

Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН

# УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

*Выпуск 105  
Сентябрь 2023*

**СБОРНИК  
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2023

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
*Институт проблем управления*  
*им. В.А. Трапезникова*

# УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

СБОРНИК ТРУДОВ

*Выпуск 105*

Москва – 2023

### **КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ**

Академики: Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Куржанский А.Б., Новиков Д.А., Попков Ю.С., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Галеев А.А., Савватеев А.В.; д-ра техн. наук: Кузнецов О.П. (ИПУ РАН), Кульба В.В. (ИПУ РАН), Павлов Б.В. (ИПУ РАН), Рутковский В.Ю. (ИПУ РАН).

### **РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ**

**Главный редактор:** академик Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Калимулина Э.Ю. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИТМО), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ, ГУ ВШЭ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук: проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН); д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН); д-р техн. наук доцент Коргин Н.А. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (ИПУ РАН); д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН); д-р биол. наук проф. Михальский А.И. (ИПУ РАН); д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Райгородский А.М. (МФТИ), проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН); д-ра техн. наук: проф. Самуилов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Соловуков А.С. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ); д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

### **РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ**

**Арзамас** – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. (АПИ НГТУ); **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – д-р техн. наук проф. Зоркальцев В.И. (ЛИН СО РАН), д-ра физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодин А.К., проф. Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И.; **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН).

**Адрес редакции:** 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

**Адрес в интернете:** [ubs.mtas.ru](http://ubs.mtas.ru).

# СОДЕРЖАНИЕ

## *Системный анализ*

---

<b>Промыслов В.Г., Семенков К.В., Жарко Е.Ф.</b>	
<i>Оценка собственной характеристики</i>	
<i>киберфизической системы методом сетевых</i>	
<i>исчислений.....</i>	6
<b>Малышев С.В.</b>	
<i>Программная реализация численного метода</i>	
<i>Лакса – Фридрихса для моделирования</i>	
<i>нестационарных задач газовой динамики.....</i>	30

## *Анализ и синтез систем управления*

---

<b>Антипов А.С., Ткачева О. С.</b>	
<i>Робастное управление ходовой тележкой</i>	
<i>однобалочного мостового крана при действии</i>	
<i>несогласованных возмущений и при неполных</i>	
<i>измерениях .....</i>	41

## *Сетевые модели в управлении*

---

<b>Вытовтов К.А., Барабанова Е.А.,</b>	
<b>Вишневский В.М., Волкова С.А., Вытовтов Г.К.</b>	
<i>Алгоритм построения системы уравнений</i>	
<i>Колмогорова для исследования переходного режима</i>	
<i>двуухфазных СМО с большим числом заявок.....</i>	65

**Управление в социально-экономических системах**

---

<b>Нинидзе Д.Л., Угольницкий Г.А., Усов А.Б.</b>	
<i>Управление внедрением инноваций при различных информационных регламентах.....</i>	85
<b>Квятковская И.Ю., Во Тхи Хуен Чанг, Чан Куок Тоан</b>	
<i>Разработка рекомендательной модели поддержки принятия решения при выборе продуктов пользователем .....</i>	110

## ОЦЕНКА СОБСТВЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ КИБЕРФИЗИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ СЕТЕВЫХ ИСЧИСЛЕНИЙ<sup>1</sup>

Промыслов В. Г.<sup>2</sup>, Семенков К. В.<sup>3</sup>, Жарко Е. Ф.<sup>4</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления

им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматриваются подходы к решению частной задачи обеспечения безопасности киберфизических систем, к которым относятся многие объекты критической информационной инфраструктуры, включая такие сферы как транспорт, связь, энергетика и промышленность, а именно, к оценке доступности как максимальной задержки передачи и обработки данных. Анализируются способы оценки собственной характеристики киберфизических систем – так называемой кривой обслуживания, которая представляет собой детерминированные ограничения, связывающие вход системы и минимальный поток на выходе системы. Оценка кривой обслуживания рассматривается в рамках метода сетевых исчислений и подходов мини- и макси-плюс алгебры, которые составляют математическую основу метода. Для оценки кривой обслуживания взят один ранее разработанный метод, использующий свойство дуальности преобразований мини- и макси-плюс алгебры, и предложен новый метод, основанный на связи двух видов кривых обслуживания – мини- и макси-кривой обслуживания. Методы рассматриваются с учетом их применения для реальных систем и существующих ограничений на возможности измерения, в частности, конечности временного интервала измерений. На основе анализа двух методов делается вывод, что каждый из них дает возможную кривую обслуживания, но они требуют дополнительных данных для того, чтобы полученная кривая соответствовала режиму максимального быстродействия системы.

Ключевые слова: киберфизическая система, моделирование, Network Calculus, теория сетевых исчислений, мини- и макси-плюс алгебра, кривая обслуживания, доступность, безопасность.

### 1. Введение

В современном мире киберфизические системы являются частью систем, выполняющих ключевые, критические функции

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-19-00338, <https://rscf.ru/project/23-19-00338/>.

<sup>2</sup> Виталий Георгиевич Промыслов, к.ф.-м.н., в.н.с. (vp@ipu.ru).

<sup>3</sup> Кирилл Валерьевич Семенков, к.ф.-м.н., с.н.с. (semenkovk@ipu.ru).

<sup>4</sup> Елена Филипповна Жарко, к.т.н., с.н.с. (zharko@ipu.ru).

для человека. Обеспечение безопасности управления в таких системах – это одна из ключевых задач, поэтому оценку и контроль характеристик безопасности нужно вести на всех этапах жизненного цикла таких систем. Одной из характеристик безопасности является доступность, и метрикой доступности может служить задержка передачи и обработки данных [4]. Для интеллектуальных транспортных систем, в приложении к которым авторы решают проблему оценки характеристик безопасности, доступность играет ключевое значение, особенно при использовании внешних каналов управления (оператор, диспетчер, элементы дорожной инфраструктуры).

Её оценка чаще всего проводится методами статистического анализа и теории систем массового обслуживания (СМО) [1, 2]. Однако для измерения характеристик киберфизических систем статистические методы оценки не всегда хорошо подходят. С одной стороны, трудно собрать корректную статистику, так как дополнительные тестовые программы, запущенные в системе, могут исказить результат. С другой стороны, процессы в киберфизических системах имеют специфические статистические свойства, они часто описываются сложными функциями распределения, например, многомодовыми или с тяжелыми хвостами [3].

В качестве одной из альтернатив статистическим методам при расчете характеристик потоков данных в компьютерных сетях применяется нестатистический метод анализа детерминированных систем Network Calculus, или теория сетевых исчислений (ТСИ) [9, 10]. Он базируется на мини-плюс алгебре [16] и во многих случаях позволяет линеаризовать системы, являющиеся нелинейными в «обычной» алгебре, а также получать детерминированные оценки таких важных параметров систем как задержка при обработке или размер буфера данных. Детерминированность получаемых оценок – это важный фактор, определяющий практическую привлекательность метода.

В инженерных задачах требования и критерии часто выражаются в виде детерминированных предельных величин, (например, максимального времени прохождения информации), т.е. характеристик, которые непосредственно определяются методами ТСИ. Поэтому алгоритмы ТСИ могут быть частью средств монито-

ринга безопасности системы и непрерывно выдавать эксплуатирующему систему персоналу диагностические данные о доступности и, что ещё важнее, прогноз доступности на некоторое время вперёд.

Для расчета параметров системы ТСИ использует специфические характеристики системы: кривую поступления (конверт) потока данных и кривую обслуживания [14]. Они не являются «обычными» характеристиками, которые можно найти в паспорте на систему, и их необходимо вычислить по имеющимся входным данным: кумулятивным (интегральным) кривым потоков, обрабатываемых в системе. Кривая поступления ограничивает изменение кумулятивного потока на временном интервале. Кривая обслуживания в ТСИ является аналогом передаточной функции системы в радиофизике – это внутренняя характеристика системы, определяющая реакцию системы на входной поток. Кривая поступления совместно с кривой обслуживания задают границы для расчета параметров системы.

Часто выделяют верхнюю и нижнюю кривые поступления и минимальную и максимальную кривую обслуживания. Однако для практического использования наиболее интересны верхняя кривая поступления и минимальная кривая обслуживания, так как из них можно оценить сверху время прохождения данных в системе и параметры буферизации. Формальное и детальное описание кривых поступления и обслуживания и дискуссию по ним можно найти в работе [17].

В литературе основное внимание уделяется вычислению кривой поступления. Данная тенденция, видимо, определяется двумя основными факторами: во-первых, кривая поступления в отличие от кривой обслуживания может использоваться самостоятельно, например, для диагностики состояния, и, во-вторых, для вычисления минимальной (верхней) кривой поступления, которая имеет наибольший практический интерес, существует хорошо обоснованная формула [12]. Основной проблемой для расчета кривой поступления является сложность  $O(N^2)$ , где  $N$  – размер выборки, что существенно замедляет расчеты на больших выборках или, что то же самое, на длительных интервалах непрерывной эксплуатации. Известен по крайней мере один алгоритм

быстрого приближенного вычисления кривой поступления, обладающей сложностью  $O(N)$  [7], хотя для указанного алгоритма проблема точности полученной оценки и выбора начального параметра всё ещё открыты.

Оценка минимальной кривой обслуживания (далее слово «минимальная» мы, как правило, будем опускать) является более сложной задачей, и для нее пока нам не известно полного теоретического обоснования или общепринятого алгоритма. Особенностью ТСИ является то, что связь между входом и выходом системы часто задается неравенствами, поэтому в качестве кривой обслуживания необходимо рассматривать множество решений, удовлетворяющих неравенству, т.е. решение не является единственным, а кривая обслуживания, полученная на конкретной реализации процесса обработки, не обязательно станет «наилучшей».

Подробный обзор оценки кривых обслуживания как в детерминированном, так и в стохастическом ТСИ был проведен Фидлером [11]. В его работе рассматриваются различные методы оценки кривой обслуживания и области их применения. Фидлер и некоторые другие авторы [5, 8] предлагают наряду с пассивными подходами, связанными с анализом реализаций алгоритмов на конкретных системах обработки и восстановления кривой обслуживания в аналитическом виде, использовать для оценки кривых обслуживания и активные методы измерения с использованием тестовых последовательностей. В работах рассматриваются активные методы измерения для систем специального вида, с разделяемым ресурсом. Эти методы редко можно применить для оценки кривой обслуживания в системах потоковой передачи.

Другой подход для проведения оценки кривой обслуживания с применением тестовой последовательности приведен в статье [3] и использует двойственность описания процессов в мини- и макси-плюс алгебре [13]. В работе [6] доказано слабое свойство макси-плюс алгебры, которое позволяет рассчитать кривую обслуживания, если для системы известны входной и выходной потоки. Однако в работе приведены ограниченные сценарии применения доказанного свойства для оценки кривой обслуживания.

Отсутствие практических методов, позволяющих достоверно измерить кривую обслуживания реальной системы, является преградой для применения ТСИ. Те немногие группы, которые работают с ТСИ (прежде всего группа Ле Будека), уделяют основное внимание теоретическим проблемам сетевых исчислений, почти не занимаясь вопросами измерения характеристик в реальных системах.

Настоящая работа посвящена поиску эффективных практических методов оценки кривой обслуживания [3]. В разделе 2 приводятся необходимые теоретические обоснования известные в ТСИ для кривой обслуживания, и выводится ряд дополнительных следствий. Расчёты кривых обслуживания для простоты проводятся на примере кусочно-линейных входных и выходных потоков. Отдельно рассматривается проблема, которую мало затрагивают: выполнение расчётов на конечном интервале измерений – и предлагаются способы проведения таких расчётов. В работе анализируются существующие методы оценки кривой обслуживания и предлагается альтернативный метод, который применим, если известны максимальная кривая обслуживания и кривая поступления на входе и выходе системы. Проводится сравнительный анализ корректности оценки кривой обслуживания двумя методами на примере системы с известной кривой обслуживания.

## **2. Связь обратной макси-плюс свертки и мини-плюс свертки**

Будем рассматривать, как это принято в ТСИ, пассивную систему без потерь, которая на входе получает некий поток информации, обрабатывает его и выдает на выход. Под пассивной системой понимается такая система, где в выходной поток не «добавляются» никакие данные, помимо полученных на входе и где выходной поток никогда не превышает входного. В реальной пассивной системе без потерь в конечном итоге входной и выходной потоки сравняются, так как система обработает все входные данные. С математической точки зрения, в ТСИ потоком называется любая неотрицательная неубывающая функция, определенная при неотрицательном значении аргумента.

Для таких систем рассмотрим связь обратной макси-плюс свёртки (деконволюции) и мини-плюс свертки (конволюции) [3]:

**Свойство 1.** Пусть функции  $A(t)$  и  $B(t)$  являются потоками, а  $C(t)$  – некоторая функция. Тогда если

$$(1) \quad C \leq B \overline{\otimes} A,$$

то  $B \geq A \otimes C$ , где  $\overline{\otimes}$ ,  $\otimes$  – операторы обратной макси-плюс свёртки и мини-плюс свертки соответственно [12].

Для свойства 1 доказана его справедливость только в одну сторону.

Проведём ряд вспомогательных рассуждений и для наглядности дальнейших выкладок развернем операторы  $\overline{\otimes}$  и  $\otimes$  в свойстве 1:

$$(2) \quad \begin{aligned} C(t) &\leq \inf_{s \geq 0} (B(t+s) - A(s)), \\ B(t) &\geq \inf_{0 \leq s \leq t} (A(t-s) + C(s)). \end{aligned}$$

Применим к исследуемым ТСИ системам свойство 1 связывает входной поток  $A(t)$ , выходной поток  $B(t)$  и минимальную кривую обслуживания  $C(t)$ . В свойстве 1 левая часть первого неравенства может принимать отрицательные значения, что для кривой обслуживания реальной системы не имеет физического смысла. Поэтому в дальнейшем мы часто будем использовать только неотрицательные части соответствующих неубывающих функций  $f(t)$ , обозначаемые как  $f(t)^+$ .

Рассмотрим более подробно некоторые простые следствия формулы (1), необходимые для практической оценки минимальной кривой обслуживания. Они напрямую следуют из свойств макси-плюс свёртки [13].

**Свойство 2.** Пусть функции  $A$  и  $B$  – потоки и  $C \leq B \overline{\otimes} A$ . Тогда  $C \leq B$ .

Доказательство непосредственно вытекает из анализа выражения (2). В самом деле, в силу неотрицательности  $A(t)$  имеем  $B(t) \geq B(t+s) - A(s)$  при любых  $t \geq 0$  и  $s \geq 0$ . Это неравенство будет справедливо и для точной нижней грани, а значит  $B(t) \geq C(t)$ . Что и требовалось доказать.

Отсюда также следует, что если  $A(t) \geq B(t)$  при  $t \geq 0$ , то  $C(t) \leq A(t)$  при  $t \geq 0$ .

**Свойство 3.** Если  $A(t)$  и  $B(t)$  являются потоками, то  $C(t)$  – неубывающая функция.

**Доказательство:**

Так как  $A(t)$  и  $B(t)$  – потоки, то при  $t_1 \leq t_2$  и  $s \in \mathbb{R}^+$ :

$$B(t_1 + s) - A(s) \leq B(t_2 + s) - A(s),$$

следовательно

$$\inf_{s \geq 0} (B(t_1 + s) - A(s)) \leq \inf_{s \geq 0} (B(t_2 + s) - A(s)),$$

т.е.  $B \bar{\otimes} A(t_1) \leq B \bar{\otimes} A(t_2)$  для  $0 \leq t_1 \leq t_2$ . Что и требовалось доказать.

Из того, что  $C(t)$  – неубывающая функция, следует, что  $C(t)^+$  также является потоком.

**Свойство 4.** Пусть функции  $A$  и  $B$  – потоки,  $A(0) = 0$  и  $B(0) = 0$  и  $C \leq B \bar{\otimes} A$ . Тогда будет верно неравенство  $B \geq A \otimes C^+$ .

**Доказательство:**

Согласно свойству 1,  $B \geq A \otimes C$ , а по свойству (2),  $C \leq B$ . Так как  $B$  – поток, то  $B \geq C^+$ . По свойству мини-плюс свертки [12, п. 3.1.6] если  $f, g$  потоки и  $f(0) = 0, g(0) = 0$ , то  $f \otimes g \leq f \wedge g$ , т.е.  $A \otimes C_1^+ \leq B$ . Что и требовалось доказать.

Свойства (1)–(4) предлагаются использовать для оценки криевой обслуживания в рамках ТСИ.

### 3. Примеры расчета обратной макси-плюс свертки для кусочно-линейных функций

В практическом смысле свойство 1 означает, что если найдена некоторая кривая обслуживания  $\beta' = B \bar{\otimes} A$ , то она для данного  $A$  обеспечит выполнение неравенства  $B' \leq B$ , где  $B' = A \otimes \beta'$ . Иными словами, используя свойство 1, можно по входному и выходному потокам найти некоторую кривую обслуживания системы. К сожалению, нельзя гарантировать, что найденная кривая обслуживания будет «наилучшей», т.е. будет соответствовать сценарию наибольшего быстродействия системы, при сохранении ограничений на выходной поток, однако некоторые свойства системы она позволяет описать.

Проанализируем ограничения и применимость формулы (1) на примерах. В примерах будут использованы кусочно-линейные представления потоков и кривой обслуживания в виде аффинных функций:

$$(3) \quad \varphi(t) = \begin{cases} R(t-T), & t > T, \\ 0, & t \leq T; \end{cases}$$

$$(4) \quad \gamma(t)_{r,b} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ rt + b, & t \geq 0. \end{cases}$$

В формулах (3), (4) применительно к описанию систем постоянные параметры  $T, R, r, b$  – это задержка и скорость обработки данных в системе, скорость поступления и максимальная неравномерность во входном потоке соответственно.

Эти функции являются базовыми и могут быть найдены почти в любой литературе по ТСИ, например, в [1, 11, 12]. Преимущество кусочно-линейных функций по сравнению с гладкими заключается в том, что результаты для них получаются аналитически и нет необходимости прямого вычисления свёртки или обратной свёртки в мини/макси-плюс алгебре [18]. Недостатком является то, что кусочно-линейные кривые могут дать более консервативные результаты, чем гладкие функции, т.е. полученный диапазон ограничений может быть шире. Для расчета в примерах использовалась библиотека по ТСИ [15].

**Пример 1.** Пусть входной и выходной потоки описываются линейными функциями  $A(t) = kt + b_1$ ,  $B(t) = kt + b_2$ , и  $k, b_1, b_2$  – константы.

*Тогда обратная макси-плюс свертка имеет вид:*

$$\inf_{s \geq 0} (k(t+s) + b_2 - ks - b_1) = kt + (b_2 - b_1).$$

Для случая  $b_1 > b_2$  вид  $\beta(t)$  приведен на рис. 1.

Данный пример может описывать систему, где скорость обработки близка скорости, с которой поступают данные, или равна ей.

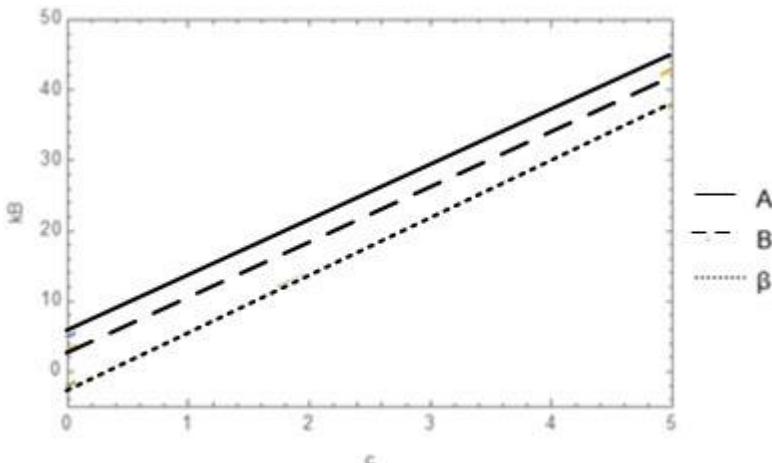


Рис. 1. Вид  $\beta(t)$  при  $k = 8, b_1 = 5, b_2 = 3$

**Пример 2.** Пусть потоки заданы функциями вида  $A(t) = kt + b_1, B(t) = k(t - T)^+$ , и  $T, b_1, k$  – константы. Тогда

$$\begin{aligned} \inf_{s \geq 0} (k(t - T + s)^+ - ks - b_1) &= \\ &= \inf_{0 \leq s < T} (k(t - T + s)^+ - ks - b_1) \wedge \inf_{s \geq T} (k(t + s) - ks - b_1) = k(t - T) - b_1. \end{aligned}$$

Для случая  $b_1 \geq 0$  вид  $\beta(t)$  приведен на рис. 2.

Данный пример является продолжением примера 1, однако здесь учитывается то, что в любой реальной системе обслуживание входного потока происходит не мгновенно, и тогда выходной поток всегда будет иметь большую неравномерность, чем входной [10]. Полученная кривая обслуживания  $\beta'(t)$  не имеет физического смысла при  $\beta' < 0$ , поэтому вместо неё в качестве кривой обслуживания следует использовать  $\beta'(t)^+$ .

**Пример 3.** Пусть  $A(t) = k_1 t + b_1, B(t) = k_2(t - T)^+$ , где  $k_1, b_1, k_2$  – константы и  $b_1 \geq 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \inf_{s \geq 0} (k_2(t - T + s)^+ - k_1 s - b_1) &= \\ &= \inf_{0 \leq s < T} (k_2(t - T + s)^+ - k_1 s - b_1) \wedge \inf_{s \geq T} (k_2(t + s) - k_1 s - b_1) = \\ &= \begin{cases} k_2(t - T) - b_1, & t > T, \\ k_1(t - T) - b_1, & t \leq T. \end{cases} \end{aligned}$$

В данном примере нарушается условие о пассивности системы, однако он будет использоваться далее для иллюстрации расчёта кривой обслуживания на ограниченном по времени наборе экспериментальных данных, что будет рассмотрено в разделе 4.

Вид  $\beta'(t)$  приведен на рис. 3.

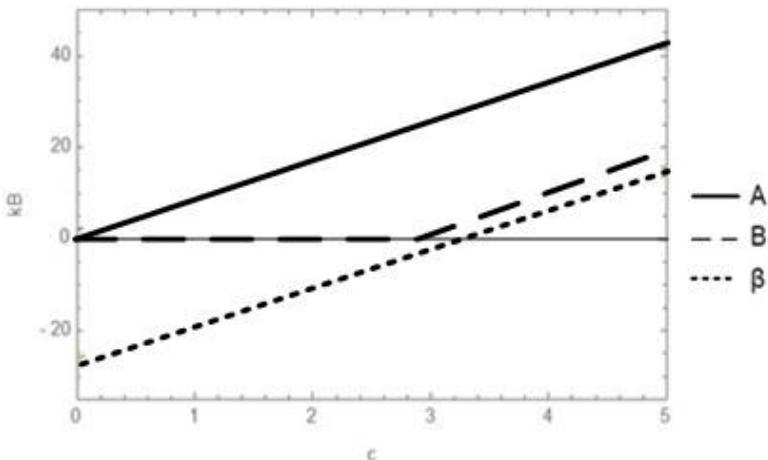


Рис. 2. Вид  $\beta'(t)$  для случая  $k = 8, b_1 = 0, T = 3$

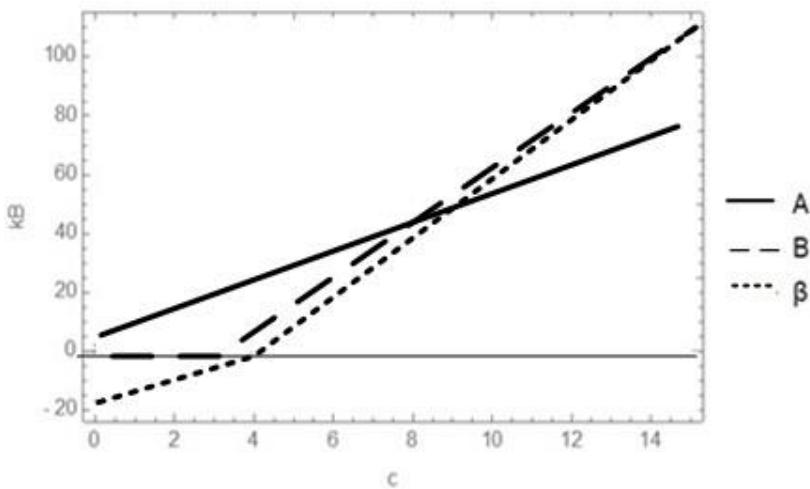


Рис. 3. Вид  $\beta(t)$  случая  $k_1=5, k_2=9, b_1 = 2$

#### 4. Эффект конечности экспериментальных данных

Свойства и примеры, приведенные выше, рассматривались без учета того, что в любой реальной системе данные ограничены по времени. Поэтому полезно определить, как само понятие ограничения на время для потока, так и рассмотреть свойства уравнения (1) потока с ограниченным временем наблюдения.

*Определение.* Если функция потока  $A(t)$  ограничена по времени наблюдения  $[S, T]$ , где  $S, T \geq 0$ , то будем считать, что вне его она постоянна:  $A(t) = A(S)$  при  $t < S$ , и  $A(t) = A(T)$  при  $t > T$ , где  $A(S)$  и  $A(T)$  понимаются в смысле правого и левого пределов соответственно [12].

Рассмотрим проблему ограниченного времени при экспериментальном измерении входного и выходного потока для уравнения (1).

Пусть имеются потоки  $A(t)$ ,  $B(t)$  с ограниченным временем наблюдения. Предположим, что система является пассивной. Тогда если в какой-то момент времени  $v_0$  данные перестают поступать на вход, то выходной поток через какое-то время станет постоянным и равным входному потоку:  $A(t)_{t > v_0} = Q$ ,  $B(t)_{t > v_1} = Q$ ,  $B(t)_{t < v_1} \leq A(t)$ ,  $v_1 \geq v_0$ .

В таком случае кривая обслуживания системы будет равна нулю для  $t \leq v_1$ . Это логически вытекает из понятия «минимальности» кривой обслуживания. Для ограниченного во времени сигнала, по свойству 1, получим кривую обслуживания  $\beta(t) \leq 0$ , что формально удовлетворяет правой части неравенства, но является тривиальным результатом и в практическом смысле ничего не дает.

Проблема измерения кривой обслуживания состоит в том, что, в отличие от входного и выходного потока, которые могут иметь конечную длительность, кривая обслуживания является свойством самой системы и должна быть определена для любого момента времени. Для её вычисления формально необходим входной сигнал бесконечной длительности, что невозможно в реальности. Поэтому мы рассмотрим подходы, направленные на то, чтобы ослабить влияние конечного интервала измерений на оценку кривой обслуживания.

Опишем первый из них. Пусть входной и выходной потоки  $A(t)$  и  $B(t)$  – кусочно-линейные функции, определенные при  $t \geq 0$ .

Вместо выходного потока  $B$  будем обрабатывать приведенный выходной поток  $B'$ , который определим следующим образом:

$$B'(t) = \begin{cases} B(t), & t \leq v_1, \\ +\infty, & t > v_1. \end{cases}$$

Введём  $\beta' = B' \overline{\otimes} A$ ,  $\beta' \leq B'$ . Такой прием использует положение о бесконечности выходного потока при конечности входного потока, и работает наподобие фильтра, отсекающего влияние на кривую обслуживания работы системы на холостом ходу.

Тогда, воспользовавшись свойством 1, зададим  $B'' = A \otimes \beta'$  и, учитывая свойство (8) из работы [12] ( $f \otimes g \leq f \wedge g$  для  $f(0) = 0$ ,  $g(0) = 0$ ), получим:

$$B'' \leq \beta' \wedge A \Rightarrow B' \geq B'' \Rightarrow B'' \leq B \text{ для } t < v_1.$$

Таким образом, получена кривая обслуживания, которая удовлетворяет условию  $B \geq A \otimes \beta$  для  $t \leq v_1$ . Пример с иллюстрацией подхода показан на рис. 4.

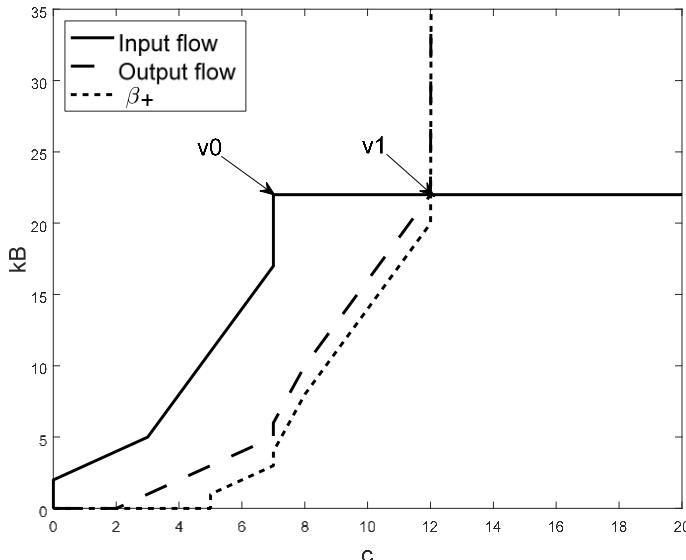


Рис. 4. Применение приведенного выходного потока для расчета кривой обслуживания

Второй подход заключается в том, чтобы остановить работу системы в момент времени  $v_0 \leq v_1$  и далее распространить состояние системы в точке  $v_0$  на интервал  $(v_0, +\infty)$ , сохраняя разность между входным и выходным потоком на том уровне, который был в точке  $v_0$ .

Пример для минимальной кривой обслуживания, иллюстрирующий второй подход, приведен на рис. 5. В нём для времени  $t > v_0$  используется линейная экстраполяция входного и выходного потока.

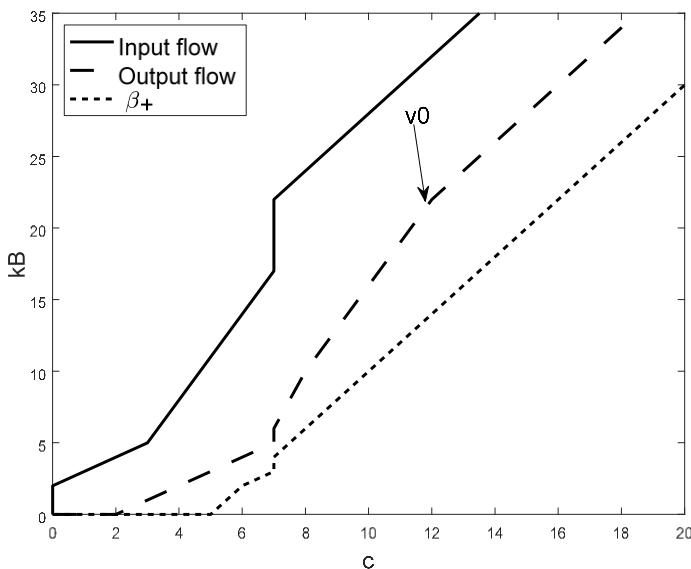


Рис. 5. Применение экстраполяции потоков для расчета кривой обслуживания

## 5. Поток и кривая поступления в оценке кривой обслуживания

Кроме уже указанных недостатков, применение уравнения (2) свойства (1) имеет особенность в том, что зависит от конкретной реализации потока, который всегда в реальном случае будет определен на ограниченной области определения и может вполне

оказаться, что выбранный интервал не в полной мере характеризует систему.

Для того чтобы уйти от отдельной реализации потока, ТСИ предлагает описание в виде кривой поступления [9]. В зависимости от того, ограничен поток кривой поступления сверху или снизу, говорят о верхней или нижней кривой поступления по аналогии с максимальной и минимальной кривой обслуживания. Чтобы в формуле (2) перейти к кривой поступления, докажем свойство монотонности оператора макси-плюс обратной свёртки.

Пусть  $A_1(t)$ ,  $B_1(t)$  и  $A_2(t)$ ,  $B_2(t)$  – потоки и  $B_1(t) \leq B_2(t)$ ,  $A_1(t) \geq A_2(t)$ , тогда  $B_1 \bar{\otimes} A_1 \leq B_2 \bar{\otimes} A_1$  и  $B_1 \bar{\otimes} A_1 \leq B_1 \bar{\otimes} A_2$ .

Для доказательства достаточно рассмотреть уравнение (2) для каждой пары функций, в первом случае это будет  $\inf_{s \geq 0} (B_1(t+s) - A_1(s)) \leq \inf_{s \geq 0} (B_2(t+s) - A_1(s))$ . Второй случай доказывается аналогично.

С учетом монотонности оператора обратной свертки можно сформулировать следствие для свойства 1:

**Свойство 1 (модифицированное).** Пусть  $A(t)$ ,  $B(t)$  – входной и выходной потоки в системе,  $a$ ,  $b$  – минимальная нижняя и верхняя кривые поступления для входного и выходного потоков соответственно,  $\beta$  – кривая обслуживания системы. Тогда из  $B \bar{\otimes} A \geq \beta$  следует, что  $b \bar{\otimes} a \geq \beta$ .

Доказательство очевидно из свойства монотонности оператора  $\bar{\otimes}$ .

Применение кривой поступления вместо реализаций потока позволяет восстановить характеристики системы без прямых измерений потоков, если известны оценки кривой поступления, полученные, например, из теоретических предпосылок; можно заметить, что замена потоков на их огибающие приведет к менее консервативной оценке кривой обслуживания.

## 6. Оценка минимальной кривой обслуживания для известных кривых поступления

Подход к оценке кривой обслуживания, основанный на слабом свойстве, связывающем обратную макси-плюс и прямую

мини-плюс свертки, который, как показано в разделах 2 и 3, имеет ограниченное применение на практике.

