

Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

*Выпуск 106
Ноябрь 2023*

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2023

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 106

Москва – 2023

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики: Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Куржанский А.Б., Новиков Д.А., Попков Ю.С., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Галеев А.А., Савватеев А.В.; д-ра техн. наук: Кузнецов О.П. (ИПУ РАН), Кульба В.В. (ИПУ РАН), Павлов Б.В. (ИПУ РАН), Рутковский В.Ю. (ИПУ РАН).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: академик Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Калимулина Э.Ю. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИТМО), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ, ГУ ВШЭ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук: проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН); д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН); д-р техн. наук доцент Коргин Н.А. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (ИПУ РАН); д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН); д-р биол. наук проф. Михальский А.И. (ИПУ РАН); д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Райгородский А.М. (МФТИ), проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН); д-ра техн. наук: проф. Самуилов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Соловуков А.С. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ); д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Арзамас – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. (АПИ НГТУ); **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – д-р техн. наук проф. Зоркальцев В.И. (ЛИН СО РАН), д-ра физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодин А.К., проф. Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И.; **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в интернете: ubs.mtas.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Жилякова Л.Ю., Кузнецов О.П.

*Моделирование нейронов и их взаимодействий.
Обзор подходов и методов.....* 6

Лаговский Б.А., Рубинович Е.Я., Юрченков И.А.

*Решение задачи сверхразрешения с использованием
модели нейронной сети прямого распространения* 52

Информационные технологии в управлении

Трефилов П.М., Романова М.А.

*Формирование достоверной навигационной
информации в задачах ориентации и навигации
автономных робототехнических устройств
с использованием инфраструктуры
интеллектуальной транспортной среды* 71

Управление в социально-экономических системах

Горбанёва О.И., Михалкович С.С.,

Угольницкий Г.А.

*Модели распределения ресурса в иерархически
управляемой древовидной динамической системе
с учётом оппортунистического поведения агентов...* 96

Команич Н.В., Чернов И.В., Шелков А.Б.

*Сценарные технологии в управлении развитием
нефтегазового комплекса Арктической зоны
Российской Федерации* 138

Лориц Е.М., Губар Е.А.

*Эволюционная игра с учетом обратной связи
с окружающей средой и мнениями игроков* 172

Марьясин О.Ю., Плохотнюк А.Н. <i>Оптимизация энергопотребления предприятия с локальными генераторами и накопителями энергии.....</i>	184
Рослякова Н.А., Волков А.Д., Тишков С.В. <i>Инновационные системы регионов Российской Арктики: структурные особенности, сценарии развития и аспекты управления (применение методики DEA-анализа)</i>	218
<hr/>	
Управление техническими системами и технологическими процессами	
<hr/>	
Круглов С.П. <i>Скоростной ПД-регулятор с широкими рабочими свойствами для управления мостовым краном</i>	246
Крыгин А.А., Куприянов Б.В. <i>Найдение критических узлов транспортной сети на основе построения замкнутой области</i>	271
Матюшенко С.И., Самуйлов К.Е. <i>Преобразование Лапласа – Стильеса пикового возраста информации для случая, когда передача пакетов моделируется СМО $PH PH 1 r$ с дисциплиной FCFS.....</i>	300

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЙРОНОВ И ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ. ОБЗОР ПОДХОДОВ И МЕТОДОВ

Жилякова Л. Ю.¹, Кузнецов О. П.²
(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Статья содержит подробный обзор математических моделей нейронов и нейронных взаимодействий. Модели разделены на два больших, но неравных класса: «электрические», которые уделяют внимание только электрическим процессам, и «гетерохимические», в которых основной упор делается на химизм нейрона, на его химические входы и выходы. Первый класс моделей гораздо шире, поскольку имеет более долгую историю. Модели второго класса принадлежат к новому развивающемуся направлению в нейробиологии. В конце статьи кратко описана асинхронная гетерохимическая модель, предложенная авторами совместно с коллегами из ИПУ РАН и ИБР РАН.

Ключевые слова: модели нейронов, нейронные сети, биологически правдоподобное моделирование, гетерохимические взаимодействия нейронов.

1. Введение

В течение последних восьми лет авторы занимались моделированием гетерохимических взаимодействий нейронов в малых нейронных ансамблях. За время этой работы был прочитан и проанализирован большой объем литературы, часть из которой систематизирована в представленном обзоре.

Проблема математического моделирования биологических нейронов и сетей из них имеет давнюю историю: первые работы в этой области появились более ста лет назад, причем некоторые из ранних работ не потеряли актуальности до настоящего времени. Достаточно напомнить классические работы: статью Ходжкина – Хаксли [70], написанную в 1952 г., и статью Маккаллока – Питтса [92], написанную в 1943 г., которые активно цитируются до сих пор. Поэтому в настоящем обзоре мы стремились

¹ Людмила Юрьевна Жилякова, д.ф.-м.н. (zhilyakova@ipu.ru).

² Олег Петрович Кузнецов, д.т.н., профессор (olpkuz@yandex.ru).

не только отразить новейшие исследования, но также проследить эволюцию и преемственность методов и подходов.

Для ориентации в огромном массиве литературы по нейробиологическому моделированию необходима его структуризация, основания которой могут быть различными. Модели нейронов и сетей из них отличаются как степенью подробности описания и биологической адекватности, так и целью моделирования. Кроме того, при классификации моделей важно иметь в виду следующее.

Современное состояние нейробиологии характеризуется существованием двух конкурирующих парадигм: электрической парадигмы, господствовавшей на протяжении всего XX-го века, и гетерохимической парадигмы, постепенно пробивающей себе дорогу в последние десятилетия.

Электрическая парадигма рассматривает нервную систему как жесткую «проводочную» электрическую сеть, в которой синапс является главным и единственным местом, где происходит обмен информацией между нейронами. При этом признается наличие химических посредников – нейротрансмиттеров, которые под действием электрического сигнала, пришедшего по аксону нейрона-передатчика, выделяются (секретируются) пресинаптическим окончанием аксона в синаптическую щель и воспринимаются рецепторами нейрона-приемника, расположеными по другую сторону синаптической щели. Однако с «электрической» точки зрения нервной системе для этого посредничества достаточно одного трансмиттера. Существующее в реальности разнообразие трансмиттеров (в настоящее время их известно около сотни) с этой точки зрения не является значимым. Экспериментально установленные факты переключения поведения организмов без изменения анатомической структуры [27] в этой парадигме не находят объяснения.

Гетерохимическая парадигма, напротив, считает, что коммуникация между нейронами основана на химических взаимодействиях и происходит в результате выделения трансмиттеров не только (а часто и не столько) в синаптическую щель, но и во внеклеточное пространство, где они воспринимаются рецепторами, расположенными по всей мембране нейронов-приемников. Такая передача сигналов называется объемной (volume transmission).

Нейроны трансмиттер-специфичны: разные нейроны выделяют разные трансмиттеры; разные рецепторы чувствительны к разным трансмиттерам. Поэтому разнообразие трансмиттеров существенно, что отражено в добавке «гетеро» к названию парадигмы. Передача сигналов является широковещательной: трансмиттерный сигнал воспринимается не одним нейроном (как это происходит при синаптической передаче), а всеми нейронами, которые находятся в окрестности нейрона-передатчика и имеют рецепторы, чувствительные к данному трансмиттеру.

При этом все сведения о характере электродинамических процессов в нервных системах остаются в силе. В частности, остается справедливым тот центральный для межнейронной коммуникации факт, что генерация нейроном трансмиттерного сигнала происходит тогда, когда мембранный потенциал превосходит некоторый порог и нейрон переходит в активное состояние, порождая потенциал действия. Таким образом, гетерохимическая парадигма не отменяет электрическую парадигму – она включает ее в себя, концентрируясь на тех аспектах нейронных взаимодействий, которые игнорируются в «электрических моделях».

В итоге весь массив литературы по моделям нейронов и нейронных сетей следует разделить на две части: электрические и гетерохимические модели, соответствующие парадигмам, на которые они опираются. Эти части не равны по объему, поскольку электрические модели, как уже было сказано, имеют более чем столетнюю историю, тогда как первые гетерохимические модели появились только в конце XX века.

Статья имеет следующую структуру. Второй раздел содержит обзор моделей, соответствующих основным принципам электрической парадигмы, т.е. электрических (синаптических, «проводочных») моделей, в третьем разделе проведен сравнительный анализ рассмотренных моделей и высказаны некоторые методологические соображения, в четвертом разделе описываются модели гетерохимического взаимодействия нейронов и, наконец, в пятом разделе излагается наш подход к моделированию мультитрансмиттерной системы нейронов и их взаимодействий в малых ансамблях, а также нейромодуляции. Заключение подводит итог, в нем формулируются основные выводы и перспективы исследований.

2. «Электрические» модели нейронов и их взаимодействий¹

Электрические модели нейронов и нейронных сетей можно разделить на два больших класса, использующих диаметрально противоположные подходы и преследующие различные цели.

Первый из этих классов описывает биологические нейроны и происходящие в них процессы с большой степенью точности; как правило, здесь строятся модели одиночных нейронов или их взаимодействия в малых сетях. Такие модели можно назвать «непрерывными»: процессы на мемbrane нейрона используют непрерывную математику, т.е. методы математического анализа и дифференциальных уравнений. Эти модели, как правило, имеют большую вычислительную сложность; в некоторых из них существует множество параметров, которые чаще всего подбираются эмпирически.

Второй класс, напротив, игнорирует биологическое правдоподобие внутринейронных процессов, уделяя основное внимание межнейронным взаимодействиям. Сложность поведения в таких сетях достигается за счет связывания большого количества простых элементов и изменения структуры и силы их взаимодействий. Эти модели будем называть «дискретными» – они используют дискретную математику: теорию графов, теорию автоматов и булеву алгебру. В них нейроны представляют собой простые пороговые элементы и чаще всего работают как сумматоры с пороговой функцией активации.

2.1. НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ

Самая простая из непрерывных моделей нейрона, Integrate-and-fire, была предложена Луи Лапиком в 1907 году [20]. Изменение мембранныго потенциала в ней описано одним дифференциальным уравнением, которое задает следующую динамику. Потенциал возрастает до порогового значения, при котором происходит спайк (мгновенный скачок); после чего он опускается до некоторого базового подпорогового значения. Несмотря

¹ Обзор электрических моделей до 2016 г. частично пересекается с обзором в статье [2].

на свой солидный возраст, модель широко используется и в настоящее время [43, 77]. Модель Perfect Integrate-and-Fire описывает изменение мембранныго потенциала без утечек; ее модификация Leaky Integrate-and-Fire учитывает диффузию заряженных ионов через мембрану, в уравнении появляется еще одно слагаемое, отвечающее за утечку. Это один из наиболее распространенных видов модели спайкующего нейрона; как правило, из таких нейронов стоят модели спайковых нейронных сетей [136, 138], которые более подробно будут описаны в разделе 2.2. В настоящее время существует еще несколько усложнений модели: адаптивная модель Integrate-and-Fire [84], модель с утечкой дробного порядка [117], экспоненциальная модель Integrate-and-Fire [61].

При всем разнообразии новых исследований, появившихся в последнее время, до сих пор, пожалуй, наиболее знаковой является модель Ходжкина – Хаксли [70], описывающая возникновение потенциала действия и его распространение вдоль аксона. Она находится на противоположном от Integrate-and-Fire конце диапазона сложности и является одной из самых подробных и биологически правдоподобных моделей. А. Ходжкин и Э. Хаксли были награждены за нее Нобелевской премией по физиологии и медицине в 1963 году. Модель представляет собой систему четырех дифференциальных уравнений, содержащих большое количество переменных параметров. При всех своих достоинствах она имеет высокую вычислительную сложность, а биологическая адекватность связана на подборе начальных значений и значений параметров.

Для редуцирования сложности модели Ходжкина – Хаксли был предложен ряд ее упрощений. Так, модель ФицХью – Нагумо (1961–1962 гг.) содержит систему из двух дифференциальных уравнений первого порядка [52, 99]. Нейрон в ней представлен как релаксирующий осциллятор, возбуждающий себя за счет положительной обратной связи мембранныго потенциала и восстанавливающийся с помощью отрицательной обратной связи медленного тока восстановления. Однако следует отметить, что модель ФицХью – Нагумо имеет более широкий спектр применения и может рассматриваться как модель автоволновых

процессов разной природы. В нейрофизиологии эта модель не потеряла актуальности и сейчас. В [139] рассматривается численное решение уравнений ФицХью – Нагумо со стохастической функцией. В [135] представлена модель ФицХью – Нагумо, учитывающая влияние электрического поля. Исследуются динамические свойства этой модели.

Модель Моррис – Лекара [94], предложенная в 1981 г., описывает динамику кальциевых и калиевых каналов и в некоторой степени представляет собой комбинацию моделей Ходжкина – Хаксли и ФицХью – Нагумо. С различными модификациями модель применяется и исследуется и в настоящее время. Так, в [109] исследуется модифицированный нейрон Морриса – Лекара под воздействием электрического и магнитного поля; в [122] исследуется переход паттернов возбуждения одного модифицированного нейрона Моррис – Лекара: он способен демонстрировать три разных паттерна возбуждения при изменении единственного параметра.

Модель активности нейронов Хиндмарша – Роуза [68] предназначена для изучения поведения спайков как скачков-разрывов мембранныго потенциала. В модели три функции: мембранный потенциал $x(t)$, который выражается в безразмерных единицах; функции $y(t)$ и $z(t)$, которые учитывают транспорт ионов через мембрану по ионным каналам. Модель Хиндмарша – Роуза представляет собой систему трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно безразмерных динамических переменных $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$. Модель Хиндмарша – Роуза, как и многие из вышеперечисленных моделей, используется в мемристорных сетях [130]. О самих мемристорных сетях будет сказано в разделе 2.2.

Для применения модели Ходжкина – Хаксли ее упрощают различными способами. Кроме редуцирования параметров, можно разделить моделируемые участки мембранны. В работе [127] на основе модели Ходжкина – Хаксли предложена модель нейрона, в которой динамика мембранныго потенциала для тела клетки и для аксона моделируются и вычисляются отдельно.

Сама же модель Ходжкина – Хаксли тоже не является историческим артефактом. Различные ее модификации исследуются во многих современных работах. К примеру, в [73] описывается

упрощенная мемристорная модель нейронов Ходжкина – Хаксли и исследуется пороговая динамика мембранных потенциалов; в [88] исследуется реализация классической модели Ходжкина – Хаксли в эмуляторе на осциллирующем мемристоре. Количество таких работ достаточно велико.

Обзор непрерывных вычислительных моделей нейронов и нейронных сетей представлен в книге [124]. Более свежий краткий обзор моделей спайкующих нейронов можно найти в [53].

Важным достоинством основных электрических моделей является их высокая биологическая правдоподобность: они описывают процессы, происходящие на клеточной мембране, с высокой степенью точности. С другой стороны, они имеют много параметров, зависящих от результатов измерений, которые не всегда могут быть проведены с достаточной точностью. Кроме того, эти модели обладают большой вычислительной сложностью, растущей с увеличением числа взаимодействующих нейронов. Эти ограничения приводят к тому, что такие модели используются только для единичных нейронов или для малых сетей. Так, в работе [127] с помощью двухчастной модели нейрона (сома + аксон) строится вычислительная модель генератора центрального паттерна пищевой сети улитки; модель пачечного нейрона, предложенная в [58], применена в [59] для описания взаимодействия интернейронов (внутренних нейронов) в центральном генераторе паттерна и мотонейронов в локомоторной системе насекомых; в [112] представлена модель нейронов головастика шпорцевой лягушки, которые прорацивают аксоны и формируют с их помощью новые синаптические связи.

Механизмы бифуркации, происходящей при генерации потенциала действия нейрона, исследовал в своих работах Е. Ижикевич. В модели, описанной в [74], тип бифуркации нейрона определяется состоянием покоя клетки. Такие нейроны могут действовать не только как интеграторы, но и как резонаторы, реагируя лишь на определенную частоту входа и игнорируя все другие частоты. В [75] производится сравнительный анализ наиболее успешных и используемых моделей. Модели сравниваются по двум параметрам: биологическая адекватность и вычислительная эффективность. Кроме того, в этой работе автор предлагает свою модель, которая по обоим параметрам превосходит

существующие модели применительно к большим сложным системам, моделирующим работу кортекса. Модель нейрона Е. Ижикевича получила большую популярность и стала объектом исследования многих авторов: см., например, [97, 101, 118, 128] и многие другие работы.

В статье [13] содержится обзор моделей, использующих методы нелинейной динамики для описания нервных систем в целом.

Другому подклассу принадлежат стохастические модели спайкующих нейронов. К ним, как правило, относят модель ответного спайка (Spike response model, SRM) [56, 57]. Такое название модель получила потому, что в сети входной ток данного нейрона генерируется спайками всех связанных с ним нейронов. Существуют модели, функционирующие как в дискретном, так и в непрерывном времени. Спайк в нейроне возникает с некоторой вероятностью (в непрерывном случае – плотностью распределения), заданной функцией от величины мембранныго потенциала и порога активации. Важной модификацией, по сути, упрощением модели SRM является модель SRM0. Она отличается тем, что фильтр, которым задается рефрактерный период, зависит только от самого последнего спайка, а не от суммы предыдущих спайков, как это было в базовой модели.

Еще одна стохастическая модель – модель Гальвеса – Лёчербах [55] – скорее, находится на границе двух классов. Модель представляет собой сеть, состоящую из счетного числа идеализированных нейронов, взаимодействующих посредством случайных спайков, которые происходят почти мгновенно (т.е. их можно считать дискретными событиями, не имеющими протяженности во времени). Каждый нейрон в каждый момент времени активируется с некоторой вероятностью, зависящей от его предыдущей активности и от истории активности его окружения с момента последнего спайка данного нейрона. Спайк обнуляет его память. Модель примечательна тем, что такие нейроны имеют память переменной длины.

2.2. ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ

В противоположность непрерывным моделям дискретные модели максимально упрощают описание процессов, происходящих в нейронах, за счет уменьшения количества параметров и дискретизации их значений, укрупнения масштаба событий и игнорирования многих деталей, не значимых с точки зрения передачи сигнала и, в конечном счете, обработки и передачи информации. Наиболее распространенным типом дискретных моделей являются искусственные (формальные) нейроны и нейронные сети.

Формальный нейрон и искусственная нейронная сеть (ИНС) из формальных нейронов были впервые предложены Маккаллоком и Питтсом в 1943 г. [92]. В этой статье нейрон представлен как пороговый логический элемент с двоичными входами x_1, \dots, x_k , имеющими различные действительные веса w_1, \dots, w_k , и двоичным выходом y , который возбуждается, когда линейная комбинация входных сигналов достигает порога P :

$$(1) \quad y_i(t+1) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^k w_i x_i(t) \geq P; \\ 0, & \text{если } \sum_{i=1}^k w_i x_i(t) < P. \end{cases}$$

Там же было показано, что сеть из таких элементов способна моделировать любое утверждение логики высказываний.

Модель Маккаллока – Питтса не получила быстрого признания: она опередила свое время и к тому же была написана в архайической системе логических обозначений. Широкую известность она приобрела лишь в 1956 г. благодаря более ясному ее изложению в статье Клини [81]. Клини показал, что сети из элементов Маккаллока – Питтса эквивалентны конечным автоматам. Эта статья положила начало активным исследованиям ИНС, которые развивались в двух независимых направлениях: как частный вид комбинационных логических схем, важный для приложений в вычислительной технике и дискретной автоматике, и как инструмент для моделирования отдельных информационных процессов в нервных системах. Работы в третьем возможном направлении развития ИНС, использующем отмеченные в [81] их конечно-автоматные свойства, появлялись лишь эпизодически. О некоторых работах этого направления будет сказано ниже.

Первым применением нейронных сетей для моделирования интеллектуальных процессов стал перцептрон, предложенный Ф. Розенблаттом в 1957 г. и описанный в книге [14]. Перцептрон представляет собой трехслойную нейронную сеть без обратных связей, способную решать задачи распознавания и классификации. Первый слой нейронов является сенсорным, второй – ассоциативным, третий – реагирующим. Распределение активности нейронов на сенсорах представляет собой входной образ. Обработка образа происходит в одном слое – ассоциативном, поэтому такой перцептрон называется однослойным. Переменная матрица весов W задает взаимодействия между ассоциативным и реагирующим слоем. Процесс обучения заключается в изменении элементов матрицы W .

Совершенно другую архитектуру имеет сеть Хопфилда [71], которая представляет собой связный неориентированный граф без петель. Вершины сети – это нейроны, которые в стандартной модели представляют собой пороговые элементы. В некоторых версиях сети Хопфилда нейрон имеет непрерывную функцию активации, которая стремится к обычной пороговой функции, когда некоторый параметр стремится к нулю. Главным отличием от перцептронов стало появление обратных связей. Граф задается симметричной матрицей весов W , которая определяет уже обученную сеть. То есть, в отличие от перцептрона и порожденных им моделей ИНС, матрица весов остается неизменной. Она вычисляется по эталонным векторам – образам, которые сеть в дальнейшем будет распознавать. Если сеть должна отнести изображение к одному из n классов, итоговая матрица будет представлять собой сумму n матриц, каждая из которых построена по одному из эталонных образов. Состоянием сети в момент t является вектор активности нейронов в этот момент. Вводится понятие энергии сети. Из любого начального состояния, заданного произвольным вектором, сеть переходит в одно из устойчивых состояний, которому соответствует локальный минимум энергии. Количество локальных минимумов совпадает с количеством классов n , и каждый минимум соответствует своему классу. Это позволяет использовать сеть Хопфилда как распознаватель-классификатор. Различают синхронные и асинхронные сети Хопфилда. В синхронных

сетях возможно появление так называемых «динамических аттракторов», когда сеть не сходится к одному устойчивому состоянию, а колеблется между двумя локальными минимумами, особенно при распознавании так называемых «химерных образов», части которых принадлежат разным эталонным образам. Асинхронные сети сходятся дольше, но лишены такого недостатка.

Направление, связанное с сетями Хопфилда, не получило серьезного развития, тогда как идеи, заложенные в перцептроне Розенблатта, оказались весьма перспективными. После примерно десятилетнего периода резкого падения интереса к перцептронам, вызванного книгой М. Минского и С. Пейпера [12], в которой были показаны принципиальные ограничения перцептронов, с конца 70-х годов стали появляться различные их модификации, направленные на преодоление этих ограничений: увеличивалось число слоев, вводились обратные связи (обратное распространение ошибки), пороговый сумматор (1) стал всего лишь одним из вариантов выходной функции активации и т.д. Обзор ранних моделей искусственных нейронных сетей содержится в книге [65]. А на рубеже XX–XXI-го веков возникли методы глубокого обучения [41, 60, 83], которые привели к современному буму ИНС и основанных на них нейротехнологий. Этот бум резко изменил как тренды науки об искусственном интеллекте, так и прежнее скептическое отношение общества к ИИ, которому впервые были предъявлены впечатляющие приложения в различных областях.

Подробный анализ современного состояния ИНС не входит в тематику нашего обзора. Мы лишь перечислим некоторые основные классы ИНС: свёрточные нейронные сети [125], рекурсивные сети [42, 93], рекуррентные сети, среди которых выделяются LSTM-сети (*Long short-term memory* – долгая краткосрочная память) [23, 120], глубокие сети доверия [69, 140] и др. Отдельный большой класс – сети, построенные на мемристорах. Аппаратная свёрточная сеть на мемристорах описана в [137]. В [86] представлен новый тип локально активного и энергонезависимого мемристорного нейрона, способного генерировать различные паттерны активности (регулярные и нерегулярные спайки, пачки спайков и др.). В [44] мемристоры позиционируются как наилучшие кандидаты для выполнений нейроморфных вычислений. В [50] на мемристорах реализована модель Моррис –

Лекара; в [126] – модель Хиндмарша – Роуза. В [131] описана построенная на мемристорах модель Вильсона, описывающая прошлые взаимодействия однородной популяции двух типов нейронов: возбуждающих и тормозных.

К настоящему времени исследования вышли в практическую плоскость: существует большое количество нейросетевых приложений в различных областях. Диапазон задач, решаемых нейронными сетями, чрезвычайно широк. Он обусловлен их высокой способностью к решению многих видов слабоструктурированных и плохо алгоритмизуемых задач: распознаванию изображений, речи и рукописных текстов, классификации различных объектов, задач диагностики, компьютерного зрения, обработки естественного языка и даже творческих задач. Стоит отметить высокую эффективность таких моделей в медицине: от медицинского компьютерного зрения [49] до борьбы с COVID-19 – обзор работ, посвященных этой теме, можно найти в [121].

Наиболее известная в настоящее время языковая модель GPT-4 (Generative Pretrained Transformer 4), мультимодальная большая языковая модель, созданная OpenAI (<https://chat.openai.com>), делает грандиозные успехи в генерации текстов на заданные темы. В [32] описывается роль ChatGPT в здравоохранении; в другой своей публикации [33] этот же автор предлагает использовать ChatGPT для решения проблемы глобального потепления. В [67] описывается предполагаемая роль ChatGPT в написании будущих научных публикаций. Авторы ссылаются, в числе других, на работу [90], выполненную частично с помощью ChatGPT. Однако, по мнению авторов, на современном этапе такие системы могут играть роль скорее интеллектуальных помощников, немногим более продвинутых, чем поисковые системы, которыми мы уже давно привыкли пользоваться. Напротив, авторы препринта [36] видят в GPT-4 искры сильного искусственного интеллекта. Верны ли такие оценки, покажет время.

Читателям, интересующимся проблемой машинного интеллекта, можно порекомендовать книги Сергея Шумского [18, 19].

Отдельно отметим спайковые нейронные сети (СНС), которые часто называют третьим поколением искусственных нейронных сетей. Главное различие между традиционной ИНС и СНС

заключается в принципе распространения информации. Классическая ИНС работает с вещественными или целочисленными входами и выходами; СНС оперирует данными, представленными в виде серии импульсов (спайков). Современные спайковые нейронные сети успешно решают различные задачи из широкого диапазона предметных областей. Они применяются в робототехнике [54], компьютерном зрении [72], протезировании [95], и многих других сферах. На основе СНС построены и обучены системы, управляющие манипуляторами [34] и роботами [24], решавшие задачи распознавания и обнаружения [100, 106], задачи тактильного восприятия [111], обработки нейромедицинских данных [51, 78]. СНС открыли целое направление создания различных нейроморфных систем, таких как NeuroGrid [30], BrainScaleS [104, 116], и нейроморфных чипов – Loihi [39], Tianjic [105], успешная работа которых свидетельствует о большом потенциале аппаратной реализации СНС. В [110] производится аналитическое исследование нейроморфных вычислений, основанных на спайковых нейронных сетях, – от алгоритмов к техническому воплощению. В [134] приведен обзор моделей спайковых нейронных сетей и основанных на них приложений. Тандем из ИНС в качестве учителя и СНС в качестве ученика для конструирования глубокой спайковой сети приведен в [132]: авторы предложили метод, устойчивый к шумам различного вида. Нейроморфные альтернативы фоннеймановской архитектуре, использующие СНС, описаны в [133].

Недавно стало развиваться моделирование СНС с задержками на синапсах. Пластичность синаптических весов [38] и пластичность синаптических задержек [85] – феномены, присущие живым нейронным сетям и сопровождающие процесс их обучения. Однако если обучение, основанное на изменении весов синапсов, хорошо изучено и широко применяется во многих работах (см., напр., [79]), то эффект пластичности временной задержки на синапсах применительно к обучению исследован гораздо слабее. В качестве примера приведем две работы: в [98] СНС обучается как за счет пластичности весов, так и за счет изменения задержек; в работе [66] описывается обучение, основанное только на пластичности задержек.

В статье [89] изучалась вычислительная мощность импульсных нейронов с программируемыми задержками. Авторы доказали, что простой нейрон с пластическими задержками вычислительно мощнее порогового нейрона и примерно эквивалентен нейрону с сигмоидной функцией активации по способности классифицировать сложные паттерны.

Существует ряд исследований синаптических задержек в алгоритмах обучения импульсных нейронных сетей. В статье [103] описана полисинхронизация для резервуарных вычислений: изменения задержек применялись на выходном слое сети, в то время как скрытый слой обучался с помощью весов синапсов. В работе [102] предложен градиентный алгоритм обучения с задержками, который использовался в датчике локализации звука. В статье [80] изучается влияние аксональных задержек на синхронизацию спайков в сети. В ИПУ РАН получены результаты по распознаванию образов спайковыми сетями с задержками [17].

Хотя по большей части глубокие нейронные сети стали технологией и перешли в практическую плоскость, теоретические исследования не останавливаются. Исследователи поднимают фундаментальные вопросы о том, как применить искусственные нейронные сети к исследованию естественных нейронных сетей, как нейронные сети могут использоваться в нейронауках. Статья [115] называется «Если глубокое обучение – это ответ, то каков вопрос?». Авторы задаются вопросом, как глубокие сети могут помочь нейробиологам в понимании мозга, а также определяют концептуальные и методологические проблемы, сопоставляя поведение, динамику обучения и хранение памяти в искусственных и биологических системах. Однако до понимания механизмов работы мозга с помощью искусственных нейронных сетей предстоит большой путь. На сегодняшний день ИНС представляют собой распределенные вычислительные архитектуры и не претендуют на моделирование биологических нейронов и нервных систем в целом.

До 2000-х годов нейробиологи не проявляли существенного интереса к искусственным нейронным сетям и вообще к сетевым моделям. Однако с появлением нового аппарата – сложных сетей (см. обзоры [8, 45, 76]), – оказавшегося полезным инструментом

для описания структур разнообразных биологических, технических и социальных систем, внимание к сетевым моделям в нейробиологии резко возросло. Этот математический аппарат дал возможность строить сетевые макромодели нервных систем («коннектомы»), что привело к возникновению концепции «структурной и функциональной коннектомики» [28, 37, 108, 123] и новых для нейробиологии понятий, таких как степень кластеризации, хабы, сети тесного мира и др. Полный структурный коннектом, описывающий все анатомические связи между нейронами, построен только для червя – нематоды *C. elegans*. Однако при этом выяснилось, что знание полного коннектома червя недостаточно для описания механизмов его поведения [27], что лишний раз подтвердило ограниченность электрической парадигмы.

Примером работы, использующей язык конечных автоматов для описания реальных нейронных систем, является статья [113]. В ней вся сложность клеточных механизмов, как и во всех искусственных нейронах, агрегирована в бинарных состояниях. Другой важной особенностью этой работы является использование нейронов с разными типами электрической активности: осцилляторы, нейроны с тонической активностью, нейроны-триггеры.

В совсем ином ключе автоматный подход моделирования биологических нейронов предложен в монографии [7]. В этой работе представлена автоматная модель нейрона в среде с ограниченным питанием. Для выживания нейрон должен минимизировать потребление. В работе показано, что при решении задачи о минимизации потребления у системы возникают память, механизмы поведения и самочувствия. Базовым свойством моделируемого нейрона в этой работе является его эндогенная электрическая активность: «Разряд в нейроне нужен самому нейрону».

В статье [2] была предпринята первая попытка дискретного моделирования химических взаимодействий нейронов, представленных конечными автоматами. В статье [9] введено и исследовано понятие стационарного ансамбля – нейронной сети из формальных нейронов, способной сохранять возбужденное состояние всех своих нейронов при отсутствии внешних воздействий. Предложено конечно-автоматное представление ансамбля и показано, как на этом представлении можно исследовать процессы включения (перевода сети в активное состояние) и отключения

(перевода сети в «нулевое» состояние, когда ни один нейрон не возбужден).

В целом же дискретные модели пока остаются весьма далекими от биологических реалий.

3. Сравнительный анализ «электрических» моделей. Некоторые принципы математического моделирования в нейробиологии

Выше уже отмечалось, что описанные классы моделей используют разный математический аппарат. Непрерывные модели используют непрерывную математику – методы математического анализа и дифференциальных уравнений. Дискретные модели опираются на дискретную математику – теорию графов, булеву алгебру и теорию автоматов. Нужно ли выбирать между этими математическими средствами? И вообще, какая математика нужна для описания мозга?

Во-первых, это математика, которой давно и успешно пользуются все естественные науки – математика обработки экспериментальных данных, прежде всего методы математической статистики. Однако статистически обработанные данные остаются всего лишь данными, требующими интерпретации. А интерпретация данных не должна проводиться в терминах самих данных. Для нее нужен язык более высокого уровня, т.е. язык теории, на котором описываются закономерности, причинно-следственные связи между данными; другими словами, данные нуждаются в концептуализации. Как сказал А. Эйнштейн, «Лишь теория решает, что мы ухитряемся наблюдать». Вначале эти связи и закономерности описываются на качественном, верbalном уровне, но по мере развития науки они принимают форму строгих математических моделей.

Ситуация, сложившаяся в нейробиологии (наличие огромного массива данных при явном недостатке их теоретического осмысливания), весьма выразительно иллюстрирует важность теоретических языков. Вот что пишет С.В. Медведев, один из ведущих российских нейробиологов [11]:

«Прорыв, произошедший в последние десятилетия в области технического оснащения исследований, как ни странно, не привел к кардинальному изменению ситуации в понимании работы мозга. Да, резко увеличилось число научных статей. Но в абсолютном большинстве эти работы сообщают нам о том, что в определенной зоне мозга обнаружена реакция на определенный раздражитель или что при выполнении определенной деятельности изменился рисунок ЭЭГ. Существенно меньше исследований, где показано, как именно происходит реорганизация работающих структур мозга при том или ином действии, как происходит мыслительный контроль какой-либо деятельности, как обнаруживается конфликт и подготовленное действие либо разрешается, либо запрещается или выбирается наиболее целесообразное поведение.

По пальцам можно пересчитать статьи, где сообщается о механизмах работы мозга, какими законами он управляет, как взаимодействуют его структуры.»

Чтобы говорить о языках высокого уровня, надо сначала отметить, что сам мозг можно рассматривать на нескольких уровнях:

- 1) большие нейронные структуры;
 - 2) малые ансамбли и информатика межнейронных связей: передача и прием сигналов нейронами; изменение дискретного состояния нейрона (возбуждение или торможение) в результате приема сигнала;
 - 3) физика и геометрия нейрона и внеклеточного пространства (ВКП): процессы возбуждения, секреции и рецепции в нейронах; диффузия, динамика концентрации и обратный захват трансмиттеров в ВКП;
 - 4) молекулярно-генетический уровень нервной клетки.
- Этот список образует иерархию, в которой
- описание каждого уровня может являться интерпретацией описаний предыдущего (более нижнего) уровня;
 - при переходе «вверх» на следующий уровень происходит свертка параметров, т.е. их укрупнение (объединение нескольких параметров в один интегральный параметр) и игнорирование

тех параметров, которые на данном уровне не считаются существенными.

Приведенная иерархия проясняет место моделей, описанных в разделе 2. Большинство непрерывных моделей относятся к моделированию 3-го уровня; практически все дискретные модели – это модели 2-го уровня.

Ярким примером свертки параметров является модель нейрона Маккаллока – Питтса, о которой уже говорилось в предыдущем разделе. Эта модель впервые предложила способ описания процессов передачи информации, т.е. обмена сигналами между нейронами. С точки зрения этих процессов вся сложная электродинамика нейрона работает на то, чтобы генерировать и передать сигнал. Именно генерация и передача сигнала существенна для этой модели; поэтому практически вся физика и анатомия нейрона в этой модели свертывается. Нет ни дендритов, ни мембранны, ни ионных каналов, ни деполяризации и гиперполяризации. Физика прохождения сигнала по аксону, молекулярные процессы в синаптических щелях, химическая или электрическая природа синапсов остаются за бортом. Электрические характеристики сигнала (амплитуда, частота спайков и т.д.) также несущественны. Важна двоичная природа сигнала: либо он есть, либо его нет. В итоге остаются входы с весами (бывшие синапсы), выход (бывший аксон), передающий двоичный сигнал на входы других нейронов, и закон преобразования (1) входных сигналов в выходные, использующий абстрактное понятие порога.

Следует заметить, что эта свертка оказалась слишком грубой: было проигнорировано много биологических параметров, которые, как постепенно выяснялось, являются информационно значимыми. Поэтому первоначально возникший интерес биологов к этой модели довольно быстро угас. Однако, не став реальным средством моделирования биологических нейронных сетей, модель Маккаллока – Питтса по-прежнему сохраняет свое методологическое значение, заключающееся в том, что она допускает различные расширения и модификации, приближающие ее к биологической реальности. Эти ее возможности активно использовались в теории искусственных нейронных сетей, прежде всего за счет введения различных функций активации. Тем самым модель Маккаллока – Питтса – именно потому, что она очень грубо

и слишком многое не учитывает, – служит примером *минимальной (базовой) модели*, т.е. модели, которая в дальнейшем только расширяется и уточняется, но исходные принципы не меняются. Такие минимальные модели имеются практически во всех естественных науках: законы Ньютона в механике, планетарная модель атома Бора – Резерфорда в атомной физике, таблица Менделеева в химии, машина Тьюринга в вычислительных науках. Как правило, именно с них начинается построение строгих теорий.

Возвращаясь к приведенной выше иерархии уровней описания мозга, мы видим, что непрерывные и дискретные модели описывают разные уровни его функционирования и принципиально не сопоставимы. В терминах непрерывных моделей можно с большой степенью точности описывать физико-химические свойства и процессы в нейронах и нейронных сетях: прохождение спайков по аксону, процессы, происходящие в синаптической щели, протекание ионов через мембрану и т.д. Однако многие из этих параметров несущественны для описания информационных процессов в нервных системах, подобно тому, как для понимания работы компьютера не обязательно знать физические процессы, происходящие в его элементах и схемах. Описание электродинамики требует языка физики, который со временем Ньютона использует методы математического анализа. Для описания межнейронных связей, проходящей по ним информации и ее влияния на поведение ансамблей и организма в целом гораздо больше подходит язык информатики, возникший во второй половине XX века – язык дискретной математики.

Параметры, существенные для описания информатики нервной системы, это:

- тип секреции нейрона (выход) и рецепторы нейрона (вход) – в терминах нейротрансмиттеров и синаптических связей;
- динамически меняющиеся связи (химические и электрические) между нейронами и ансамблями, определяемые составом и концентрацией трансмиттеров в ВКП;
- характер эндогенной активности нейронов (динамика их мембранных потенциалов);
- характер зависимости выходных сигналов от входных (с учетом разного химизма нейронов и типов их электрической активности);

- временные последовательности сигналов и описание паттернов в этих терминах;
- наличие памяти у нейронов и ансамблей (в терминах дискретных состояний, меняющихся порогов и весов связей).

Первые два вида параметров (входы, выходы и структура связей) характеризуют структурные свойства нервных систем. Адекватным языком для их описания является язык теории графов. Остальные параметры характеризуют функциональные (динамические) свойства. Для описания этих свойств наиболее пригодны различные модели конечных алгоритмов: конечные автоматы и их расширения.

4. О моделировании гетерохимических взаимодействий в нейронных сетях

По-видимому, первой работой в области моделирования гетерохимических взаимодействий между нейронами был краткий набросок бессинаптической дискретной модели, описанный в [16]¹. В нем показано, как три нейрона, каждый из которых секретирует свой специфический трансмиттер в общее внеклеточное пространство, могут генерировать трехфазный ритм при отсутствии синаптических контактов.

