирования по переменным q_k . В обосновании построения результирующего ранжирования объектов по критерию минимума расстояния в ранговой шкале лежит следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть ранжирования P_i , $i = \overline{1, m}$, объектов экспертами представлены в виде оценок $r_i^{(k)} = r_i(a_k)$, $k = \overline{1, n}$, с прямым (обратным) порядком предпочтения объектов в ранговой шкале с учётом связанных рангов.

Тогда и только тогда оптимальным решением задачи (20)–(21) по переменным q_k , $k = \overline{1, n}$, является вектор

$$(22) \vec{q}_* = (q_1^*, \dots, q_k^*, \dots, q_n^*),$$

компонентами которого являются среднеарифметические рациональные числа рангов объектов по числу m ранжирований:

$$(23) q_k^* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_i^{(k)}, \forall k = \overline{1, n},$$

и результирующее ранжирование:

$$P_*: a_{k_1} \succ a_{k_2} \succ \dots \succ a_{k_n},$$

объектам которого поставим в однозначное соответствие ранг в канонической ранговой шкале:

а) при прямом направлении (строгом отношении) предпочтения объектов

$$q_{k_1}^* > q_{k_2}^* > \dots > q_{k_n}^* \Rightarrow r_{k_1}^* = n; r_{k_2}^* = n-1; \dots; r_{k_n}^* = 1;$$

б) при обратном направлении (строгом отношении) предпочтения объектов:

$$q_{k_1}^* < q_{k_2}^* < \dots < q_{k_n}^* \Rightarrow r_{k_1}^* = 1; r_{k_2}^* = 2; \dots; r_{k_n}^* = n;$$

При равенстве шкальных оценок $q_{k+1}^* = q_{k+2}^* = \dots = q_{k+t}^*$

объектам, занимающим места с $(k+1)$ -го по $(k+t)$ -е, присвоим связанный ранг равный:

$$r_{k+i}^* = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (k+i) = k + \frac{1+t}{2}, \forall i = \overline{1, t}.$$

Доказательство теоремы базируется на построении функции Лагранжа для задачи выпуклого программирования (20)–(21) и выполнении необходимых и достаточных условиях существования минимума функции Лагранжа.

Поскольку

$\sum_{k=1}^n q_k^* = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_i^{(k)} \right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n r_i^{(k)} \right) = \frac{1+n}{2} \cdot n$, то наряду с понятием связанных рангов [12] приходим к новому понятию дробных (рациональных) рангов \vec{q}_* (23).

Сравним расстояния между ранжированиеми, представленными в ранговой шкале, и матрицами бинарных отношений на следующем примере.

Пример 3. Пусть ранжирования объектов экспертами представлены в виде (здесь исходные данные взяты из примера на стр. 75 работы [16]):

$$P_1: a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5, P_2: a_2 > a_5 > a_1 > a_4 > a_3,$$

$$P_3: a_3 > a_2 > a_1 > a_4 > a_5, P_4: a_1 > a_5 > a_3 > a_2 > a_4,$$

$$P_5: a_4 > a_3 > a_1 > a_5 > a_2,$$

которым поставим в соответствие ранги с прямым порядком предпочтения объектов (см. столбцы 2–6 таблицы 1).

Медиана ранжирования (см. столбец 9 таблицы 1), полученная по мажоритарному правилу имеет вид [16]:

$$(24) P_*: a_1 > a_3 > a_2 > a_4 > a_5.$$

Таблица 1. Исходные данные в ранговой шкале

a _k	Ранги ранжирований объектов							Медиана	
	\vec{r}_1	\vec{r}_2	\vec{r}_3	\vec{r}_4	\vec{r}_5	\vec{q}_*	\vec{r}_*	P_*	Q_*, R_*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_1	5	3	3	5	3	3,8	5	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \approx a_3 \\ a_4 \approx a_5 \end{pmatrix}$
a_2	4	5	4	2	1	3,2	3,5		
a_3	3	1	5	3	4	3,2	3,5		
a_4	2	2	2	1	5	2,4	1,5		
a_5	1	4	1	4	2	2,4	1,5		
Σ	15	15	15	15	15	15	15		

Решение оптимизационной задачи представим в дробных и связанных рангах в виде векторных оценок:

$$\vec{q}_* = (3,8; 3,2; 3,2; 2,4; 2,4); \vec{r}_* = (5; 3,5; 3,5; 1,5; 1,5),$$

которым соответствует одно и тоже ранжирование (см. столбец 10 таблицы 1):

$$Q_*: a_1 > \{a_2 \approx a_3\} > \{a_4 \approx a_5\} \text{ и } R_*: a_1 > \{a_2 \approx a_3\} > \{a_4 \approx a_5\}.$$

Сравним результаты формирования медианы Кемени по мажоритарному правилу и как решение оптимизационной задачи.

Рассчитаем меру близости результирующих ранжирований до исходных ранжирований $P = \{P_i\}, i = 1 \div 5$, в градациях матриц бинарных отношений $\{-1, 0, +1\}$ и в градациях ранговой шкалы.

По формулам расстояния:

$$(25) \mathcal{D}_1(P_i, Y_*) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m d(P_i, Y_*) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{k < s} |p_{ks}^i - p_{ks}^*|;$$

$$(26) \mathcal{D}_2(P_i, Y_*) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m d^2(P_i, Y_*) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{k < s} (p_{ks}^i - p_{ks}^*)^2;$$

$$(27) \mathcal{R}_1(\vec{r}_i, \vec{x}_*) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \rho(\vec{r}_i, \vec{x}_*) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n |r_i^{(k)} - r_k^*|;$$

$$(28) \mathcal{R}_2(\vec{r}_i, \vec{x}_*) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \rho^2(\vec{r}_i, \vec{x}_*) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (r_i^{(k)} - r_k^*)^2,$$

где $Y_* \in \{Q_*, R_*, P_*\}$ – ранжирования; $\vec{x}_* \in \{\vec{q}_*, \vec{r}_*, \vec{p}_*\}$ – векторные оценки соответствующие ранжированием Q_*, R_*, P_* .

Результаты сравнений ранжирований в ранговой шкале и градаций матрицы бинарных отношений представлены в таблице 2.

Из таблицы 2 видно, что медиана Кемени, вычисленная в ранговой шкале, не совпадает с медианой Кемени, полученной по мажоритарному правилу: P_* (24).

Таблица 2. Оценки ранжирований различными методами

Медиана	Ранговый критерий		Матричный критерий	
Q_*	$\mathcal{R}_1(\vec{r}_i, \vec{q}_*)$	$\mathcal{R}_2(\vec{r}_i, \vec{q}_*)$	$\mathcal{D}_1(P_i, Q_*)$	$\mathcal{D}_2(P_i, Q_*)$
	5,68	8,56	7,2	12,4
R_*	$\mathcal{R}_1(\vec{r}_i, \vec{r}_*)$	$\mathcal{R}_2(\vec{r}_i, \vec{r}_*)$	$\mathcal{D}_1(P_i, R_*)$	$\mathcal{D}_2(P_i, R_*)$
	6,0	11,8	7,2	12,4
P_*	$\mathcal{R}_1(\vec{r}_i, \vec{p}_*)$	$\mathcal{R}_2(\vec{r}_i, \vec{p}_*)$	$\mathcal{D}_1(P_i, P_*)$	$\mathcal{D}_2(P_i, P_*)$
	6,0	12,8	6,8	13,6

Однако при этом медиана ранжирования Q_* , как оптимальное решение задачи (20)–(21), по сравнению с мажоритарной медианой P_* имеет наименьшую среднюю сумму расстояний по ранговым критериям $\mathcal{R}_1(\vec{r}_i, \vec{q}_*)$, $\mathcal{R}_2(\vec{r}_i, \vec{q}_*)$, $\mathcal{R}_2(\vec{r}_i, \vec{r}_*)$ и матричным критериям $\mathcal{D}_2(P_i, Q_*)$, $\mathcal{D}_2(P_i, R_*)$.

Возникает вопрос о связи расстояний между ранжированием, представленными в ранговой шкале, и матрицами бинарных отношений для произвольных ранжирований.

Ответ даёт следующая теорема.

Теорема 3. Пусть P_i , $i = \overline{1, m}$ – упорядочения n объектов $a_k \in A$ группой из m экспертов, представленные в виде векторных оценок \vec{r}_i (6) в ранговой шкале измерения и матрицами бинарных отношений.

Тогда расстояния $\mathcal{R}_1(\vec{r}_i, \vec{r}_t)$ (27) и $\mathcal{D}_1(P_i, P_t)$ (25), $\mathcal{R}_2(\vec{r}_i, \vec{r}_t)$ (28) и $\mathcal{D}_2(P_i, P_t)$ (26) между парой произвольных ранжирований P_i и P_t , удовлетворяют неравенствам:

$$\mathcal{R}_1(\vec{r}_i, \vec{r}_t) \leq \mathcal{D}_1(P_i, P_t) \text{ и } \mathcal{R}_2(\vec{r}_i, \vec{r}_t) \leq \mathcal{D}_2(P_i, P_t).$$

Доказательство теоремы см. в [15]

5. Метод оценки суждений пары экспертов в ранговой шкале

5.1. СУЩЕСТВУЮЩИЕ ПОДХОДЫ СОГЛАСОВАННОСТИ МНЕНИЙ ЭКСПЕРТОВ В РАНГОВОЙ ШКАЛЕ

Для оценки степени согласованности ранжирований экспертов в ранговой шкале М.Д. Кендалем в работе 1948 года «Ранговые корреляции», изданная в нашей стране только в 1970 году, были предложены формулы, по которым можно было определить «степень соответствия между этими двумя последовательностями порядковых оценок, или, другими словами, измерить тесноту ранговой корреляции» [12, с. 10].

Так, для пары строгих ранжирований предлагается использовать коэффициент Спирмэна в ранговой шкале в виде следующего соотношения:

$$(29) \rho = 1 - \frac{6S(d^2)}{n^3 - n} = 1 - \frac{6 \sum_{k=1}^n d_k^2}{n^3 - n},$$

$$\text{где } d_k^2 = \sum_{k=1}^n \left(r_i^{(k)} - r_t^{(k)} \right)^2.$$

Для согласованности группы из m экспертов в работе М. Кендэла представлен коэффициент конкордации, который можно определить как нормированную дисперсию, для строгого ранжированных объектов в ранговой шкале в виде формулы:

$$(30) W = \frac{12S}{m^2(n^3-n)},$$

где $S = \sum_{k=1}^n (S_k - \bar{S})^2$ – квадраты отклонений $S_k = \sum_{i=1}^m r_i^{(k)}$ суммы рангов a_k объекта от $\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k$ среднего значения n объектов

В случае ранжирований со связанными рангами коэффициент конкордации можно выразить следующим образом [12, с. 106]:

$$(31) W = \frac{12S}{m^2(n^3-n)-m \sum_{j=1}^m T_i}, T_i = \sum_{k=1}^{H_i} (h_k^3 - h_k),$$

где H_i – число групп равных рангов в P_i ранжировке; h_k – число в последовательности равных рангов в H_k группе связанных рангов при ранжировании \mathcal{E}_i экспертом.

В работе [34, с. 79] предложено «применять в качестве коэффициентов согласованности статистики, эквивалентные средним коэффициентам ранговой корреляции». В качестве другого подхода предлагается выделять в ранжировках упорядоченные кластеры объектов [6]. Однако при этом отсутствует количественная оценка согласованности экспертов.

В прикладных статьях до сих пор в качестве количественной оценки используются коэффициенты ранговой корреляции [2, 4, 8, 17, 27, 29].

Покажем, что коэффициент ранговой корреляции К. Спирмэна, подробно рассмотренный в работе Кендэла М. [12], не определяет степень согласованности между двумя ранжированими.

Так, на стр. 9–16 работы Кендэла М. [12] приводится пример строгого ранжирования группы из 10 учеников в соответствии с их способностями по математике и музыке в ранговой шкале.

Таблица 3. Ранги учеников по математике и музыке

Ученики	I	F	C	B	J	E	A	H	G	D	Сумма
Математика)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	55
Музыка	8	9	3	7	4	1	5	2	6	10	55

Вычисленный по формуле (29) коэффициент К. Спирмена оказался равен $\rho = -0,103$. Возникает вопрос, что означает отрицательное значение коэффициента К. Спирмэна? Покажем, что коэффициент ρ (29) – это угловой коэффициент α при переменной x уравнения линейной регрессионной модели [19]:

$$y = \alpha x + \beta + \varepsilon,$$

где α, β – параметры модели; ε – случайная компонента.

Вычисление параметров α, β сводится к аппроксимации набора данных $\{x_k, y_k\}, k = \overline{1, n}$, линейной функцией

$$f(x) = \alpha x + \beta,$$

минимизирующей функционал:

$$F(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^n [y_k - (\alpha x_k + \beta)]^2.$$

Откуда оценки параметров линейной модели:

$$(32) \hat{\alpha} = \frac{n \sum_{k=1}^n x_k y_k - (\sum_{k=1}^n x_k)(\sum_{k=1}^n y_k)}{n \sum_{k=1}^n x_k^2 - (\sum_{k=1}^n x_k)^2}; \hat{\beta} = \bar{y} - \hat{\alpha} \bar{x},$$

$$\text{где } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k; \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k.$$

Рассчитаем по данным таблицы 3 коэффициенты линейной модели, приняв за независимую переменную x «музыку», а за стохастическую y – «математику»:

$$\hat{\alpha} = \frac{10 \times 294 - 55 \times 55}{10 \times 385 - 3025} \approx -0,103; \hat{\beta} = 5,5 - (-0,103) \times 5,5 \approx 6,07.$$

График теоретической линии регрессии

$$\hat{y} = -0,103x + 6,07$$

и график эмпирической линии регрессии, соединяющей точки рангов учеников по музыке относительно возрастающих рангов по математике представлен на рис. 1.