Рассмотрим подход, который лишён указанных недостатков и позволяет получить оценку для кривой обслуживания, если известны максимальная кривая обслуживания и кривые поступления.

Для этого приведем теорему, связывающую кривую поступления на входе и выходе системы с кривыми обслуживания [12, теорема 1.6.2].

**Теорема 1.** Пусть входной поток с кривой поступления  $\alpha$  попадает в систему, имеющую максимальную кривую обслуживания  $\gamma$  и кривую обслуживания  $\beta$ . Тогда выходной поток будет ограничен кривой поступления  $\alpha^*$  равной:

$$(5) \quad \alpha^* = (\alpha \otimes \gamma) \oslash \beta.$$

**Доказательство.** см. [12].

**Замечание 1.** Равенство левой и правой части в данной теореме нужно понимать в контексте того, что результатом расчета для ТСИ является ограничение на некоторую характеристику. В доказательстве данной теоремы [12] указано, что

$$(6) \quad \underline{\alpha}^* \leq (\alpha \otimes \gamma) \oslash \beta,$$

где  $\underline{\alpha}^*$  минимальная верхняя («наилучшая») кривая поступления выходного потока, соответственно кривая поступления выходного потока, рассчитанная по формуле (5) в общем случае, не является «наилучшей» кривой поступления. Физический смысл уравнения (5) состоит в том, что если известны кривая поступления входного потока и кривые обслуживания, то можно рассчитать кривую поступления выходного потока. Однако данная кривая поступления не является единственной возможной и «наилучшим» в силу неравенства (6).

На практике реальная кривая поступления часто неизвестна, и в качестве оценки кривой поступления для входного  $\alpha$  и выходного  $\alpha^*$  потоков и максимальной кривой обслуживания  $\gamma$  применяют формулы

$$(7) \quad \underline{\alpha} = A \oslash A,$$

$$(8) \quad \underline{\alpha}^* = B \oslash B,$$

$$(9) \quad \gamma' = B \oslash A.$$

**Следствие 1.** Если на вход системы без потерь подается поток  $A$  с кривой поступления  $\alpha$ , на выходе регистрируется поток  $B$  с кривой поступления  $\alpha^*$ , определяемый теоремой 1, и максимальная кривая обслуживания  $\gamma$  системы выше, чем минимальная оценка  $\gamma'$  по формуле (9), то кривая обслуживания системы  $\beta$  будет не хуже, чем

$$(10) \quad \beta \geq (\alpha \otimes \gamma') \oslash \alpha^*.$$

**Доказательство.** Рассмотрим уравнение (5). С учетом изотонности операторов прямой и обратной свертки и условия  $\gamma \geq \gamma'$ , будет справедливо неравенство:  $\alpha^* \geq (\alpha \otimes \gamma') \oslash \beta$ .

Далее воспользуемся свойством мини-плюс алгебры, связывающим прямую и обратные свертки [12]: если,  $f, g, h$  – потоки, то  $f \oslash g \leq h$  тогда и только тогда, когда  $f \leq g \otimes h$ . Сделаем замены  $h = \beta, f = (\alpha \otimes \gamma'), g = \alpha^*$  и учтём, что если  $\alpha, \gamma$  – потоки то  $\alpha \otimes \gamma'$  – также поток. Тогда получим, что  $\beta \geq (\alpha \otimes \gamma') \oslash \alpha^*$ . Что и требовалось доказать.

Уравнения (7), (8) дают минимальные оценки соответствующих величин. Поэтому, с учетом замечания 1, полученная оценка для кривой обслуживания по формуле (10) не является строгой. Кривая поступления выходного потока, полученная, например, по формуле (8) на некоторой реализации входного потока, может не совпадать с кривой поступления, рассчитанной по формуле (6). Следовательно, минимальную кривую поступления выходного потока нельзя без предварительного критического анализа использовать для расчета кривой обслуживания.

Напомним, что на практике используются не кривые поступления и кривые обслуживания, рассчитанные на бесконечной области по формулам прямой и обратной свертки, а их оценки, полученные на конечном интервале времени. Исключением может быть лишь кривая поступления входного потока, где можно сформировать данные (входной поток) с наперед известными характеристиками.

Покажем, что в этом случае следствие 1 остается верным.

**Лемма 1.** Неравенство  $\beta \geq (\alpha \otimes \gamma') \oslash \alpha^*$  в следствии 1 остается верным, если вместо истинных значений используются

оценки кривой поступления потока и максимальной кривой обслуживания, полученные на ограниченном интервале наблюдений.

**Доказательство.**

Пусть в системе в течение ограниченного времени наблюдается поток  $A$  и выходной поток  $B$ . Обозначим потоки с областью определения  $t \in [0, T]$  как  $A'$  и  $B'$ . Очевидно, что на этом интервале  $A = A'$  и  $B = B'$ .

$$\text{В} \quad \text{операции} \quad \text{обратной} \quad \text{свертки} \\ (f \oslash g)(t) = \sup_{u \geq 0} (f(t+u) - g(u)) \quad \text{включён и интервал } t \in [0, T].$$

Тогда  $A \oslash A \geq A' \oslash A'$ ,

$$B \oslash B \geq B' \oslash B',$$

$$B \oslash A \geq B' \oslash A'.$$

Обозначим полученные оценки как  $\alpha', \alpha^*, \gamma'$ ; они также ограничены по времени наблюдения на интервале  $t \in [0, T]$ .

Так как операторы прямой и обратной свертки являются изотонными [12] и операция обратной свертки включает интервал  $t \in [0, T]$ , то  $\beta \geq (\alpha \otimes \gamma') \oslash \alpha^* \geq (\alpha' \otimes \gamma') \oslash \alpha^*$ . Что и требовалось доказать.

На графике (рис. 6) приведен пример расчета кривой обслуживания с применением следствия 1 и леммы 1. В примере учитывается ограничение на область определения потоков, время измерений составляет 8 с.

Серым цветом и толщиной выделены величины максимальной задержки, вычисленной непосредственно по входному и выходному потоку (внизу графика) и по минимальной кривой обслуживания и кривой поступления потока (вверху). Они составляют 1,5 с и 1,33 с соответственно. Отличие является результатом использования оценок кривой поступления входного потока и кривых обслуживания вместо их реальных значений.

На практике для потоков с ограниченным временем наблюдения оценка для кривой обслуживания, полученная по следствию 1, часто совпадает с минимальной оценкой максимальной кривой обслуживания. Это является результатом того, что для обоих величин рассчитывается минимальная граница, которая для неполных данных может совпадать.

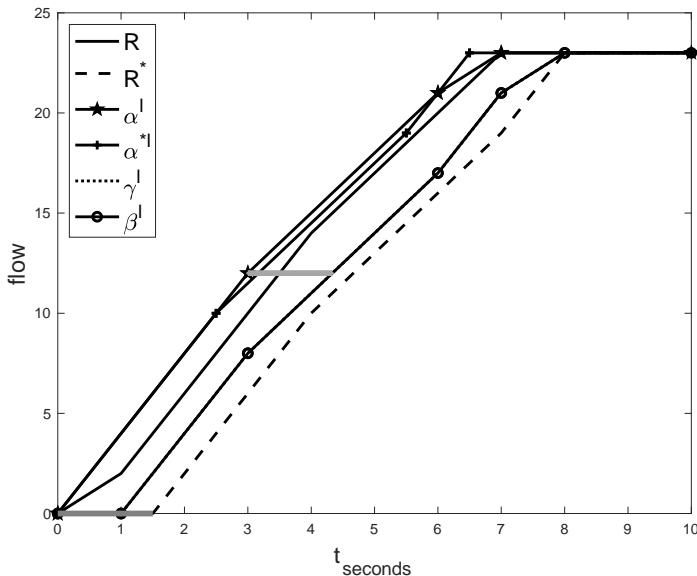


Рис. 6. Пример расчета минимальной кривой обслуживания

## 7. Сравнение методов оценки кривой обслуживания

Приведем сравнительный анализ двух методов расчета кривой обслуживания, для чего рассмотрим систему с известной заранее кривой обслуживания.

Пусть систему с истинной кривой обслуживания  $\beta_{true}$ , описываемую аффинной функцией по формуле (3), подается тестовый входной поток и пусть на выходе системы регистрируется выходной поток. По формулам (7), (8) рассчитаны оценки минимальных кривых поступления потоков (входного  $\underline{\alpha}$  и выходного  $\underline{\alpha}^*$ ) и наименьшей максимальной кривой обслуживания  $\gamma'$  (9), используемой в методе (10).

На рис. 7 приведены  $\underline{\alpha}$  и  $\underline{\alpha}^*$  для трех реализаций входных потоков. Наклон огибающей у этих потоков соответственно больше наклона кривой обслуживания, равен ей и меньше её. Истинная кривая обслуживания  $\beta_{true}$  приведена для сравнения. Далее для трех реализаций входных потоков по формуле (1) рассчитаны

кривые обслуживания  $\beta_1 \dots \beta_3$  и аналогично по формуле (10) рассчитаны кривые обслуживания  $\beta_{1a} \dots \beta_{3a}$  (рис. 7б); потоки в системе для последнего случая приводились к виду, учитывающему конечность интервала наблюдения (п. 4).

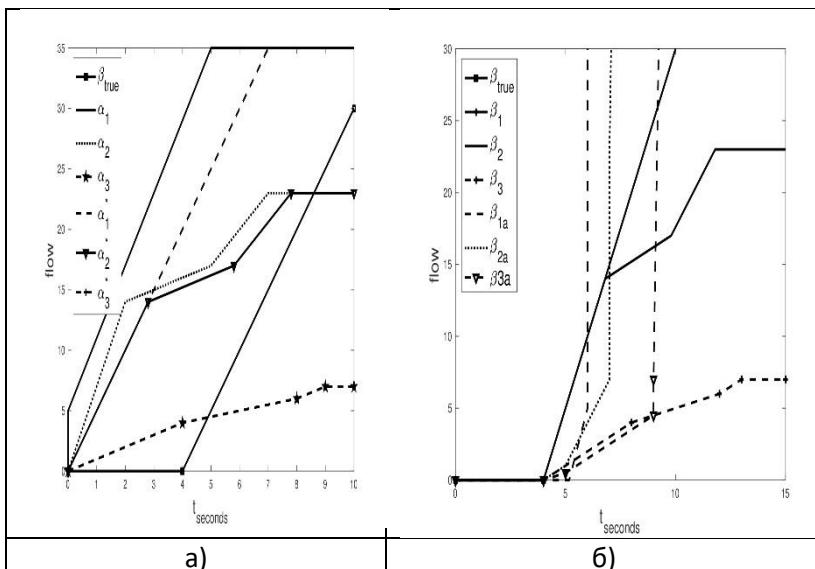


Рис. 7. Пример расчета минимальной кривой обслуживания:  
а) истинная кривая обслуживания и три реализации кривых поступлений; б) результаты расчета кривых обслуживания

На рис. 7б видно, что кривые обслуживания, рассчитанные по формуле (10), дают более близкую оценку для кривой обслуживания.

Однако, по нашим наблюдениям, на практике кривая обслуживания, рассчитанная по формуле (10), часто лежит левее реальной кривой обслуживания, что приводит к заниженной оценке характеристики, как это было в примере на рис. 6. Это может быть связано с тем, что рассчитанные оценки кривой поступления лежат выше минимальной верхней кривой поступления. Данного эффекта не наблюдалось для кривой обслуживания, посчитанной по формуле (1).

Также можно видеть, что если поток достаточно интенсивен, т.е. если на интервале наблюдения наклон его огибающей в основном больше, чем у кривой обслуживания, то, благодаря фильтрующему свойству мини-плюс свертки, получается лучшее соответствие с кривой обслуживания.

## 8. Заключение

Задача оценки характеристик киберфизической системы в контексте выбора ее архитектуры и обоснование безопасности обычно решается на начальных этапах создания системы, в процессе ее разработки и испытания. Однако она и в дальнейшем не теряет своей актуальности и становится частью задач диагностики, обеспечения надежности и поддержания безопасности функционирования системы.

Одной из важнейших характеристик безопасности является доступность, а в качестве метрики доступности можно принять задержку передачи и обработки данных [4]. Например, в интеллектуальных транспортных системах, в приложении к которым решаются задачи оценки доступности, эта метрика в ряде приложений естественным образом определяет доступность. Нельзя допустить неконтролируемого ухода задержки за верхние границы; в случае превышения задержки система должна перейти в некоторое безопасное состояние: например, остановить транспортное средство, активизировать наиболее безопасный алгоритм автономного вождения и т.д. Это означает что временные параметры обработки информации и прохождения команд управления (задержки) в системах, обеспечивающих интеллектуальную транспортную среду, и им подобные должны быть заданы и должны постоянно контролироваться.

Кривая обслуживания в ТСИ – это одна из основных характеристик системы, определяющая её быстродействие, т.е. доступность, поэтому, зная кривую обслуживания, можно достаточно просто диагностировать состояние системы. Однако эта характеристика очень трудна для оценки.

В работе рассмотрено два метода оценки кривой обслуживания. Первый метод основан на использовании слабого свойства мини-плюс свертки (формула (1)), второй основан на доказанном

нами следствии из теоремы 1 (формула (10), которая связывает реализацию кривой поступления выходного потока с максимальной кривой обслуживания и кривой поступления входного потока. Оба метода позволяют оценить кривую обслуживания. Первый метод на практике дает более «правую», консервативную границу для кривой обслуживания и завышенную оценку задержку. Второй метод для экспериментов с известной кривой обслуживания показал лучшее совпадение формы кривой обслуживания, но для некоторых тестовых последовательностей приводит к завышению оценки кривой обслуживания и занижению оценки задержки.

Отдельно рассматривается проблема проведения расчётов по данным измерений на конечном интервале времени, так как формулы мини- и макси-плюс свёрток предполагают проведение расчётов на бесконечном интервале времени. В работе предлагаются два способа расчетов, которые не вносят искажений в имеющиеся данные. В обоих из них выходной поток доопределяется за пределами интервала измерений. В первом он заменяется на приведённый выходной поток с бесконечным большим значением за пределами интервала наблюдений. Во втором методе входной и выходной потоки экстраполируются за пределами интервала измерений.

Мы полагаем, что пути к улучшению методов оценки кривой обслуживания лежат в использовании дополнительных допущений, например, о виде функций, к которым принадлежат кривые обслуживания, или об априорных свойствах системы. Еще одним способом улучшения оценки может стать применение тестирующих потоков специального вида, с интенсивностью потока сравнимой с ожидаемым наклоном кривой обслуживания.

Чтобы разработать практически применимую методику, необходимо провести значительный объем экспериментов, в том числе измерений на реальных объектах, что составляет задачу отдельного исследования.

## Литература

1. ВИШНЕВСКИЙ В.М., ДУДИН А.Н., КЛИМЕНOK В.И. *Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях.* – М.: «ТЕХНОСФЕРА», 2018. – 564 с.
2. КОВАЛЕНКО И.Н. *Расчет вероятностных характеристик систем. Задачи расчета вероятностных характеристик систем. Исследование систем в общем виде. Применение метода малого параметра.* – М.: URSS, 2023. – 104 с. – ISBN 978-5-9710-5094-0.
3. ПРОМЫСЛОВ В.Г., СЕМЕНКОВ К.В. *Применение метода Network Calculus для расчета временных характеристик систем управления с циклическим алгоритмом работы* // Проблемы управления. – 2021. – №4. – С. 50–65. – URL: [http://pu.mtas.ru/archive/Promyslov\\_pu\\_421.pdf](http://pu.mtas.ru/archive/Promyslov_pu_421.pdf).
4. BAYBULATOV A. PROMYSLOV V., *Industrial Control System Availability Assessment with a Metric Based on Delay and Dependency* // IFAC-PapersOnLine. – 2021. – Vol. 54, Iss. 13. – P. 472–476.
5. BOUILLARD A., *Individual Service Curves for Bandwidth-Sharing Policies Using Network Calculus* // IEEE Networking Letters. – 2021. – Vol. 3, No. 2. – P. 80–83. – DOI: 10.1109/LNET.2021.3067766.
6. BOUILLARD A., JOUHET L., THIERRY E., “Service curves in Network Calculus: dos and don’ts”. RR-7094, INRIA. 2009, pp.24. inria-00431674
7. BOUILLARD A. *Algorithms and efficiency of Network calculus.* – Paris: École Normale Supérieure, 2014.
8. BOYER M., DAIGMORTE H. *Improved Service Curve for Element With Known Transmission Rate* // IEEE Networking Letters. – 2023. – Vol. 5, No. 1. – P. 46–49. – DOI: 10.1109/LNET.2022.3150649.
9. CRUZ L. *A calculus for network delay. I. Network elements in isolation* // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1991. – Vol. 37, No. 1. – P. 114–131. – DOI: 10.1109/18.61109.

10. CRUZ L. *A calculus for network delay. II. Network analysis* // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1991. – Vol. 37, No. 1. – P. 132–141. – DOI: 10.1109/18.61110.
11. FIDLER M. *Survey of deterministic and stochastic service curve models in the network calculus* // IEEE Commun. Surv. Tutorials. – 2010. – Vol. 12, No. 1. – P. 59–86. – DOI: 10.1109/SURV.2010.020110.00019.
12. LE BOUDEC J-Y., THIRAN P. *Network Calculus: A Theory of Deterministic Queuing Systems for the Internet*. – Springer Verlag, Online Version of the Book, LNCS 2022. – 245 p.
13. LIEBEHERR J. *Duality of the Max-Plus and Min-Plus Network-Calculus* // Foundations and Trends in Networking. – 2017. – Vol. 11, No. 3–4. – P. 139–282. – DOI: 10.1561/1300000059.
14. LIEBEHERR J., FIDLER M. AND VALAEE S. *A System-Theoretic Approach to Bandwidth Estimation* // IEEE/ACM Trans. on Networking. – 2010. – Vol. 18, No. 4. – P. 1040–1053. – DOI: 10.1109/TNET.2009.2035115.
15. *Modular Performance Analysis with Real-Time Calculus*. <https://www.mpa.ethz.ch> (дата обращения: 12.07.2023).
16. SIMON I. *Recognizable sets with multiplicities in the tropical semiring* // Mathematical Foundations of Computer Science. Lecture Notes in Computer Science. – 1988. – Vol. 324. – P. 107–120.
17. THIELE L., CHAKRABORTY S., NAEDELE M. *Real-time calculus for scheduling hard real-time systems* // Proc. of the IEEE Int. Symposium on Circuits and Systems. Emerging Technologies for the 21st Century. (IEEE Cat No.00CH36353), Geneva, Switzerland, 2000. – Vol. 4. – P. 101–104. – DOI: 10.1109/ISCAS.2000.858698.
18. ZHOU B., HOWENSTINE I., LIMPRAPAIPONG S., CHENG L. *A Survey on Network Calculus Tools for Network Infrastructure in Real-Time Systems* // IEEE Access. – 2020. – Vol. 8. – P. 223588–223605. – DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3043600.

## EVALUATION OF THE INTRINSIC CHARACTERISTICS OF A CYBERPHYSICAL SYSTEM BY THE METHOD OF NETWORK CALCULUS

**Vitaly Promyslov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading researcher (vp@ipu.ru).

**Kirill Semenkov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher (semenkovk@ipu.ru).

**Elena Jharko**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Candidate of Technical Sciences, Senior researcher (zharko@ipu.ru).

*Abstract. The paper analyzes the evaluation of the system's own characteristics, the so-called service curve, set in the form of deterministic constraints linking the input of the system and the minimum flow at the output of the system. The service curve estimation is considered within the framework of the Network Calculus method and mini-maxi plus algebra approaches, which form the mathematical basis of the method. To evaluate the service curve, one previously developed method related to the duality of mini and maxi plus algebra transformations is taken, and a new method based on the connection of two types of mini and maxi service curves is proposed. The methods are considered taking into account their application to real systems and existing limitations on measurement capabilities, in particular the finiteness of the definition of the observed data flows. The analysis of the both methods shows that each of the them gives an acceptable service curve, but they need improvement for the calculated service curve to correspond to the maximum system performance mode.*

Keywords: cyberphysical system, Network Calculus, mini/maxi plus algebra, service curve, availability, safety and security.

УДК 519.6

ББК 30в6

DOI: 10.25728/ubs.2023.105.1

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В.Г. Лебедевым.*

*Поступила в редакцию 21.07.2023.  
Опубликована 30.09.2023.*

# ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ЛАКСА – ФРИДРИХСА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Малышев С. В.<sup>1</sup>

(МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва)

Статья посвящена программной реализации численного метода Лакса –Фридрихса для моделирования нестационарных задач газовой динамики. Рассматривается задача Сода в двух измерениях в следующей постановке: имеется замкнутая ударная труба с пластинкой посередине, которая разделяет два газа с разными термодинамическими характеристиками. В начальный момент времени она моментально удаляется, газы при этом смешиваются. Появляется разрыв и возникает ударная волна. Цель работы заключается в нахождении термодинамических характеристик в произвольный момент времени и в программной реализации расчётов с помощью численного метода Лакса –Фридрихса. Задача является актуальной в силу нехватки чётких вычислительных алгоритмов в сфере газовой динамики. Точность решения зависит от количества ячеек в сетке, на которую разбивается поверхность. В результате приведён расчёт и численные значения для разных сеток, точное и численное решения сравнены в различных нормах.

Ключевые слова: ударные волны, задача Сода, численный метод Лакса – Фридрихса.

## 1. Введение

Одним из основных методов исследования современных задач газовой динамики является численное моделирование. Благодаря относительной простоте формулировок и алгоритмов, широко используются конечно-разностные схемы, такие как методы Лакса – Фридрихса, Маккормака, WENO-методы (weighted essentially non-oscillatory). Дополнительным достоинством этого класса схем является эффективность расширения одномерных формулировок на двух- и трехмерные задачи. К недостаткам конечно-разностных методов можно отнести сложность, а зачастую и невозможность их применения на неструктурированных расчетных сетках. Современные методы высокой точности –

---

<sup>1</sup> Сергей Вадимович Малышев, студент (serge.malychev@mail.ru).

в первую очередь WENO-методы – позволяют достигать произвольно высоких порядков сходимости на гладких решениях за счет расширения разностного шаблона.

В современной литературе разностные методы, как правило, формулируются в консервативной форме, связывающей изменение значений консервативных физических величин в расчетном узле с так называемыми «потоками» этих величин между расчетными узлами. Простейшим методом, допускающим такую формулировку, является метод Лакса – Фридрихса первого порядка аппроксимации [5].

В настоящей работе выполнена программная реализация метода Лакса – Фридрихса для одномерных нестационарных течений совершенного газа и проведена проверка сходимости численного решения к точному решению частного случая задачи о распаде газодинамического разрыва.

## 2. Постановка задачи

Два совершенных газа находятся в одномерной трубе и разделены тонкой мембраной (рис. 1). В начальный момент времени мембрана моментально удаляется. Дальнейшая эволюция параметров газа – давления, плотности и скорости – описывается исключими функциями координаты и времени. Параметры газа слева от мембраны будем записывать с индексом 1, параметры газа справа – с индексом 2. Рассматриваются основные характеристики газа такие как: плотность  $\rho$ , скорость газа относительно фиксированной системы отсчета  $u$ , давление  $p$  и показатель адиабаты  $\gamma$ . С течением времени меняются первые три характеристики, которые и надо найти.



Рис. 1. Состояние задачи в момент  $t = 0$

Рассматривается частный случай задачи Сода с одинаковыми показателями адиабаты для обоих газов. Расчёты будут проводиться для следующих начальных условий (задача Сода [8]): при  $x < 0$   $(\rho, u, p) = (1,0; 0; 1,0)$ , при  $x \geq 0$   $(\rho, u, p) = (0,125; 0; 0,1)$

Требуется узнать, какие будут состояния у плотности, скорости и давления в момент времени  $t = 0,2$  на отрезке  $x \in [-0,5; 0,5]$ . Как выяснится далее, для этого требуется произвести расчёты для каждого момента времени с заданным шагом, начиная от  $t = 0$  до  $t = 0,2$ .

### 3. Описание математической модели

Будем считать, что конфигурация течения после распада разрыва известна заранее [9], тогда направо будет распространяться ударная волна, налево – волна разрежения, а между ними будет возникать контактный разрыв.

Как видно из схемы течения (рис. 2), множество лучей, направленных влево – это волна разрежения. Пунктирная линия – это контактный разрыв. Нужно заметить, что слева и справа от него давление и скорость одинаковы, меняется только плотность. Последний сплошной луч – это ударная волна.

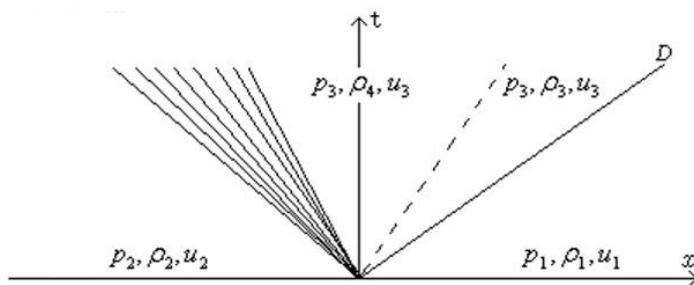


Рис. 2. Схема течения ( $x$ - $t$ -диаграмма) при распаде разрыва

Для них можно выписать систему из пяти уравнений с пятью неизвестными:  $p_3, \rho_3, u_3, \rho_4$  и  $D$ . Здесь  $p_3$  – давление газа между

волной разрежения и ударной волной;  $\rho_3, u_3$  – плотность и скорость между контактным разрывом и ударной волной;  $\rho_4$  – плотность между волной разрежения и контактным разрывом;  $D$  – скорость скачка, бегущего вправо;  $a_2, a_4$  – это скорости звука, равные  $\sqrt{\frac{\gamma p_2}{\rho_2}}$  и  $\sqrt{\frac{\gamma p_3}{\rho_4}}$  соответственно.

$$\begin{aligned} \rho_1(u_1 - D) &= \rho_3(u_3 - D), \\ p_1 + \rho_1(u_1 - D)^2 &= p_3 + \rho_3(u_3 - D)^2, \\ \frac{(u_1 - D)^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} &= \frac{(u_3 - D)^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{p_3}{\rho_3}, \\ \frac{p_3}{\rho_4^\gamma} &= \frac{p_2}{\rho_2^\gamma}, \\ u_3 + \frac{2a_4}{\gamma-1} &= u_2 + \frac{2a_2}{\gamma-1}. \end{aligned}$$

Первые три уравнения – это соотношения на прямом скачке уплотнения, четвёртое – уравнение адиабаты Пуассона для волны разрежения Римана, а пятое – соотношение вдоль волны Римана для совершенного газа.

Все они сводятся к одному уравнению для  $D$ :

$$u(D) + \frac{2}{\gamma-1} \sqrt{\frac{\frac{1}{\gamma}}{\rho_2}} (p(D))^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - u_2 - \frac{2a_2}{\gamma-1} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} p(D) &= \frac{2\rho_1(D-u_1)^2 + (1-\gamma)p_1}{\gamma+1}, \\ u(D) &= \frac{2D^2 + (\gamma-3)u_1D + (1-\gamma)u_1^2 - 2a_1^2}{(\gamma+1)(D-u_1)}. \end{aligned}$$

Его решение можно найти с любой наперед заданной точностью, например, с помощью метода Ньютона.

Полученное точное решение задачи о распаде разрыва можно использовать для проверки сходимости численного метода.

#### 4. Численное моделирование

Для моделирования нестационарных течений совершенного газа используются уравнения Эйлера [5]. Три уравнения сохранения, которые записаны в дифференциальной форме, – сохранения импульса, энергии и массы:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{pmatrix}, E = \frac{p}{\gamma-1} + \rho \frac{u^2}{2}.$$

Вектор  $U$  называется вектором консервативных величин, а вектор  $F$  – потоками этих величин. При известных начальных условиях – значениях плотности, скорости и давления в каждой точке в начальный момент времени – требуется найти их значения в произвольный момент времени. В этом нам поможет численный метод Лакса – Фридрихса.

Расчетная область разбивается на  $N + 1$  расчетных узлов, расположенных равномерно. Чем больше будет расчётных узлов, тем выше ожидается точность вычислений.

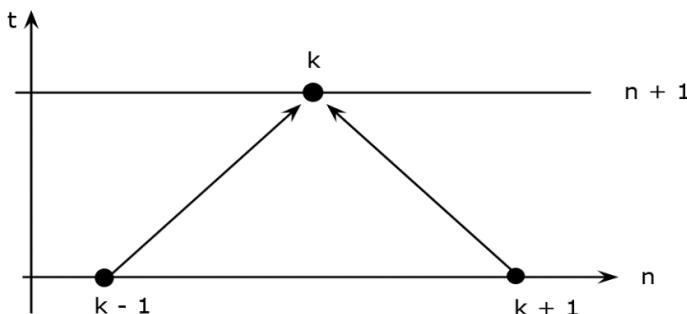


Рис. 3. Разностный шаблон метода Лакса-Фридрихса

Схема работы численного метода следующая (рис. 3): берутся значения в  $(k + 1)$ -м и  $(k - 1)$ -м расчётном узле в  $n$ -й момент времени и по ним с помощью разностной формулы

$$U_k^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{k+1}^n + U_{k-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F(U_{k+1}^n) - F(U_{k-1}^n))$$

находятся значения в  $k$ -м узле в  $(n + 1)$ -й момент времени.

Допустимая величина шага по времени определяется условием Куранта – Фридрихса – Леви [1].

Так же, как и любой другой метод, метод Лакса – Фридрихса позволяет найти значения с определённой точностью. Нам также

требуется проверить, насколько численные результаты будут приближать наше точное решение.

## **5. Структура программы**

Для решения поставленной задачи была разработана программа. Она составлена на языке Си и состоит из трёх модулей.

Первый модуль – подсчёт численного решения. Вычисляется значения плотности, скорости и давления методом Лакса –Фридрихса от начального момента времени до заданного. Затем они записываются в выходной файл, читаемый программой Paraview, в которой можно построить графики и удостовериться в правильности подсчётов.

Второй модуль – вычисление точного решения. С помощью метода Ньютона производится подсчёт значений из алгебраического уравнения. Результат записывается в выходной файл, который также распознаётся программой Paraview.

Третий модуль – вычисление норм разности значений, полученных на выходе первого и второго модулей.

## **6. Сравнение точного и численного решения на разных сетках**

Разработанная программа позволяет находить решения при заданном количестве расчётных узлов. Рассмотрим их при разных сетках. На горизонтальной оси будем указывать координату  $x$ . Красным цветом будем обозначать плотность  $\rho$ , чёрным цветом давление  $p$ , а синим цветом скорость  $u$ .

Значения для сетки на 50 узлов приведены на рис. 4.1. Здесь мы можем наблюдать графики точного решения; точками обозначены значения численного решения в узлах сетки.

Как видно на рис. 4.1, нами получена неплохая точность решения, при этом образуют ступеньки, т.е. стоят попарно на одной строчке. Такое явление обусловлено так называемым «шахматным расщеплением» (odd-even decoupling) сетки при применении метода Лакса – Фридрихса, вызванным, в свою очередь, отсутствием нижнего центрального узла в разностном шаблоне.

Графики на сетке в 500 узлов приведены на рис. 4.2. Результат аналогичный, но численное решение теперь обозначается пунктирной линией. Как видно, графики сближаются.

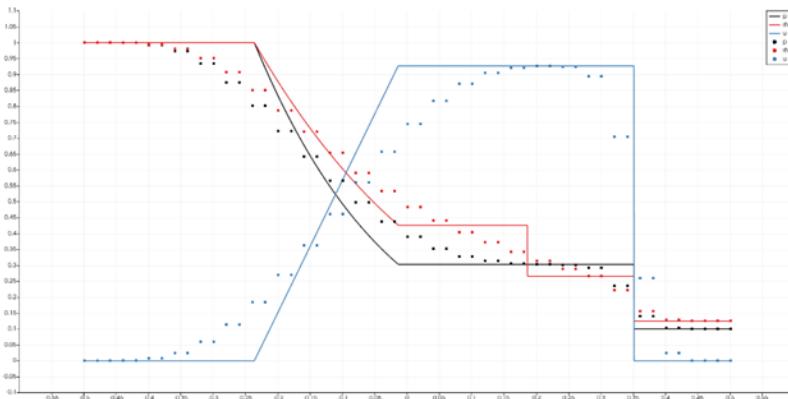


Рис. 4.1. Сравнение точного и численного решений при  $N = 50$

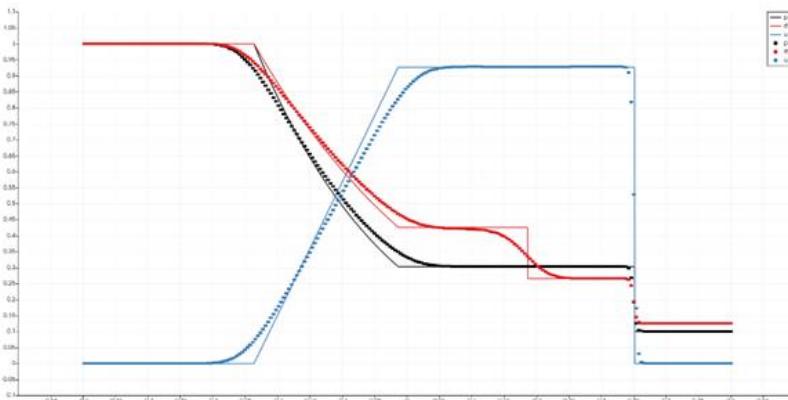


Рис. 4.2. Сравнение точного и численного решений при  $N = 500$

И уже при совсем мелкой сетке в 5000 узлов (рис. 4.3) графики почти сливаются друг с другом. Здесь уже наглядно видны

три перепада для плотности – красная линия. Сначала идёт волна разрежения – гладкое понижение, потом скачок – контактный разрыв, и в конце ещё один скачок – ударная волна.