С начала 90-х гг., когда наличие объемной передачи стало общепризнанным фактом, стали появляться математические модели гетерохимических взаимодействий. Не претендуя на полноту обзора, упомянем отдельные работы, связанные с различными аспектами этих взаимодействий.

В модели Коха и Сегева [82] вводится четыре типа рецепторов к двум трансмиттерам (глутамат и ГАМК), по-разному влияющих на активность нейронов. Ответ нейронов на отдельные нейротрансмиттеры моделируется расширением модели Ходжкина – Хаксли.

В работе [26] приводятся оценки требований к пространству и потреблению энергии для синаптической и несинаптической (объемной) передачи сигналов. На их основе делается вывод,

¹ Эта статья перепечатана в недавно вышедшем сборнике [6].

что «очень маловероятно, что синапсы могут быть единственным средством передачи информации в мозгу».

В другой работе этих авторов [22] высказывается гипотеза, что для нейронных ансамблей, управляющих «массовыми функциями», такими как сон, бдительность, чувство голода, тонус мозга и настроение, энергетически более выгодна несинаптическая передача сигналов. Для исследования таких ансамблей (модулей) предлагается термодинамический подход. Нейронный модуль должен иметь степени свободы, положение в фазовом пространстве, энергию и другие коллективные свойства. Жесткие связи между нейронами заменяются вероятностными взаимодействиями через внеклеточное пространство. Для ансамбля, содержащего три нейрона и три трансмиттера, построена его траектория в фазовом пространстве. Отметим, что предложенный подход и связанная с ним математика (нелинейная динамика) близки к направлению, изложенному в упомянутом выше обзоре [13].

В работе [46] предложена вычислительная теория, описывающая роль четырех основных нейромодуляторов (дофамина, серотонина, норадреналина и ацетилхолина) в регулировании распределенных механизмов обучения в мозге животных. В основе модели обучения лежит марковская схема принятия решений агентом, который наблюдает состояние среды и предпринимает действие в соответствии со своей стратегией, которая является либо детерминированной, либо стохастической. В ответ на действие агента состояние окружающей среды изменяется либо детерминированно, либо стохастически в соответствии с марковской матрицей переходов. Вознаграждение задается детерминированно или стохастически. Цель обучения с подкреплением состоит в том, чтобы найти оптимальную стратегию, которая максимизирует ожидаемую сумму будущих вознаграждений.

В работах [62, 63] рассматриваются модели взаимодействия эндогенных нейромодуляторов – ацетилхолина и дофамина – с экзогенным нейромодулятором – никотином, приводящего к никотиновой зависимости.

В статье [129] представлена вычислительная модель, которая одновременно рассматривает секрецию, диффузию и поглощение (обратный захват) дофамина; учитывает множественные события

секреции; рассматривает как синаптическую, так и объемную передачу, включая геометрию синаптической щели. Процесс диффузии описывается уравнением в частных производных. Отмечается, что не всякий спайк вызывает выброс трансмиттера; при выбросе содержимое везикулы может выделяться не полностью. Модель содержит два уровня разрешения: крупномасштабный (моделирование всех процессов во внеклеточном пространстве) и мелкомасштабный (моделирование внутри синаптических щелей с высокой вычислительной эффективностью).

В статье [107] рассматриваются пары нейронов, связанных разными синапсами: электрическими и химическими. Авторы исследуют совокупный эффект электрических и химических взаимодействий на генерацию паттернов ритмической активности. Вводится модель скорости возбуждения, которая точно описывает динамику среднего поля гетерогенных популяций нейронов, описываемых моделью «квадратичный Integrate-and-Fire» как с химическими, так и с электрическими синапсами.

В [119] исследуется трехслойная нейронная сеть со сложными взаимодействиями между нейронами. Помимо взаимодействия через химические и электрические синапсы исследуются эфаптические связи, которые могут возникать между соседними (соприкасающимися) нейронами. Они возникают вследствие обмена ионами между клетками или в результате локальных электрических полей.

Часто химические модели описывают эффекты нейромодуляции, порождаемые воздействием тех или иных нейротрансмиттеров. Нейромодуляция заключается в том, что под действием тех или иных химических веществ в нейронных сетях изменяются паттерны активности [64, 91]. Структурные связи между нейронами задают основу для их взаимодействия. Разные нейромодуляторы активизируют разные подсети и разные ритмы, таким образом, с помощью химических воздействий изменяются состав и активность нейронных ансамблей [27]. Кроме того, важную роль играет принципиальное разнообразие и неоднородность нейротрансмиттеров, типов нейронов и типов их взаимодействий [25, 48].

Воздействие химических веществ, нейромодуляторов, на нейроны может вызывать цепочки внутриклеточных реакций,

которые не изменяют мембранный потенциал напрямую, но изменяют свойства самих нейронов: их восприимчивость к трансмиттерам, порог возбуждения, паттерны электрической активности и т.д.

Почти все известные нам гетерохимические модели – это модели 3-го уровня. Подобно тому, как электрические модели 3-го уровня описывают процессы генерации потенциала действия, его передачу по аксону и процессы, проходящие в синаптической щели, гетерохимические модели этого уровня исследуют процессы секреции трансмиттеров во всем объеме ВКП, скорости их диффузии, динамику их концентрации и т.д. Как правило, они исследуют конкретные случаи объемной передачи, и для каждого случая строится своя модель. При всей теоретической и практической (в частности, для фармакологии) важности таких исследований эти модели не содержат средств для описания информационных взаимодействий внутри ансамбля и между ансамблями, определяющих поведение организмов. Немногочисленные модели 1-го уровня типа [22] и [46], упомянутые выше, также этих средств не содержат.

Каждая сложившаяся парадигма постепенно обзаводится своей базовой моделью, которая в дальнейшем расширяется и конкретизируется. Для электрической парадигмы такие модели существуют уже более 70 лет – это модель Ходжкина – Хаксли для 3-го уровня и модель Маккаллока – Питтса для 2-го уровня. Для формирующейся у нас на глазах гетерохимической парадигмы таких моделей пока нет. В следующем разделе будет представлена попытка устраниТЬ этот пробел. Мы опишем дискретную базовую модель 2-го уровня, последовательные версии которой публиковались в 2017–2020 гг. Но сначала изложим основные принципы, лежащие в основе предлагаемого подхода.

Для описания информационных процессов (как электрических, так и химических), происходящих в сетях биологических нейронов, существующие дискретные модели нуждаются в существенном расширении, которое должно происходить по нескольким направлениям. Отметим главные из них.

1. Во всех описанных выше дискретных моделях нейроны соединены жесткими «проводочными» связями – аксонами. Поэтому анатомия сети не может претерпевать быстрых изменений

и перестроек. Однако, как уже отмечалось во введении, при неизменной анатомии нейронный ансамбль обладает репертуаром различных поведений. Выбор конкретного поведения определяется набором трансмиттеров, присутствующих во внеклеточном пространстве (ВКП) в данный момент, и уровнем их концентрации. Поэтому понятие связи в нейросетевых моделях должно быть расширено: связями должны быть не только локальные синаптические связи, наблюдаемые анатомически, но и трансмиттерные взаимодействия (volume transmission) нейронов через ВКП, которые реализуются только в динамике. Трансмиттерные взаимодействия широковещательны, т.е. возникают сразу между многими нейронами ВКП и гораздо более изменчивы, что позволяет динамично перестраивать структуру связей и тем самым реализовать процессы нейромодуляции.

2. Нейроны мозга функционально различны. Эти различия лежат в самой основе работы нервной системы, а вовсе не являются дополнительным (необязательным при упрощении) свойством нейронов. Модели нейронных сетей должны быть гетерогенными по крайней мере в двух отношениях. Во-первых, они должны отражать информационно значимое разнообразие трансмиттеров и чувствительных к ним рецепторов. Количество типов взаимодействий определяется количеством трансмиттеров и их комбинаций, присутствующих в модели. Взаимодействия между нейронами не бинарны, и модель из «черно-белой» должна стать «цветной», причем число цветов должно соответствовать числу разных трансмиттеров, присутствующих в рассматриваемом нейронном контексте; традиционный бинарный язык логических (булевых) сетей уже не подходит. Во-вторых, модель должна включать нейроны с разными типами активности. Вариант такой типологии имеется в работе [113], упомянутой в разделе 2.2. Необходима ее формализация в дискретных терминах.

3. В существующих дискретных моделях взаимодействия нейронов синхронны: при подаче сигналов одновременно на входы нескольких нейронов они должны возбудиться (или затормозиться) одновременно. Это означает, что времена реакции на внешний сигнал у всех нейронов должны быть одинаковыми, что слабо соответствует биологической реальности. Поэтому реалистичная модель должна быть асинхронной.

5. Дискретная модель мультитрансмиттерных взаимодействий

5.1. ОПИСАНИЕ ОБЪЕКТА МОДЕЛИРОВАНИЯ

Сначала опишем основные черты объекта, который мы собираемся моделировать. Объект моделирования – это всегда идеализация, сознательно игнорирующая те свойства реального объекта, которые считаются несущественными для целей моделирования. Наша цель – создание базовой (минимальной) дискретной модели 2-го уровня, которая формализует основные принципы химических взаимодействий между нейронами, общие для любых видов таких взаимодействий. Таким образом, речь будет идти о дискретном моделировании химической коммуникации, происходящей между конкретными нейронами в сетях с небольшим количеством нейронов, в которых каждый нейрон имеет специфические свойства, а набор трансмиттеров может быть произвольным. Типичным примером таких сетей являются центральные генераторы паттерна [3, 96] – сообщества нейронов, генерирующие упорядоченную моторную выходную активность.

Малая нейронная сеть (нейронный ансамбль) представляет собой множество нейронов, находящихся в общем химическом окружении – внеклеточном пространстве (ВКП), где содержатся различные нейротрансмиттеры, которые либо выделяются самими нейронами, либо поступают извне. Нейроны обладают рецепторами, которые могут располагаться не только в синаптической щели, но и по всей мембране [27, 47, 129]; при этом каждый рецептор способен реагировать только на один вид трансмиттеров. Реакция рецептора заключается в его действии на мембранный потенциал (МП) нейрона: оно может иметь разный знак (возбуждающее либо тормозящее) и разную силу влияния (вес). Химическая коммуникация нейронов (*volume transmission*) происходит через общее ВКП: каждый нейрон имеет доступ к общему химическому окружению [5, 21].

Нейроны разнородны; тип нейрона определяется тремя основными характеристиками:

- трансмиттер-специфичностью: трансмиттером, который он выделяет [1, 15, 35];

- множеством рецепторов, которыми он обладает (способностью воспринимать те или иные трансмиттеры и типом реакции на них) [1, 15, 35]; рецепторы могут быть как возбуждающими, так и тормозными;
- характером эндогенной активности, т.е. способности активироваться без внешних воздействий.

Различают три типа нейронной активности: фазическая (осцилляторная), тоническая и реактивная. Первые два типа – эндогенные; при третьем типе нейрон активируется только при наличии достаточно сильных внешних воздействий. С «электрической» точки зрения оба эндогенных режима – импульсные и отличаются только частотой; однако характер концентрации трансмиттеров в ВКП при этом различен: при тонической активности концентрация устойчива, а при фазической она колеблется [87].

Известно, что нейроны способны переключаться с одного режима активности на другой. Конкретные параметры этой активности для дофаминовой секреции приведены в [87]. Однако мы ограничимся случаем, когда каждый нейрон имеет постоянный тип активности:

- осциллирующий нейрон (осциллятор) – нейрон, который в отсутствии торможения периодически активируется эндогенно;
- тонический нейрон – нейрон, имеющий постоянную эндогенную активность в отсутствии торможения;
- реактивный (пассивный) нейрон. С функциональной точки зрения он сходен с классическим нейроном Маккаллока – Питтса. У него нет эндогенного возбуждения; он активируется, только если его возбудить, и возбуждение достигнет порога.

Активация нейрона происходит в результате либо эндогенной активности, либо внешних воздействий, когда сумма реакций рецепторов (с учетом их весов) и внутреннего состояния превосходит некоторое пороговое значение. При этом нейрон выделяет (секретирует) трансмиттер.

5.2. МОДЕЛЬ ГЕТЕРОХИМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕЙРОНОВ В МАЛЫХ АНСАМБЛЯХ

В имеющихся публикациях описано два варианта асинхронной модели. Первый вариант [10] не содержит синаптических

связей вообще: важно было показать, что без них можно обойтись, что подтверждается наличием организмов, нервная система которых не содержит синапсов. Более поздний вариант [29] включает синаптические связи и использует более компактную векторизованную запись основных параметров и формул, описывающих динамику модели. Здесь будет кратко описан последний вариант; подробное описание модели можно найти в упомянутых статьях.

Модель представляет собой гетерогенную нейронную систему $S = \langle N, X(t), C, T \rangle$, где $N = \{N_1, \dots, N_n\}$ – множество нейронов, $X(t)$ – вектор, характеризующий концентрации трансмиттеров во внеклеточном пространстве (ВКП), $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ – множество трансмиттеров, T – время, в котором происходит функционирование системы. Время непрерывно, но делится *событиями* на дискретные *такты* $t = 0, 1, \dots$. Событие – это либо изменение концентрации трансмиттеров в ВКП, либо изменение некоторых параметров одного из нейронов (точнее будет сказано ниже). Такт t – это интервал непрерывного времени между соседними событиями.

Нейрон N_i , $i = 1, \dots, n$, имеет *мембранный потенциал* (МП) $U_i(t)$, который в автономном режиме может изменяться в диапазоне $U_i^0 \leq U_i(t) \leq U_i^{\max}$. Он активен, если величина его МП $U_i(t)$ не меньше порогового значения P_i , которое, как правило, меньше U_i^{\max} . Активность характеризуется двоичным параметром $y_i(t)$:

$$(2) \quad y_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } U_i(t) \geq P_i, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Значения U_i^0 , U_i^{\max} и P_i специфичны для каждого нейрона.

Основные параметры системы можно разбить на два класса: *статические* (не меняющиеся в процессе функционирования) и *динамические* (меняющиеся во времени).

Статические параметры:

- границы изменения МП U_i^0 , U_i^{\max} ;
- порог P_i ;
- веса рецепторов: матрица $W = (w_{ij})_{n \times m}$, где w_{ij} – суммарный вес всех рецепторов нейрона N_i , чувствительных к трансмиттеру c_j ; $w_{ij} = 0$ означает отсутствие таких рецепторов; веса могут

быть как положительными, так и отрицательными (для тормозных рецепторов)

– дозы выброса трансмиттеров нейронами: матрица $D = (d_{ij})_{n \times m}$, где d_{ij} – доза выброса трансмиттера c_j нейроном N_i ; каждая строка этой матрицы содержит только одно ненулевое значение;

– синаптические связи: матрица $R = (r_{ij})_{n \times n}$, где r_{ij} – вес синаптической связи между нейронами N_i и N_j ; $r_{ij} = 0$ означает отсутствие такой связи между N_i и N_j ;

– скорости изменения МП в разных фазах активности нейрона. Эти параметры связаны с типами электрической активности; о них будет сказано ниже.

Динамические параметры:

– активности нейронов: двоичный вектор $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ (см. формулу (2));

– мембранные потенциалы $U_i(t)$ нейронов; отметим, что в отличие от многих динамических параметров, которые на протяжении такта не меняются, МП меняется непрерывно: $U_i(t)$ – это значение МП в начале такта t ;

– концентрация трансмиттеров в ВКП: вектор $X(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$, где $x_j(t)$ – сумма доз трансмиттера c_j , выделенных всеми теми нейронами, активными на такте¹ t , которые способны выделять этот трансмиттер:

(3) $X(t) = Y(t)D$;

– внешние воздействия на рецепторы нейронов. Эти воздействия описываются в модели экзогенной скоростью $s_i(t)$ изменения МП, которая пропорциональна (коэффициент пропорциональности полагаем равным 1) концентрации трансмиттеров в КП на такте t , а также весам синаптических связей и рецепторов, чувствительных к этим трансмиттерам:

(4) $s_i(t) = \sum_{j=1}^m w_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^n r_{ij} y_j(t)$.

Введя вектор $S(t) = (s_1(t), \dots, s_n(t))$, получим матричную форму этой формулы:

¹ В действительности величина $x_j(t)$ учитывает не только активности нейронов, но и время пребывания трансмиттера в ВКП после того, как выделивший его нейрон стал пассивным. Но здесь эти тонкости мы опускаем.

$$S(t) = X(t)W^T + Y(t)R.$$

Как уже было отмечено в разделе 5.1, модель рассматривает нейроны с тремя типами активности. Каждому из этих типов соответствует свой набор эндогенных скоростей.

Осциллятор в автономном режиме имеет четыре фазы, которые будут обозначаться бинарным индексом $\alpha = kl$, где $k, l \in \{0, 1\}$, $k = y_i(t)$; $l = 1$, если $U_i(t)$ возрастает, иначе $l = 0$. Цикл осцилляции в этих обозначениях выглядит так:

- $\alpha = 01$ – возрастание $U_i(t)$ неактивного нейрона (от U_i^0 до P_i),
- $\alpha = 11$ – возрастание $U_i(t)$ активного нейрона (от P_i до U_i^{\max}),
- $\alpha = 10$ – убывание $U_i(t)$ активного нейрона (от U_i^{\max} до P_i),
- $\alpha = 00$ – убывание $U_i(t)$ неактивного нейрона (от P_i до U_i^0).

Четырем фазам соответствуют четыре эндогенных скорости: v_{ien}^{01} и v_{ien}^{11} – положительные, v_{ien}^{00} и v_{ien}^{10} – отрицательные. Все моменты смены фаз являются событиями, хотя при переходах от $\alpha = 11$ к $\alpha = 10$ и от $\alpha = 00$ к $\alpha = 01$ активность нейрона не меняется.

Тонический нейрон в автономном режиме активен постоянно; у него две положительные эндогенные скорости v_{ien}^{01} (в пассивном состоянии) и v_{ien}^{11} (в активном состоянии), которые «тянут» МП вверх.

Реактивный нейрон в автономном режиме пассивен постоянно; у него две отрицательные скорости v_{ien}^{00} (в пассивном состоянии) и v_{ien}^{10} (в активном состоянии), которые «тянут» МП вниз.

Теперь можно определить суммарную скорость $v_i(t)$ изменения МП нейрона N_i на такте t :

$$(5) \quad v_i(t) = s_i(t) + v_{ien}^{\alpha}(t).$$

На протяжении такта t суммарная скорость не меняется. Это значит, что в течение любого такта $U_i(t)$ меняется линейно, и весь график изменения МП любого нейрона является кусочно-линейным.

Наблюдаемая динамика системы представляет собой последовательность векторов активности $Y(0), Y(1), \dots, Y(t), Y(t+1), \dots$ Переход от $Y(t)$ к $Y(t+1)$ связан с наступлением очередного

события, т.е. либо изменения активности одного из нейронов (которое изменяет концентрацию трансмиттеров в ВКП, либо достижения каким-либо нейроном одной из границ изменения МП, т.е. U_i^0 или U_i^{\max} . Задача моделирования функционирования нейронной системы, т.е. вычисления последовательности $Y(0), \dots, Y(t), \dots$, заключается в том, чтобы, зная все параметры системы в момент t , определить, какое именно ближайшее событие наступит, т.е. в какой момент непрерывного времени начнется такт $t + 1$, а затем пересчитать все динамические параметры этого такта.

У каждого нейрона на каждом такте существует свое ближайшее событие. Каким оно будет и в какой момент может наступить, зависит от двух дополнительных динамических параметров: *остаточного потенциала* и *остаточного времени*. *Остаточный потенциал* $\Delta U_i(t)$ в момент t – это величина, равная «расстоянию» до наступления *ближайшего события*, связанного с нейроном N_i , и которая, в свою очередь зависит от активности нейрона, величины и знака суммарной скорости. Например, если осциллятор пассивен ($U_i(t) < P_i$) и находится в фазе $\alpha = 00$, но при этом знак суммарной скорости положителен (это означает, что поступило сильное возбуждающее воздействие), то МП начнет расти и ближайшим событием будет достижение порога снизу и активация осциллятора; при этом $\Delta U_i(t) = P_i - U_i(t)$.

Все такие зависимости сводятся в таблицы переходов, которые каждой комбинации значений параметров ($y_i(t)$, $v_{i\text{en}}^\alpha$, знак $v_i(t)$) ставят в соответствие ближайшее событие и формулу вычисления $\Delta U_i(t)$. Эти таблицы различны для разных типов активности нейронов и здесь не приводятся.

Остаточное время $\tau_{ri}(t)$ (время, оставшееся до достижения порога) зависит от $\Delta U_i(t)$ и от текущей суммарной скорости. Оно вычисляется следующим образом:

$$(6) \quad \tau_{ri}(t) = \begin{cases} \frac{\Delta U_i(t)}{|v_i(t)|}, & \text{если } v_i \neq 0 \text{ и } \Delta U_i(t) < \infty, \\ \infty & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Знак ∞ означает, что остаточное время нейрона N_i не влияет на вычисление ближайшего события и не должно в нем участвовать.

Все нейроны, у которых остаточное времяя конечно, стремятся к своему ближайшему событию. В этой конкуренции побеждает тот нейрон, у которого это времяя минимально.

Таким образом, конкретный алгоритм вычисления функционирования нейронной системы заключается в том, чтобы, зная вектор $U(t)$ текущих потенциалов всех нейронов системы:

1) последовательно вычислить векторы $X(t)$ (формула (3)), $S(t)$ (формула (4)), суммарные скорости (формула (5)), остаточные потенциалы (по таблицам переходов) и остаточные времена (формула (6));

2) найти минимальное из остаточных времен τ_g : его величина является длительностью такта t : $\tau_{rg} = \tau(t)$; наступившее событие заключается в изменении активности нейрона N_g и/или его эндогенной скорости;

3) вычислить вектор $U(t + 1)$ по формуле

$$U_i(t + 1) = U_i(t) + \tau(t) \cdot v_i(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

При этом:

- если $U_i(t) + \tau(t) \cdot v_i(t) > U_i^{\max}$, полагаем $U_i(t) = U_i^{\max}$;
- если $U_i(t) + \tau(t) \cdot v_i(t) < U_i^{\min}$, полагаем $U_i(t) = U_i^{\min}$.

Предложенная модель позволила построить малые сети, соответствующие нейронным ансамблям, существующим в живой природе. Были построены полуцентровые осцилляторы, состоящие из двух нейронов, возбуждающихся в противофазе. Такие осцилляторы лежат являются строительными элементами многих более сложных нейронных ансамблей, в частности центральных генераторов паттерна [114]. В [29] описаны построенные генераторы трехфазного ритма пищевого центрального генератора улитки-прудовика *Lymnaea stagnalis* [31], а также пищевая сеть моллюска аплазии (морского зайца). В [4] описаны построенные ансамбли, управляющие походкой гексаподов, и механизмы нейромодуляции – переключения паттернов ритмической активности без структурной перестройки сетей.

6. Заключение

В статье описаны подходы к математическому моделированию взаимодействия нейронов в нейронных ансамблях и сетях.

Несмотря на достаточно большой объем статьи и длинный список литературы, этот обзор не претендует на полноту. За рамками рассмотрения остался огромный массив работ по структурной и функциональной коннектомике, теоретико-информационные модели (отсылаем читателя к статьям Дж. Тонони, О. Спорнса и др.), а также работы К. Фристона и К.В. Анохина, открывающие новые области исследований.

Мы остановились на моделях механизмов взаимодействий нейронов и динамики их возбуждений, выделив две парадигмы: «электрическую» и «химическую». В рамках «электрической» парадигмы мы описали два больших класса: дискретные и непрерывные модели. В дискретных моделях, искусственных нейронных сетях нейроны очень просты; вся сложность ИНС заключена в связях большого количества простых элементов. В противоположность дискретному подходу, непрерывные модели, описывающие динамику мембранныго потенциала нейронов, как правило, имеют большую вычислительную сложность. В отдельный класс выделены спайковые нейронные сети, которые обладают наибольшей биологической адекватностью среди ИНС, а несложные дифференциальные уравнения и небольшое количество параметров позволяют строить малые нейронные сети, обучающиеся за приемлемое время. Но, как и в обычных ИНС, здесь описываются лишь электрические взаимодействия нейронов, связанных синаптическими связями.

Анализ современных химических моделей нейронной активности показывает, что универсальной гетерохимической модели, подобной моделям Ходжкина – Хаксли или Маккаллока – Питтса для электрической активности, среди них нет. Как правило, такие модели описывают динамику отдельных трансмиттеров: процессы их генерации, движения по аксону, секреции, диффузии, обратного захвата и т.д.

Дискретная гетерохимическая модель, претендующая на такую универсальность, описана в публикациях [10, 29]. В разделе 5 приведен ее краткий очерк. Предложенная модель фактически вводит новое понятие нейронной сети. Наряду с «проводными» синаптическими связями в ней присутствуют беспроводные широковещательные химические связи, которые не имеют анатомического воплощения и активируются только тогда, когда

активен нейрон-передатчик. Можно говорить о новом виде коннектома – хемоконнектоме. Этот термин уже появился в литературе: см., например, [40]. Впрочем, в этой статье точного («модельного») определения хемоконнектома нет.

Успехи, продемонстрированные в последние годы искусственными нейросетями и алгоритмами глубокого обучения, впечатляют. Модели формальных нейронов в ИНС очень просты и пренебрегают множеством свойств биологических нейронов. Однако по крайней мере два свойства живых нейронов остались сильно недооцененными. Это эндогенная активность и широковещательный гетерохимический обмен сигналами. Первый шаг к моделированию этих свойств был сделан в предложенной нами модели. Мы надеемся, что дальнейшие исследования в этом направлении дадут начало новому прорыву в информационных технологиях.

Литература

1. АРТЁМОВ Н.М., САХАРОВ Д.А. *Хачатур Седракович Коштоянц*. – М.: Наука, 1986. Гл. 3. Работы по химическим основам механизмов нервной деятельности. – С. 106–162.
2. БАЗЕНКОВ Н.И., ВОРОНЦОВ Д.Д., ДЬЯКОНОВА В.Е., ЖИЛЯКОВА Л.Ю. и др. *Дискретное моделирование межнейронных взаимодействий в мультирансмиттерных сетях* // Искусственный интеллект и принятие решений. – М.: Изд. ФИЦ «Информатика и управление» РАН, 2017. – №2. – С. 55–73.
3. БАЛАБАН П.М., ВОРОНЦОВ Д.Д., ДЬЯКОНОВА В.Е., ДЬЯКОНОВА Т.Л. и др. *Центральные генераторы паттерна (CPGs)*. // Журн. высш. нерв. деят. – 2013. – №63(5). – С. 1–21.
4. БОЛДЫШЕВ Б.А., ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Нейромодуляция как инструмент управления нейронными ансамблями* // Проблемы управления. – 2021. – №2. – С. 76–84.
5. ДЬЯКОНОВА В.Е. *Нейротрансмиттерные механизмы контекст-зависимого поведения* // Журн. высш. нерв. деят. – 2012. – №62(6). – С. 1–17.

6. ДЬЯКОНОВА В.Е., САХАРОВ Д.А. *Пострефлекторная нейробиология поведения*. – М.: Издательский дом ЯСК, 2019. – 592 с.
7. ЕМЕЛЬЯНОВ-ЯРОСЛАВСКИЙ Л.Б. *Интеллектуальная квазибиологическая система. Индуктивный автомат*. – М.: Наука, 1990. – 111 с.
8. КУЗНЕЦОВ О.П. *Сложные сети и распространение активности* // Автоматика и телемеханика. – 2015. – №12. – С. 3–26.
9. КУЗНЕЦОВ О.П. *Стационарные ансамбли в пороговых сетях* // Автоматика и телемеханика. – 2017. – №3. – С. 111–129.
10. КУЗНЕЦОВ О.П., БАЗЕНКОВ Н.И., БОЛДЫШЕВ Б.А., ЖИЛЯКОВА Л.Ю. и др. *Асинхронная дискретная модель химических взаимодействий в простых нейронных системах* // Искусственный интеллект и принятие решений. – М.: Изд. ФИЦ «Информатика и управление» РАН. – 2018. – №2. – С. 3–20.
11. МЕДВЕДЕВ С.В. *Мозг против мозга: новеллы о мозге*. – М.: Бослэн, 2017. – 145 с.
12. МИНСКИЙ М., ПЕЙПЕРТ С. *Персептроны*. – М.: Мир, 1971. – 261 с.
13. РАБИНОВИЧ М.И., МЮЕЗИНОЛУ М.К. *Нелинейная динамика мозга: Эмоции и интеллектуальная деятельность* // Успехи физических наук. – 2010. – Т. 180, № 4. – С. 371–386.
14. РОЗЕНБЛATT Ф. *Принципы нейродинамики: Перцептроны и теория механизмов мозга. (Principles of Neurodynamic: Perceptrons and the Theory of Brain Mechanisms.)* – М.: Мир, 1965. – 480 с.
15. САХАРОВ Д.А. *Биологический субстрат генерации поведенческих актов* // Журн. общ. биологии. – 2012. – №73(5). – С. 334–348.
16. САХАРОВ Д.А. *Синаптическая и бессинаптическая модели нейронной системы* // Простые нервные системы. Ч.2. – Казань: КГУ, 1985. – С.78–80.
17. ЧАПЛИНСКАЯ Н.В. *Обучение спайковой нейронной сети на основе изменения временных задержек на синапсах* // Сборник трудов XXIV Международной научно-технической конференции «Нейроинформатика-2022». – Москва: МФТИ, 2022. – С. 78–87.

18. ШУМСКИЙ С.А. *Машинный интеллект. Очерки по теории машинного обучения и искусственного интеллекта.* – М: РИОР, 2022. – 340 с.
19. ШУМСКИЙ С.А. *Воспитание машин: Новая история разума.* – М.: Альпина нон-фикшн, 2021. – 174 с.
20. ABBOTT L.F. *Lapicque's introduction of the integrate-and-fire model neuron (1907)* // Brain Research Bulletin. – 1999. – No. 50 (5/6). – P. 303–304.
21. AGNATI L.F., GUIDOLIN D., GUESCINI M., GENEDANI S. et al. *Understanding wiring and volume transmission* // Brain Res. Rev. – 2010. – No. 64 – P. 137–159.
22. AIELLO G.L., BACH-Y-RITA P. *Nonsynaptically connected neural nets* // European Symposium on Artificial Neural Networks (ESANN 2000), Methuen, Bruges. – 2000. – P. 425–428.
23. ALENCAR B. M., CANÁRIO J.P., NETO R.L., PRAZERES C. et al. *Fog-DeepStream: A new approach combining LSTM and Concept Drift for data stream analytics on Fog computing* // Internet of Things. – 2023. – Vol. 22. – 100731.
24. ALNAJJAR F., MURASE K. *Sensor-fusion in spiking neural network that generates autonomous behavior in real mobile robot* // IEEE Int. Joint Conf. on Neural Networks – 2008 (IEEE World Congress on Computational Intelligence). – IEEE, 2008. – P. 2200–2206.
25. AONUMA H., MEZHERITSKIY M., BOLDYSHEV B., TOTANI Y. et al *The Role of Serotonin in the Influence of Intense Locomotion on the Behavior Under Uncertainty in the Mollusk Lymnaea stagnalis* // Frontiers in Physiology. – 2020. – Vol. 11. – N Art. 221.
26. BACH-Y-RITA P., AIELLO G.L. *Nerve length and volume in synaptic versus diffusion neurotransmission: a model* // NeuroReport. – 1996. – No. 7. – P. 1502–1504.
27. BARGMANN C.I. *Beyond the connectome: How neuromodulators shape neural circuits* // BioEssays. – 2012. – Vol. 34, No.6. – P. 458–465.
28. BARONCHELLI A., FERRER-I-CANCHO R., PASTOR-SATORRAS R., CHATER N. et al. *Networks in Cognitive Science* // Trends in Cognitive Sciences. – 2013. – Vol. 17, No. 7. – P. 348–360.

29. BAZENKOV N.I., BOLDYSHEV B.A., DYAKONOVA V.E., KUZNETSOV O.P. *Simulating Small Neural Circuits with a Discrete Computational Model* // Biol. Cybern. – 2020. – No. 114. – P. 349–362.
30. BENJAMIN B.V., GAO P., MCQUINN E., CHOUDHARY S. et al. *Neurogrid: A Mixed-Analog-Digital Multichip System for Large-Scale Neural Simulations* // Proc. of the IEEE. – 2014. – Vol. 102, No. 5. – P. 699–716.
31. BENJAMIN P.R. *Distributed network organization underlying feeding behavior in the mollusk Lymnaea* // Neural Syst Circuits. – 2012. – Vol. 2, No. 4.
32. BISWAS S.S. *Role of Chat GPT in Public Health* // Ann Biomed Eng 51. – 2023. – P. 868–869.
33. BISWAS S.S. *Potential Use of Chat GPT in Global Warming* // Ann Biomed Eng 51. – 2023. – P. 1126–1127.
34. BOUGANIS A., SHANAHAN M. *Training a spiking neural network to control a 4-dof robotic arm based on spike timing-dependent plasticity* // IEEE Int. Joint Conf. on Neural Networks – 2010 (IJCNN–2010). – IEEE, 2010. – P. 1–8.
35. BREZINA V. *Beyond the wiring diagram: signalling through complex neuromodulator networks* // Philos. Trans. R. Soc. Lond. B. Biol. Sci. – 2010. – Vol. 365(1551). – P. 2363–2374.
36. BUBECK S., CHANDRASEKARAN V., ELDAN R., GEHRKE J. et al. *Sparks of artificial general intelligence: Early experiments with gpt-4* // arXiv preprint arXiv:2303.12712. – 2023.
37. BULLMORE E., SPORNS O. *Complex brain networks: graph theoretical analysis of structural and functional systems* // Nature Reviews Neuroscience. – 2009. – No. 10. – P. 186–198.
38. BYRNE J. *Learning and memory: a comprehensive reference*. – Academic Press. – 2017. – 2402 p.
39. DAVIES M., SRINIVASA N., LIN T. et al. *Loihi: A Neuromorphic Manycore Processor with OnChip Learning* // IEEE Micro. – 2018. – Vol. 38, No. 1. – P. 82–99.
40. DENG B., LI Q., LIU X., CAO Y. et al. *Chemoconnectomics: Mapping Chemical Transmission in Drosophila* // Neuron. – 2019. – Vol. 101, Iss. 5, 6. – P. 876–893.

41. DENG L., YU D. *Deep Learning: Methods and Applications* // Foundations and Trends in Signal Processing. – 2014. – Vol. 7, Nos. 3–4. – P. 197–387.
42. DITZLER G., POLIKAR R., ROSEN G. *Multi-Layer and Recursive Neural Networks for Metagenomic Classification* // IEEE Trans. on NanoBioscience. – 2015. – Vol. 14, No. 6. – P. 608–616.
43. DONG L., XU B. *CIF: Continuous Integrate-And-Fire for End-To-End Speech Recognition* // IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing – 2020 (ICASSP–2020), Barcelona, Spain. – 2020. – P. 6079–6083.
44. DONG Y., YANG S., LIANG Y., WANG G. *Neuromorphic dynamics near the edge of chaos in memristive neurons* // Chaos, Solitons & Fractals. – 2022. – Vol. 160. – 112241.
45. DOROGOVTSEV S. *Lectures on Complex Networks*. – Oxford: Oxford Univer. Press, 2010. – 144 p.
46. DOYA K. *Metalearning and Neuromodulation* // Neural Networks. – 2002. – Vol. 15(4-6). – P. 495–506.
47. DYAKONOVA T.L., DYAKONOVA V.E. *Coordination of rhythm-generating units via NO and extrasynaptic neurotransmitter release* // J. Comp. Physiol. A. – 2010. – Vol. 196, No. 8. – P. 529–541.
48. DYAKONOVA T.L., SULTANAKHMETOV G.S., MEZHERRITSKIY M.I., SAKHAROV D.A. et al. *Storage and Erasure of Behavioural Experiences at the Single Neuron Level* // Scientific Reports. – 2019. – Vol. 9, No. 1. – 14733.
49. ESTEVA A., CHOU K., YEUNG S. et al. *Deep learning-enabled medical computer vision* // npj Digit. Med. – 2021. – Vol. 4, No. 5.
50. FAN W., CHEN X., WU H., LI Z. et al. *Firing patterns and synchronization of Morris-Lecar neuron model with memristive autapse* // AEU – Int. Journal of Electronics and Communications. – 2023. – Vol. 158. – 154454.
51. FANG H., WANG Y., HE J. *Spiking neural networks for cortical neuronal spike train decoding* // Neural Computation. – 2010. – Vol. 22, No. 4. – P. 1060–1085.
52. FITZHUGH R. *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane* // Biophysical J. – 1961. – Vol. 1. – P. 445–466.

53. FORTUNA L., BUSCARINO A. *Spiking neuron mathematical models: a compact overview* // Bioengineering. – 2023. – Vol. 10(2). – P. 174.
54. FURBER S.B., GALLUPPI F., TEMPLE S., PLANÀ L.A. *The spinnaker project* // Proc. of the IEEE. – 2014. – Vol. 102, No. 5. – P. 652–665.
55. GALVES A., LÖCHERBACH E. *Infinite Systems of Interacting Chains with Memory of Variable Length – A Stochastic Model for Biological Neural Nets* // Journal of Statistical Physics. – 2013. – Vol. 151. – P. 896–921.
56. GERSTNER W. *Population dynamics of spiking neurons: fast transients, asynchronous states, and locking* // Neural Computation. – 2000. – Vol. 12 (1) – P. 43–89.
57. GERSTNER W., KISTLER W. *Spiking Neuron Models: Single Neurons, Populations, Plasticity*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. – 480 p.
58. GHIGLIAZZA R., HOLMES P. *Minimal models of bursting neurons: The effects of multiple currents and timescales* // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. – 2004. – Vol. 3, No. 4. – P. 636–670.
59. GHIGLIAZZA R., HOLMES P. *A Minimal Model of a Central Pattern Generator and Motoneurons for Insect Locomotion* // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. – 2004. – Vol. 3, No. 4. – P. 671–700.
60. GOODFELLOW I., BENGIO Y., COURVILLE A. *Deep Learning*. – MIT Press, 2016. – 787 p.
61. GÓRSKI T., DEPANNEMAECER D., DESTEXHE A. *Conductance-based adaptive exponential integrate-and-fire model* // Neural Computation. – 2021. – Vol. 33(1). – P. 41–66.
62. GRAUPNER M., GUTKIN B. *Modeling nicotinic neuromodulation from global functional and network levels to nAChR based mechanisms* // Acta Pharmacologica Sinica. – 2009. – Vol. 30. – P. 681–693.
63. GUTKIN B., DEHAENE S., CHANGEUX J.P. *A neurocomputational hypothesis for nicotine addiction* // Proc Natl Acad Sci USA. – 2006. – Vol. 103. – P. 1106–1111.
64. HARRIS-WARRICK R.M. *Neuromodulation and flexibility in Central Pattern Generator networks* // Current Opinion in Neurobiology. – 2011. – Vol. 21, No. 5. – P. 685–692.