Из графика видно, что значение коэффициента уравнения регрессии $\hat{\alpha}$ (32), численно совпадающее с коэффициентом ранговой корреляции ρ (29) К. Спирмэна, характеризует угол наклона прямой линии регрессии к оси абсцисс.

В данном случае отрицательное значение коэффициента К. Спирмэна, равное $-0,103$, означает, что с возрастанием рангов по математике способности к музыке ученика падает.

Таким образом, коэффициент ранговой корреляции К. Спирмэна всего лишь отражает возрастание или убывание значений линейного уравнения регрессии, когда один из факторов выполняет роль независимой детерминированной

переменной, а другой – зависимую стохастическую.



Рис. 1. Графики теоретической и эмпирической линий регрессии

В этом случае коэффициент ранговой корреляции К. Спирмэна не может служить мерой близости мнений двух экспертов. Приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. Для пары строгих ранжирований n объектов с прямым (обратным) порядком предпочтений объектов, представленных в ранговой шкале, значение коэффициента ранговой корреляции К. Спирмэна ρ (29) совпадает со значением коэффициента $\hat{\alpha}$ (32), т.е. $\rho = \hat{\alpha}$, при переменной x уравнения линейной регрессионной модели при условии равенства числа рангов числу оцениваемых объектов.

Доказательство. Так как $\sum_{k=1}^n r_i^{(k)} = \frac{1+n}{2}n$, $r_i^{(k)} = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$, то для утверждения теоремы достаточно показать, что правые части ρ (29) и $\hat{\alpha}$ (31) совпадают. Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (r_i^{(k)} - r_j^{(k)})^2 &= \sum_{k=1}^n (r_i^{(k)})^2 - 2 \sum_{k=1}^n r_i^{(k)} r_j^{(k)} + \sum_{k=1}^n (r_j^{(k)})^2 = \\ &= 2 \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n r_i^{(k)} r_j^{(k)} = 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \sum_{k=1}^n r_i^{(k)} r_j^{(k)}, \end{aligned}$$

тогда

$$(33) \rho = 1 - \frac{6 \sum_{k=1}^n (r_i^{(k)} - r_j^{(k)})^2}{n^3 - n} = \frac{12}{n^3 - n} \cdot \sum_{k=1}^n r_i^{(k)} r_j^{(k)} - 3 \cdot \frac{n+1}{n-1}.$$

Подставляя $x_k = r_i^{(k)}$, $y_k = r_j^{(k)}$ и

$$\sum_{k=1}^n r_i^{(k)} = \sum_{k=1}^n k = \frac{1+n}{2} n$$

в $\hat{\alpha}$ (32), получим:

$$(34) \hat{\alpha} = \frac{n \sum_{k=1}^n r_i^{(k)} r_j^{(k)} - \left(\frac{1+n}{2} n\right)^2}{\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{1+n}{2} n\right)^2} = \frac{12}{n^3 - n} \cdot \sum_{k=1}^n r_i^{(k)} r_j^{(k)} - 3 \cdot \frac{n+1}{n-1}.$$

Правые части ρ (33) и $\hat{\alpha}$ (34) совпадают. Теорема доказана. ■

5.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ СОГЛАСОВАННОСТИ ПАРЫ ЭКСПЕРТНЫХ РАНЖИРОВАНИЙ В РАНГОВОЙ ШКАЛЕ

При разработке метода оценки согласованности экспертивных ранжирований будим исходить из следующих требований:

1. Доля числа совпадений точек зрения в ранжирований пары экспертов должна учитываться в оценке суждений экспертов.

2. Степень суждений группы экспертов будем оценивать относительно медианы Кемени.

3. С точки зрения наглядности числовое значение оценки согласованности экспертов должно принадлежать отрезку $[0, 1]$, причём значение 1 должно соответствовать полному совпадению и значение 0 должно соответствовать полному несовпадению.

4. Процедура вычисления медианы и степени согласованности мнений экспертов должна быть не сложной по сравнению с существующими методами.

Определение 3. Под согласованностью мнений экспертов будем понимать относительную меру близости между объектами на отрезке $[0, 1]$ ($[0, 100]$ в %), которая численно была бы не менее общего числа совпадений точек зрения пары экспертов.

Пусть экспертные оценки объектов преобразованы в ранговую шкалу \vec{r}_i (6) с учётом и связанных рангов. Расстояние между ранжированими пары экспертов P_i и P_t , $i, t \in \{1, 2, \dots, m\}$, представленные векторными оценками

$$(35) \vec{r}_i = (r_i^{(1)}, \dots, r_i^{(k)}, \dots, r_i^{(n)}); \vec{r}_t = (r_t^{(1)}, \dots, r_t^{(k)}, \dots, r_t^{(n)}),$$

зададим в виде l_1 -нормы (9):

$$(\rho_1(\vec{r}_i, \vec{r}_t) = \sum_{k=1}^n |r_i^{(k)} - r_t^{(k)}|,$$

которая задаёт метрику пространства (R, ρ_1) .

Рассмотрим ранжирование P_{\nearrow} , в котором ранги объектов упорядочены строго по возрастанию, и ранжирование P_{\searrow} , в котором ранги объектов упорядочены строго по убыванию:
(36) $P_{\nearrow}: \vec{r}_{\nearrow} = (1, 2, \dots, n); P_{\searrow}: \vec{r}_{\searrow} = (n, n-1, \dots, 2, 1), n > 1$.

Легко показать, что расстояния между произвольными ранжированием (35) не превосходят расстояния между строго противоположными ранжированием объектов (36):

$$d(\vec{r}_{\searrow}, \vec{r}_{\nearrow}) = \sum_{i=1}^n |n - (2i - 1)| = \begin{cases} \frac{n^2}{2}, & \text{если } n - \text{чётное число;} \\ \frac{n^2 - 1}{2}, & \text{если } n - \text{нечётное число.} \end{cases}$$

Введём следующее определение степени согласованности мнений двух экспертов.

Определение 4. Под коэффициентом согласованности между P_i и P_t ранжированием будем понимать выражение:

$$\mathcal{S}_{it} = \mathcal{S}(P_i, P_t) = 1 - \frac{d(\vec{r}_i, \vec{r}_t)}{d(\vec{r}_{\searrow}, \vec{r}_{\nearrow})},$$

которое, с учётом формулы $d(\vec{r}_{\searrow}, \vec{r}_{\nearrow})$, в ранговой шкале примет вид:

$$(37) \quad \mathcal{S}_{it} = \begin{cases} 1 - \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n |r_i^{(k)} - r_t^{(k)}|, & \text{если } n - \text{чётное число;} \\ 1 - \frac{2}{n^2 - 1} \sum_{k=1}^n |r_i^{(k)} - r_t^{(k)}|, & \text{если } n - \text{нечётное число.} \end{cases}$$

Очевидно, что при совпадении ранжирований $d(\vec{r}_i, \vec{r}_t) = 0$ степень согласованности примет значение $\mathcal{S}_{it} = 1$, а при противоположных ранжирований $-d(\vec{r}_i, \vec{r}_t) = d(\vec{r}_{\searrow}, \vec{r}_{\nearrow})$, т.е. степень согласованности мнений будет удовлетворять неравенству: $0 \leq \mathcal{S}_{it} \leq 1$.

Наряду со степенью согласованности между P_i и P_t ранжированием введём в рассмотрение и коэффициент рассогласованности, под которым примем выражение

$$(38) \quad \bar{\mathcal{S}}_{it} = 1 - \mathcal{S}_{it} = \frac{d(\vec{r}_i, \vec{r}_t)}{d(\vec{r}_{\searrow}, \vec{r}_{\nearrow})}.$$

Исходя из введённых оценок согласованности и рассогласованности мнений двух экспертов введём в рассмотрение следую-

щий критерий принятия гипотезы при экспертном оценивании объектов: основная гипотеза принимается, если выполняется неравенство

$$(39) \quad \delta_{it} > \bar{\delta}_{it},$$

в противном случае основная гипотеза должна быть отвергнута и принята альтернативная.

Докажем следующее утверждение. Рассмотрим два ранжирования

$$(40) \quad P_i: \vec{r}_i = (1, 2, \dots, n-q, n-q+1, n-q+2, \dots, \dots, n);$$

$$(41) \quad P_t: \vec{r}_t = (n-q, n-q-1, \dots, 1, n-q+1, \dots, \dots, n),$$

в котором начальные ранговые оценки упорядочены в строго противоположном направлении, а после $q < n$ оценок в ранжировании совпадают.

Докажем, что для ранжирований (40), (41) коэффициент (степень) согласованности удовлетворяет неравенству

$$(42) \quad \frac{q}{n} < \delta_{it} < 1.$$

Теорема 5. Пусть для пары ранжирований (40), (41) n объектов q ранговых оценок в ранжирований совпадают:

$$(43) \quad r_i^{(k)} = r_t^{(k)} \quad \forall k = n-q+1, \dots, n, q < n.$$

Тогда значение степени согласованности удовлетворяет неравенству (42).

Доказательство. Не умоляя общности, пусть n и q – чётные числа. Тогда $n-q$ тоже чётное число и коэффициент согласованности примет вид:

$$\delta_{it} = 1 - \frac{2}{n^2} d(\vec{r}_i, \vec{r}_t) = 1 - \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n |r_i^{(k)} - r_t^{(k)}|.$$

Представим расстояние между ранжированими в виде суммы слагаемых

$$d(\vec{r}_i, \vec{r}_t) = \sum_{k=1}^{n-q} |r_i^{(k)} - r_t^{(k)}| + \sum_{k=1}^q |r_i^{(n-q+k)} - r_t^{(n-q+k)}|,$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{n-q} |r_i^{(k)} - r_t^{(k)}| = \frac{(n-q)^2}{2}, \quad \sum_{k=1}^q |r_i^{(n-q+k)} - r_t^{(n-q+k)}| = 0,$$

то $d(\vec{r}_i, \vec{r}_t) = \frac{(n-q)^2}{2}$.

Поскольку $q < n$, то убедимся в справедливости неравенства (42). Действительно имеем:

$$\mathcal{S}_{it} = 1 - \frac{d(\vec{r}_i, \vec{r}_t)}{d(\vec{r}_i, \vec{r}_\lambda)} = 1 - \frac{\frac{(n-q)^2}{2}}{\frac{n^2}{2}} = 2 \frac{q}{n} - \left(\frac{q}{n}\right)^2 > \frac{q}{n},$$

поскольку $\frac{q}{n} - \left(\frac{q}{n}\right)^2 > 0$, а $\frac{q}{n} < 1$, то верно неравенство (42), что и требовалось доказать. ■

Из данной теоремы следует вывод, что в коэффициенте \mathcal{S}_{it} (37) при выполнении условия (42) теоремы учитывается общее число совпадений точек зрения пары экспертов.

6. Метод оценки степени согласованности мнений группы экспертов относительно медианы

6.1. АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ СОГЛАСОВАННОСТИ МНЕНИЙ ГРУППЫ ЭКСПЕРТОВ В РАНГОВОЙ ШКАЛЕ

Алгоритм оценки согласованности мнений группы из m экспертов сводится к следующим шагам.

Шаг 1. Вычислить оценки q_k^* (23), $k = \overline{1, n}$, и медиану ранжирования (медиану Кемени) представить в шкале Q_* или R_* :

$$Q_*: \vec{q}_* = (q_1^*, \dots, q_n^*); R_*: \vec{r}_* = (r_1^*, \dots, r_n^*).$$

Шаг 2. Вычислить расстояние

$$d(\vec{r}_i, \vec{q}_*) = \sum_{k=1}^n |r_i^{(k)} - q_k^*|; d(\vec{r}_i, \vec{r}_*) = \sum_{k=1}^n |r_i^{(k)} - r_k^*|$$

медианы ранжирований до исходных ранжирований P_1, \dots, P_m в дробной (рациональной) шкале или шкале со связанными рангами.

Шаг 3. Вычислить коэффициенты $\mathcal{S}_{(Q_*, P_i)} = \mathcal{S}(Q_*, P_i)$ согласованности ранжирования P_i экспертом \mathcal{E}_i относительно результирующего ранжирования Q_* (R_*).

Шаг 4. Оценить согласованность мнений m экспертов относительно медианы Кемени как среднее от \mathcal{S}_{Q_*, P_i} .

Введём следующее определение коэффициента согласованности ранжирований для группы экспертов.

Определение 5. Под степенью согласованности ранжирований m экспертов примем усреднённое значение коэффициентов согласованности экспертов относительно медианы ранжирования R_* , представленной в ранговой шкале:

$$(44) \mathcal{S}_{\exists} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathcal{S}(Q_*, P_i),$$

которое с учётом формулы $d_{\downarrow\uparrow}$, определяется в виде:

$$\mathcal{S}_{\exists} = \begin{cases} 1 - \frac{2}{mn^2} d_{\Sigma}, & n - \text{чётное число;} \\ 1 - \frac{2}{m(n^2-1)} d_{\Sigma}, & n - \text{нечётное число,} \end{cases}$$

$$\text{где } d_{\Sigma} = \sum_{i=1}^m d(\vec{r}_i, \vec{q}_*) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n |r_i^{(k)} - q_k^*|.$$

По значениям коэффициентов согласованности экспертов можно оценивать по близости к медиане Кемени и ранжировать по убыванию оценок согласованности:

$$\exists_i > \exists_j \Leftrightarrow \mathcal{S}(Q_*, P_i) > \mathcal{S}(Q_*, P_j).$$

6.2. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ СУЖДЕНИЙ ЭКСПЕРТОВ

Покажем, что коэффициент конкордации (согласованности), предложенный в работе М. Кендэла, не может служить мерой согласованности мнений m экспертов за исключением крайних случаев – полное совпадение или несовпадение ранжирований объектов.