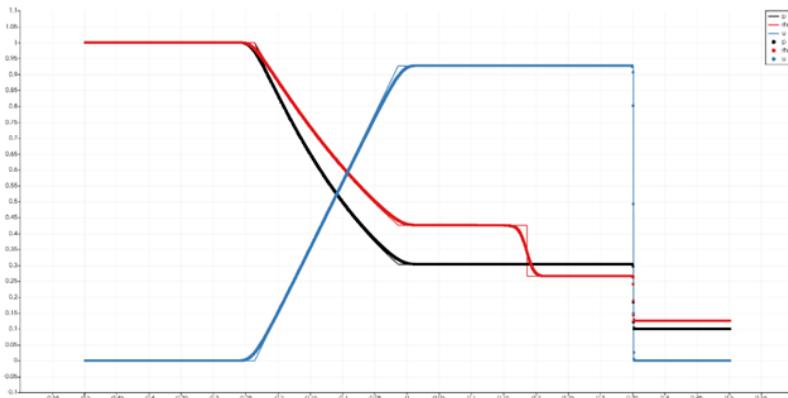


Рис. 4.3. Сравнение точного и численного решений при  $N = 5000$

Если рассматривать нормы разностей численного и точного решения, то можно увидеть, что точность возрастает. Для этого нужно подобрать рабочую норму.

Нами использовались три нормы: равномерная

$$\|u^{approx} - u^{exact}\| = \max_k |u_k^{approx} - u_k^{exact}|,$$

евклидова

$$\|u^{approx} - u^{exact}\| = \sqrt{\sum_k (u_k^{approx} - u_k^{exact})^2}$$

и среднеквадратичная

$$\|u^{approx} - u^{exact}\| = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_k (u_k^{approx} - u_k^{exact})^2}.$$

Для каждой нормы произведены подсчёты на разных сетках.

$N = 50$	Равномерная Норма	Евклидова Норма	Среднеквадратичная
Плотность	0,150113	0,372828	0,052726
Скорость	0,668647	1,036487	0,146581
Давление	0,199389	0,463362	0,085529
$N = 500$			
Плотность	0,094115	0,468578	0,020955
Скорость	0,453968	0,964659	0,043141
Давление	0,122787	0,446648	0,019975
$N = 5000$			
Плотность	0,100699	0,602934	0,008527
Скорость	0,599741	0,931951	0,01318
Давление	0,151752	0,351264	0,004968

Рис. 5. Сравнение норм для разных параметров и сеток

Как видно из расчётов (рис. 5), для равномерной нормы значения меняются незначительно. Это происходит по той причине, что эта норма ищет максимальную ошибку – наибольшую погрешность вычислений. И, как можно видеть на рисунке, особенно на контактном разрыве в ней всегда будет погрешность в значениях и она не будет зависеть от количества узлов.

Евклидова норма почти не убывает, а в случае плотности происходит ее рост. Это связано с чрезвычайно сильным «размыванием» контактного разрыва по расчетным узлам, характерным для всех численных методов первого порядка аппроксимации.

Среднеквадратичная норма убывает при измельчении сетки, однако скорость убывания оказывается ниже, чем ожидается при применении метода первого порядка аппроксимации. Вероятно, такое поведение связано с разрывностью исследуемого течения.

## 7. Заключение

Разработана программа для численного моделирования одномерных нестационарных течений газов на основе уравнений Эйлера и конечно-разностного метода Лакса – Фридрихса. На основе моделирования задачи о распаде газодинамического разрыва показана удовлетворительная сходимость численного решения к точному по мере измельчения расчетной сетки.

### Литература

1. КУРАНТ Р., ФРИДРИХС К., ЛЕВИ Г. *О разностных уравнениях математической физики* // Успехи математических наук. – 1941. – №8. – С. 125–160.
2. ЛОЙЦЯНСКИЙ Л.Г. *Механика жидкости и газа: Учеб. Для вузов.* – 7-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003.
3. ОВСЯННИКОВ Л.В. *Лекции по основам газовой динамики.* – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
4. СТУЛОВ В.П. *Лекции по газовой динамике.* – М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2004.
5. ЧЁРНЫЙ Г.Г. *Газовая динамика.* – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.
6. УИЗЕМ Дж. *Линейные и нелинейные волны.* – М.: Мир, 1973.
7. COURANT R., FRIEDRICHS K., LEWY H. *Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik* // *Mathematische Annalen.* – 1928. – Vol. 100, No. 1. – P. 32–74.
8. LEVEQUE R.J. *Numerical Methods for Conservation Laws.* – Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 1992. –P. 125.
9. SOD G.A. *A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws* // *J. Comput. Phys.* – 1978. – Vol. 27. – P. 1–31.
10. WEISSTEIN E.W. *Courant -Friedrichs-Lowy Condition* [Электронный ресурс]. – URL: <https://mathworld.wolfram.com/Courant-Friedrichs-LowyCondition.html> (дата обращения: 16.11.2020).

### SOFTWARE IMPLEMENTATION OF THE LAX – FRIEDRICH NUMERICAL METHOD FOR MODELING NONSTATIONARY PROBLEMS OF GAS DYNAMICS

**Sergey Malyshev**, Moscow State University, Moscow, student (serge.malychev@mail.ru).

*Abstract: This article is devoted to the software implementation of the numerical Lax-Friedrichs method for modeling nonstationary problems of gas dynamics. The Soda problem is considered in two dimensions. We postulate it in the following way: there*

*is a closed shock tube with a plate in the middle. The plate separates two gases with different thermodynamic characteristics. At the initial moment of time, it is instantly deleted: gases mix and produce a shock wave. The purpose of the work is to find the thermodynamic characteristics at any time and to program the implementation of calculations using the numerical Lax-Friedrichs method. This task is relevant at the moment due to the lack of clear computational algorithms in the field of gas dynamics. The solution depends on the number of cells in the grid into which the surface is divided. As a result, the calculation and numerical values for different grids are given as well as their comparison with the help of various norms is made.*

Keywords: shock wave, Soda problem, Lax-Friedrichs numerical method.

УДК 533.2

ББК 30.124

DOI: 10.25728/ubs.2023.105.2

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

*Поступила в редакцию 21.07.2023.  
Опубликована 30.09.2023.*

# РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ХОДОВОЙ ТЕЛЕЖКОЙ ОДНОБАЛОЧНОГО МОСТОВОГО КРАНА ПРИ ДЕЙСТВИИ НЕСОГЛАСОВАННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ И ПРИ НЕПОЛНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Антипов А. С.<sup>1</sup>, Ткачева О. С.<sup>2</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматривается проблема управления электромеханической системой – ходовой тележкой однобалочного мостового крана (механическая подсистема) с учетом редуцированной динамики двигателя постоянного тока (электрическая подсистема). Объект функционирует в условиях недостатка управлений, действия параметрических и внешних возмущений, неполных измерений. При этом возмущения, действующие на механическую подсистему, являются несогласованными. Для безопасного переноса груза в указанных условиях предложен ряд решений. Сформирована эталонная траектория тележки с интегралом от угловой координаты. Наличие интегральной части приводит к демпфированию колебаний груза. Показано, что эта часть также позволяет подавлять несогласованные ветровые возмущения. Для отслеживания сформированной траектории разработана процедура блочного синтеза сигмовидных фиктивных управлений в механической подсистеме и истинного разрывного управления в электрической подсистеме. Гладкие и ограниченные сигмовидные функции обеспечивают подавление несогласованных возмущений. Эти функции реализуемы в исполнительном устройстве и не приводят к его сильному износу, который происходит при формировании разрывных фиктивных управлений. Для информационной поддержки закона управления разработан динамический дифференциатор с сигмовидным корректирующим воздействием, предоставляющим оценку скорости по измерению ошибки слежения с любой заданной точностью. Предложенное решение позволяет отказаться от датчика скорости тележки и избежать всплесков оценочных сигналов. Представлены результаты численного моделирования замкнутых систем с разрывными и сигмовидными фиктивными управлениями. Они продемонстрировали эффективность разработанного подхода.

Ключевые слова: ходовая тележка мостового крана, несогласованные возмущения, параметрическая неопределенность, робастное управление, сигмовидная функция, динамический дифференциатор.

---

<sup>1</sup> Алексей Семенович Антипов, к.т.н., с.н.с. (scholess18@mail.ru).

<sup>2</sup> Ольга Сергеевна Ткачева, м.н.с. (tkolga17@gmail.com).

## 1. Введение

Использование однобалочных мостовых кранов существенно упрощает работы по погрузке и разгрузке объектов в различных промышленных областях. Конструкция таких кранов включает ходовую тележку, к которой на стержне крепится груз. При этом тележка способна перемещаться по рельсам с помощью движущей силы, создаваемой исполнительным устройством. Для данного объекта основная задача заключается в транспортировке груза в желаемое положение за заданное время. Кроме того, важно снизить амплитуду колебаний груза как в ходе его переноса, так и по достижении желаемого положения, поскольку сильные колебания могут привести к повреждениям окружающих конструкций и рабочего персонала, а также к появлению значимых ошибок позиционирования.

Помимо разгона и торможения тележки источниками колебаний груза являются параметрические и внешние возмущения, в качестве которых, в частности, могут рассматриваться сила сухого трения и ветер. При этом математическая модель объекта отличается нелинейностью и недостатком управляющих воздействий. Кроме того, измеряются, как правило, не все переменные состояния. Таким образом, актуальной проблемой является разработка робастных законов управления, учитывающих указанные особенности и обеспечивающих снижение амплитуды колебаний груза и их демпфирование.

Методы управления ходовой тележкой можно разделить на методы без обратной связи [6, 14] и с обратной связью [2, 5, 9, 12, 13, 15, 19, 21]. Первая группа методов основана на модификации входного сигнала. Он преобразуется так, чтобы выходная переменная изменялась желаемым образом с подавлением колебаний. Среди методов второй группы выделяют, в частности, методы оптимального управления [2, 12, 13], адаптивного управления [5, 15, 21], управления на скользящих режимах [9, 19, 20]. При этом методы, основанные на модификации входного сигнала, и методы оптимального управления чувствительны к параметрическим и внешним возмущениям. Методы адаптивного управления позволяют получать оценки неиз-

вестных параметров и внешних возмущений в реальном времени с последующей компенсацией неопределенностей. Однако это приводит к повышению динамического порядка замкнутой системы и к увеличению вычислительных затрат на реализацию алгоритмов. Эффективным инструментом для подавления возмущений является организация скользящих режимов. Отметим, что в большинстве работ по управлению ходовой тележкой исследователи не учитывают динамику исполнительного устройства. В качестве управления они рассматривают движущую силу. Однако формирование разрывных сил нежелательно на практике, поскольку приводит к более быстрому износу исполнительного устройства. Чтобы избежать этой проблемы, в [9, 19] в разделах, описывающих результаты натурных экспериментов, функцию знака заменяют ее непрерывными аналогами. Однако не всегда приводятся строгие математические доказательства сходимости замкнутых систем после проведения таких замен [19]. Кроме того, во многих работах предполагается гладкость возмущений [20]. На практике это не всегда справедливо, поскольку на систему действуют негладкие силы сухого трения.

В ряде работ рассматривалась тележка мостового крана с неполным комплектом датчиков. Для оценивания неизмеряемых переменных состояния применялись наблюдатели состояния с глубокой линейной обратной связью [18] или наблюдатели на скользящих режимах [11]. Однако в первом случае могут возникать всплески оценочных сигналов, а во втором – «чатtring» (паразитные колебания, которые ухудшают качество оценивания), для уменьшения которого исследователи повышают порядок скользящих режимов [17].

Научная новизна и основной вклад предлагаемой работы состоит в том, чтобы восполнить указанные недостаточно изученные моменты. Так, в данной работе учитывается редуцированная динамика исполнительного устройства – двигателя постоянного тока (ДПТ). Математическая модель объекта описывается в разделе 2 и включает механическую и электрическую подсистемы. Допустимыми внешними возмущениями, действующими на механическую подсистему, в общем случае являются

негладкие функции. При учете динамики ДПТ они становятся несогласованными с управлением, находящимся в электрической подсистеме, и не могут быть подавлены или скомпенсированы непосредственно за счет управления. Для демпфирования колебаний груза и подавления ветровых возмущений предлагаются ввести в задающее воздействие интеграл от угловой координаты [21]. Ставятся следующие задачи:

- 1) в предположении наличия всех измерений, синтезировать базовый закон разрывного управления, реализуемый в электрической подсистеме и обеспечивающий отслеживание задающего воздействия с некоторой точностью;
- 2) в предположении наличия измерений только угловой координаты, движущей силы и ошибки слежения, разработать динамический дифференциатор для оценивания производной ошибки слежения с любой заданной точностью.

В постановках обеих задач полагается, что все параметры объекта и внешние возмущения неизвестны. Имеются только диапазоны их изменения, при этом не ставится задача идентификации. Кроме того, динамический дифференциатор не должен приводить к всплескам оценочных сигналов. Построенный дифференциатор обеспечит информационную поддержку разрывного закона управления в условиях неполного комплекта датчиков. В разделах 3–4 представлено комплексное решение указанных задач с использованием в каждой из них гладких и ограниченных сигмовидных функций [1, 3]. В разделе 5 приведены результаты численного моделирования.

В отличие от прошлых работ авторов [1, 7, 8], связанных с управлением ходовой тележкой транспортировочного крана, в данной работе рассмотрена более адекватная математическая модель объекта: учтены динамика ДПТ и действие на систему несогласованных ветровых возмущений. С учетом данных особенностей разработан новый закон управления с формированием истинного разрывного управления в электрической подсистеме и сигмовидных фиктивных управлений в механической. Кроме того, по сравнению с [1] в данной работе предложено строить наблюдатель-дифференциатор на основе преобразован-

ной системы в невязках, что снижает вычислительную сложность регулятора.

## 2. Описание математической модели объекта управления.

Схема ходовой тележки представлена на рис. 1.

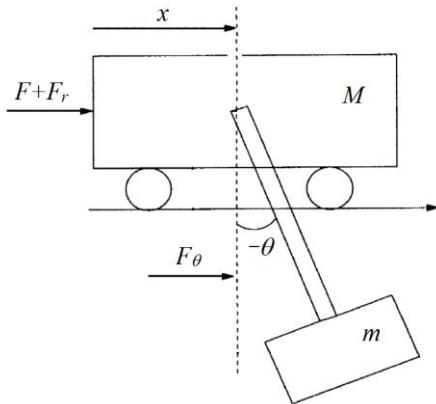


Рис. 1. Схема ходовой тележки

Математическая модель объекта управления описывается системой дифференциальных уравнений пятого порядка [16]:

$$(1) \quad \dot{q}_1 = q_2, \quad \dot{q}_2 = I^{-1}(q_1)[v - C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1) + \eta(t)],$$

$$(2) \quad \dot{F} = -aF - c\dot{x} + bu.$$

где уравнения (1) соответствуют динамике механической подсистемы. Здесь  $q_1 = (x, \theta)$  – вектор положений;  $x$  – горизонтальное перемещение тележки;  $\theta$  – угол отклонения стержня с грузом от вертикальной оси,  $|\theta| < \pi/2$ ;  $q_2 = (\dot{x}, \dot{\theta})$  – вектор скоростей;  $v = (F, 0)^T$  – вектор известных сил,  $F$  – движущая сила, создаваемая ДПТ;  $\eta = (F_r, F_\theta)^T$  – вектор неизвестных сил, которые будем рассматривать как внешние несогласованные возмущения, действующие на механическую подсистему. При этом  $F_r(t)$  – возмущения, которые могут включать неучтенные

в модели силы, в частности, силу сухого трения;  $F_\theta(t)$  – возмущения, включающие, в частности, силу ветра.

Матрицы в механической подсистеме (1) имеют вид:

$$I(q) = \begin{pmatrix} M+m & -ml\cos\theta \\ -ml\cos\theta & ml^2 \end{pmatrix}, \quad C(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} 0 & ml\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G(q_1) = \frac{\partial P(q_1)}{\partial q_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ m\bar{g}l\sin\theta \end{pmatrix}, \quad P = m\bar{g}l(1-\cos\theta) \geq 0.$$

Здесь  $I(q_1)$  – нелинейная симметричная матрица инерции;  $C(q_1, q_2)$  – матрица кориолисовых сил;  $G(q_1)$  – вектор гравитационных сил;  $P$  – потенциальная энергия;  $M$  – масса тележки;  $m$  – масса груза;  $l$  – длина стержня;  $\bar{g} = 9,81$  – ускорение свободного падения.

Уравнение (2) соответствует редуцированной динамике ДПТ с жестким типом сочленений [16], где  $a = R/L$ ,  $b = r \cdot K_b / (Lr_p)$ ,  $c = K_b \cdot K_r \cdot r^2 / (Lr_p^2)$  – положительные конструктивные коэффициенты;  $r$  – передаточное число;  $r_p$  – радиус шкива;  $R$  – сопротивление якоря ДПТ;  $L$  – индуктивность якоря ДПТ;  $K_b$ ,  $K_r$  – коэффициенты пропорциональности. Управлением  $u$  является напряжение питания якорной цепи ДПТ.

Для объекта (1)–(2) выдвигаются следующие предположения:

- 1) груз является точечной массой;
- 2) масса, жесткость стержня, а также трение, возникающее при колебаниях, не учитываются (в силу их малости);
- 3) матрица  $0,5\dot{I}(q_1) - C(q_1, q_2)$  является кососимметрической, т.е.
- (3)  $\forall x \in R^{2 \times 1} \quad x^T (0,5\dot{I}(q_1) - C(q_1, q_2))x = 0$ ;
- 4) параметры  $m$ ,  $M$ ,  $l$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  неизвестны, в процессе функционирования объекта они могут изменяться в известных диапазонах, например:
- (4)  $0 < a_{\min} \leq a(t) \leq a_{\max}, t \geq 0$ ;
- 5) внешние возмущения  $F_r(t)$  и  $F_\theta(t)$  в общем случае являются кусочно-гладкими функциями, они неизвестны, но ограничены известными константами по модулю:

$$(5) \quad |F_r(t)| \leq \bar{F}_r, |F_\theta(t)| \leq \bar{F}_\theta, t \geq 0, \\ \bar{F}_r = \text{const} > 0, \bar{F}_\theta = \text{const} > 0;$$

- 6) ветровые возмущения  $F_\theta(t)$  имеют импульсный характер;  
 7) измерениям доступны переменные  $x, \theta, F$ , при этом шумы измерений отсутствуют.

Предельная мощность ДПТ определяет конструктивные ограничения на максимальное значение управления  $u$  и, следовательно, на движущую силу  $F$ , ускорение  $\ddot{x}$  и скорость  $\dot{x}$  тележки:

$$(6) \quad |u(t)| \leq U, |F(t)| \leq \bar{F}, |\ddot{x}(t)| \leq X_2(\bar{F}), |\dot{x}(t)| \leq X_1, t \geq 0, \\ U, \bar{F}, X_1, X_2 = \text{const}, \bar{F} > \bar{F}_r.$$

Предлагается ввести эталонную траекторию тележки, состоящую из двух слагаемых:

$$(7) \quad g(t) = x_d - \gamma \int_0^t \theta(\tau) d\tau, \gamma = \text{const} > 0.$$

Первое из них  $x_d \neq x(0) = \text{const}$  – заданное конечное положение, в которое требуется переместить груз. Второе слагаемое содержит интеграл от угловой координаты и предназначено для демпфирования колебаний стержня с грузом [21]. Гипотеза исследования состоит в том, что интегральная часть в (7) позволит не только демпфировать колебания [21], но и подавить несогласованные ветровые возмущения  $F_\theta(t)$ .

Таким образом, требуется синтезировать закон управления  $u$  в форме динамической обратной связи, обеспечивающий отслеживание положением тележки  $x(t)$  заданной траектории  $g(t)$  (7) инвариантно по отношению к допустимым несогласованным возмущениям (5) со стабилизацией линейной и угловой скоростей:

$$(8) \quad |x(t) - g(t)| \leq \Delta_{11}, |\dot{x}(t) - \dot{g}(t)| \leq \Delta_{21}, x(T) \approx x_d,$$

$$(9) \quad |\dot{\theta}(t)| \leq \Delta_{22},$$

где  $T$  – время переноса груза, величины  $\Delta_{11}, \Delta_{21}, \Delta_{22}$  определяют точность позиционирования. В следующем разделе представлено решение этой проблемы.

### 3. Синтез закона управления

Для отслеживания заданной траектории (7) инвариантно по отношению к несогласованным возмущениям воспользуемся свойством пассивности системы [15] и блочным подходом [3]. Согласно данному подходу часть переменных состояния можно трактовать как фиктивные управления. Тогда возмущения, действующие по одним каналам с фиктивными управлениями, будут согласованы с ними. Кроме того, задача синтеза закона управления разобьется на несколько более простых – элементарных подзадач синтеза фиктивных управлений, за счет которых можно воздействовать на возмущения. В механической подсистеме в качестве фиктивных управлений рассмотрим скорость тележки  $\dot{x}$  и движущую силу  $F$ . Требуется выбрать желаемые фиктивные управлении так, чтобы обеспечить (8). При этом они должны быть приняты из класса гладких и ограниченных функций, чтобы, во-первых, фиктивные управлении могли быть реализованы в исполнительном устройстве. Во-вторых, важно не допустить сильного перерегулирования переменных состояния, поскольку имеются конструктивные ограничения (6). Исходя из этих целей желаемые фиктивные управлении предлагаются выбрать в виде гладких и ограниченных сигма-функций [1]:

$$(10) \quad (\dot{x})^* = \dot{g} - m_1 \sigma(k_1 e_{11}), \quad F^* = -m_2 \sigma(k_2 e_{21}),$$

$$(11) \quad m_i \sigma(k_i e_{il}) = m_i \frac{1 - \exp(-k_i e_{il})}{1 + \exp(-k_i e_{il})}, \quad m_i, k_i = \text{const} > 0, \quad i = 1, 2,$$

где ошибка слежения  $e_{11}$  и невязки между реальными и желаемыми фиктивными управлениями  $e_{21} = \dot{x} - (\dot{x})^*$ ,  $e_{31} = F - F^*$  имеют вид

$$e_1 = (e_{11}, e_{12})^T = (x - g, \theta)^T,$$

$$(12) \quad e_2 = (e_{21}, e_{22})^T = (\dot{x} - \dot{g} + m_1 \sigma(k_1 e_{11}), \dot{\theta})^T,$$

$$e_{31} = F + m_2 \sigma(k_2 e_{21}).$$

Сигмовидная обратная связь (10)–(11) имеет два настраиваемых параметра: амплитуду  $m_i$ , в большей степени влияющую

на время сходимости переменных, и большой коэффициент  $k_i$ , в большей степени влияющий на точность стабилизации,  $i = 1, 2$ .

Сформированная сила  $F^*$  (10) является задающим воздействием в электрической подсистеме. Его отслеживание и стабилизация соответствующей невязки  $e_{31}$  (12) достигается за счет синтеза истинного разрывного управления:

$$(13) \quad \begin{aligned} u &= -m_3 \operatorname{sign}(e_{31}), \quad m_3 = \text{const} > 0, \\ e_{31} &= F + m_2 \sigma(k_2(\dot{x} - \dot{g} + m_1 \sigma(k_1(x - g)))) \end{aligned}$$

Использование разрывных управлений естественно именно в электрических устройствах, функционирующих в ключевом режиме. При этом еще раз отметим, что нежелательно применять разрывные функции в качестве фиктивных управлений в механической подсистеме.

Таким образом, с учетом (12) приходим к следующей замкнутой системе (1)–(2):

$$(14) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 - (m_{11} \sigma(k_1 e_{11}), 0)^T, \\ \dot{e}_2 &= I^{-1}[(e_{31} - m_2 \sigma(k_2 e_{21}), 0)^T - C(e_2 + (\dot{g} - m_1 \sigma(k_1 e_{11}), 0)^T) - \\ &\quad - G + (F_r, F_\theta)^T + I(\Lambda_1 - \ddot{g}, 0)^T], \\ \dot{e}_{31} &= -aF - c\dot{x} + \Lambda_2 - b m_3 \operatorname{sign}(e_{31}), \end{aligned}$$

где функции

$$(15) \quad \Lambda_i = \frac{1}{2} m_i k_i (1 - \sigma^2(k_i e_{ii})) \dot{e}_{ii}, \quad i = 1, 2,$$

являются полными производными сигма-функций (11).

Для удобства дальнейшего анализа устойчивости замкнутой системы (14) примем следующие оценки сигма-функции (11) и ее первой производной  $\sigma'(k_i e_{ii}) = 0,5(1 - \sigma^2(k_i e_{ii}))$  [1]:

$$0,8 < |\sigma(k_i e_{ii})| < 1,0 < \sigma'(k_i e_{ii}) < 0,18k_i, \quad |e_{ii}| > 2,2 / k_i;$$

$$(16) \quad 0,8k_i |e_{ii}| / 2,2 \approx 0,36k_i |e_{ii}| \leq |\sigma(k_i e_{ii})| \leq 0,8,$$

$$0,18k_i \leq \sigma'(k_i e_{ii}) \leq \sigma'(0) = 0,5k_i, \quad |e_{ii}| \leq 2,2 / k_i, \quad i = 1, 2.$$

Выражения (16) получены на основе аппроксимации гладкой сигма-функции негладкой кусочно-линейной sat-функцией. Здесь точки  $\sigma(\pm 2,2) \approx \pm 0,8$  являются границами разделения сигма-функции на условно-постоянную и условно-линейную части. Тогда в силу (6), (16) производные (15) ограничены:

$$(17) |\Lambda_1| \leq \bar{\Lambda}_1 = m_1 k_1 X_1, \quad |\Lambda_2| \leq \bar{\Lambda}_2 = \frac{1}{2} m_2 k_2 (2X_2 + \bar{\Lambda}_1).$$

Амплитуды  $m_{1,2}$  фиктивных управлений (10) и амплитуда  $m_3$  разрывного управления (13) выбираются так, чтобы гарантировать последовательную сходимость невязок. Так, сначала требуется организовать скользящий режим на линии переключения  $e_{31} = 0$ , а потом обеспечить сходимость невязок  $e_{21}$ ,  $e_{11}$  в следующие окрестности нуля:

$$(18) |e_{31}| \leq \Delta_{31} \Rightarrow |e_{21}| \leq 2,2 / k_2 \leq \bar{\Delta}_{21} \Rightarrow |e_{11}| \leq 2,2 / k_1 \leq \Delta_{11},$$

где  $\bar{\Delta}_{21} = \Delta_{21} + m_1 \sigma(k_1 \Delta_{11})$ ,  $\Delta_{31}$  – ширина пограничного слоя в реальном скользящем режиме, который возникает, когда не все переменные состояния и параметры объекта известны точно и появляются ошибки оценивания. Оценка величины пограничного слоя будет дана в следующем разделе. Выбор больших коэффициентов  $k_{1,2}$  определяет точность стабилизации (12). Как следствие, при выполнении (18) будет достигнута цель управления (8).

Для формализации указанных условий на выбор амплитуд  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , обеспечивающих (18), воспользуемся вторым методом Ляпунова. С учетом свойства пассивности системы, введем следующего кандидата на функцию Ляпунова [15], который включает полную энергию системы:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \geq 0,$$

$$V_1 = \frac{1}{2} e_{11}^2, \quad V_2 = \frac{1}{2} e_2^T I(q_1) e_2 + P(q_1), \quad V_3 = \frac{1}{2} e_{31}^2.$$

Составим оценки  $\dot{V}_{1,2,3}$  при  $|e_{ii}| > 2,2/k_i$ ,  $i = 1, 2$ , исходя из «наихудшего» изменения возмущений (5) и с учетом (3), (16), (17) и  $\dot{P} = e_2^T G$  [15]:

$$(19) \begin{aligned} \dot{V}_1 &= e_{11}(e_{21} - m_1 \sigma(k_1 e_{11})) \leq |e_{11}|(|e_{21}| - 0,8m_1), \\ \dot{V}_2 &= e_{21}[e_{31} - m_2 \sigma(k_2 e_{21}) + F_r + (m+M)(\Lambda_1 + \gamma \dot{\theta})] + \\ &+ \dot{\theta}[F_\theta + ml \cos(\theta)(-\Lambda_1 - \gamma \dot{\theta})] \leq |e_{21}|(|e_{31}| - 0,8m_2 + \\ &+ \bar{F}_r + (m+M) \times (\bar{\Lambda}_1 + \gamma |\dot{\theta}|)] + |\dot{\theta}|[\bar{F}_\theta + ml(\bar{\Lambda}_1 - \gamma |\dot{\theta}|)], \\ \dot{V}_3 &= e_{31}[-aF - c\dot{x} + \Lambda_2 - bm_3 \text{sign}(e_{31})] \leq |e_{31}|[a\bar{F} + cX_1 + \\ &+ \bar{\Lambda}_2 - bm_3]. \end{aligned}$$

Тогда в силу «наихудшего» изменения параметров объекта (4) выбор амплитуд из условий

$$\begin{aligned}
 & (a_{\max} \bar{F} + c_{\max} X_1 + m_2 k_2 (X_2 + 0,5 m_1 k_1 X_1)) / b_{\min} < \\
 & < m_3 \leq U \Rightarrow |e_{31}| \leq \Delta_{31}; \\
 (20) \quad & (\bar{F}_\theta / (m_{\min} l_{\min}) + \bar{\Lambda}_1) / \Delta_{22} < \gamma \Rightarrow |\dot{\theta}| \leq \Delta_{22}; \\
 & 1,25(\Delta_3 + \bar{F}_r + 2(m_{\max} + M_{\max})\gamma\Delta_{22}) < m_2 < \bar{F} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow |e_{21}| \leq 2,2 / k_2; \\
 & 2,75 / k_2 < m_1 \Rightarrow |e_{11}| \leq 2,2 / k_1.
 \end{aligned}$$

приведет к выполнению неравенств  $\dot{V}_{3,2,1} < 0$ , (19) и, следовательно, к выполнению (18) и (8) с учетом ограничений (6) при всех вариациях неизвестных параметров объекта и возмущений (4), (5). Отметим, что выбор параметра  $\gamma$  согласно (20) также обеспечивает подавление ветровых возмущений и стабилизацию угловой скорости (9).

В силу априорных предположений (6) неравенства (20) имеют непустое множество решений. Из них итерационно находятся допустимые значения параметров обратной связи. Максимально возможные значения  $k_1, k_2, \gamma$  зависят от конструктивных ограничений (6) и определяют достижимую точность стабилизации  $|e_{11}| = |x - g| \leq \Delta_{11}$ ,  $|e_{21}| \leq \bar{\Delta}_{21} \Rightarrow |\dot{x} - \dot{g}| \leq \Delta_{21}$ , (8),  $|\dot{\theta}| \leq \Delta_{22}$ , (9) в установившемся режиме.

Таким образом,  $V = V_1 + V_2 + V_3$  является функцией Ляпунова для системы (14). Цель управления (8)–(9) достигнута.

В следующем разделе будет рассмотрена проблема синтеза динамического дифференциатора для информационной поддержки системы управления, когда нет полного комплекта датчиков.

#### 4. Синтез динамического дифференциатора

Обратная связь (13) замыкается по невязке  $e_{31} = F + m_2 \sigma(k_2 e_{21}(x, g, \dot{x}, \dot{g}))$ . Покажем, что по измерениям  $x(t)$ ,  $\theta(t)$  и вычислениям  $g(t, \theta)$  (1) имеется возможность восстановить

сигнал  $e_{21}(t)$  без измерений  $\dot{x}(t)$ . Отметим, что для получения оценки  $\dot{x}(t)$  по измерениям  $x(t)$  без шума целесообразно использовать алгоритмы численного дифференцирования на основе вычисления конечных разностей. При наличии шума измерений эти алгоритмы дополняются фильтрами нижних частот. Однако данное решение приводит к появлению запаздывания в системе, возбуждению помех и накоплению ошибок с ростом порядка оцениваемой производной. Поэтому для повышения пригодности системы управления к практической реализации (в условиях, когда будет присутствовать шум измерений) предлагаются использовать другой подход к дифференцированию, основанный на динамических моделях сигналов.

Для получения оценки  $e_{21}(t)$  построим динамический дифференциатор первого порядка как копию виртуального уравнения  $\dot{e}_{11} = e_{21} - m_1 \sigma(k_1 e_{11})$  в виде

$$(21) \quad \dot{z} = -m_1 \sigma(k_1 e_{11}) + v,$$

где  $z$  – переменная состояния;  $v = m_0 \sigma(k_0 \varepsilon)$  – сигмовидное корректирующее воздействие вида (11) с параметрами  $m_0, k_0 = \text{const} > 0$ ,  $\varepsilon = e_{11} - z$  – невязка. В силу  $e_{11}(t) = x(t) - g(t)$  сигнал  $\varepsilon(t)$  известен.