65. HAYKIN S. *Neural Networks and Learning Machines (3rd Edition)*. – Prentice Hall, 2009. – 944 p.
66. HAZAN H., CABY S., EARL C., SIEGELMANN H. et al. *Memory via Temporal Delays in weightless Spiking Neural Network* // arXiv preprint arXiv:2202.07132. – 2022.
67. HILL-YARDIN E.L., HUTCHINSON M.R., LAYCOCK R., SPENCER S.J. *A Chat (GPT) about the future of scientific publishing* // Brain Behav Immun. – 2023. – Vol. 110. – P. 152–154.
68. HINDMARSH J.L., ROSE R.M. *A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations* // Proc. of the Royal Society of London. Series B. Biological Sciences. – 1984. – Vol. 221, No. 1222. – P. 87–102.
69. HINTON G.E., OSINDERO S., TEH Y.W. *A fast learning algorithm for deep belief nets* // Neural Computation. – 2006. – Vol. 18. – P. 1527–1554.
70. HODGKIN A.L., HUXLEY A.F. *A quantitative description of membrane current and its applications to conduction and excitation in nerve* // J. Physiol. (Lond.). – 1952. – Vol. 116. – P. 500–544.
71. HOPFIELD J.J. *Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities* // Proc. of National Academy of Sciences USA. – 1982. – Vol. 79, No. 8. – P. 2554–2558.
72. HOPKINS M., PINEDA-GARCÍA G., BOGDAN P.A., FURBER S.B. *Spiking neural networks for computer vision* // Interface Focus. – 2018. – Vol. 8. – No. 4. – 20180007.
73. HU X., LIU C. *Dynamic property analysis and circuit implementation of simplified memristive Hodgkin–Huxley neuron model* // Nonlinear Dynamics. – 2019. – No. 97. – P. 1721–1733.
74. IZHIKEVICH E. *Neural excitability, spiking and bursting* // Int. Journal of Bifurcation and Chaos. – 2000. – Vol. 10, No. 6. – P. 1171–1266.
75. IZHIKEVICH E. *Which Model to Use for Cortical Spiking Neurons?* // IEEE Trans. on Neural Networks. – 2004. – Vol. 15, No. 5. – P.1063–1070.
76. JACKSON M.O. *Social and Economic Networks*. – Princeton Univer. Press, 2010. – 520 p.

77. JAFARIAN M., JOHANSSON K.H. *Synchronization of quadratic integrate-and-fire spiking neurons: Constant versus voltage-dependent couplings* // IEEE 58th Conf. on Decision and Control 2019 (CDC–2019), Nice, France. – 2019. – P. 4711–4716.
78. JENIFER P.I.R., KANNAN S. *Deep Learning with Optimal Hierarchical Spiking Neural Network for Medical Image Classification* // Comput. Syst. Eng. – 2023. – Vol. 44, No. 2. – P. 1081–1097.
79. KHERADPISHEH S.R., GANJTABESH M., THORPE S.J., MASQUELIER T. *STDP-based spiking deep convolutional neural networks for object recognition* // Neural Networks. – 2018. – Vol. 99. – P. 56–67.
80. KHOSHKHOU M., MONTAKHAB A. *Spike-timing-dependent plasticity with axonal delay tunes networks of izhikevich neurons to the edge of synchronization transition with scale-free avalanches* // Frontiers in systems neuroscience. – 2019. – Vol. 13. – P. 73.
81. KLEENE S.C. *Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata* // In: Automata Studies / Eds.: C.E. Shannon, J. McCarthy. – Princeton, Princeton University Press, 1956. (Рус. пер.: КЛИНИ С.К. *Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах* // В кн. Автоматы / Под ред. К.Э. Шеннона и Дж.Маккарти. – М., ИЛ, 1956. С. 15–67).
82. KOCH C., SEGEV I. *Methods in neuronal modeling: from ions to networks*. – Cambridge, Massachusetts: MIT Press. – 1999. – 687 p.
83. LECUN Y., BENGIO Y., HINTON G. *Deep learning* // Nature. – 2015. – Vol. 521, No. 7553. – P. 436–444.
84. LEVAKOVA M., KOSTAL L., MONSEMPÈS C., LUCAS P. et al. *Adaptive integrate-and-fire model reproduces the dynamics of olfactory receptor neuron responses in a moth* // Journal of the Royal Society Interface. – 2019. – Vol. 16, No. 157. – 20190246.
85. LIN J.W., FABER D.S. *Modulation of synaptic delay during synaptic plasticity* // Trends in neurosciences. – 2002. – Vol. 25, No. 9. – P. 449–455.
86. LIN H., WANG C., SUN Y., YAO W. *Firing multistability in a locally active memristive neuron model* // Nonlinear Dyn. – 2020. – No. 100. – P. 3667–3683.

87. LIU CH., GOEL P., KAESER P.S. *Spatial and temporal scales of dopamine transmission* // Nat Rev Neurosci. – 2021. – Vol. 22, No. 6. – P. 345–358.
88. LIU Y., IU H.H.C., QIAN Y. *Implementation of Hodgkin-Huxley neuron model with the novel memristive oscillator* // IEEE Trans. on Circuits and Systems II: Express Briefs. – 2021. – Vol. 68, No. 8. – P 2982–2986.
89. MAASS W., SCHMITT M. *On the complexity of learning for spiking neurons with temporal coding* // Information and Computation. – 1999. – Vol. 153, No. 1. – P. 26–46.
90. MANOHAR N., PRASAD S.S. *Use of ChatGPT in academic publishing: a rare case of seronegative systemic lupus erythematosus in a patient with HIV infection* // Cureus. – 2023. – Vol. 15, No. 2. – e34616.
91. MARDER E., BUCHER D. *Central Pattern Generators and the Control of Rhythmic Movements* // Current Biology. – 2001. – Vol. 11, No. 23. – P. 986–996.
92. MCCULLOCH W.S., PITTS W. *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity* // Bull. Math. Biophys. – 1943. – Vol. 5. – P.115–133. (Рус. пер.: Мак-Каллок У.С., Питтс В. *Логическое исчисление идей, относящихся к нервной активности* // Автоматы: Сб. – М., 1956. – С. 363–384.)
93. MILES V., GIANI S., VOGT O. *Recursive encoder network for the automatic analysis of STEP files* // J Intell Manuf. – 2023. – Vol. 34. – P. 181–196.
94. MORRIS C., LECAR H. *Voltage Oscillations in the barnacle giant muscle fiber* // Biophys. J. – 1981. – Vol. 35, No. 1. – P. 193–213.
95. MOSBACHER Y., KHOYRATEE F., GOLDIN M. et al. *Toward neuroprosthetic real-time communication from *in silico* to biological neuronal network via patterned optogenetic stimulation* // Scientific reports. – 2020. – Vol. 10. – 7512.
96. MULLONEY B., SMARANDACHE C. *Fifty years of CPGs: two neuroethological papers that shaped the course of neuroscience* // Front. Behav. Neurosci. – 2010. – Vol. 4, No. 45. – P. 1–8.
97. MUNI S. S., RAJAGOPAL K., KARTHIKEYAN A., ARUN S. *Discrete hybrid Izhikevich neuron model: Nodal and network behaviours considering electromagnetic flux coupling* // Chaos, Solitons & Fractals. – 2022. – Vol. 155. – 111759.

98. NAGUMO J., ARIMOTO S., YOSHIZAWA S. *An active pulse transmission line simulating nerve axon* // Proc. IRE. – 1962. – Vol. 50. – P. 2061–2070.
99. NADAFIAN A., GANJTABESH M. *Bio-plausible Unsupervised Delay Learning for Extracting Temporal Features in Spiking Neural Networks* // arXiv preprint arXiv:2011.09380. – 2020.
100. NAZARI S., KEYANFAR A., VAN HULLE M.M. *Neuromorphic circuit based on the un-supervised learning of biologically inspired spiking neural network for pattern recognition* // Engineering Applications of Artificial Intelligence. – 2022. – Vol. 116. – 105430.
101. NOBUKAWA S., NISHIMURA H., YAMANISHI T. *Chaotic Resonance in Typical Routes to Chaos in the Izhikevich Neuron Model* // Sci Rep. – 2017. – Vol. 7. – 1331.
102. OUBARI O. *Precise timing and computationally efficient learning in neuromorphic systems: Diss.* – Sorbonne université, 2020.
103. PAUGAM-MOISY H., MARTINEZ R., BENGIO S. *Delay learning and polychronization for reservoir computing* // Neurocomputing. – 2008. – Vol. 71. – Nos. 7–9. – P. 1143–1158.
104. PEHLE C., BILLAUDELLE S., CRAMER B., KAISER J. et al. *The BrainScales-2 Accelerated Neuromorphic System With Hybrid Plasticity* // Frontiers in Neuroscience. – 2022. – Vol. 16.
105. PEI J., DENG L., SONG S. et al. *Towards artificial general intelligence with hybrid Tianjic chip architecture* // Nature. – 2019. – Vol. 572, No. 7767. – P. 106–111.
106. PÉREZ-CARRASCO J.A., ACHA B., SERRANO C., CAMUNAS-MESA L. et al. *Fast vision through frameless event-based sensing and convolutional processing: Application to texture recognition* // IEEE Trans. on Neural Networks. – 2010. – Vol. 21, No. 4. – P. 609–620.
107. PIETRAS B., DEVALLE F., ROXIN A., DAFERTSHOFER A. et al. *Exact firing rate model reveals the differential effects of chemical versus electrical synapses in spiking networks* // Physical Review E. – 2019. – Vol. 100, No. 4. – 042412.
108. RAIMONDO L., HEIJ J., PRIOVOULOS N., KUNDU P. et al. *Advances in resting state fMRI acquisitions for functional connectomics* // NeuroImage. – 2021. – Vol. 243. – 118503.

109. RAJAGOPAL K., MOROZ I., RAMAKRISHNAN B., KARTHIKEYN A. et al. *Modified Morris–Lecar neuron model: effects of very low frequency electric fields and of magnetic fields on the local and network dynamics of an excitable media* // Non-linear Dynamics. – 2021. – Vol. 104, No. 4. – P. 4427–4443.
110. RATHI N., CHAKRABORTY I., KOSTA A., SENGUPTA A. et al. *Exploring neuromorphic computing based on spiking neural networks: Algorithms to hardware* // ACM Computing Surveys. – 2023. – Vol. 55, No. 12. – H. 1–49.
111. RATNASINGAM S., MCGINNITY T.M. *A spiking neural network for tactile form-based object recognition* // IEEE Int. Joint Conf. on Neural Networks – 2011. – IEEE, 2011. – P. 880–885.
112. ROBERTS A., CONTE D., HULL M., MERRISON-HORT R. et al. *Can Simple Rules Control Development of a Pioneer Vertebrate Neuronal Network Generating Behavior?* // The Journal of Neuroscience. – 2014. – Vol. 34, No. 2. – P. 608–621.
113. ROBERTS P.D. *Classification of Temporal Patterns in Dynamic Biological Networks* // Neural Computation: Massachusetts Institute of Technology. – 1998. – Vol. 10, No. 7. – P. 1831–1846.
114. SAKURAI A., KATZ P.S. *The central pattern generator underlying swimming in dendronotus iris: a simple half-center network oscillator with a twist* // J Neurophysiol. – 2016. – Vol. 116, No. 4. – P. 1728–1742.
115. SAXE A., NELLI S., SUMMERFIELD C. *If deep learning is the answer, what is the question?* // Nat Rev Neurosci. – 2021. – Vol. 22. – P. 55–67.
116. SCHEMMEL J., GRÜBL A., HARTMANN S. et al. *Live demonstration: A scaled-down version of the BrainScaleS wafer-scale neuromorphic system* // IEEE Int. Symposium on Circuits and Systems – 2012 (ISCAS–2012). – P. 702.
117. SERRANO-BALBONTÍN A.J., TEJADO I., VINAGRE B.M. *Fractional Integrate-and-Fire Neuron: Analog Realization and Application to Neuromorphic Control* // IEEE Int. Conf. on Fractional Differentiation and Its Applications – 2023 (ICFDA–2023). – 2023. – P. 1–6.
118. SHAFIEI M., PARASTESH F., JALILI M., JAFARI S. et al. *Effects of partial time delays on synchronization patterns*

- in Izhikevich neuronal networks // Eur. Phys. J. B. – 2019. – Vol. 92. – P 36.*
119. SHAFIEI M., JAFARI S., PARASTESH F., OZER M. et al. *Time delayed chemical synapses and synchronization in multilayer neuronal networks with ephaptic inter-layer coupling // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2020. – Vol. 84. – 105175.*
120. SHERSTINSKY A. *Fundamentals of Recurrent Neural Network (RNN) and Long Short-Term Memory (LSTM) network // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2020. – Vol. 404. – 132306.*
121. SHORTEN C., KHOSHGOFTAAR T.M., FURHT B. *Deep Learning applications for COVID-19 // J Big Data. – 2021. – Vol. 8. – 18.*
122. SONG X., WANG H., CHEN Y. *Autapse-induced firing patterns transitions in the Morris–Lecar neuron model // Nonlinear Dynamics. – 2019. – Vol. 96. – P. 2341–2350.*
123. SPORNS O., TONONI G., KÖTTER R. *The human connectome: A structural description of the human brain // PLoS Computational Biology. – 2005. – Vol. 1, No. 4. – e42.*
124. STERRATT D., GRAHAM B., GILLIES A., WILLSHAW D. *Principles of computational modelling in neuroscience. – Cambridge University Press, 2011. – 390 p.*
125. SULTANA F., SUFIAN A., DUTTA P. *Evolution of Image Segmentation using Deep Convolutional Neural Network: A Survey. Knowledge-Based Systems. – 2020. – Vol. 201–202. – 106062.*
126. USHA K., SUBHA P.A., *Hindmarsh-Rose neuron model with memristors // Biosystems. – 2019. – Vol. 178. – P. 1–9.*
127. VAVOULIS D., STRAUB V., KEMENES I., KEMENES G. et al. *Dynamic control of a central pattern generator circuit: a computational model of the snail feeding network // European Journal of Neuroscience. – 2007. – Vol. 25. – P. 2805–2818.*
128. VIVEKANANDHAN G., HAMARASH I.I., ALI ALI A.M., HE S. et al. *Firing patterns of Izhikevich neuron model under electric field and its synchronization patterns // The European Physical Journal Special Topics. – 2022. – Vol. 231, No. 22. – P. 4017–4023.*
129. WIENCKE K., HORSTMANN A., MATHAR D., VILL-RINGER A. et al. *Dopamine release, diffusion and uptake:*

- A computational model for synaptic and volume transmission //*
PLoS Comput Biol. – 2020. – Vol. 16, No. 11. – e1008410.
130. XU L., QI G., MA J. *Modeling of memristor-based Hindmarsh-Rose neuron and its dynamical analyses using energy method //* Applied Mathematical Modelling. – 2022. – Vol. 101. – P. 503–516.
131. XU Q., JU Z., DING S., FENG C. et al. *Electromagnetic induction effects on electrical activity within a memristive Wilson neuron model //* Cogn Neurodyn. – 2022. – Vol. 16. – P. 1221–1231.
132. XU Q., LI Y., SHEN J., LIU J.K. et al. *Constructing deep spiking neural networks from artificial neural networks with knowledge distillation //* Proc. of the IEEE/CVF Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2023. – P. 7886–7895.
133. YADAV P., MISHRA A., KIM S. *Neuromorphic Hardware Accelerators //* In: Artificial Intelligence and Hardware Accelerators. – Cham: Springer International Publishing, 2023. – P. 225–268.
134. YAMAZAKI K., VO-HO V.K., BULSARA D., LE N. *Spiking neural networks and their applications: A Review //* Brain Sciences. – 2022. – Vol. 12, No. 7. – P. 863.
135. YAN B., PANAHIS., HE S., JAFARI S. *Further dynamical analysis of modified Fitzhugh–Nagumo model under the electric field //* Nonlinear Dynamics. – 2020. – Vol. 101. – P. 521–529.
136. YANG J.Q., WANG R., WANG Z.P., MA Q.Y. et al. *Leaky integrate-and-fire neurons based on perovskite memristor for spiking neural networks //* Nano Energy. – 2020. – Vol. 74. – 104828.
137. YAO P., WU H., GAO B., TANG J. et al. *Fully hardware-implemented memristor convolutional neural network //* Nature. – 2020. – Vol. 577. – P. 641–646.
138. YAO X., LI F., MO Z., CHENG J. *Glif: A unified gated leaky integrate-and-fire neuron for spiking neural networks //* Advances in Neural Information Processing Systems. – 2022. – Vol. 35. – P. 32160–32171.
139. YASIN M.W., IQBAL M.S., AHMED N., AKGÜL A. et al. *Numerical scheme and stability analysis of stochastic Fitzhugh–Nagumo model //* Results in Physics. – 2022. – Vol. 32. – 105023.
140. YIN X., HUANG X., PAN Y., LIU Q. *Point and interval estimation of rock mass boreability for tunnel boring machine using an improved attribute-weighted deep belief network //* Acta Geotech. – 2023. – Vol. 18. – P. 1769–1791.

MODELING OF NEURONS AND THEIR INTERACTIONS. OVERVIEW OF APPROACHES AND METHODS

Liudmila Zhilyakova, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (zhilyakova@ipu.ru).

Oleg Kuznetsov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (olpkuz@yandex.ru).

Abstract: The article contains a detailed overview of mathematical models of neurons and neural interactions. Models are divided into two large but unequal classes: "electrical", which pay attention only to electrical processes, and "heterochemical", in which the main emphasis is on the chemistry of the neuron, on its chemical inputs and outputs. The first class of models is much broader because it has a longer history. It contains models of neurons of varying complexity: from the simplest (McCulloch – Pitts model) to very complex ones, such as the Hodgkin – Huxley model and its modifications. Models of the second class belong to a relatively new developing direction in neurobiology and neuroinformatics. Their number is not very large yet. At the end of the article, the asynchronous heterochemical model proposed by the authors together with colleagues from the Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS and the Koltzov Institute of Developmental Biology of RAS is briefly described.

Keywords: neuron models, neural networks, biologically plausible modeling, heterochemical interactions of neurons.

УДК 519.7

ББК 22.18

DOI: 10.25728/ubs.2023.101.1

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Н.Н. Бахтадзе.*

Поступила в редакцию 04.09.2023.

Опубликована 30.11.2023.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ПРЯМОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ¹

Лаговский Б. А.²

(Российский технологический университет МИРЭА, Москва)

Рубинович Е. Я.³

(ФГБУН Институт проблем управления

им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Юрченков И. А.⁴

(Российский технологический университет МИРЭА, Москва)

Рассмотрена и решена задача повышения эффективности управления подвижными объектами при использовании новых алгоритмов, улучшающих качество изображений, получаемых при обзоре пространства. Существенное повышение качества основано на достижении угловой разрешающей способности, в десятки раз превышающей критерий Рэлея. Угловое сверхразрешение обеспечивает раздельное наблюдение нескольких объектов, не разрешаемых при прямом наблюдении, а сопутствующее повышение четкости изображений дает возможность фиксировать незаметные ранее детали образов сложных объектов. На этой основе возрастают вероятность правильных решений задач распознавания и идентификации. Для обеспечения углового сверхразрешения решена задача обучения полносвязной нейронной сети прямого распространения. Для многоэлементных приемо-передающих систем измерений предложен и обоснован экстраполяционный метод достижения углового сверхразрешения. Основу метода составляет экстраполяция значений комплексных амплитуд принятого сигнала отдельными элементами приемных устройств за пределы измерительной системы. Тем самым создается виртуальная система большего размера, для которой выполняется критерий Рэлея, превосходящий по показателям критерий для физической системы. В итоге эффективное угловое разрешение возрастает пропорционально возрастанию размеров виртуальной системы. Исследованы и представлены сравнительные результаты математического моделирования работы нейросети и других методов экстраполяции.

Ключевые слова: угловое сверхразрешение, критерий Рэлея, экстраполяция, нейросети.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, гранты №23-29-00448 и №23-19-00134.

² Борис Андреевич Лаговский, д.т.н., профессор (robertlag@yandex.ru).

³ Евгений Яковлевич Рубинович, д.т.н., профессор (rubinvch@gmail.com).

⁴ Иван Александрович Юрченков, аспирант (yurchenkov@mirea.ru).

1. Введение

Улучшение точности измерений и эффективной разрешающей способности угломерных систем за счет использования новых методов цифровой обработки сигналов позволяет повысить качество систем управления подвижными и стационарными объектами. В последнее время внимание исследователей привлекает возможность применения для этих целей нейронных сетей. Показано, что нейронные сети могут быть интегрированы в контур управления движением объектов, в том числе и автономных, для решения задач распознавания объектов, прогнозирования их поведения и оперативного реагирования на изменяющуюся обстановку.

Для многоэлементных приёмо-передающих систем измерений и наблюдений различной физической природы предложен и обоснован экстраполяционный метод достижения углового сверхразрешения. Основу метода составляет экстраполяция значений комплексных амплитуд принятого сигнала отдельными элементами приемных устройств за пределы измерительной системы. Тем самым создаётся виртуальная система большего размера. В итоге эффективное угловое разрешение возрастает пропорционально возрастанию размеров виртуальной системы.

Угловое разрешение в соответствии с критерием Рэлея определяется как угол:

$$(1) \quad \delta\theta = \lambda/D,$$

где D – линейный размер антенны, λ – длина волны. Угол $\delta\theta$ практически равен ширине диаграммы направленности (ДН) по половинной мощности $\theta_{0,5}$.

Во многих странах проводятся работы по исследованию и практической реализации методов обработки сигналов, позволяющих достигать сверхразрешения, т.е. превышения (1) [6, 14, 17–25]. Сверхразрешение, в частности, даёт возможность решать важные задачи выделения отдельных целей в составе групповых целей.

У всех упомянутых методов есть общий недостаток: требуется проведение большого объема вычислений и, как следствие,

невозможность их использования в режиме реального времени при быстро изменяющейся обстановке.

Представляемый метод достижения углового сверхразрешения позволяет оперативно реагировать на изменения обстановки, решать задачи идентификации и селекции появляющихся новых объектов, формировать на этой основе управляющие сигналы. Задачи такого рода особенно важны при наблюдениях за группами БПЛА, управления охотниками за БПЛА определённого типа, формирования оптимальных траекторий охотников в автоматическом режиме при быстро изменяющихся условиях, в том числе в автономном режиме.

В частности, управляющие сигналы в режиме реального времени вводят новую информацию об изменении положений отдельных объектов в групповых целях, о выявлении новых целей, о выделении объектов с заданными характеристиками, об исключении ранее выделенных объектов из списка выделенных, о прогнозных значениях траектории движения объектов наблюдения.

Таким образом, представляемые алгоритмы включаются в систему управления БПЛА, что заметно повышает ее эффективность

2. Постановка задачи

Принятый цифровой антенной решеткой (ЦАР) сигнал $U(\alpha)$ может быть представлен в виде интегрального преобразования:

$$(2) \quad U(\alpha) = \int_{\Omega} F(\alpha - \varphi) I(\varphi) d\varphi,$$

где Ω – угловая область расположения источника сигнала; $I(\alpha)$ – угловое распределение амплитуды отраженного (или излучаемого) им сигнала; $F(\alpha)$ – ДН измерительной системы, α – угол отклонения от центра направления сканирования ЦАР в пределах Ω .

Ставится задача воспроизвести изображение источника сигналов $I(\alpha)$ с угловым разрешением превосходящим значение, определяемое критерием Рэлея для данной конфигурации физи-

ческой системы. Принятый сигнал $U(\alpha)$ и ДН ЦАР $F(\alpha)$ считаются известными.

Таким образом, необходимо найти приближенное решение интегрального уравнения (ИУ) Фредгольма первого рода типа свертки (2) относительно неизвестной функции $I(\alpha)$ с максимально достижимой точностью. Поставленная задача является обратной, она не удовлетворяет второму и третьему требованиям корректности по Адамару и оказывается неустойчивой [1].

Устойчивость решений может быть повышена при ином подходе, напрямую не сводящемся к решению ИУ.

Современные радио- и гидролокационные системы, основанные на использовании ЦАР, могут преобразовывать сигналы в цифровую форму уже на стадии приёма сигнала каждым элементом. Это позволяет проводить анализ и обработку гораздо большей информации, содержащейся в структуре принимаемого сигнала, чем обычные антенны. В частности, возможно достижение разрешающей способности, превышающей предел, определенный критерием Рэлея.

Пусть число элементов линейной ЦАР $2N + 1$, размеры одномерной области Ω меньше ширины луча ЦАР $\theta_{0,5}$. Тогда ДН можно представить в виде

$$(3) \quad F(\varphi - \alpha) = \sum_{n=-N}^N \exp(-ikdn(\varphi - \alpha)),$$

где $k = 2\pi/d$ – волновое число; d – расстояние между соседними излучателями; α – направление максимума ДН. Для ЦАР (2) преобразуется в сумму:

$$(4) \quad \begin{aligned} U(\alpha) &= \sum_{n=-N}^N \exp(-ikdn\alpha) \int_{\Omega} \exp(ikdn\varphi) I(\varphi) d\varphi = \\ &= \sum_{n=-N}^N C_n \exp(-ikdn\alpha), \end{aligned}$$

$$(5) \quad C_n = \int_{\Omega} \exp(ikdn\varphi) I(\varphi) d\varphi$$

где коэффициенты C_n – комплексная амплитуда сигнала, принятого n -м элементом ЦАР.

Несложно показать, что в этом случае решение $I(\alpha)$ выражается посредством коэффициентов C_n :

$$(6) \quad I(\alpha) = A \sum_{n=-N}^N \exp(-ikdn\alpha) C_n + \psi(\alpha),$$

где $\psi(\alpha)$ — произвольная функция, ортогональная всем экспонентам из (6) на отрезке $[-\lambda/d; \lambda/d]$; A — нормировочный коэффициент.

Из (5) следует, что различия в значениях C_n определяются только пространственным положением отдельных излучателей ЦАР. Следовательно, проанализировав расположение достаточно большого количества излучателей и значения соответствующего им набора коэффициентов C_n , можно с определенной точностью найти зависимость принимаемого сигнала от положения излучателя в решетке, и прогнозировать значения сигнала, который бы принимали излучатели за пределами истинной ЦАР. Далее, используя прогнозные значения C_m для $m = \pm(N+1), \dots, \pm M$ вместе с измеренными ранее значениями, получим ДН виртуальной ЦАР (4) с $2M+1$ излучателями. Ширина ДН при этом уменьшается в M/N раз. Во столько же раз увеличиваются точность угловых измерений и угловая разрешающая способность полученной виртуальной ЦАР.

В итоге полученное приближенное изображение объекта представляется в виде:

$$(7) \quad I(\alpha) \approx \sum_{n=-M}^M C_n \exp(-ikdn\alpha).$$

Таким образом, приближенное решение ИУ (2)–(4) сведено к определению значений возможно большего количества комплексных коэффициентов C_n за пределами ЦАР.

При поиске значений коэффициентов C_n для виртуальных элементов ЦАР (т.е. за пределами реальной ЦАР) необходимо использование методов прогнозирования.

Большинство статистических методов прогнозирования основаны на различных предположениях о типах зависимостей и связях между параметрами. Некоторые из подобных методов

прогнозирования с использованием статистической обработки сигналов требуют значительных вычислительных и временных ресурсов, что не позволяет использовать их в режиме реального времени.

Зависимость значений C_n (5) от расстояния до центра ЦАР вне зависимости от типа источника представляет собой плавную осциллирующую кривую. Известно, что подобные зависимости хорошо описываются с помощью метода линейного предсказания Берга с использованием рекурсивного алгоритма Левинсона [15]. В этом методе коэффициенты аппроксимации находятся при минимизации суммы двух функций квадратов невязок для «экстраполяции вперед» и «экстраполяции назад». Использование метода Берга позволяет заметно увеличить размеры виртуальной ЦАР по сравнению с исходной.

Известно однако, что наилучшие результаты при проведении экстраполяции, особенно сложных зависимостей, достигаются при использовании нейронных сетей [9]. Кроме того, важным преимуществом нейронных сетей является их способность к активному дообучению на новых подтвержденных примерах сигналов в процессе использования.

Нейронные сети могут быть интегрированы в контур управления движением объектов, в том числе и автономных, для оперативного реагирования на изменяющуюся обстановку.

Принцип прогнозирования зависимостей на основе алгоритмов искусственных нейронных сетей (ИНС) широко применяется в различных областях науки и техники в последние 20 лет. ИНС часто используются в прикладных задачах распознавания образов, обработки текстовой информации и аудиосигналов, в прикладных задачах робототехники и управления [2, 5, 7, 8, 10, 12, 13].

Для поставленной задачи возможно использование полносвязной ИНС прямого распространения, а также сверточной ИНС [3, 11]. Полносвязные ИНС прямого распространения применяются в задачах обработки одномерных зависимостей, ввиду простоты архитектуры нейронной сети, высокой скорости работы и эффективности использования вычислений. В рассматриваемом од-

номерном случае по скорости работы полносвязные и сверточные нейронные сети идентичны.

В представляющей работе было проведено сравнение качества экстраполяции методом Берга с классической реализацией полносвязной нейронной сети прямого распространения.

Полносвязная нейросетевая модель прямого распространения является функцией, представляющей в виде

$$(8) \quad \hat{y} = NN(x|W),$$

где W — вектор матриц параметров модели; $x \in \mathbf{R}^f$ — входной вектор значений сигнала или прецедента, для которого нужно определить неизвестные в будущем целевые значения y ; $\hat{y} \in \mathbf{R}^d$ — вектор оценки целевых значений y . Нейронная сеть отображает вектор входных данных x в выходной вектор оценки \hat{y} посредством серии линейных преобразований с нелинейными функциями активации.

Полносвязная нейросетевая модель состоит из соединенных в скрытые слои линейные нейроны с нелинейной функцией активации. По мере прямого распространения информации от входов к выходу к выходному вектору x применяется последовательная серия линейных преобразований с матрицами весов слоя и нелинейных преобразований на основе выбранных функций активации. Входные данные часто представляются в виде матрицы векторов X :

$$(9) \quad X = (x^{<1>}, x^{<2>}, \dots, x^{<s>}) \in \mathbf{R}^{s \times f}, \quad x^{<i>} \in \mathbf{R}^f, \\ i \in 1, 2, \dots, s. \quad \text{Здесь } s \text{ — количество примеров, } f \text{ — размер вектора значений каждого примера. Значения на выходе нейронной сети представляются также в виде матрицы оценок } Y \in \mathbf{R}^{s \times r}, \\ \text{где } r \text{ — размер одного вектора меток, соответствующий своему входному вектору.}$$

Каждый слой нейронной сети с L слоями обладает матрицей весов $W^l, l \in 1, 2, \dots, L$, взвешивающей выход из предыдущего слоя или входа на каждом нейроне текущего слоя. Все матрицы весов $W = (W^1, W^2, \dots, W^L)$ нейронной сети обладают различными размерами, зависящими от размера f входных векторов, требуемого размера r выходных векторов и количества нейронов в каждом из слоев нейронной сети.

Веса W нейронной сети настраиваются в процессе обучения на тренировочной выборке примеров X_{train} и эталонных меток Y_{train} таким образом, чтобы минимизировать выбранный функционал ошибки $Loss(Y, \hat{Y})$ на пространстве параметров нейронной сети. Вследствие чего ставится следующая задача оптимизации:

$$(10) \quad Loss(Y, NN(x|W)) \rightarrow \min_W.$$

Функционал ошибки между оценками \hat{Y} (8) и метками Y выбирается исходя из задачи и должен отражать качество решения задачи нейронной сетью в виде числовой метрики.

Существует множество функционалов качества для различных задач, решаемых алгоритмами искусственного интеллекта [4, 11]. Минимизация метрики качества (10) решения задачи (8) производится на основе алгоритма из семейства методов градиентного спуска с различными модификациями, в котором веса W итеративно обновляются на основе тестовых прогонов работы модели на тренировочной выборке X_{train} [11] и минимизации полученных ошибок между ответами модели (8) и метками Y_{train} . Качество итогового обучения принято проверять на тестовой отложенной выборке схожих примеров X_{test} в сравнении с эталонными метками Y_{test} .

Из недостатков выбранной архитектуры полносвязной нейронной сети можно выделить необходимость выбирать и привязываться к заранее обозначенным размерностям входных и выходных данных. В силу этого обстоятельства теряется гибкость в применении конкретной реализации нейронной сети с обученными параметрами на задаче с новыми требованиями к апертуре приемника и также ширине виртуальной системы, т.е. к горизонту прогноза для задачи экстраполяции.

Из достоинств применения ИНС можно отметить, что благодаря оптимизации матрично-векторных умножений на современных вычислительных устройствах ИНС в задачах одномерной обработки сигналов могут работать в режиме реального времени на центральных процессорах при использовании обученной ИНС. За счет простоты архитектуры и параллельной обработки данных

возможно быстрое обучение на новых данных при новых значениях апертуры D и λ по сравнению с остальными моделями и архитектурами ИНС. Данные аспекты позволяют рассматривать модели ИНС прямого распространения не только как мощный, но и быстрый метод экстраполяции данных.

3. Численные результаты. Сравнение методов экстраполяции

Численные эксперименты по достижению сверхразрешения проводились на модели линейной ЦАР с числами элементов $2K+1$ и расстоянием $d = 0,7\lambda$ между ними. Поставленная задача экстраполяции заключалась в получении значений принятого сигнала виртуальными излучателями по обе стороны от центрального на значение, во много раз превышающее размер реальной ЦАР.

На основе выборки с $s = 40\,000$ наборов значений коэффициентов C_n , $n \in [-K, K]$, принятого сигнала для моделируемой ЦАР и типовых распределений сигналов $I(\alpha)$ коэффициентов была обучена модель полносвязной нейронной сети прямого распространения с тремя скрытыми слоями $L = 3$ по $P_l = 500$, $l = 1, 2, 3$ нейронов в каждом. Выборка была сформирована на основе генерации $I(\alpha)$ в виде случайных пар целей в пределах ширины ДН $\theta_{0,5}$.

Обучение модели полносвязной нейронной сети прямого распространения происходило на случайно сгенерированных выборках с применением метода оптимизации Adam [16] со стандартными гиперпараметрами $\beta_1 = 0,9$ и $\beta_2 = 0,999$, начальной скоростью обучения $l_r = 0,001$.

Метод Adam был выбран как самый надежный по скорости и точности сходимости среди методов оптимизации [16]. Для оптимизации параметров модели применялся пакетный метод оптимизации с размером пакета наборов $b = 400$. В качестве минимизируемого функционала задачи (10) выступала среднеквадра-

тическая ошибка MSE:

$$(11) \quad \text{MSE}(Y, \hat{Y}) = \frac{1}{2b} \sum_{v=1}^b \|\hat{y}^{} - y^{}\|_2$$

где $x^{} \in X$ – вектор примера тренировочной или тестовой выборки; $y^{} \in Y$ – вектор меток; \hat{Y} – оценки меток нейронной сети на подвыборке X ; $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма вектора.

Обучение до плато на кривой обучения по метрике (11) заняло ориентировочно 2000 эпох, в каждой из которых нейронная сеть наблюдала заново случайно сгенерированную тренировочную выборку.

Для обученной модели нейронной сети были протестированы несколько сценариев использования. Первый сценарий – при симметричных источниках излучения, т.е. источники имели одинаковые амплитуды сигналов и располагались на угловых расстояниях t_1 и $-t_1$ и относительно нормали к ЦАР.

По заданным значениям коэффициентов $C_n, n \in [-K, K]$, реальной ЦАР проводилась экстраполяция значений принятого сигнала на виртуальные излучатели $\hat{C}_m^{(NN)}, m \in [-M, M]$, с помощью модели ИНС.

Ошибка экстраполяция измерялась в виде среднеквадратической относительной ошибки:

$$(12) \quad \delta = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^N y_i^2}$$

между оценкой значений \hat{C}_n по модели экстраполяции и идеальными значениями C_n при $n \in [-M, M], M \gg K$.

На рис. 1 и рис. 2 представлен результат работы модели при расположении целей от начала координат на угловом расстоянии $\alpha_1 = -\alpha_2 = 0,1\theta_{0,5}$ что в 5 раз превышает разрешающую способность ЦАР.

На рис. 1 показаны экстраполированные значения \hat{C}_n на основе нейронной сети для положительной полуоси при $n > K$. Здесь сплошная жирная кривая – результат работы нейросетевой модели, штриховая линия – значения C_n , которые были бы у реальной ЦАР с таким же числом элементов. Качество экстраполяции следует признать хорошим.

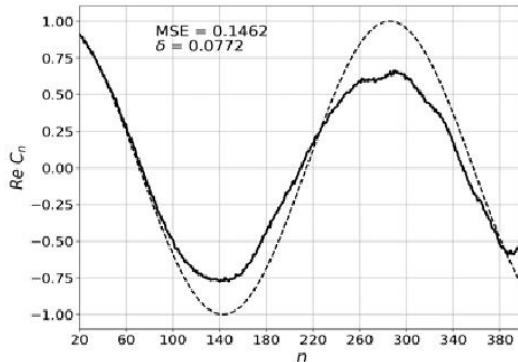


Рис. 1. Экстраполяция действительных частей C_n

На графике также показаны метрики отклонения экстраполяции от теоретически идеальной зависимости C_n от положения приемного устройства n . Метрика $MSE \approx 0,1462$, а относительная ошибка $\delta \approx 0,0772$, что является вполне приемлемым результатом конкретно для решения задачи экстраполяции.

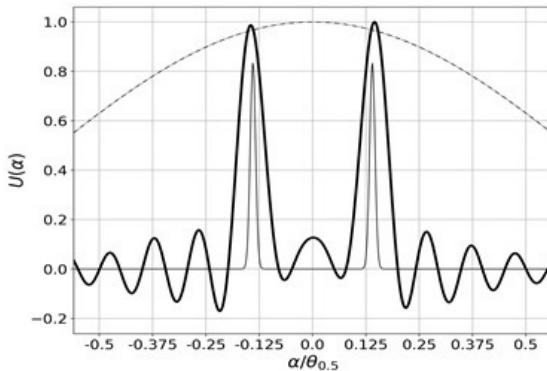


Рис. 2. Принятый сигнал при сканировании виртуальной системой

На рис. 2 изображен график распределения интенсивности источников излучения $I(\alpha)$ (тонкая сплошная линия) и значения принятого ЦАР сигнала в угловом секторе $\alpha/\theta_{0,5} \in \Omega$ в единицах ширины ДН. Сплошная жирная линия – результат работы нейронной сети (нейросетевой экстраполяции). Сплошная линия имеет две симметричные пика при $\alpha/\theta_{0,5} \approx \pm 0,125$ и минимум при $\alpha/\theta_{0,5} \approx 0$. Жирная линия имеет один пик при $\alpha/\theta_{0,5} \approx 0$ и минимум при $\alpha/\theta_{0,5} \approx \pm 0,125$.

росети, верхняя штриховая кривая – сигнал, принятый реальной ЦАР.

Две цели оказываются разрешены, критерий Рэлея превышен в три раза. Расположение каждого из объектов найдено с высокой точностью.

Сравним результат работы нейронной сети с алгоритмом экстраполяции Берга [15]. Алгоритм Берга является методом экстраполяции данных основанный на задаче авторегрессии.

На рис. 3 и рис. 4 показаны результаты решения задачи экстраполяции двумя методами.