Пример 4. Используем данные из работы Кендэла М [12, с. 104–108]. Группа из четырёх экспертов упорядочили шесть объектов, которые представлены в столбцах 2–7 таблицы 4.

Поскольку среднее значение $\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k = \frac{1}{6} \cdot 84 = 14$, то при $S = \sum_{k=1}^6 (S_k - \bar{S})^2 = 64$ величина коэффициента конкордации составит $W = \frac{12 \times 64}{4^2(6^3 - 6)} \approx 0,229$ (30%).

Таблица 4. Оценка объектов в ранговой шкале

Ранжирования	Объект						$d(\vec{r}_i, \vec{q}_*)$	\mathcal{S}_{Q_*, P_i}
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		
P_1	5	4	1	6	3	2	7,5	0,58
P_2	2	3	1	5	6	4	7	0,61
P_3	4	1	6	3	2	5	9	0,50
P_4	4	3	2	5	1	6	5	0,72
Q_*	3,7	2,7	2,5	4,75	3	4,25	28,5	0,60

Результатирующее ранжирование объектов в соответствии с оптимальным вектором $\vec{q}_* = (3,75; 2,75; 2,5; 4,75; 3; 4,25)$

в шкале с рациональными рангами:

$$Q_*: a_4 > a_6 > a_1 > a_5 > a_2 > a_3$$

представлено на рис. 2 в виде пунктирной линии, которая расположена в середине между линиями экспертов.

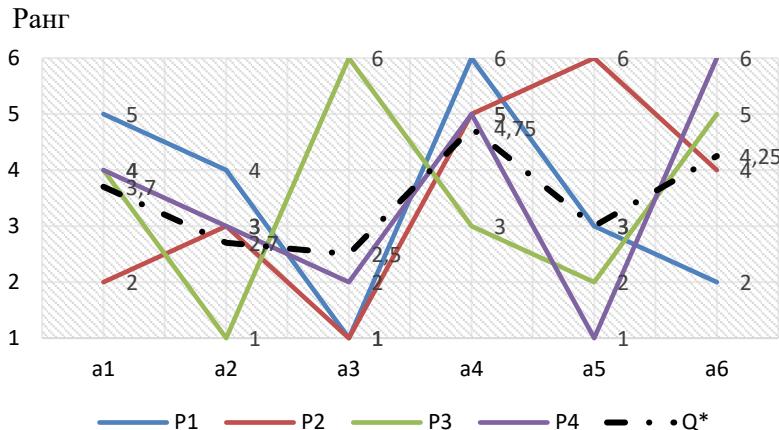


Рис. 2. Графики линий упорядочения объектов экспертами

При чётности числа объектов $d(\vec{r}_\downarrow, \vec{r}_\uparrow) = \frac{n^2}{2} = 18$ и оценка согласованности мнений экспертов в среднем составит величину:

$$\mathcal{S}_\exists = 1 - \frac{2}{mn^2} d_\Sigma = 1 - \frac{2}{4 \times 6^2} \times 28,5 \approx 0,6 \text{ (60 \%)}.$$

На основании оценок согласованности каждого эксперта до медианы Кемени, значения которых представлены в столбце 9 таблицы 4, экспертов можно ранжировать по степени приближения к медиане: $\mathcal{E}_4 > \mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_3$.

Пример 5. Рассмотрим вариант, когда для семи объектов мнения трёх экспертов из пяти совпадают с медианой Кемени, полученной как решение оптимизационной задачи и по мажоритарному правилу [20], т.е. имеем 60 % совпадения экспертивных ранжирований (таблица 5).

При нечётности числа объектов $d(\vec{r}_\vee, \vec{r}_\wedge) = \frac{n^2-1}{2} = 24$ и оценка согласованности мнений экспертов в среднем составит величину:

$$\delta_{\mathcal{E}} = 1 - \frac{2}{m(n^2 - 1)} d_{\Sigma} = 1 - \frac{2}{5 \times (7^2 - 1)} \times 48,0 \approx 0,6 \text{ (60 \%)}.$$

Таблица 5. Оценка объектов в ранговой шкале, $m = 5, n = 7$

Эксперты	Объект							$d(\vec{r}_i, \vec{q}_*)$	δ_{Q_*, P_i}
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7		
\mathcal{E}_1	1	2	3	4	5	6	7	0	1,0
\mathcal{E}_2	1	2	3	4	5	6	7	0	1,0
\mathcal{E}_3	1	2	3	4	5	6	7	0	1,0
\mathcal{E}_4	6	7	4	5	2	3	1	24	0,0
\mathcal{E}_5	7	5	6	3	4	1	2	24	0,0
R_*	1	2	3	4	5	6	7	48	0,60

Коэффициент конкордации по данным таблицы 5 составит

$$W = \frac{12S}{m^2(n^3-n)} = \frac{12 \times 42}{5^2(7^3-7)} \approx 0,06 \text{ (6 \%)} ,$$

где $\bar{S} = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^7 S_k = \frac{1}{7} (16 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 24) = 20$;

$$S = \sum_{k=1}^7 (S_k - \bar{S})^2 = 16 + 4 + 1 + 0 + 2 + 4 + 16 = 42.$$

Результаты расчётов из таблицы 5 показывают, что коэффициент конкордации почти на порядок занижает оценку согласованности мнений пяти экспертов по сравнению с почти точным значением коэффициента $\delta_{\mathcal{E}}$ согласованности.

Приходим к выводу, что коэффициент конкордации не позволяет оценивать согласованность ранжирований экспертов за исключением крайних случаев: при совпадении мнений всех экспертов коэффициент конкордации принимает единичное значение, а при несовпадении – нулевое значение.

Рассчитаем теоретическую оценку точности коэффициента конкордации W (30) для специального случая, когда у большей подгруппы экспертов ранжирования совпадают, а у другой подгруппы противоположны.

Теорема 6. Пусть n объектов строго ранжированы m экспертами, где $m \geq 3$, и g ранжирований $P_i, i = \overline{1, g}$, не совпадают с $z = m - g$ ранжирований $P_j \in P \setminus \{P_i\}_{i=1}^g, j = \overline{1, z}$, экспертов

с единым мнением, где $z > \frac{m}{2}$, и при этом пусть значения рангов для объектов из несовпадающих ранжирований удовлетворяют равенствам:

$$(45) \quad r_i^{(k)} = n + 1 - r_j^{(k)}, \quad \forall P_i, P_j \in P = \{P_1, \dots, P_m\}.$$

Тогда коэффициент согласованности мнений m экспертов примет значение $\delta_3 = \frac{z}{m}$, а коэффициент конкордации W (30) не зависит от n числа объектов и вычисляется по формуле:

$$(46) \quad W(m) = \frac{(z-g)^2}{m^2},$$

причём относительная величина отклонения от значения коэффициента согласованности мнений экспертов составит величину

$$(47) \quad \Delta W(m) = \frac{\delta_3 - W(m)}{\delta_3} = 1 - \frac{(z-g)^2}{mz}.$$

Доказательство. С учётом условия (45) расстояние между g ранжированием $P_i, i = \overline{1, g}$, и результирующим ранжированием R_* совпадёт с расстоянием противоположных ранжирований, т.е. $d(P_i, R_*) = d(P_{\downarrow}, P_{\uparrow})$, откуда $\delta_{P_i R_*} = \delta(P_i, R_*) = 0$. Для z ранжирований экспертов с единым мнением имеем $d(P_j, R_*) = 0$, откуда $\delta_{P_j R_*} = \delta(P_j, R_*) = 1, P_j \in P \setminus \{P_i\}_{i=1}^g, j = \overline{1, z}$.

Следовательно: $\delta_3 = \frac{1}{m} \cdot (q \times \delta(P_j, R_*) + v \times \delta(P_i, R_*)) = \frac{z}{m}$.

Не умаляя общности, будем считать, что ранги ранжирований P_i с номерами $i = \overline{1, g}$ строго монотонно убывают, т.е.

$$r_i^{(k)} = n - k + 1, \quad k = \overline{1, n},$$

то тогда ранги $P_j, j = \overline{1, z}$, ранжирований исходя из (45) строго монотонно возрастают, т.е. $r_j^{(k)} = k, k = \overline{1, n}$.

Рассчитаем параметры коэффициента конкордации W (48), а именно:

$$S_k = \sum_{j=1}^m r_j^{(k)} = kq + (n - k + 1)g = (n + 1)g + k(m - 2g),$$

$$\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [(n + 1)g + k(m - 2g)] = \frac{m(n+1)}{2}.$$

Исходя из формул $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ и $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, получим:

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{k=1}^n (S_k - \bar{S})^2 = \sum_{k=1}^n \left[(n+1)g + k(m-2g) - \frac{m(n+1)}{2} \right]^2 = \\
 &= \sum_{k=1}^n \left[(m-2g) \left(k - \frac{n+1}{2} \right) \right]^2 = (m-2g)^2 \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{n+1}{2} \right)^2 = \\
 &= (m-2g)^2 \sum_{k=1}^n \left(k^2 - k(n+1) + \frac{1}{4}(n+1)^2 \right) = \frac{(m-2g)^2(n^3-n)}{12},
 \end{aligned}$$

Откуда

$$W(m) = \frac{12S}{m^2(n^3-n)} = \frac{(z-g)^2}{m^2} \text{ и } \Delta W(m) = \frac{\delta_3 - W(m)}{\delta_3} = 1 - \frac{(z-g)^2}{mz}.$$

Теорема доказана. ■

Пример 6. Для подтверждения выводов теоремы рассчитаем согласованность для трёх ранжирований ($m = 3, n = 5$):

$$P_1: a_5 > a_4 > a_3 > a_2 > a_1, P_2: a_5 > a_4 > a_3 > a_2 > a_1,$$

$$P_3: a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5.$$

где $z = 2$ и $g = 1$.

Поскольку медианой Кемени для трёх ранжирований является ранжирование $R_*: a_5 > a_4 > a_3 > a_2 > a_1$, то коэффициент согласованности трёх экспертов: $\delta_3 = \frac{z}{m} = \frac{2}{3} \approx 0,67$ (67 %).

Коэффициент конкордации вычисленный по формулам W (30) и $W(m)$ (46) составит:

$$W = \frac{12S}{m^2(n^3-n)} = \frac{12 \times 10}{9 \times 120} = \frac{1}{9} \text{ и } W(m) = \frac{(z-g)^2}{m^2} = \frac{1}{9} \approx 0,11 \text{ (11%).}$$

Данный пример подтверждает, что коэффициент конкордации ранговой корреляции не может служить оценкой согласованности мнений группы экспертов.

6.3 ОЦЕНКА СОГЛАСОВАННОСТИ ЭКСПЕРТОВ В СЛУЖБЕ МЕДИЦИНЫ КАТАСТРОФ

На исходных данных работы «Оценка согласованности мнений экспертов при проведении метода экспертной оценки в службе медицины катастроф» [18] покажем, что опираясь на коэффициент конкордации можно прийти к ошибочным решениям при экспертном оценивании гемостатических лекарственных средств. Суть сводится к следующему [18]: «Экспертам службы медицины катастроф была предложена анкета, включающая блоки профессиональной оценки экспертов-врачей и собственно анкета, включающая группы гемостатических средств: B02A, B02AB, B02B, B02BC, B02BD, B02BX, которые перенумеруем

в виде L_1, \dots, L_6 . Гемостатические лекарственные средства были ранжированы экспертами по пятибалльной шкале на предмет использования при массивных кровотечениях: оценку «отлично» получала та группа лекарственных препаратов, применение которой необходимо и целесообразно в условиях чрезвычайной ситуации (ЧС), «хорошо» – группа лекарственных средств, применение которой необходимо в условиях ЧС, «удовлетворительно» – группа без которой специалисты медицины катастроф могут обойтись, «неудовлетворительно» – не нужные в ЧС лекарственные средства».

В результате каждый эксперт выставлял свою оценку, и каждая группа гемостатических средств была оценена в пятибалльной шкале, как представлено в таблице 6.