Для настройки параметров дифференциатора (21) составим виртуальную систему

$$(22) \quad \dot{\varepsilon} = e_{21} - v, \quad \ddot{\varepsilon} = \dot{e}_{21} - 0,5m_0k_0(1 - \sigma^2(k_0 \varepsilon))\dot{\varepsilon},$$

где  $e_{21}$  (12) и  $\dot{e}_{21}(t)$  трактуются как внешние ограниченные возмущения:  $|\dot{e}_{21}(t)| \leq 2X_2 + m_1 k_1 X_1$ .

$$(23) \quad |e_{21}(t)| \leq 2X_1 + m_1,$$

Задача синтеза заключается в том, чтобы обеспечить стабилизацию системы (23):

$$(24) \quad \begin{aligned} |\varepsilon(t)| &\leq 2,2 / k_0 \leq \Delta_{01}, \quad |\dot{\varepsilon}(t)| = |e_{21}(t) - v(t)| \leq \Delta_{02} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v(t) \approx e_{21}(t), \quad t \geq t_0, \quad 0 < t_0 \ll T, \quad \Delta_{01} < \Delta_{02}. \end{aligned}$$

Отметим, что в задаче оценивания (24) можно обеспечить любую заданную точность  $\Delta_{02}$  в отличие от задачи сложения (8)–(9).

Установим  $z(0) = e_{11}(0)$ , тогда  $\varepsilon(0) = 0 < \Delta_{01}$ . Первое неравенство (24) будет выполнено при всех  $t \geq 0$  если амплитуда

корректирующего воздействия будет удовлетворять условиям, аналогичным (19)–(20), а именно:

$$(25) \quad \begin{aligned} 0,8m_0 > (2X_1 + m_1) &\Leftrightarrow m_0 > 1,25(2X_1 + m_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon \dot{\varepsilon} &= \varepsilon(e_{21} - v) \leq |\varepsilon|(2X_1 + m_1 - 0,8m_0) < 0. \end{aligned}$$

Неравенство для выбора второго параметра  $k_0$ , обеспечивающего заданную точность оценивания (24), получим из достаточных условий устойчивости системы (22) при  $|\dot{\varepsilon}(t)| \leq 2,2/k_0$  с учетом (16), (23):

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{\varepsilon} &= \varepsilon(e_{21} - m_0 \sigma(k_0 \varepsilon)) \leq |\varepsilon|(2X_1 + m_1 - 0,36m_0 k_0 |\varepsilon|) < 0, \\ \dot{\varepsilon} \ddot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon}(\dot{e}_{21} - 0,5m_0 k_0(1 - \sigma^2(k_0 \varepsilon))\dot{\varepsilon}) \leq \\ &\leq |\dot{\varepsilon}|(2X_2 + m_1 k_1 X_1 - 0,18m_0 k_0 |\dot{\varepsilon}|) < 0. \end{aligned}$$

Эти неравенства и, следовательно, оба неравенства (24) будут выполнены, если

$$(26) \quad k_0 > \max \left\{ \frac{2,2}{\Delta_{01}} \cdot \frac{2X_1 + m_1}{0,8m_0}; \frac{5,56(2X_2 + m_1 k_1 X_1)}{m_0 \Delta_{02}} \right\}.$$

Таким образом, корректирующее воздействие дифференциатора (21) с параметрами (25), (26) предоставляет искомую оценку  $v(t) = e_{21} \pm \Delta_{02}$ ,  $t \geq t_0$ . При этом вместо базового закона управления (13) используется закон, формируемый из следующих сигналов:

$$(27) \quad u = -m_3 \text{sign}(\hat{e}_{31}), \hat{e}_{31}(t) = F(t) + m_2 \sigma(k_2 v(t)).$$

В замкнутой системе (1)–(2) с динамической обратной связью (21), (27), ошибки оценивания приводят к появлению в скользящем режиме пограничного слоя  $|\hat{e}_{31} - e_{31}| \leq \Delta_{31}$ . Оценим его величину с учетом первого приближения  $\sigma(kx) \sim 0,5kx$ ,  $x \rightarrow 0$ :

$$|\hat{e}_{31} - e_{31}| = m_2 |\sigma(k_2 v) - \sigma(k_2 e_{21})| \leq 0,5m_2 k_2 \Delta_{02} \leq \Delta_{31}.$$

Данное выражение нужно принять во внимание при задании величины ошибки оценивания  $\Delta_{02}$  (24).

Заметим, что для систем с неопределенным входом для оценивания неопределенностей динамический порядок наблюдателей состояния (или дифференциаторов) обычно увеличивается за счет уравнения, имитирующего динамику неопределен-

ного входа [17]. Особенность дифференциатора (21) состоит в том, что он имеет первый порядок (дифференциальное уравнение для неопределенного входа (22) вводится только для анализа устойчивости) и его корректирующее воздействие восстанавливает неизвестную невязку  $e_{21}(x, g, \dot{x}, \dot{g})$ . Это позволяет избежать проведения замен переменных для формирования невязки  $e_{21}(x, g, \dot{x}, \dot{g})$ , что снижает вычислительную сложность алгоритма. Использование для корректирующего воздействия гладкой и ограниченной сигма-функции обеспечивает высокое качество оценивания, не дает всплесков в начале переходного процесса и в отличие от редуцированных наблюдателей Луенбергера [10] не требует знания параметров модели объекта (1).

## 5. Результаты численного моделирования

Для проверки работоспособности и эффективности разработанных алгоритмов было проведено численное моделирование в MATLAB-Simulink. Для интегрирования применялся метод Эйлера с постоянным шагом  $5 \cdot 10^{-4}$  [с]. Были известны следующие диапазоны изменения параметров объекта (1)–(2):

$$(28) \quad \begin{aligned} 3,3 &\leq M \leq 3,6 \text{ [кг]}; \quad 2 \leq m \leq 3 \text{ [кг]}; \quad 0,7 \leq l \leq 1,1 \text{ [м]}; \\ 80 &\leq a \leq 180 \text{ [Гц]}, \quad 200,5 \leq b \leq 365,5 \text{ [Н/(В·с)]}, \end{aligned}$$

$$878,9 \leq c \leq 1882 \text{ [Н/м];}$$

Границы в конструктивных ограничениях (6) имели вид:

$$U = 60 \text{ [В]}, \quad \bar{F} = 55 \text{ [Н]}, \quad X_2 = 15 \text{ [м/с<sup>2</sup>]}, \quad X_1 = 0,45 \text{ [м/с].}$$

Внешним возмущением, действующим на тележку, полагалась сила сухого трения [15]:

$$F_r(t) = -f_{r0} \tanh(\dot{x}/\varphi) + k_r |\dot{x}| \dot{x} \text{ [Н]},$$

$$\text{где } f_{r0} = 50 \text{ [Н]}, \quad \varphi = 0,1, \quad k_r = -0,05 \text{ [кг/м].}$$

Ветровое возмущение моделировалось в виде импульсного воздействия:

$$F_\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 15,2, \\ -1, & 15,2 \leq t \leq 15,3, \text{ [Н]} \\ 0, & t > 15,3. \end{cases}$$

В описанных условиях требовалось переместить тележку с грузом из нулевого начального положения в заданное  $x_d = 1,5$  [м]. Коэффициенты регулятора (13) были выбраны с учетом (20) исходя из «наихудшего» изменения параметров объекта и возмущений:

$$(29) \quad m_1 = 14 \text{ [м/с]}, \quad m_2 = 50 \text{ [Н]}, \quad m_3 = 60 \text{ [В]}, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 1.$$

Проведено несколько серий численных экспериментов с одинаковыми коэффициентами регулятора (29), но с разными параметрами объекта (28), внешними возмущениями и задающими воздействиями.

В первой серии экспериментов 1–3 не учитывалась динамика ДПТ, и в качестве управления рассматривалась движущая сила  $F$ . Для сравнительного анализа в эксперименте 1 использовалось управление на скользящих режимах (CP):

$$(30) \quad \begin{aligned} F &= -k_p \xi - k_{\text{sgn}} \text{sign}(\xi) \text{ [Н]}, \\ \xi &= \lambda_1(x - \chi + \lambda_2 \theta) + \dot{x} - \dot{g} + \lambda_2 \dot{\theta}, \\ \lambda_1 &= 1 \text{ [Гц]}, \quad \lambda_2 = 5 \text{ [м]}, \quad k_p = 30 \text{ [с} \cdot \text{Н/м]}, \quad k_{\text{sgn}} = 28 \text{ [Н]}. \end{aligned}$$

В эксперименте 2 использовался разработанный метод управления

$$F = -m_2 \sigma(k_2(\dot{x} - \dot{g} + m_1 \sigma(k_1(x - g)))) \text{ [Н].}$$

Для объективности сравнения результатов экспериментов 1–2 коэффициенты регулятора (29) подбирались так, чтобы обеспечить сопоставимое время регулирования. В этих экспериментах задающее воздействие было константой  $g = 1,5$  [м] и полагалось, что измеряются все переменные состояния, необходимые для управления. В эксперименте 3 задающее воздействие также было константой  $g = 1,5$  [м], но в этом эксперименте использовалась динамическая обратная связь  $F = -m_2 \sigma(k_2 v)$ , формируемая на основе корректирующего воздействия дифференциатора (21). Оно предоставляло оценку  $e_{21}$  по измерениям  $x$ ,  $\theta$  и  $F$ . На основе заданной точности оценивания  $\Delta_{02} = 0,02$  [м/с] и с учетом (25), (26) были приняты следующие коэффициенты дифференциатора:

$$m_0 = 20 \text{ [м/с]}, \quad k_0 = 150.$$

В экспериментах 1–3 при моделировании использовались следующие значения параметров объекта (1)–(2) из промежуточных диапазонов (28):

$$(31) \quad \begin{aligned} M &= 2,5 \text{ [кг]}, m = 3,5 \text{ [кг]}, l = 0,9 \text{ [м]}, \\ a &= 130 \text{ [Гц]}, b = 262,5 \text{ [Н/(Б·с)]}, c = 378,13 \text{ [Н/м]}. \end{aligned}$$

На рис. 2 показан график положения тележки  $x(t)$  (рис. 2а) и график угла отклонения стержня от вертикальной оси  $\theta(t)$  (рис. 2б) для экспериментов 1–2. На рис. 3 представлен график скорости тележки  $\dot{x}(t)$  (рис. 3а) и график движущей силы  $F(t)$  (рис. 3б) для экспериментов 1–2. Аналогичные графики для эксперимента 3 не показаны, поскольку они идентичны графикам для эксперимента 2. На рис. 4 представлен график ошибки оценивания  $e_{21}(t) - v(t)$  для эксперимента 3.

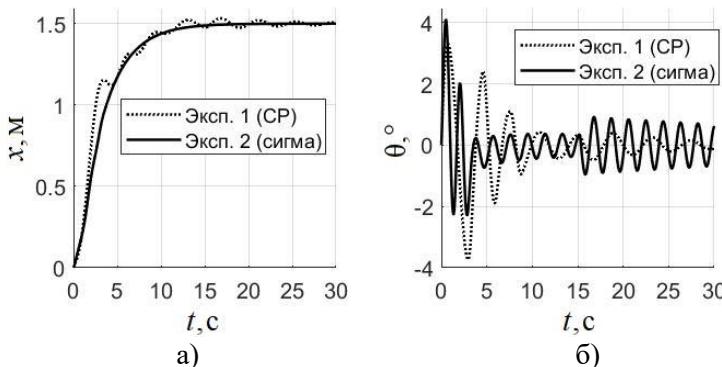


Рис. 2. Эксперименты 1–2: графики а)  $x(t)$  и б)  $\theta(t)$

В таблице 1 для всех экспериментов представлены следующие значения показателей качества регулирования: время регулирования  $t_1$  [с]:  $|e_{11}(t)| \leq 0,04$ ,  $t \geq t_1$ ; максимальный угол отклонения стержня от вертикальной оси  $\theta_{\max}$  [°]:  $\theta_{\max} \geq |\theta(t)|$ ,  $t \geq 0$ ; величина ошибки слежения  $e_{11}$  в установившемся режиме  $\Delta_{11}$  [м]; максимальное значение движущей силы  $F_{\max}$  [Н]:  $F_{\max} \geq |F(t)|$ ,  $t \geq 0$ ; время затухания колебаний  $t_d$  [с]:  $|\theta(t)| \leq 0,2^\circ$ ,  $t \geq t_d$ .

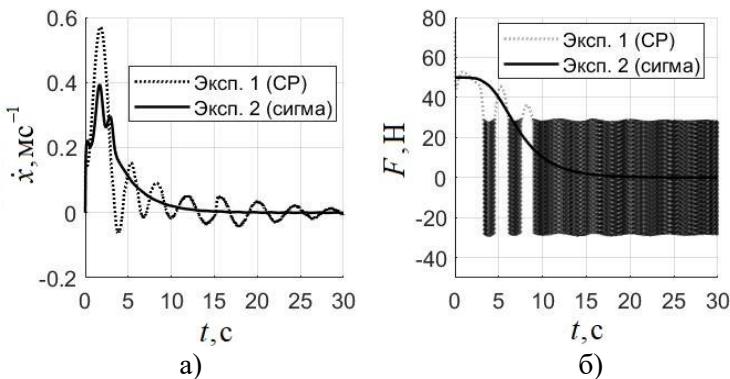


Рис. 3. Эксперименты 1–2: графики а)  $\dot{x}(t)$  и б)  $F(t)$

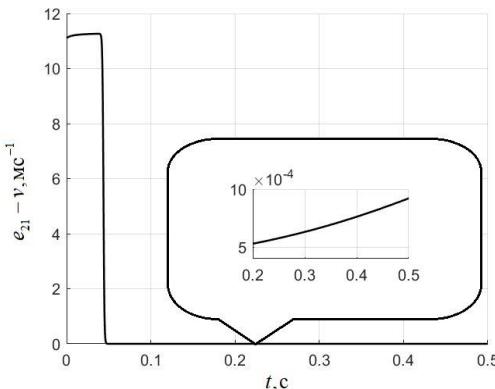


Рис. 4. Эксперимент 3: график  $e_{21}(t) - v(t)$

Таблица 1. Значения показателей качества регулирования

Показатель\Номер эксперимента	1	2	3
$t_1, \text{с}$	11,41	11,31	11,31
$\theta_{\max}, {}^\circ$	3,74	4,11	4,11
$\Delta_{11}, \text{м}$	$1,15 \times 10^{-4}$	$4,12 \times 10^{-5}$	$4,11 \times 10^{-5}$
$q_{21\max}, \text{м/с}$	0,57	0,39	0,39
$F_{\max}, \text{Н}$	73	49,99	50
$t_d, \text{с}$	25,48	82,54	82,54

Из рис. 2–3 и таблицы 1 следует, что тележка перемещает груз в заданное положение во всех экспериментах.

В эксперименте 1 с управлением на скользящих режимах благодаря вводу угловой координаты и ее производной в закон управления удалось обеспечить более быстрое затухание колебаний и меньшее значение  $t_d$  (в 3,24 раз) по сравнению с экспериментом 2 [с] сигмовидными функциями, где для управления использовались только положение и скорость тележки. Однако в результате скорость тележки  $q_{21,\max}$  и движущая сила  $F$  возросли в 1,46 раз. Ухудшилась точность отслеживания (в 2,79 раз). Значения остальных показателей качества в экспериментах 1 и 2 сопоставимы. Кроме того, отметим наличие «чаттеринга» (параметрических колебаний в установившемся режиме) (см. рис. 3б), характерного для систем с разрывными управлениями.

Из рис. 4 следует, что заданная точность оценивания  $e_{21}(t)$  с помощью корректирующего воздействия  $v(t)$  дифференциатора (21) достигается менее чем за 0,1 [с]. Как следствие, высокое качество оценивания привело к тому, что показатели, достигаемые для замкнутой системы с динамической обратной связью, практически идентичны полученным для замкнутой системы со статической обратной связью (таблица 1).

Во второй серии экспериментов 4–7 при моделировании учитывалась динамика ДПТ (2). Была реализована замкнутая система с динамической обратной связью (1)–(2), (27). При этом положение тележки отслеживало траекторию (7) с интегральной составляющей. В эксперименте 4 в эталонной траектории было принято  $\gamma = 0$  (интегральная составляющая отсутствовала, как и в экспериментах 1–3), а в экспериментах 5–7 было выбрано значение  $\gamma = 5$ .

В экспериментах 4–5 были использованы значения параметров объекта управления (31), как и в экспериментах 1–3. Для проверки робастности разработанного подхода в экспериментах 6–7 были приняты другие значения параметров. В эксперименте 6 они соответствовали нижним границам (28), и в эксперименте 7 – верхним. При этом в экспериментах 6–7 задавались другие ветровые возмущения в виде пилообразной периодической функции  $F_\theta(t) = 0,02t - 0,01$  [Н] с главным периодом 1 [с].

Еще раз отметим, что коэффициенты разработанного регулятора оставались одинаковыми (29) во всех экспериментах 2–7.

На рис. 5 и 6 показаны те же графики, что и на рис. 2 для экспериментов 4, 5, и 6, 7 соответственно.

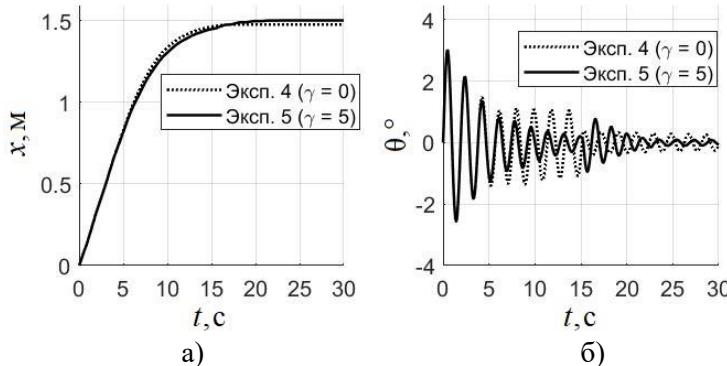


Рис. 5. Эксперименты 4–5: графики а)  $x(t)$  и б)  $\theta(t)$

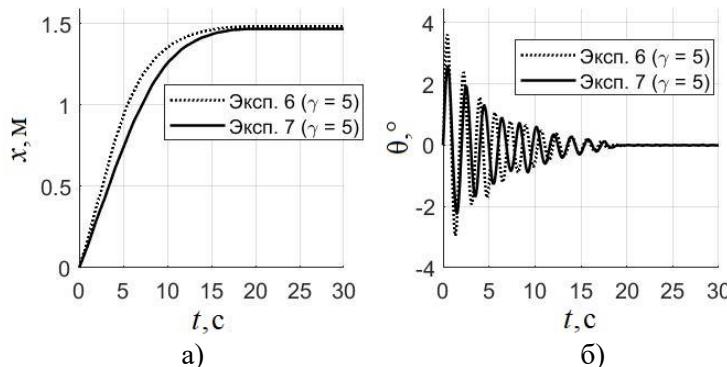


Рис. 6. Эксперименты 6–7: графики а)  $\dot{x}(t)$  и б)  $F(t)$

В таблице 2 представлены значения тех же показателей качества регулирования, что и в таблице 1.

Таблица 2. Значения показателей качества регулирования

Показатель\Номер эксперимента	4	5	6	7
$t_1$ , с	14,65	18,11	14,10	17,26
$\theta_{\max}$ , °	3,02	3,02	3,61	2,57
$\Delta_{11}$ , м	0,02	0,02	0,02	0,03
$q_{21\max}$ , м/с	0,19	0,19	0,22	0,16
$F_{\max}$ , Н	50	50	50	50
$t_d$ , с	39,15	21,01	15,04	16,75

Из таблиц 1 и 2 следует, что учет динамики ДПТ в эксперименте 4 привел к ухудшению точности позиционирования и увеличению времени регулирования (на 3,34 [с]) по сравнению с экспериментом 3, где она не учитывалась. Наличие интеграла от угловой координаты в задающем воздействии обеспечило подавление ветровых возмущений и более быстрое затухание колебаний в эксперименте 5 по сравнению с экспериментом 4, где не было интегральной составляющей (значение  $t_d$  меньше в 1,86 раз). Однако это привело к увеличению времени регулирования на 3,46 [с]. На практике при выборе значения  $u$  должен быть найден компромисс, удовлетворяющий технологическим требованиям на допустимое время затухания колебаний и время регулирования. Значения остальных показателей качества в экспериментах 4 и 5 сопоставимы.

Из рис. 6 следует, что регулятор остается робастным, когда значения параметров объекта находятся в допустимых диапазонах (28). Таким образом, результаты экспериментов 5–7 подтвердили теоретические выкладки и продемонстрировали эффективность разработанного подхода.

## 6. Заключение

Цель работы состояла в создании системы управления ходовой тележкой мостового крана, обеспечивающей демпфирование колебаний груза и учитывающей особенности объекта: недостаток управлений, действие несогласованных возмущений

на механическую подсистему, неполные измерения. Цель была достигнута за счет разработки блочного синтеза сигмовидных фиктивных управлений, реализуемых в исполнительном устройстве и позволяющих подавить несогласованные возмущения. Кроме того, предложены эффективные методы планирования траектории тележки и методы наблюдения, обеспечивающие информационную поддержку системы управления. Предложенные методы не требуют идентификации неизвестных параметров и возмущений, что снижает вычислительную сложность алгоритмов. Они применимы к классу систем, где допускается негладкость возмущений.

Дальнейшим развитием работы может быть учет динамики длины стержня, когда происходит не только горизонтальное перемещение груза, но и его поднятие или опускание на желаемую высоту. Кроме того, целесообразно исследование работоспособности алгоритмов при наличии шумов в измерениях.

### ***Литература***

1. АНТИПОВ А.С., КРАСНОВА С.А. *Система стабилизации положения тележки крана с использованием сигмоидальной функции* // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2019. – Т. 20, №10. – С. 609–614.
2. КАБАНОВ С.А., НИКУЛИН Е.Н., ЯКУШЕВ Б.Э., ЯКУШЕВА Д.Б. *Оптимальное управление перемещением груза мостовым краном* // Приборостроение. – 2011. – №5. – С. 56–65.
3. КОКУНЬКО Ю.Г., КРАСНОВА С.А. *Два подхода к синтезу инвариантной системы слежения для беспилотного летательного аппарата* // Управление большими системами. – 2020. – №85. – С.113–142.
4. КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А., УТКИН А.В. *Блочный подход к анализу и синтезу инвариантных нелинейных систем слежения* // Автоматика и телемеханика. – 2017. – №12. – С. 26–53.
5. КРУГЛОВ С.П., КОВЫРШИН С.В., АКСАМЕНТОВ Д.Н. *Адаптивное управление двухмаятниковым подвесом мон*

- стового крана // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2022. – Т. 23, №9. – С. 451–461.
- 6. ALGHANIM K., MOHAMMED A., ANDANI M. *An input shaping control scheme with application on overhead cranes* // Int. Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. – 2019. – Vol. 20, Iss. 5. – P. 561–573.
  - 7. ANTIPOV A.S., KRASNOVA S.A. *Using of Sigmoid Functions in the Control System of the Overhead Crane* // Proc. of the 16th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). – Moscow: IEEE, 2022. – P. 1–4
  - 8. ANTIPOV A.S., KRASNOVA S.A., PIVNEVA S.V. *Trajectory Planning of Crane Trolley for Smooth Payload Transportation* // Proc. of the 15th Int. Conf. Management of Large-Scale System Development (MLSD). – Moscow: IEEE, 2022. – P. 1–5.
  - 9. CAO X., WANG Z., ZHANG X. *Precise Locating Control for a Polar Crane Based on Sliding Mode Active Disturbance Rejection Control and Quadratic Programming Algorithm* // Machines. – 2021. – Vol. 9, No. 2. – P. 1–21.
  - 10. CRISTOFARO A., DE LUCA A. *Reduced-Order Observer Design for Robot Manipulators* // IEEE Control Systems Letters. – 2022. – Vol. 7. – P. 520–525.
  - 11. HUAN X. et al. *Sliding Mode Observation and Control for Overhead Cranes with Varying Rope Length* // China Automation Congress (CAC–2021). – 2021. – P. 4578–4583.
  - 12. JAFARI J., GHAZAL M., NAZEMIZADEH M. *A LQR Optimal Method to Control the Position of an Overhead Crane* // Int. Journal of Robotics and Automation. – 2014. – Vol.3, No. 4. – P. 252–258.
  - 13. JOLEVSKI D., BEGO O. *Model predictive control of gantry/bridge crane with anti-sway algorithm* // Journal of Mechanical Science and Technology. – 2015. – Vol. 29. – P. 827–834.
  - 14. LA V.D., NGUYEN K.T. *Combination of input shaping and radial spring-damper to reduce tridirectional vibration of crane payload* // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2019. – Vol. 116. – P. 310–321.

15. MA B., FANG Y., ZHANG X. *Adaptive Tracking Control for an Overhead Crane System* // Proc. of the 17th IFAC World Congress. Seoul, July, 2008. – 2008. – P. 12194–12199.
16. MOHAMED K.T., ABDEL-RAZAK M.H., HARAZ E.H., ATA A.A. *Fine tuning of a PID controller with inlet derivative filter using Pareto solution for gantry crane systems* // AEJ - Alexandria Engineering Journal. – 2021. – Vol. 61, No. 9. – P. 6659–6673.
17. SHEHU M.A., AI-JUN LI, TIAN H. *Modified Higher-Order Sliding Mode Observer-Based Super-Twisting Controller for Perturbed Overhead Cranes* // Chinese Automation Congress (CAC–2019), Hangzhou, China. – 2019. – P. 255–260.
18. SHI L., CUI S., LI X., ZHANG Y. *Sliding Mode Control of Overhead Crane Based on High Gain Observer* // IEEE 5th Advanced Information Management, Communicates, Electronic and Automation Control Conference (IMCEC–2022), Chongqing, China. – 2022. – P. 1–4.
19. XU R., ZHOU M. *Sliding mode control with sigmoid function for the motion tracking control of the piezo-actuated stages* // Electron. Lett. – 2017. – Vol. 53, No. 2. – P. 75–77.
20. XI Z., HESKETH T. *Discrete time integral sliding mode control for overhead crane with uncertainties* // IET Control Theory & Applications. – 2010. – Vol. 4, Iss. 10. – P. 2071–2081.
21. ZHANG M., MA X., SONG R., RONG X., TIAN G., TIAN X., LI Y. *Adaptive Proportional-Derivative Sliding Mode Control Law With improved Transient Performance for Underactuated Overhead Crane Systems* // IEEE CAA J. Autom. Sin. – 2018. – Vol. 5, No. 3. – P. 683–690.

## **ROBUST CONTROL OF THE TROLLEY OF A SINGLE GIRDER OVERHEAD CRANE UNDER THE ACTION OF UNMATCHED PERTURBATIONS AND INCOMPLETE MEASUREMENT**

**Aleksey Antipov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., Senior Researcher (scholess18@mail.ru).

**Olga Tkacheva**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Junior Researcher (tkolga17@gmail.com).

*Abstract: We considered the problem of controlling an electromechanical system, which is a single-girder overhead crane trolley (mechanical subsystem) with the reduced dynamics of a DC motor (electrical subsystem). The plant operates under conditions of lack of controls, the action of parametric and external perturbations, and incomplete measurements. In this case, the perturbations acting on the mechanical subsystem are unmatched. For safe transfer of payload in these conditions, a number of solutions have been proposed. A reference trolley trajectory with an integral of the angular coordinate has been formed. The presence of the integral part leads to the damping of payload oscillations. It is shown that this part also makes it possible to suppress unmatched wind perturbations. To track the generated trajectory, a procedure for block synthesis of sigmoid fictitious controls in the mechanical subsystem and true discontinuous control in the electrical subsystem has been developed. Smooth and bounded sigmoid functions provide suppression of unmatched perturbations. These functions are implemented in the actuator and do not lead to its strong wear, which occurs during the formation of discontinuous fictitious controls. For information support of the control law, a dynamic differentiator with a sigmoid corrective action has been developed, which provides an estimate of the speed by measuring the tracking error with any given accuracy. The proposed solution will make it possible to abandon the trolley speed sensor and avoid jumps in evaluation signals. The results of numerical simulation of closed-loop systems with discontinuous and sigmoid fictitious controls are presented. They demonstrated the effectiveness of the developed approach.*

**Keywords:** overhead crane's trolley, unmatched perturbations, parametric uncertainty, robust control, sigmoid function, dynamic differentiator.

УДК 62 – 503.54

ББК 39.9

DOI: 10.25728/ubs.2023.105.3

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии П.С. Щербаковым.*

*Поступила в редакцию 26.07.2023.*

*Опубликована 30.09.2023.*

# АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕХОДНОГО РЕЖИМА ДВУХФАЗНЫХ СМО С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ЗАЯВОК<sup>1</sup>

Вытовтов К. А.<sup>2</sup>, Барабанова Е. А.<sup>3</sup>, Вишневский В. М.<sup>4</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Волкова С. А.<sup>5</sup>, Вытовтов Г. К.<sup>6</sup>

(Астраханский государственный технический  
университет, Астрахань)

Работа посвящена разработке алгоритма построения системы дифференциальных уравнений Колмогорова для двухфазной системы массового обслуживания с пуссоновским входным потоком, экспоненциальным распределением времени обслуживания на каждой фазе и произвольным конечным числом заявок в системе. Введены новые функции, существенно упрощающие алгоритм построения уравнений Колмогорова, а также инфинитезимальной матрицы системы. Проведен сравнительный анализ сложности ранее используемых алгоритмов и алгоритма, представленного авторами. Использование данного алгоритма позволит в дальнейшем получить аналитические и численные решения основных характеристик производительности двухфазной СМО с большим числом заявок в переходном режиме работы.

Ключевые слова: двухфазная система массового обслуживания, переходной режим, уравнения Колмогорова, сложность алгоритма.

## 1. Введение

Многофазные системы массового обслуживания (СМО) в последние годы получили довольно широкое развитие [3, 6, 11, 13]. Данные модели в отличие от однофазных СМО позволяют более точно описать целые классы реальных систем

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-29-00795, <https://rscf.ru/project/23-29-00795/>.

<sup>2</sup> Константин Анатольевич Вытовтов, д.т.н., доцент (vytovtov\_konstan@mail.ru).

<sup>3</sup> Елизавета Александровна Барабанова, д.т.н., доцент (elizavetaalex@yandex.ru).

<sup>4</sup> Владимир Миронович Вишневский, д.т.н., профессор (vishn@inbox.ru).

<sup>5</sup> Светлана Анатольевна Волкова, к.ф.-м.н., доцент (svolkovav2017@gmail.com).

<sup>6</sup> Георгий Константинович Вытовтов, студент (georgii.vytovtov@gmail.com).

и получить для них основные характеристики производительности. Так, например, многофазные СМО используются для описания проводных и беспроводных сетей связи линейной топологии [13], процессов последовательного обслуживания клиентов в различных социальных или коммерческих организациях, центрах информационной и технической поддержки [4]. Кроме этого, такое распределение помогает достаточно точно описать многокаскадные коммутационные структуры, такие как, например, дуальные фотонные коммутаторы [1].

При исследовании СМО в ряде случаев важно рассматривать не только стационарный [3], но и переходной режим ее функционирования [7, 8, 10, 12]. Такая необходимость возникает в случае нестационарного изменения интенсивностей поступления и обслуживания заявок, что применительно к телекоммуникационным приложениям отражает ситуации, связанные с изменением маршрутов передаваемых сообщений или выходом из строя обслуживающих устройств. В работах авторов [2, 14] рассматривается аналитический подход к описанию работы СМО с пуассоновским, а также коррелированным входными потоками и экспоненциальным распределением времени обслуживания в переходном режиме. Метод позволяет получить решение системы любого конечного числа уравнений Колмогорова, используя так называемую матрицу преобразования вероятностей. На первом шаге предлагаемого подхода составляется система уравнений Колмогорова, что для экспоненциального распределения времени обслуживания не представляет особого труда. В случае многофазных систем данная задача значительно усложняется, так как реализовать алгоритм составления системы уравнений Колмогорова для большого числа заявок в каждой фазе даже для двух фаз требует больших вычислительных ресурсов.

Система уравнений Колмогорова для двухфазной СМО с пуассоновским входным потоком, экспоненциальным распределением временем обслуживания на каждой фазе и неограниченным буфером впервые представлена в [9]. Однако разработанные ранее алгоритмы построения уравнений Колмогорова содержат большое количество условий, что приводит к их высокой

вычислительной сложности и, соответственно, высоким требованиям к вычислительным ресурсам.

Поэтому актуальна разработка усовершенствованного алгоритма построения системы уравнений Колмогорова для дальнейшего исследования двухфазных СМО в переходном режиме, позволяющего описывать систему с любым сколь угодно большим числом заявок и не требующего значительных вычислительных ресурсов.

Такой алгоритм представлен авторами в данной статье. Статья построена следующим образом. В разделе 3 приведен метод построения системы уравнений Колмогорова с применением новых функций, введенных авторами. Этот метод исключает использование в алгоритме построения уравнений Колмогорова многочисленных условий «если» и позволяет в дальнейшем проводить аналитическое исследование поведения двухфазных СМО с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным распределением времени обслуживания на каждой фазе, в частности, использовать метод матрицы преобразования вероятностей [2, 14] для нахождения вероятностей состояний системы в переходном режиме. Раздел 4 посвящен разработке алгоритма построения матрицы коэффициентов системы уравнений Колмогорова. Для этого введена функция, преобразующая числа, соответствующие количеству заявок в каждой из фаз, в порядковый номер элемента матрицы в столбце или строке. В разделе 5 описаны новые функции, позволяющие упростить алгоритм построения матрицы коэффициентов системы уравнений Колмогорова. В разделе 6 приведен сравнительный анализ алгоритмов построения системы уравнений Колмогорова в соответствии с хорошо известным методом [9] и с методом, использующим новые функции.