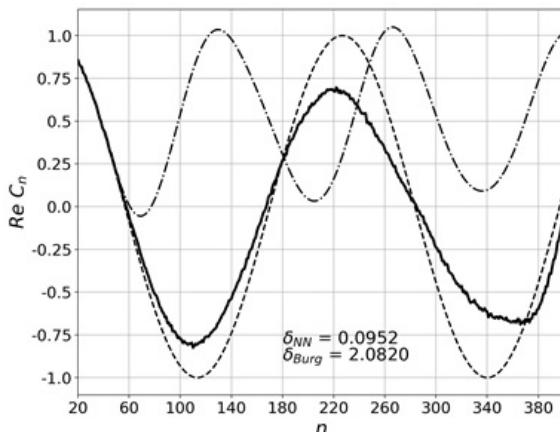


Рис. 3. Сравнение значений C_n для двух методов

На рис. 3 изображен график экстраполяции значений C_n принятого сигнала в зависимости от номера приемного устройства на основе нейронной сети для положительной полуоси при $n > 20$ для двух близко расположенных целей. Сплошной жирной линией на графике показан результат нейросети; штриховой кривой – значения, которые были бы у реальной ЦАР с таким же числом элементов; штрихпунктирной линией отображены оценки $\hat{C}_n^{(B)}$ по модели экстраполяции Берга.

На рис. 4 показана зависимость распределения интенсивности источников излучения $I(\alpha)$ и значения принятого ЦАР сиг-

нала $U(\alpha)$ в секторе $\alpha \in \Omega$ в зависимости от угла сканирования $\alpha/\theta_{0,5}$ в единицах ширины ДН. Оба алгоритма позволили разрешить два объекта. Нейросеть точно определила угловые положения каждого из объектов, амплитудные значения ложных источников оказались невелики, и ими можно пренебречь. Алгоритм Берга определил угловые положения объектов с заметной ошибкой. Кроме того, появилась ложная цель с амплитудным значением, вдвое превышающим амплитуды истинных целей.

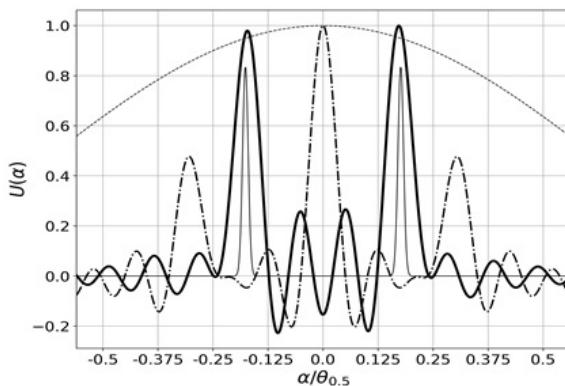


Рис. 4. Принятый при сканировании сигнал виртуальной системой при использовании экстраполяции Берга и нейронной сети

Рассмотрим теперь максимально достигаемый уровень сверхразрешения, обеспечиваемый рассматриваемыми методами экстраполяции. Для этого последовательно будем увеличивать число виртуальных приемных устройств n , и находить минимальное угловое расстояние между двумя одинаковыми объектами θ_p , при котором они все еще будут различимы по критерию Рэлея.

На рис. 5 приведена зависимость необходимого углового разрешения виртуальной ЦАР $\theta_p = \theta_{0,5}$ для раздельного наблюдения объектов от числа n виртуальных приёмных устройств. Сплошной линией показаны значения $\theta_{0,5}$ виртуальной системы на ос-

нове экстраполяции нейронной сетью (NN), жирная штриховая кривая – значения $\theta_{0,5}$ для виртуальной системы, значения \hat{C}_n которой получены на основе метода экстраполяции Берга.

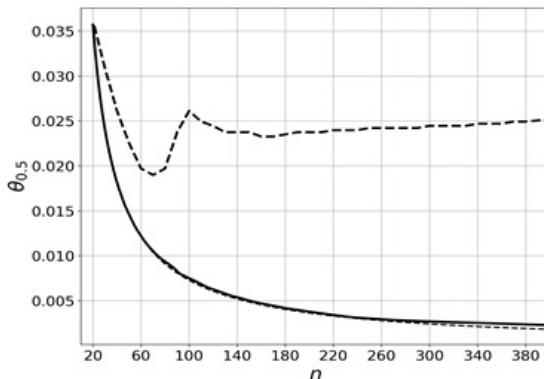


Рис. 5. Максимальная разрешающая способность в зависимости от числа виртуальных приемников

Представленные на рис. 5 результаты показывают, что добавление первых 30–50 виртуальных приёмников оказывает значительное влияние на повышение разрешения. Дальнейшее добавление приёмных устройств оказывается не столь эффективно. В сравнении с экстраполяцией нейронной сетью алгоритм Берга показывает значительно худшие результаты.

Численные эксперименты показали, что максимально возможное разрешение по Бергу превышает критерий Рэлея в 2–3 раза. При предложенной нейросетевой экстраполяции максимально полученное разрешение превышает критерий Рэлея в 10 раз.

Таким образом, результаты экстраполяции сигнала на основе нейронной сети по всем параметрам значительно превосходят результаты экстраполяции другими методами.

4. Заключение

Обоснован и реализован на математической модели новый метод решения обратных задач по достижению углового сверхразрешения. Поставлена и решена задача применения полносвязной нейронной сети прямого распространения в задаче экстраполяции. Достигаемая угловая разрешающая способность превышает критерий Рэлея в 3–10 раз. Изображения восстанавливаются с относительно небольшими ошибками в амплитудных значениях и в угловых положениях объектов.

Предложенные алгоритмы в сравнении с известными относительно просты, что позволяет использовать их роботизированными системами в режиме реального времени. Включение представленной нейронной сети в систему управления движением объекта, особенно автономного, значительно повысит эффективность и качество управления на основе оперативного решения задач определения положений и скоростей объектов, их распознавания, прогнозирования поведения в условиях быстро изменяющейся обстановки.

Литература

1. АРСЕНИН В.Я., ТИХОНОВ А.Н. *Методы решения некорректных задач*. – М.: Наука. –1974.
2. АХТЕРОВ А.В., КИРИЛЬЧЕНКО А.А. *Основы теоретической робототехники. Искусственные нейронные сети. (Обзор)* // Препринты Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. – 2008. – №10. – С. 2–20.
3. ВИНОГРАДОВА Е.П., ГОЛОВИН Е.Н. *Метрики качества алгоритмов машинного обучения в задачах классификации* // Научная сессия ГУАП. – 2017. – С. 202–206.
4. КАШИРИНА И.Л., ДЕМЧЕНКО М.В. *Исследование и сравнительный анализ методов оптимизации, используемых при обучении нейронных сетей* // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2018. – № 4. – С. 123–132.

5. КОЗАР Б.А., КУГУРАКОВА В.В., САХИБГАРЕЕВА Г.Ф. *Структуризация сущностей естественного текста с использованием нейронных сетей для генерации трехмерных сцен* // Программные продукты и системы. – 2022. – Т. 35, №3. – С. 329–339.
6. ЛАГОВСКИЙ Б.А., РУБИНОВИЧ Е.Я. *Алгоритмы цифровой обработки данных измерений, обеспечивающие угловое сверхразрешение* // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2021. – Т. 22, № 7. – С. 349–356.
7. МИНАЕВ Е.Ю., КУТИКОВА В.В., НИКОНОРОВ А.В. *Трекинг объектов в видеопотоке на основе сверточных нейронных сетей и фрактального анализа* // Сб. тр. IV международной конференции и молодежной школы «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2018). – Самара: Новая техника. – 2018. – С. 2792–2798.
8. СЕМЕНЮК В.В., СКЛАДЧИКОВ М.В. *Разработка алгоритма распознавания эмоций человека с использованием сверточной нейронной сети на основе аудиоданных* // Информатика. – 2022. – Т. 19, №4.
9. СУКИНА С.А. *Нейронные сети* // Новая наука: стратегии и векторы развития. – 2016. – Т. 82, №5. – С. 248.
10. ТОРМОЗОВ В.С. *Настройка, обучение и тестирование нейронной сети долгой краткосрочной памяти для задачи распознавания образов* // Промышленные АСУ и контроллеры. – 2020. – № 3. – С. 52–57.
11. ШИШКИН Ю.Е., СКАТКОВ А.В. *Метрики качества для оценки и прогнозирования критических состояний* // Качество и жизнь. – 2019. – №1. – С. 61–66.
12. ЯМАШКИН А.А., ЯМАШКИН С.А. *Использование нейронных сетей прямого распространения для ландшафтного картографирования на базе космических снимков* // Геодезия и картография. – 2014. – №11. – С. 52–58.
13. ЯШИН В.И. *Растущие нейронные сети в робототехнике* // Роботизация Вооруженных Сил Российской Федерации. – 2020. – С. 279–284.

14. ALMEIDA M.S., FIGUEIREDO M.A. *Deconvolving images with unknown boundaries using the alternating direction method of multipliers* // IEEE Trans. Image Process. – 2013. – Vol. 22, No. 8. – P. 3074–3086.
15. BURG J.P. *Maximum Entropy Spectral Analysis*. – PhD thesis, Department of Geophysics, Stanford University, Stanford, CA, 1975.
16. DIEDERIK P. KINGMA JIMMY BA. *Adam: A Method for Stochastic Optimization* // arXiv:1412.6980. – 2017.
17. KASTURIWALA S.B., LADHAKA S.A. *Superresolution: A novel application to image restoration* // International Journal on Computer Science and Engineering. – 2010. – No. 5. – P. 1659–1664.
18. LAVATE T.B., KOKATE V.K., SAPKAL A.M. *Performance Analysis of MUSIC and ESPRIT. DOA Estimation Algorithms for Adaptive Array Smart Antenna in Mobile Communication* // 2nd Int. Conf. on Computer and Network Technology (ICCNT), US. – 2010. – P. 308–311.
19. MORSE P., FESHBACH H. *Methods of Theoretical Physics*. – McGraw-Hill. Science/Engineering/Math, 1953. – 1978 P.
20. PARK S.C., PARK M.K., KANG M.G. *Super-resolution image reconstruction: a technical overview* // IEEE Signal Processing Magazine. – 2003. – Vol. 20, No. 3. – P. 21–36.
21. SHCHUKIN A.A., PAVLOV A.E. *Parameterization of user functions in digital signal processing for obtaining angular super-resolution* // Russian Technological Journal. – 2022. – Vol. 10, No. 4. – P. 38–43.
22. SROUBEK F., CRISTOBAL G., FLUSSER J. *Simultaneous Super-Resolution and Blind Deconvolution* // Journal of Physics: Conference Series. – 2008. – Vol. 124, No. 1. – P. 012–048.
23. TAN W.Q., HOU Y.G. *Estimation of direction of source arrival based upon MUSIC and Capon* // Journal of Nanchang Institute of Technology. – 2008. – Vol. 27, No. 1. – P. 20–23.

24. UTTAM S., GOODMAN N.A. *Super-resolution of coherent sources in real-beam Data* // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. – 2010. – Vol. 46, No. 3. – P. 1557– 1566.
25. WAWERU N.P., KONDITI D.B.O., LANGAT P.K. *Performance Analysis of MUSIC Root-MUSIC and ESPRIT* // DOA Estimation Algorithm. International Journal of Electrical Computer Energetic Electronic and Comm. Engineering. – 2014. – Vol. 8, No. 1. – P. 209–216.

SOLVING THE PROBLEM OF SUPER-RESOLUTION USING A MODEL OF A NEURAL NETWORK OF DIRECT PROPAGATION

Boris Lagovsky, Russian Technological University, Moscow, Doctor of Science, professor (robertlag@yandex.ru).

Evgeny Rubinovich, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (rubinvch@gmail.com).

Ivan Yurchenkov, Russian Technological University, Moscow, graduate student (qwerty29544@gmail.com).

Abstract: The problem of increasing the efficiency of control of moving objects using new algorithms that improve the quality of images obtained during the survey of space is considered and solved. A significant improvement in quality is based on the achievement of angular resolution, tens of times higher than the Rayleigh criterion. Angular super-resolution provides separate observation of several objects that are not resolved by direct observation, and the accompanying increase in image clarity makes it possible to capture previously unnoticed details of images of complex objects. On this basis, the probability of correct solutions to recognition and identification problems increases. To provide angular super-resolution, the problem of creating a neural network has been solved. For multi-element receiving and transmitting measurement systems, an extrapolation method for achieving angular super-resolution is proposed and justified. The basis of the method is the extrapolation of the values of the complex amplitudes of the received signal by individual elements of the receiving devices outside the measuring system. Thus, a larger virtual system is created, for which its own Rayleigh criterion is fulfilled. As a result, the effective angular resolution increases in proportion to the increase in the size of the virtual system. Comparative results of mathematical modeling of the neural network and other extrapolation methods are investigated and presented, the limits of applicability of the method are determined.

Keywords: angular super-resolution, Rayleigh criterion, extrapolation, neural networks.

УДК 537.86

ББК 22.18

DOI: 10.25728/ubs.2023.106.2

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.А. Галеевым.*

Поступила в редакцию 03.11.2023.

Дата опубликования 30.11.2023.

ФОРМИРОВАНИЕ ДОСТОВЕРНОЙ
НАВИГАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧАХ
ОРИЕНТАЦИИ И НАВИГАЦИИ АВТОНОМНЫХ
РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНФРАСТРУКТУРЫ
ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СРЕДЫ¹

Трефилов П. М.², Романова М. А.³

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

В условиях развития интеллектуальной транспортной среды немаловажную роль влияет точное позиционирование автономных робототехнических устройств. Авторами представлен способ ориентации и навигации робототехнических систем с возможным использованием инфраструктуры интеллектуальной транспортной среды. Алгоритм ориентации и навигации роботов в интеллектуальной транспортной среде описывает процесс сбора, обработки, фильтрации, интерполяции и экстраполяции данных для определения местоположения робота и планирования маршрута движения. Предложен способ формирования приоритетного режима работы бортового навигационного комплекса в условиях информационной избыточности навигационных параметров. Способ представляет оптимизационную задачу выбора режима работы бортового навигационного комплекса, который на момент времени имеет наиболее точную оценку при учете внешних условий. Также затрагивается понятие концепции достоверности результатов измерения. Выделены критерии достоверности измерительной информации для обеспечения эффективности принятия решений при управлении измерительными процессами. Описан подход к определению достоверности навигационно-измерительной информации на основе метода теории статистических решений предельных значений результатов измерений. Этот подход позволяет достаточно быстро анализировать, полученную измерительную информацию по статистическим показателям и оценивать степень достоверности результатов.

Ключевые слова: интеллектуальная транспортная система, задачи навигации и ориентации, достоверность, робототехнические системы.

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-19-00338, <https://rscf.ru/project/23-19-00338/>.

² Петр Михайлович Трефилов, научный сотрудник (petertrfi@ipu.ru).

³ Мария Андреева Романова, научный сотрудник (rmarda@ipu.ru).

1. Введение

Тенденции развития отраслей экономики ориентированы на цифровизацию, изменение степени автономности и повышение интенсивности различных видов потоков, в том числе и транспортных. Развитие и интеллектуализация транспортной среды позволяет повысить эффективность управления трафиком, уровень безопасности и осведомленности о дорожной ситуации и другие аспекты транспортной инфраструктуры [11]. Ключевым компонентом инфраструктуры интеллектуальной транспортной среды (ИТС) является транспортное средство, которое характеризуется степенью автономности. Одной из приоритетных задач ИТС является повышение степени автономности транспортных робототехнических средств. Значительный рост инвестиций и активных исследований в данной сфере свидетельствует о высокой активности в развитии подобных технологий [7].

Например, в работе [14] рассматривается оптимизационная задача систем управления транспортными потоками с интегрированной интеллектуальной транспортной системой, регулирующей параметры транспортной сети и управления движением отдельных транспортных средств.

В статье предложены методы управления сложной интеллектуальной транспортной системой в виде динамической переменной структуры с распределенными параметрами. В работе [30] предложен подход к решению поиска оптимального маршрута с помощью генетических алгоритмов. Предлагаемый авторами метод позволяет находить оптимальные маршруты в условиях ИТС. Однако в предложенных работах рассматривается оптимизационная задача построения траектория пути, а не ориентация и навигация робототехнических систем (РТС).

В статье [17] авторы представили обзор существующих алгоритмов навигации и ориентации роботов в ИТС. Они обсудили различные методы и подходы, включая геопозиционирование, построение карт, планирование маршрута и обмен информацией с инфраструктурой ИТС. Авторы отметили, что эти алгоритмы имеют потенциал для применения в различных сферах, таких как логистика, службы доставки и автономные автомобили.

В другом исследовании [26] была представлена обзорная статья, посвященная алгоритмам и архитектуре сотрудничающих систем транспортного средства-инфраструктура (Vehicle-Infrastructure Systems, VIS). Авторы рассмотрели различные аспекты взаимодействия роботов с интеллектуальной транспортной средой, такие как обмен информацией с дорожной инфраструктурой, взаимодействие с другими участниками дорожного движения и согласование движения. Они представили обзор существующих алгоритмов и подчеркнули важность разработки эффективных методов кооперации между роботами и инфраструктурой ИТС.

В работе [20] для решения задач ориентации и навигации предлагается использовать улучшенный метод k -ближайших соседей, отличающийся от традиционного непрерывного k -ближайшего соседа тем, что динамический объект на протяжении маршрута обращается только к точкам интереса в пространстве перед точкой запроса в соответствии с заданным направлением движения.

В статье [24] предлагается подход для устранения искажения в облаках точек и позволяет повысить эффективности работы системы в реальном времени.

Перечисленные выше работы предлагают новые возможности для повышения эффективности и безопасности роботизированных систем в контексте интеллектуальной транспортной среды. Таким образом, направление исследований, связанное с алгоритмами ориентации и навигации роботов, требует поиска новых решений с активно развивающейся инфраструктурой ИТС.

Существует еще одна область исследований и разработок, направленная на способы получения навигационной информации. Соответственно рассматриваются и обзорные исследования задач локализации и навигации автономных транспортных средств в ИТС, например, в работах [12, 20] авторы рассматривают методы сенсорного объединения, применение БПЛА, сопоставление карт и алгоритмы планирования маршрутов и управления движением.

Автономные робототехнические устройства в ИТС используют несколько способов получения навигационной информации, такие как:

- навигационная спутниковая система (использование систем, таких как GPS, ГЛОНАСС, Галилео) [28];
- картирование и локальные базы данных (использование картографических данных и локальных баз данных, которые включают в себя информацию о дорогах, знаках, светофорах и других объектах в городе) [13];
- датчики и оборудование на борту (использование различных датчиков, так как лидары, радары и камеры, которые помогают собирать информацию об окружающей среде и других участниках движения на дороге) [24, 27];
- связь с инфраструктурой (взаимодействие с инфраструктурой ИТС, такой как сети связи, сенсоры на дорогах и сигнализация для получения актуальной информации о дорожной обстановке) [13, 21];
- системы искусственного интеллекта (использование алгоритмов искусственного интеллекта для анализа данных, собранных от различных источников, и принятия решений на основе этой информации) [4, 15].

Задача в области ориентации и навигации робототехнических устройств в ИТС заключается в определении точного местоположения РТС в пространстве. Определение местоположения необходимо и относительно других участников движения в реальном времени. Ориентация и навигация беспилотных транспортных средств или других роботизированных устройств имеет решающее значение для успешного выполнения функциональных задач в условиях «Умной транспортной среды». Для достижения высокой точности позиционирования роботов в ИТС применяются различные алгоритмы, которые интегрируются в соответствующие аппаратные устройства.

2. Способы ориентации и навигации в ИТС

Для решения задач ориентации и навигации РТС в пространстве необходимо наличие бортового навигационного комплекса, оснащенного системами счисления пути. Самостоятельность

каждого из объектов системы ИТС позволит повысить надежность системы в целом, исключит возможность массовых сбоев.

Одной из основных технологий, широко используемой для решения задач ориентации и навигации РТС или мобильных объектов, является глобальная система позиционирования или спутниковая навигационная система (СНС). СНС основана на сети спутников, которые передают сигналы с информацией о своих точных координатах и времени. Приемники СНС на РТС используют эти сигналы для расчета своего местоположения на основе трехмерной триангуляции. СНС обеспечивает высокую точность позиционирования, однако в городской среде могут возникать проблемы из-за перекрытия сигнала высокими зданиями или отражения сигнала, что может приводить к снижению точности или полного выхода из строя систем позиционирования реального времени.

Для устранения недостатков СНС и повышения точности позиционирования в алгоритмах ориентации и навигации роботов широко применяются инерциальные навигационные системы (ИНС). ИНС состоит из акселерометров и гироскопов, которые измеряют ускорение и угловые скорости робота соответственно. С помощью интеграции этих измерений на основе математических моделей движения робота можно определить его текущее местоположение и ориентацию. Однако в долгосрочной перспективе измерения ИНС подвержены ошибкам, которые могут накапливаться со временем, в результате чего возникает проблема с точностью позиционирования.

Радиоидентификация – еще одна технология, используемая в алгоритмах ориентации и навигации РТС. Она основана на обмене радиосигналами между роботом и установленными на дороге радиомаяками. Радиомаяки передают свои уникальные идентификаторы, и робот может использовать эту информацию для определения своего местоположения. Радиоидентификация позволяет достичь высокой точности позиционирования, особенно в условиях, когда сигнал СНС ограничен или нестабилен, однако требует инфраструктуры и дополнительных устройств на дороге.

Активно развивается научный прогресс в области технического зрения с внедрением алгоритмов позиционирования. С помощью камер и алгоритмов технического зрения РТС могут анализировать окружающую среду, распознавать дорожные знаки, ориентироваться по маркировке дороги и определять свое местоположение на основе этих данных. Техническое зрение позволяет роботам уточнять свою позицию и ориентацию в реальном времени, что способствует повышению точности навигации.

Еще одна важная область исследования связана с использованием машинного обучения для улучшения алгоритмов навигации и ориентации роботов в ИТС. В статье [23] авторы представили обзор существующих исследований, где методы машинного обучения были применены к задачам ИТС. Они обсудили применение нейронных сетей, генетических алгоритмов и других методов машинного обучения для улучшения ориентации, планирования маршрута и прогнозирования трафика. Авторы подчеркнули, что машинное обучение является мощным инструментом, который может значительно улучшить производительность и эффективность роботизированных систем в ИТС.

Авторами в работе [16] проведено исследование и анализ использования робототехнических сетей датчиков в интеллектуальных транспортных системах. Они обсуждают различные типы датчиков, такие как видеокамеры, радары и лидары, и исследуют их применение в задачах обнаружения препятствий, распознавания дорожных знаков и анализа трафика.

Однако в ИТС возможно не только бортовое позиционирование, но и внешнее. Например, в работах [19, 22] рассматривается возможность позиционирования транспортных средств с помощью дорожных камер.

Интеграция различных технологий в алгоритмах ориентации и навигации роботов позволяет достичь высокой точности определения местоположения и эффективно следовать заданному маршруту в городской среде. Рассмотренные технологии обладают своими преимуществами и ограничениями, поэтому объединение измерительной информации имеет решающую роль в задачах ориентации и навигации.

3. Подход к решению задач ориентации и навигации РТС в ИТС

Один из ключевых аспектов ИТС заключается в эффективной интеграции алгоритма навигации с интеллектуальной инфраструктурой. Для этого робототехническое устройство должно быть способным получать данные и обмениваться информацией с другими участниками дорожного движения и сетью интеллектуальной транспортной системы. Это может включать обмен данными с дорожными знаками, светофорами, радиомаяками или другими автомобилями в режиме реального времени.

Интеллектуальная транспортная среда может быть динамичной и изменчивой, что влияет на движение РТС. Различные факторы, такие как плотность движения, пробки, возникновение новых препятствий или изменение траектории других транспортных средств, могут повлиять на оптимальный план движения робота. Поэтому алгоритм навигации должен быть способен адаптироваться к динамическим изменениям среды, чтобы эффективно планировать новый маршрут или корректировать текущий.

Абоненты в ИТС часто оснащены не только бортовой системой счисления пути, но и различными сенсорами, такими как лидары, радары, камеры и инфракрасные датчики. Данные с этих сенсоров используются для восприятия окружающей среды, обнаружения препятствий, определения местоположения других транспортных средств и дорожной инфраструктуры. Алгоритм навигации должен быть способен обрабатывать и объединять данные с различных сенсоров для получения более полной и точной картины окружающей среды.

Одной из основных целей алгоритма навигации в ИТС является обеспечение безопасного движения робота и предотвращение аварий. При планировании маршрута и принятии решений, алгоритм должен учитывать правила дорожного движения, предупреждать об опасных ситуациях и принимать преосторожные меры для минимизации рисков. В городской среде роботы могут сталкиваться с множеством плоскостей и уровней, таких как дороги, подземные переходы, мосты и тунNELи. Алгоритм навига-

ции должен быть способен планировать маршруты с учетом многоплановости и оптимально перемещаться по различным уровням окружающей среды.

3.1. МОДЕЛЬ ОШИБОК РТС В ЗАДАЧЕ ОРИЕНТАЦИИ И НАВИГАЦИИ

В рамках решения задачи в общем виде необходимо учитывать, что алгоритм ориентации и навигации должен быть способен масштабироваться для работы с различными типами роботов и в разных городских средах. Он должен быть гибким и легко настраиваемым для адаптации к разнообразным сценариям и условиям.

Для интеграции ИТС в алгоритмы ориентации и навигации транспортных средств рассмотрим классическое решение задачи ориентации и навигации. Так, каждый абонент ИТС оборудован бортовым навигационным комплексом (БНК). БНК состоит из системы счисления пути, основанной на инерциальных измерительных системах, в подавляющем большинстве работающим по принципам бесплатформенных инерциальных навигационных систем, и систем коррекции, допустим, на спутниковой навигационной системе. Для решения задач локальной ориентации и реализации системы предотвращения столкновений БНК может быть оборудован другими измерительными устройствами, такими, как лидар, радар и др. В дальнейшем системы коррекции будут представлены в общем виде, так как описать математические модели всех систем коррекции не представляется возможным. Все эти измерительные комплексы формируют обратную связь с ИНС для выработки управляющего сигнала.

Для решения задач ориентации и навигации необходимо представить модель ошибок инерциальной системы счисления. Смещение нуля в показаниях инерциальных датчиков является основной причиной, вызывающей погрешность ИНС. В показаниях датчиков угловой скорости (ДУС) и акселерометров присутствуют составляющие, обусловленные смещением нулевых сигналов датчиков [3] Пусть

$$(1) \quad \Delta X = \frac{1}{2} b_a t^2,$$

$$(2) \quad \Delta \varphi = b_\omega t;$$

где b_a, b_ω – смещение нуля акселерометра и ДУС по соответствующей оси; t – время работы ИНС; ΔX – погрешность в определении линейного движения носителя ИНС; $\Delta\varphi$ – погрешность в определении углового движения носителя ИНС.

В измерениях ИНС присутствуют ошибки масштабных коэффициентов, которые имеют такой же характер, как и ошибка, вызванная смещением нуля, и представлены в виде

$$(3) \quad \Delta X = \frac{1}{2} S_a a t^2,$$

$$(4) \quad \Delta\varphi = S_\omega \omega t.$$

где S_a, S_ω – масштабный коэффициент акселерометра и ДУС; t – время работы ИНС; a – значение ускорения носителя ИНС по соответствующей оси; ω – значение угловой скорости носителя ИНС по соответствующей оси; ΔX – погрешность в определении линейного движения носителя ИНС; $\Delta\varphi$ – погрешность в определении углового движения носителя ИНС.

В измерениях присутствуют погрешности измерений ускорений и угловых скоростей, которые можно представить в виде:

$$(5) \quad A_{\text{измеренное}} = A_{\text{ист}} + A_{\text{смещение0}} + V_{\text{аксел.}} w_{\text{аксел.}}$$

где $A_{\text{измеренное}}$ – вектор измеренных проекций ускорения в связанной системе координат (3×1); $A_{\text{истинное}}$ – вектор истинных проекций ускорения в связанной системе координат (3×1); $A_{\text{смещение0}}$ – вектор смещения нулевого сигнала в показаниях акселерометров в связанной системе координат (3×1); $w_{\text{аксел.}}$ – вектор формирующих белых шумов (3×1) с нулевым математическим ожиданием и единичной матрицей интенсивности;

$$w_{\text{аксел.}} = (w_{\delta a_X} w_{\delta a_Y} w_{\delta a_Z})^T; \quad V_{\text{аксел.}} \text{ – матрица коэффициентов шумов } (3 \times 1); \quad V_{\text{аксел.}} = \begin{pmatrix} \sigma_{\delta a_X} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\delta a_Y} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\delta a_Z} \end{pmatrix}; \quad \sigma_{\delta a_X}, \sigma_{\delta a_Y}, \sigma_{\delta a_Z} \text{ –}$$

СКО шумовых ошибок акселерометров, м / сек².

В матричной форме модель ошибок ИНС запишется как [2]

$$(6) \quad \frac{d\delta X_{\text{ИНС}}}{dt} = F_{\text{ИНС}} \delta X_{\text{ИНС}} + G V_{\text{ИНС}} w_{\text{ИНС}},$$

где $\delta X_{\text{ИНС}}$ – вектор состояния модели ошибок ИНС (15×1);

$$\delta X_{\text{ИНС}} = \begin{pmatrix} \delta North & \delta Height & \delta East \\ \delta V_{North} & \delta V_{Height} & \delta V_{East} \\ \delta Roll & \delta Yaw & \delta Pitch \\ \delta Acc_{0X} & \delta Acc_{0Y} & \delta Acc_{0Z} \\ \delta Gyro_{0X} & \delta Gyro_{0Y} & \delta Gyro_{0Z} \end{pmatrix}^T; \quad \delta North – \text{ошибка определения северной координаты местоположения, м;}$$

$\delta Height$ – ошибка определения высоты местоположения м; $\delta East$ – ошибка определения восточной координаты местоположения, м; δV_{North} – ошибка определения северной проекции скорости, м/сек; δV_{Height} – ошибка определения вертикальной проекции скорости, м/сек; δV_{East} – ошибка определения восточной проекции скорости, м/сек; $\delta Roll$ – ошибка определения угла крена, рад; δYaw – ошибка определения угла курса, рад; $\delta Pitch$ – ошибка определения угла тангла, рад; δAcc_{0X} – смещение нулевого сигнала акселерометра по оси OX связанной системы координат, м/сек²; δAcc_{0Y} – смещение нулевого сигнала акселерометра по оси OY связанной системы координат, м/сек²; δAcc_{0Z} – смещение нулевого сигнала акселерометра по оси OZ связанной системы координат, м/сек²; $\delta Gyro_{0X}$ – смещение нулевого сигнала ДУС по оси OX связанной системы координат, рад/сек; $\delta Gyro_{0Y}$ – смещение нулевого сигнала ДУС по оси OY связанной системы координат, рад/сек; $\delta Gyro_{0Z}$ – смещение нулевого сигнала ДУС по оси OZ связанной системы координат, рад/сек.

$F_{\text{ИНС}}$ – переходная матрица системы (15×15);

$$F_{\text{ИНС}} = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & F_{\text{ИНС}1} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & F_{\text{ИНС}2} & 0_{3 \times 3} & F_{\text{ИНС}3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & F_{\text{ИНС}4} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix};$$

$$F_{\text{ИНС}1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$F_{\text{ИНС2}} = \begin{pmatrix} -\frac{\delta V_{Height}}{R_1} & -\frac{\delta V_{North}}{R_1} & -\frac{\delta V_{East} \operatorname{tg}(\varphi)}{R_2} - 2u \sin(\varphi) \\ -\frac{\delta V_{North} \operatorname{tg}(\varphi)}{R_2} & 0 & \frac{\delta V_{East}}{R_2} - 2u \cos(\varphi) \\ \frac{\delta V_{East} \operatorname{tg}(\varphi)}{R_2} + 2u \sin(\varphi) & 2u \cos(\varphi) & \frac{\delta V_{North}}{R_2} - \frac{\delta V_{Height}}{R_1} \end{pmatrix};$$

$$F_{\text{ИНС3}} = C;$$

$$F_{\text{ИНС4}} = C;$$

C – матрица перехода от связанной системы координат к географическому сопровождающему трехграннику; R_1 – радиус кривизны меридионального сечения земного эллипсоида:

$$(7) \quad R_1 = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2},$$

R_2 – радиус кривизны экваториального сечения земного эллипсоида:

$$(8) \quad R_2 = a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2},$$

где a – большая полуось земного эллипсоида (радиус земного экватора), $a = 6378245$ м; b – малая полуось земного эллипсоида, $b = 6356863$ м; e^2 – квадрат эксцентриситета земного эллипсоида, $e^2 = 0,0066934216$; φ – широта местоположения, рад; u – угловая скорость вращения Земли, u – скорость вращения земли, $u = 7.2922115 \cdot 10^{-5}$ рад/сек; dt – время дискретизации работы ИНС, сек; $w_{\text{ИНС}}$ – вектор формирующих белых шумов (6×1) с нулевым математическим ожиданием и единичной матрицей интенсивности:

$$w_{\text{ИНС}} = (w_{\delta a_x} w_{\delta a_y} w_{\delta a_z} w_{\delta \omega_x} w_{\delta \omega_y} w_{\delta \omega_z})^T;$$

$V_{\text{ИНС}}$ – матрица коэффициентов шумов (6×6);

$$V_{\text{ИНС}} = \begin{pmatrix} V_{\text{ИНС1}} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & V_{\text{ИНС2}} \end{pmatrix};$$

$$V_{\text{ИНС1}} = \begin{pmatrix} \sigma_{\delta a_x} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\delta a_y} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\delta a_z} \end{pmatrix};$$

$$V_{\text{ИНС2}} = \begin{pmatrix} \sigma_{\delta \omega_x} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\delta \omega_y} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\delta \omega_z} \end{pmatrix};$$

G – матрица шумов системы (15×6):

$$G = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{6 \times 3} \\ C & C \\ 0_{9 \times 3} & 0_{6 \times 3} \end{pmatrix}.$$

3.2. СПОСОБ КОМПЛЕКСИРОВАНИЯ НАВИГАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ

Одним из методов оценки неопределенности входных параметров в системе интегрального контроля навигационного комплекса является использование перестраиваемого алгоритма комплексной обработки информации, получаемой от (ИНС) и систем коррекции, алгоритмы обработки которых основаны о на фильтре Калмана (ФК) [6]. ФК реализован в слабосвязанной схеме комплексирования. В данном контексте рассматривается только линейный компонент модели погрешностей подсистем и сенсоров. В этом случае уравнения динамики системы и уравнения измерений во временной области могут быть представлены в виде соответствующих математических выражений:

$$(9) \quad \begin{cases} \bar{X}(t) = F(t) \cdot \bar{X}(t) + B(t) \cdot \bar{U}(t) + G(t) \cdot \bar{W}(t), \\ \bar{Z}(t) = H(t) \cdot \bar{X}(t) + \bar{V}(t); \end{cases}$$

где $\bar{X}(t)$ – вектор состояния, определяемый принятой моделью ошибок системы; $F(t)$ – матрица, описывающая динамические свойства системы; $B(t)$ – матрица управления; $\bar{U}(t)$ – вектор управляющих сигналов; $G(t)$ – матрица, описывающая шумы системы; $\bar{W}(t)$ – вектор шумов системы; $\bar{Z}(t)$ – вектор измерений; $H(t)$ – матрица связи вектора состояния и вектора измерений; $\bar{V}(t)$ – вектор шумов измерений.

При этом на статистические характеристики шумов системы, шумов измерений и начальное значение вектора состояния накладываются следующие ограничения:

1. $\bar{W}(t), \bar{V}(t)$ – случайный процесс, распределенный по Гауссу и имеющий характеристики белого шума, не имеет смещения и имеет известные ковариационные матрицы.

2. Шумы системы, измерения и начальное состояние вектора состояния независимы друг от друга:

$$M[\bar{V}(t), \bar{W}(t)^T] = 0; M[\bar{X}(t_0), \bar{W}(t)^T] = 0; M[\bar{X}(t_0), \bar{V}(t)^T] = 0.$$

Вводится начальное значение $M[\bar{X}(t_0)] = \bar{m}_X$ и $M[(\bar{X}(t_0) - \bar{m}_X), (\bar{X}(t_0) - \bar{m}_X)^T] = P_0$.

При условии выполнения наложенных ограничений ФК строит оптимальную оценку вектора состояния на основе минимизации квадратичного критерия:

$$\begin{aligned} J &= M \left[\left(\bar{X}(t) - \hat{X}(t) \right), \left(\bar{X}(t) - \hat{X}(t) \right)^T \right] = \\ &= M \left[\text{Tr} \left\{ (\bar{e}(t)), (\bar{e}(t))^T \right\} \right] = \text{Tr}(P(t)) = \sum_{i=1}^n \sigma_{i,i}^2, \end{aligned}$$

где $n = \dim(\bar{X})$, $\sigma_{i,i}$ – СКО соответствующего элемента вектора ошибок оценок $\bar{e}(t)$.

Алгоритм оценки навигационных параметров формирует в оптимальном режиме несмещеннную оценку:

$$M[\bar{X}(t)] = M[\hat{X}(t)] \text{ или } M[\bar{e}(t)] = 0$$

При переходе к дискретному виду линейный алгоритм оценки навигационных параметров представляется в виде

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \hat{X}_k = \Phi_{k/k-1} \hat{X}_{k-1} + B_{k-1} \bar{U}_{k-1} + K_k \left(\bar{Z}_k - H_k \Phi_{k-1} \hat{X}_{k-1} \right) \\ K_k = S_k H_k^T \left(H_k S_k H_k^T + R_{k-1} \right)^{-1} \\ S_k = \Phi_{k/k-1} P_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T + \Gamma_{k/k-1} Q_{k-1} \Gamma_{k/k-1}^T \\ P_k = (E - K_k H_k) S_k \end{array} \right. ,$$

где \hat{X}_k – оценка вектора состояния системы на шаге k , размер $[n \times 1]$; \hat{X}_{k-1} – оценка вектора состояния на шаге $k-1$; $\hat{X}_{k|k-1}$ – прогноз вектора состояния системы на шаге k по оценке состояния с учетом предыдущего шага $k-1$; P_k – скорректированное значение апостериорной ковариационной матрицы на шаге k , размер $[n \times n]$; P_{k-1} – скорректированное значение апостериорной ковариационной матрицы на шаге $k-1$; $P_{k|k-1}$ – прогнозное значение апостериорной ковариационной матрицы; $\Phi_{k,k-1}$ – матрица динамика системы, размер $[n \times n]$; G_{k-1} – матрица шумов системы, размер $[n \times l]$; Q_{k-1} – ковариационная матрица шумов системы, размер $[l \times l]$; K_k – матрица коэффициентов усиления Калмана, размер $[n \times r]$; H_k – матрица измерений, размер $[r \times n]$; R_k – ковариационная матрица измерений, размер $[r \times r]$; Y_k – вектор измерений, размер $[r \times 1]$; I – единичная матрица, размер $[n \times n]$; k – текущая итерация работы фильтра Калмана. Фильтр Калмана является одним из наиболее распространенных

методов оценки состояния динамической системы. Он используется для оценки состояния системы по имеющимся измерениям с учетом ошибок измерения и шума в системе. Фильтр Калмана работает в дискретном режиме, то есть данные собираются и обрабатываются через определенные интервалы времени.

При использовании фильтра Калмана для оценки параметров БНК необходимо учитывать, что функция оценки, функция прогноза и функция управления могут быть выполнены с разной частотой. Это связано с тем, что процесс оценки параметров может быть медленным и требовать более частого обновления, в то время как управление параметрами может требовать меньше обновлений.