Таблица 6. Балльные оценки гемостатических средств

\mathcal{E}_i	Лекарства					
	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
1	4	3	2	5	4	3
2	3	3	2	5	3	3
3	4	3	3	4	3	4
4	3	3	3	5	3	3
5	3	3	3	5	3	3
6	5	2	3	5	5	3
7	5	2	3	5	4	4
8	4	4	4	5	4	3
9	5	5	3	4	5	3
10	5	4	3	5	5	3
11	4	4	4	3	5	5
12	5	5	5	5	5	5
13	3	5	3	5	5	5
14	3	4	4	5	5	5
15	4	3	4	5	3	3

Затем балльные оценки гемостатических средств при оказания медицинской помощи в условиях чрезвычайной ситуации были преобразованы в связанные ранги, которые представлены в таблице 7. Так как $m^2(n^3 - n) = 15^2 \times (6^3 - 6) = 47250$; $m^2(n^3 - n) - m \sum_{i=1}^m T_i = 15^2 \times (6^3 - 6) - 15 \times 888 = 33930$;

$$\bar{S} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 S_k = \frac{1}{6} 315 = 52,5 \text{ и } S = \sum_{k=1}^6 (S_k - \bar{S})^2 = 690.$$

то отсюда коэффициент конкордации по формуле (30) составит:

$$W = \frac{12 \times 690}{15^2 \times (6^3 - 6)} = \frac{8280}{47250} \approx 0,1752 (17,52 \%).$$

а с учётом связанных рангов по формуле W (31):

$$W = \frac{12 \times 690}{15^2 \times (6^3 - 6) - 15 \times 888} = \frac{8280}{33930} \approx 0,2440 (24,40 \%).$$

Таблица 7. Связанные ранги гемостатических средств

\exists_i	Лекарства						Σ	T_i
	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6		
1	4,5	2,5	2	5	4,5	2,5	21	12
2	3,5	3,5	2	5	3,5	3,5	21	60
3	5	2	2	5	2	5	21	48
4	3	3	3	6	3	3	21	120
5	2,5	2,5	5	6	2,5	2,5	21	120
6	5	1	2,5	5	5	2,5	21	30
7	5,5	1	2	5,5	3,5	3,5	21	12
8	3,5	3,5	3,5	6	3,5	1	21	60
9	5	5	1,5	3	5	1,5	21	30
10	5	3	1,5	5	5	1,5	21	30
11	3	3	3	1	5,5	5,5	21	30
12	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	21	210
13	1,5	4,5	1,5	4,5	4,5	4,5	21	66
14	1	2,5	2,5	5	5	5	21	30
15	4,5	2	4,5	6	2	2	21	30
S_k	56	42,5	40	71,5	58	47	315	888

На основании полученного результата специалисты службы медицины катастроф пришли к ошибочному выводу: «В связи с этим, полученные данные коэффициентов конкордации и вариации позволяют сделать вывод о том, что в настоящее время лидирующая группа лекарственных препаратов для остановки массивных кровотечений для использования на догоспитальном этапе в очаге поражения специалистами службы медицины катастроф отсутствует. Необходимы новые исследования по созданию новых гемостатических средств для местного и наружного

применения». Теперь рассчитаем степень согласованности пятнадцати экспертов с помощью коэффициента S_3 (44) при чётности количества лекарств по формуле:

$$S_3 = 1 - \frac{2}{mn^2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left| r_j^{(k)} - q_k^* \right|, \text{ где } m = 15; n = 6.$$

Вычислив вектор медианы Кемени по формуле q_k^* (23) в шкале рациональных чисел

$$(48) \vec{q}_* = (3,73; 2,83; 2,67; 4,77; 3,87; 3,13),$$

получим медиану ранжирования в виде

$$Q_*: L_4 > L_5 > L_1 > L_6 > L_2 > L_3,$$

В таблице 8 представлены расстояния между медианой Кемени и оценками экспертов в связанных рангах.

Таблица 8. Расстояния между ранжированием в ранговой шкале и медианной Кемени

\mathfrak{E}_i .	Лекарства						Σ	$S_{(Q_*, P_i)}$
	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6		
1	0,77	0,33	0,67	0,23	0,63	0,63	3,27	0,82
2	0,23	0,67	0,67	0,23	0,37	0,37	2,53	0,86
3	1,27	0,83	0,67	0,23	1,87	1,87	6,73	0,63
4	0,73	0,17	0,33	1,23	0,87	0,13	3,47	0,81
5	1,23	0,33	2,33	1,23	1,37	0,63	7,13	0,60
6	1,27	1,83	0,17	0,23	1,13	0,63	5,27	0,71
7	1,77	1,83	0,67	0,73	0,37	0,37	5,73	0,68
8	0,23	0,67	0,83	1,23	0,37	2,13	5,47	0,70
9	1,27	2,17	1,17	1,77	1,13	1,63	9,13	0,49
10	1,27	0,17	1,17	0,23	1,13	1,63	5,60	0,69
11	0,73	0,17	0,33	3,77	1,63	2,37	9,00	0,50
12	0,23	0,67	0,83	1,27	0,37	0,37	3,73	0,79
13	2,23	1,67	1,17	0,27	0,63	1,37	7,33	0,59
14	2,73	0,33	0,17	0,23	1,13	1,87	6,47	0,64
15	0,77	0,83	1,83	1,23	1,87	1,13	7,67	0,57
\vec{q}_*	3,73	2,83	2,67	4,77	3,87	3,13	21	10,08

Отсюда оценка степени согласованности мнений экспертов в службе медицины катастроф по формуле (44):

$$\mathcal{S}_3 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathcal{S}(R_*, P_i) = \frac{1}{15} \times 10,083 \approx 0,672 (67,2 \%).$$

Поскольку $\bar{\mathcal{S}}_3 = 1 - \mathcal{S}_3 = 0,328$ и по критерию принятия гипотезы выполняется неравенство

$$\mathcal{S}_3 > \bar{\mathcal{S}}_3 \Leftrightarrow 0,672 > 0,328,$$

то гипотеза о применении лекарств может быть принята.

По формуле ε -приближения оценим значение коэффициента конкордации с почти точным значением коэффициента согласованности мнений экспертов в службе медицины катастроф:

$$\frac{|\mathcal{S}_E - W|}{\mathcal{S}_E} = \frac{0,672 - 0,175}{0,672} \approx 0,7396 (73,96 \%).$$

Поскольку отклонение значения коэффициента конкордации отличается от почти точного значения коэффициента согласованности более чем на 50 %, то оно не может считаться удовлетворительным и применяться при решении прикладных задач.

7. Заключение

Задача нахождения медианы ранжирований объектов, представленных матрицами бинарных отношений, по матричному критерию относится к классу комбинаторных *NP*-полных задач. В настоящее время не существует оптимального метода нахождения результирующего ранжирования по матричному критерию. Обоснованность перехода от постановки задачи построения медианы Кемени – Снелла по матричному критерию к постановке задачи по критерию близости между ранжированием в ранговой шкале связана с тем, что между ранжированием, представленными матрицами бинарных отношений на множестве пар объектов, и ранжированием в ранговой шкале, как обосновано в данной статье, существует взаимнооднозначное соответствие.

Изложенные методы оценки согласованности экспертных ранжирований объектов в ранговой шкале измерения по сравнению с методами ранговой корреляции позволяют точнее оценивать согласованность как парных так и групповых ранжирований экспертами.

Преимуществом предложенных методов заключается в том, что в коэффициенте согласованности учитывается общее число совпадений точек зрения пары экспертов.

Литература

1. АЛЕСКЕРОВ Ф.Т., БАУМАН Е.В., ВОЛЬСКИЙ В.И. *Методы обработки интервальных экспертных оценок* // Автоматика и телемеханика. – 1984. – Вып. 3. – С. 127–133.
2. АВЧУХОВА Е.В. *Оценка согласованности экспертов при отборе персонала* // Вестник Самарской гуманитарной академии. Серия «Психология». – 2018. – №1(23). – С. 136–150.
3. АНОХИН А.Н. *Методы экспертных оценок*. – Обнинск: ИАТЭ, 1996. – 148 с.
4. БЕЛОУС В.В., СПИРИДОНОВ С.Б., ПОСТНИКОВ В.М. *Подход к ранжированию контрольных мероприятий по дисциплинам направления «Информатика и вычислительная техника» и оценке вариантов их проведения* // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ». – 2017. – Т. 9, №2. – URL: <http://naukovedenie.ru/PDF/102TVN217.pdf>.
5. БЕШЕЛЕВ С.Д., ГУРВИЧ Ф.Г. *Математико-статистические методы экспертных оценок*. – М.: Статистика, 1980. – 263 с.
6. ГОРСКИЙ В.Г., ГРИЦЕНКО А.А., ОРЛОВ А.И. *Метод согласования кластеризованных ранжировок* // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 3. – С. 159–167.
7. ГЛОТОВ В.А., ПАВЕЛЬЕВ В.В. *Векторная стратификация*. – М.: Наука, 1984. – 95 с.
8. ГУЦЫКОВА С.В. *К вопросу согласованности экспертных оценок профессионально важных качеств* // Знание. Понимание. Умение. – 2009. – №4. – С. 200–204.
9. ДАНЕЛЯН Т.Я. *Формальные методы экспертных оценок* // Прикладная информатика. – 2015. – № 1. – С. 183–187.
10. КАБАНОВ В.А., КОМАРОВА Е.С. *Использование метода конкордации в оценке уровня согласованности экспертных мнений* // Реакция региональной экономики на внешние вы-

- зовы: материалы межвузовской научно-практической конференции 18 ноября 2016 г. – Владимир: Владимирский филиал РАНХиГС, 2016. – С. 39–42.
11. КЕМЕНИ Д., СНЕЛЛ Д. *Кибернетическое моделирование: Некоторые приложения.* – М.: Советское радио, 1972. – 192 с.
 12. КЕНДЭЛ М. *Ранговые корреляции.* – М.: Мир, 1975. – 216 с.
 13. КОЛМОГОРОВ А.Н., ФОМИН С.В. *Элементы теории функции и функционального анализа.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 572 с.
 14. КОРНЕЕНКО В.П. *Методы оптимизации.* – М.: Высшая школа, 2007. – С. 271–274.
 15. КОРНЕЕНКО В.П. *Оптимационный метод выбора результирующего ранжирования объектов, представленных в ранговой шкале измерения* // Управление большими системами. – 2019. – Вып. 82. – С. 44–60.
 16. ЛИТВАК Б.Г. *Экспертная информация: Методы получения и анализа.* – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.
 17. МАНУСОВ В.З., КРЮКОВ Д.О., АХЬЁЕВ ДЖ.С. *Согласование экспертных оценок при диагностике текущего технического состояния высоковольтного электрооборудования* // Доклады АН ВШ РФ. – 2017. – № 1(34). – С. 72–84.
 18. МЕЛЬНИКОВА О.А., ПЕТРОВ А.Ю., ХАФИЗОВА А.В. *Оценка согласованности мнений экспертов при проведении метода экспертной оценки в службе медицины катастроф* // Успехи современного естествознания. – 2013. – №6. – С. 54–57.
 19. МАГНУС Я.Р., КАТЫШЕВ П.К., ПЕРЕСЕЦКИЙ А.А. *Эконометрика. Начальный курс.* – М.: Дело, 2007. – 504 с.
 20. МИРКИН Б.Г. *Проблема группового выбора.* – М.: Наука, 1974. – 256 с.
 21. НОВИКОВ Д.А., ОРЛОВ А.И. *Экспертные оценки – инструменты аналитика* // Заводская лаборатория. – 2013. – Т. 79, №4. – С.3–4.
 22. ОРЛОВ А.И. *Роль медиан Кемени в экспертных оценках и статистическом анализе данных* // Труды международной научно-практической конференции «Теория активных систем» (14–16 ноября 2011 г., Москва, Россия). Том I. / Под общ. ред.

- В.Н. Буркова, Д.А. Новикова. – М.: ИПУ РАН, 2011. – С. 172–176. – URL: <http://ej.kubagro.ru/2013/09/pdf/114.pdf>.
23. ОРЛОВ А.И. *Организационно-экономическое моделирование. Ч. 2 : Экспертные оценки*. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2011. – 486 с.
24. ОРЛОВ А.И. *Анализ экспертных упорядочений* // Научный журнал КубГАУ. – 2015. – №112 (08). – С. 1–31. – URL: <http://ej.kubagro.ru/2015/08/pdf/02.pdf>.
25. ОРЛОВ А.И. *Средние величины и законы больших чисел в пространствах произвольной природы* [Электронный ресурс] // Научный журнал КубГАУ. – 2013. – №89(05). – URL: <http://www.mtas.ru/theory/orlov2011a.pdf>.
26. ПАДЕРНО П.И., БУРКОВ Е.А., ЕВГРАФОВ В.Г. *Критерий согласованности парных сравнений* // Информационно-управляющие системы. – 2011. – №3(52). – С. 57–60.
27. ПЕТРИЧЕНКО Г.С., ПЕТРИЧЕНКО В.Г. *Экспертное оценивание при выборе эффективного мероприятия* // Научные ведомости Белгородского университета. – 2015. – №13(210). – Вып. 35/1. – С. 122–127.
28. ПФАНЦАГЛЬ И. *Теория измерений*. – М.: Мир, 1976. – 247 с.
29. РУГОЛЬ Л.В., МЕНЬШИКОВА Л.И., СОН И.М. *Применение метода экспертных оценок для обоснования мероприятий по совершенствованию организации работы центральных районных больниц* // Профилактическая медицина. – 2022. – №25(4). – С. 19–28.
30. СИДЕЛЬНИКОВ Ю.В. *Экспертное прогнозирование (Expert prognosisication)*. – М.: Доброе слово, 2018. – 248 с.
31. ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч. *Матричный анализ*. – М.: Мир, 1989. – 352 с.
32. ШМЕРЛИНГ Д.С., ДУБРОВСКИЙ С.А., АРЖАНОВА Т.Д., ФРЕНКЕЛЬ А.А. *Экспертные оценки. Методы и применения* // Статистические методы анализа экспертных оценок. Ученые записки по статистике. Том 29 – М.: Наука, 1977. – С. 290–382.
33. ШМЕРЛИНГ Д.С., КУЗНЕЦОВА Т.Ю., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ЧУРКИН Э.П. *Применение экспертных оценок для задач*

- стратегического планирования. – М.: Московская школа экономики VUE, 2008. – 36 с.
- 34. ШИМЕРЛИНГ Д.С. *О проверке согласованности мнений экспертов* // Статистические методы анализа экспертных оценок. – М.: Наука, 1977. – С. 77–83.
 - 35. KEMENY J.G., SNELL J.L. *Mathematical Models in the Social Sciences*. – New York, University of Michigan. – 1962. – 168 p.
 - 36. JACKSON B.N., SCHNABLE P.S., ALURU S. *Consensus Genetic Maps as Median Orders from Inconsistent Sources* // IEEE/ACM Trans. on Computational Biology and Bioinformatics. – 2008. – Vol. 5, No. 2. – P. 161–171.
 - 37. ISHIZAKA A., LABIB A. *Analytic hierarchy process and Expert Choice: benefits and limitation* // ORinsight. – 2009. – Vol. 24. – P. 201–220.

METHODS FOR SELECTING THE MEDIAN RANKING AND EVALUATING THE CONSISTENCY OF EXPERT ASSESSMENTS BY THE PROXIMITY CRITERION

Viktor Korneenko, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Senior Researcher, Ph.D
(vkorn@ipu.ru).