## **2. Постановка задачи**

В данной работе рассматривается двухфазная система массового обслуживания с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным распределением времени обслуживания на каждой фазе. Система имеет одно обслуживающее устройство,

обработка заявок в котором происходит в два этапа с интенсивностями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  для первого и второго этапов соответственно. Входные заявки поступают в систему с интенсивностью  $\lambda$ . Максимальное количество заявок, находящихся в системе, равно  $N$ ,  $n_1$  – число заявок, обслуживаемых на первом этапе,  $n_2$  – число заявок, обслуживаемых на втором этапе, при этом  $n_1 + n_2 \leq N$ . Граф состояний рассматриваемой СМО представлен на рис. 1. Состояние  $S(0, 0)$  соответствует отсутствию заявок в системе,  $S(n_1, n_2)$ ,  $n_1 = 0, \dots, N$ ,  $n_2 = 0, \dots, N$ , соответствует наличию  $n_1$  заявок в первой фазе обслуживания и  $n_2$  заявок на второй фазе обслуживания.

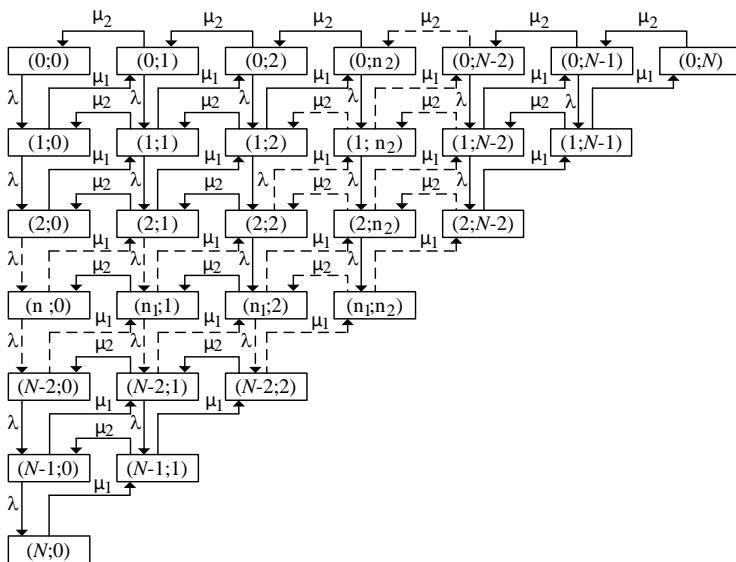


Рис. 1. Граф состояний двухфазной СМО с пуассоновским входным потоком, экспоненциальным распределением времени обслуживания на каждой фазе и ограниченным буфером

Целью данной статьи является модернизация алгоритма построения системы уравнений Колмогорова для случая двухфазной СМО с ограниченным буфером с целью уменьшения его сложности и упрощения ее дальнейшего исследования.

### 3. Система уравнений Колмогорова

Прежде всего оценим количество возможных состояний системы в зависимости от максимального количества заявок  $N$ . Из графа (рис. 1) видно, что любому  $n_2$  соответствует  $S_{n_2} = N + 1 - n_2$  состояний. Тогда общее число состояний находится как

$$(1) \quad S = \sum_{n_2=0}^N (N + 1 - n_2).$$

Очевидно, что сумма ряда (1) равна

$$(2) \quad S = \frac{1}{2} (N^2 + 3N + 2)$$

и она соответствует количеству дифференциальных уравнений Колмогорова, описывающих данную систему.

Для этой системы уравнения Колмогорова были записаны в развернутом аналитическом виде еще в [9]:

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{dP(0,0,t)}{dt} &= -\lambda P(0,0,t) + \mu_2 P(0,1,t), \quad n_1, n_2 = 0; \\ \frac{dP(0,n,t)}{dt} &= -(\lambda + \mu) P(0,n,t) + \mu P(0,n-1,t) + \\ &+ \mu P(0,n+1,t), \quad n = 0, n = \overline{1, N-1}; \\ \frac{dP(0,N,t)}{dt} &= -\mu_2 P(0,N,t) + \mu_1 P(1,N-1,t), \quad n_1 = 0, n_2 = N; \\ \frac{dP(n_1,0,t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_2) P(n_1,0,t) + \mu_2 P(n_1,1,t), \quad n_1 = \overline{1, N-1}, n_2 = 0; \\ \frac{dP(N,0,t)}{dt} &= -\mu_1 P(N,0,t) + \lambda P(N-1,0,t), \quad n_1 = N, n_2 = 0; \\ \frac{dP(n_1,n_2,t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_1 + \mu_2) P(n_1,n_2,t) + \mu_1 P(n_1+1,n_2-1,t) + \\ &+ \mu_2 P(n_1,n_2+1,t) + \lambda P(n_1-1,n_2,t), \quad n_1, n_2 > 0, n_1 + n_2 < N; \\ \frac{dP(n_1,n_2,t)}{dt} &= -(\mu_1 + \mu_2) P(n_1,n_2,t) + \mu_1 P(n_1+1,n_2-1,t) + \\ &+ \lambda P(n_1-1,n_2,t), \quad n_1, n_2 > 0, n_1 + n_2 = N. \end{aligned}$$

Следует отметить, что данный метод, предусматривающий использование различных форм записи при различных значениях  $n_1$  и  $n_2$ , является очень неудобным для дальнейшего анализа рассматриваемой СМО с большим числом заявок и расчета ее характеристик. Он не позволяет получить общий вид рассматриваемой системы, а при составлении программ потребует усложнения программного кода, использования дополнительных условий и ограничений. Однако очень важно отметить, что в записи (3) наблюдаются определенные закономерности. Для их описания возьмем за основу уравнение для  $n_1, n_2 > 0$ ,  $n_1 + n_2 = N$ :

$$(4) \quad \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} - (\lambda + \mu_1 + \mu_2)P(n_1, n_2, t) + \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, t) + \\ + \mu_2 P(n_1, n_2 + 1, t) + \lambda P(n_1 - 1, n_2, t),$$

содержащее наибольшее количество слагаемых. Допустим, что все эти слагаемые содержатся и в остальных уравнениях системы (3). Однако каждое из слагаемых умножается на некоторую функцию  $f_i(n_1, n_2, N)$ , которая принимает значения 0 или 1 в зависимости от значений  $n_1$  и  $n_2$ . Тогда все уравнения в (3) с использованием (4) и функции  $f_i(n_1, n_2, N)$  можно записать в виде

$$(5) \quad \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} f_1(n_1, n_2, N) - (\lambda f_2(n_1, n_2, N) + \\ + \mu_1 f_2(n_1, n_2, N) + \mu_2 f_3(n_1, n_2, N))P(n_1, n_2, t) + \\ + \mu_1 f_4(n_1, n_2, N)P(n_1 + 1, n_2 - 1, t) + \\ + \mu_2 f_5(n_1, n_2, N)P(n_1, n_2 + 1, t) + \\ + \lambda f_6(n_1, n_2, N)P(n_1 - 1, n_2, t).$$

Теперь рассмотрим условия, при которых функции  $f_i(n_1, n_2, N)$  должны принимать значения 0 или 1. В соответствии с (3) вероятности в левой части под знаком производной имеют вид  $P(n_1, n_2, t)$ ,  $n_1 = 0, \dots, N$ ,  $n_2 = 0, \dots, N$ . При этом соответствующее уравнение в (3) отсутствует, если  $n_1 + n_2 > N$ , и сохраняется, если  $n_1 + n_2 \leq N$ . В сохраненных уравнениях в первой скобке правой части (множитель при  $P(n_1, n_2, t)$ ) интенсивность поступления  $\lambda$  отсутствует при условии  $n_1 + n_2 \geq N$  и сохраняется при  $n_1 + n_2 < N$ . Интенсивность обслуживания  $\mu_1$  отсутствует

при  $n_1 < 1$  и сохраняется при  $n_1 \geq 1$ . Интенсивность обслуживания  $\mu_2$  отсутствует при  $n_2 < 1$  и сохраняется при  $n_2 \geq 1$ . Второе слагаемое  $\mu_2 P(n_1, n_2 + 1, t)$  в правой части уравнений (3) отсутствует при  $n_1 + n_2 > N$  и сохраняется при  $n_1 + n_2 \leq N$ . Третье слагаемое  $\mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, t)$  в правой части уравнений (1) отсутствует при  $n_2 < 0$  и сохраняется при  $n_2 \geq 0$ . Четвертое слагаемое  $\lambda P(n_1 - 1, n_2, t)$  отсутствует при  $n_1 < 0$  и сохраняется при  $n_1 \geq 0$ .

Исходя из этого анализа для корректной записи системы (3) в общем виде (5) необходимо ввести функцию  $v_1(x, M)$ , ограничивающую возможные состояния системы снизу (минимально допустимые значения  $x = n_1, n_2, n_1 + n_2$  должны быть большими либо равными  $M$ ), а также функцию  $v_2(x, K)$ , ограничивающую возможные состояния сверху (максимально допустимые значения  $n_1, n_2, n_1 + n_2$  должны быть меньшими либо равными  $K$ ). Тогда система (3) с использованием введенных функций  $v_1(x, M)$  и  $v_2(x, K)$  принимает вид

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & v_2(n_1 + n_2, N) \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} = -[\lambda v_2(n_1 + n_2, N) + \\
 & + \mu_1 v_1(n_1, 1) + \mu_2 v_1(n_2, 1)] P(n_1, n_2, t) v_2(n_1 + n_2, N + 1) + \\
 & + \mu_1 v_1(n_2, 1) v_2(n_1 + n_2, N + 1) P(n_1 + 1, n_2 - 1, t) + \\
 & + \mu_2 v_2(n_1 + n_2, N) P(n_1, n_2 + 1, t) + \\
 & + \lambda v_1(n_1, 1) v_2(n_1 + n_2, N + 1) P(n_1 - 1, n_2, t), \quad n_1 = 0, \dots, N, n_2 = 0, \dots, N.
 \end{aligned}$$

Неудобным в записи (6) является то, что вместо отсутствующих уравнений появляется равенство  $0 = 0$ . Это затрудняет решение системы (6) матричными методами, поскольку матрица коэффициентов (6) оказывается вырожденной. Поэтому вместо (6) целесообразно использовать запись уравнений Колмогорова в виде

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} = -[\lambda v_2(n_1 + n_2, N) + \\
 & + \mu_1 v_1(n_1, 1) + \mu_2 v_1(n_2, 1)] P(n_1, n_2, t) + \\
 & + \mu_1 v_1(n_2, 1) v_2(n_1 + n_2, N + 1) P(n_1 + 1, n_2 - 1, t) + \\
 & + \mu_2 v_2(n_1 + n_2, N) P(n_1, n_2 + 1, t) + \\
 & + \lambda v_1(n_1, 1) v_2(n_1 + n_2, N + 1) P(n_1 - 1, n_2, t),
 \end{aligned}$$

где  $n_1 = 0, \dots, N$ ,  $n_2 = 0, \dots, N$ ,  $n_1 + n_2 \leq N$ .

Таким образом, (7) является общей записью системы уравнений Колмогорова для двухфазной СМО с пуассоновским входным потоком, экспоненциальным распределением временем обслуживания на каждой фазе и ограниченным буфером.

В Приложении 1 представлен код программы и результаты построения системы уравнений Колмогорова для  $N = 4$  в символьном пакете вычислений MAPLE17 в соответствии с разработанным методом (6), подтверждающие корректность предлагаемого метода.

В стационарном режиме дифференциальные уравнения (7) сводятся к системе алгебраических уравнений

$$(8) \quad \begin{aligned} & -[\lambda v_2(n_1 + n_2, N) + \mu_1 v_1(n_1, 1) + \mu_2 v_1(n_2, 1) \pi(n_1, n_2) + \\ & + \mu_1 v_1(n_2, 1) v_2(n_1 + n_2, N + 1) \pi(n_1 + 1, n_2 - 1) + \\ & + \mu_2 v_2(n_1 + n_2, N) \pi(n_1, n_2 + 1) + \\ & + \lambda v_1(n_1, 1) v_2(n_1 + n_2, N + 1) \pi(n_1 - 1, n_2) = 0, \end{aligned}$$

где  $n_1 = 0, \dots, N$ ,  $n_2 = 0, \dots, N$ ,  $n_1 + n_2 \leq N$ , которая позволяет записать инфинитезимальную матрицу в общем виде для данного случая.

#### 4. Построение матрицы коэффициентов системы уравнений Колмогорова. Функция $\mathcal{Y}(n_k, n_l)$

Для нахождения вероятностей состояний системы авторы считают целесообразным применение метода матрицы преобразования вероятностей [2, 14]. Для этого прямое уравнение Колмогорова должно быть записано в матричной форме

$$(9) \quad \frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \mathbf{A}\vec{P}(t),$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица коэффициентов системы дифференциальных уравнений (7),  $\vec{P}(t)$  – вектор-столбец вероятностей состояний системы. Отметим, что  $\mathbf{A}$  является также инфинитезимальной матрицей рассматриваемой системы. Для построения матрицы  $\mathbf{A}$  авторами введена функция

$$(10) \quad \vartheta(n_k, n_l) = (N+1)n_k + n_l - \frac{n_k(n_k-1)}{2} + 1,$$

преобразующая число заявок  $n_k, n_l$  в номер столбца (строки) этой матрицы. Проиллюстрируем ее для случая  $N=4$ . Подставляя все необходимые комбинации  $n_k$  и  $n_l$  в (10) для  $N=4$ , получим порядковые номера столбцов (строк), представленные в таблице 1.

Таблица 1.

$n_k$	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$n_l$	0	1	2	3	4	0	1	2	3
$\vartheta(n_k, n_l)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$n_k$	2	2	2	3	3	4
$n_l$	0	1	2	0	1	0
$\vartheta(n_k, n_l)$	10	11	12	13	14	15

Таким образом, элементу  $A_{11}$  матрицы  $\mathbf{A}$  соответствует коэффициент при  $P(0, 0)$  в первом уравнении системы Колмогорова (7), элементу  $A_{21}$  соответствует коэффициент при  $P(0, 0)$  во втором уравнении системы (7), элементу  $A_{15,15}$  соответствует коэффициент при  $P(4, 0)$  в последнем уравнении системы (7) и т.д. В соответствии с вышесказанным, а также видом уравнений Колмогорова для данной системы, элементы матрицы, расположенные на главной диагонали, записываются как

$$(11) \quad \begin{aligned} A_{\vartheta(n_1, n_2), \vartheta(n_1, n_2)} = & -[\lambda v_2(n_1 + n_2, N) + \\ & + \mu_1 v_1(n_1, 1) + \mu_2 v_1(n_2, 1)]. \end{aligned}$$

Остальные ненулевые элементы определяются соотношениями

$$(12) \quad \begin{aligned} A_{\vartheta(n_1, n_2), \vartheta(n_1, n_3)} &= \mu_1 v_1(n_2, 1) v_2(n_1 + n_2, N+1), \\ A_{\vartheta(n_1, n_2), \vartheta(n_6, n_2)} &= \lambda v_1(n_1, 1) v_2(n_1 + n_2, N+1). \end{aligned}$$

Оставшиеся элементы  $A_{i,j}$  матрицы  $\mathbf{A}$  равны нулю. В (11) и (12) имеем  $n_1 = 0, \dots, N$ ,  $n_2 = 0, \dots, N$ ,  $n_3 = n_1 + 1$ ,  $n_4 = n_2 - 1$ ,  $n_5 = n_2 + 1$ ,  $n_6 = n_1 + n_2$ .

Таким образом, метод, основанный на использовании функции (10), позволяет построить матрицу коэффициентов (9) (инфinitезимальную матрицу) без использования дополнительных условий «если» при переборе состояний  $n_k$  и  $n_l$  и существенно упрощает алгоритм.

## 5. Функции $v_1(x, M)$ и $v_2(x, K)$

Условия, при которых в уравнении (7) отсутствуют определенные слагаемые, были описаны в предыдущем разделе. Теперь необходимо определить вид функций  $v_1(x, M)$  и  $v_2(x, K)$ . Формально исключение определенных слагаемых в (7) и сохранение оставшихся можно осуществить с помощью функции Хевисайда

$$(13) \quad \sigma(x, x_0) = \begin{cases} 0, & x < x_0, \\ 1, & x \geq x_0. \end{cases}$$

Однако эта функция, по сути, является логической, а не аналитической и, следовательно, не очень удобна при разработке программы. В частности, при ее использовании в программном коде необходимо использовать дополнительные условия «если». Аналитически зависимость (13) может быть записана, например, как

$$(14) \quad \sigma(x, x_0) = \frac{1}{2} \left( 1 + \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left\{ \tanh \left[ \alpha (x - x_0) \right] \right\} \right).$$

Но вычисление данного предела также затруднительно. Кроме того, гиперболический тангенс равен единице только при  $x \rightarrow \infty$ , а при остальных  $x$  он близок к единице, но не равен ей. Поэтому для возможности компактного аналитического представления системы уравнений Колмогорова была введена функция

$$(15) \quad \sigma_1(x, x_0) = \frac{|x - x_0| + x - x_0}{2|x - x_0|},$$

которая является аналитической и принимает те же значения, что и (13). Таким образом, функция, ограничивающая снизу допустимые состояния системы, имеет вид

$$(16) \quad \nu_1(x, M) = \frac{|x - M + 0,5| + x - M + 0,5}{2|x - M + 0,5|},$$

где  $M$  – нижнее допустимое состояние системы. Смещение на 0,5 по оси  $x$  выбрано в связи с тем, что в противном случае при  $x = M$  эта функция была бы неопределенна, а ее производная стремилась бы к бесконечности в этой точке.

Аналогично с (15) введем функцию

$$(17) \quad \sigma_2(x, x_0) = \frac{|x_0 - x| + x_0 - x}{2|x_0 - x|},$$

которая позволяет записать окончательное выражение функции, ограничивающей сверху допустимые состояния системы

$$(18) \quad \nu_1(x, K) = \frac{|K - x - 0,5| + K - x - 0,5}{2|K - x - 0,5|},$$

где  $K$  – верхнее допустимое состояние системы. Применительно к решаемой задаче  $x$  может принимать значения  $n_1, n_2, n_1+n_2$  и т.д.

Преимуществом функций (16) и (18) в сравнении с (13) является отсутствие дополнительных условий «если», что существенно сокращает сложность программного кода и позволяет упростить аналитическое исследование соответствующей системы.

## 6. Сравнение алгоритмов

Алгоритм составления уравнений Колмогорова для двухфазной СМО с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным распределением времени обслуживания на каждой фазе в соответствии с [9] представляет собой последовательную проверку условий в (3), т.е.:

если  $n_1, n_2 = 0$ , то

$$(19) \quad \frac{dP(0,0,t)}{dt} = -\lambda P(0,0,t) + \mu_2 P(0,1,t);$$

если  $n_1 = 0, n_2 = 1, \dots, N - 1$ , то

$$(20) \quad \frac{dP(0, n_2, t)}{dt} = -(\lambda + \mu_2)P(0, n_2, t) + \mu_1 P(0, n_2 - 1, t) + \\ + \mu_2 P(0, n_2 + 1, t);$$

если  $n_1 = 0, n_2 = N$ , то

$$(21) \quad \frac{dP(0, N, t)}{dt} = -\mu_2 P(0, N, t) + \mu_1 P(1, N - 1, t);$$

если  $n_1 = 1, \dots, N - 1, n_2 = 0$ , то

$$(22) \quad \frac{dP(n_1, 0, t)}{dt} = -(\lambda + \mu_2)P(n_1, 0, t) + \mu_2 P(n_1, 1, t);$$

если  $n_1 = N, n_2 = 0$ , то

$$(23) \quad \frac{dP(N, 0, t)}{dt} = -\mu_1 P(N, 0, t) + \lambda P(N - 1, 0, t);$$

если  $n_1, n_2 > 0, n_1 + n_2 < N$ , то

$$(24) \quad \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P(n_1, n_2, t) + \\ + \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, t) + \mu_2 P(n_1, n_2 + 1, t) + \lambda P(n_1 - 1, n_2, t);$$

если  $n_1, n_2 > 0, n_1 + n_2 = N$ , то

$$(25) \quad \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} = -(\mu_1 + \mu_2)P(n_1, n_2, t) + \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, t) + \\ + \lambda P(n_1 - 1, n_2, t);$$

Блок-схема алгоритма (19)–(25) представлена на рис. 2.

Алгоритм составления уравнений Колмогорова в соответствии с методом, представленным в данной статье, сводится к вычислению (7) при различных значениях  $n_1, n_2$ . Блок-схема этого алгоритма представлена на рис. 3.

Для оценки временной асимптотической сложности алгоритмов введем следующие обозначения:  $A$  – число проходов первого цикла,  $B$  – число проходов второго цикла. Поскольку  $n_{1max} = n_{2max} = N$ , то число проходов в каждом цикле равно  $A = B = N$ . Общее число проходов равно числу уравнений в (3)  $(N^2 + 3N + 2)/2$ . Тогда временная сложность обоих алгоритмов одинакова и равна  $O(A \cdot B) = O(N^2)$  [5].

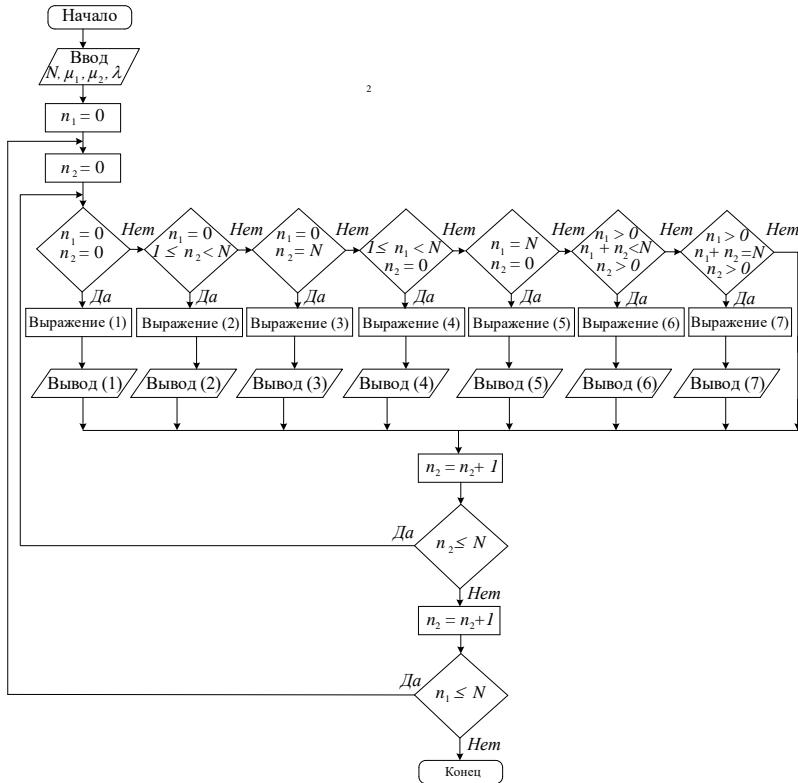


Рис. 2. Блок-схема алгоритма (19)–(25)

С точки зрения емкостной сложности (сложности по памяти), то она одинакова для обоих алгоритмов и равна  $O(A \cdot B) = O(N^2)$ , поскольку при каждом проходе записывается всего одно дифференциальное уравнение Колмогорова.

При этом в первом алгоритме для записи требуемого выражения имеется семь условных операторов «если». Проверка каждого условия в «лучшем варианте» занимает от 1 до 2 тактов условного процессора, в «худшем варианте» – от 10 до 20 тактов процессора. Во втором алгоритме присутствует только один условный оператор. Таким образом, выполнение первого алгоритма в «худшем варианте» предполагает использование на

$7 \cdot 20 - 20 = 120$  тактов условного процессора больше, в «лучшем варианте» количество тактов в обоих случаях равно. Таким образом, введение новых функций существенно уменьшает требуемый вычислительный ресурс, необходимый для выполнения поставленной задачи.

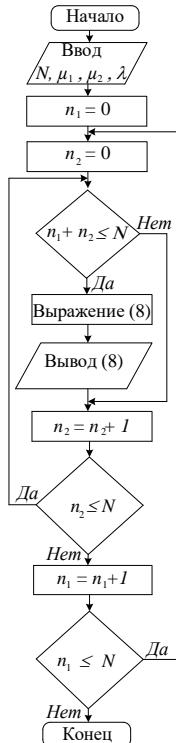


Рис. 3. Блок-схема нового алгоритма, использующего функции  $v_1(x, M)$  и  $v_2(x, K)$

Для определения эффективного по времени алгоритма также был проведен натурный эксперимент. Реализация обоих алгоритмов проведена на языке Python. Определение времени выполнения произведено с помощью литерала `%time it`. Для первого алгоритма получим время 9  $K$ , а во втором — 3  $K$ . Таким образом, за счет уменьшения общего числа итераций во втором

алгоритме значительно снизились вычислительные издержки, что говорит о временной эффективности предлагаемого алгоритма (таблица 2).

*Таблица 2. Результаты определения времени выполнения алгоритма*

<i>N</i>	10	20	30
Время выполнения алгоритма 1, с	0,001	1,05	2,9
Время выполнения алгоритма 2, с	0,001	0,35	0,97

## 7. Заключение

В данной работе предложен новый алгоритм построения прямой системы уравнений Колмогорова, существенно упрощающий анализ и расчет вероятностей состояний двухфазной СМО с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным распределением времени обслуживания на каждой фазе в переходном режиме. Разработанный алгоритм основывается на использовании новых функций, введенных авторами. В работе также проведен сравнительный анализ сложности ранее используемых алгоритмов и алгоритма, представленного авторами. Показано, что предлагаемый алгоритм требует меньших объемов вычислительных ресурсов и особенно эффективен при исследовании переходного режима СМО с большим числом заявок в системе.

## Приложение 1

Код программы построения системы уравнений Колмогорова для двухфазной СМО с пуассоновским входным потоком, экспоненциальным временем обслуживания на каждой фазе и ограниченным буфером в символьном пакете вычислений MAPLE17 в соответствии с разработанным методом:

```
restart:  
with(linalg):  
N := 4:
```

```

v1:=(x,m) -> evalf((1/2)*(abs(x-m+.5)+x-m+.5)/abs(x-m+.5), 2)
v2 := (x, k) -> evalf((1/2)*(abs(k-x-.5)+k-x-.5)/abs(k-x-.5), 2)
for n1 from 0 to N do for n2
    from 0 to N do
        if n1+n2 <= N then
            print("n1=", n1, "n2=", n2);
            print((Diff(P(n1,n2),
t))*v2(n1+n2,N+1)+(lambda*v2(n1+n2,
N)+mu[1]*v1(n1,1)+mu[2]*v1(n2,
1))*P(n1,n2,t)*v2(n1+n2,N+1)-
mu[1]*v1(n2,1)*v2(n1+n2,N+1)*P(n1+1,n2-1,t)-
mu[2]*v2(n1+n2,N)*P(n1,n2+1,t)-
lambda*v1(n1,1)*v2(n1+n2,N+1)*P(n1-1,
n2,t)=0)
        end if;
    end do;
end do;

```

Результаты построения системы дифференциальных уравнений Колмогорова для  $N=4$  в пакете символьных вычислений MAPLE17 в соответствии с разработанным методом:

$$\begin{aligned}
& \text{"n1="}, 0, \text{"n2="}, 0 \\
& 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(0, 0) \right) + 1.00 \lambda P(0, 0, t) - 1.0 \mu_2 P(0, 1, t) = 0 \\
& \text{"n1="}, 0, \text{"n2="}, 1 \\
& 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(0, 1) \right) + 1.0 \left( 1.0 \lambda + 1.0 \mu_2 \right) P(0, 1, t) - 1.00 \mu_1 P(1, 0, t) - 1.0 \mu_2 P(0, 2, t) = 0 \\
& \text{"n1="}, 0, \text{"n2="}, 2 \\
& 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(0, 2) \right) + 1.0 \left( 1.0 \lambda + 1.0 \mu_2 \right) P(0, 2, t) - 1.00 \mu_1 P(1, 1, t) - 1.0 \mu_2 P(0, 3, t) = 0 \\
& \text{"n1="}, 0, \text{"n2="}, 3 \\
& 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(0, 3) \right) + 1.0 \left( 1.0 \lambda + 1.0 \mu_2 \right) P(0, 3, t) - 1.00 \mu_1 P(1, 2, t) - 1.0 \mu_2 P(0, 4, t) = 0 \\
& \text{"n1="}, 0, \text{"n2="}, 4 \\
& 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(0, 4) \right) + 1.00 \mu_2 P(0, 4, t) - 1.00 \mu_1 P(1, 3, t) = 0 \\
& \text{"n1="}, 1, \text{"n2="}, 0 \\
& 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(1, 0) \right) + 1.0 \left( 1.0 \lambda + 1.0 \mu_1 \right) P(1, 0, t) - 1.0 \mu_2 P(1, 1, t) - 1.00 \lambda P(0, 0, t) = 0 \\
& \text{"n1="}, 1, \text{"n2="}, 1 \\
& 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(1, 1) \right) + 1.0 \left( 1.0 \lambda + 1.0 \mu_1 + 1.0 \mu_2 \right) P(1, 1, t) - 1.00 \mu_1 P(2, 0, t) - 1.0 \mu_2 P(1, 2, t) - 1.00 \lambda P(0, 1, t) = 0 \\
& \text{"n1="}, 1, \text{"n2="}, 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(1, 2) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_1 + 1.0\mu_2) P(1, 2, t) - 1.00\mu_1 P(2, 1, t) - 1.00\mu_2 P(1, 3, t) - 1.00\lambda P(0, 2, t) = 0 \\
 & \quad "n1="1, "n2="3 \\
 & 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(1, 3) \right) + 1.0 (1.0\mu_1 + 1.0\mu_2) P(1, 3, t) - 1.00\mu_1 P(2, 2, t) - 1.00\lambda P(0, 3, t) = 0 \\
 & \quad "n1="2, "n2="0 \\
 & 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(2, 0) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_1) P(2, 0, t) - 1.00\mu_2 P(2, 1, t) - 1.00\lambda P(1, 0, t) = 0 \\
 & \quad "n1="2, "n2="1 \\
 & 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(2, 1) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_1 + 1.0\mu_2) P(2, 1, t) - 1.00\mu_1 P(3, 0, t) - 1.00\mu_2 P(2, 2, t) - 1.00\lambda P(1, 1, t) = 0 \\
 & \quad "n1="2, "n2="2 \\
 & 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(2, 2) \right) + 1.0 (1.0\mu_1 + 1.0\mu_2) P(2, 2, t) - 1.00\mu_1 P(3, 1, t) - 1.00\lambda P(1, 2, t) = 0 \\
 & \quad "n1="3, "n2="0 \\
 & 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(3, 0) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_1) P(3, 0, t) - 1.00\mu_2 P(3, 1, t) - 1.00\lambda P(2, 0, t) = 0 \\
 & \quad "n1="3, "n2="1 \\
 & 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(3, 1) \right) + 1.0 (1.0\mu_1 + 1.0\mu_2) P(3, 1, t) - 1.00\mu_1 P(4, 0, t) - 1.00\lambda P(2, 1, t) = 0 \\
 & \quad "n1="4, "n2="0 \\
 & 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(4, 0) \right) + 1.00\mu_1 P(4, 0, t) - 1.00\lambda P(3, 0, t) = 0
 \end{aligned}$$

## Литература

1. БАРАБАНОВА Е.А., ВЫТОВТОВ К.А., ПОДЛАЗОВ В.С. *Двухкаскадные дуальные фотонные коммутаторы в расширенном схемном базисе* // Проблемы управления. – 2021. – № 1. – С. 69–81.
2. БАРАБАНОВА Е.А., ВЫТОВТОВ К.А. *Аналитический метод исследования поведения системы массового обслуживания при скачкообразно-изменяющихся потоках информации* // Физические основы приборостроения. – 2021. – Т. 10, №1(39). – С. 36–47.
3. ВИШНЕВСКИЙ В.М., ДУДИН А.Н., КЛИМЕНOK В.И. *Стochasticеские системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях*. – М.: Рекламно-издательский центр «ТЕХНОСФЕРА». – 2018. – 564 с.

4. ДУДИН С.А., ДУДИНА О.С. *Модель функционирования центра информационной и технической поддержки как двухфазная система массового обслуживания* // Проблемы передачи информации. – 2013. – Т. 49, №1. – С. 66–82. – DOI:10.1134/S0032946013010067.
5. КРУПКИЙ В.Н., ПЛИСКО В.Е. *Теория алгоритмов*. – М.: Академия, 2009. – 208 с.
6. САВИНОВ Ю.Г., ЩУКИН А.Н., ПОДГОРНОВ М.Д. *Математическая модель мультисервисного колл-центра с многоэтапным обслуживанием и дообслуживанием неприоритетных заявок* // Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ.Электрон. журн. – 2021. – №1. – С. 109–117.
7. GRIFFITHS J.D., LEONENKO G.M., WILLIAMS J.E. *The transient solution to  $M/Ek/1$  queue* // Operations Research Letters. – 2006. – Vol. 34. – P. 349–354.
8. GRIFFITHS J.D., LEONENKO G.M., WILLIAMS J.E. *Time-Dependent Analysis of Non-Empty  $M/Ek/1$  Queue* // Quality Technology of Quantitative Management Quantitative Management. – 2008. – Vol. 5, No. 3. – P. 309–320.
9. JACKSON R.R.P. *Queueing Systems with Phase Type Service* // Operational Research Society. – 1954. – Vol. 5, No. 4. – P. 109–120.
10. KEMPA W.M., PAPROCKA I. *Transient behavior of a queueing model with hyper-exponentially distributed processing times and finite buffer capacity* // Sensors. – 2022. – Vol. 22(24). – P. 9909. <https://doi.org/10.3390/s22249909>.
11. KLIMENOK V.I., VISHNEVSKY V. *A dual tandem queue with multi-server stations and losses* // Communications in Computer and Information Science. – 2016. – Vol. 608. – P. 316–325.
12. RUBINO G. *Transient analysis of Markovian queueing systems: A survey with focus on closed forms and uniformization* // Queueing Theory 2: Advanced Trends. – Wiley-ISTE: Hoboken, NJ, USA. – 2021. – P. 269–307.