Кроме того, при формировании дискретного оценивания фильтра Калмана следует учитывать наличие или отсутствие обратной связи по элементам оценки вектора состояния \hat{X}_{k-1} . Если обратная связь есть, то это может повлиять на матрицу управления $B^{EXTR}_{k/k-1}$, $B^{EST}_{k/k-1}$, $B^{CONTR}_{k/k-1}$ и вектор управления \bar{U}^{EXTR}_{k-1} , \bar{U}^{EST}_{k-1} , \bar{U}^{CONTR}_{k-1} , которые определяют, как данные используются для обновления оценки состояния.

В целом при использовании фильтра Калмана для оценки параметров БНК важно учитывать частоту обновления данных, наличие обратной связи и текущий режим работы фильтра. Это позволит повысить точность оценок и улучшить управление параметрами БНК.

3.3. ФОРМИРОВАНИЕ ПРИОРИТЕНОГО РЕЖИМА РАБОТЫ АЛГОРИТМА ОРИЕНТАЦИИ И НАВИГАЦИИ В РТС

Наличие информационной избыточности в БНК формирует различные режимы работы для проведения оценки текущего вектора состояния навигационной системы. Однако выбор режима работы бортового навигационного комплекса необходимо проводить в зависимости от внешних условий, что позволит системе более эффективно использовать доступные измерения и уменьшить влияние шумов и погрешностей от менее точных или нестабильных измерителей в конкретный момент времени при конкретных параметрах окружающей среды. Это в том числе позво-

лит системе ориентации и навигации адаптироваться к изменяющимся условиям и ограничениям, выбирая наиболее подходящие измерители и методы обработки информации в каждый конкретный момент времени.

Применение разных режимов работы с учетом разных измерителей и их характеристик является активно исследуемой областью в навигационных системах и автономном вождении. Так, в качестве корректирующих устройств могут выступать системы видеонаблюдения, радиомаяки и другие устройства, позволяющие осуществлять внедрение ТС в интеллектуальную транспортную среду.

Для решения задачи в общем виде представим множество возможных режимов работы бортового навигационного комплекса в виде $M = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$, где каждый режим m_j соответствует определенной комбинации измерителей и/или параметров фильтра Калмана. Для выбора m_j в БНК имеется внешняя информация или измерения, которые позволяют определить, какой режим является наиболее подходящим в данной ситуации. Обозначим это как r , где r принимает значения из множества M , указывая выбранный режим работы.

Таким образом, необходимо выбрать режим работы, учитывая внешние условия и текущую цель движения системы. Это можно представить в виде задачи оптимизации с целью минимизации ошибок или максимизации точности оценок состояния:

$$(11) \quad r_{opt} = \operatorname{argmin} J(r) = \operatorname{argmax} J(r),$$

где r_{opt} – оптимальный выбранный режим работы; $J(r)$ – целевая функция, которая оценивает качественные показатели вектора состояния для каждого режима работы.

Целевая функция $J(r)$ может быть определена на основе различных критериев, таких как среднеквадратичная ошибка оценки, степень доверия, или любые другие показатели, отражающие требования и внешние условия конкретной навигационной системы. Это может быть сформулировано как задача оптимизации для минимизации ошибок оценки состояния или максимизации точности оценок состояния.

В оптимизационной задаче также могут учитываться динамика переключения между режимами работы БНК и возможные изменения внешних возмущений.

Апостериорная оценка состояния примет вид

$$(12) \hat{x} = E(x|z, r),$$

где \hat{x} – апостериорная оценка состояния системы, учитывающая выбранный режим работы БНК и наблюдения (измерительная информация, полученная от внутренних и внешних датчиков и систем).

Сформулированная математическая постановка задачи позволяет рассматривать алгоритм навигации роботов в контексте интеллектуальной транспортной среды с учетом особенностей среды и обеспечивать высокую точность геопозиционирования и безопасную навигацию.

4. Подход к определению достоверности навигационной информации на основе теории статистических решений

4.1. ПОНЯТИЕ ДОСТОВЕРНОСТИ НАВИГАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

В метрологических регламентирующих документах часто встречается понятие «достоверность измерений», хотя понятие данного термина не приведено в нормативно-технических документах. Согласно Федеральному закону №102 «Об обеспечении единства измерений» [18], акцентируется достоверность измерений, чтобы защитить интересы граждан, общества и государства. Также подчеркивается, что обеспечение достоверности измерений требует соблюдения определенных стандартов, методик, и поверки средств измерений.

Для признания результатов измерений достоверными необходимы объективные данные, которые подтверждают корректность этих результатов [25]. Обеспечение достоверности измерений является ключевой задачей в метрологии, и для ее достижения необходимо тщательно придерживаться методологии и стандартов. Согласно этим выводам, достоверность измерений может иметь разные критерии, которые требуется определять и оцени-

вать через соответствующие методики. Так, в работе [25] авторами исследовано определение достоверности интеллектуальной навигационной системе и создана технология поиска метрического индекса достоверности. Для общего случая можно выделить следующие критерии достоверности результатов измерений [9]:

- доверительная вероятность,
- уровень значимости,
- доверительные коэффициенты.

Для определения навигационных параметров применяют разнообразные технические датчики и средства, которые характеризуются определенной точностью и вероятностными характеристиками своей работы. Качество функционирования любой системы измерения, контроля или управления зависит от достоверности данных, поступающих от измерительных систем на ее вход [9]. Таким образом, для эффективной работы системы управления и контроля важно обеспечить высокую достоверность входных данных, источником которых являются датчики измерения и управления.

Датчики часто предоставляют недостоверные данные, что требует применения дополнительных технических мер, увеличивающих сложность и стоимость системы. Однако даже такие меры не гарантируют высокую достоверность данных, ведь каждый датчик может иметь ограниченную точность и вероятностные характеристики, включая вероятность правильного обнаружения, вероятность ложного срабатывания и вероятность необнаружения. Повышение точности оценки этих вероятностей обеспечивается большим объемом статистических данных. При этом увеличения достоверности входных данных можно успешно достичь, применяя методы, основанные на теории статистических решений [5].

4.2. ОПИСАНИЕ ПОДХОДА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В данной работе для определения достоверности навигационной информации предлагается наиболее простой и распространённый подход, основанный на статистическом методе предель-

ных значений установок. Согласно теории вероятности и статистики, результат измерения попадает в определенный интервал с вероятностью определяемой формулой [8, 10]

$$(13) P(\alpha \leq X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha),$$

где α и β – нижняя и верхняя границы допустимых значений параметров измерительной системы при критических режимах работы.

Измеренная величина X варьируется вследствие статистического разброса относительно своего математического ожидания. Для многих процессов и измеренных величин эту вариабельность можно описать с использованием нормального распределения.

Обозначим условия для поиска границ достоверных значений величин навигационной информации

1) пусть значение погрешности результата измерения X находится в пределах $\mathcal{E}_i \leq \varepsilon_i^{max}$, $i = 1, \dots, m$, где ε_i^{max} – некоторое ограниченное положительное число, зависящее от точности измерительного устройства;

2) если $|\varepsilon'_i| < |\varepsilon''_i|$ случайной величины \mathcal{E}_i , тогда справедливо неравенство $p_i(|\varepsilon'_i|) > p_i(|\varepsilon''_i|)$, где $p_i(|\varepsilon_i|)$ – плотность распределения вероятности случайной величины \mathcal{E}_i , $i = 1, \dots, m$;

3) $M\{\varepsilon_i\} = \int_{-\varepsilon_i^{max}}^{\varepsilon_i^{max}} \varepsilon_i p_i(\varepsilon_i) d\varepsilon_i = 0$, где $M\{\varepsilon_i\}$ – математическое ожидание;

4) распределение погрешности $\int_{-\varepsilon_i^{max}}^{\varepsilon_i^{max}} p_i(\varepsilon_i) d\varepsilon_i = 1, 0$;

5) оценка величины X неизвестного значения χ (истинного значения): $x_m = \operatorname{argmin}\{D\{x_m\}\} = \operatorname{argmin}\{M\{(x_m - \chi)^2\}\}$. Данное условие свидетельствует о том, что измеренные значения наиболее тесно группируются около значения χ .

Вернемся к решению выражения (13) для нормального закона распределения при указанных выше условиях.

$$(14) P(\alpha \leq X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{\alpha/S_x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_{-\infty}^{\beta/S_x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right\};$$

Продифференцируем и приравняем к нулю выражение (14):

$$\frac{d}{dS_x} [\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-\frac{\beta^2}{2S_x^2}} \left(-\frac{\beta}{S_x^2} \right) - e^{-\frac{\alpha^2}{2S_x^2}} \left(-\frac{\alpha}{S_x^2} \right) \right\} = 0$$

Отсюда получаем границы, в которые попадает величина X :

$$\beta e^{-\frac{\beta^2}{2S_x^2}} = \alpha e^{-\frac{\alpha^2}{2S_x^2}}$$

Однако для дальнейших расчетов стоит определить доверительную вероятность для контроля диапазона достоверных результатов измерений величин навигационной информации.

При оценке параметров вероятностных распределений или характеристик величин в информационно-измерительной системе можно основываться на теории квантильных оценок. Данная теория может помочь в более устойчивой и точной оценке величин при различных режимах эксплуатации (событиях) информационно-измерительной системе. Самый распространенный способ выбора квантиля – это «правило трёх сигм». Данный способ устанавливает, что достоверные измерения находятся в пределах диапазона $\pm 3\sigma$ с вероятностью 0,997.

Суть подхода в определении достоверности величин навигационной информации заключается в нахождении границ интервала (α, β) с учетом выбора квантиля распределения на основе априорных данных. Это позволяет задать значение среднеквадратичное отклонение с определенной доверительной вероятностью и затем определить границы доверительного интервала. Стоит отметить при таком простом подходе цена принятия ошибочных решений (цена пропуска грубой погрешности) не превышает 50%. Решением данной проблемы может быть контроль по критерию минимакса [1]

5. Заключение

Подход к решению задачи ориентации и навигации с использованием инфраструктуры ИТС демонстрируют потенциал и перспективы применения в сфере автономных робототехнических устройств. Обеспечение повышения показателей основных характеристик навигационной информации является критически важным аспектом для успешного функционирования систем

в разнообразных средах и ситуациях. Объединение высокотехнологических аспектов автономных систем с передовыми элементами транспортной инфраструктуры обеспечивает важный симбиоз, расширяющий границы эффективности и применимости в реальных условиях. Подход к формированию приоритетного режима работы БНК в условиях информационной избыточности, основанный на интеграции с инфраструктурой интеллектуальной транспортной среды, может стать прочным фундаментом для множества практических приложений, включая автономное вождение, беспилотные миссии летательных аппаратов и др. В контексте данной работы также представлен простой и оперативный подход к определению достоверности навигационной информации за счет установок предельных значений. На основе априорных данных величин навигационной информации при выборе квантильных оценок позволяет определить интервальные границы допустимых значений результатов измерений. Данный подход может быть улучшен путем внедрения критерия минимизации и максимизации.

Полученные результаты исследования могут служить основой для дальнейших научных и инженерных исследований в области автономных робототехнических систем, способствуя развитию передовых технологий в данной сфере и углублению понимания принципов функционирования подобных устройств. Настоящая работа отражает прогрессивные тенденции в области разработки и внедрения систем автономной навигации и ориентации в области интеллектуальной транспортной среды, что представляет собой значимый вклад в развитие современных технических средств и технологий и открывает перспективы для широкого спектра приложений, включая автономное вождение, беспилотные миссии, роботизированные производственные процессы и другие сферы применения автономных робототехнических устройств.

В дальнейшем авторами планируется тестирование разработанных методов на различных автономных робототехнических платформах для подтверждения их универсальности и способности быть примененными в различных контекстах и сценариях.

Литература

1. АНИЩЕНКО В.А., ПИСАРУК Т.В. Эффективность контроля достоверности измерений в автоматизированных системах управления энергосистемами по предельным значениям // Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ. – 2017. – Т. 60, №5. – С. 407–416. – DOI: 10.21122/1029-7448-2017-60-5-407-416
2. ВАСИЛЮК Н.Н. Слабое комплексирование инерциальных и спутниковых измерений с помощью расширенного фильтра Калмана с кватернионным представлением ориентации // Проблемы управления. – 2019. – №4. – С. 72–84.
3. ВОДИЧЕВА Л.В., ПАРЫШЕВА Ю.В. Оценка точностных параметров датчиков бесплатформенного инерциального измерительного блока с помощью относительно грубого поворотного стола // Гирокопия и навигация. – 2019. – Т. 27, № 2(105).
4. ВОРОХОБИН И.И. Проверка статистических гипотез распределения погрешностей измерения навигационных параметров // Eastern European Scientific Journal. –2019. – №4-3. – С. 44
5. ДАНИЛЕВИЧ С.Б., ТРЕТЬЯК В.В. Оценка достоверности контроля приборов, поверяемых в нескольких точках диапазона // Системы анализа и обработки данных. – 2020. – №1(78).
6. ИБРАЕВ А. Система навигации транспортного средства на основе интегрированной ИНС/СНС/Одометрии // Технические науки – от теории к практике. –2017. – №5. – С. 31–43.
7. ПОЛЯКОВА Т.А., ХИМЧЕНКО А.И. Формирование системы беспилотного транспорта: проблемы реализации государственной политики обеспечения информационной безопасности и правового регулирования // Транспортное право и безопасность. – 2020. – №2(34). – С. 118–126.
8. СУРКОВ В.О. Повышение достоверности навигационных измерений в навигационных системах подвижных наземных объектов // Молодой ученый. – 2016. – №14(118). – С. 168–170.

9. ХРАПОВ Ф.И., Власов П.В. *Повышение достоверности результатов измерений в распределенных многоканальных информационноизмерительных системах* // Вестник метролога. – 2017. – №4. – С. 9–15.
10. ШОЛОХОВ А.В. *Метод оценки достоверности информации при периодической коррекции наземных навигационных систем* // Информационно-управляющие системы. – 2006. – №6. – С. 7–13.
11. AHANGAR M.N., AHMED Q.Z., KHAN F.A., HAFEEZ M. *A Survey of Autonomous Vehicles: Enabling Communication Technologies and Challenges* // Sensors. – 2021. – Vol. 21(3):706. – DOI: <https://doi.org/10.3390/s21030706>.
12. ALATISE M.B., HANCKE G.P. *A Review on Challenges of Autonomous Mobile Robot and Sensor Fusion Methods* // IEEE Access. – 2020. – Vol. 8, – P. 39830–39846. – DOI: 10.1109/ACCESS.2020.2975643.
13. AYYALASOMAYAJULA R., ARUN A., WU C., SHARMA S. et al. *Deep learning based wireless localization for indoor navigation.* // Proc. of the 26th Annual Int. Conf. on Mobile Computing and Networking (MobiCom '20). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, – 2020. – Article 17 – P. 1–14. – DOI: <https://doi.org/10.1145/3372224.3380894>.
14. BRODSKY S., PANFEROV A., NEBYLOV A., CHIKRIN D. *Integrated Navigation and Distributed Control Intelligent Transport System* // 27th Saint Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems (ICINS–2020). – 2020. – P. 1–4.
15. GENTNER C., ULM SCHNEIDER M., KUEHNER I., DAMMANN A. *WiFi-RTT Indoor Positioning. 2020 IEEE ION Position* // Location and Navigation Symposium (PLANS). –2020. – P. 1029–1033
16. GUERRERO J., ZEADALLY S., CASTILLO J. *Sensor Technologies for Intelligent Transportation Systems* // Sensors. – 2018. – Vol. 18(4). – P. 1–22.
17. GUPTA A., SINGH B. *Recent trends in intelligent transportation systems: a review* // Journal of Transport Literature. –2015. – Vol. 9(2). – P. 30–34.
18. <http://www.kremlin.ru/acts/bank/27684/>.

19. JHARKO E., MAMCHENKO M., KHRIPUNOV S.P. *Robot/UAV Indoor Visual SLAM in Smart Cities Based on Remote Data Processing* // Int. Russian Smart Industry Conf. (SmartIndustryCon–2023). – 2023. – P. 504–508. – DOI: 10.1109/SmartIndustryCon57312.2023.10110777.
20. MENOVAR H., GUVENC I., AKKAYA K., ULUAGAC A.S. et al. *UAV-Enabled Intelligent Transportation Systems for the Smart City: Applications and Challenges* // IEEE Communications Magazine. –2017. – Vol. 55. – P. 22–28. – DOI: 10.1109/mcom.2017.1600238cm.
21. MIAO J., ZHANG P. *UAV Visual Navigation System based on Digital Twin* // 18th Int. Conf. on Mobility, Sensing and Networking (MSN–2022). –2022. – P. 865–870.
22. PANDEY D., NIWARIA K. *A Novel Single Front Camera Based Simpler Approach for Autonomous Taxi Navigation for Smart City Deployments* // 6th Int. Conf. on Signal Processing and Integrated Networks (SPIN–2019). – 2019. – P. 448–451. – DOI: 10.1109/SPIN.2019.8711668.
23. SANTHIYA R., GEETHAPRIYA C., *Machine Learning Techniques for Intelligent Transportation Systems-An overview* // 12th Int. Conf. on Computing Communication and Networking Technologies. – 2021. – P. 1–7.
24. SHAN T., ENGLOT B., MEYERS D., WANG W. et al. *LIOSAM: Tightly-coupled Lidar Inertial Odometry via Smoothing and Mapping* // IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS–2020). – IEEE Press, 2020. – P. 5135–5142. – DOI: <https://doi.org/10.1109/IROS45743.2020.9341176>.
25. SUN J., ZHANG X., ZHANG P., ZHANG Y.. *Research on Trustworthiness Evaluation Technology of Aircraft Intelligent Navigation System* // IEEE 7th Int. Workshop on Metrology for AeroSpace (MetroAeroSpace), Pisa, Italy. – 2020. – P. 233–237. – DOI: 10.1109/MetroAeroSpace48742.2020.9160164.
26. WANG A., CHEN T., CHEN H., JI X. et al. *NDNVIC: Named Data Networking for Vehicle Infrastructure Cooperation* // IEEE Access. –2019. – Vol. 7. – P. 62231–62239.
27. WU C.H., TU S.H., TU S.W, WANG L.H. et al. *Realization of Remote Monitoring and Navigation System for Multiple UAV Swarm Missions: Using 4G/WiFi-Mesh Communications and*

- RTK GPS Positioning Technology // Int. Automatic Control Conference (CACS–2022). – 2022. – P. 1–6.*
28. ZHANG Y, OUYANG J, KUANG Y. *Satellite Ground Link Planning for Data Transmission of Global Satellite Navigation System // 6th Int. Conf. on Big Data and Information Analytics (BigDIA), Shenzhen, China, 2020. – P. 1–4. – DOI: 10.1109/BigDIA51454.2020.00009.*
29. ZHAO G., XUAN K., TANIAK D., RAHAYU W. et al. *Intelligent transport navigation system using LookAhead Continuous KNN // IEEE Int. Conf. on Industrial Technology. – 2009. – P. 1–6. – DOI: 10.1109/ICIT.2009.4939586.*
30. ZHIMING C., WENJIE L., YANNIAN R., XUHONG G. *Application of improved genetic algorithm to search of optimum route for intelligent vehicle navigation system // Proc. of the IEEE Int. Conf. on Intelligent Transportation Systems. – 2003. – Vol.2. – P. 1187–1189.*

**FORMATION OF RELIABLE NAVIGATION
INFORMATION IN THE TASKS OF ORIENTATION
AND NAVIGATION OF AUTONOMOUS ROBOTIC DE-
VICES USING THE INFRASTRUCTURE OF INTELLIGENT
TRANSPORT ENVIRONMENT**

Peter Trefilov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, (petertrfi@ipu.ru).

Maria Romanova, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (rma-rda@ipu.ru).

Abstract: In the context of the development of intelligent transport environment, the accurate positioning of autonomous robotic devices plays an important role. In this article, the authors present a method of orientation and navigation of robotic systems with the possible use of intelligent transport environment infrastructure. The algorithm of robot orientation and navigation in the intelligent transport environment describes the process of data collection, processing, filtering, interpolation and extrapolation to determine the robot's location and route planning. The method of formation of the priority mode of on-board navigation complex operation under conditions of information redundancy of navigation parameters is proposed. The method represents the optimization problem of selecting the operating mode of the on-board navigation system, which at the moment of time has the most accurate estimation taking into

account the external conditions. The article also touches upon the concept of measurement results reliability. The criteria of measurement information reliability to ensure the effectiveness of decision-making in the management of measurement processes are highlighted. The approach to determining the reliability of navigation and measurement information on the basis of the method of statistical decision theory of marginal values of measurement results is described. This approach allows to analyze quickly enough the received measurement information by statistical indicators and to estimate the degree of reliability of the results.

Keywords: intelligent transport system, navigation and orientation, reliability, robotic systems.

УДК 65.011.56+ 656.1

ББК 39.1

DOI: 10.25728/ubs.2023.101.3

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Н.А. Коргиным.*

*Поступила в редакцию 16.10.2023.
Опубликована 30.11.2023.*

МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСА В ИЕРАРХИЧЕСКИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ ДРЕВОВИДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С УЧЁТОМ ОППОРТУНИСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ АГЕНТОВ¹

Горбанёва О.И.², Михалкович С.С.³, Угольницкий Г.А.⁴
(Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону)

Статья посвящена построению и исследованию СОЧИ-моделей воспроизведения и распределения ресурса в иерархически управляемой древовидной динамической системе с учётом возможного оппортунистического поведения агентов. Предложена оригинальная концепция балансовых соотношений для ресурса. Описана общая структура указанной модели для двухуровневой и трёхуровневой управляющей подсистемы. Приведены иллюстративные примеры аналитического и численного исследования частных случаев указанных моделей для различных информационных регламентов динамических игровых моделей.

Ключевые слова: имитационное моделирование; оппортунистическое поведение; распределение ресурсов; управляемые динамические системы; экономика общественных благ.

1. Введение

Задачи согласования интересов активных агентов при распределении ресурсов наиболее подробно исследованы в экономике общественных благ, начиная с основополагающих работ [12–14, 22]. Современное состояние этого направления отражено во многих работах, например, в [15, 19]. Приложения теории динамических игр к данной области описаны в [20, Chap. 6]. В частности, в этой монографии показаны различия при моделировании материальных и нематериальных общественных благ. Чрезвычайно важную роль в математической формализации данного направления сыграла модель Гермейера –

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект №23-21-00131.

² Ольга Ивановна Горбанёва, д.т.н., доцент (oigorbaneva@sedu.ru).

³ Станислав Станиславович Михалкович, к.ф.-м.н., доцент (miks@sedu.ru).

⁴ Геннадий Анатольевич Угольницкий, д.ф.-м.н., профессор (gaugolnickiy@sedu.ru).

Вателя [1]; развитие этих исследований выполнено в [8]. Подход теории управления организационными системами к решению задач распределения ресурсов изложен в [9, 10].

Авторское развитие указанного направления предложено в концепции СОЧИ-моделей (моделей согласования общественных и частных интересов) [5, 17]. Эта концепция входит в состав более общей теории управления устойчивым развитием, где помимо согласования интересов активных агентов учитываются требования к состоянию управляемой динамической системы [11]. Модели борьбы с оппортунистическим поведением для обеспечения устойчивого развития описаны в [6].

Регламенты динамических игр, отражающие различные правила иерархического управления, описаны в [7]. Здесь принципиально наличие или отсутствие обратной связи по действиям агентов и/или по состоянию управляемой системы.

Решение сложных динамических задач конфликтного управления, в том числе при распределении ресурсов, требует применения численных методов или компьютерной имитации [21].

Модели сочетания общих и частных интересов (СОЧИ-модели) предполагают, что в имеющемся множестве агентов есть некий общий интерес, который требует затрат некоторого ресурса. Каждый агент, имея некоторое количество ресурсов, распределяет его между общим интересом и своими частными с тем, чтобы суммарный выигрыш от частной деятельности и причитающаяся доля от результатов общественной деятельности был максимален. Статические одноуровневые модели сочетания общих и частных интересов независимых агентов рассмотрены в [5, 16]. В них найдено равновесие по Нэшу для наиболее часто используемых в экономических исследованиях функций общих и частных интересов.

В [3] рассмотрены двухуровневые СОЧИ-модели независимых агентов, над которыми имеется верхний уровень – Принципал (Центр), целью которого является максимизация функции общественного благосостояния. Для достижения этой цели Принципал может применять административное либо экономическое воздействие. Административное воздействие заключается в установке нижнего значения величины ресурсов, меньше которого агент не может потратить на общие цели. Принципал

несет затраты на контроль за выполнением агентами выдвинутых к ним требований Принципала. Экономическое воздействие Принципала на агентов может заключаться в том, чтобы назначать доли участия агентов в общем доходе, либо в том, чтобы влиять на количество ресурсов, имеющихся у агента, в частности, выделять ресурсы агентам. В данных иерархических играх найдены равновесия по Штакельбергу.

В [2–3] рассмотрены трехуровневые СОЧИ-модели, включающие промежуточный уровень между Принципалом и агентами – Супервайзер, который действует от лица Принципала, но может ослаблять его требования в ответ на взятку от агента. В зависимости от типа воздействия агента на супервайзера выделяют административную и экономическую коррупцию, а также коррупцию при распределении ресурсов.

Позже рассматривались динамические модели распределения ресурсов, а именно сетевые СОЧИ-модели обмена мнениями в маркетинге [22], а также региональные СОЧИ-модели взаимодействия [4].

Сетевая СОЧИ-модель управления мнениями представляет собой трёхуровневую иерархическую игру, в которой Центр выделяет ресурсы агентам влияния (фирмам), которые, в свою очередь, распределяют ресурсы на воздействие (проводят акции, раздают бесплатно пробный товар и т.д.) на базовых агентов (сетевыми потенциальными клиентами) с целью повышения продаж товара или услуги. Целью Центра и агентов влияния является повышение продаж товара за вычетом расходов на выделение ресурсов подчинённым уровням. Кроме того, агенты влияния кроме повышения продаж имеют свои частные интересы (например, инвестиции), на которые идет оставшаяся часть ресурсов, выделенных Центром агенту влияния. Центр может быть дружелюбным по отношению к агентам влияния или безразличным к нему. В моделях дружелюбие или безразличие проявляется учётом или неучётом частных интересов агентов влияния в целевой функции Центра. Базовые агенты образуют сеть, имея связи с другими базовыми агентами. Базовые агенты не имеют собственных интересов, но имеют мнение о продаваемом в маркетинговой сети товаре, которое меняется со временем под влиянием других базовых агентов и агентов влияния.

Что же касается СОЧИ-моделей регионального взаимодействия, то рассматриваются двухуровневые системы. На нижнем уровне находятся регионы, которые находятся в составе макрорегиона на верхнем уровне. Регионы выпускают продукцию, получая валовый региональный продукт (ВРП), что учитывается при помощи функции Кобба – Дугласа. Также регион при ведении хозяйства загрязняет окружающую среду. ВРП расходуется в следующий период времени на инвестиции в производство, расходы на очищение окружающей среды и вложение средств в развитие соседних регионов. Макрорегион при помощи экономического и административного воздействия повышает удельное потребление всего макрорегиона. Административное воздействие заключается в назначении нижних границ расходов на все рассматриваемые в модели статьи затрат, а экономическое воздействие подразумевает повышение заинтересованности регионов не только в повышении своего удельного потребления, но и удельного потребления макрорегиона.

Настоящая работа посвящена построению и исследованию СОЧИ-моделей воспроизводства и распределения ресурса в иерархически управляемой древовидной динамической системе с учётом возможного оппортунизма агентов. Мы здесь определяем оппортунизм в более узком смысле как реализацию агентами своих частных интересов вместо участия в общественном производстве (например, это может быть нецелевое использование выделенных ресурсов).

Вклад статьи состоит в следующем:

- предложены весьма общая модель воспроизводства и распределения ресурса в иерархически управляемой динамической системе и регламент её исследования посредством имитационного моделирования, приведены аналитические результаты для линейной параметризации модели и результаты численного исследования для более общего случая;
- проведено аналитическое и численное исследование статических моделей распределения ресурса между производством общественного продукта и частной деятельностью;
- проведено аналитическое исследование динамических моделей воздействия на природную среду с учётом частных интересов и требований устойчивого развития системы.

2. Постановка задачи экономического управления в двухуровневой системе

Имеется двухуровневая древовидная управляющая система, действующая на динамический объект управления (производство некоторого ресурса). Эта система состоит из Центра и нескольких агентов. Каждый агент распределяет свои трудовые усилия между производством ресурса (общественного блага) и частной деятельностью. Произведённый в результате совместных усилий агентов ресурс поступает в распоряжение Центра, который заинтересован в его максимизации и использует часть ресурса для вознаграждения агентов. Выигрыш агента складывается из его вознаграждения и дохода от частной деятельности.

Структура моделируемой системы показана на рис. 1.

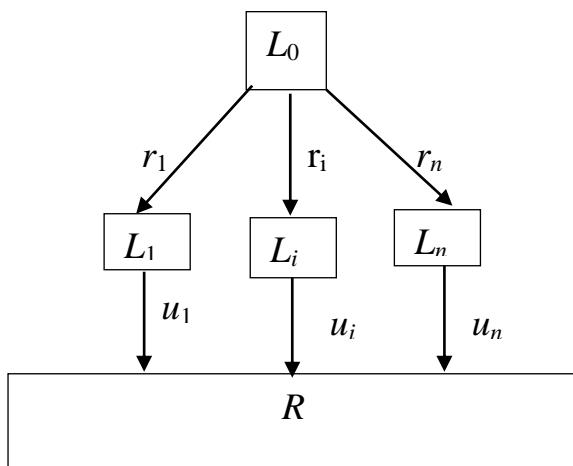


Рис. 1. Схема двухуровневой иерархически управляемой динамической системы

Модель имеет вид

- (1) $J_0 = \sum_{t=1}^T \delta^t R^t \rightarrow \max$
- (2) $\sum_{i=1}^n r_i^t \leq 1; \quad r_i^t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n;$
- (3) $J_i = \sum_{t=1}^T \delta^t [r_i^t R^t + G_i(1 - u_i^t)] \rightarrow \max$

$$(4) \quad 0 \leq u_i^t \leq 1, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$(5) \quad R^t = (1 - \sum_{i=1}^n r_i^t) R^{t-1} + F(\sum_{i=1}^n u_i^t), \quad R^0 = R_0, \quad t = 1, \dots, T.$$

Здесь L_0 – Центр; L_1, \dots, L_n – агенты; n – число агентов; R – ресурс, производимый агентами и поступающий в распоряжение Центра; r_i – доля ресурса, выделяемая Центром на вознаграждение i -го агента; u_i – усилие агента по производству ресурса (в долях от максимального усилия); F – функция производства ресурса совокупными усилиями агентов; G_i – функция дохода i -го агента от частной деятельности, не связанной с производством ресурса; $\delta \in (0, 1)$ – коэффициент дисконтирования; T – период рассмотрения.

Найдем оптимальную реакцию агентов на стратегию Центра. Выпишем задачу оптимального управления (3)–(5) в непрерывном времени (теперь коэффициент дисконтирования $0 < \rho < 1$) для степенной параметризации функций

$F = \sqrt{u_1(t) + u_2(t)}$ и $G_i = \sqrt{1 - u_i(t)}$ в случае двух агентов:

$$(6) \quad J_i = \int_0^T e^{-\rho t} [r_i(t)R(t) + \sqrt{1 - u_i(t)}] dt \rightarrow \max$$

$$(7) \quad 0 \leq u_i(t) \leq 1, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$(8) \quad \dot{R} = -(r_1 + r_2)R(t) + \sqrt{u_1(t) + u_2(t)},$$

$$(9) \quad R(0) = R_0, \quad t = 1, \dots, T.$$

К исследованию (1)–(9) применим принцип максимума Понtryгина.

Функция Гамильтона имеет вид

$$H_i(u_i, R, \lambda_i) = r_i R + \sqrt{1 - u_i} + \lambda_i (\sqrt{u_1 + u_2} - (r_1 + r_2)R).$$

Из необходимого условия максимума

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_i} = \frac{\lambda_i}{2\sqrt{u_1 + u_2}} - \frac{1}{2\sqrt{1 - u_i}} = 0, \quad i = 1, 2,$$

откуда $\lambda_i \sqrt{1 - u_i} = \sqrt{u_1 + u_2}$, или $\lambda_i^2 (1 - u_i) = u_1 + u_2$, получаем

$$(10) \quad u_1^*(t) = \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 1}{(\lambda_1^2 + 1)(\lambda_2^2 + 1)}, \quad u_2^*(t) = \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 + 1}{(\lambda_1^2 + 1)(\lambda_2^2 + 1)}.$$

Решение краевой задачи для сопряжённой переменной

$$\dot{\lambda}_i = \rho \lambda_i - \frac{\partial H}{\partial R} = \rho \lambda_i - r_i + (r_1 + r_2) \lambda_i(t), \quad \lambda_i(T) = 0$$

даёт

$$(11) \quad \lambda_i^*(t) = \frac{r_i}{\rho + r_i} \left(1 - e^{-(\rho + r_i)(T-t)} \right).$$

Подстановкой (11) в (10) получаем оптимальное решение задачи.

Далее нам понадобятся два понятия. Индивидуализм означает, что агент тратит все ресурсы полностью на частную деятельность, а коллективизм – на общественное производство.

Видно, что $u_i^*(t) \leq 1$, причём в последний момент времени $t = T$ и только тогда $\lambda_i^*(t) = 0$, $i = 1, 2$, а значит, $u_i^*(t) = 1$, т.е. только в последний момент времени агентам выгодно быть коллективистами.

Также заметим, что для того, чтобы агенту выгодно было применить эгоистическую стратегию, необходимо выполнение условия

$$(12) \quad \lambda_2^2 > \frac{\lambda_1^2 + 1}{1 - \lambda_1^2} = -1 + \frac{2}{1 - \lambda_1^2}.$$

Анализ правой части (12) показывает, что минимальное значение данного выражения равно 1 и достигается при $\lambda_1 = 0$.

С другой стороны, из (11) видно, что при ненулевых значениях параметров ρ и r_i величина $0 \leq \lambda_i^*(t) < 1$, а значит, условие (11) может выполниться только в виде равенства и только если $\lambda_{j \neq i}^*(t) = 0$, в то время как $\lambda_i^*(t) = 1$. Однако такого быть не может, так как значение параметра $\lambda_i^*(t)$, $i = 1, 2$, может равняться нулю только при $t = T$, но в этот же момент времени значение параметра второго агента не может равняться 1, так как по тем же причинам оно равно 0. Значит, при данной постановке агентам невыгодно быть индивидуалистами.

Итак, при степенной параметризации функций общего и частного дохода стратегия индивидуализма невыгодна агентам нижнего уровня, но и стратегия коллективизма выгодна только в последний момент времени $t = T$. Во все более ранние момен-

ты времени агенту выгодно тратить ресурсы как на общие цели, так и на частные.

3. Постановка задачи экономического управления в трёхуровневой системе с учётом коррупции

Рассмотрим постановку задачи управления в трехуровневой системе с учётом коррупции в двух постановках: в случае, когда агенты всех уровней заинтересованы в производстве, и в случае, когда агенты всех уровней заинтересованы только в максимизации у них ресурсов, на количество которых тем не менее производство влияет.

ПОСТАНОВКА 1.

Имеется трёхуровневая древовидная управляющая система, действующая на динамический объект управления (производство ресурса). Эта система состоит из Центра, агентов влияния и базовых агентов. Каждый агент распределяет свои трудовые усилия между производством ресурса (общественного блага) и частной деятельностью. Произведённый в результате совместных усилий базовых агентов ресурс поступает в распоряжение Центра, который заинтересован в его максимизации и использует часть ресурса для вознаграждения агентов влияния и борьбы с коррупцией. Агент влияния, в свою очередь, получая ресурсы от Центра, также заинтересован в максимизации своего ресурса, но часть их он распределяет между подчиненными ему базовыми агентами. Агент влияния является промежуточным уровнем, посредником между Центром и подчиненными ему базовыми агентами (рис. 2).

Трудовые усилия базовых агентов по воспроизведству общего ресурса ограничиваются снизу. Агент влияния может ослаблять эти ограничения в обмен на взятку от базового агента. Центр контролирует оппортунистическое поведение агентов влияния и в случае поимки, которая происходит с определённой вероятностью, зависящей от расходов Центра, конфискует коррупционный доход и налагает на пойманного агента влияния большой дополнительный штраф.

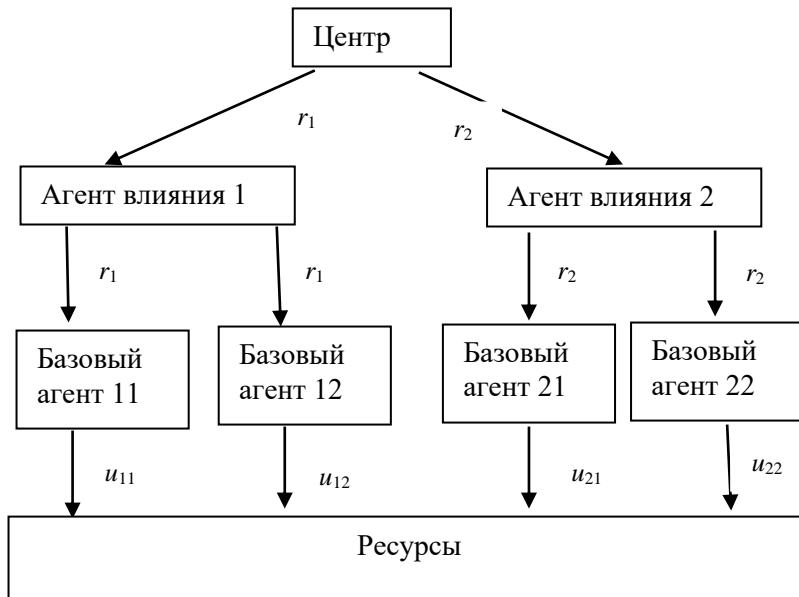


Рис. 2. Схема трехуровневой иерархически управляемой динамической системы

Выигрыш агента влияния складывается из его вознаграждения и возможного коррупционного дохода за вычетом расходов на вознаграждение базовых агентов и штрафа при коррупции в случае поимки. Выигрыш базового агента складывается из его вознаграждения и дохода от частной деятельности за вычетом возможных взяток.