Abstract: In the development of the theory of expert assessments, the exceptional role of the position and the median of ranking, known as the Kemeny median, has been revealed. However, there is no optimal solution method for finding the median of the rankings represented by the matrices of binary relations according to the distance matrix criterion. The validity of the optimal solution to the problem of choosing the median in the space of the rank scale of measurement is due to the fact that there is a one-to-one correspondence between the rankings represented by binary relation matrices on a set of pairs of objects and the rankings in the rank scale. It is also an important task to check the consistency of the opinions of the expert group. The existing statistical methods and methods of rank correlation do not measure the consistency of expert opinions, if by which we mean the measure of proximity between expert assessments of objects.. The article shows by concrete examples that the Kendall concordance coefficient, which is still found in the works of some authors, does not allow for a realistic assessment of the consistency of expert rankings, which can lead to erroneous management decisions. A method is proposed for evaluating the opinions of both a pair of experts and a group of experts, in the form of an average agreement of experts with respect to the median of rankings presented in the ranking scale.

Keywords: rank scale, related (rational) ranks, median ranking of objects, matrix criterion, consistency of expert opinions.

УДК 519.8

ББК 22.18

DOI: 10.25728/ubs.2023.103.6

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.Г. Лебедевым.*

Поступила в редакцию 27.03.2023.

Опубликована 31.05.2023.

СИНХРОНИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ (НА БАЗЕ IEEE 1588 – PTP И WHITE RABBIT)

Стециор Г. Г.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Предложен децентрализованно выполняемый способ синхронного запуска действий группы физических объектов – участников управляемого эксперимента. В нем объекты обнаруживают появление событий, требующих совместных действий всех объектов, и без участия управляющего центра создают общую команду для начала выполнения действий объектов одновременно или с заданными для каждого объекта дополнительными задержками. Для этого объекты обмениваются сообщениями через не содержащий вычислительных средств ретранслятор сигналов, формируют в нем общую команду и выполняют вспомогательные вычисления. Обеспечен необходимый для этих действий одновременный приход в ретранслятор сообщений объектов с совмещением их одноименных двоичных разрядов. В целом, в способе группа объектов функционирует как распределенная управляющая система, с минимальными задержками корректирующая выполнение эксперимента в ответ на появление непредвиденных или ожидаемых в неизвестные моменты времени событий.

Ключевые слова: синхронизация, распределенный управляемый эксперимент, Precision Time Protocol, White Rabbit, групповые операции.

1. Введение

Предложения статьи относятся к синхронизации действий объектов физического эксперимента, имеющего следующие особенности.

1. В эксперименте участвует группа взаимодействующих между собой взаимно удаленных стационарных или мобильных физических объектов.

2. Эксперимент управляемый, может быть многоэтапным. На разных этапах участники могут быть одними и теми же, частично совпадающими или различными. Объекты разделены на источники сообщений и команд и приемники (исполнители) со-

¹ Геннадий Георгиевич Стециор, д.т.н., профессор (gstetsura@mail.ru).

общений и команд. Переход к следующему этапу выполняется после выполнения всех команд исполнителями предыдущего этапа.

3. Объекты на любом этапе могут обнаружить незапланированные события, на которые потребуется реакция других объектов. Требуется также реагировать как можно быстрее на ожидаемые события с неизвестным моментом появления.

Для экспериментов с такими особенностями статья предлагает организовать следующее взаимодействие объектов.

Будем считать, что объектам из п. 3 требуется помочь других объектов для реакции на событие. Каждый обнаруживший событие объект должен информировать все объекты группы о необходимости совместных действий объектов. Потенциальные участники этих действий должны их согласовать между собой, совместно сформировать групповую команду и передать команду объектам – исполнителям команды. Исполнители одновременно или с заданными для каждого объекта дополнительными задержками выполнят команду. Интервал времени от обнаружения необходимости совместных действий до их начала должен быть как можно меньше.

Предполагается, что каждый объект содержит компьютер, достаточно быстрый для управления локальными действиями объекта. Но для быстрого управления совместными действиями требуется также предоставить этим компьютерам возможность работать как единая система с быстрым обменом данными и управляющими командами.

Изложенное означает, что группа участвующих в эксперименте объектов должна действовать как распределенная система управления, собственными средствами быстро корректирующая процесс выполнения эксперимента.

В статье показан такой способ действий в эксперименте как в высокоскоростной системе управления. Он основан на разработанных в Институте проблем управления РАН (ИПУ РАН) способах получения быстрой реакции на события в распределенных системах управления. Эти способы имеют следующие основные возможности. Взаимодействие объектов системы выполняется без участия управляющего центра. Объекты, чтобы

Управление техническими системами и технологическими процессами

сообщить одновременно всем объектам о возникших событиях, создают общее сообщение, каждый двоичный разряд которого создан синхронным совмещением одноименных разрядов сообщений группы объектов. Таким образом, последовательная передача многих сообщений заменена передачей одного общего короткого сообщения. Подобное совмещение выполняется при создании общей, групповой команды, совместно формируемой группой объектов для одновременного исполнения другими объектами группы.

Для синхронного совмещения разрядов предложена структура взаимодействия объектов с заменой группы источников сообщений единственным ретранслятором сигналов. Ему источники синхронно передают свои сообщения, создавая направляемое приемникам общее сообщение. Ретранслятор – устройство простое, не содержащее логические элементы, но, благодаря специальному представлению ретранслируемых данных, в ретрансляторе выполняются логические и арифметические распределенные операции над данными в сообщениях. Создаются групповые команды для управления взаимодействием объектов. Например, при попытке группы источников поочередно передать сообщения конфликт устраняется одновременно для всей группы.

Изложенное выше направлено на ускорение выполнения двух задач, которые могут потребоваться в скоростном много-компонентном физическом эксперименте. Первая задача связана с тем, что любой эксперимент, по определению, может действовать незапланированно, и выполняющая его система должна с высокой скоростью реагировать на отклонения от планируемых действий. Вторая задача характерна для многоэтапных экспериментов. В них выполнение каждого следующего этапа требуется начать выполнять как можно быстрее после завершения предыдущего этапа, однако точно указать момент завершения очередного этапа эксперимента нельзя, но задержка начала следующего этапа недопустима.

Для высокой реактивности способу требуется точное измерение времени переноса сигналов между объектами и ретранслятором. Из известных способов таких измерений наибольшую

точность обеспечивает стандарт IEEE 1588-2019 High Accuracy Default PTP Profile (PTP (НА)) [4, 7–9, 16], созданный в результате объединения результатов предыдущего промышленного стандарта IEEE 1588-2008 Precise Time Protocol (PTP) и проекта White Rabbit (WR) [10–13, 15, 18, 19], созданного для выполнения точных физических экспериментов в ЦЕРН (CERN). Измерения в PTP использованы для синхронизации показаний часов объектов и обеспечивали ошибку в показаниях не более нескольких наносекунд. В WR и PTP (НА) для такой же задачи получена ошибка около пикосекунды.

В PTP для взаимодействия объектов использована схема «ведущий – ведомый». Ведущий объект (общий центр) посыпает ведомому сигнал и показание своих часов. Ведомый посыпает ответный сигнал ведущему и устанавливает на своих часах показания часов ведущего. Получив сигнал ведомого, ведущий вычисляет занятый этим процессом интервал времени и посыпает полученное значение ведомому для корректировки показания его часов. В WR и PTP (НА) использована такая же схема. Высокая точность измерения получена за счет использования цифрового варианта способа биений. Детали способа изложены в [10–13, 15, 18, 19]. Эти способы использованы в статье без изменений, но для уменьшения времени измерений все объекты проводят необходимые измерения без применения ведущего.

Синхронизация показаний часов объектов позволяет решать важную задачу – управляющий центр может запустить очередной этап распределенного эксперимента в точно заданный момент времени. Но в нем отсутствуют средства запуска очередного этапа в неизвестный момент времени, ближайший к моменту завершения предыдущего этапа или непосредственно после появления непредвиденного события. Для этого предлагаются решения настоящей статьи, в которой эксперимент функционирует как распределенная система управления с полностью децентрализованным управлением взаимодействием объектов.

Материал статьи распределен между ее разделами следующим образом. В разделе 2 приведена структура связей, используемая далее для синхронизации действий источников и прием-

ников команд. В разделе 3 приведен способ распределенного управления взаимодействием источников. В разделе 4 дан способ выполнения приемниками команд источников одновременно или с заданными в команде для каждого приемника задержками времени. В разделе 5 дана краткая сводка групповых операций. В разделе 6 даны примеры способов технической реализации устройств, необходимых для скоростной синхронизации действий объектов.

2. Структура связей между объектами

Основная структура связей, использованная в статье для обмена сигналами и сообщениями между объектами, показана на рис. 1.

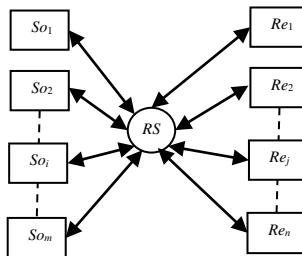


Рис. 1. Связи между объектами – источниками и приемниками сигналов и сообщений

Группа объектов состоит из группы So источников команд $\{So_i\}$, группы Re приемников команд $\{Re_j\}$ и ретранслятора RS сигналов, поступающих от источников и приемников. В общем случае любой объект может выполнять функции So_i , Re_j или RS и в динамике изменять функцию. Сигналы объектов принимает только ретранслятор RS , и только его сигналы принимают объекты. Объекты посыпают в сообщениях двоичные значения единица и ноль сигналами с частотами f_1 и f_0 соответственно. RS ретранслирует их сигналами других частот *f_1 и *f_0 . Каналы связи могут быть беспроводными и проводными, направленными

и ненаправленными. Далее предполагается, что по ним передаются оптические или радиосигналы. До раздела 4 будем считать, что имеется единственный ретранслятор. Как будет показано, ретранслятор играет центральную роль в ускорении синхронизации действий объектов.

3. Создание источниками общей групповой команды для группы приемников команд

В статье часть объектов обнаруживает появление событий, на которые все объекты должны синхронно реагировать. Для этого каждый обнаруживший событие объект должен информировать все объекты группы о необходимости совместных действий объектов. Потенциальные участники этих действий должны их согласовать между собой, совместно сформировать групповую команду и передать ее объектам – исполнителям команды. последние одновременно или с заданными для каждого объекта дополнительными задержками выполняют команду с как можно меньшей задержкой после момента обнаружения событий.

Групповая команда позволит источникам организовать их совместные действия без участия управляющего центра, при этом максимально быстро. Приемникам команд также часто потребуется сообщать о своем состоянии, действуя как источники. Для выполнения групповой команды источники должны определить свою удаленность от RS [1, 2].

3.1. ДЕЦЕНТРАЛИЗАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЯ УДАЛЕННОСТИ ИСТОЧНИКОВ ОТ RS

Каждый источник So_i из группы So должен независимо (без центра управления) в порядке очередности измерить удаленность от RS [1, 2]. Очередность определяют порядковые номера j , присвоенные источникам So_i заранее. Измерения удаленности источники будут выполнять в выделенном для этого отдельном канале, чтобы не задерживать передачу сообщений и групповых команд. Управлять измерением удаленности от RS источники будут с помощью специального синхросигнала S , который

будет поступать в RS и возвращаться им к объектам на другой частоте, как сигнал S^* .

Для начала измерения каждый источник So_i следит за поступлением синхросигнала S^* и при его отсутствии в течение интервала T – наибольшего интервала времени переноса сигнала между любыми объектами посыпает широковещательно сигнал S . Значение $T = L/c$, где L – наибольшее расстояние между объектами, c – скорость света. Длительность сигнала S должна быть не меньше T . При выполнении этого условия, если несколько So_i пошлют сигналы S , то сигналы хотя бы частично совместятся в RS и будут восприняты источниками как единственный сигнал S^* . Спад этого сигнала поступит к любому So_i не позже момента T после завершения S^* в RS и послужит для So_i разрешением начать процесс измерений. Как указано выше, для повышения скорости реакции объектов на возникающие события источники будут проводить измерения одновременно с передачей сообщений, используя для сигналов S и S^* отдельные частотные каналы.

Источники So_i поочередно в соответствии с их порядковыми номерами измеряют T_i – время переноса сигнала до RS (их удаленность от RS). На каждое измерение отводится интервал времени $2T$. За это время посланный RS сигнал S^* покинет систему измерения. Высокую точность измерения дает использование стандарта IEEE 1588-2019 PTP (НА) [4, 7–9, 16], включающего способ WR [10–13, 15, 18, 19].

3.2. ДОСТАВКА СООБЩЕНИЙ И КОМАНД В RS УСТРАНЕНИЕ КОНФЛИКТОВ

После выполнения раздела 3.1 объекты готовы к доставке сообщений в RS двумя способами – в виде единого сообщения, содержащего поочередно сообщения объектов без пауз между ними, и в виде единого сообщения, в каждом разряде которого совмещены с наложением одноименные разряды всех передаваемых сообщений. Источники посыпают сообщения, чтобы сообщить всем объектам о возникших событиях и выявить среди них союзников в формировании групповой команды, затем

участвовать в отправке этой команды объектам-исполнителям команды.

Итак, будем считать, что каждый источник So_i определил T_i , удаленность от RS , и для взаимодействия источников в RS выделен отдельный частотный канал.

Источники So_i выполняют следующие действия.

1. Источники формируют задержки $d_i = T - T_i$.

2. Источники формируют логическую шкалу – двоичную последовательность, в которой каждому источнику выделен разряд, соответствующий его порядковому номеру. Источники, которым в текущий момент требуется передать сообщение в RS , заносят в свой разряд единицу, остальные разряды содержат нули.

3. Источники посыпают в RS сигнал S . Спад возвращенного от RS объектам сигнала S^* служит началом синхронизации.