13. SHIN YANG WOO, KIM DONG OK, MOON DUG HEE. *An approximate analysis of tandem queues with general blocking nodes* // Journal of the Korean Society for Industrial and Applied Mathematics. – 2022. – Vol. 26, Iss. 1. – P. 1–22.
14. VISHNEVSKY V., VYTOVTOV K., BARABANOVA E., SEMENOVA O. *Analysis of a MAP/M/1/N Queue with Periodic and Non-Periodic Piecewise Constant Input Rate* // Mathematics. – 2022. – Vol. 10(10). – 1684.

## ALGORITHM FOR CONSTRUCTING A SYSTEM OF KOLMOGOROV EQUATIONS FOR STUDYING THE TRANSITION REGIME OF TWO-PHASE QUEUING SYSTEMS WITH A LARGE NUMBER OF REQUESTS

**Konstantin Vytovtov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Doctor of Technical (Engineering) Science, Associate Professor (vytovtov\_konstan@mail.ru).

**Elizaveta Barabanova**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Doctor of Technical (Engineering) Science, Associate Professor (elizavetaalexb@yandex.ru).

**Vladimir Vishnevsky**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Doctor of Technical (Engineering) Science, Professor (vishn@inbox.ru).

**Svetlana Volkova**, Astrakhan State Technical University, PhD, Associate Professor, (svolkovav2017@gmail.com).

**Georgii Vytovtov**, Astrakhan State Technical University, Student, (georgii.vytovtov@gmail.com).

*Abstract: This work is devoted to the development of the Kolmogorov differential equations system constructing algorithm for a single-line queuing system with a Poisson input and phase service. The case of two phase system and an arbitrary finite number of customers in the system is considered. The new functions that significantly simplify the Kolmogorov differential equations system constructing algorithm and the system infinitesimal matrix are introduced. A comparative analysis of the complexity of previous algorithms and the algorithm presented by the authors is carried out too. The use of this algorithm will allow in the future to obtain analytical and numerical solutions of the main performance characteristics of the M/PH/1/n QS with a large number of applications in the transient operation mode.*

Keywords: a single-line queuing system, phase service, Kolmogorov differential equations system, algorithm complexity.

УДК 519.217.13

ББК 30в6

DOI: 10.25728/ubs.2023.105.4

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.В. Горбуновой.*

*Поступила в редакцию 09.03.2023.*

*Опубликована 30.09.2023.*

## УПРАВЛЕНИЕ ВНЕДРЕНИЕМ ИННОВАЦИЙ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕГЛАМЕНТАХ

Нинидзе Д. Л.<sup>1</sup>, Угольницкий Г. А.<sup>2</sup>, Усов А. Б.<sup>3</sup>  
(Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону)

Исследуется двухуровневая система управления внедрением инноваций в организациях с учётом условия их «жизнеспособности». Основная задача математического моделирования согласования частных и общественных интересов в моделях продвижения инноваций заключается в том, чтобы определить подходящую стратегию продвижения инноваций при условии получения максимального дохода лицами,двигающими инновации. Задача рассматривается в иерархической постановке. Имеется один субъект управления верхнего уровня (центр) и несколько субъектов нижнего уровня (агентов). За результат внедрения инноваций отвечает центр, а непосредственно их внедрением занимаются агенты. Центр управляет внедрением инноваций, используя различные информационные регламенты. Агенты продвигают инновации, на что получают средства от центра. При этом агенты несут личные расходы. Агенты имеют свой частный интерес, а именно, занимаются сторонней деятельностью, не связанной с продвижением инноваций, которая также приносит им доход. Указаны алгоритмы построения решений игр Гермейера при побуждении и принуждении. Численно решения строятся методом качественно репрезентативных сценариев имитационного моделирования. Проведены имитационные эксперименты, дан анализ полученных результатов.

Ключевые слова: игры Гермейера, побуждение, принуждение, имитационное моделирование, метод качественно репрезентативных сценариев, внедрение инноваций.

### 1. Введение

Под инновациями понимается использование новых технологий, видов продукции и услуг, приносящее в будущем дополнительный доход. Внедрение инноваций требует перестройки сложившегося производства, переподготовки работников, дополнительных затрат и одновременно связано с риском потерпеть

---

<sup>1</sup> Давид Леванович Нинидзе, аспирант ([davidnin@mail.ru](mailto:davidnin@mail.ru)).

<sup>2</sup> Геннадий Анатольевич Угольницкий, д. ф.-м. н., профессор ([ougoln@mail.ru](mailto:ougoln@mail.ru)).

<sup>3</sup> Анатолий Борисович Усов, д.т.н., доцент ([abusov@sfedu.ru](mailto:abusov@sfedu.ru)).

сиюминутные убытки. Единой эффективной стратегии по успешному внедрению инноваций до сих пор нет.

Среди имеющихся работ, посвящённых внедрению инноваций, выделим [4–7, 13, 19]. В [5] рассмотрены вопросы определения состава источников финансирования (государственные, собственные средства организаций, коммерческие) процесса внедрения инноваций, выбора модели финансирования (рыночная, корпоративно-государственная, кластерная, мезо-корпоративная). Также исследованы условия поддержки инновационной деятельности организации, сделан вывод о перспективах внедрения инноваций в современных условиях, когда финансовые рынки переживают глубокий кризис. В [4] исследуется несколько основных типов моделей финансирования (рыночная, корпоративно-государственная, кластерная, мезо-корпоративная), используемых при внедрении инновационных технологий, анализируются достоинства и недостатки каждой из них. В [13] предложена комплексная системно-динамическая модель рыночной диффузии инновационного продукта, состоящая из подмоделей: ядра, представляющего собой эпидемическую модель распространения инноваций, и вспомогательных системно-динамических моделей – модели временных параметров жизненного цикла инновации, модель ценообразования, модель управления рыночным продвижением продукта (рекламой), модель управления качеством продукта, модель конкурентного рынка. Предлагаются области использования данной комплексной модели. В [6] рассматривается задача моделирования сбалансированной системы показателей (ССП) предприятия, которая идентифицирует стратегию деятельности ИТ-компании, в том числе и по внедрению инноваций. Моделирование проводится на основе раскрашенных сетей Петри, что позволяет проводить «горизонтальный» и «вертикальный» анализ ССП по показателям, целям и перспективам как независимо друг от друга, так и во взаимосвязи. В [19] изучаются факторы, влияющие на процесс внедрения инноваций, и его результаты для всех типов инноваций (технологические и процессные, сервисные и производственные, административные), проводится систематический обзор существующих исследований по внедрению инноваций. Предлагаются три возможные программы исследований: а) рассмотрение индивидуальных факторов в качестве

основных показателей поведения человека при внедрении инноваций; б) исследование возможности того, что инновации изменяются в ходе их внедрения и что это может привести к различным формам результатов внедрения; в) раскрытие механизма внедрения организаций, которые постоянно принимают и внедряют инновации в течение длительного периода. В [7] рассматриваются общие проблемы управления инновациями, а также классифицируются задачи организационного управления инновационным развитием фирмы, приводится комплекс моделей и методов, позволяющих решать эти задачи. К их числу относятся: задача финансирования инновационного развития фирмы, задача управления организационными проектами, задача институционального управления, задача мотивации персонала, задача управления развитием персонала.

В настоящей работе задача моделирования процесса внедрения инноваций ставится и исследуется на основе цикла статей [8–11]. В этих работах с использованием [3, 14–16] предложен подход к исследованию сложных организационных систем, основанный на сведении задачи исследования системы управления к рассмотрению иерархической игры нескольких лиц.

Основная идея настоящей статьи состоит в использовании иерархического теоретико-игрового подхода при моделировании процесса внедрения инноваций. Имеется несколько иерархически упорядоченных агентов управления, причем во внедрении инноваций заинтересован только стратегически ориентированный агент управления верхнего уровня. Агенты нижних уровней руководствуются своими сиюминутными целями и обычно не заинтересованы в изменении текущего положения дел и, как следствие, во внедрении инноваций. В развитие ранее опубликованных работ проводится сравнительный анализ эффективности использования в процессе внедрения инноваций различных методов иерархического управления (принуждение, побуждение) в случае информационных регламентов игр Гермейера Г1 и Г2 [3]. Сравнительная оценка эффективности разных подходов к управлению проводится на основе анализа выигрыша агента управления верхнего уровня [3] и коэффициента системной согласованности [14].

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. В разделе 2 приводятся постановка стационарной задачи иерархического управления процессом внедрения инноваций и методы исследования предложенной модели при использовании разных информационных регламентов – разных механизмов управления субъектами нижнего уровня [11, 12]. Алгоритмы нахождения решений для разных информационных регламентов приведены в [8, 10]. В разделе 3 проводится аналитическое исследование модели в случае информационного регламента игры Гермейера Г1. В разделе 4 описаны алгоритмы построения решения с помощью метода качественно репрезентативных сценариев имитационного моделирования для игр Гермейера Г1 и Г2. Суть данного метода [21] состоит в том, что из всего множества допустимых управлений, мощность которого велика, можно выбрать небольшое число сценариев. Результаты реализации таких сценариев качественно различны, а последствия реализации других сценариев не дают ничего существенно нового. Раздел 5 посвящён численному моделированию задачи. В разделе 6 проводится сравнительный анализ полученных результатов имитационных экспериментов.

## **2. Математическая модель**

Для моделирования процесса внедрения инноваций предлагается двухуровневая модель, включающая агента управления верхнего уровня (центр), отвечающего за внедрение инноваций, и нескольких «близоруких» агентов управления нижнего уровня (агентов), которые стремятся к максимизации только своего текущего выигрыша и не заинтересованы во внедрении инноваций, если центр их не стимулирует.

Первым своё управление выбирает центр, агенты выбирают свои стратегии поведения, когда выбор центра уже известен. Центру необходимо определить подходящую стратегию продвижения инноваций при условии получения им максимального дохода и выбрать метод иерархического воздействия на агентов. В качестве методов иерархического управления в модели исполь-

зуются принуждение и побуждение. При побуждении центр воздействует на целевую функцию агента, а при принуждении – на область допустимых управлений агента.

Предлагаемая в настоящей работе модель развивает результаты работы [11], в которой предложена модель устойчивого развития организационных систем при внедрении инноваций. В отличие от [11], для решения задачи продвижения инноваций используются разные информационные регламенты, а именно информационные регламенты игр Гермейера Г1 и Г2 при побуждении и принуждении. Проводится сравнительный анализ результатов с точки зрения достижения необходимого уровня инновационного развития предприятия. При численном исследовании применяется метод качественно репрезентативных сценариев имитационного моделирования.

При побуждении центр создает агентам условия, при которых им выгодно способствовать достижению цели центра. При принуждении центр, сужая область допустимых управлений агентов, заставляет их способствовать достижению своей цели, не оставляя им других возможностей [12]. В игре Гермейера Г1 центр определяет оптимальные ответы агентов на каждое свое управление, а затем объявляет им о своем решении и стратегии поведения. Только после этого агенты выбирают стратегию своего поведения одновременно, что приводит к равновесию Нэша в игре агентов. В игре Гермейера Г2 центр устанавливает для агентов стратегии наказания, если те откажутся с ним сотрудничать, и поощрения, если будут сотрудничать. Результатом наказания являются гарантированные выигрыши для агентов. Стратегия поощрения определяется при оптимизации целевой функции центра одновременно и по его управлению, и по управлению агентов, но с дополнительными условиями: выигрыши агентов должны быть больше их гарантированных выигрышей. Затем центр объявляет агентам свои стратегии поведения с обратной связью по управлению – наказание, поощрение. Агентам экономически выгоднее сотрудничать с центром, поэтому они выбирают стратегию поощрения [12].

Приведём вначале математическую постановку задачи в случае побуждения. Агенты непосредственно занимаются продви-

жением инноваций, за что при побуждении получают вознаграждение от центра. При этом каждый агент несёт некоторые расходы. Кроме того, агенты имеют частный интерес, не связанный с внедрением инноваций, который также приносит им доход.

Целевые функции центра и  $n$  агентов отражают их доходы и имеют следующий вид:

– при побуждении для центра (ведущего)

$$(1) \quad J_0(v, u) = x(k(S_v, S_u)) - S_u \rightarrow \max_u;$$

– для  $i$ -го агента (ведомого),  $i=1, 2, \dots, n$ ;

$$(2) \quad J_i(v, u) = g_i(T_{max} - v_i) + y(k(S_v, S_u)) - h(v_i) \rightarrow \max_{v_i}.$$

Здесь  $u_i$  – количество ресурсов центра, которые он тратит на стимулирование внедрения инноваций  $i$ -м агентом (управление центра при побуждении);  $v_i$  – время, которое затрачивает  $i$ -й агент на внедрение инноваций (управление  $i$ -го агента);  $n$  – количество агентов;  $v = (v_1, \dots, v_n)$ ;  $u = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $S_v = \sum_{i=1}^n v_i$ ,  $S_u = \sum_{i=1}^n u_i$ ;  $k(S_v, S_u)$  – качество использования программно-аппаратного обеспечения (ПАО) комплекса планирования производственных ресурсов (КППР) [20], которое зависит от управлений агентов и центра. Под внедрением инноваций в модели понимается внедрение и использование ПАО КППР;  $x(k(S_v, S_u))$  – выгода центра от ПАО КППР;  $g_i(T_{max} - v_i)$  – доход агента от частной деятельности;  $y(k(S_v, S_u))$  – выгода агентов от использования ПАО КППР;  $h(v_i)$  – личные расходы агента во время внедрения инноваций.

Планирование производственных ресурсов (ППР) [20] – это система программного обеспечения, предназначенная для повышения эффективности, результативности и координации производства, закупок, отгрузки, контроля запасов и учёта затрат на производственном предприятии. Ожидается, что использование ППР улучшит производительность предприятия, оборот запасов, отслеживание партий и обслуживание клиентов. Однако внедрение ППР затруднено, поскольку оно требует, чтобы сотрудники в различных областях предприятия выполняли новые, взаимозависимые задачи.

Ограничения на управления агентов и центра при побуждении соответственно имеют следующий вид ( $i = 1, 2, \dots, n$ ):

$$(3) \quad v_{min} \leq v_i \leq v_{max},$$

$$(4) \quad u_{min} \leq u_i \leq u_{max}.$$

Здесь  $v_{min}$ ,  $v_{max}$ ,  $u_{min}$ ,  $u_{max}$  – известные постоянные величины.

Для обеспечения успешного развития системы требуется обеспечение её «жизнеспособности», под которой подразумевается сохранение некоего целостного или интегративного свойства, отражающего сущность системы. В данном случае условие «жизнеспособности» системы состоит в достижении определённого уровня внедрения инноваций и имеет вид

$$(5) \quad k_{min} \leq k(S_v, S_u) \leq k_{max}; \quad k_{min}, k_{max} = const.$$

В отличие от побуждения, где центр управляет своими ресурсами  $u$ , при принуждении он воздействует на области допустимых управлений агентов, устанавливая нижний предел времени  $q$  для времени  $v_i$  агентов. При доверительных отношениях центра с агентами он не тратит ресурсы на контроль агентов, и его целевая функция имеет вид

$$(6) \quad J_0(v, q) = x(k(S_v, S_u)) - S_u \rightarrow \max_q.$$

В общем случае центр тратит ресурсы на контроль агентов, и его целевая функция имеет вид:

$$(7) \quad J_0(v, q) = x(k(S_v, S_u)) - S_u - w(S_q) \rightarrow \max_q.$$

Целевые функции агентов в обоих случаях имеют вид (2).

Ограничения на управления при принуждении имеют вид

$$(8) \quad q_i \leq v_i \leq v_{max},$$

$$(9) \quad 0 \leq q_i \leq v_{max}.$$

Здесь величины  $u_i = const$  заданы,  $i = 1, 2, \dots, n$ , так как при принуждении центр управляет областью допустимых управлений агентов, а не своими ресурсами;  $q = (q_1, \dots, q_n)$ ,  $q_i$  – нижний предел времени, который устанавливает центр для времени  $v_i$  агента. Время  $v_i$  агент тратит на процесс внедрения инноваций, поэтому  $q_i \leq v_i$ ,  $S_q = \sum_{i=1}^n q_i$ ,  $w(S_q)$  – выпуклая возрастающая функция затрат на административный контроль агентов. При принуждении решается задача (2), (5)–(9), а при побуждении – задача (1)–(5).

Проведём идентификацию функций, входящих в (1)–(9), на основе [9, 11, 20]. Агенты управляют временем, которое они тратят на внедрение инноваций. При небольших усилиях агентов

(малом времени, затрачиваемом на внедрение инноваций), согласно [20], происходит резкий рост производства – фаза подъёма качества использования ПАО КППР в производстве. Дальнейшие усилия агентов лишь незначительно повышают качество использования ПАО КППР. Поэтому в качестве функции  $k(S_v, S_u)$  выбрана возрастающая выпуклая функция вида  $k(S_v, S_u) = C_1 S_v^\alpha \cdot S_u^\beta$ ;  $0 < \alpha, \beta < 1$ .

Пусть  $z = k(S_v, S_u)$ , тогда  $x(k(S_v, S_u)) = x(z)$ ,  $y(k(S_v, S_u)) = y(z)$ . Функции  $x(z)$  и  $y(z)$  отражают дополнительный доход центра и агентов от использования ПАО КППР. Они рассматриваются как производственные функции. Отметим, что в исследованиях отдельных отраслей и регионов наиболее известна производственная функция Кобба – Дугласа [2]:  $Y = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta$ , где  $Y$  – объем производства;  $K$  – затраты капитала;  $L$  – затраты труда;  $A$  – технологический коэффициент;  $\alpha$  – константа (коэффициент эластичности выпуска по капиталу);  $\beta$  – константа (коэффициент эластичности выпуска продукции по затратам труда).

Данная функция является одной из самых простых форм двухфакторной производственной функции и в разных вариациях была применена для различных целей. Так, в [18] рассматривается и определяется подходящая производственная модель Кобба – Дугласа для измерения производственного процесса в некоторых отраслях обрабатывающей промышленности Бангладеш. В [1] проведено исследование по применению производственной функции Кобба – Дугласа к оценке потенциала имитационных стратегий российских ИТ-компаний, что позволило сгруппировать компании по критерию эффективности.

Итак, в качестве производственных функций для  $x(z)$  и  $y(z)$  берётся функция Кобба – Дугласа:

$$x(z) = (1 - p_1) r k^\gamma (S_v, S_u), y(z) = \frac{p_1}{n} r k^\gamma (S_v, S_u),$$

т.е.

$$x(z) = (1 - p_1) r C_1^\gamma S_v^{\alpha\gamma} S_u^{\beta\gamma}, y(z) = \frac{p_1}{n} r C_1^\gamma S_v^{\alpha\gamma} S_u^{\beta\gamma}.$$

Принято, что сумма  $\alpha\gamma + \beta\gamma$  меньше единицы, но близка к ней, что характеризует постоянную отдачу от масштаба произ-

водства. Здесь величины  $(1 - p_1)$  и  $p_1 \in [0,1]$  определяют, какую часть дохода получат центр и агенты от производства в результате внедрения инноваций,  $r, \gamma$  — константы.

Агент тратит часть своего времени на частную деятельность, не связанную с внедрением инноваций. Функция  $g_i(T_{max} - v_i)$  отражает доход  $i$ -го агента от частной деятельности. Вид этой функции у разных агентов различен, что соответствует различным видам деятельности каждого агента. Зависимость предполагается линейной, а функция — убывающей:  $g_i(T_{max} - v_i) = d_i \cdot (T_{max} - v_i)$ , где  $T_{max}$  — максимальное время, которое агент тратит в день на трудовую деятельность,  $d_i = \text{const}$ .

Функция  $h(v_i)$  отражает расходы агента на транспорт, питание, вспомогательные инструменты и т.д. У всех агентов одинаковый вид этой функции. В личные расходы агентов входят постоянные и переменные издержки. В начале личные расходы агентов резко растут из-за переменных издержек, так как необходимо приобрести вспомогательные инструменты, учебные пособия и т.д. для процесса внедрения инноваций. В дальнейшем рост личных расходов становится более плавным благодаря тому, что остаются только постоянные издержки. Поэтому в качестве функции  $h(v_i)$  выбрана возрастающая по своему аргументу выпуклая вверх функция вида  $h(v_i) = l \cdot v_i^\lambda$ ;  $l, \lambda$  — константы, причём постоянная  $l$  характеризует величину личных вложений агентов во внедрение инноваций,  $0 < \lambda < 1$ .

Функция  $w(S_q)$  отражает затраты центра на административный контроль агентов. Чем больше нижний предел времени  $q_i$ , которое агент может тратить на внедрение инноваций, тем больше затраты центра на административный контроль. Использованы функции трёх видов: линейная  $w(S_q) = C_2 S_q$ , квадратичная  $w(S_q) = C_2 S_q^2$  и вида  $w(S_q) = C_2 \sqrt{S_q}$ . Обозначим

$$a_1 = (1 - p_1)rC_1^\gamma, \delta = \alpha\gamma, \omega = \beta\gamma, a_2 = \frac{p_1}{N}rC_1^\gamma S_q^\vartheta,$$

где  $a_1, a_2$  — технологические коэффициенты,  $\delta$  — коэффициент эластичности по труду,  $\omega$  — коэффициент эластичности по капиталу,  $\vartheta = \left\{ \frac{1}{2}, 1, 2 \right\}$ .

Целевые функции субъектов управления в результате примут вид:

– центра при побуждении

$$(10) J_0 = a_1 S_v^\delta S_u^\omega - S_u \rightarrow \max_u;$$

– центра при принуждении

$$(11) J_0 = a_1 \cdot S_v^\delta \cdot S_u^\omega - S_u - C_2 S_q^\vartheta \rightarrow \max_q;$$

–  $i$ -го агента,  $i = 1, 2, \dots, n$

$$(12) J_i = d_i \cdot (T_{max} - v_i) + a_2 \cdot S_v^\delta \cdot S_u^\omega - l \cdot v_i^\lambda \rightarrow \max_{v_i}.$$

Далее исследуется модель (8)–(12), (3)–(5), представляющая собой задачу нелинейной оптимизации при наличии ограничений с учётом иерархии в отношениях между субъектами управления.

Центр обеспечивает необходимый уровень внедрения инноваций, используя информационные регламенты игр Гермейера: без обратной связи (Г1) при побуждении или принуждении и с обратной связью по управлению (Г2) при побуждении или принуждении. Алгоритмы построения равновесий изложены в [8, 10].

### 3. Аналитическое исследование модели

Для частного вида входных функций модели в случае однородных агентов ( $v_1 = v_2 = \dots = v_n = v$ ,  $u_1 = u_2 = \dots = u_n = u$ ,  $q_1 = q_2 = \dots = q_n = q$ ) решение игры Г1 при побуждении находится аналитически.

Пусть  $\delta, \omega, \lambda, \vartheta = \frac{1}{2}$ . Тогда целевые функции субъектов при побуждении принимают вид:

– центра

$$(13) J_0 = a_1 \cdot (\sqrt{n \cdot v} \cdot \sqrt{n \cdot u}) - n \cdot u \rightarrow \max_u;$$

–  $i$ -го агента  $i = 1, 2, \dots, n$

$$(14) J_i = d \cdot (T_{max} - v) + a_2 \cdot (\sqrt{n \cdot v} \cdot \sqrt{n \cdot u}) - l \cdot \sqrt{v} \rightarrow \max_v.$$

Определим оптимальные стратегии агентов при заданном управлении центра. Для этого решим уравнение

$$(15) \frac{\partial J_i}{\partial v} = -d + a_2 \cdot \left( \frac{n\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \right) - \frac{l}{2\sqrt{v}} = 0.$$

Отсюда

$$(16) v^0 = \frac{(a_2^2 \cdot n^2 \cdot u - 2 \cdot a_2 \cdot l \cdot n\sqrt{u} + l^2)}{4d^2}.$$

Следовательно, если

$$(17) \frac{\partial^2 J_i}{\partial v^2} = -a_2 \cdot \left( \frac{n\sqrt{u}}{4\sqrt{v^3}} \right) + \frac{l}{4\sqrt{v^3}} < 0$$

и выполнены (3), (4) или (8), (9), то (16) есть точка максимума (14) и оптимальная стратегия агента задаётся формулой

$$v^* = \begin{cases} v_{min} & \text{если } v^0 < v_{min}, \\ v^0 & \text{если } v_{min} \leq v^0 \leq v_{max}, \\ v_{max} & \text{если } v^0 > v_{max}. \end{cases}$$

Введем обозначения

$$\widetilde{u_1} = \left( \frac{l+2 \cdot d \cdot \sqrt{v_{min}}}{a_2 \cdot n} \right)^2; \quad \widetilde{u_2} = \left( \frac{l+2 \cdot d \cdot \sqrt{v_{max}}}{a_2 \cdot n} \right)^2.$$

Тогда в предположении, что  $u_{min} \leq \widetilde{u_1} \leq \widetilde{u_2} \leq u_{max}$ , с учётом (16), (17) получим

$$v^* = \begin{cases} v_{min} & \text{если } u_{min} \leq u < \widetilde{u_1}, \\ v^0 & \text{если } \widetilde{u_1} \leq u \leq \widetilde{u_2}, \\ v_{max} & \text{если } \widetilde{u_2} < u \leq u_{max}. \end{cases}$$

При нахождении оптимальной стратегии центра рассматриваются три случая:  $u_{min} \leq u < \widetilde{u_1}$  ( $\text{т о г д а } v^* = v_{min}$ ),  $\widetilde{u_1} \leq u \leq \widetilde{u_2}$  ( $v^* = v^0$ ) и  $\widetilde{u_2} < u \leq u_{max}$  ( $v^* = v_{max}$ ).

При  $u_{min} \leq u < \widetilde{u_1}$ , приравнивая к нулю первую производную целевой функции центра по его управлению и решая полученное уравнение, получим  $u_1^0 = \frac{a_1^2 v_{min}}{4}$ . Эта точка будет точкой максимума (13), если  $u_{min} \leq u^0 < \widetilde{u_1}$ . В противном случае точкой максимума будет точка  $\widetilde{u_1}$ .

Если  $\widetilde{u_1} \leq u \leq \widetilde{u_2}$ , то, действуя аналогично, получим, что есть одна стационарная точка  $u_2^0 = \left( \frac{a_1 \cdot l}{2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot n - 4 \cdot d} \right)^2$ , но это точка минимума и, следовательно, максимум (13) на этом отрезке достигается в одном из его концов.

Если  $\widetilde{u_2} < u \leq u_{max}$ , то опять имеется одна стационарная точка  $u_3^0 = \frac{a_1^2 v_{max}}{4}$ , которая является точкой максимума при условии  $\widetilde{u_2} < u_3^0 \leq u_{max}$ .

Таким образом, решением игры Гермейера Г1 при побуждении в зависимости от входных данных является одна из восьми точек:  $(v_{min}; u_{min})$ ,  $(v_{min}; u_1^0)$ ,  $(v_{min}; \widetilde{u_1})$ ,  $(v^0; \widetilde{u_1})$ ,  $(v^0; \widetilde{u_2})$ ,  $(v_{max}; \widetilde{u_2})$ ,  $(v_{max}; \widetilde{u_3})$ ,  $(v_{max}; u_{max})$ .

В случае входных функций общего вида решение строится методом качественно репрезентативных сценариев имитационного моделирования [21].

#### 4. Метод качественно репрезентативных сценариев имитационного моделирования

При имитационном моделировании важную роль играет выбор рассматриваемых сценариев имитации. Поскольку полный перебор областей допустимых управлений субъектов невозможен, то необходимо предложить и обосновать разумный способ выбора рассматриваемых сценариев игры. Такой способ предлагает метод качественно репрезентативных сценариев имитационного моделирования (КРС ИМ) [21]. Он основан на идее о том, что для оценки последствий управляющих воздействий на систему достаточно рассмотреть небольшое число сценариев, отражающих характерные качественно различные пути развития системы.

В [21] дано определение множества качественно репрезентативных сценариев (QRS). Пусть  $\Omega = V_1 \times \dots \times V_n \times R_1 \times \dots \times R_n$  – множество допустимых управляющих воздействий центра ( $R_i$ ) и  $n$  агентов ( $V_i$ ). При побуждении  $R_i = U_i$ , при принуждении  $R_i = Q_i$ ;  $V = V_1 \times \dots \times V_n = \{(v_1, v_2, \dots, v_n) : v_i \in V_i\}$ ;  $R = R_1 \times \dots \times R_n = \{(r_1, r_2, \dots, r_n) : r_i \in R_i\}$ .

**Определение.** Множество

$$\begin{aligned} QRS &= R^{QRS} \times V^{QRS} = R_1^{QRS} \times \dots \times R_n^{QRS} \times V_1^{QRS} \times \dots \times V_n^{QRS} = \\ &= \{(v, r) = (v_1, \dots, v_n; r_1, \dots, r_n) : v_i \in V_i^{QRS} \subset V_i; r_i \in R_i^{QRS} \subset R_i\} \end{aligned}$$

называется множеством QRS с точностью  $\Delta$ , если:

- (a) для  $\forall (v, r)^{(i)}, (v, r)^{(j)} \in QRS \quad |J_0^{(i)} - J_0^{(j)}| > \Delta$ ;
- (b) для  $\forall (v, r)^{(l)} \in QRS \exists (v, r)^{(j)} \in QRS : |J_0^{(l)} - J_0^{(j)}| \leq \Delta$ .

Здесь  $J_0^{(i)}, J_0^{(j)}, J_0^{(l)}$  – выигрыш центра;  $J_0^{(s)} = J_0(v^{(s)}, r^{(s)})$ ,  $s = i, j, l$ .

Постоянная  $\Delta$  должна быть достаточно малой и выбирается исходя из содержательного смысла модели. Процесс построения множества QRS является итерационным. Ниже приведены алгоритмы построения решений для указанных выше моделей

при разных информационных регламентах с использованием метода КРС ИМ на основе [21].

Алгоритм построения решения игры Г1 методом КРС ИМ.

1. Начальное множество  $QRS^{(k)}$  имеет вид ( $k = 0$ )

$$QRS^{(k)} = (R^{QRS})^{(k)} \times (V^{QRS})^{(k)};$$

$$(R^{QRS})^{(k)} = ((R_1^{QRS})^{(k)} \times (R_2^{QRS})^{(k)} \times \dots \times (R_n^{QRS})^{(k)});$$

$$(V^{QRS})^{(k)} = ((V_1^{QRS})^{(k)} \times (V_2^{QRS})^{(k)} \times \dots \times (V_n^{QRS})^{(k)})$$

Тогда при побуждении

$$(R_i^{QRS})^{(k)} \equiv (U_i^{QRS})^{(k)} \equiv \{u_1^{(k)}; u_2^{(k)}; u_3^{(k)}\};$$

$$(V_i^{QRS})^{(k)} \equiv \{v_1^{(k)}; v_2^{(k)}; v_3^{(k)}\};$$

$$u_1^{(k)} = u_{min}; u_2^{(k)} = (u_{max} + u_{min})/2; u_3^{(k)} = u_{max},$$

$$v_1^{(k)} = v_{min}; v_2^{(k)} = (v_{max} + v_{min})/2; v_3^{(k)} = v_{max};$$

а при принуждении

$$(R_i^{QRS})^{(k)} \equiv (Q_i^{QRS})^{(k)} \equiv \{q_1^{(k)}; q_2^{(k)}; q_3^{(k)}\};$$

$$q_1^{(k)} = 0; q_2^{(k)} = v_{max}/2; q_3^{(k)} = v_{max};$$

$$(V_i^{QRS})^{(k)} \equiv \{v_1^{(k)}; v_2^{(k)}; v_3^{(k)}\};$$

$$v_1^{(k)} = q^{(k)}; v_2^{(k)} = (v_{max} + q^{(k)})/2; v_3^{(k)} = v_{max}.$$

2. Во множестве  $QRS^{(k)}$  получается  $3^{2n}$  элементов и все они проверяются на выполнение обоих требований в определении множества QRS. В результате при необходимости начальное множество  $QRS^{(k)}$  сужается или пополняется новыми элементами.

3. Фиксируется текущая стратегия центра из  $(R^{QRS})^{(k)}$ .

4. Путем перебора репрезентативных стратегий агентов из  $(V^{QRS})^{(k)}$  ищется их оптимальный ответ на выбранную центром стратегию.

5. Текущая стратегия центра и оптимальный ответ агентов, полученный в пункте 4, подставляются в (10) или (11). Дающие больший выигрыш значения сохраняются.

6. Если просмотрены не все стратегии центра из  $(R^{QRS})^{(k)}$ , то необходимо перейти на пункт 3 алгоритма. В противном случае найдена лучшая пара стратегий из QRS. Она и есть текущее приближение к решению игры.

7. Изменяются множества QRS центра и агентов ( $k = k + 1$ ) – они измельчаются в окрестности построенного равновесия следующим образом. При побуждении для центра  $r = u$ , а при принуждении  $r = q$ :

Если  $(r_i^*)^{(k-1)} = r_1^{(k-1)}$ , то  $r_1^{(k)} = r_1^{(k-1)}$ ;  $r_2^{(k)} = \frac{r_1^{(k-1)} + r_2^{(k-1)}}{2}$ ;  
 $r_3^{(k)} = r_2^{(k-1)}$ . Если  $(r_i^*)^{(k-1)} = r_2^{(k-1)}$ , то  $r_1^{(k)} = \frac{r_1^{(k-1)} + r_2^{(k-1)}}{2}$ ;  
 $r_2^{(k)} = r_2^{(k-1)}$ ;  $r_3^{(k)} = \frac{r_2^{(k-1)} + r_3^{(k-1)}}{2}$ . Если  $(r_i^*)^{(k-1)} = r_3^{(k-1)}$ , то  
 $r_1^{(k)} = r_2^{(k-1)}$ ;  $r_2^{(k)} = \frac{r_2^{(k-1)} + r_3^{(k-1)}}{2}$ ;  $r_3^{(k)} = r_3^{(k-1)}$ .