Модель имеет вид

$$(13) J_0 = \sum_{t=1}^T \delta^t R^t \rightarrow \max;$$

$$(14) r_i^t \geq 0; \quad z_i^t \geq 0; \quad \sum_{i=1}^m (r_i^t + z_i^t) \leq 1; \quad i = 1, \dots, m;$$

$$(15) J_i = \sum_{t=1}^T \delta^t R_i^t \rightarrow \max;$$

$$(16) r_{ij}^t \geq 0; \quad \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}^t \leq 1; \quad B_i^t \in \{0,1\}; \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n_i;$$

$$(17) J_{ij} = \sum_{t=1}^T \delta^t R_{ij}^t \rightarrow \max;$$

$$(18) q(1 - b_{ij}^t) \leq u_{ij}^t \leq 1; \quad 0 \leq b_{ij}^t \leq 1; \\ i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n_i,$$

$$(19) R^t = [1 - \sum_{i=1}^m (r_i^t + z_i^t)] R^{t-1} + F \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}^t \right) + \\ + M \sum_{i=1}^m B_i^t P(z_i^t) R_i^t, \quad R^0 = R_0;$$

$$(20) R_i^t = \left(1 - \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}^t \right) R_i^{t-1} + r_i^t R^t + B_i^t [1 - (1 + M) P(z_i^t)] \cdot \\ \sum_{j=1}^{n_i} b_{ij}^t R_{ij}^t, \quad R_i^0 = R_{i0};$$

$$(21) R_{ij}^{t+1} = (1 - b_{ij}^t) R_{ij}^t + r_{ij}^t R_i^t + G_{ij} (1 - u_{ij}^t), \quad R_{ij}^0 = R_{ij0}; \\ i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n_i; \quad t = 1, \dots, T.$$

Дополнительные обозначения: J_0, J_i, J_{ij} – выигрыши Центра, i -го агента влияния и ij -го базового агента соответственно; R, R_i, R_{ij} – ресурсы в распоряжении этих агентов; r_i, r_{ij} – доли ресурса, выделяемые Центром и агентами влияния своим подчинённым; b_{ij} – доля ресурса, выделяемая базовым агентом на взятку агенту влияния; z_i^t – доля ресурса, выделяемая Центром на контроль i -го агента влияния; $P(z_i^t)$ – вероятность поимки взяточника при затратах $z_i^t R^t$; M – коэффициент штрафа при поимке;

$$B_i^t = \begin{cases} 1, & \text{агент влияния берёт предложенные ему взятки,} \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

q – минимально допустимое усилие базовых агентов по воспроизведству общего ресурса.

Рассмотрим спецификацию модели, в которой частные функции линейны $G_0(x) = G_0 x$, $G_i(x) = G_i x$, $G_{ij}(x) = G_{ij} x$.

Начнём с задачи базового агента:

$$(22) J_{ij} = \sum_{t=1}^T \delta^t R_{ij}^t \rightarrow \max,$$

$$q(1 - b_{ij}^t) \leq u_{ij}^t \leq 1; \quad 0 \leq b_{ij}^t \leq 1; \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n_i;$$

$$(23) R_{ij}(t) = -b_{ij}(t) R_{ij}(t) + r_{ij}(t) R_i(t) + G_{ij} \cdot (1 - u_{ij}(t)), \quad R_{ij}^0 = R_{ij0}; \\ i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n_i; \quad t = 1, \dots, T.$$

Исследование модели (13)–(23) описано в Приложении 1.

В результате исследования линейной модели получаем, что на общие цели ни одному уровню управления тратить ресурсы невыгодно. Это можно объяснить тем, что в данной модели агент влияния не заинтересован в производстве, а только во взяточничестве. Но и базовый агент заинтересован только в максимизации накопляемого ресурса, который убывает по затратам средств на производство и взятку. По тем же причинам агент влияния не тратит средства на базовых агентов. Во-первых, они взятку не платят. Во-вторых, накапливаемый ресурс не возрастает от этого. В-третьих, в производстве агент влияния не заинтересован. Центр, зная, что агент влияния не распределяет ресурсы базовым агентам, не выделяет их, в свою очередь, и агентам влияния. Также он не тратит средства на контроль, так как взяточничества нет.

В то же время на выполнении условия устойчивого развития (21) отсутствие целевого использования ресурсов оказывается положительно. Это условие с учётом полученных результатов выглядит следующим образом:

$$R(T) = R_0 + q^* \cdot F \cdot \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \frac{R_{ij0} (1 - e^{-g_{ij}(1-q^*)t})}{g_{ij}(1-q^*)} \right) > R^*.$$

Заметим, что второе слагаемое всегда положительно, поэтому если Центр изначально имел ресурсов больше, чем R^* , то условие устойчивого развития будет продолжать выполняться и со временем. Производство осуществляется на минимальном уровне и за счёт ресурсов базовых агентов.

ПОСТАНОВКА 2.

Имеется та же трёхуровневая древовидная управляющая система, действующая на динамический объект управления (производство ресурса), состоящая из Центра, агентов влияния и базовых агентов. Выигрыш Центра состоит из двух слагаемых: количества ресурсов в текущий момент времени и выпуск продукции базовыми агентами.

Выигрыш агента влияния складывается из его количества ресурсов, выпуска продукции базовых агентов, подчинённых именно этому агенту влияния, и возможного коррупционного дохода за вычетом штрафа при коррупции в случае поимки.

Выигрыш базового агента, как и выигрыш Центра, состоит из количества ресурсов в текущий момент времени и выпуска продукции.

Рассмотрим следующую модель, в которой все функции общественного и частного дохода линейны:

$$(24) J_0 = \int_0^T \delta^t \left\{ G \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^m (r_i(t) + z_i(t)) \right) \cdot R(t) + F \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}(t) R_{ij}(t) \right\} dt \rightarrow \max;$$

$$(25) r_i(t) \geq 0; z_i(t) \geq 0; \sum_{i=1}^m (r_i(t) + z_i(t)) \leq 1; i = 1, \dots, m;$$

$$(26) J_i = \int_0^T \delta^t \left\{ G_i \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \right) \cdot R_i(t) + F \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}(t) R_{ij}(t) \right\} dt \rightarrow \max;$$

$$(27) r_{ij}(t) \geq 0; \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \leq 1; B_i(t) \in \{0,1\}; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n_i;$$

$$(28) J_{ij} = \int_0^T \delta^t \left\{ G_{ij} \cdot \left(1 - u_{ij}(t) - b_{ij}(t) \right) \cdot R_{ij}(t) + F \cdot u_{ij}(t) \cdot R_{ij}(t) \right\} dt \rightarrow \max;$$

$$(29) u_{ij}(t) \geq q * (1 - b_{ij}(t)); b_{ij}(t) \geq 0; u_{ij}(t) + b_{ij}(t) \leq 1; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n_i;$$

$$(30) \dot{R} = - \sum_{i=1}^m (r_i(t) + z_i(t)) R + F \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}(t) R_{ij}(t) + M \sum_{i=1}^m B_i(t) P(z_i(t)) R_i(t), R(0) = R_0;$$

$$(31) \dot{R}_i = - \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) R_i(t) + r_i(t) R(t) + B_i(t) [1 - (1 + M) P(z_i(t))] \sum_{j=1}^{n_i} b_{ij}(t) R_{ij}(t), R_i(0) = R_{i0};$$

$$(32) \dot{R}_{ij} = -(u_{ij}(t) + b_{ij}(t)) R_{ij}(t) + r_{ij}(t) R_i(t), R_{ij}(0) = R_{ij0};$$

$$(33) R(T) \geq R^*, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n_i; t = 0, 1, \dots, T-1.$$

В этой модели в целевую функцию каждого агента входят помимо частных интересов ещё и производственные интересы, выражаемые функцией F .

Исследование модели (24)–(33) описано в приложении 2.

В результате исследования линейной модели получаем, что на общие цели ни одному уровню управления тратить ресурсы невыгодно, кроме тех агентов нижнего уровня, которые являются коллективистами. Только коллективисты нижнего уровня заинтересованы в производстве. Агенты влияния не заинтересованы в производстве, а только во взяточничестве. По тем же причинам агенты влияния не тратят средства на базовых агентов, как и в предыдущей постановке. В то же время на выполнении условия устойчивого развития (33) отсутствие целевого использования ресурсов сказывается положительно. Это условие с учётом полученных результатов выглядит следующим образом:

$$R(T) = R_0 + F \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j \in I} R_{ij0} \right) (1 - e^{-q^* t}) + F + \\ + \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j \notin I} R_{ij0} \right) (1 - e^{-t}) > R^*.$$

Заметим, что второе слагаемое всегда положительно, поэтому если Центр изначально имел ресурсов больше, чем R^* , то условие устойчивого развития будет продолжать выполняться и со временем. Производство осуществляется на минимальном уровне и за счёт ресурсов базовых агентов.

Сравнение двух постановок задачи показывает, что 1) взяточничество невыгодно базовым агентам; 2) наличие или отсутствие в целевых функциях Центра и агентов влияния выпуска продукции базовыми агентами не влияет на их поведение. Ресурсы на более нижний уровень они не выделяют; 3) наличие в целевой функции базового агента слагаемого, отвечающего за выпуск продукции, может побудить этого агента все ресурсы тратить на общие цели. Но может и не побудить, если его производственные возможности небольшие.

4. Статические модели распределения ресурсов

Рассмотрим следующую упрощённую статическую постановку задачи распределения ресурса:

$$g(u) = ac(u) + b(1 - u) \rightarrow \max, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

Условие устойчивого развития (координации) в статической форме имеет вид

$$(1 - a)c(u) \geq c^*.$$

Здесь u – доля ресурса, асигнуемая на производство общественного продукта; $c(\cdot)$ – функция производства общественного продукта; $b(\cdot)$ – функция выигрыша от частной деятельности; $a > 0$ – доля участия в использовании общественного продукта. Функции $c(\cdot)$ и $b(\cdot)$ возрастающие и вогнутые, $c(0) = b(0) = 0$.

Без существенного ограничения общности положим

$$c(u) = u^k, b(1 - u) = (1 - u)^m, 0 \leq k \leq 1, 0 \leq m \leq 1.$$

В качестве функций дохода мы взяли производственные функции, наиболее часто встречающиеся в экономико-математических исследованиях.

Имеем

$$g(u) = au^k - (1 - u)^m \rightarrow \max, \quad 0 \leq u \leq 1;$$

$$g'(u) = kau^{k-1} - m(1 - u)^{m-1},$$

$$g''(u) = k(k-1)au^{k-2} - m(m-1)(1 - u)^{m-2} < 0.$$

Рассмотрим сначала случай $k = m$. Тогда

$$au^{k-1} = (1 - u)^{k-1};$$

$$u^* = \frac{1}{1+a^{k-1}} \text{ точка максимума.}$$

Таким образом, условие устойчивого развития выполняется при

$$\frac{1}{1+a^{k-1}} \geq \left(\frac{c^*}{1-a}\right)^{1/k}.$$

Если считать условие устойчивого развития непреложным, то

$$u^* = \min \left\{ \max \left\{ \frac{1}{1+a^{k-1}}, \left(\frac{c^*}{1-a}\right)^{1/k} \right\}, 1 \right\}.$$

Для численного исследования при $k \neq m$ подходит метод дихотомии, так как вторая производная отрицательная, а первая производная на концах отрезка имеет разные знаки $[0; 1]$:

$$g'(0) = +\infty; \quad g'(1) = -\infty.$$

Найдём значение долей ресурсов (см. таблицу 1), затрачиваемых на общие цели агентом при $a = 0,5$, $c^* = 0,25$ и следующих значения x_k и m :

Таблица 1. Решение задачи при $a = 0,5$, $c^* = 0,25$

k	m	U	$u^{\text{уст}}$	u^*
0,1	0,9	0,040	0,00098	0,040
0,1	0,2	0,180	0,00098	0,180
0,1	0,6	0,061	0,00098	0,061
0,4	0,7	0,116	0,17678	0,17678
0,7	0,2	0,592	0,3715	0,592
0,8	0,1	0,796	0,42045	0,796

Заметим, что чем больше k и чем меньше m , тем больше ресурсов тратит агент на общие цели. Чем больше k , тем больше ресурсов требуется для выполнения условия устойчивого развития. Коэффициент m напрямую не влияет на количество ресурсов, но влияет на то, придётся ли агенту поступиться своими интересами для выполнения этого условия или нет.

Также заметим, что можно было доказать существование и единственность не только для степенных функций, но и для любых возрастающих и вогнутых функций $c(\cdot)$ и $b(\cdot)$.

5. Динамические модели воздействия на природную среду

Предположим, что агент делит свой ресурс между природоохранными усилиями и иными видами приносящей доход деятельности. Условие устойчивого развития [11] учитывается с помощью штрафа в функционале выигрыша агента. Простую модель в непрерывном времени можно записать в виде

$$J = \int_0^T [b(1 - u(t)) - M(x^* - x(t))] dt \rightarrow \max;$$

$$0 \leq u(t) \leq 1;$$

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0.$$

Здесь $u(t)$ – природоохранное усилие агента; $x(t)$ – показатель состояния окружающей среды; $x(t) \leq x^*$ – требование устойчивого развития; $b(\cdot)$ – возрастающая вогнутая функция, $b(0) = 0$; функция f возрастает по u . Дисконтирование и терминальный выигрыш не учитываются. Для аналитического исследования используем параметризацию

$$J = \int_0^T \left[\sqrt{1 - u(t)} - M(x^* - x(t)) \right] dt \rightarrow \max,$$

$$0 \leq u(t) \leq 1$$

$$\dot{x} = u(t) - \mu x(t), \quad x(0) = x_0,$$

где μ – коэффициент ухудшения состояния окружающей среды. Функция Гамильтона имеет вид

$$H(x, u, \lambda) = \sqrt{1 - u} - M(x^* - x) + \lambda(u - \mu x).$$

Из необходимого условия максимума

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{1}{2\sqrt{1-u}} + \lambda = 0$$

получаем

$$u^*(t) = 1 - \frac{1}{4\lambda^2(t)}.$$

Решение краевой задачи для сопряжённой переменной

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -M + \mu\lambda(t), \quad \lambda(T) = 0$$

даёт

$$\lambda^*(t) = \frac{M}{\mu} \left(1 - e^{-\mu(T-t)} \right).$$

Таким образом, с учётом структуры модели оптимальное решение есть

$$u^*(t) = 1 - \frac{u^2}{4M^2(1-e^{-\mu(T-t)})^2}.$$

Видно, что большой штраф побуждает агента ассигновать почти весь ресурс на природоохранную деятельность.

6. Заключение

В соответствии с общей СОЧИ-идеологией[5, 17] логика предложенных моделей следующая. Каждый агент делит свой ресурс между воспроизведением общего ресурса и частной деятельностью. При этом мгновенный выигрыш определяется полезностью частной деятельности, поэтому при близоруком принятии решений выгодно вкладывать весь свой ресурс в неё. Однако в динамике количество ресурса каждого агента зависит от величины общего ресурса, поэтому при эгоистическом поведении в достаточно длительной перспективе ресурса для частной деятельности просто не останется. Поэтому поиск оптимального соотношения между краткосрочными и долгосрочными интересами выступает главным предметом анализа.

Дополнительно предполагается, что в обмен на взятку агенты влияния могут ослаблять ограничения на эгоизм базовых агентов, а Центр контролирует оппортунизм и взимает штрафы в случае поимки взяточника.

Для информационного регламента игры Γ_1 аналитически и с помощью компьютерной имитации получен ряд выводов при различных параметризациях модели.

Возможны следующие направления развития модели:

- использование иного вида функций выигрыша агентов;
- исследование более общих структурных конфигураций;
- применение модели к анализу других процессов с необходимой модификацией.

Литература

1. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б., ВАТЕЛЬ И.А. *Игры с иерархическим вектором интересов* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1974. – №3. – С. 54–69.
2. ГОРБАНЕВА О.И. *Коррупционные механизмы в моделях сочетания общих и частных интересов в случае одного агента. Оптимизационный подход* // Математическая теория игр и её приложения. – 2020. – №12(2). – С. 36–62.

3. ГОРБАНЕВА О.И. *Статические модели распределения ресурсов с учетом согласования интересов активных агентов* : автореферат диссертации ... доктора технических наук : 05.13.01. – Москва, 2018. – 376 с.
4. ГОРБАНЕВА О.И., МУРЗИН А.Д., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Динамическая СОЧИ-модель регионального развития: сравнительный анализ административных и экономических механизмов управления (на примере Южного федерального округа)* // Математическая теория игр и её приложения. – 2021. – №13(1). – С. 59–88.
5. ГОРБАНЕВА О.И., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Цена анархии и механизмы управления в моделях согласования общественных и частных интересов* // Математическая теория игр и её приложения. – 2015. – №7(1). – С. 50–73.
6. ГОРБАНЕВА О.И., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Модели коррупции в иерархических системах управления* // Проблемы управления. – 2015. – №1. – С. 2–10.
7. КОНОНЕНКО А.Ф. *О многошаговых конфликтах с обменом информацией* // Ж. вычислительной математики и математической физики. – 1977. – Т. 17, №4. – С. 922–931.
8. КУКУШКИН Н.С. *О существовании устойчивых исходов в теоретико-игровой модели экономики с общественными благами* // Доклады АН СССР. – 1991. – №320(1). – С. 25–28.
9. *Механизмы управления* / Под ред. Д.А. Новикова. – М.: УРСС, 2011. – 192 с.
10. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М.: МПСИ, 2007. – 583 с.
11. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Управление устойчивым развитием активных систем*. – Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2016. – 940 с.
12. BERGSTROM T., BLUME L., VARIAN H. *On the private provision of public goods* // Journal of Public Economics. – 1986. – Vol. 29. – P. 25–49.
13. BOADWAY R., PESTIAU P., WILDASIN D. *Non-cooperative behavior and efficient provision of public goods* // Public Finance. – 1989. – Vol. 44. – P. 1–7.
14. BOADWAY R., PESTIAU P., WILDASIN D. *Tax-transfer policies and the voluntary provision of public goods* // Journal of Public Economics. – 1989. – Vol. 39. – P. 157–176.

15. CHRISTODOULOU G., SGOURITZA A., TANG B. *On the Efficiency of the Proportional Allocation Mechanism for Divisible Resources* // M. Hoefer (Ed.): SAGT 2015, LNCS 9347. – P. 165–177.
16. GORBANEVA O.I. *SPICE-models with independent Agents* // Automation and Remote Control. – 2019. – Vol. 80(9). – P. 1745–1753.
17. GORBANEVA O.I., OUGOLNITSKY G.A. *Static Models of Coordination of Social and Private Interests in Resource Allocation* // Automation and Remote Control. – 2018. – Vol. 79(7). – P. 1319–1341.
18. GORBANEVA O.I., OUGOLNITSKY G.A. *Sustainability of intertwined supply networks: a game-theoretic approach* // Games. – 2022. – Vol. 79(7). – P. 1319–1341
19. KAHANA N., KLUNOVER D. *Private provision of a public good with a time-allocation choice* // Social Choice and Welfare. – 2016. – Vol. 47. – P. 379–386.
20. NGO VAN LONG. *A Survey of Dynamic Games in Economics*. –World Scientific, 2010. – 275 p.
21. OUGOLNITSKY G.A., USOV A.B. *Computer Simulations as a Solution Method for Differential Games* // Computer Simulations: Advances in Research and Applications / Eds. M.D. Pfaffen and E. Bachmaier. – N.Y.: Nova Science Publishers, 2018. – P. 63–106.
22. WARR P. *The private provision of a public good is independent of the distribution of income* // Economics Letters. – 1983. – Vol. 13. – P. 207–211.

Приложение 1. Исследование постановки 1 п.3

Составим уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\ln \delta \cdot V_{ij} - \frac{\partial V_{ij}}{\partial t} = \max_{\substack{u_{ij}, b_{ij} \\ 1 \leq j \leq n}} \left\{ R_{ij}(t) + \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} \cdot \left[-b_{ij}(t) \cdot R_{ij}(t) + r_{ij}(t)R_i(t) + G_{ij} \cdot (1 - u_{ij}(t)) \right] \right\}$$

при ограничении $1 \geq b_{ij}(t) \geq 0$, $1 \geq u_{ij}(t) \geq q^*(1 - b_{ij}(t))$.

Максимизируем правую часть уравнения по совокупности u_{ij} и b_{ij} . Условие первого порядка даёт независимое от этих переменных выражение:

$$-\frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} \cdot R_{ij}(t); -\frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} \cdot G_{ij}.$$

Если $\frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} > 0$, то u_{ij} и b_{ij} должны быть как можно меньше, т.е. $u_{ij} = b_{ij} = 0$, но с учётом условия $u_{ij}(t) \geq q^*(1 - b_{ij}(t))$ получаем решение $u_{ij}(t) = q^*$ и $b_{ij}(t) = 0$.

Если же $\frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} < 0$, то u_{ij} и b_{ij} должны быть как можно больше, но с учётом условий (18) получаем $u_{ij} = b_{ij} = 1$.

Введём линейную функцию Беллмана $V_{ij}(t, R_{ij}) = \alpha_{ij}(t) \cdot R_{ij} + \beta_{ij}(t)$. Рассмотрим два случая:

$$1) \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} = \alpha_{ij}(t) > 0. \text{ В этом случае } u_{ij}(t) = q^* \text{ и } b_{ij}(t) = 0.$$

Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

$$(34) \ln \delta \cdot \alpha_{ij}(t)R_{ij} + \ln \delta \cdot \beta_{ij}(t) - \alpha'_{ij}(t)R_{ij} - \beta'_{ij}(t) = R_{ij}(t) + \alpha_{ij}(t)[r_{ij}(t)R_i(t) + G_{ij}(1 - q^*)].$$

Приравняем коэффициенты при R_{ij} :

$$\ln \delta \cdot \alpha_{ij}(t) - \alpha'_{ij}(t) = 1.$$

Решим это уравнение методом вариации постоянной. Решением соответствующего линейного однородного уравнения будет:

$$\alpha_{ij}(t) = C\delta^t.$$

Варьируем константу $C = C(t)$ и решим неоднородное линейное уравнение:

$$C'(t)\delta^t + 1 = 0,$$

откуда выразим производную: $C'(t) = -\delta^{-t}$,
проинтегрировав которую, получим

$$C(t) = \frac{\delta^{-t}}{\ln \delta} + C.$$

Воспользовавшись условием $C(T) = 0$, получим $C = -\frac{\delta^{-T}}{\ln \delta}$.

Отсюда

$$C(t) = \frac{\delta^{-t} - \delta^{-T}}{\ln \delta}.$$

Тогда $\alpha_{ij}(t) = \frac{1 - \delta^{t-T}}{\ln \delta}$. Так как $t < T$ и $\delta < 1$, то действи-
тельно $\alpha_{ij}(t) > 0$. При $t = 0$ $\alpha_{ij}(0) = \frac{1 - \delta^{-T}}{\ln \delta}$.

Приравняем свободные члены в (34):

$$\ln \delta \cdot \beta_{ij}(t) - \beta'_{ij}(t) = \alpha_{ij}(t)[r_{ij}R_i(t) + G_{ij}(1 - q^*)].$$

Это уравнение также сводится к линейному неоднородному, решение которого

$$\beta_{ij}(t) = C(t)\delta^t,$$

где $C'(t) = -\delta^{-t}\alpha_{ij}(t)[r_{ij}R_i(t) + G_{ij}(1 - q^*)]$,

или, с учётом вида функции $\alpha_{ij}(t)$:

$$C'(t) = -\frac{r_{ij}R_i(t) + G_{ij}(1 - q^*)}{\ln \delta}(\delta^{-t} - \delta^{-T}).$$

После интегрирования получим

$$C(t) = \frac{r_{ij}R_i(t) + G_{ij}(1 - q^*)}{\ln \delta} \left(\frac{\delta^{-t}}{\ln \delta} + t\delta^{-T} \right) + C.$$

Воспользовавшись условием $C(T) = 0$, получим

$$C = -\frac{r_{ij}R_i(t) + G_{ij}(1 - q^*)}{\ln \delta} \left(\frac{\delta^{-T}}{\ln \delta} + T\delta^{-T} \right). \text{ Отсюда}$$

$$C(t) = \frac{r_{ij}R_i(t) + G_{ij}(1 - q^*)}{\ln \delta} \left(\frac{\delta^{-t} - \delta^{-T}}{\ln \delta} + (t - T)\delta^{-T} \right).$$

Тогда $\beta_{ij}(t) = \frac{r_{ij}R_i(t) + G_{ij}(1 - q^*)}{\ln \delta} \left(\frac{1 - \delta^{t-T}}{\ln \delta} + (t - T)\delta^{-T} \right)$. При

$$t = 0 \quad \beta_{ij}(0) = \frac{r_{ij}R_i(t) + G_{ij}(1 - q^*)}{\ln \delta} \left(\frac{1 - \delta^{-T}}{\ln \delta} - T\delta^{-T} \right).$$

Получим оптимальное значение выигрыша базового агента

$$J_{ij} = V_{ij}(0, R_{ij0}) = \frac{1 - \delta^{-T}}{\ln \delta} \cdot R_{ij0} + \frac{r_{ij}R_i(t) + G_{ij}(1 - q^*)}{\ln \delta} \left(\frac{1 - \delta^{-T}}{\ln \delta} - T\delta^{-T} \right).$$

2) $\frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} = \alpha_{ij}(t) < 0$. В этом случае $u_{ij}(t) = b_{ij}(t) = 1$. Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

$$\begin{aligned} \ln \delta \cdot \alpha_{ij}(t)R_{ij} + \ln \delta \cdot \beta_{ij}(t) - \alpha'_{ij}(t)R_{ij} - \beta'_{ij}(t) = \\ = R_{ij} + \alpha_{ij}(t)[-R_{ij} + r_{ij}R_i]. \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при R_{ij} :

$$\ln \delta \cdot \alpha_{ij}(t) - \alpha'_{ij}(t) = 1 - \alpha_{ij}(t).$$

Приведём уравнение к линейному неоднородному виду:

$$\alpha'_{ij}(t) - (1 + \ln \delta)\alpha_{ij}(t) = -1.$$

Решение соответствующего линейного однородного уравнения:

$$\alpha_{ij}(t) = C e^{(\ln \delta + 1)t}.$$

Варьируем константу $C = C(t)$ и решим неоднородное линейное уравнение:

$$C'(t)e^{(\ln \delta + 1)t} + 1 = 0,$$

откуда выразим производную $C'(t) = -e^{-(\ln \delta + 1)t}$, проинтегрировав которую, получим

$$C(t) = \frac{e^{-(\ln \delta + 1)t}}{1 + \ln \delta} + C.$$

Воспользовавшись условием $C(T) = 0$, получим

$$C = -\frac{e^{-(\ln \delta + 1)T}}{1 + \ln \delta}. \text{ Отсюда}$$

$$C(t) = \frac{e^{-(\ln \delta + 1)t} - e^{-(\ln \delta + 1)T}}{1 + \ln \delta}.$$

Тогда $\alpha_{ij}(t) = \frac{1 - e^{(\ln \delta + 1)(t-T)}}{1 + \ln \delta}$. Выясним знака $\alpha_{ij}(t)$. Известно, что $t < T$ и $\delta < 1$. Тогда если $1 + \ln \delta > 0$, то $e^{-(\ln \delta + 1)(t-T)} < 1$, тогда $\alpha_{ij}(t) > 0$, что противоречит рассматриваемому случаю. Если же $1 + \ln \delta < 0$, то $e^{(\ln \delta + 1)(t-T)} > 1$, тогда $\alpha_{ij}(t) > 0$, что также противоречит рассматриваемому случаю.

Мы пришли к противоречию, т.е. этот случай нереализуем.

Рассмотрим задачу агента влияния (15), (16), (20) в непрерывном времени:

$$J_i = \int_0^T \delta^t \cdot R_i(t) dt \rightarrow \max,$$

$$r_{ij}(t) \geq 0; \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \leq 1; B_i(t) \in \{0,1\};$$

$$i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n_i;$$

$$\begin{aligned}\dot{R}_i &= -\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \cdot R_i(t) + r_i(t)R(t) + \\ &+ B_i(t)[1 - (1 + M)P(z_i^t)] \sum_{j=1}^{n_i} b_{ij}(t) \cdot R_{ij}(t), \\ R_i^0 &= R_{i0};\end{aligned}$$

или с учётом найденных оптимальных стратегий базовых агентов

$$\dot{R}_i = -\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \cdot R_i(t) + r_i(t)R(t); R_i^0 = R_{i0}.$$

Составим уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\begin{aligned}\ln \delta \cdot V_i - \frac{\partial V_i}{\partial t} &= \max_{\substack{r_{ij}, B_i \\ 1 \leq j \leq n}} \{R_i(t) + \\ &+ \frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot \left[-\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \cdot R_i(t) + r_i(t)R(t) \right]\}.\end{aligned}$$

при ограничении $\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \leq 1$, $r_{ij}(t) \geq 0$. Заметим, что значение переменных $B_i(t)$ становится безразличным. Уровень взаимности агента влияния не имеет значения, так как базовые агенты взяток не дают. Кроме того, агент влияния не заинтересован в увеличении величин u_{ij} .

Максимизируем правую часть уравнения по совокупности величин r_{ij} , по которым симметричны уравнения и ограничения, поэтому $r_{ij} = r_{ik}$. Условие первого порядка даёт независимое от этих переменных выражение:

$$-\frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot R_i(t).$$

Если $\frac{\partial V_i}{\partial R_i} > 0$, то r_{ij} минимальны, т.е. $r_{ij} = 0$.

Если же $\frac{\partial V_i}{\partial R_i} < 0$, то r_{ij} должны быть как можно больше, но с учётом результата $r_{ij} = r_{ik}$ и условия $\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \leq 1$ получаем $r_{ij} = \frac{1}{n_i}$.

Введём линейную функцию Беллмана $V_i(t, R_i) = \alpha_i(t) \cdot R_i + \beta_i(t)$. Рассмотрим два случая:

1) $\frac{\partial V_i}{\partial R_i} = \alpha_i(t) > 0$. В этом случае $r_{ij}(t) = 0$. Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

$$\begin{aligned}(35) \ln \delta \cdot \alpha_i(t)R_i + \ln \delta \cdot \beta_i(t) - \alpha'_i(t)R_i - \beta'_i(t) &= \\ &= R_i(t) + \alpha_i(t)r_i(t)R(t).\end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при R_i :

$$\ln \delta \cdot \alpha_i(t) - \alpha'_i(t) = 1.$$

Решением этого уравнения является

$$\alpha_i(t) = \frac{1-\delta^{t-T}}{\ln \delta}.$$

$$\text{При } t=0 \quad \alpha_{ij}(0) = \frac{1-\delta^{-T}}{\ln \delta}.$$

Приравняем свободные члены в (25):

$$\ln \delta \cdot \beta_i(t) - \beta'_i(t) = \alpha_i(t)r_i(t)R(t).$$

Это уравнение также сводится к линейному неоднородному, решение которого

$$\beta_i(t) = C(t)\delta^t,$$

где

$$C'(t) = -\frac{r_i R}{\ln \delta}(\delta^{-t} - \delta^{-T}).$$

После интегрирования получим

$$C(t) = \frac{r_i R}{\ln \delta} \left(\frac{\delta^{-t}}{\ln \delta} + \delta^{-T}t \right) + C.$$

Воспользовавшись условием $C(T) = 0$, получим

$$C = -\frac{r_i R}{\ln \delta} \left(\frac{\delta^{-T}}{\ln \delta} + \delta^{-T}T \right). \text{ Отсюда}$$

$$C(t) = \frac{r_i R}{\ln \delta} \left(\frac{\delta^{-t} - \delta^{-T}}{\ln \delta} + \delta^{-T}(t - T) \right).$$

$$\text{Тогда } \beta_i(t) = \frac{r_i R}{\ln \delta} \left(\frac{1 - \delta^{t-T}}{\ln \delta} + \delta^{t-T}(t - T) \right).$$

$$\text{При } t=0 \quad \beta_i(0) = \frac{r_i R}{\ln \delta} \left(\frac{1 - \delta^{-T}}{\ln \delta} - T\delta^{-T} \right).$$

Получим оптимальное значение выигрыша агента нижнего уровня

$$J_i = V_i(0, R_{i0}) = \frac{1 - \delta^{-T}}{\ln \delta} \cdot R_{i0} + \frac{r_i R}{\ln \delta} \left(\frac{1 - \delta^{-T}}{\ln \delta} - T\delta^{-T} \right).$$

2) $\frac{\partial V_i}{\partial R_i} = \alpha_i(t) < 0$. В этом случае $r_{ij} = \frac{1}{n_i}$. Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

$$\ln \delta \cdot \alpha_i(t)R_i + \ln \delta \cdot \beta_i(t) - \alpha'_i(t)R_i - \beta'_i(t) =$$

$$= R_i(t) + \alpha_i(t)[-R_i(t) + r_i(t)R(t)]$$

Приравняем коэффициенты при R_i :

$$\ln \delta \cdot \alpha_i(t) - \alpha'_i(t) = 1 - \alpha_i(t).$$

Доказательство противоречивости этого случая условию $\alpha_i(t) < 0$ аналогично доказательству, приведенному выше для $\alpha_{ij}(t) < 0$.

Рассмотрим задачу Центра (13), (14), (19) и (21) в непрерывном времени:

$$J_i = \int_0^T \delta^t \cdot R(t) dt \rightarrow \max,$$

$$r_i(t) \geq 0; z_i(t) \geq 0; \sum_{i=1}^m (r_i(t) + z_i(t)) \leq 1; i = 1, \dots, m;$$

$$\dot{R} = - \sum_{i=1}^m (r_i(t) + z_i(t)) \cdot R(t) + F \left(q^* \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}(t) \right),$$

$$R(0) = R_0,$$

$$R(t) \geq R^*,$$

или, с учётом найденных оптимальных стратегий базовых агентов и линейности функции F ,

$$\dot{R} = - \sum_{i=1}^m (r_i(t) + z_i(t)) \cdot R(t) + F \cdot q^* \cdot \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}(t) \right).$$

Составим уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\begin{aligned} \ln \delta \cdot V - \frac{\partial V}{\partial t} = & \max_{\substack{r_i, z_i \\ 1 \leq i \leq m}} \{ R(t) + \\ & + \frac{\partial V}{\partial R} \cdot \left[- \sum_{i=1}^m (r_i(t) + z_i(t)) \cdot R(t) + \right. \\ & \left. F \left(q^* \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}(t) \right) \right] \} \end{aligned}$$

при ограничении $\sum_{i=1}^m (r_i(t) + z_i(t)) \leq 1, r_i(t) \geq 0, z_i(t) \geq 0$.

Найдём $R_{ij}(t)$ из условий

$$\dot{R}_{ij} = -b_{ij}(t) \cdot R_{ij}(t) + r_{ij}(t)R_i(t) + g_{ij}(1 - u_{ij}(t)),$$

$$R_{ij}(0) = R_{ij0}.$$

С учётом оптимальных стратегий агентов влияния и базовых агентов необходимо решить задачу Коши

$$\dot{R}_{ij} = g_{ij}(1 - q^*), \quad R_{ij}(0) = R_{ij0}.$$

Её решение:

$$R_{ij}(t) = R_{ij0} e^{-g_{ij}(1 - q^*)t},$$

при этом

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0} e^{-g_{ij}(1 - q^*)t}.$$

Тогда дифференциальное соотношение для \dot{R} имеет следующий вид:

$$\dot{R} = - \sum_{i=1}^m (r_i(t) + z_i(t)) \cdot R(t) +$$

$$+q^* \cdot F \cdot \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0} e^{-g_{ij}(1-q^*)t} \right),$$

а уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана имеет вид:

$$\ln \delta \cdot V - \frac{\partial V}{\partial t} = \max_{\substack{r_i, z_i \\ 1 \leq i \leq m}} \left\{ R(t) + \frac{\partial V}{\partial R} \left[- \sum_{i=1}^m (r_i(t) + z_i(t)) \cdot R(t) + q^* F \cdot \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0} e^{-g_{ij}(1-q^*)t} \right) \right] \right\}.$$

Максимизируем правую часть этого уравнения по совокупности r_i и z_i , по каждой из которых симметричны уравнения и ограничения, поэтому $r_i = r_k = z_i = z_k$. Условие первого порядка даёт независимое от этих переменных выражение:

$$-\frac{\partial V}{\partial R} \cdot R(t).$$

Если $\frac{\partial V}{\partial R} > 0$, то $r_i = z_i = 0$.

Если же $\frac{\partial V}{\partial R} < 0$, то r_{ij} должны быть как можно больше, но с учётом результата $r_i = r_k = z_i = z_k$ и условия $\sum_{i=1}^m (r_i(t) + z_i(t)) \leq 1$ получаем $r_i = z_i = \frac{1}{2m}$.

Введём линейную функцию Беллмана $V_i(t, R_i) = \alpha(t) \cdot R + \beta(t)$. Рассмотрим два случая:

1) $\frac{\partial V}{\partial R} = \alpha(t) > 0$. В этом случае $r_i = z_i = 0$. Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

$$(36) \quad \ln \delta \cdot \alpha(t) R + \ln \delta \cdot \beta(t) - \alpha'(t) R - \beta'(t) = \\ = R + \alpha(t) \cdot q^* \cdot F \cdot \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0} e^{-g_{ij}(1-q^*)t} \right)$$

Приравняем коэффициенты при R :

$$\ln \delta \cdot \alpha(t) - \alpha'(t) = 1.$$

Решение данного уравнения

$$\alpha(t) = \frac{1 - \delta^{-T}}{\ln \delta}.$$

$$\text{При } t = 0 \quad \alpha(0) = \frac{1 - \delta^{-T}}{\ln \delta}.$$

Приравняем свободные члены в (26):

$$\ln \delta \cdot \beta(t) - \beta'(t) = \alpha(t) \cdot q^* \cdot F \cdot \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0} e^{-g_{ij}(1-q^*)t} \right),$$

или, с учётом $\alpha(t)$,

$$\ln \delta \cdot \beta(t) - \beta'(t) =$$

$$= \frac{q^* \cdot F}{\ln \delta} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0} (e^{-g_{ij}(1-q^*)t} - e^{-g_{ij}(1-q^*)t+(t-T) \ln \delta}) \right).$$

Это уравнение также сводится к линейному неоднородному, решение которого

$$\beta_i(t) = C(t) \delta^t,$$

где

$$C'(t) = -\frac{q^* \cdot F \delta^{-t}}{\ln \delta} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0} (e^{-g_{ij}(1-q^*)t} - e^{-g_{ij}(1-q^*)t+(t-T) \ln \delta}) \right),$$

или

$$C'(t) = -\frac{q^* \cdot F}{\ln \delta} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0} (e^{-(g_{ij}(1-q^*)+\ln \delta)t} - e^{-g_{ij}(1-q^*)t-T \ln \delta}) \right).$$

Интегрируя, получим

$$C(t) = \frac{q^* \cdot F}{\ln \delta} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0} \left(\frac{e^{-(g_{ij}(1-q^*)+\ln \delta)t}}{g_{ij}(1-q^*)+\ln \delta} - \frac{e^{-g_{ij}(1-q^*)t-T \ln \delta}}{g_{ij}(1-q^*)} \right) \right) + C.$$

Воспользовавшись условием $C(T) = 0$, получим

$$C = -\frac{q^* \cdot F}{\ln \delta} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0} \left(\frac{e^{-(g_{ij}(1-q^*)+\ln \delta)T}}{g_{ij}(1-q^*)+\ln \delta} - \frac{e^{-g_{ij}(1-q^*)T-T \ln \delta}}{g_{ij}(1-q^*)} \right) \right).$$

Отсюда

$$C(t) = \frac{q^* \cdot F}{\ln \delta} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0} \left(\frac{\frac{e^{-(g_{ij}(1-q^*)+\ln \delta)t} - e^{-(g_{ij}(1-q^*)+\ln \delta)T}}{g_{ij}(1-q^*)+\ln \delta}}{g_{ij}(1-q^*)} - \frac{\frac{e^{-g_{ij}(1-q^*)t-T \ln \delta} - e^{-g_{ij}(1-q^*)T-T \ln \delta}}{g_{ij}(1-q^*)}}{g_{ij}(1-q^*)} \right) \right).$$

Отсюда

$$\beta_i(t) = \frac{q^* \cdot F}{\ln \delta} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0} \left(\frac{\frac{e^{-g_{ij}(1-q^*)t} - e^{-g_{ij}(1-q^*)T+\ln \delta(t-T)}}{g_{ij}(1-q^*)+\ln \delta} - \frac{\frac{e^{-g_{ij}(1-q^*)t+(t-T) \ln \delta} - e^{-g_{ij}(1-q^*)T+(t-T) \ln \delta}}{g_{ij}(1-q^*)}}{g_{ij}(1-q^*)} \right) \right).$$

При $t = 0$

$$\beta_i(0) = \frac{q^* \cdot F}{\ln \delta} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0} \left(\frac{\frac{1 - e^{-g_{ij}(1-q^*)+\ln \delta} T}{g_{ij}(1-q^*)+\ln \delta} - \frac{e^{-T \ln \delta} - e^{-g_{ij}(1-q^*)T+\ln \delta} T \ln \delta}{g_{ij}(1-q^*)}}{g_{ij}(1-q^*)} \right) \right).$$

Получим оптимальное значение выигрыша базового агента

$$J = V(0, R_0) = \frac{1-\delta^{-T}}{\ln \delta} \cdot R_0 + \frac{q^* \cdot F}{\ln \delta} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0} \left(\frac{1-e^{-g_{ij}(1-q^*+\ln \delta)T}}{g_{ij}(1-q^*)+\ln \delta} - \frac{e^{-T \ln \delta} - e^{-g_{ij}(1-q^*+\ln \delta)T \ln \delta}}{g_{ij}(1-q^*)} \right) \right).$$

2) $\frac{\partial V}{\partial R} = \alpha(t) < 0$. В этом случае $r_i = z_i = \frac{1}{2m}$. Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

$$\ln \delta \cdot \alpha(t)R + \ln \delta \cdot \beta(t) - \alpha'(t)R - \beta'(t) = \\ = R(t) + \alpha_i(t) \left[-R_i(t) + q^* \cdot F \cdot \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0} e^{-g_{ij}(1-q^*)t} \right) \right].$$

Приравняем коэффициенты при R_i :

$$\ln \delta \cdot \alpha(t) - \alpha'(t) = 1 - \alpha(t).$$

Доказательство противоречивости этого случая условию $\alpha(t) < 0$ аналогично доказательству, приведенному выше для $\alpha_{ij}(t) < 0$.