4. Обнаружив спад S^* , источники So_i с задержками $2d_i$ посыпают в RS шкалы. При задержке $2d_i$ одноименные разряды шкал источников приходят в RS одновременно с задержкой $2T$ после завершения передачи шкалы ретранслятором [1]. Единица и ноль в разряде передаются RS сигналами с частотами *f_1 и *f_0 соответственно. Объединенную шкалу RS возвращает источникам. Каждый источник определяет свое место в порядке передач источниками сообщений по количеству предшествующих в шкале разрядов с единицами. При этом в разрядах шкалы одновременное наличие сигналов с частотами *f_1 и *f_0 воспринимаются как единица.

5. Затем каждый запросивший передачу источник So_i передает в RS сообщение всем другим источникам. Для формирования групповой команды сообщение может содержать описание обнаруженного So_i события и предложение по реакции на него. Если одновременно несколько источников требуют создать групповую команду, то сообщения этих источников передаются в едином сообщении с совмещением одноименных разрядов, как при передаче шкал, или в указанном в разрядах шкалы порядке. В п. 5 предполагается, что объекты – приемники команд готовы к приему команд.

6. Может потребоваться несколько подобных обменов сообщениями, завершающихся согласованным сообщением – групповой командой, адресованной для исполнения группе приемников.

Этим завершено описание действий источников, объединенных в структуру в соответствии с разделом 2. В результате группа источников указанным способом создает общую команду группы источников, которая затем направляется группе приемников-исполнителей команды.

4. Взаимодействие приемников-исполнителей команды с ее источниками

В разделе показаны децентрализованные процессы измерения удаленности приемников от *RS* и синхронного запуска их действий групповой командой.

4.1. ДЕЦЕНТРАЛИЗАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЯ УДАЛЕННОСТИ ПРИЕМНИКОВ ОТ RS

Измерение удаленности от *RS* не отличается от таких же действий источников. Приемники Re_j из *Re* также должны без центра управления поочередно измерить удаленность от *RS*. Приемникам Re_j заранее присвоены порядковые номера *i*. Затем до начала измерения приемник Re_j следит за поступлением специального синхросигнала *S*, и при его отсутствии посыпает широковещательно такой же сигнал *S*. Сигнал *S* посыпается через *RS*. Длительность сигнала *S* не меньше *T* – наибольшего интервала времени переноса сигнала между любыми объектами. Если несколько Re_j , пошлют сигналы *S*, то они хотя бы частично совместятся и будут восприняты приемниками как единственный сигнал. Спад этого сигнала поступит к любому Re_j не позже момента *T* после завершения *S* и служит началом процесса измерений. Затем приемники Re_j измеряют их удаленности *T_j* от *RS*.

Измерения Re_j также выполняют поочередно в соответствии с их порядковыми номерами, используя способ PTP (НА) или WR. На каждое измерение по PTP (НА) отводится интервал

времени $2T$. За это время посланный Re_j сигнал покинет систему измерения.

4.2. СИНХРОННОЕ ВЫПОЛНЕНИЕ ГРУППОВОЙ КОМАНДЫ ПРИЕМНИКАМИ

Приемники начинают подготовку к выполнению общих действий, получив через RS групповую команду источника. При этом приемники, несмотря на разные расстояния от RS , должны выполнить его команду одновременно. Для этого каждый приемник выполняет следующие действия.

1. Приемник Re_j до получения команды, имея T и T_j , вычисляет задержку $d_j = T - T_j$.

2. Источник через RS посылает всем приемникам требующую их одновременного действия команду.

3. Получив команду, каждый Re_j выдерживает задержку d_j и после этого выполняет требуемое командой действие. В результате все действия объекты выполняют одновременно, с задержкой T после завершения передачи команды от RS .

Действительно, команда после выхода из RS поступает в Re_j через интервал времени T_j . Следовательно, при задержке d_j любой Re_j выполнит действия в момент времени $\tau = T_j + T - T_j = T$. Все Re_j выполнят команду одновременно в момент T после выхода команды из RS , что и требовалось. Задержка d_j учла разницу в удаленности приемников от RS .

Если требуется выполнить сдвиги во времени выполнения команды приемниками, то к d_j приемника Re_j должна быть добавлена требуемая задержка a_j .

4.3. МНОГОСЛОЙНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ ДЕЙСТВИЙ ПРИЕМНИКОВ

Многослойная структура ориентирована на эксперименты, состоящие из поочередно выполняемых этапов. Выполнение каждого следующего этапа требуется начать выполнять как можно быстрее после завершения предыдущего этапа.

Потребность в таком взаимодействии возникает, когда нельзя точно указать момент завершения очередного этапа экс-

перимента, но задержка начала следующего этапа недопустима. Многослойная структура представлена на рис. 2.

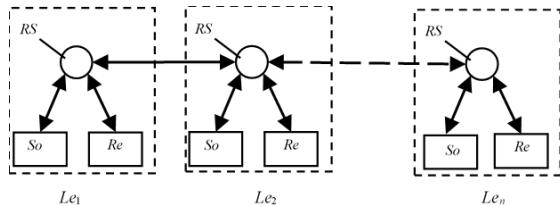


Рис. 2. Многослойная структура приемников

По сравнению с разделом 2 здесь вся группа объектов разделена на несколько слоев Le_1, Le_2, \dots, Le_n , каждый из которых имеет группы своих источников и приемников и снабжен ретранслятором. Сигналы объектов любого слоя Le_i доступны только RS_i того же слоя, который может передавать их из слоя RS_i в RS_{i+1} следующего по порядку слоя и в RS_{i-1} предшествующего слоя. В пределах слоя объекты действуют в соответствии с разделами 2, 4.1, 4.2. Процесс синхронизации начинается в слое Le_1 и последовательно перемещается к конечному слою. Приемники слоя выполняют требуемые действия с минимальной задержкой, подобно действиям в однослойной структуре. Слой Le_n , действуя аналогично, с минимальной задержкой информирует предыдущие слои о завершении синхронизации. Промежуточные слои, в частности, могут быть обычной сетью и будет получена удаленная синхронизация группы объектов, ограниченная во времени задержкой в средствах сети.

5. Групповые операции в управлении экспериментом

В предыдущих разделах применены групповые операции управления, в которых в пределах одной операции одновременно участвует группа объектов. К ним относятся следующие операции.

1. Операция одновременного запуска действий объектов формированием сигнала S .

2. Операции создания и применения логической шкалы. Шкала создается в пределах одной операции группой объектов и позволяет упорядочить одновременные или поочередные действия группы объектов.

3. Операции, одновременно посылаемые асинхронно действующими приемниками для сообщения о готовности к совместным действиям (конец раздела 4.2).

4. Синхронное выполнение задания групповой команды группой приемников команды. Эти операции использованы для управления *порядком действий* объектов.

Разработаны и другие, вычислительные групповые операции для быстрого сбора информации о текущем состоянии всех объектов – участников эксперимента. Ниже приведены примеры групповых операций, выполняющих распределенные вычисления в *RS*.

5.1. ГРУППОВОЕ ПОРАЗРЯДНОЕ ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ

Пусть имеется набор признаков, характеризующих состояние любых объектов в эксперименте. Представим последовательность этих признаков логической шкалой. В ее двоичный разряд, соответствующий признаку, будет внесена единица при наличии признака у объекта и ноль при его отсутствии. Требуется одновременно для всей совокупности объектов получить два вида сведений: найти признаки, имеющиеся хотя бы у одного объекта, и найти признаки, имеющиеся у всех объектов.

Для первой задачи используем операцию поразрядное ИЛИ. Объекты, используя приведенные выше задержки, посылают свои шкалы в *RS* так, чтобы их одноименные разряды совпали. Значения разрядов шкал «единица» и «нуль» представлены соответственно сигналами частот f_1 и f_0 . Объекты получают от *RS* объединенную шкалу и получение в ее разряде сигнала f_1 или одновременно f_1 и f_0 , воспринимаемые как «единица», иначе значение равно «нулю». Так будут выделены признаки, имеющиеся хотя бы у одного объекта.

Для второй задачи используем операцию поразрядное И. Объекты действуют аналогично действиям в первой задаче, но

интерпретируют полученные сигналы иначе. Получение в ее разряде сигнала f_0 или одновременно f_1 и f_0 воспринимается как «ноль», иначе значение равно «единице». Выделены признаки, имеющиеся у всех объектов.

В обоих случаях сообщения объектов поступают в RS одновременно, на операцию затрачено минимальное время, не зависящее от количества участвующих в ней объектов.

5.2. ПОИСК ОБЪЕКТАМИ MAX И MIN

Здесь требуется, чтобы от объектов в RS одновременно поступали по одному числу и все объекты, получив от RS результат наложения сигналов, определили наибольшее или наименьшее значение указанных чисел.

Цифры чисел будем представлять в виде логических шкал следующего вида. В выбранной системе счисления шкала содержит количество двоичных разрядов, соответствующее значению основания системы счисления. Далее для определенности возьмем десятичную систему. Шкала будет иметь 9 разрядов, причем только один разряд, равный значению цифры, содержит единицу, остальные нули. Например, цифра 8 представлена шкалой 010000000, цифра 1 представлена шкалой 000000001, цифра 0 представлена шкалой 000000000. Объекты представляют многоразрядное число последовательностью шкал цифр. Операция определения *max* выполняется в виде следующих действий.

1. Каждый объект из своей указанной выше шкалы берет старшую десятичную цифру своего числа и посыпает в RS . Все объекты действуют синхронно с совмещением в RS сообщений.

2. Совмещенная в RS шкала группы объектов поступает к объектам. В шкале теперь может быть несколько единиц, и каждый объект выясняет, послал ли он наибольшую из старших цифр.

3. Только объекты, передавшие наибольшую цифру, передают следующую цифру числа и т.д.

4. Получив последнюю цифру числа, объекты определяют максимальное значение среди переданных чисел.

Минимум находится, как и максимум, но на каждом шаге определяется наименьшая из передаваемых объектами цифр.

Таким образом, время выполнения операции не зависит от количества ее участников. Время обработки разрядов цифры в шкале можно уменьшать, повышая частоту передаваемых сигналов. Но шкала, соответствующая следующей цифре, будет, подобно передаче отдельного сигнала, задержана на удвоенное время доставки ее в RS от наиболее удаленного объекта. Поэтому для уменьшения общего времени выполнения операции следует уменьшать число пересылок шкал, выбирая возможно большее основание системы счисления.

Следует подчеркнуть, что приведенные в разделе 5 простые групповые операции являются базовыми, необходимыми для быстрого выполнения всех приведенных в статье действий по взаимодействию объектов. Они разработаны в ИПУ РАН и их аналоги в литературе не найдены.

Завершая раздел 5, обратим внимание на сходство групповых операций с ассоциативными операциями ассоциативных процессоров. В обеих операциях одновременно участвует группа объектов. Но групповые операции, в отличие от ассоциативных операций, полностью децентрализованы и распределены. Групповые операции могут выполнить все ассоциативные операции, но не наоборот.

6. *О технической реализации предлагаемого способа*

Статья использует два вида устройств, имеющих основное значение. Это измеритель времени переноса сигнала и ретранслятор. Как указано выше, возможности измерителя прошли тщательную проверку, стандартизованы и широко применяются. В статье не потребовалось внести в измерители какие-либо изменения, ссылки на эти работы содержатся в [10–13, 15, 18, 19].

Ретранслятор, преобразующий входной сигнал, – также устройство, распространенное для оптических и радиосигналов. Полезно остановиться только на двух его беспроводных вариантах. Первый из них использует ненаправленные оптические

сигналы, создаваемые объектами и ретранслятором [6]. Ретранслятор помещается в произвольном месте закрытого помещения, в пределах прямого доступа находятся группы источников и приемников сообщений. Скорость передачи – порядка пикосекунд. Второй вариант использует оптические направленные сигналы для связи одного источника сообщений и одного приемника [5, 14, 20]. В способе приемник посыпает направленный непрерывный сигнал источнику. В последнем сигнал приемника проходит через управляемый источником модулятор в ретрорефлектор, возвращающий сообщение источника только пославшему непрерывный сигнал приемнику. Таким образом, в приемник поступит его сигнал, модулированный данными источника. Передача сообщения выполнена за счет энергии приемника. Связь применялась в морских условиях на расстоянии до 7 км, при наличии помех. В задачах данной статьи способ достаточно просто модифицировать для взаимодействия групп источников и приемников. Достаточно ретранслятору принимать сигналы группы источников, превращать в электрический сигнал и действовать им на модулятор.

Полезно также иметь средство, поддерживающее стабильность мощности пересылаемых в системе сигналов. Современные технологии позволяют получать точное цифровое значение при одновременном суммировании нескольких тысяч сигналов. В работе [3, 17] приведен простой светодиодный источник со стабильностью выходной мощности лучше $50 \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.

7. Заключение

Предложен способ ускорить управление распределенными физическими экспериментами, имеющий следующие особенности.

В способе в группе произвольно расположенных участников эксперимента (объектов) некоторые объекты обнаруживают непредвиденное появление событий, требующих совместных действий других объектов группы. Такие объекты-источники информируют об этом другие объекты, и все объекты совместно создают групповую команду, управляющую одновременным

запуском действий группы объектов – исполнителей команды. Объекты исполняют групповую команду с минимальной задержкой после возникновения события.

Все объекты действуют синхронно, взаимодействуя между собой без привлечения управляющего центра.

Быстрая реакция на возникающие события достигнута за счет взаимодействия группы исполнителей команды с группой источников команды через посредника *RS*. Вместо этого приемники взаимодействуют с единственным эквивалентом источников – простым ретранслятором сигналов. Источники синхронно передают свои сообщения в ретранслятор одно за другим в виде единого сообщения или как одно сообщение с совмещением во времени прихода в ретранслятор одноименных двоичных разрядов сообщений.