Для агентов новые множества  $QRS^{(k)}$  определяются аналогично.

8. Если на некоторой итерации, т.е. при некотором значении  $k$  окажется, что  $(r_i^*)^{(k)} = (r_i^*)^{(k-1)}$ ;  $(v_i^*)^{(k)} = (v_i^*)^{(k-1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , то решение игры методом QRS построено. В противном случае переход на пункт 3 алгоритма. За конечное число итераций решение методом QRS будет построено.

Алгоритм построения решения игры Г2 методом КРС ИМ.

1. Аналогично пункту 1 алгоритма нахождения решения игры Г1, сформулированному выше, строится начальное множество  $QRS^{(k)}$ , которое при необходимости сужается или пополняется новыми элементами.

2. Находятся значения стратегии наказания для каждого агента, если он отказывается сотрудничать с центром. Для этого вначале при фиксированном управлении центра из  $(R^{QRS})^{(k)}$  путём перебора стратегий из  $(V^{QRS})^{(k)}$  находится равновесия Нэша для каждого управления центра –  $NE^{QRS}((R^{QRS})^{(k)})$ . Затем путём полного перебора находится гарантированный выигрыш  $i$ -го агента, если он отказывается сотрудничать с центром – величина

$$L_i^P = \max_{v_i \in NE^{QRS}((R^{QRS})^{(k)})} \min_{r_i \in (R^{QRS})^{(k)}} J_i(v_i, r_i).$$

3. Путем полного перебора стратегий центра из  $(R^{QRS})^{(k)}$  и агентов из  $(V^{QRS})^{(k)}$  находится максимум (10), (11) при выполненных условиях  $J_i > L_i^P, i = 1, 2, \dots, n$ . Величины, его доставляющие, и образуют  $k$ -е приближение к решению игры Г2. Обозначим их  $(v^{R(k)}, r^{R(k)})$ .

4. Аналогично пункту 7 алгоритма нахождения решения игры Г1, сформулированному выше, изменяются множества QRS центра и агентов.

5. Если на некоторой итерации окажется, что  $(r_i^R)^{(k)} = (r_i^R)^{(k-1)}$ ;  $(v_i^R)^{(k)} = (v_i^R)^{(k-1)}$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ , то решение игры Г2 методом QRS построено. В противном случае переход на пункт 2 алгоритма. За конечное число итераций решение игры Г2 методом QRS будет построено.

## 5. Результаты имитационных экспериментов

С помощью имитационного моделирования исследуется модель (10)–(12), (5) с учётом (3), (4) или (8), (9). Были проведены имитационные эксперименты в соответствии с приведёнными алгоритмами. Входные данные получены на основе [17, 20]. Имитационные эксперименты проводились на компьютере с процессором AMD Ryzen 5 3550H с оперативной памятью 8 Гб на объектно-ориентированном языке программирования C++. Среднее время одного эксперимента для построения множества КРС ИМ составило менее секунды. Анализ полученных результатов проводился на основе:

а) суммарного дисконтированного выигрыша центра (10), (11), что отвечает принципу Ю.Б. Гермейера анализа системы с позиции центра;

б) значения коэффициента системной согласованности [14]

$K = J_0^*/J_{max}$ , где  $J_{max} = \max_{r \in R} \max_{v \in V} J_0(v, r)$ ,  $J_0^* = J_0(v^*, r^*)$  – выигрыш центра. Коэффициент системной согласованности показывает, можно ли отказаться от иерархической структуры системы. Чем он ближе к единице, тем система лучше согласована, и необходимость в наличии центра меньше.

В работе использовались оценочные экспертные данные, поэтому числовая идентификация модели носит тестовый характер и обеспечивает разумное соотношение размерностей величин для качественных выводов при анализе результатов моделирования.

Было проведено порядка 200 численных экспериментов в соответствии со сформулированными ранее алгоритмами построения равновесий. При этом варьировались величины  $C_1, r, c, l, p_1$ ,

$\alpha, \beta, \gamma, C_2$ .  $C_1$  от 0,2 до 15;  $r$  от 4 до 61;  $d_1$  от 45 до 300 руб./час;  $d_2$  от 90 до 600 руб./час;  $d_3$  от 135 до 900 руб./час;  $l$  от 3 до 99;  $p_1$  от 0,25 до 0,825;  $\alpha$  от 0,1 до 0,87;  $\beta$  от 0,444 до 0,84;  $\gamma$  от 0,8 до 0,99;  $C_2$  от 300 до 3000 руб./час.

В таблице 1 приведены входные параметры проведенных имитационных экспериментов, в первом столбце записан номер примера. Кроме того, величина  $\gamma$  в примерах 5, 9 и 14 равна 0,89. 0,83 и 0,97 соответственно, а в примерах 17 и 19 – 0,92 и 0,94. В остальных примерах  $\gamma = 0,99$ .

Таблица 1. Входные параметры численных экспериментов

№	$C_1$	$R$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$l$	$p_1$	$\alpha$	$\beta$	$C_2$
1	8	20	200	400	600	3	1/3	0,4	0,6	1000
2	1	55	245	490	735	50	1/2	0,6	0,6	555
3	15	20	200	400	600	3	1/3	0,4	0,6	1000
4	10	15	200	400	600	3	1/3	0,4	0,6	1000
5	2	6	45	90	135	10	1/4	0,7	0,7	623
6	10	25	200	400	600	3	1/3	0,4	0,6	1000
7	10	20	100	200	300	3	1/3	0,4	0,6	1000
8	10	20	150	300	450	3	1/3	0,4	0,6	1000
9	0,5	13	50	100	150	70	4/7	0,55	0,84	324
10	10	20	250	500	750	3	1/3	0,4	0,6	1000
11	10	20	300	600	900	3	1/3	0,4	0,6	1000
12	1	56	257	514	771	39	0,5	0,6	0,6	627
13	10	20	200	400	600	3	0,3	0,4	0,6	1000
14	0,2	11	67	134	201	41	0,8	0,87	0,77	787
15	10	20	200	400	600	3	0,8	0,4	0,6	1000
16	10	20	200	400	600	3	1/3	0,1	0,6	1000
17	0,4	4	93	186	279	47	1/2	0,8	0,8	931
18	10	20	200	400	600	3	1/3	0,3	0,6	1000
19	2,4	8	203	406	609	77	0,3	0,69	0,68	856
20	10	20	200	400	600	3	1/3	0,4	0,45	1000

Результаты имитационных экспериментов для входных данных из таблицы 1 без учёта затрат на административный контроль со стороны центра приведены в таблице 2. Здесь и далее номер примера соответствует номеру примера из таблицы 1;

$J_0$  – выигрыш центра,  $K$  – коэффициент системной согласованности при побуждении ( $Imp$ ) и принуждении ( $Com$ ) для решения игр Гермейера  $\Gamma 1$  и  $\Gamma 2$ .

Таблица 2. Результаты численных экспериментов

№	<i>Imp</i>				<i>Com</i>			
	$\Gamma 1$		$\Gamma 2$		$\Gamma 1$		$\Gamma 2$	
	$J_0$	$K$	$J_0$	$K$	$J_0$	$K$	$J_0$	$K$
1	63584	0,93	68305	1	67078	1	67078	1
2	28170	0,41	67906	1	36051	1	36051	1
3	64844	0,92	68770	0,98	68833	0,99	68835	1
4	48279	0,93	50966	0,99	50497	1	50501	1
5	4382	0,6	6370	0,88	5868	1	5870	1
6	86538	0,98	86816	0,98	87168	1	87168	1
7	68145	0,97	69275	0,99	68830	1	68835	1
8	68205	0,97	68482	0,98	68834	1	68835	1
9	-223	-0,11	1966	1	1966	1	1966	1
10	66612	0,95	68771	0,98	68830	1	68835	1
11	66612	0,95	69275	0,99	68830	1	68835	1
12	28955	0,42	69414	1	36788	1	36788	1
13	68458	0,97	69399	0,98	69747	1	69751	1
14	5548	0,98	5645	1	4341	1	4341	1
15	14609	0,92	15339	0,96	14750	1	14750	1
16	33411	0,78	42807	1	23774	1	23774	1
17	-2716	-1,3	189	0,09	1023	1	1019	0,99
18	62664	0,93	66263	0,98	56352	1	56352	1
19	7895	0,47	12936	0,77	15435	0,99	15402	1
20	8330	0,28	27023	0,93	21099	1	21099	1

В таблице 3 приведены значения индекса системной согласованности для решений игр Гермейера  $\Gamma 1$  и  $\Gamma 2$  для входных данных из таблицы 1 в случае разного вида функций затрат на административный контроль со стороны центра.

Таблица 3. Результаты экспериментов с затратами на административный контроль

№	$w(S_q) = C_2 S_q$		$w(S_q) = C_2 S_q^2$		$w(S_q) = C_2 \sqrt{S_q}$	
	Г1	Г2	Г1	Г2	Г1	Г2
	$K$	$K$	$K$	$K$	$K$	$K$
1	0,65	1	0,65	1	0,89	1
2	0,28	1	-6,16	1	0,89	1
3	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99
4	0,65	0,94	0,63	0,94	0,9	0,96
5	0,37	0,86	0,38	0,87	0,55	0,86
6	0,86	0,95	0,82	0,95	0,96	0,98
7	0,95	0,94	0,94	0,94	0,95	0,97
8	0,83	0,94	0,81	0,94	0,95	0,97
9	-0,68	1	-0,67	1	-0,14	1
10	0,82	0,94	0,81	0,94	0,92	0,97
11	0,68	0,94	0,64	0,94	0,92	0,97
12	0,23	1	-6,83	1	0,88	1
13	0,83	0,94	0,81	0,94	0,92	0,97
14	-0,16	1	-0,16	1	-0,03	1
15	0,56	0,72	-1,7	-0,11	0,82	0,86
16	0,69	1	0,7	1	0,72	1
17	-6,65	0,56	-17,7	0,56	-4,5	0,56
18	0,6	1	0,6	1	0,87	1
19	0,07	0,87	0,05	0,87	0,76	0,9
20	0,09	1	-1,5	1	0,67	1

В таблице 4 приведены результаты счёта без учёта условия гомеостаза («жизнеспособности») для входных данных из таблицы 1.

В таблице 5 приведены значения индекса системной согласованности для входных данных из таблицы 1 в случае разного вида функций затрат на административный контроль.

Таблица 4. Результаты численных экспериментов при отсутствии условия гомеостаза («жизнеспособности»)

№	Imp				Com			
	Г1		Г2		Г1		Г2	
	$J_0$	$K$	$J_0$	$K$	$J_0$	$K$	$J_0$	$K$
1	79717	0,6	131342	1	67078	1	67078	1
2	28170	0,41	67906	1	36051	1	36051	1
3	217224	0,84	257671	1	128867	1	128867	1
4	73599	0,6	121889	1	62454	1	62454	1
5	4676	0,21	22175	1	13059	1	13059	1
6	179306	0,84	213149	1	107091	1	107091	1
7	147867	0,88	167519	1	84773	1	84773	1
8	140445	0,84	167519	1	84773	1	84773	1
9	-223	-0,11	1966	1	1966	1	1966	1
10	103132	0,62	167519	1	84773	1	84773	1

Таблица 5. Результаты экспериментов с затратами на административный контроль при отсутствии условия гомеостаза

№	$w(S_q) = C_2 S_q$		$w(S_q) = C_2 S_q^2$		$w(S_q) = C_2 \sqrt{S_q}$	
	Г1	Г2	Г1	Г2	Г1	Г2
1	0,65	1	0,65	1	0,9	1
2	0,51	1	0,5	1	0,89	1
3	0,75	1	0,67	1	0,95	1
4	0,52	1	0,51	1	0,89	1
5	0,16	1	0,17	1	0,67	1
6	0,71	1	0,66	1	0,94	1
7	0,76	1	0,76	1	0,93	1
8	0,67	1	0,66	1	0,92	1
9	-0,68	1	-0,67	1	-0,14	1
10	0,66	1	0,66	1	0,92	1

## 6. Анализ результатов

Анализ проведённых экспериментов позволил сделать ряд выводов.

1. В игре Гермейера Г1 при побуждении коэффициент системной согласованности меняется от значения  $K = 0,28$  (пример 20) до  $K = 0,98$  (пример 14). В случае принуждения в игре Г1 согласованность системы увеличивается, и коэффициент системной согласованности в ряде примеров возрастает до единицы (примеры 1, 4–20). В этом случае необходимость в иерархическом управлении исчезает.

2. В игре Г2 для большинства входных данных коэффициент системной согласованности близок к единице при побуждении (примеры 1–4, 6–16, 18, 20), а при принуждении строго равен единице (примеры 1–16, 18–20).

3. В игре Г2 центр получает больший выигрыш, чем в игре Г1. При этом разница достигает 58% (пример 12), 22% (пример 16) и 70% (пример 20). При принуждении в ряде примеров выигрыши центра и коэффициент системной согласованности одинаковы для обоих информационных регламентов (примеры 1, 6, 14–20).

4. Выигрыши агентов, центра и коэффициент системной согласованности с ростом эффективности использования ПАО КППР, т.е. коэффициентов  $C_1$  и  $r$ , вначале растут (примеры 1, 4, 6). При дальнейшем росте коэффициентов в силу условия (5) выигрыши агентов, центра и коэффициент системной согласованности  $K$  начинают вести себя хаотично в случае побуждения (примеры 1, 3), а в случае принуждения становятся постоянными (пример 20).

5. Выигрыши агентов прямо пропорционален, а выигрыши центра и коэффициент системной согласованности в случае побуждения – обратно пропорциональны доходу агентов от частной деятельности. В случае принуждения выигрыши центра и коэффициент системной согласованности  $K$  при увеличении  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  не меняются (примеры 7, 8, 10, 11).

6. При увеличении личных вложений агентов во внедрение инноваций их выигрыши падают, а выигрыши центра и коэффициент системной согласованности не меняются (пример 11).

7. При увеличении части дохода, который получают агенты от производства в результате использования ПАО КППР (коэффициент  $p_1$ ), меняются значения выигрышей центра и агентов, а также коэффициент системной согласованности. При принуж-

дении коэффициент системной согласованности неизменен и равен единице. Выигрыши агентов прямо пропорциональны значению  $p_1$ , коэффициент системной согласованности (в случае побуждения) и выигрыш центра – обратно пропорциональны.

8. При увеличении коэффициентов эластичности по труду и по капиталу увеличиваются выигрыши центра и агентов, коэффициент системной согласованности, кроме игры Г2, где коэффициент системной согласованности равен или близок к единице независимо от коэффициентов эластичности.

9. В играх Г1 и Г2 при принуждении без затрат на административный контроль агентов коэффициент системной согласованности часто близок к единице (примеры 1–20). Однако при учёте затрат на административный контроль агентов ситуация иная. В игре Г1 коэффициент системной согласованности меняется от  $K = 0,65$  до  $K = 0,99$  (примеры 1, 3). В игре Г2 коэффициент системной согласованности в большинстве примеров высокий и меняется от  $K = 0,93$  до  $K = 1$  (примеры 1–4, 6–14). Минимальная согласованность интересов  $K = 0,56$  наблюдается в примере 17.

10. При принуждении с учётом затрат на административный контроль агентов меняется и выигрыш центра. В игре Г1 центр получает меньший выигрыш. Разница достигает 95% (пример 19). В игре Г2 в большинстве примеров центр также получает меньший выигрыш. Разница достигает в этом случае 44% (пример 17). Если центр не накладывает ограничения на управления агентов, то выигрыши с затратами и без них на административный контроль агентов примерно одинаковы (пример 3).

11. Выигрыш центра и коэффициент системной согласованности выше в случае квадратичной функции контроля центром агентов. При увеличении затрат центра на контроль агентов его выигрыш и коэффициент системной согласованности ожидаемо уменьшаются.

12. В случае отказа от учёта условия гомеостаза (отсутствии ограничений на уровень внедрения инноваций ( $k(S_v, S_u)$ )) коэффициент системной согласованности для достаточно широкого класса входных функций заметно понижается при принуждении с затратами на административный контроль и побуждении в игре

Гермейера Г1. Например, для входных данных примера 5 при побуждении он уменьшается в 3 раза, а при принуждении – примерно в 2 раза. В игре Гермейера Г2 при побуждении и при принуждении при отсутствии условия гомеостаза коэффициент системной согласованности равен единице (примеры 1–10). И центр, и агенты в этом случае могут выбрать более выгодные для себя стратегии, не учитывая необходимость внедрения инноваций.

## 7. Заключение

Математическое моделирование процесса внедрения инноваций в организации помогает выбрать информационный регламент и метод иерархического управления, которые обеспечивают эффективность процесса внедрения и лучшую системную согласованность. В процессе исследования математической модели при различных информационных регламентах были сделаны следующие выводы и рекомендации по внедрению инноваций в организации:

- при учёте затрат центра на административный контроль использование побуждения для него в большинстве случаев даёт больший выигрыш, чем принуждение;
- для успешного внедрения инноваций необходим учёт условия гомеостаза;
- успешное внедрение инноваций возможно как при использовании побуждения, так и принуждения. При этом центр должен обладать значительными ресурсами (административными или экономическими) для воздействия на агентов.

## Литература

1. АКЕРМАН Е.Н., МИХАЛЬЧУК А.А., СПИЦЫН В.В., ЧИСТЯКОВА Н.О. *Оценка имитационного потенциала ИТ-компаний при помощи производственной функции Кобба–Дугласа* // ВЕСТНИК НГУЭУ. – 2019. – №4. – С. 130–142.

2. АФАНАСЬЕВ А.А. *Использование производственной функции Кобба – Дугласа, построенной по панельным данным, при анализе обрабатывающих производств России* // Креативная экономика. – 2022. – Т. 16, №6. – С. 2363–2380.
3. ГОРЕЛИК В.А., ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления*. – М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.
4. КУЛИКОВ И.Н. *Модели финансирования инновационных технологий* // Управление экономическими системами: электронный научный журнал. – 2015. – №8. – URL: [www.uecs.ru/innovacii-investicii/item/3679-2015-08-28-07-07-34](http://www.uecs.ru/innovacii-investicii/item/3679-2015-08-28-07-07-34).
5. МАКАРОВ А.С., САЗАНОВА Д.А. *Источники и модели финансирования инновационной деятельности организации*. – М.: Изд-во ООО «Издательский дом Финансы и Кредит», 2011. – №18 – С. 42–46.
6. МУНТЬЯНОВА А.А. *Моделирование инновационной составляющей сбалансированной системы показателей ИТ-компании* // Инженерный вестник Дона. – 2017. – №2. – URL: [www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2017/4217](http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2017/4217).
7. НОВИКОВ Д.А., ИВАЩЕНКО А.А. *Модели и методы организационного управления инновационным развитием фирмы*. – М.: ЛЕНАНД, 2006. – 336 с.
8. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Алгоритмы решения дифференциальных моделей иерархических систем управления* // Автоматика и телемеханика. – 2016. – №5. – С. 148–158.
9. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Динамические модели согласования частных и общественных интересов при продвижении инноваций* // Математическая теория игр и её приложения. – 2019. – №11(1). – С. 96–114.
10. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Равновесия в моделях иерархически организованных динамических систем с учётом требований устойчивого развития* // Автоматика и телемеханика. – 2014. – №6. – С. 86–102.
11. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Теоретико-игровая модель согласования интересов при инновационном развитии корпорации* // Компьютерные исследования и моделирование. – 2016. – №8(4). – С. 673–684.

12. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. Управление устойчивым развитием активных систем. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – С. 658–704.
13. ШИШАЕВ М.Г. Комплексная системно-динамическая модель рыночной диффузии инновационного продукта // Труды института системного анализа Российской Академии наук. – М.: 2009. – С. 223–244.
14. BASAR T., OLSDER G.Y. *Dynamic Non-Cooperative Game Theory*. – SIAM, 1999.
15. BASAR T., ZHU Q. *Prices of Anarchy, Information, and Cooperation in Differential Games* // *Dynamic Games and Applications*. – 2011. – No. 1(1). – P. 50–73.
16. DOCKNER E., JORGENSEN S., LONG N.V., SORGER G. *Differential Games in Economics and Management Science*. – Cambridge University Press, 2000.
17. EDISON H., BIN ALI N., TORKAR R. *Towards innovation measurement in the software industry* // *J. of Systems and Software*. – Netherlands: Elsevier, 2013.
18. HOSSAIN HM., MAJUMDER A., BASAK T. *An Application of Non-Linear Cobb-Douglas Production Function to Selected Manufacturing Industries in Bangladesh* // *Open Journal of Statistics*. – 2012. – Vol. 2, No. 4. – P. 460–468.
19. JUNGSU KIM, GOO HYEOK CHUNG. *Implementing innovations within organizations: a systematic review and research agenda* // *Innovation: Organization & Management*. – 2017. – Vol. 19, Iss. 3 – P. 372–399.
20. KLEIN K.J., BUHL CONN A., SPEER SORRA J. *Implementing computerized technology: An organizational analysis* // *J. of Applied Psychology* – USA: American Psychological Association Inc., 2001.
21. OUGOLNITSKY G.A., USOV A.B. *Computer Simulations as a Solution Method for Differential Games* // *Computer Simulations: Advances in Research and Applications* / Eds.: M.D. Pfef-fer, E. Bachmaier. – N.Y.: Nova Science Publishers, 2018. – P. 63–106.

## MANAGEMENT OF INNOVATION IMPLEMENTATION USING VARIOUS INFORMATION STRUCTURES

**David Ninidze**, Southern Federal University, Rostov-on-Don, post-graduate student (davidnin@mail.ru).

**Gennady Ougolnitsky**, Southern Federal University, Rostov-on-Don, professor (ougoln@mail.ru).

**Anatoliy Usov**, Southern Federal University, Rostov-on-Don, associate professor (abusov@sfedu.ru).

*Abstract: A two-level management system for the innovation implementation in organizations is studied, taking into account the conditions of their "life-ability". The main task of mathematical modeling of the coordination of private and public interests in innovation implementation models is determining the appropriate strategy for the promotion of innovations. The problem is considered in a hierarchical formulation. There is one top-level management entity (center) and several lower-level entities (agents). The center is responsible for the result of innovation implementation, and agents are directly involved in implementation. The center manages the innovation implementation using various information regulations. Agents promote innovations and they receive funds from the center. At the same time, agents bear personal expenses. Agents have their own private interest, namely, they are engaged in third-party activities, that also bring them income. These activities are not related to the innovation implementation. Algorithms for constructing solutions to Germeyer's games in motivation and compulsion are indicated. Numerical solutions are constructed using the method of qualitatively representative simulation scenarios. Simulation experiments were conducted, the analysis of the results obtained was given.*

Keywords: Germeyer's games, motivation, compulsion, simulation modeling, method of qualitatively representative scenarios, innovation implementation.

УДК 519.83

ББК 22.18

DOI: 10.25728/ubs.2023.105.5

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В.М. Вишневским.*

*Поступила в редакцию 12.04.2023.  
Опубликована 30.09.2023.*

## РАЗРАБОТКА РЕКОМЕНДАТЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ ПРИ ВЫБОРЕ ПРОДУКТОВ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕМ

Квятковская И. Ю.<sup>1</sup>, Во Тхи Хуен Чанг<sup>2</sup>,  
Чан Куок Тоан<sup>3</sup>

(Астраханский государственный технический  
университет, Астрахань)

Рекомендательные системы используются для прогнозирования предпочтений пользователей в отношении определенного продукта или услуги, а также для рекомендации пользователю подходящих продуктов или услуг. Многие методы, используемые в интеллектуальном анализе данных, связанные с классификацией или построением ассоциативных правил, применяются в рекомендательных системах. Предлагается новая рекомендательная модель, сочетающая ассоциативные правила и меры индекса статистической импликации. В предлагаемой модели меры поддержки и достоверности используются для создания ассоциативных правил, а мера индекса статистической импликации используется для фильтрации набора правил и ранжирования рекомендаций. Предложенные модель и алгоритмы использованы для построения рекомендательного результата по известному набору данных.

**Ключевые слова:** рекомендательная система, рекомендательная модель, анализ статистической импликации, индекс статистической импликации, алгоритм Apriori, ассоциативные правила.

В настоящее время с быстрым развитием интернета и социальных сетей количество информации, к которой люди имеют доступ, увеличивается. Каждый день пользователи сталкиваются с многочисленными источниками информации: информацией, которой обмениваются по электронной почте, статьями в Интернете, сообщениями в социальных сетях, рекламной информацией с сайтов электронной коммерции [1–3, 5, 6, 13]. С увеличением всевозможной информации становится все труднее выбирать полезную информацию для принятия решений пользователями компьютеров и смарт-устройств. Рекомендательные системы, которые широко применяются во многих об-

<sup>1</sup> Ирина Юрьевна Квятковская, д.т.н., профессор (i.kvyatkovskaya@astu.org).

<sup>2</sup> Во Тхи Хуен Чанг (vthstrang@mail.ru).

<sup>3</sup> Чан Куок Тоан, к.т.н. (hoaivan219@mail.ru).

ластях, рассматриваются как решение, помогающее пользователям эффективно выбирать информацию. Рекомендательная система способна автоматически анализировать информацию, классифицировать, выбирать и предоставлять пользователям интересующие продукты, товары и услуги посредством применения статистических и интеллектуальных методов (экспертные системы, нечеткие системы, системы поддержки принятия решений) [1–3]. Таким образом, исследование рекомендательных систем является актуальным.

Одной из основных функций рекомендательных систем является оценка рейтингов товаров, которые не были рассмотрены пользователями. Эта оценка обычно основывается на собственных или других отзывах пользователей. Для рекомендации будут использоваться продукты с наивысшими оценками.

Формализуем задачу рекомендации: пусть  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_M\}$  – множество пользователей, а  $I = \{i_1, i_2, \dots, i_N\}$  – множество продуктов. Функция  $f(u_a, i_j)$  измеряет релевантность (или рейтинг) продукта  $i_j$  для пользователя  $u_a$ ,  $f: U \times I \rightarrow R$ , где  $R$  – упорядоченное множество. Для каждого пользователя  $u_a \in U$  необходимо найти такой продукт  $i_j \in I$ , чтобы функция  $f(u_a, i_j)$  имела максимальное значение:

$$(1) \quad \forall u_a \in U, i_j = \arg \max_{i_k \in I} f(u_a, i_k).$$

Задача рекомендации встроена в общую модель, как показано на рис. 1.

Среди рекомендательных моделей самыми успешными являются модели совместной фильтрации, такие как:

- рекомендательная модель совместной фильтрации на основе пользователей;
- рекомендательная модель совместной фильтрации на основе продукта;
- рекомендательная модель совместной фильтрации на основе ассоциативных правил.



Рис. 1. Общая схема рекомендации

Все модели учитывают, что взаимное влияние пары пользователей симметрично. На практике роли и взаимодействия между двумя пользователями часто асимметричны, что может создать определенную предвзятость в рекомендациях. Так более опытный пользователь-эксперт имеет большее влияние на других, менее опытный эксперт или новичок не сможет достичь противоположного эффекта. Существующие рекомендательные системы сосредоточены только на логическом решении вопроса о наличии или отсутствии взаимосвязи между пользователем и продуктами, однако не используют импликативное отношение «если А, то В» между ними, определяя степень соответствия на основе статистических данных о взаимозависимостях между пользователями и выбранными продуктами. В данном случае импликативное отношение рассматривается как отношение, основанное на знаниях о связях между пользователем и элементами данных, необходимых для выработки рекомендации. Использование асимметричного подхода представляет большой интерес для минимизации систематической ошибки из-за указанного выше различия в результатах рекомендаций.

Для учета асимметричного влияния пользователей и оценки импликативной связи между пользователем и продуктами используется метод анализа статистической импликации, или ме-

тод импликативного статистического анализа (англ. «Statistical Implicative Analysis (SIA)», [8–10]).

Данный метод анализа данных позволяет обнаружить правила  $a \rightarrow b$  ( $a$  – атрибуты объектов, принадлежащих множеству  $A$ ,  $b$  – атрибуты объектов во множестве  $B$ ) в асимметричной форме «если  $a$ , то почти  $b$ » или «в какой степени  $b$  соответствует импликации  $a$ ». Целью метода является обнаружение тенденций в наборе атрибутов (переменных) с использованием меры индекса статистической импликации, формула которого приведена ниже. В отличие от других методов анализа данных, метод анализа статистической импликации ориентирован на асимметричные соотношения между переменными (когда привлекательная ценность правила  $a \rightarrow b$  отличается от привлекательной ценности правила  $b \rightarrow a$ ). Мера импликации используется для обнаружения правил, которые имеют сильную взаимосвязь импликации между атрибутами левой стороны и атрибутами правой части. Анализ статистической импликации применяется во многих областях, таких как образование, психология, информационные технологии и т. д.

Предположим, что набор  $E$  имеет  $n$  объектов или продуктов. Пусть  $A \subset E$  – подмножество объектов, удовлетворяющих атрибутам  $a$ ;  $B \subset E$  – подмножество объектов, удовлетворяющих атрибутам  $b$ ;  $\bar{A}$  (соответственно  $\bar{B}$ ) является дополнением  $A$  (соответственно  $B$ );  $n_A = |A|$ ,  $n_B = |B|$  – количество элементов множеств  $A$  и  $B$ ; число контрпримеров  $n_{A\bar{B}} = |A \cap \bar{B}|$  – это число объектов, которые удовлетворяют свойству  $a$ , но не удовлетворяют свойству  $b$ . Пусть  $X$  и  $Y$  – два случайных набора с количеством элементов  $n_X = n_A$  и  $n_Y = n_B$  соответственно. Предположим, что в процессе выборки случайная величина  $|X \cap \bar{Y}|$  следует распределению Пуассона с параметром

$$(2) \quad \lambda = \frac{n_A \cdot n_{\bar{B}}}{n}.$$

Правило  $a \rightarrow b$  называется приемлемым для заданного порога  $\alpha$ , если

$$(3) \quad Pr[|X \cap \bar{Y}| \leq |A \cap \bar{B}|] \leq \alpha,$$

где  $Pr$  – вероятность случайной величины.

Рассмотрим случай  $n_{\bar{B}} \neq 0$ . Тогда согласно распределению Пуассона вероятность случайной величины  $|X \cap \bar{Y}|$  определяется следующим образом:

$$(4) \quad Q(A, \bar{B}) = \left( |X \cap \bar{Y}| - \frac{n_A(n - n_B)}{n} \right) / \sqrt{\frac{n_A(n - n_B)}{n}}.$$

В эксперименте наблюдаемое значение  $q(A, \bar{B})$  для  $Q(A, \bar{B})$  определяется следующим образом:

$$(5) \quad q(A, \bar{B}) = \left( n_{A\bar{B}} - \frac{n_A(n - n_B)}{n} \right) / \sqrt{\frac{n_A(n - n_B)}{n}}.$$

Это значение называется индексом статистической импликации.

С использованием метода анализа статистической импликации разработана рекомендательная модель, основанная на индексе статистической импликации (ИСИ). Модель рассматривает взаимосвязь между набором условных атрибутов и набором атрибутов решения на основе асимметричного подхода. Модель выбирает ассоциативные правила, которые отфильтрованы по величине ИСИ, чтобы рекомендовать пользователю продукты. Рекомендательная модель определяется следующим образом:

$$(6) \quad RS = \{U, I, Ru, F\},$$

где  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_M\}$  – множество из  $M$  пользователей;  $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_N\}$  – набор из  $N$  продуктов (атрибутов) для каждого пользователя, где  $I_{co} = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  – набор условных продуктов (атрибутов), определяющих условия для выработки рекомендации;  $I_{re} = \{i_{k+1}, \dots, i_N\}$  – набор продуктов (атрибутов), определяющих решения;  $Ru = \{r_1, r_2, \dots, r_R\}$  – набор ассоциативных правил, выбранных для модели;  $F: U \times I \rightarrow Ru$  – вычислительные функции для поиска ассоциативных правил  $Ru_a = \{r_1, r_2, \dots, r_{Ra}\}$ , где  $RA$  – число ассоциативных правил с рекомендательной ценностью для пользователя  $u_a$ , вычисленной на основе меры индекса статистической импликации.

Процесс работы рекомендательной модели, основанной на ИСИ, представлен на рис. 2. В основе ее лежит анализ транзакций – информации, хранящейся в базах данных продавцов товаров, о выборе (покупке) пользователем  $u \in U$  товара  $i \in I$ .



Рис. 2. Процесс работы рекомендательной модели на основе меры индекса статистической импликации

На основе предлагаемой рекомендательной модели разработана процедура для поддержки принятия решения по выбору продуктов для рекомендации пользователю.

*Входные данные:* набор данных транзакции (извлекаются из базы данных о пользователях и продуктах); набор значений условных атрибутов ( $I_{co}$ ) пользователя  $u_a$ ; набор продуктов (атрибутов), определяющих решения  $I_{re} = \{i_{k+1}, \dots, i_N\}$ .

*Выходные данные:* набор ассоциативных правил, поддерживающих выбор значения атрибута решения.

В процедуре выделены 4 главных этапа.

Этап 1. Создать множество правил ассоциации  $Ru$  на основе атрибута решения из набора данных транзакций.