При этом величина $R(t)$ изменяется по следующему правилу:

$$\dot{R} = q^* \cdot F \cdot \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0} e^{-g_{ij}(1-q^*)t} \right), R(0) = R_0.$$

Решением данной задачи Коши будет

$$R(t) = C - q^* \cdot F \cdot \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \frac{R_{ij0} e^{-g_{ij}(1-q^*)t}}{g_{ij}(1-q^*)} \right).$$

$$\text{С учётом начального условия } C = R_0 + q^* \cdot F \cdot \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \frac{R_{ij0}}{g_{ij}(1-q^*)} \right), \text{ а значит } R(t) = R_0 + q^* \cdot F \times \\ \times \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \frac{R_{ij0} (1 - e^{-g_{ij}(1-q^*)t})}{g_{ij}(1-q^*)} \right).$$

Учитывая результаты, полученные для Центра, получаем для агентов влияния и базовых агентов следующие выигрыши и соотношения на количество накапливаемого ресурса. Для агента влияния выигрыш

$$J_i = \frac{1 - \delta^{-T}}{\ln \delta} \cdot R_{i0},$$

а величина $R_i(t)$ изменяется по следующему правилу:

$$\dot{R}_i = 0; R_i(0) = R_{i0},$$

откуда $R_i(t) = R_{i0}$, что говорит о том, что ресурсы у агента влияния не уменьшаются, но и не увеличиваются, так как он

не тратит их на базовых агентов, но и Центр не выделяет агентам влияния ничего. Для базовых агентов

$$J_{ij} = \frac{1-\delta^{-T}}{\ln \delta} \cdot R_{ij0} + \frac{G_{ij}(1-q^*)}{\ln \delta} \left(\frac{1-\delta^{-T}}{\ln \delta} - T\delta^{-T} \right).$$

Приложение 2. Исследование постановки 2 п.3

Рассмотрим задачу базового агента (28), (29), (32) в непрерывном времени:

$$J_{ij} = \int_0^T \delta^t \left\{ G_{ij} \cdot (1 - u_{ij}(t) - b_{ij}(t)) \cdot R_{ij}(t) + \right.$$

$$\left. + F \cdot u_{ij}(t) \cdot R_{ij}(t) \right\} dt \rightarrow \max;$$

$$u_{ij}(t) \geq q * (1 - b_{ij}(t)); \quad b_{ij}(t) \geq 0; \quad u_{ij}(t) + b_{ij}(t) \leq 1;$$

$$i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n_i;$$

$$\dot{R}_{ij} = -(b_{ij}(t) + u_{ij}(t)) \cdot R_{ij}(t) + r_{ij}(t)R_i(t), \quad R_{ij}(0) = R_{ij0}.$$

Составим уравнение Гамильтона – Якоби–Беллмана:

$$\ln \delta \cdot V_{ij} - \frac{\partial V_{ij}}{\partial t} = \max_{\substack{u_{ij}, b_{ij} \\ 1 \leq j \leq n}} \left\{ G_{ij} \cdot (1 - b_{ij}(t) - u_{ij}(t)) \cdot R_{ij}(t) + \right.$$

$$\left. + F \cdot u_{ij}(t)R_{ij}(t) + \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} \cdot [-(b_{ij}(t) + u_{ij}(t))R_{ij}(t) + r_{ij}(t)R_i(t)] \right\}$$

при ограничении $b_{ij}(t) + u_{ij}(t) \leq 1$, $u_{ij}(t) \geq q^* (1 - b_{ij}(t))$, $b_{ij}(t) \geq 0$

Максимизируем правую часть уравнения по совокупности u_{ij} и b_{ij} . Условия первого порядка даёт независимое от этих переменных выражение:

по u_{ij}

$$-G_{ij}R_{ij}(t) + FR_{ij}(t) - \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} \cdot R_{ij}(t) = R_{ij}(t) \left(-G_{ij} + F - \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} \right).$$

по b_{ij} :

$$-G_{ij}R_{ij}(t) - \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} \cdot R_{ij}(t) = -R_{ij}(t) \left(G_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} \right).$$

Отсюда

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & G_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} > 0, \\ 1 - u_{ij}, & G_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} < 0, \end{cases}$$

$$u_{ij} = \begin{cases} q^*(1 - b_{ij}), & G_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} > F, \\ 1, & G_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} < F, \end{cases}$$

причём в одной и той же системе в одни моменты времени условие $G_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} > F$ может выполняться, а в другие – нет.

Условие же $G_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} > 0$ не зависит от времени совсем.

Исходя из этого, возможны два случая. Рассмотрим каждый из них, приняв за функцию Беллмана линейную функцию

$$V_{ij}(t, R_{ij}) = \alpha_{ij}(t) \cdot R_{ij} + \beta_{ij}(t).$$

Первый случай $G_{ij} + \alpha_{ij} > F$. В этом случае $u_{ij} = q^*$, $b_{ij} = 0$.

Второй случай $G_{ij} + \alpha_{ij} < F$. В этом случае $u_{ij} = 1$, $b_{ij} = 0$.

Как видно, в любом случае $b_{ij} = 0$, т.е. платить взятку базовым агентам невыгодно.

1) $G_{ij} + \alpha_{ij} > F$. В этом случае $u_{ij} = q^*$, $b_{ij} = 0$.

Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

$$(37) \ln \delta \cdot \alpha_{ij}(t) R_{ij} + \ln \delta \cdot \beta_{ij}(t) - \alpha'_{ij}(t) R_{ij} - \beta'_{ij}(t) = \\ = G_{ij}(1 - q^*) R_{ij}(t) + F q^* R_{ij}(t) + \\ + \alpha_{ij}(t) [-q^* \cdot R_{ij}(t) + r_{ij}(t) R_i(t)]$$

Приравняем коэффициенты при R_{ij} :

$$\ln \delta \cdot \alpha_{ij}(t) - \alpha'_{ij}(t) = G_{ij}(1 - q^*) + F q^* - q^* \alpha_{ij}(t).$$

Решив его методом вариации постоянной, получим

$$\alpha_{ij}(t) = \frac{G_{ij}(1 - q^*) + F q^*}{q^* + \ln \delta} (1 - e^{(q^* + \ln \delta)(t - T)}).$$

$$\text{При } t = 0 \alpha_{ij}(0) = \frac{G_{ij}(1 - q^*) + F q^*}{q^* + \ln \delta} (1 - e^{-(q^* + \ln \delta)T}).$$

Заметим, что условие $G_{ij} + \alpha_{ij} > F$ при этом выполняется, если

$$G_{ij} > F \left(1 - \frac{1 - e^{(q^* + \ln \delta)(t - T)}}{1 + \ln \delta + (1 - q^*) e^{(q^* + \ln \delta)(t - T)}} \right).$$

Заметим также, что начиная с момента времени

$$t = T - \frac{1}{q^* + \ln \delta} \ln \frac{1}{1 - (q^* + \ln \delta) \left(\frac{F - G_{ij}}{q^* (F - G_{ij}) + G_{ij}} \right)}$$

это свойство выполняется.

Приравняем свободные члены в (37):

$$\ln \delta \cdot \beta_{ij}(t) - \beta'_{ij}(t) = \alpha_{ij}(t)r_{ij}(t)R_i(t),$$

решение этого уравнения

$$\beta_{ij}(t) = C(t)\delta^t,$$

где

$$C'(t) = -r_{ij}(t)R_i(t)\delta^{-t} \frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln \delta} (1 - e^{(q^*+\ln \delta)(t-T)}).$$

После интегрирования получим

$$C(t) = r_{ij}(t)R_i(t) \frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln \delta} \left(\frac{e^{-(q^*+\ln \delta)T+q^*t}}{q^*} + \frac{\delta^{-t}}{\ln \delta} \right) + C.$$

Воспользовавшись условием $C(T) = 0$, получим

$$C = -r_{ij}(t)R_i(t) \frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln \delta} \left(\frac{\delta^{-T}}{q^*} + \frac{\delta^{-T}}{\ln \delta} \right). \text{ Отсюда}$$

$$C(t) = r_{ij}(t)R_i(t) \frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln \delta} \left(\frac{e^{-(q^*+\ln \delta)T+q^*t}-\delta^{-T}}{q^*} + \frac{\delta^{-t}-\delta^{-T}}{\ln \delta} \right).$$

$$\text{Тогда } \beta_{ij}(t) = r_{ij}(t)R_i(t) \frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln \delta} \left(\frac{(e^{q^*(t-T)}-1)\delta^{t-T}}{q^*} + \frac{1-\delta^{t-T}}{\ln \delta} \right).$$

$$\text{При } t=0 \beta_{ij}(0) = r_{ij0}R_{i0} \frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln \delta} \left(\frac{(e^{-q^*T}-1)\delta^{-T}}{q^*} + \frac{1-\delta^{-T}}{\ln \delta} \right).$$

Получим оптимальное значение выигрыша базового агента

$$\begin{aligned} J_{ij} = V_{ij}(0, R_{ij0}) &= \frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln \delta} (e^{(q^*+\ln \delta)T} - 1) \cdot R_{ij0} + \\ &+ r_{ij0}R_{i0} \frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln \delta} \left(\frac{(e^{-q^*T}-1)\delta^{-T}}{q^*} + \frac{1-\delta^{-T}}{\ln \delta} \right) = \\ &= \frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln \delta} \left((e^{(q^*+\ln \delta)T} - 1) \cdot R_{ij0} + r_{ij0}R_{i0} \left(\frac{(e^{-q^*T}-1)\delta^{-T}}{q^*} + \frac{1-\delta^{-T}}{\ln \delta} \right) \right). \end{aligned}$$

$$2) G_{ij} + \alpha_{ij} < F. \text{ В этом случае } u_{ij} = 1, b_{ij} = 0.$$

Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

$$\begin{aligned} (38) \quad \ln \delta \cdot \alpha_{ij}(t)R_{ij} + \ln \delta \cdot \beta_{ij}(t) - \alpha'_{ij}(t)R_{ij} - \beta'_{ij}(t) &= \\ &= F \cdot R_{ij}(t) + \alpha_{ij}(t) [-R_{ij}(t) + r_{ij}(t)R_i(t)]. \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при R_{ij} :

$$\ln \delta \cdot \alpha_{ij}(t) - \alpha'_{ij}(t) = F - \alpha_{ij}(t).$$

Приведём уравнение к линейному неоднородному виду:

$$\alpha'_{ij}(t) - (q^* + \ln \delta)\alpha_{ij}(t) + F = 0.$$

Решив его методом вариации постоянной, получим

$$\alpha_{ij}(t) = \frac{F}{q^* + \ln \delta} (1 - e^{(q^* + \ln \delta)(t-T)}).$$

$$\text{При } t = 0 \alpha_{ij}(0) = \frac{F}{q^* + \ln \delta} (1 - e^{-(q^* + \ln \delta)T}).$$

Заметим, что условие $G_{ij} + \alpha_{ij} < F$ при этом выполняется, если

$$G_{ij} < F \left(1 - \frac{1 - e^{(q^* + \ln \delta)(t-T)}}{q^* + \ln \delta} \right).$$

Заметим, что до момента времени

$$t = T - \frac{1}{q^* + \ln \delta} \ln \frac{1}{1 - (q^* + \ln \delta)(1 - \frac{G_{ij}}{F})}$$

это свойство выполняется, т.е. со временем возможен переход агента от коллективизма к индивидуализму, но не наоборот. Момент перехода тем дальше, чем больше коэффициент выгоды от частной деятельности G_{ij} .

Приравняем свободные члены в (38):

$$\ln \delta \cdot \beta_{ij}(t) - \beta'_{ij}(t) = \alpha_{ij}(t) r_{ij}(t) R_i(t).$$

Решив это уравнение аналогично предыдущему случаю, получим

$$\beta_{ij}(t) = r_{ij}(t) R_i(t) \frac{F}{q^* + \ln \delta} \left(\frac{(e^{q^*(t-T)} - 1) \delta^{t-T}}{q^*} + \frac{1 - \delta^{t-T}}{\ln \delta} \right).$$

$$\text{При } t = 0 \beta_{ij}(0) = r_{ij0} R_{i0} \frac{F}{q^* + \ln \delta} \left(\frac{(e^{-q^*T} - 1) \delta^{-T}}{q^*} + \frac{1 - \delta^{-T}}{\ln \delta} \right).$$

Получим оптимальное значение выигрыша базового агента

$$\begin{aligned} J_{ij} &= V_{ij}(0, R_{ij0}) = \frac{F}{q^* + \ln \delta} (e^{(q^* + \ln \delta)T} - 1) \cdot R_{ij0} + \\ &+ r_{ij0} R_{i0} \frac{F}{q^* + \ln \delta} \left(\frac{(e^{-q^*T} - 1) \delta^{-T}}{q^*} + \frac{1 - \delta^{-T}}{\ln \delta} \right) = \\ &= \frac{F}{q^* + \ln \delta} \left((e^{(q^* + \ln \delta)T} - 1) \cdot R_{ij0} + r_{ij0} R_{i0} \left(\frac{(e^{-q^*T} - 1) \delta^{-T}}{q^*} + \frac{1 - \delta^{-T}}{\ln \delta} \right) \right). \end{aligned}$$

Найдём $R_{ij}(t)$ из уравнения

$$\dot{R}_{ij} = - (b_{ij}(t) + u_{ij}(t)) \cdot R_{ij}(t) + r_{ij}(t) R_i(t), R_{ij}(0) = R_{ij0}.$$

С учётом оптимальных стратегий базовых агентов необходимо решить задачу Коши для индивидуалистов и коллективистов.

Для индивидуалистов задача Коши имеет вид

$$\dot{R}_{ij} = -q^* \cdot R_{ij}(t) + r_{ij}(t) R_i(t), R_{ij}(0) = R_{ij0}.$$

Её решение:

$$R_{ij}(t) = e^{-q^*t} \left(R_{ij0} + \int_0^t e^{q^*t} r_{ij}(t) R_i(t) dt \right).$$

Для коллективистов задача Коши имеет вид

$$\dot{R}_{ij} = -R_{ij}(t) + r_{ij}(t) R_i(t), \quad R_{ij}(0) = R_{ij0}.$$

Её решение:

$$R_{ij}(t) = e^{-t} \left(R_{ij0} + \int_0^t e^t r_{ij}(t) R_i(t) dt \right).$$

Рассмотрим задачу агента влияния (29), (30), (34) в непрерывном времени:

$$J_i = \int_0^T \delta^t \left\{ G_i \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \right) \cdot R_i(t) + \right.$$

$$\left. + F \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}(t) R_{ij}(t) \right\} dt \rightarrow \max,$$

$$r_{ij}(t) \geq 0; \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \leq 1;$$

$$B_i(t) \in \{0,1\}; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n_i;$$

$$\dot{R}_i = - \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \cdot R_i(t) + r_i(t) R(t) +$$

$$+ B_i(t) [1 - (1 + M) P(z_i^t)] \sum_{j=1}^{n_i} b_{ij}(t) \cdot R_{ij}(t),$$

$$R_i^0 = R_{i0};$$

или, с учётом найденных оптимальных стратегий нижнего уровня,

$$\dot{R}_i = - \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \cdot R_i(t) + r_i(t) R(t); R_i^0 = R_{i0}.$$

Составим уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\ln \delta \cdot V_i - \frac{\partial V_i}{\partial t} = \max_{\substack{r_{ij}, B_i \\ 1 \leq j \leq n}} \left\{ G_i \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \right) \cdot R_i(t) + \right.$$

$$\left. + F \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}(t) R_{ij}(t) + \frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot \left[- \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \cdot R_i(t) + r_i(t) R(t) \right] \right\}.$$

при ограничении $\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \leq 1, r_{ij}(t) \geq 0$.

Подставим оптимальные стратегии базовых агентов в данное уравнение. Для этого введём обозначение $I = \{j | u_j = q^*\}$. Тогда

$$\ln \delta \cdot V_i - \frac{\partial V_i}{\partial t} = \max_{\substack{r_{ij}, B_i \\ 1 \leq j \leq n}} \left\{ G_i \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \right) \cdot R_i(t) + \right.$$

$$\left. + F q^* e^{-q^*t} \sum_{j \in I} \left(R_{ij0} + \int_0^t e^{q^*t} r_{ij}(t) R_i(t) dt \right) + \right.$$

$$\left. + F e^{-t} \sum_{j \notin I} \left(R_{ij0} + \int_0^t e^t r_{ij}(t) R_i(t) dt \right) + \right.$$

$$+ \frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot \left[- \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \cdot R_i(t) + r_i(t)R_i(t) \right] \}.$$

Заметим, что значение переменных $B_i(t)$ становится безразличным. Уровень взаимоинициативности агентов влияния не имеет значения, так как базовые агенты взяток не дают. Кроме того, агенты влияния не заинтересованы в увеличении величин u_{ij} .

Максимизируем правую часть уравнения по совокупности величин r_{ij} . Условие первого порядка даёт независимое от этих переменных выражение:

Для индивидуалистов нижнего уровня

$$-G_i \cdot R_i(t) + Fq^* e^{-q^* t} \int_0^t e^{q^* t} R_i(t) dt - \frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot R_i(t),$$

для коллективистов же

$$-G_i \cdot R_i(t) + Fe^{-t} \int_0^t e^t R_i(t) dt - \frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot R_i(t).$$

Внутри каждой группы уравнения симметричны по своим переменным, поэтому среди отдельно индивидуалистов или отдельно коллективистов нижнего уровня $r_{ij} = r_{ik}$.

Докажем, что $Fq^* e^{-q^* t} \int_0^t e^{q^* t} R_i(t) dt < Fe^{-t} \int_0^t e^t R_i(t) dt$.

Исследование функции $f(z) = ze^{z(t-\tau)}$ показывает, что она возрастает по z , а следовательно, $\int_0^t q^* e^{q^*(t-\tau)} R_i(t) dt < \int_0^t e^{t-\tau} R_i(t) dt$. Поэтому возможны три случая:

$$1) -G_i \cdot R_i(t) + Fe^{-t} \int_0^t e^t R_i(t) dt - \frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot R_i(t) < 0;$$

$$2) -G_i \cdot R_i(t) + Fe^{-t} \int_0^t e^t R_i(t) dt - \frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot R_i(t) > 0,$$

$$-G_i \cdot R_i(t) + Fq^* e^{-q^* t} \int_0^t e^{q^* t} R_i(t) dt - \frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot R_i(t) < 0,$$

$$3) -G_i \cdot R_i(t) + Fq^* e^{-q^* t} \int_0^t e^{q^* t} R_i(t) dt - \frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot R_i(t) > 0.$$

Если $-G_i \cdot R_i(t) + Fe^{-t} \int_0^t e^t R_i(t) dt - \frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot R_i(t) < 0$

(в частности при $\frac{\partial V_i}{\partial R_i} > 0$), то r_{ij} минимальны, т.е. $r_{ij} = 0$. Назовем такого агента влияния индивидуалистом.

Если же $-G_i \cdot R_i(t) + Fe^{-t} \int_0^t e^t R_i(t) dt - \frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot R_i(t) > 0$,

$-G_i \cdot R_i(t) + Fq^* e^{-q^* t} \int_0^t e^{q^* t} R_i(t) dt - \frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot R_i(t) < 0$, то такому агенту влияния выгодно индивидуалистам нижнего уровня не

выделять ресурсы, а коллективистам поделить их поровну, т.е. $r_{ij \in I} = 0$, $r_{ij \notin I} = \frac{1}{|I|}$.

Если же $-G_i \cdot R_i(t) + F q^* e^{-q^* t} \int_0^t e^{q^* t} R_i(t) dt - \frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot R_i(t) > 0$, то r_{ij} должны быть как можно больше, но с учётом линейности слагаемых в целевой функции $F q^* e^{-q^* t} \sum_{j \in I} (R_{ij0} + \int_0^t e^{q^* t} r_{ij}(t) R_i(t) dt) + F e^{-t} \sum_{j \notin I} (R_{ij0} + \int_0^t e^t r_{ij}(t) R_i(t) dt)$ получаем, что все ресурсы выгодно выделять туда, где эффективность их использования наибольшая, т.е. коллективистам нижнего уровня. Тогда случаи 2) и 3) можно объединить в один, при котором $-G_i \cdot R_i(t) + F e^{-t} \int_0^t e^t R_i(t) dt - \frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot R_i(t) > 0$ (в частности при $\frac{\partial V_i}{\partial R_i} < 0$). То есть если агент влияния знает, что базовый агент является индивидуалистом, то ему ресурсы выделяться не будут.

Введём линейную функцию Беллмана $V_i(t, R_i) = \alpha_i(t) \cdot R_i + \beta_i(t)$. Рассмотрим два случая:

1) $-G_i \cdot R_i(t) + F e^{-t} \int_0^t e^t R_i(t) dt - \frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot R_i(t) < 0$ (в частности при $\alpha_i(t) > 0$). В этом случае $r_{ij}(t) = 0$. Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

$$(39) \ln \delta \cdot \alpha_i(t) R_i + \ln \delta \cdot \beta_i(t) - \alpha'_i(t) R_i - \beta'_i(t) = \\ = G_i R_i(t) + F q^* \sum_{j \in I} R_{ij}(t) + F \sum_{j \notin I} R_{ij}(t) + \\ + \alpha_i(t) r_i(t) R(t)$$

С учётом оптимальной стратегии агентов влияния для индивидуалистов

$$R_{ij}(t) = e^{-q^* t} R_{ij0},$$

для коллективистов

$$R_{ij}(t) = e^{-t} R_{ij0}.$$

Подставим эти выражения в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\ln \delta \cdot \alpha_i(t) R_i + \ln \delta \cdot \beta_i(t) R_i - \alpha'_i(t) R_i - \beta'_i(t) = G_i \cdot R_i(t) + \\ + F q^* e^{-q^* t} \sum_{j \in I} R_{ij0} + F e^{-t} \sum_{j \notin I} R_{ij0} + \alpha_i(t) \cdot [r_i(t) R(t)]$$

Приравняем коэффициенты при R_i :

$$\ln \delta \cdot \alpha_i(t) - \alpha'_i(t) = G_i.$$

Его решение

$$\alpha_i(t) = \frac{G_i}{\ln \delta} (1 - \delta^{t-T}).$$

$$\text{При } t=0 \quad \alpha_{ij}(0) = \frac{G_i}{\ln \delta} (1 - \delta^{-T}).$$

Приравняем свободные члены в (39):

$$\ln \delta \cdot \beta_i(t) - \beta'_i(t) = F q^* e^{-q^* t} \sum_{j \in I} R_{ij0} + F e^{-t} \sum_{j \notin I} R_{ij0} + \\ + \alpha_i(t) r_i(t) R(t),$$

Это уравнение также сводится к линейному неоднородному, решение которого

$$\beta_i(t) = C(t) \delta^t,$$

где

$$C'(t) = -F q^* e^{-(q^* + \ln \delta)t} \sum_{j \in I} R_{ij0} - F e^{-(1 + \ln \delta)t} \sum_{j \notin I} R_{ij0} - \\ - r_i(t) R(t) \frac{G_i}{\ln \delta} (\delta^{-t} - \delta^{-T}).$$

После интегрирования получим

$$C(t) = \frac{F q^* e^{-(q^* + \ln \delta)t}}{q^* + \ln \delta} \sum_{j \in I} R_{ij0} + \frac{F e^{-(1 + \ln \delta)t}}{1 + \ln \delta} \sum_{j \notin I} R_{ij0} + \\ + r_i(t) R(t) \frac{G_i}{\ln \delta} \left(\frac{\delta^{-t}}{\ln \delta} + \delta^{-T} t \right) + C.$$

Воспользовавшись условием $C(T) = 0$, получим

$$C = -\frac{F q^* e^{-(q^* + \ln \delta)T}}{q^* + \ln \delta} \sum_{j \in I} R_{ij0} - \\ - \frac{F e^{-(1 + \ln \delta)T}}{1 + \ln \delta} \sum_{j \notin I} R_{ij0} - r_i(t) R(t) \frac{G_i \delta^{-T} (1 + T \ln \delta)}{\ln^2 \delta}.$$

Отсюда

$$C(t) = \frac{F q^* \sum_{j \in I} R_{ij0}}{q^* + \ln \delta} (e^{-(q^* + \ln \delta)t} - e^{-(q^* + \ln \delta)T}) + \\ + \frac{F \sum_{j \notin I} R_{ij0}}{1 + \ln \delta} (e^{-(1 + \ln \delta)t} - e^{-(1 + \ln \delta)T}) + \\ + r_i(t) R(t) \frac{G_i}{\ln \delta} \left(\frac{\delta^{-t} - \delta^{-T}}{\ln \delta} + \delta^{-T} (t - T) \right).$$

$$\text{Тогда } \beta_i(t) = \frac{F q^* \sum_{j \in I} R_{ij0}}{q^* + \ln \delta} (e^{-q^* t} - e^{-q^* T} \delta^{t-T}) + \\ + \frac{F \sum_{j \notin I} R_{ij0}}{1 + \ln \delta} (e^{-t} - e^{-T} \delta^{t-T}) + \\ + r_i(t) R(t) \frac{G_i}{\ln \delta} \left(\frac{\delta^{-t} - \delta^{-T}}{\ln \delta} + \delta^{-T} (t - T) \right).$$

$$\text{При } t=0 \beta_i(0) = \frac{Fq^* \sum_{j \in I} R_{ij0}}{q^* + \ln \delta} (1 - e^{-q^* T} \delta^{-T}) + \\ + \frac{F \sum_{j \notin I} R_{ij0}}{1 + \ln \delta} (1 - e^{-T} \delta^{-T}) + r_i(0) R_0 \frac{G_i}{\ln \delta} \left(\frac{1 - \delta^{-T}}{\ln \delta} - T \delta^{-T} \right).$$

Получим оптимальное значение выигрыша базового агента

$$J_i = V_i(0, R_{i0}) = \frac{G_i}{\ln \delta} (1 - \delta^{-T}) \cdot R_{i0} + \\ + \frac{Fq^* \sum_{j \in I} R_{ij0}}{q^* + \ln \delta} (1 - e^{-q^* T} \delta^{-T}) + \frac{F \sum_{j \notin I} R_{ij0}}{1 + \ln \delta} (1 - e^{-T} \delta^{-T}) + \\ + r_i(0) R_0 \frac{G_i}{\ln \delta} \left(\frac{1 - \delta^{-T}}{\ln \delta} - T \delta^{-T} \right).$$

$$2) -G_i \cdot R_i(t) + Fe^{-t} \int_0^t e^t R_i(t) dt - \frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot R_i(t) > 0. \quad \text{В этом} \\ \text{случае } r_{ij \in I} = 0, r_{ij \notin I} = \frac{1}{|I|}. \quad \text{Подставив известные зависимости} \\ \text{в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:} \\ \ln \delta \cdot \alpha_i(t) R_i + \ln \delta \cdot \beta_i(t) - \alpha'_i(t) R_i - \beta'_i(t) = \\ = Fq^* \sum_{j \in I} R_{ij}(t) + F \sum_{j \notin I} R_{ij}(t) + \alpha_i(t) [-R_i(t) + r_i(t) R(t)].$$

Для индивидуалистов

$$R_{ij}(t) = e^{-q^* t} R_{ij0}.$$

Для коллективистов

$$R_{ij}(t) = e^{-t} \left(R_{ij0} + \frac{1}{|I|} \int_0^t e^t R_i(t) dt \right).$$

Интегрируя по частям, найдем

$$\int_0^t e^t R_i(t) dt = e^t R_i(t) + \int_0^t e^t R_i(t) dt - \int_0^t e^t r_i(t) R(t) dt.$$

Отсюда $e^t R_i(t) = \int_0^t e^t r_i(t) R(t) dt$, а значит,

$$\int_0^t e^t R_i(t) dt = \int_0^t \int_0^t e^t r_i(t) R(t) dt dt.$$

Следовательно, для коллективистов

$$R_{ij}(t) = e^{-t} \left(R_{ij0} + \frac{1}{|I|} \int_0^t \int_0^t e^t r_i(t) R(t) dt dt \right).$$

Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

$$\ln \delta \cdot \alpha_i(t) R_i + \ln \delta \cdot \beta_i(t) - \alpha'_i(t) R_i - \beta'_i(t) = \\ = Fq^* e^{-q^* t} \sum_{j \in I} R_{ij0} + Fe^{-t} \sum_{i \notin I} R_{ij0} + \\ + \frac{Fe^{-t}}{|I|} \int_0^t \int_0^t e^t r_i(t) R(t) dt dt + \alpha_i(t) [-R_i(t) + r_i(t) R(t)].$$

Приравняем коэффициенты при R_i :

$$\ln \delta \cdot \alpha_i(t) - \alpha'_i(t) = -\alpha_i(t).$$

Решением соответствующего линейного однородного уравнения будет:

$$\alpha_i(t) = Ce^{(1+\ln \delta)t},$$

что с учётом условия $C(T) = 0$ даёт $\alpha_i(t) = 0$, чего быть не может. Следовательно, агенты влияния могут быть только индивидуалистами.

Тогда количество ресурсов у агента среднего уровня меняется по правилу

$$R_i(t) = R_{i0} + \int_0^t r_i(t)R(t)dt.$$

Рассмотрим задачу Центра (27), (28), (33) и (36) в непрерывном времени:

$$(40) \quad J_0 = \int_0^T \delta^t \left\{ G \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^m (r_i(t) + z_i(t)) \right) \cdot R(t) + F \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}(t)R_{ij}(t) \right\} dt \rightarrow \max$$

$$r_i(t) \geq 0; z_i(t) \geq 0; \sum_{i=1}^m (r_i(t) + z_i(t)) \leq 1; i = 1, \dots, m;$$

$$\dot{R} = - \sum_{i=1}^m (r_i(t) + z_i(t)) \cdot R(t) + F \cdot \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}(t)R_{ij}(t) \right) + M \sum_{i=1}^m B_i(t)P(z_i(t))R_i(t), R(0) = R_0,$$

$$R(t) \geq R^*.$$

С учётом найденных оптимальных стратегий базовых агентов,

$$\dot{R} = - \sum_{i=1}^m (r_i(t) + z_i(t)) \cdot R(t) + q^* \cdot F \cdot e^{-q^*t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \in I} R_{ij0} + F e^{-t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \notin I} R_{ij0}.$$

Составим уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\ln \delta \cdot V - \frac{\partial V}{\partial t} = \max_{r_i, z_i} \left\{ G_0 \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^m (r_i(t) + z_i(t)) \right) \cdot R(t) + + q^* \cdot F \cdot e^{-q^*t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \in I} R_{ij0} + F e^{-t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \notin I} R_{ij0} + + \frac{\partial V}{\partial R} \left(- \sum_{i=1}^m (r_i(t) + z_i(t)) R(t) + q^* \cdot F \cdot e^{-q^*t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \in I} R_{ij0} + + F e^{-t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \notin I} R_{ij0} \right) \right\}.$$

при ограничении $\sum_{i=1}^m (r_i(t) + z_i(t)) \leq 1, r_i(t) \geq 0, z_i(t) \geq 0$.

Максимизируем правую часть уравнения по совокупности r_i и z_i , по каждой из которых симметричны уравнения и ограничения, поэтому $r_i = r_k = z_i = z_k$. Условие первого порядка даёт независимое от этих переменных выражение:

$$-G_0 \cdot R(t) - \frac{\partial V}{\partial R} \cdot R(t) = R(t) \left(-G_0 - \frac{\partial V}{\partial R} \right)_{\text{ю}}$$

Если $-G_0 - \frac{\partial V}{\partial R} < 0$ (в частности при $\frac{\partial V}{\partial R} > 0$), то r_{ij} , т.е.

$$r_i = z_i = 0.$$

Если же $-G_0 - \frac{\partial V}{\partial R} > 0$, то r_{ij} должны быть как можно больше, но с учётом условия результата $r_i = r_k = z_i = z_k$ и условия $\sum_{i=1}^m (r_i(t) + z_i(t)) \leq 1$ получаем $r_i = z_i = \frac{1}{2m}$.

Введём линейную функцию Беллмана $V_i(t, R_i) = \alpha(t) \cdot R + \beta(t)$. Рассмотрим два случая:

$$1) -G_0 - \frac{\partial V}{\partial R} < 0 = -G_0 - \alpha(t) < 0 \text{ (в частности при } \alpha_i(t) > 0).$$

В этом случае $r_i = z_i = 0$. Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

$$\begin{aligned} & \ln \delta \cdot \alpha(t) R + \ln \delta \cdot \beta(t) - \alpha'(t) R - \beta'(t) = \\ & = G_0 R + q^* \cdot F \cdot e^{-q^* t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \in I} R_{ij0} + F e^{-t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \notin I} R_{ij0} + \\ & + \alpha_i(t) \cdot q^* \cdot F \cdot e^{-q^* t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \in I} R_{ij0} + \\ & + \alpha_i(t) \cdot F \cdot e^{-t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \notin I} R_{ij0}. \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при R :

$$\ln \delta \cdot \alpha(t) - \alpha'_i(t) = G_0.$$

Решение данного уравнения

$$\alpha(t) = \frac{G_0}{\ln \delta} (1 - \delta^{t-T}).$$

$$\text{При } t = 0 \alpha(0) = \frac{G_0}{\ln \delta} (1 - \delta^{-T}).$$

Приравняем свободные члены в уравнении Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\begin{aligned} & \ln \delta \cdot \beta(t) - \beta'(t) = q^* F e^{-q^* t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \in I} R_{ij0} + \\ & F e^{-t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \notin I} R_{ij0} + \\ & + \alpha_i(t) (q^* F e^{-q^* t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \in I} R_{ij0} + F e^{-t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \notin I} R_{ij0}), \end{aligned}$$

или, с учётом $\alpha(t)$,

$$\begin{aligned} & \ln \delta \cdot \beta(t) - \beta'(t) = q^* F e^{-q^* t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \in I} R_{ij0} + F e^{-t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \notin I} R_{ij0} + \\ & + \frac{G_0}{\ln \delta} (1 - \delta^{t-T}) (q^* F e^{-q^* t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \in I} R_{ij0} + F e^{-t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \notin I} R_{ij0}). \end{aligned}$$

Для уменьшения громоздкости выражений введём обозначения $A = q^* F \sum_{i=1}^m \sum_{j \in I} R_{ij0}$, $B = F \sum_{i=1}^m \sum_{j \notin I} R_{ij0}$. Тогда уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана принимает вид

$$\ln \delta \cdot \beta(t) - \beta'(t) = A e^{-q^* t} + B e^{-t} +$$

$$+ \frac{G_0}{\ln \delta} (1 - \delta^{t-T}) (A e^{-q^* t} + B e^{-t}).$$

Решив его методом вариации постоянной, получим

$$\begin{aligned} \beta_i(t) = & \frac{A(e^{-q^* t} - e^{-q^* T} \delta^{t-T})}{q^* + \ln \delta} \left(1 + \frac{G_0}{\ln \delta} \right) + \\ & + \frac{B(e^{-t} - e^{-T} \delta^{t-T})}{1 + \ln \delta} \left(1 + \frac{G_0}{\ln \delta} \right) - \frac{G_0 \delta^{t-T} A(e^{-q^* t} - e^{-q^* T})}{q^* \ln \delta} - \\ & - \frac{G_0 \delta^{t-T} B(e^{-t} - e^{-T})}{\ln \delta}. \end{aligned}$$

При $t = 0$

$$\begin{aligned} \beta_i(0) = & \frac{A(1 - e^{-q^* T} \delta^{-T})}{q^* + \ln \delta} \left(1 + \frac{G_0}{\ln \delta} \right) + \frac{B(1 - e^{-T} \delta^{-T})}{1 + \ln \delta} \left(1 + \frac{G_0}{\ln \delta} \right) \\ & - \frac{G_0 \delta^{-T} A(1 - e^{-q^* T})}{q^* \ln \delta} - \frac{G_0 \delta^{-T} B(1 - e^{-T})}{\ln \delta}. \end{aligned}$$

С учетом обозначений A и B , получим

$$\begin{aligned} \beta_i(0) = & \frac{q^* F \sum_{i=1}^m \sum_{j \in I} R_{ij0} (1 - e^{-q^* T} \delta^{-T})}{q^* + \ln \delta} \left(1 + \frac{G_0}{\ln \delta} \right) + \\ & + \frac{F \sum_{i=1}^m \sum_{j \notin I} R_{ij0} (1 - e^{-T} \delta^{-T})}{1 + \ln \delta} \left(1 + \frac{G_0}{\ln \delta} \right) - \\ & - \frac{G_0 \delta^{-T} q^* F \sum_{i=1}^m \sum_{j \in I} R_{ij0} (1 - e^{-q^* T})}{q^* \ln \delta} - \\ & - \frac{G_0 \delta^{-T} F \sum_{i=1}^m \sum_{j \notin I} R_{ij0} (1 - e^{-T})}{\ln \delta}. \end{aligned}$$

Получим оптимальное значение выигрыша базового агента

$$\begin{aligned} J = V(0, R_0) = & \frac{G_{i0}}{\ln \delta} (1 - \delta^{-T}) \cdot R_0 + \\ & + \frac{q^* F \sum_{i=1}^m \sum_{j \in I} R_{ij0} (1 - e^{-q^* T} \delta^{-T})}{q^* + \ln \delta} \left(1 + \frac{G_0}{\ln \delta} \right) + \\ & + \frac{F \sum_{i=1}^m \sum_{j \notin I} R_{ij0} (1 - e^{-T} \delta^{-T})}{1 + \ln \delta} \left(1 + \frac{G_0}{\ln \delta} \right) - \\ & - \frac{G_0 \delta^{-T} q^* F \sum_{i=1}^m \sum_{j \in I} R_{ij0} (1 - e^{-q^* T})}{q^* \ln \delta} - \frac{G_0 \delta^{-T} F \sum_{i=1}^m \sum_{j \notin I} R_{ij0} (1 - e^{-T})}{\ln \delta}. \end{aligned}$$

2) $-G_0 - \frac{\partial V}{\partial R} = -G_0 - \alpha(t) > 0$. В этом случае $r_i = z_i = \frac{1}{2m}$.
Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

$$\begin{aligned} \ln \delta \cdot \alpha(t) R + \ln \delta \cdot \beta(t) - \alpha'(t) R - \beta'(t) = \\ = q^* \cdot F \cdot e^{-q^* t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \in I} R_{ij0} + F e^{-t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \notin I} R_{ij0} + \end{aligned}$$

$$+\alpha_i(t) \left[-R(t) + q^* F e^{-q^* t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \in I} R_{ij0} + F e^{-t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \notin I} R_{ij0} \right].$$

Приравняем коэффициенты при R_i :

$$\ln \delta \cdot \alpha(t) - \alpha'(t) = -\alpha(t).$$

Приведём уравнение к линейному однородному виду:

$$\alpha'(t) - (1 + \ln \delta) \alpha(t) = 0.$$

Решение соответствующего линейного однородного уравнения:

$$\alpha(t) = C e^{(\ln \delta + 1)t}.$$

Воспользовавшись условием $C(T) = 0$, получим $C = 0$, откуда $\alpha_i(t) = 0$. Мы пришли к противоречию, этот случай нереализуем.