В целом, способ превращает эксперимент в децентрализованную управляющую распределенную систему, работающую в реальном времени с использованием обратной связи о состоянии объектов и быстрой реакцией на изменения в ходе эксперимента, синхронно выполняемой объектами.

Литература

1. СТЕЦЮРА Г.Г. *Децентрализованная автономная синхронизация процессов взаимодействия мобильных объектов* // Проблемы управления. – 2020. – №6. – С. 47–56. – DOI: <http://doi.org/10.25728/ru.2020.6.5>.
2. СТЕЦЮРА Г.Г. *Синхронное выполнение групповых операций в распределенных компонентах суперкомпьютеров и компьютерных кластерах* // Доклад на НСКФ 2022. – 2022. – URL: https://2022.nscf.ru/TesisAll/02_Apparatura/341_StetsuraGG.pdf
3. BOSILJEVAC M., Babić D., Sipus Z. *Temperature-Stable LEDBased Light Source without Temperature Control*. – URL: <https://opg.optica.org/ao/abstract.cfm?URI=ao-55-32-9060>.
4. GIRELA-LÓPEZ F., LÓPEZ-JIMÉNEZ J., JIMÉNEZ-LÓPEZ M., RODRÍGUEZ R., ROS E., DÍAZ J. *IEEE 1588 High Accuracy Default Profile: Applications and Challenges* //

- IEEEAccess. – 2020. – Vol. 8. – P.45211–45220. – DOI 10.1109/ACCESS.2020.297833.
- 5. GOETZ P.G., RABINOVICH W.S., MAHON R., MURPHY J. L. *Modulating Retroreflector Lasercom Systems at the Naval Research Laboratory*. 2010. – URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/5680205/>
 - 6. GOMEZ A., SHI K., QUINTANA C., MAHER R. et al. *Design and Demonstration of a 400 Gb/s Indoor Optical Wireless Communications Link* // Journal of Lightwave Technology. – 2016. – Vol. 34, Iss. 22. – P. 5332–5339.
 - 7. GUTIÉRREZ-RIVAS J. L., TORRES-GONZÁLEZ F., Ros E. J., Díaz J. *Enhancing Rabbit Synchronization Stability and Scalability Using P2P Transparent and Hybrid Clocks* // IEEE Trans. on Industrial Informatics. – 2021. – Vol. 17, No. 11. – P. 7316-7324. - DOI:10.1109/TII.2021.3054365.
 - 8. IDREES Z., GRANADOS J., SUN Y., LATIF S., GONG L., ZOU Z., ZHENG L. *IEEE 1588 for Clock Synchronization in Industrial IoT and Related Applications: A Review on Contributing Technologies, Protocols and Enhancement Methodologies* // IEEE Access. – 2020. – Vol 8. – P. 155660–155678. – URL: <https://ieeexplore.ieee.org/ielx7/6287639/8948470/09154372.pdf>.
 - 9. *IEEE 1588-2019 – IEEE Standard for a Precision Clock Synchronization Protocol for Networked Measurement and Control Systems* // IEEE Instrumentation and Measurement Society. – 2020. – URL: <https://standards.ieee.org/standard/1588-2019.html>
 - 10. ARGARIA D., VESCO A. *Trusted GNSS-Based Time Synchronization for Industry 4.0 Applications* // Appl. Sci. – 2021. – Vol. 11. – P. 8288. – URL: <https://doi.org/10.3390/app11188288>.
 - 11. MOREIRA P., DARWAZEH I. *Digital femtosecond time difference circuit for CERN’s timing system*. – 2011. – URL: <https://www.ee.ucl.ac.uk/lcs/previous/LCS2011/LCS1136.pdf>.
 - 12. MOREIRA P. *Timing Signals and Radio Frequency Distribution Using Ethernet Networks for High Energy Physics Applications* // PhD thesis, 2015.
 - 13. NEELAM RATHORE H., SHARMA L., ROY A. *Clock Comparison with an ultra-stable optical fibre link utilizing White*

- Rabbit Network.* – URSI GASS, 2020. – URL: <https://www.researchgate.net/publication/347449111>.
- 14. RABINOVICH W.S., GOETZ P.G., MAHON R. et al. *45-Mbit/s cat's-eye modulating retroreflectors* // Optical Engineering. – 2007. – Vol. 46, No. 10. – P. 1–8.
 - 15. RIZZI M. *Digital Dual Mixer Time Difference: Phase noise & stability.* – CERN, 2017. – P. 38. – URL: https://whiterabbit.web.cern.ch/documents/DDMTD_for_Subns_Synchronization.pdf
 - 16. RÖSEL K., HELM M., ZIRNGIBL J., STUBBE H. *Current Developments of IEEE 1588 (Precision Time Protocol).* – DOI: 10.2313/NET-2021-05-1_04.
 - 17. SLIWCZYNSKI Ł., KREHLIK P., BUCZEK Ł., SCHNATZ H. *Picoseconds-Accurate Fiber-Optic Time Transfer With Relative Stabilization of Lasers Wavelengths* // Journal of Lightwave Technology. – 2020. – Vol. 38, No. 18. – P. 5056–5063.
 - 18. *The White Rabbit Project.* – 2022. – URL: <http://whiterabbit.web.cern.ch/>
 - 19. WATERMAN E., HELM M, ZIRNGIBL J, STUBBE H. *White Rabbit: High Precision PTP* // Seminar IITM WS 20/21, Network Architectures and Services. – 2021. – DOI: 10.2313/NET-2021-05-1_14.
 - 20. ZHU Y., WANG G. *Research on Retro-reflecting Modulation in Space Optical Communication System* // IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. – 2018. – Vol. 108, Iss. 3. – P. 1–7. – DOI:10.1088/1755-1315/108/3/032060.

SYNCHRONIZATION OF A DISTRIBUTED EXPERIMENT WITH FEEDBACK (BASED ON IEEE 1588 – PTP AND WHITE RABBIT)

Gennady Stetsyura, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Dr. Sc. (Engg), professor (gstetsura@mail.ru).

Abstract: We propose a method decentralized executed synchronous initiation of actions of a group of physical objects participants of a controlled experiment. Here, the objects detect the occurrence of events, which require joint actions of all objects, and without the participation of the control center create a common command

*Управление техническими системами
и технологическими процессами*

to initiate the actions of the objects simultaneously or with additional delays prescribed for each object. For this purpose, objects exchange messages via a signal repeater that does not contain computational means, form a common command in it, and perform auxiliary calculations. Necessary for these actions the simultaneous arrival in the repeater messages objects with the alignment of their binary digits of the same name is provided. In general, in the method, a group of objects functions as a distributed control system, which corrects the execution of the experiment with minimum delays in response to the appearance of unforeseen or expected at unknown points in time events.

Keywords: synchronization, distributed controlled experiment, Precision Time Protocol, White Rabbit, group operations.

УДК 004.75

ББК 16.292

DOI: 10.25728/ubs.2023.103.7

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.М. Вишневским.*

Поступила в редакцию 20.10.2022.

Опубликована 31.05.2023.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ «ЛЕТАТЕЛЬНЫЙ АППАРАТ + ПИЛОТ» ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ АЭРОГЕОФИЗИЧЕСКОЙ СЪЁМКИ

Гаракоев А. М.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Гладышев А. И.²

(Секция по оборонным проблемам Министерства обороны РФ
(при президиуме РАН))

Решение задачи определения структуры управляемой динамической системы и формирование соответствующих законов управления требует детального анализа реальных экспериментальных данных, методов идентификации. Методы идентификации моделей поведения систем «летательный аппарат + пилот» успешно развиваются с 60-х годов прошлого столетия. Пилотируемая авиация занимает лидирующие позиции по отношению к беспилотным системам, соответственно актуальность таких задач сохраняется и по сей день. При выполнении полетов пилот опирается на навигационную информацию, выводимую на различные индикаторы, расположенные в кабине летательного аппарата. Пример такого индикатора пилота – индикатор типа «Стрелка». Данная статья посвящена анализу реальных полетных данных четырех летательных аппаратов, пилоты которых выполняли полеты по информации с индикатора «Стрелка». По результатам анализа и с помощью компьютерного моделирования идентифицированы параметры четырех динамических моделей «летательный аппарат + пилот». Модели являются линейными замкнутыми (пилот – регулятор, замыкающий контур управления) динамическими системами 1-го порядка, описанными в виде передаточных функций. Приведены результаты экспериментов, выполненных на симуляторе с использованием каждой из моделей.

Ключевые слова: идентификация, динамические системы, индикатор «Стрелка», поведение пилота.

¹ Амир Мусаевич Гаракоев, м.н.с. (garakoev.amir@mail.ru)

² Анатолий Иванович Гладышев, д.т.н., председатель секции (tolyagladyshev@yandex.ru)

1. Введение

Несмотря на то, что беспилотные летательные аппараты активно вытесняют классическую пилотируемую авиацию, существует достаточно большой объем задач, которые БПЛА не способен решить столь же эффективно, как и пилотируемая авиация. Один из примеров таких задач – аэрогеофизическая съемка [1, 2, 4, 5].

Традиционно такие полеты осуществляются по заранее запланированным прямолинейным маршрутам (рис. 1).

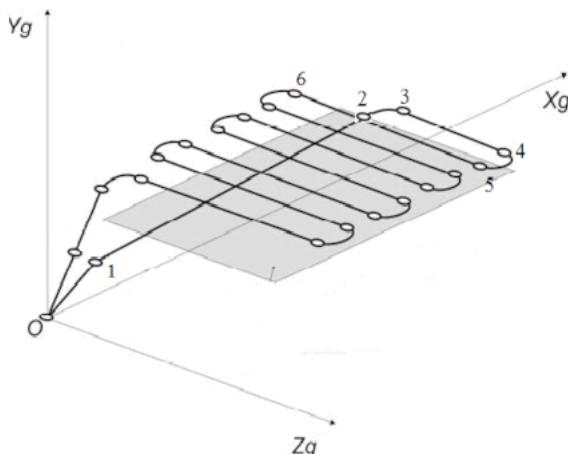


Рис. 1. Схема выполнения полетного задания

На рис. 1 прямолинейным участкам траектории соответствуют отрезки: 1–2, 3–4, 5–6.

В качестве критерия точности выполнения полета по таким маршрутам принято использовать параметр бокового отклонения – XTE (Cross Track Error).

Важно заметить, что пилот в цепи управления является регулятором, который получает информацию о текущем положении по отношению к маршруту полета, и воздействуя на органы управления ЛА, минимизирует это значение.

Существуют разнообразные подходы в информационном обеспечении пилота для выполнения подобных полетов. Это, например, наличие борт-оператора (штурмана) на борту, который дает указания и рекомендации. Современное развитие цифровых технологий позволяет использовать дисплеи-индикаторы пилота, которые автоматически информируют пилота о текущем положении летательного аппарата относительно заданной траектории. Один из таких индикаторов, который принято называть «Стрелкой» (рис. 2) является частью программно-аппаратного комплекса NavDat [1, 3, 13], в основе работы которого лежат алгоритмы, формирующие для пилота управляемую информацию. Аналогичные комплексы рассмотрены в работах [2, 4, 5].

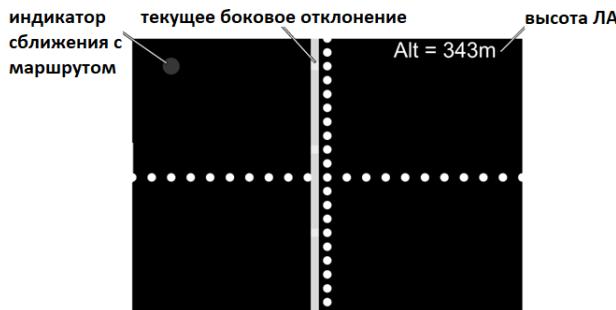


Рис. 2. Индикатор типа «Стрелка»

Точность выполнения полетов по заданным маршрутам зависит не только от мастерства, опыта и реакции пилота, но и от качества управляющей информации, отображенной на индикаторе пилота.

Реакция пилота и его отклик на управляющую информацию, предоставляемую индикатором типа «Стрелка», является предметом исследования в данной работе.

Для обеспечения качества управляющей информации для задач, связанных с «ручным» управлением, необходимо знать закономерности поведения пилота, а также математические модели его поведения.

Пилот как звено управления является достаточно слож-

ной системой, чтобы можно было однозначно описать его поведение. Однако существует достаточно большое количество приближенных математических моделей, описывающих такие процессы. Основные исследования в этой области пришлись на 60-70-е годы прошлого века. Такими задачами занимались, в частности, Д. Макрюер и его коллеги [11, 12]. Эти исследования позволили раскрыть основные закономерности поведения человека-пилота в контуре управления и создать ряд экспериментальных моделей поведения, объединяющих в себе динамику объекта управления и поведение пилота. В дальнейшем были предложены различные модификации этих моделей. Одной из групп таких модификаций стали «структурные модели» рассмотренные в [10] (70-е годы). Модели линейные и основываются на классической теории управления. А параметры предполагалось определять с помощью правил настройки [8].

Во второй половине 60-х годов был также предложен новый подход к математическому моделированию характеристик реакции человека-пилота на управление, основанный на современной теории оптимального управления [6]. Он модифицировался в ряде исследований [7, 9] и использовался для решения различных прикладных задач.

Все эти исследования, связанные с пилотируемым управлением, как были актуальны в XX-м веке, так и продолжают быть таковыми в XXI-м.

В данной статье объект управления «летательный аппарат + пилот» рассматривается в контексте теории линейных динамических систем. В качестве полетных данных анализируются данные, полученные в реальных полетах с использованием программного комплекса NavDat [13]: XTE; показания индикатора типа «Стрелка». Следовательно, искомая динамическая система будет с одним входом (показания «Стрелки») и одним выходом (XTE).

2. Теоретическая основа рассматриваемой задачи

Система управления, рассматриваемая в данной работе, представлена в общем виде на рис. 3.