Этап 2. Произвести определение значений параметров статистической импликации для множества правил ассоциации.  $n$ ;  $n_a$ ;  $n_b$ ;  $n_{A\bar{B}}$ .

Этап 3. Произвести расчет значения ИСИ для каждого ассоциативного правила  $r_j$ , принадлежащего множеству правил  $Ru$ .

Этап 4. Выбрать набор рекомендательных правил для пользователя  $u_a$ .

4.1. Для каждого правила ассоциации на основе атрибута решения правила  $r_j$ , принадлежащего набору правил  $R_u$ , выполнить: если  $\langle\text{Значение атрибутов левой части правила } r_j\rangle \subseteq \langle\text{Множеству значений } I_c\rangle$ , то поместить правило ассоциации  $r_j$  в набор рекомендательных правил для пользователя  $u_a$ .

4.2. Сортировать набор рекомендательных правил для пользователя  $u_a$  в соответствии с ИСИ.

4.3. Выбрать правила с наивысшим значением ИСИ для рекомендации пользователю  $u_a$ .

*Конец.*

Для реализации этапа 1 разработан *алгоритм генерации ассоциативных правил на основе атрибутов решения*, основанный на алгоритме генерации ассоциативных правил Apriori [4] и примененный для правосторонних ассоциативных правил, содержащих атрибуты решения.

Сначала с использованием порога меры поддержки (англ. Support) ( $min\_sup$ ) для поиска часто встречающихся наборов атрибутов осуществляется поиск набора из одного атрибута ( $L_1$ ). Далее  $L_1$  используется для нахождения набора из двух атрибутов ( $L_2$ ) и так до тех пор, пока набор из  $p$  атрибутов ( $L_p$ ) больше не будет найден.

Далее на основе порога меры достоверности (англ. Confidence) ( $min\_conf$ ) формируются правила ассоциации рекомендательной модели из часто встречающихся атрибутов.

*Псевдокод алгоритма генерации правила ассоциации на основе атрибутов решения.*

**Входные данные:** транзакции о пользователях и продуктах)  $T$ ,  $I_c$  – набор условных продуктов (атрибутов), определяющих условия для выработки рекомендации;  $I_r$  – набор продуктов (атрибутов), определяющих решения;  $min\_sup$ ,  $min\_conf$  – пороговые значения показателей «поддержка» и «достоверность», характеризующих ассоциативные правила.

**Выходные данные:** набор ассоциативных правил для рекомендательной модели.

*Начало*

Шаг 1. Просмотреть весь набор транзакций  $T$ , чтобы определить поддержку (меру Support)  $S$  (процент транзакций, содержащих определенный набор данных) для набора из одного продукта:

$$(7) \quad S_a = \frac{\text{Количество транзакций, содержащих } a}{|T|},$$

где  $a$  – заданный продукт,  $|T|$  – общее количество транзакций, равное количеству пользователей. Если в базе данных по каждому пользователю хранится единственная транзакция, то  $|T| = M$ .

Далее, сравнивая  $S_a$  с минимальным пороговым значением  $min\_sup$ , отобрать подмножество наборов из одного продукта ( $L_1$ ).

Шаг 2. Далее, используя набор  $L_{p-1}$ , полученный на предыдущем шаге, сгенерировать  $L_p$  – подмножество наборов из  $p$  продуктов, используя для отбора заданное минимальное пороговое значение  $min\_sup$ .

Шаг 3. Повтор действия с шага 2 до тех пор, пока сгенерированный набор продуктов не будет пуст.

Окончательно получим  $L = \{L_1, L_2, \dots, L_p\}$  – множество наборов продуктов.

Шаг 4. Разбить каждый набор  $L_t \in L$  ( $t \in \{1, \dots, p\}$ ) на элементарные одноэлементные непустые подмножества  $V \subset L_t$ .

Шаг 5. Для каждого непустого подмножества  $V \subset L_t$  сгенерировать правила  $Ru_r = \{V \rightarrow (L_t \setminus V) \mid (L_t \setminus V) \in I_r\}$ . Вычислить  $Conf(V \rightarrow (L_t \setminus V)) \geq min\_conf$ , где  $Conf(V \rightarrow (L_t \setminus V))$  – достоверность ассоциативного правила  $V \rightarrow (L_t \setminus V)$ , определяемая по формуле:

$$(8) \quad Conf(V \rightarrow (L_t \setminus V)) = \frac{S(V)}{S(L_t)},$$

где  $S(L_t)$  – поддержка набора  $L_t$ ;  $S(V)$  – поддержка набора  $V$ .

Конец.

**Пример 1.** Используем набор из трех продуктов  $I = \{i_1, i_2, i_3\}$ . Зададим  $I_c = \{i_1, i_2\}$  – набор условных продуктов (атрибутов), определяющих условия для выработки рекомендации,  $I_r = \{i_3\}$  – набор продуктов (атрибутов), определяющих ре-

шения. Например,  $i_1 = \{1; 2; 3\}$ ;  $i_2 = \{0,5; 1,0; 1,5\}$ ,  $i_3 = \{A; B\}$  (таблица 1).

Таблица 1. Набор исходных данных

№ транзакции	Продукты		
	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1	2	1,0	A
2	1	1,5	A
3	3	0,5	B
4	3	0,5	B
5	2	1,0	A
6	1	1,5	A
7	1	1,5	A
8	2	1,0	A
9	3	0,5	B
10	2	1,0	A

Применение алгоритма генерации правила ассоциации на основе атрибута решения с заданными  $min\_sup = 0,01$  и  $min\_conf = 0,5$  включает следующие шаги:

Найти среди транзакций часто встречающиеся наборы из одного элемента, вычислить поддержку  $S$  для каждого набора. Результат вычисления представлен в таблице 2.

Таблица 2. Результат вычисления поддержки для набора из одного элемента

Набор из 1 элемента	Поддержка $S$
{i1 = 1}	0,3
{i1 = 2}	0,4
{i1 = 3}	0,3
{i2 = 1,0}	0,4
{i2 = 1,5}	0,3
{i2 = 0,5}	0,3
{i3 = A}	0,7
{i3 = B}	0,3

Сравнить значение поддержки с заданным  $min\_sup = 0,01$ . Результат формирования набора  $L_1$  представлен в таблице 3.

Таблица 3. Формирование  $L_1$

Набор из 1 элемента	Поддержка
{i1 = 1}	0,3
{i1 = 2}	0,4
{i1 = 3}	0,3
{i2 = 1,0}	0,4
{i2 = 1,5}	0,3
{i2 = 0,5}	0,3
{i3 = A}	0,7
{i3 = B}	0,3

Найти часто встречающиеся наборы из двух элементов. Вычислить поддержку  $S$  для 2-элементного набора. Результаты вычисления представлены в таблице 4.

Таблица 4. Результаты вычисления поддержки для набора из двух элементов

Набор из 2 элементов	Поддержка $S$
{i1 = 1; i1 = 2}	0,0
{i1 = 1; i1 = 3}	0,0
{i1 = 1; i2 = 1,0}	0,0
{i1 = 1; i2 = 1,5}	0,3
{i1 = 1; i2 = 0,5}	0,0
{i1 = 1; i3 = A}	0,3
{i1 = 1; i3 = B}	0,0
{i1 = 2; i1 = 3}	0,0
{i1 = 2; i2 = 1,0}	0,4
{i1 = 2; i2 = 1,5}	0,0
{i1 = 2; i2 = 0,5}	0,0
{i1 = 2; i3 = A}	0,4
{i1 = 2; i3 = B}	0,0
{i1 = 3; i2 = 1,0}	0,0
{i1 = 3; i2 = 1,5}	0,0
{i1 = 3; i2 = 0,5}	0,3
{i1 = 3; i3 = A}	0,0
{i1 = 3; i3 = B}	0,3
{i2 = 1,0; i2 = 1,5}	0,0
{i2 = 1,0; i2 = 0,5}	0,0
{i2 = 1,0; i3 = A}	0,4

Таблица 4 (продолжение)

{i2 = 1,0; i3 = B}	0,0
{i2 = 1,5; i2 = 0,5}	0,0
{i2 = 1,5; i3 = A}	0,3
{i2 = 1,5; i3 = B}	0,0
{i2 = 0,5; i3 = A}	0,0
{i2 = 0,5; i3 = B}	0,3
{i3 = A; i3 = B }	0,0

Выбрать наборы, сравнивая значение поддержки с заданным  $min\_sup = 0,01$ . Результат формирования  $L_2$  представлен в таблице 5.

Таблица 5 Формирование  $L_2$

Набор из 2 элементов	Поддержка
{i1 = 1; i2 = 1,5}	0,3
{i1 = 1; i3 = A}	0,3
{i1 = 2; i2 = 1,0}	0,4
{i1 = 2; i3 = A}	0,4
{i1 = 3; i2 = 0,5}	0,3
{i1 = 3; i3 = B}	0,3
{i2 = 1,0; i3 = A}	0,4
{i2 = 1,5; i3 = A}	0,3
{i2 = 0,5; i3 = B}	0,3

Найти часто встречающиеся наборы из трёх элементов. Вычислить поддержку  $S$  для 3-элементного набора. Результаты вычисления представлены в таблице 6.

Таблица 6. Результаты создания частого набора из трёх элементов

Набор из 3 элементов	Поддержка $S$
{i1 = 1; i2 = 1,5; i3 = A}	0,3
{i1 = 1; i2 = 1,5; i3 = B}	0,0
{i1 = 1; i2 = 1,0; i3 = A}	0,0
{i1 = 1; i2 = 1,0; i3 = B}	0,0
{i1 = 1; i2 = 0,5; i3 = A}	0,0
{i1 = 1; i2 = 0,5; i3 = B}	0,0

Таблица 6 (продолжение)

{i1 = 2; i2 = 1,0; i3 = A}	0,3
{i1 = 2; i2 = 1,0; i3 = B}	0,0
{i1 = 2; i2 = 1,5; i3 = A}	0,0
{i1 = 2; i2 = 1,5; i3 = B}	0,0
{i1 = 2; i2 = 0,5; i3 = A}	0,0
{i1 = 2; i2 = 0,5; i3 = B}	0,0
{i1 = 3; i2 = 0,5; i3 = A}	0,0
{i1 = 3; i2 = 0,5; i3 = B}	0,3
{i1 = 3; i2 = 1,5; i3 = A}	0,0
{i1 = 3; i2 = 1,5; i3 = B}	0,0
{i1 = 3; i2 = 1,0; i3 = A}	0,0
{i1 = 3; i2 = 1,0; i3 = B}	0,0

Сравнить значение поддержки с заданным  $min\_sup = 0,01$ . Результат формирования  $L_3$  представлен в таблице 7.

Таблица 7 Формирование  $L_3$

Набор из 3 элементов	Поддержка
{i1 = 1; i2 = 1,5; i3 = A}	0,3
{i1 = 2; i2 = 1,0; i3 = A}	0,3
{i1 = 3; i2 = 0,5; i3 = B}	0,3

Окончательно был сгенерирован набор ассоциативных правил на основе атрибутов, определяющих решения, включая 9 правил, представленных в таблице 8.

Таблица 8. Результат создания ассоциативных правил на основе атрибута решения

№	Ассоциативные правила	Поддержка	Достоверность
1	{i1 = 1} => {i3 = A}	0,3	1,0
2	{i2 = 1,5} => {i3 = A}	0,3	1,0
3	{i1 = 3} => {i3 = B}	0,3	1,0
4	{i2 = 0,5} => {i3 = B}	0,3	1,0
5	{i2 = 1} => {i3 = A}	0,4	1,0
6	{i1 = 2} => {i3 = A}	0,4	1,0
7	{i1 = 1; i2 = 1,5} => {i3 = A}	0,3	1,0
8	{i1 = 3; i2 = 0,5} => {i3 = B}	0,3	1,0
9	{i1 = 2; i2 = 1} => {i3 = A}	0,4	1,0

Для реализации шага 2 процедуры разработана *методика формирования меры интенсивности статистической импликации для правила ассоциации*, состоящая из следующих шагов:

Шаг 1. Производится преобразование набора данных транзакции в разреженную бинарную матрицу.

Шаг 2. Производится преобразование набора правил ассоциации в разреженную бинарную матрицу.

Шаг 3. Производится вычисления значений параметров статистической импликации правила ассоциации.

Шаг 4. Производится вычисления значения индекса статистической импликации для правила ассоциации.

Для определения значений параметров  $n$ ;  $n_A$ ;  $n_B$ ;  $n_{\bar{A}\bar{B}}$  каждого правила ассоциации предлагается метод преобразования набора данных транзакции и правил ассоциации в разреженную бинарную матрицу. Это преобразование преследует две основные цели.

Во-первых, большинство алгоритмов генерации ассоциативных правил основано на бинарных данных, что удобно при экспериментальной реализации.

Во-вторых, с разреженной бинарной структурой матрицы алгоритм может решить проблему пространства для хранения больших наборов данных и увеличить скорость обработки алгоритмов модели за счет того, что алгоритмы обрабатывают данные только во внутренней памяти, вместо того чтобы обращаться к внешней.

*Комментарии:*

*По шагу I методики.* Преобразование набора данных транзакции в разреженную бинарную матрицу  $BM$ , состоящую из  $n$  строк и  $m$  столбцов, где  $n$  – общее количество транзакций в наборе данных,  $m$  – сумма значений всех атрибутов, присутствующих в наборе данных транзакции. Каждая транзакция преобразуется в строку матрицы, каждое значение атрибутов в наборе данных транзакции становится столбцом матрицы. Значения матрицы  $BM$  определяются по следующему принципу: если транзакция в строке  $i$  содержит соответствующее значение атрибута в столбце  $j$ ,  $BM_{i,j} = 1$ , в противном случае  $BM_{i,j} = 0$ .

**Пример 2.** Из набора данных транзакции, представленного в примере 1, преобразуем данные в бинарную матрицу  $BM(10 \times 8)$ . Поскольку данные транзакции в строке 1 содержат только значения  $i_1 = 2$ ;  $i_2 = 1,0$ ;  $i_3 = A$ ,  $BM_{1,2} = 1$ ,  $BM_{1,5} = 1$ ,  $BM_{1,7} = 1$ , а остальные элементы строки 1 равны 0. Аналогично определены значения для остальных строк матрицы. Результаты представлены в таблице 9.

*Таблица 9. Результаты преобразования данных транзакции в бинарную матрицу*

$i_1=1$	$i_1=2$	$i_1=3$	$i_2=1,5$	$i_2=1,0$	$i_2=0,5$	$i_3=A$	$i_3=B$
0	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	0

*По шагу 2 методики.* Преобразование набора правил ассоциации в разреженную бинарную матрицу. Данные, преобразованные в форму бинарной матрицы набора правил, делятся на три части: полную матрицу бинарных правил, левую бинарную матрицу правил и правую бинарную матрицу правил. В каждой бинарной матрице преобразование выполняется в соответствии со следующим принципом: каждое правило ассоциации преобразуется в строку матрицы, каждый атрибут, появляющийся в левой или правой части правила ассоциации, преобразуется в столбцы в матрице. Значения матрицы определяются аналогично.

**Пример 3.** Из набора правил ассоциации, представленного в примере 1, преобразуем данные в бинарную матрицу следующим образом:

Полная бинарная матрица правил ассоциации  $BMF$  имеет 9 строк и 8 столбцов. Поскольку правило ассоциации в строке 1

содержит только значения атрибутов  $i_1 = 1$ ,  $i_3 = A$ , поэтому  $BMF_{1,1} = 1$ ,  $BMF_{1,7} = 1$ . Аналогично определяются значения для остальных строк матрицы. Результаты представлены в таблице 10.

Таблица 10. Результат преобразования правила ассоциации в бинарную матрицу

$i_1=1$	$i_1=2$	$i_1=3$	$i_2=1,5$	$i_2=1,0$	$i_2=0,5$	$i_3=A$	$i_3=B$
1	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	0

Левая бинарная матрица правил ассоциации  $BML$  имеет размерность  $(9 \times 6)$ . В первой строке  $BML_{1,1} = 1$ , остальные элементы равны 0, поскольку левая часть правила ассоциации в строке 1 содержит только значение атрибута  $i_1 = 1$ . Аналогично определяем значения для остальных строк матрицы. Результаты преобразования представлены в таблице 11.

Таблица 11. Результат преобразования левой части правила ассоциации в бинарную матрицу

$i_1=1$	$i_1=2$	$i_1=3$	$i_2=1,5$	$i_2=1,0$	$i_2=0,5$
1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0

Правая бинарная матрица правил ассоциации  $BMR$  имеет размерность  $(9 \times 2)$ . Поскольку правая часть правила ассоциации в строке 1 содержит только значение атрибута  $i_3 = A$ , то  $BML_{1,1} = 1$ , а остальные элементы строки 1 равны 0. Аналогично определяем значения для остальных строк матрицы. Результаты преобразования представлены в таблице 12.

Таблица 12. Результат преобразования правой части правила ассоциации в бинарную матрицу

$i_3 = A$	$i_3 = B$
1	0
1	0
0	1
0	1
1	0
1	0
1	0
0	1
1	0

*По шагу 3 методики.* Определение значений параметров статистической импликации каждого правила ассоциации. После вычисления бинарной матрицы данных, бинарных матриц правил ассоциации, следующим шагом будет определение значений параметров  $n$ ;  $n_A$ ;  $n_B$ ;  $n_{AB}$  для каждого правила в выбранном наборе правил в соответствии со следующим принципом:

- параметр  $n$ :  $n$  – количество строк бинарной матрицы данных  $BM$ ;
- параметр  $n_A$ : для каждой строки левой бинарной матрицы правил  $BML$  идентифицируются столбцы со значением 1. В соответствии с этими столбцами в полной бинарной матрице в каждом столбце определяют общее количество строк со значением 1, которое присваивают  $n_A$ ;
- параметр  $n_B$ : для каждой строки правой бинарной матрицы правил  $BMR$  идентифицируются столбцы со значением 1. В соответствии с этими столбцами в полной бинарной матрице в каждом столбце определяют общее количество строк со значением 1 и присваивают его  $n_B$ ;

– параметр  $n_{A\bar{B}}$ : для каждой строки полной бинарной матрицы правил *BMF* идентифицируются столбцы со значением 1. В соответствии с этими столбцами в полной бинарной матрице в каждом столбце определяют общее количество строк со значением 1 и присваивают его к  $n_{AB}$ . Тогда,  $n_{A\bar{B}} = n_A - n_{AB}$ .

**Пример 4.** Из результата преобразования в бинарную матрицу в примере 2 и примере 3 переходим к определению значений параметров статистической импликации для первого правила следующим образом:

$$n = 10; n_A = 3; n_B = 7; n_{A\bar{B}} = 0.$$

Аналогично для остальных правил определяем значения параметров  $n$ ;  $n_A$ ;  $n_B$ ;  $n_{A\bar{B}}$ , представленные в таблице 13.

Таблица 13. Значения параметров  $n$ ;  $n_A$ ;  $n_B$ ;  $n_{A\bar{B}}$  для каждого ассоциативного правила

№	Ассоциативное правило	$n$	$n_A$	$n_B$	$n_{A\bar{B}}$
1	$\{i_1 = 1\} \Rightarrow \{i_3 = A\}$	10	3	7	0
2	$\{i_2 = 1,5\} \Rightarrow \{i_3 = A\}$	10	3	7	0
3	$\{i_1 = 3\} \Rightarrow \{i_3 = B\}$	10	3	3	0
4	$\{i_2 = 0,5\} \Rightarrow \{i_3 = B\}$	10	3	3	0
5	$\{i_2 = 1\} \Rightarrow \{i_3 = A\}$	10	4	7	0
6	$\{i_1 = 2\} \Rightarrow \{i_3 = A\}$	10	4	7	0
7	$\{i_1 = 1; i_2 = 1,5\} \Rightarrow \{i_3 = A\}$	10	3	7	0
8	$\{i_1 = 3; i_2 = 0,5\} \Rightarrow \{i_3 = B\}$	10	3	3	0
9	$\{i_1 = 2; i_2 = 1\} \Rightarrow \{i_3 = A\}$	10	4	7	0

*По шагу 4 методики.* Значения индекса статистической импликации для каждого ассоциативного правила, вычисленные по формуле (5), представлены в таблице 14.

Таблица 14. Значения индекса статистической импликации для каждого ассоциативного правила

№	Ассоциативное правило	$q(a,b)$
1	$\{i_1 = 1\} \Rightarrow \{i_3 = A\}$	-0,949
2	$\{i_2 = 1,5\} \Rightarrow \{i_3 = A\}$	-0,949
3	$\{i_1 = 3\} \Rightarrow \{i_3 = B\}$	-1,449
4	$\{i_2 = 0,5\} \Rightarrow \{i_3 = B\}$	-1,449
5	$\{i_2 = 1\} \Rightarrow \{i_3 = A\}$	-0,949
6	$\{i_1 = 2\} \Rightarrow \{i_3 = A\}$	-1,095
7	$\{i_1 = 1; i_2 = 1,5\} \Rightarrow \{i_3 = A\}$	-0,949
8	$\{i_1 = 3; i_2 = 0,5\} \Rightarrow \{i_3 = B\}$	-1,449
9	$\{i_1 = 2; i_2 = 1\} \Rightarrow \{i_3 = A\}$	-1,095

**Пример 5.** Для применимости модели проводился эксперимент на наборе данных Lenses [14], в котором хранятся атрибуты для выбора контактных линз. Он включает 24 записи для выбора контактных линз, 5 атрибутов (от  $i_1$  до  $i_4$  – атрибуты условия,  $i_5$  – атрибут решения). Здесь  $i_1$  (возраст пациента) включает три значения: 1 (молодой), 2 (в периоде перед дальнозоркостью), 3 (имеющий дальнозоркость);  $i_2$  (рецепт очков) включает два значения: 1 (близорукость), 2 (дальнозоркость);  $i_3$  (астигматизм) включает два значения: 1 (нет), 2 (да);  $i_4$  (скорость слезоопрорудции) включает два значения: 1 (снижено), 2 (нормально). Далее,  $i_5$  – это атрибут решения, используемый для классификации трех значений: 1 (пациент должен носить жесткие контактные линзы), 2 (пациенту следует подобрать мягкие контактные линзы), 3 (пациенту не следует надевать контактные линзы). Подробное содержание набора данных представлено в таблице 15.

Производится создание ассоциативных правил для этого набора данных с использованием алгоритма генерации ассоциативных правил (алгоритм Apriori) на основе атрибутов решения (Поддержка = 0,15 и Достоверность = 0,8, исходя из рекомендаций [12]). Результаты, полученные с помощью набора из 10 правил рекомендательной системы, представлены в таблице 16.

Таблица 15. Подробное содержание набора данных Lenses

№	$i_1$	$i_2$	$i_3$	$i_4$	$i_5$
1	1	1	1	1	3
2	1	1	1	2	2
3	1	1	2	1	3
4	1	1	2	2	1
5	1	2	1	1	3
6	1	2	1	2	2
7	1	2	2	1	3
8	1	2	2	2	1
9	2	1	1	1	3
10	2	1	2	1	3
11	2	1	2	1	3
12	2	1	2	2	1
13	2	2	1	1	3
14	2	2	1	2	2
15	2	2	2	1	3
16	2	2	2	2	3
17	3	1	1	1	3
18	3	1	1	2	3
19	3	1	2	1	3
20	3	1	2	2	1
21	3	2	1	1	3
22	3	2	1	2	2
23	3	2	2	1	3
24	3	2	2	2	3

Таблица 16. Набор ассоциативных правил, сгенерированный для набора данных Lenses

№	Ассоциативные правила
1	$\{i_4 = 1\} \Rightarrow \{i_5 = 3\}$
2	$\{i_3 = 1; i_4 = 2\} \Rightarrow \{i_5 = 2\}$
3	$\{i_1 = 1; i_4 = 1\} \Rightarrow \{i_5 = 3\}$
4	$\{i_1 = 2; i_4 = 1\} \Rightarrow \{i_5 = 3\}$
5	$\{i_3 = 3; i_4 = 1\} \Rightarrow \{i_5 = 3\}$
6	$\{i_2 = 1; i_4 = 1\} \Rightarrow \{i_5 = 3\}$
7	$\{i_3 = 1; i_4 = 1\} \Rightarrow \{i_5 = 3\}$
8	$\{i_3 = 2; i_4 = 1\} \Rightarrow \{i_5 = 3\}$
9	$\{i_2 = 2; i_4 = 1\} \Rightarrow \{i_5 = 3\}$
10	$\{i_2 = 1; i_3 = 2\} \Rightarrow \{i_5 = 3\}$

Результат расчета значения меры ИСИ представлены в таблице 17.

Таблица 17. Значения меры ИСИ

№	ИСИ
1	-2,121
2	-1,721
3	-1,225
4	-1,225
5	-1,225
6	-1,500
7	-1,500
8	-1,500
9	-1,500
10	-0,833

На основе значения меры ИСИ модель дает рекомендательный результат. Например, при вводе значений условного признака  $\{i_1 = 1; i_2 = 2; i_3 = 2; i_4 = 1\}$  модель выдаст рекомендации, представленные в таблице 18.

Таблица 18. Результаты рекомендации при вводе значений условного признака  $\{i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 2, i_4 = 1\}$

Ассоциативные правила	ИСИ
$\{i_4 = 1\} \Rightarrow \{i_5 = 3\}$	-2,121
$\{i_3 = 3; i_4 = 1\} \Rightarrow \{i_5 = 3\}$	-1,500
$\{i_1 = 2; i_4 = 1\} \Rightarrow \{i_5 = 3\}$	-1,500
$\{i_2 = 1; i_3 = 2\} \Rightarrow \{i_5 = 3\}$	-0,833

Выбираем ассоциативное правило с наибольшим значением ИСИ (-0,833), для которого  $i_5 = 3$ , следовательно, пациенту не следует использовать контактные линзы.

Оценка точности предложенной рекомендательной модели проведена на основе сравнения результатов рекомендаций модели с выбором пользователя [11]. Точность представляет собой оценку релевантности рекомендаций пользователю и вычисляется как отношение количества рекомендованных продуктов,

выбранных пользователем, к общему количеству рекомендованных продуктов.

Для оценки точности предлагаемой рекомендательной модели проводился эксперимент на наборе открытых данных MSWeb [7] о пользователях Microsoft, посетивших веб-сайты в течение одной недели, представленном в цифровом виде на сайте [www.microsoft.com](http://www.microsoft.com). Набор содержит данные о 38000 анонимных пользователей, получающих доступ к 294 исходным веб-адресам, и представлен в виде двоичной матрицы из 32711 строк, 294 столбцов и 98653 значений рейтинга.

Для оценки эффективности предложенной модели (PC\_ИСИ) в работе сравнивается точность предлагаемой модели с точностями рекомендательных моделей совместной фильтрации, таких как рекомендательная модель совместной фильтрации на основе пользователей (PC\_Пол) [11], рекомендательная модель совместной фильтрации на основе продукта (PC\_Прод) [11] и рекомендательная модель совместной фильтрации на основе ассоциативных правил (PC\_АП) [11]. Результаты оценки точности рекомендательных моделей для заданного набора данных представлены в таблице 19.

Таблица 19. Точности рекомендательных моделей

Рекомендательная модель	PC_Пол	PC_Прод	PC_АП	PC_ИСИ
Точность	0,425	0,401	0,501	0,699

Построена сравнительная диаграмма на основе результатов оценки, представленная на рис. 3.

По результатам оценки предлагаемая авторами рекомендательная модель имеет более высокую точность, чем остальные модели.

В работе разработана рекомендательная модель, основанная на асимметричном подходе с использованием ассоциативных правил, меры ИСИ. Преодолены недостатки традиционных рекомендательных моделей, учитывающих взаимное влияние пары пользователей как симметричное. Данная модель, в частности, использует асимметричную взаимосвязь между атрибутами условия и атрибутами решения в одном и том же пользовательском объекте. По значению меры ИСИ в выбранном наборе ас-

социативных правил модель дает рекомендательные результаты, чтобы помочь пользователям выбрать значения для атрибутов решения.

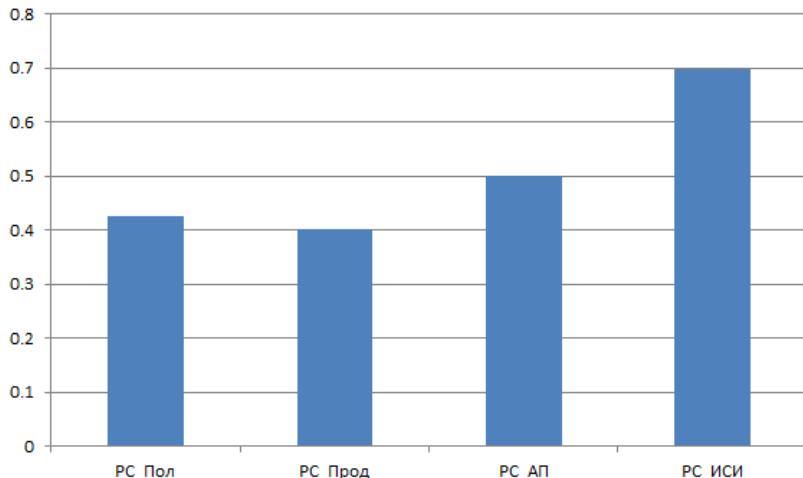


Рис.3 Сравнение точности рекомендательных моделей

## ЛИТЕРАТУРА

1. БРАХА Ш., ЛИОР Р. *Создание эффективных рекомендательных систем* // ISBN978-1-4419-0047-0 –2012 г. Архивировано из оригинала 01.05.2014.
2. БХАСКЕР Б.; СРИКУМАР К. *Рекомендательные системы в электронной коммерции* // ЧАШКА. – ISBN978-0-07-068067-8. Архивировано из оригинала 01.09.2010.
3. ФРАНЧЕСКО Р., ЛИОР Р., БРАХА Ш., КАНТОР П.Б. *Справочник рекомендательных систем*. – Springer. ISBN978-0-387-85819-7 – 2011.
4. ШИТИКОВ В.К., МАСТИЦКИЙ С.Э. *Классификация, регрессия, алгоритмы Data Mining с использованием R*. – 2017. – Электронная книга. – URL: <https://github.com/ranalytics/data-mining>.

5. ШУРШЕВ В.Ф., БУЙ Л.В. *Методика выбора сканирующих приемников и трансиверов по основным характеристикам* // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – №2. – С. 45–51.
6. ШУРШЕВ В.Ф., КОЧКИН Г.А., КОЧКИНА В.Р. *Модель системы поддержки принятия решений на основе рассуждений по прецедентам* // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – №2. – С. 175–183.
7. BREESE J.S., HECKERMAN D., KADIE C.M. *Anonymous web data from www.microsoft.com* // Microsoft Research, Redmond WA, 98052-6399, USA, 1998. – URL: <https://kdd.ics.uci.edu/databases/msweb/msweb.html>.
8. GRAS R. *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs en didactique des mathématiques*. – PhD thesis, Université de Rennes 1, 1979.
9. GRAS R., KUNTZ P. *An overview of the Statistical Implicative Analysis (SIA) development* // Statistical Implicative Analysis - Studies in Computational Intelligence, Springer-Verlag. – 2008. – P. 11–40.
10. GRAS R., KUNTZ P., GREFFARD N. *Notion of Implicative Fields in Statistical Implicative Analysis* // VIII Int. Conf. A.S.I. Analyse Statistique Implicative - Statistical Implicative Analysis Radès (Tunisie), Novembre, 2015. – P. 29–46.
11. HAHSLER M. «*recommenderlab: A Framework for Developing and Testing Recommendation Algorithms*» // The Intelligent Data Analysis Lab at SMU. – 2011. – URL: <http://lyle.smu.edu/IDA/recommenderlab/>.
12. HIKMAWATI E., MAULIDEVI N.U., SURENDRO K. *Minimum threshold determination method based on dataset characteristics in association rule mining* // J Big Data. – 2021. – Vol. 8. – P. 146. DOI: <https://doi.org/10.1186/s40537-021-00538-3>.
13. KVYATKOVSKAYA I.Y., SHURSHEV V.F., FRENKEL M.B. *Methodology of a support of making management decisions for poorly structured problems* // Communications in

- Computer and Information Science. – 2015. – Vol. 535. – P. 278–291.
14. <https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/lenses> – набор данных Lenses (Lenses Data Set).

## DEVELOPMENT OF A RECOMMENDATION MODEL TO SUPPORT DECISION-MAKING WHEN THE USER CHOOSES PRODUCTS

**Irina Kvyatkowskaya**, Astrakhan State Technical University, Astrakhan, Doctor of technical sciences, professor (i.kvyatkowskaya@astu.org).

**Vo Thi Huyen Trang**, Astrakhan State Technical University, Astrakhan (vthtrang@mail.ru)

**Tran Quoc Toan**, Astrakhan State Technical University, Astrakhan (hoaivan219@mail.ru)

*Abstract: Recommender systems are used to predict user preferences for a particular product or service, and to recommend suitable products or services to the user. Many of the methods used in data mining, related to classification or the construction of association rules, are used in recommender systems. This article proposes a new recommender model that combines association rules and statistical implication index measures. In the proposed model, support and confidence measures are used to create association rules, and the statistical implication index measure is used to filter the set of rules and rank recommendations. The proposed model and algorithms are used to build a recommendation result based on a known data set.*

**Keywords:** recommender system, recommender model, statistical implication analysis, statistical implication index, algorithm Apriori, association rules.

УДК 004.67

ББК 32.972.1

DOI: 10.25728/ubs.2023.105.6

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Р.М. Нижегородцевым.*

*Поступила в редакцию 29.03.2023.  
Опубликована 30.09.2023.*