Опишем каждый из блоков, функционирующих в общей структуре: Л.А. – летательный аппарат; М.П. – модель пилота; NavDat – программное обеспечение, реализующее алгоритмы управления [1, 3]; Arrow – параметр выдаваемый на индикатор типа «Стрелка».

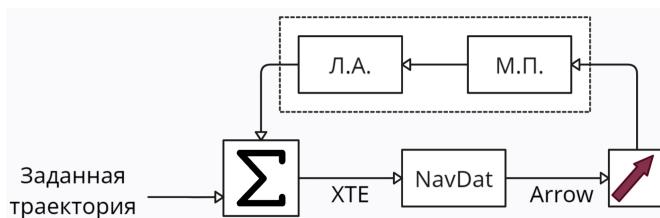


Рис. 3. Общая структура системы управления

Функционирует такая система следующим образом.

Пилот, воздействуя на органы управления летательного аппарата, летит по заданному маршруту с ошибкой бокового отклонения (XTE). Эта величина подается в качестве входной информации системе NavDat, в которой заложены все необходимые алгоритмы выработки управляемой информации, выдаваемой на индикатор «Стрелка» с целью минимизации XTE.

Информация о блоке, выделенном прямоугольником на рис. 3, априори неизвестна. **Основная цель работы** – попытаться идентифицировать параметры системы «летательный аппарат + модель пилота».

2.1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В результате выполнения полетов по заданным маршрутам при аэрогеофизических работах были получены данные вида {XTE, Arrow} для четырех летательных аппаратов (рис. 4.).

Требуется: подобрать параметры динамической системы «летательный аппарат + пилот».



Рис. 4. Летательные аппараты (An-3, Cessna-172, Mi-8, As350-Eurocopter)

2.2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ

Решение поставленной задачи будем искать в виде передаточной функции с одним входом и одним выходом в классе линейных систем первого порядка:

$$(1) \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)},$$

где $Y(s) = \sum_{i=0}^m b_i s^{m-i}$ – выход системы, а $X(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^{n-i}$ – вход.

Перепишем систему (1) в виде дифференциального уравнения:

$$(2) \quad \sum_{i=0}^n a_i y^{(n-i)} = \sum_{i=0}^m b_i x^{(m-i)}.$$

Для системы 1-го порядка (с одним полюсом и одним нулем), выражения (1) и (2) будут следующего вида:

$$(3) \quad H(s) = \frac{b_0 s + b_1}{a_0 s + a_1},$$

$$a_0 \dot{y} + a_1 y = b_0 \dot{x} + b_1 x.$$

Коэффициенты $a_i, b_i, i = 0, \dots, 1$ неизвестны. Дальнейшее решение будет строиться на поиске этих коэффициентов.

2.3. ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТОВ МОДЕЛИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТОВ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ MATLAB

Среда MATLAB имеет в своем составе пакет System Identification Toolbox, способный решать подобные задачи.

При решении будем рассматривать только низкие частоты входного и выходного процессов.

Выходным параметром примем первую разность XTE (ΔXTE), входной параметр Arrow.

В результате моделирования и подбора коэффициентов получены четыре модели для соответствующих летательных аппаратов.

Вертолеты:

$$H(s) = \frac{0,4833s + 0,004291}{s + 0,008412} - \text{As350 Eurocopter}$$

$$H(s) = \frac{0,3948s + 0,0007709}{s + 0,004133} - \text{Ми-8}$$

Самолеты:

$$H(s) = \frac{2,584s + 0,1339}{s + 0,0611} - \text{Cessna-172}$$

$$H(s) = \frac{7,77s + 0,32}{s + 0,488} - \text{Ан-3}$$

Все модели являются замкнутыми, так как пилот выступает в качестве регулятора, замыкающего общий контур управления.

Значительная разница подобранных коэффициентов для самолетов и вертолетов объясняется тем, что вертолеты выполняют полеты в условиях сложного рельефа с обтеканием. По этой причине пилот меньше уделяет внимание боковому отклонению, концентрируясь на удержании заданной высоты полета.

3. Моделирование с использованием симуляции полета в режиме реального масштаба времени

3.1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Данные, которые использовались в процессе идентификации моделей были с частотой 10 Гц. Симуляция полета по запланированному маршруту осуществлялась во встроенным симуляторе комплекса NavDat.

Для самолетов были заданы ограничения на угол крена φ , согласно технической спецификации. Угол φ связан с радиусом разворота R летательного аппарата по формуле

$$(4) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{V^2}{g \cdot R},$$

где φ – угол крена, R – радиус разворота ЛА, V – скорость ЛА, g – ускорение свободного падения.

Вертолеты, в отличие от самолетов, более динамичные. Для них можно не задавать эти ограничения.

Начальные условия:

Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$;

– As350 Eurocopter: $V = 150 \text{ км/ч}$, φ – нет ограничений;

– Ми-8: $V = 150 \text{ км/ч}$, φ – нет ограничений;

– Cessna-172: $V = 170 \text{ км/ч}$, $\varphi = 30^\circ$;

– Ан-3: $V = 150 \text{ км/ч}$, $\varphi = 30^\circ$.

3.2. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Результаты моделирования полетов на симуляторе четырех летательных аппаратов представлены на рис. 5.

На рис. 5 показаны траектории захода летательных аппаратов на заданный маршрут. Для чистоты эксперимента у всех ЛА общая точка старта.

Из представленных результатов видно, что у самолета Cessna-172 радиус разворота при заходе на маршрут больше, чем у остальных летательных аппаратов. Это связано с тем, что действует ограничение на угол крена, а скорость данного ЛА больше, чем у остальных.

У вертолета As350 Eurocopter характеристики сопоставимы с таковыми для вертолета Ми-8, переходные траектории этих двух ЛА схожи, за исключением того, что радиус разворота Ми-8 несколько больше радиуса разворота As350 Eurocopter.

Это объясняется существенными различиями в параметрах массы и габаритов этих ЛА.

Из рис. 5 видно, что у всех ЛА переходная траектория выходит на заданный маршрут и ЛА стабилизируется на данном маршруте.

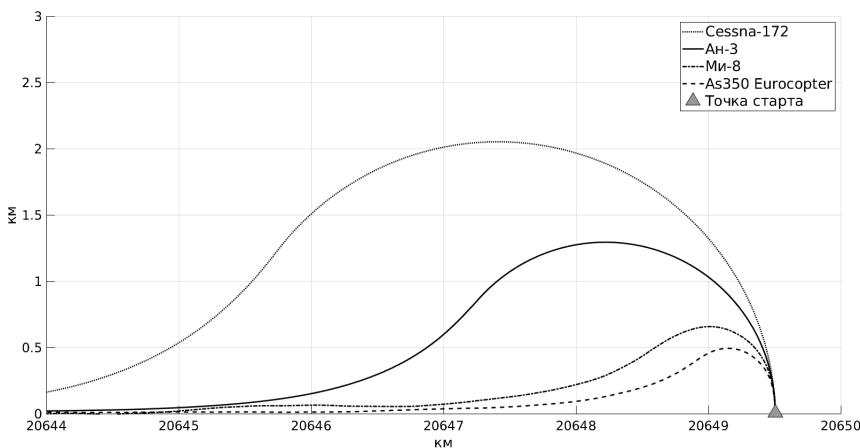


Рис. 5. Результаты моделирования траекторий захода на маршрут

В качестве примера для сравнения с полученными результатами моделирования рассмотрена траектория захода на маршрут в реальном полете вертолета Ми-8 (рис. 6). Результат полета (рис. 6) демонстрирует адекватность подобранных параметров рассмотренных динамических моделей.

У вертолета As350 Eurocopter характеристики сопоставимы с таковыми для вертолета Ми-8, переходные траектории этих двух ЛА схожи, за исключением того, что радиус разворота Ми-8 несколько больше радиуса разворота As350 Eurocopter.

Это объясняется существенными различиями в параметрах

массы и габаритов этих ЛА.

Из рис. 5 видно, что у всех ЛА переходная траектория выходит на заданный маршрут и ЛА стабилизируется на данном маршруте.

В качестве примера для сравнения с полученными результатами моделирования рассмотрена траектория захода на маршрут в реальном полете вертолета Ми-8 (рис. 6). Результат полета (рис. 6) демонстрирует адекватность подобранных параметров рассмотренных динамических моделей.

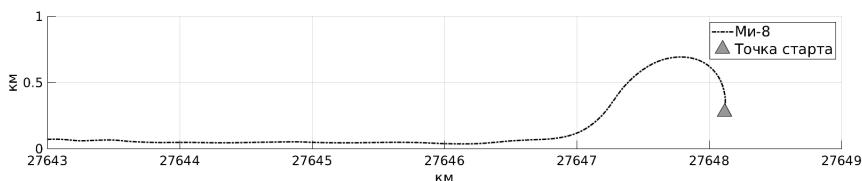


Рис. 6. Траектория захода на маршрут в реальном полете

4. Выводы

Задачи, связанные с идентификацией динамических систем, весьма нетривиальные. Существует ряд сложностей, например недостаточная информация об исследуемых объектах. В данной работе в целом удалость решить подобную задачу. По имеющимся данным XTE и Arrow идентифицировать параметры динамической системы «летательный аппарат + пилот» (использовался пакет программ System Identification Toolbox). В результате получены четыре модели в форме передаточных функций для соответствующих летательных аппаратов. Все модели подобраны с точностью не хуже 70%.

Результаты моделирования показали, что полученные динамические системы «летательный аппарат + пилот» устойчивы и соответствуют результатам реальных полетов.

Литература

1. ВОЛКОВИЦКИЙ А.К., КАРШАКОВ Е.В., ПАВЛОВ Б.В. *Структура алгоритмов управления проводкой летательного аппарата* // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – №3 (140). – С. 217–225.
2. ЖОДЗИШСКИЙ П.Ю., ПУХВАТОВ В.А. *Повышение эффективности выполнения аэрогеофизических исследований* // Геопрофи. – 2010. – №2. – С. 23–25.
3. КАРШАКОВ Е.В. *Особенности алгоритмов управления летательным аппаратом при аэросъемке* // Проблемы управления. – 2012. – №3. – С. 71–76.
4. ТРИГУБОВИЧ Г.М., ШЕВЧУК С.О., КОСАРЕВ Н.С., НИКИТИН В.Н. *Комплексная технология навигационного и геодезического обеспечения аэроэлектромагнитных исследований* // Гирокопия и навигация. – 2017. – Т. 25, №1(96).
5. ШЕВЧУК С.О., БАРСУКОВ С.В. *Применение навигационного комплекса на основе программы routenav для аэрогеофизических работ* // Геопрофи. – 2018. – №2. – С. 40–43.
6. BARON S., KLEINMAN D. *The Human as an Optimal Controller and Information Processor* // IEEE Trans. on Man Machine Systems MMS–10 Mar. – 1969. – Vol. 1. – P. 9–17.
7. BARONS S., KLEINMAN D., LEVISON W. *A Optimal Control Theory to Prediction of Human Performance in a Complex Task* // Proc. of the Fifth NASA–University Annual Conference on Manual Control. – 1969. – NASA–SP 215. – P. 367–387.
8. CROWLEY W., SKAN S. *A Simplified Analysis of the Stability of Aeroplanes* // Aeronautical Research Committee R&M No. 1333, Mar. 1930.
9. CURRY R, ET AL. *A Model for Simultaneous Monitoring and Control* // The 11th NASA–University Annual Conference on Manual Control, USA, 1975. – P. 144–150.
10. HESS R. *Structural model of the adaptive human pilot* // J. of Guidance and Control. – 1979. – Vol. 3, № 5. – P. 416–423.

11. MCRUER D., KRENDEL E. *Mathematical models of human pilot behavior* // AGARD AGD-188, 1974. – 72 p.
12. MCRUER D., GRAHAM D., KRENDEL E. AND W. REISNER JR. *Human Pilot Dynamics in Compensatory Systems: Theory, Models and Experiments with Controlled Element and Forcing Function Variations* // AFFDL-TR-65-15, July 1965.
13. https://geotechnologies.ru/ru/products/navdat_ru.html.

IDENTIFICATION OF THE DYNAMIC SYSTEM "AIRCRAFT + PILOT" WHEN PERFORMING AIRBORNE GEOPHYSICAL SURVEY

Amir Garakoev, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, junior researcher (garakoev.amir@mail.ru).

Anatoliy Gladyshev, Doctor of Technical Sciences, Chairman of the Section on Defense Problems of the Ministry of Defense of the Russian Federation (at the Presidium of the Russian Academy of Sciences) (tolyagladyshev@yandex.ru).

Abstract: The solution of the problem of the structure determining of a controlled dynamic system and the formation of the corresponding control laws requires a detailed analysis of real experimental data, identification methods. Methods for identifying models of behavior of «aircraft + pilot» systems have been successfully developed since the 60s of the last century. Manned aviation occupies a leading position in relation to unmanned systems, respectively, the relevance of such tasks remains to this day. When performing flights, the pilot relies on navigation information displayed on various indicators located in the cockpit of the aircraft. An example of such a pilot indicator is an indicator of type «Arrow». This article is devoted to the analysis of real flight data of four aircraft, the pilots of which flew according to information from the «Arrow» indicator. According to the results of the analysis and with the help of computer simulation, the parameters of four dynamic models «aircraft + pilot» were identified. The models are linear closed (pilot-regulator closing control loop) dynamic systems of the 1st order, described in the form of transfer functions. The results of experiments performed on the simulator using each of the models are presented.

Keywords: identification, dynamic systems, indicator «Arrow», pilot behavior.

УДК 681.5

ББК 30в6

DOI: 10.25728/ubs.2023.103.8

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Б.В. Павловым.*

Поступила в редакцию 16.01.2023.

Дата опубликования 31.05.2023.