При этом величина $R(t)$ изменяется по следующему правилу:

$$\dot{R} = q^* F e^{-q^* t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \in I} R_{ij0} + F e^{-t} \sum_{i=1}^m \sum_{j \notin I} R_{ij0}, R(0) = R_0.$$

Решение данной задачи Коши

$$R(t) = R_0 + F \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j \in I} R_{ij0} \right) (1 - e^{-q^* t}) + F \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j \notin I} R_{ij0} \right) (1 - e^{-t}).$$

Учитывая результаты, полученные для Центра, получаем для агентов влияния и базовых агентов следующие выигрыши и соотношения на количество накапливаемого ресурса. Для агента влияния выигрыши

$$J_i = \frac{G_i}{\ln \delta} (1 - \delta^{-T}) \cdot R_{i0} + \frac{F q^* \sum_{j \in I} R_{ij0}}{q^* + \ln \delta} (1 - e^{-q^* T} \delta^{-T}) + \frac{F \sum_{j \notin I} R_{ij0}}{1 + \ln \delta} (1 - e^{-T} \delta^{-T}),$$

а величина $R_i(t)$ изменяется по следующему закону:

$$\dot{R}_i = 0; R_i(0) = R_{i0},$$

откуда $R_i(t) = R_{i0}$, что говорит о том, что ресурсы у агента влияния не уменьшаются, но и не увеличиваются, так как он не тратит их на базовых агентов, но и Центр не выделяет агентам влияния ничего. Для индивидуалиста нижнего уровня

$$J_{ij} = \frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln \delta} (e^{(q^*+\ln \delta)T} - 1) \cdot R_{ij0},$$

а величина $R_{ij}(t)$ изменяется по следующему закону:

$$R_{ij}(t) = R_{ij0} e^{-q^* t}.$$

Для коллективиста нижнего уровня

$$J_{ij} = \frac{F}{1+\ln \delta} (e^{(1+\ln \delta)T} - 1) \cdot R_{ij0},$$

а величина $R_{ij}(t)$ изменяется по следующему закону:

$$R_{ij}(t) = R_{ij0} e^{-t}.$$

MODELS OF RESOURCE ALLOCATION IN A HIERARCHICALLY CONTROLLED TREE-LIKE DYNAMIC SYSTEM WITH CONSIDERATION OF OPPORTUNISTIC BEHAVIOR OF THE AGENTS

Olga Gorbaneva, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doct. Sc., Associate Professor (oigorbaneva@sedu.ru).

Stanislav Mikhalkovich, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Cand. Sc., Associate Professor (miks@sedu.ru)

Gennady Ougolnitsky, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doct. Sc., Professor (gaugolnickiy@sedu.ru).

Abstract: This article is devoted to the building and investigation of SPICE-models of reproduction and allocation of a resource in a hierarchically controlled tree-like dynamical system with consideration of possible opportunistic behavior of the agents. An original concept of balance relations for the resource is proposed. A general structure of the model for a three-level control subsystem is described. Investigation of specific cases of the mentioned models are presented. Illustrative examples of the analytical and numerical investigation of specific cases of the mentioned models with different information structure of dynamic games are presented.

Keywords: controlled dynamic systems; opportunistic behavior; public goods economics; resource allocation; simulation modeling.

УДК 51.7

ББК 65.054

DOI: 10.25728/ubs.2023.101.4

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.В. Клочковым.*

*Поступила в редакцию 10.05.2023.
Опубликована 30.11.2023.*

СЦЕНАРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В УПРАВЛЕНИИ РАЗВИТИЕМ НЕФТЕГАЗОВОГО КОМПЛЕКСА АРКТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Команич Н. В.¹, Чернов И. В.², Шелков А. Б.³

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Работа посвящена сценарному исследованию проблем повышения эффективности процессов управления социально-экономическим развитием российского Севера в условиях санкционного давления. Рассмотрены основные направления реализации государственной политики РФ в арктическом регионе в условиях воздействия широкого спектра угроз и ограничений, носящих как внешний, так и внутренний характер. Приведены результаты сценарного исследования возможных направлений развития и условий функционирования нефтегазовой отрасли в Арктике. В качестве инструмента исследования использован математический аппарат сценарного моделирования и прогнозирования, основным преимуществом которого является возможность предвосхищения наиболее важных событий в развитии ситуации в процессе управления крупномасштабными системами, а также формирования спектра альтернативных сценариев, позволяющих не только оценивать управленические решения, но и выявлять новые возможности достижения поставленных целей управления в условиях неполной информации и неопределенности. На базе математического аппарата знаковых ориентированных графов разработана технология сценарного исследования, составляющая основу программного комплекса имитационного моделирования. Сформирована базовая многофакторная сценарная модель управления освоением ресурсов Арктической зоны России и ряд ее модификаций. Результатом исследования моделей являются разработанные сценарии, анализ которых, в частности, показал, что в крайне сложной экономической ситуации, вызванной внешним санкционным давлением, наиболее эффективной является управленическая стратегия, основанная на опережающем наращивании финансовой и иных видов поддержки, реализуемых на территории российского Севера нефтегазовых проектов, осуществляемых различными экономическими субъектами.

Ключевые слова: управление, сценарный анализ, имитационное моделирование, Арктическая зона РФ, государственная поддержка, нефтегазовая отрасль.

¹ Никита Владимирович Команич, старший инженер-программист (*komanicnickitca@gmail.com*).

² Игорь Викторович Чернов, к.т.н., в.н.с. (*ichernov@gmail.com*).

³ Алексей Борисович Шелков, к.т.н., в.н.с. (*abshelkov@gmail.com*).

1. Введение

Развитие Арктической зоны Российской Федерации (АЗРФ) приобретает все большее значение в социально-экономическом развитии страны и в укреплении ее потенциала. В современных условиях стратегическое значение природных ресурсов Арктики (в Арктической зоне сосредоточено примерно четверть отечественных запасов нефти и более 70% газа), а также морских судоходных путей и материковой инфраструктуры для поступательного и устойчивого развития России существенно возрастают, особенно в долгосрочной перспективе.

В 2020 г. утверждены «Основы государственной политики Российской Федерации в Арктике на период до 2035 года» (утв. Указом Президента РФ от 5 марта 2020 г. №164) и «Стратегия развития Арктической зоны Российской Федерации и обеспечения национальной безопасности на период до 2035 года» (утв. Указом Президента РФ от 26 октября 2020 г. №645), а в 2021 г. – Государственная программа «Социально-экономическое развитие Арктической зоны Российской Федерации» (утв. Постановлением Правительства РФ от 30 марта 2021 г. № 484), представляющие собой основополагающие доктринальные документы, определяющие стратегические цели, основные направления и задачи, а также механизмы реализации государственной политики РФ в Арктическом регионе.

В настоящее время вся территория российской Арктики стала особой экономической зоной, в рамках которой созданы территории опережающего развития «Столица Арктики» и «Чукотка». По данным Научно-экспертного совета Государственной комиссии по вопросам развития Арктики, в 2023 г. в арктических преференциальных режимах реализуется 695 проектов с государственной поддержкой с объемом инвестиций 1,6 трлн рублей, при этом к 2030 году их количество должно возрасти до 1300 [5].

Однако в последние годы значительное негативное влияние на развитие АЗРФ оказывают обострение мировой внешнеполитической ситуации, широкомасштабное санкционное давление на Российскую Федерацию, попытки блокирования доступа

российской экономики на важнейшие глобальные рынки товаров и услуг и максимально возможного воспрепятствования социальнно-экономическому, производственно-технологическому, научно-техническому и т.д. развитию нашей страны. Это приводит к нарастанию существующих и появлению принципиально новых угроз устойчивому развитию АЗРФ и, соответственно, к необходимости повышения эффективности государственного управления в рассматриваемой предметной области в условиях возрастания рисков, ограничений и угроз реализации целей и приоритетов освоения Арктики.

2. Анализ основных проблем развития Арктической зоны РФ

Эффективная реализация государственной политики в АЗРФ невозможна без учета широкого спектра внешних и внутренних угроз и ограничений в условиях нарастания агрессивности антироссийской внешней политики геополитических противников нашей страны. Внешние угрозы в первую очередь связаны с усилением экономического давления на Россию и сотрудничающие с ней дружественные страны, ужесточением совокупности первичных и вторичных экономических санкций, попытками разрушения системы международного сотрудничества России с зарубежными странами, а также ограничением доступа нашей страны на мировые финансовый, энергетический и товарный рынки и т.д. Проблемы освоения АЗРФ связаны и целым рядом внутренних рисков, определяемых сложившимися социальнно-экономическими и инфраструктурными особенностями развития российских арктических территорий, географическим положением и природно-климатическими условиями северного мультирегиона и т.д.

С точки зрения управления АЗРФ является сложной системой, имеющей большое количество параметров, структуру взаимосвязей которых сложно выявить, а также характеризующейся [19, 20, 22]:

- обширной территориальной распределенностью объектов управления различного типа в границах мультирегиона;

- высоким уровнем сложности функциональных, материально-финансовых, информационных и иных взаимосвязей (взаимозависимостей) между ними;
- крайне широким спектром разнородных качественных и количественных показателей и параметров, описывающих состояние, характер и тенденции развития АЗРФ;
- наличием большого числа экономических субъектов с различными интересами и целями, которые необходимо согласовывать в процессе управления развитием АЗРФ;
- высоким уровнем неопределенности, значительным числом внешних и внутренних угроз развитию АЗРФ, а также связанных с ними рисков различной природы;
- широким спектром функциональных задач управления развитием АЗРФ;
- наличием внешних и внутренних угроз реализации целей развития этого региона;
- динамичностью обстановки, связанной с непрерывно изменяющимися условиями и ограничениями, как временными так и ресурсными;
- высокой сложностью процедур мониторинга и подготовки управленческих решений, а также обеспечениякой резуль-тативности их реализации, а также формирования и оценки эффективности достижения целей управления;
- значительной ролью опережающего комплексного мониторинга и контроля хода реализации крупных и имеющих стратегическое значение проектов развития Арктики, а также упреждающего выявления и многосторонней оценки ключевых тенденций социального и экономического развития российского Севера и страны в целом;
- потребностью существенных затрат ресурсов и времени для своего развития.

Экономическое значение Арктики во многом определяется потенциалом нефтегазодобывающей отрасли, которая преимущественно ориентирована на морскую логистику, обеспечивающую загрузку Северного морского пути (транспортировка нефти, сжиженного природного газа и угля). Одновременно

с этим в настоящее время освоение ресурсов Арктической зоны (включая шельфовую поверхность и дно арктических акваторий) сталкивается с целым рядом проблем, связанных с недостаточной разведанностью и трудностями освоения уже открытых месторождений в условиях внешнего санкционного давления, что в ряде случаев приводит к необходимости корректировки сроков осуществления арктических проектов. Кроме того, негативное влияние оказывают и возникшие проблемы с поставками продукции за рубеж у экспертоориентированных предприятий из-за санкций, возрастают трудности с приобретением импортных запчастей и технологических компонентов, а также техническим обслуживанием оборудования [8].

Проведенный анализ основных проблем развития нефтегазового комплекса позволил выделить пять их категорий: экономические, инфраструктурные, технологические, природно-климатические и экологические (анализ geopolитических и военных угроз развитию АЗРФ в настоящей работе не рассматривается).

Экономические проблемы. Одним из основных источников затрат нефтегазовой отрасли является технологическое оборудование для добычи, транспортировки и переработки добываемых углеводородных ресурсов. В современных условиях стоимость как самого оборудования, так и логистики его доставки, а также затраты на его установку и техническую поддержку во время эксплуатации резко возрастают. Одновременно с этим возрастают и актуальность задач интенсификации инновационного пути развития технологий добычи и переработки углеводородов, что также требует капитальных вложений. Немаловажную роль в данной проблеме играет и недостаточная эффективность механизмов государственной поддержки и стимулирования интереса компаний к геологоразведке и разработке новых месторождений.

К экономическим проблемам также следует отнести волатильность и периодическое снижение цен на углеводороды на внешнем рынке, резкое изменение которых приводит к падению нефтегазовых доходов федерального бюджета, негативно скаживается на целом ряде бюджетных показателей и может про-

воцировать инфляционные процессы, что, в свою очередь, приводит к необходимости увеличения объема инвестиций в отрасль. Значительное влияние оказывает и трансформация рынка, поскольку негативные (связанные с санкционным давлением) и труднопредсказуемые изменения в рыночной экономике безусловно являются дестабилизирующими факторами в добывающей отрасли.

Инфраструктурные проблемы. В настоящее время транспортная инфраструктура Арктики состоит из двух неравнозначных территорий: с одной стороны – западных регионов АЗРФ (за исключением Ненецкого автономного округа), где сформирована достаточно развитая и связанная с центром России транспортная сеть, с другой – арктических районов Сибири и Дальнего Востока, в которых наземные транспортные коммуникации практически отсутствуют, вследствие чего сообщение с другими регионами страны обеспечивается только воздушным и водным транспортом [13]. Сложившаяся ситуация предопределяет важнейшее значение проблемы создания единой арктической транспортной системы как фундамента для развития экономики АЗРФ, которая в идеале должна включать Северный морской путь, гражданскую авиацию, железнодорожное и автомобильное транспортное сообщение, а также трубопроводы и береговую инфраструктуру. Сложность решения данной проблемы заключается в экстремальности климатических условий, существенно повышающих трудоемкость дорожного строительства, а также в масштабах северных территорий, неравномерности расселения, труднодоступности отдельных районов и т.д.

Технологические проблемы. В период глобальной нестабильности возрастают затраты на разработку и внедрение инноваций, а также технологическую модернизацию добывающей отрасли, потребность в которых обусловлена необходимостью повышения эффективности функционирования и развития нефтегазового комплекса, являющегося базовым сегментом экономики АЗРФ. Внешние экономические санкции существенно ограничили доступ российских компаний к современным технологиям, а сегодня на долю импорта приходится почти 38% приобретаемого и используемого в нефтегазовой отрасли обо-

рудования. В отрасли ощущается острая нехватка не только современного технологического оборудования, но и систем 3D-геологического моделирования, программного обеспечения для интерпретации результатов сейсморазведки и данных геофизических исследований скважин и т.д. [7].

С серьезными проблемами сталкиваются крупные проекты освоения шельфовых месторождений, решение которых требует много времени, ресурсов и внушительных инвестиций в силу высокой технологической и технической сложности их разработки, а также научно-исследовательского обоснования. В настоящий момент главной проблемой является недостаток, а иногда и отсутствие современных технических средств для разведки и освоения шельфовых и глубоководных морских месторождений. Разработка и организация промышленного производства необходимого высокотехнологичного оборудования требует существенных затрат. Кроме того, затраты на выполнение строительно-монтажных работ также оказывают большое влияние на стоимость проектов.

Природно-климатические проблемы. Регион характеризуется жесткими климатическими условиями, являющимися одними из самых суровых на планете. Определяемые высокими широтами низкие температуры в мультирегионе могут достигать до -60°C (в среднем температура составляет около -30°C в зимние месяцы и $-5\ldots+5^{\circ}\text{C}$ – в летние). Арктическая территория характеризуется сильными ветрами, обширным ледовым покровом морской поверхности, дрейфующими айсбергами, разрушительной силой морских волн, сильными снегопадами. На суше – вечная мерзлота, представляющая собой верхнюю часть земной коры глубиной от 500 м, температура которой не поднимается выше 0°C . В то же время территория региона почти не подвержена каким-либо сейсмическим воздействиям.

Определенную тревогу вызывают наблюдаемые климатические изменения и распространение экстремальных природных явлений, интенсивность которых в настоящее время возрастает. Тем не менее, хотя пока отсутствует единая точка зрения научного и экспертного сообществ о причинах и характере климатических изменений на длительном временном горизонте, связанных

ные с ними риски и проблемы необходимо учитывать, особенно на этапах разработки крупных проектов развития АЗРФ.

Экологические проблемы. Природа и экосистема Арктики характеризуются высокой чувствительностью к антропогенному воздействию, а также длительными сроками восстановления после значительного внешнего вмешательства. Как результат, крайне слабая экоустойчивость природы российского Севера определяет высокий уровень ее уязвимости. В силу этого разработка, освоение и эксплуатация месторождений углеводородов как на материковой части АЗРФ, так на шельфе характеризуются повышенными экологическими рисками.

Выделенные особенности АЗРФ как объекта управления, а также сложности реализации процессов управления развитием этого региона страны приводят к необходимости совершенствования существующих и разработки новых методов и подходов к повышению эффективности вырабатываемых управлеченческих решений. В качестве одного из таких подходов к решению поставленной проблемы повышения качества управления развитием подобных крупномасштабных социально-экономических систем является использование методологии сценарного анализа [6, 11]. Сценарный подход позволяет снизить имеющуюся неопределенность при анализе сложных систем и исследовать альтернативные варианты развития ситуации при различных внешних условиях и управлеченческих воздействиях. Кроме того, данный подход позволяет оценить результативность управлеченческих решений в условиях риска, неопределенности и ограничений различного типа, а также определять необходимые управляющие воздействия для реализации желаемых сценариев.

3. Методы и технологии сценарного анализа в управлении развитием социально-экономических систем

В настоящее время с появлением целого комплекса рассмотренных выше принципиально новых внешних угроз и санкционных ограничений, а также непосредственно связанных с ними проблем задачи управления обеспечением безопас-

ного и устойчивого социально-экономического развития страны существенно усложнились. В реалиях сегодняшнего дня использование только традиционных подходов и методов управления развитием крупномасштабных социально-экономических систем (СЭС) становится очевидно недостаточным в силу их реактивности (преимущественной ориентации на первоочередное решение уже возникших острых проблем, связанных с развитием негативных явлений и процессов как во внешней, так и во внутренней среде), что неизбежно приводит к снижению эффективности и результативности принимаемых управлеченческих решений, особенно в условиях неопределенности и рисков реализации угроз различной природы, вследствие чего, как показывает практика, в данной ситуации наиболее успешно обеспечивается решение в основном оперативных задач. Таким образом, если система управления ограничивается лишь реакцией на вызовы и угрозы, а также противодействием в основном последствиям неблагоприятных ситуаций, она принципиально неспособна обеспечить успешное достижение стратегических и среднесрочных целей социально-экономического развития, поскольку эффективное решение данных задач становится крайне затруднительным, а во многих случаях и невозможным, что в современных условиях является основным источником снижения качества и результативности управлеченческих решений [18].

Здесь следует подчеркнуть, что реактивность как возможность системы управления оперативно реагировать на возникающие проблемы безусловно необходима в силу того, что она обеспечивает как минимум снятие их остроты и стабилизацию ситуации на определенный период времени, однако ориентация только на сиюминутные проблемы в долгосрочной перспективе может привести к серьезным и труднопредсказуемым последствиям.

Соответственно, необходимым условием повышения эффективности процессов управления развитием СЭС, особенно на длительном временном горизонте, является смещение акцента с задач реактивного характера на опережающие и направленные на предотвращение кризисных ситуаций задачи, основой

решения которых является целевой прогноз изменения обстановки как во внешней, так и во внутренней среде. Данный прогноз обеспечивает возможность выделения и последующего анализа совокупности характеризующих внешние риски и внутренние «окна» уязвимости ключевых факторов, а также идентификации потенциальных угроз целям и задачам управления развитием СЭС, что в итоге позволяет не только своевременно, но и с определенным упреждением оценивать последствия их реализации, выявлять проблемные ситуации и исследовать альтернативные направления их развития.

Таким образом, система управления должна опираться на комплекс развитых средств и методов раннего обнаружения вероятных или зарождающихся изменений во внешней и внутренней среде и прежде всего имеющих существенное (а возможно – критическое) значение с точки зрения достижения поставленных целей, как долгосрочных, так и среднесрочных.

Решение многих из перечисленных выше проблем и задач обеспечивает методология формирования и анализа альтернативных сценариев поведения сложных слабоформализуемых систем, способная обеспечить эффективную информационную поддержку процессов подготовки решений в различных сегментах и на различных уровнях иерархии системы управления, предоставляя лицам, принимающим решения, данные о потенциальных опасностях и рисках с целью принятия адекватных и своевременных мер на основе результатов комплексной опережающей сценарной оценки альтернативных вариантов развития событий, в том числе в моменты времени, когда угрозы и негативные явления носят потенциальный характер (т.е. существует лишь некоторая вероятность их появления или негативного воздействия либо рассматриваемые угрозы еще не начали оказывать сколько-нибудь значимого влияния).

Главная сложность в процессах подготовки и принятия как стратегических, так и несколько меньшей степени тактических решений является необходимость учета неопределенности и связанных с ней рисков, что обусловливается:

- неполной наблюдаемостью происходящих внешних и внутренних процессов;

- скрытным характером многих существующих и потенциальных угроз;
- труднопредсказуемостью тенденций возможного развития проблемных ситуаций;
- неполнотой и зачастую недостаточной достоверностью, а также запаздыванием поступающей исходной как количественной, так и качественной информации, характеризующей проблемную ситуацию;
- отсутствием возможности заблаговременно и достоверно предвидеть и оценить как позитивные, так и возможные нежелательные результаты реализации данных решений.

При этом по перечисленным выше причинам возможности использования точных методов прогнозирования крайне ограничены. Вышесказанное приводит к необходимости применения для решения рассматриваемых задач методологии, основанной на исследовании неполных математических моделей, структура которых основана на преимущественном использовании в качестве исходных наиболее существенных факторов и показателей, значения которых поддаются количественной или качественной оценке, а следовательно – формализации с приемлемой точностью [11, 21].

На практике достаточно часто встречается класс прикладных задач организационного управления, сводящихся к формированию как оптимистических, так и пессимистических опера-жающих (прогнозных) оценок, наиболее существенных с точки зрения поставленных целей количественных и качественных характеристик объектов или ситуаций, в том числе и при реализации различных управлений воздействий. Решение подобного класса задач можно отнести к основной области применения сценарного моделирования. Сценарный подход позволяет вырабатывать интегрированные стратегии управления, обеспечивающие существенное снижение рисковых составляющих вне зависимости от реального развития событий в будущем.

Сфера практического применения сценарного подхода в организационном управлении в различных предметных областях в последние годы неуклонно расширяется, поскольку

его главным преимуществом является возможность формирования альтернативных сценариев поведения крупномасштабных, слабоформализуемых объектов и систем. На основе анализа полученных сценариев появляется возможность проведения упреждающего мониторинга и оценки возможных последствий реализации внешних и внутренних угроз, а также эффективности и результативности управленческих решений по их парированию или снижению тяжести нанесенного ущерба. Таким образом, сценарный подход является основой для реализации процедур информационно-аналитической поддержки процессов подготовки решений и опережающей оценки их качества [6, 11].

Сценарии являются одной из форм представления информации о возможных (альтернативных) направлениях развития проблемных ситуаций во внутренней и во внешней среде. В своем современном значении термин «сценарий» стал употребляться в конце 50-х – начале 60-х годов прошлого века [6, 10, 21]. Первой публикацией по сценарному подходу считается работа Г. Канна «Эскалация надежности; метафоры и сценарии» [24].

В настоящее время понятие сценария в теории организационного управления используется уже достаточно широко. В зарубежной и отечественной литературе можно выделить два базовых подхода к определению сценария [3, 4, 12, 14]

В рамках первого в определении сценария делается акцент на причинно-факторную детерминированность последовательного развития исследуемой проблемной ситуации. Согласно представлениям Г. Канна, сущность сценарного подхода заключается в выделении базовых количественных и качественных показателей, описывающих характер развития исследуемой ситуации, при этом экстраполяция средних значений факторов формирует базовый сценарий, а их вариации и отклонения, а также тенденции изменения во времени образуют негативные или позитивные альтернативные сценарии. В работе Л. Ганна и Б. Хогвуда сценарий рассматривается как «гипотетическая последовательность событий, конструируемая в целях фокусирования внимания на причинных процессах и решениях» [23]. Аналогичное развернутое определение сценария дается

В.Н. Цыгичко и Д.С. Черешкиным, в рамках которого сценарий понимается как «гипотетическая картина последовательного развития во времени и пространстве событий, составляющих в совокупности эволюцию социально-экономического объекта в интересующем исследователя разрезе. В сценарии в явном виде фиксируются причинно-следственные зависимости, определяющие возможную в будущем динамику изменения состояния объекта и условия, в которых эти изменения будут происходить» [15].

Второй подход предполагает использование в качестве цели разработки сценария не предвосхищение альтернатив развития исследуемой ситуации, а прежде всего установление логической сети последовательности свершения событий, определяющих пути их развития [1, 2, 9]. В соответствии с определением Г. Канна и Э. Винера сценарий представляет собой «динамическую последовательность возможных событий, фокусирующую внимание на причинно-следственной связи между этими событиями и точками принятия решений, способных изменить их ход и траекторию движения во времени всей рассматриваемой системы в целом или отдельных ее подсистем» [25].

В рамках решения рассматриваемых задач сценарий целесообразно рассматривать как инструмент анализа альтернативных вариантов развития ситуации в сфере управления развитием социально-экономических систем с целью информационной поддержки процессов подготовки и принятия управленческих решений, а также опережающей оценки их эффективности [17].

Укрупненная классификация сценариев развития проблемных ситуаций представлена на рис. 1 [6, 21].

В общем виде задача построения сценариев формулируется следующим образом: изучается сложная, динамическая, открытая, управляемая, не полностью наблюдаемая система. Следует описать возможные направления ее изменения несколькими вариантами так, чтобы в рамках поставленной содержательной задачи дать наиболее полное представление о возможных будущих состояниях и траекториях развития системы [6, 11, 17].

В настоящее время сфера применения сценарного подхода при решении разнообразных конкретных прикладных проблем

и задач организационного управления в различных областях человеческой деятельности непрерывно расширяется.

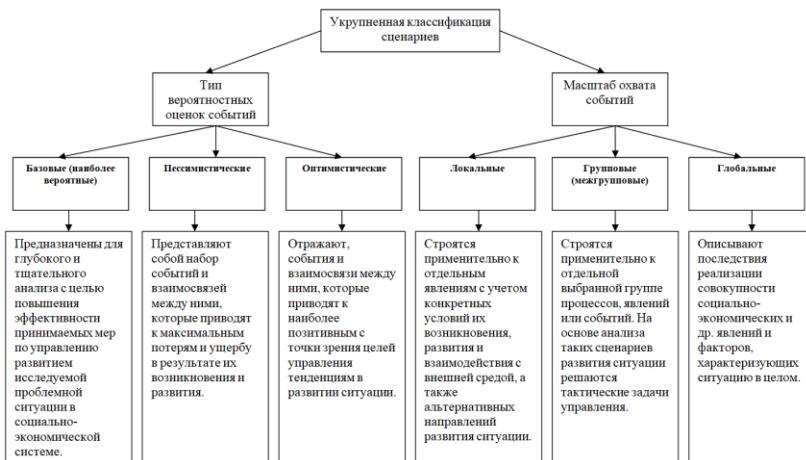


Рис. 1. Классификация сценариев

Однако совокупность используемых методов построения вариантов сценариев опирается, во-первых, в большинстве случаев только на экспертные методы их формирования; во-вторых, на специфические особенности конкретной (в большинстве случаев – строго ограниченной) области исследования, на основе которых разрабатываются отражающие данные особенности узкоспециализированные формализованные модели на основе использования разнообразного математического аппарата; в-третьих, аналитическое исследование разработанных моделей и синтез альтернативных сценариев экспертами и специалистами осуществляется в основном «вручную». Таким образом, в настоящее время практически отсутствует общепринятая и в достаточной степени универсальная как минимум в рамках определенных классов задач методологическая концепция формирования и анализа сценариев развития проблемных ситуаций. Одновременно с этим крайне мало работ по комплексным проблемам формализации задач сценарного исследования, автоматизации процессов генерации и исследо-

вания сценариев, а также сценарно-прогнозной оценки эффективности управлеченческих решений с целью информационной поддержки процессов их подготовки и принятия.

В настоящее время накоплен значительный опыт использования аппарата знаковых, взвешенных знаковых и функциональных знаковых ориентированных графов в качестве методологической основы сценарного исследования широкого круга проблем и задач управления развитием СЭС [6, 11, 17, 21].

Рассматриваемая модель представляет собой ориентированный граф $G(X, E)$ (здесь X – конечное множество вершин, а E – множество дуг), в котором каждой вершине x_i ставится в соответствие ее параметр $v_i \in V$, $V = \{v_i, i \leq N = \|X\|\}$, и вводится функционал преобразования дуг $F(V, E)$ таким образом, что в соответствие каждой дуге ставится знак, вес или функция [11].

С целью обеспечения возможности исследования динамики процессов развития СЭС вводится понятие импульсного процесса. Под импульсом $P_i(t)$ в некоторой вершине x_i понимается изменение значения ее параметра в дискретный момент времени $t = 0, 1, 2, \dots$.

$$(1) \quad P_i(t) = v_i(t) - v_i(t-1).$$

В импульсном процессе значение параметра вершины x определяется следующим образом:

$$(2) \quad v_i(t) = v_i(t-1) + \sum_{j=1, j \neq i}^N F(v_i, v_j, e_{ij}) P_j(t-1) + P_i^0(t),$$

где $P_i^0(t)$ – внешний импульс, вносимый в момент времени t в вершину e_i .

Выражение для импульса в исследуемом процессе получается из конечно-разностных уравнений (1) и (2):

$$(3) \quad P_i(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^N F(v_i, v_j, e_{ij}) (P_j(t-1) + P_i^0(t)).$$

Содержательно параметрами вершин графа являются ключевые показатели (факторы), описывающие состояние и динамику развития исследуемой ситуации, структура знакового графа отражает их причинно-следственные взаимозависимости.

Совокупность значений параметров вершин в графовой модели описывает конкретное состояние исследуемой ситуации в определенный момент времени, при этом изменение любого из них порождает импульс и интерпретируется как изменение ситуации. Управляющие воздействия моделируются подаваемыми импульсами в определенные вершины графа или изменением структуры модели [6, 17, 21].

Для решения задач информационно-аналитической поддержки процессов подготовки, принятия и оценки эффективности управленческих решений в условиях неопределенности разработан специализированный программно-аналитический комплекс (ПАК), обеспечивающий автоматизацию процессов создания и сценарного исследования графовых моделей развития СЭС [6, 16].

Как правило, сценарии развития СЭС генерируются и анализируются в двух основных аспектах [11, 16]:

- прогноз развития ситуации в отсутствии управляющих воздействий, т.е. ситуация развивается сама по себе;
- прогноз развития ситуации с выбранным комплексом управляющих воздействий (прямая задача – разработка сценария прямого управления).

В работе [10] была предложена идея существенного расширения базовых функций ПАК за счет возможности решения обратной задачи – поиска и анализа множества допустимых управляющих воздействий, обеспечивающих достижение поставленных целей. Фактически данная задача представляет собой синтез сценария с заданными свойствами и в отличие от прямой задачи (разъясняющей «что будет, если?»), дает ответ на вопрос «что необходимо предпринять для достижения поставленных целей или обеспечения желаемого характера развития исследуемой ситуации?».

Содержательно в рамках рассматриваемой задачи требуется определить набор вершин, в которые необходимо вносить управляющие воздействия различного типа (разовые или однократные, непрерывные ограниченные по времени или постоянные [10]), приводящие к требуемому результату. Найденные сценарные варианты решения обратной задачи являются исход-

ной точкой для дальнейшей реализации процедур принятия решений в области планирования и управления развитием СЭС.

Введем следующие обозначения. Пусть: $P_t = \{p_{it}\}_{i=1}^N$, $t = 0, 1, 2, \dots$ – вектор вносимых в вершины внешних импульсов; $V_t = \{v_i\}_{i=1}^N$, $t = 0, 1, 2, \dots$ – вектор параметров вершин графовой модели; $R_t = \{\Delta_i^t\}_{i=1}^N$ – вектор изменения значений параметров вершин, определяемый выражением

$$(4) \quad R_t = V_t - V_{t-1}, \quad t = 1, 2, 3, \dots,$$

где:

$$(5) \quad V_t = V_{t-1} + AR_{t-1} + P_{t-1}$$

Здесь A – матрица смежности знакового графа.

Тогда из (4) и (5) получим выражение для определения вектора R_t :

$$(6) \quad R_t = A^{t-1}P_0 + A^{t-2}P_1 + \dots + AP_{t-2} + IP_{t-1}.$$

Здесь I – единичная матрица и $\forall t \geq 0 \quad P(t) = P(0)A^t$.

Рассмотрим частный случай, когда в вершины графа внешние импульсы вносятся только один раз в начале моделирования (так называемый автономный режим [11]). Пусть при этом $p_{it} = 0, \forall t \geq 1$. Тогда для оценки изменения параметров получим следующее выражение:

$$(7) \quad \Delta_k^t = \sum_{i=1}^N a_{ki}^{t-1} p_{i0}, \quad k = \overline{1, N}, \quad t \geq 1,$$

где a_{ki}^t – элемент матрицы A^t .

Для решения рассматриваемой обратной задачи во множестве вершин X выделим управляемую вершину, изменения значения которой требуется контролировать (для краткости будем называть ее вершиной-объектом), и, соответственно, управляющую вершину (вершину-субъект), изменение значения параметра которой осуществляется внесением внешних импульсов.

Учитывая крайне высокую сложность количественной оценки значительного множества показателей и параметров развития СЭС, в качестве цели будем рассматривать определение желательности (или, наоборот, недопустимости) характера

и направленности изменения значений параметра вершины-объекта во времени при заданных внешних условиях (например, в простейшем случае – неубывания или невозрастания).

Обозначим вершину-объект через v_s , а вершину-субъект – через v_u ($s \neq u$). Пусть также $t \in [t_E, t_F]$ – период времени, в течение которого действуют ограничения на характер изменения значений параметра вершины v_s , и $t \in [0, t_p]$ – период, в течение которого генерируется внешнее импульсное воздействие на вершину v_u .

Тогда в рассматриваемом автономном импульсном процессе (когда внешний импульс в вершину v_u вносится только однократно в начальный момент генерации сценария) p_{ut} , $t \in [0, t_p]$ являются искомыми величинами, p_{i0} , $i = 1, \dots, N$, $i \neq u$, – заданными, а все остальные p_{it} , $i \neq u$, $t \geq 1$, равны 0.

Согласно сформулированным выше предположениям введенным обозначениям, выражение для оценки изменения параметра вершины-объекта можно представить в следующем виде:

$$(8) \quad \Delta_s^t = \sum_{i \neq u} a_{si}^{t-1} p_{i0} + \sum_{i=1}^{t-1} a_{su}^{t-1} p_{u,i-1}$$

при ограничении на условие невозрастания значения параметра вершины-объекта в заданном временном интервале:

$$(9) \quad \Delta_s^t \leq 0, t \in [t_E, t_F].$$

Аналогичным образом решается задача обеспечения неубывания значения параметра вершины v_s .

Вышеприведенные линейные алгебраические неравенства позволяют определить множество вносимых в вершину-субъект внешних импульсов p_{ut} , $t \in [0, t_p]$.

Рассмотрим решение обратной задачи по критерию минимальной стоимости, для чего обозначим стоимость единицы вносимого в вершину-субъект внешнего импульса через $c_t \geq 0$, $t \in [0, t_p]$.

В этом случае критерий оптимальности при решении рассматриваемой задачи примет следующий вид:

$$(10) \quad \min_{(p_{u0}, \dots, p_{u,t_p})} \sum_{t=0}^{t_p} c_t |p_{ut}|.$$

Как следует из приведенного выше выражения, поставленная задача является задачей линейного программирования, которую при $p_{ut} = p_{ut}^1 - p_{ut}^2$ можно представить в следующем виде:

$$(10) \min_{\substack{p_{ut}^1, p_{ut}^2 \\ t \in [0, t_p]}} \sum_{t=0}^{t_p} c_t (p_{ut}^1 + p_{ut}^2);$$

$$(11) \sum_{i=1}^{t-1} a_{su}^{t-1} (p_{ut-1}^1 - p_{ut-1}^2) \leq - \sum_{i \neq u} a_{si}^{t-1} p_{i0}, \quad t \in [t_E, t_F];$$

$$(12) p_{ut-1}^1, p_{ut-1}^2 \geq 0.$$

Решение поставленной задачи в рамках разработанного программно-аналитического комплекса осуществляется симплекс-методом.

Практическая возможность решения рассматриваемой обратной задачи позволяет в процессе сценарных исследований осуществлять не только прогнозную оценку альтернативных направлений развития СЭС, но и реализовывать процедуры поиска управлеченческих решений, обеспечивающих достижение поставленных целей, поскольку формируемая в процессе моделирования программа управляющих воздействий может быть трансформирована в конкретные плановые решения.

Одним из направлений расширения возможностей программно-аналитического комплекса при решении данной задачи является разработка методов и алгоритмов оптимального управления несколькими взаимозависимыми объектами на различных по длительности временных интервалах управлеченческих воздействий с учетом различного вида ресурсно-временных ограничений.

Основной целью использования сценарного подхода в процессах управления развитием СЭС является информационно-аналитическая поддержка процессов подготовки стратегических плановых и тактических (в том числе оперативных) решений, а также комплексный опережающий анализ эффективности и результативности их реализации при различных условиях [6, 11, 17]. Таким образом, сценарий развития проблемной ситуации по сути является необходимым связующим звеном

между этапами целеполагания и формирования планово-управленческих решений, направленных на достижение целей развития СЭС (рис. 2).

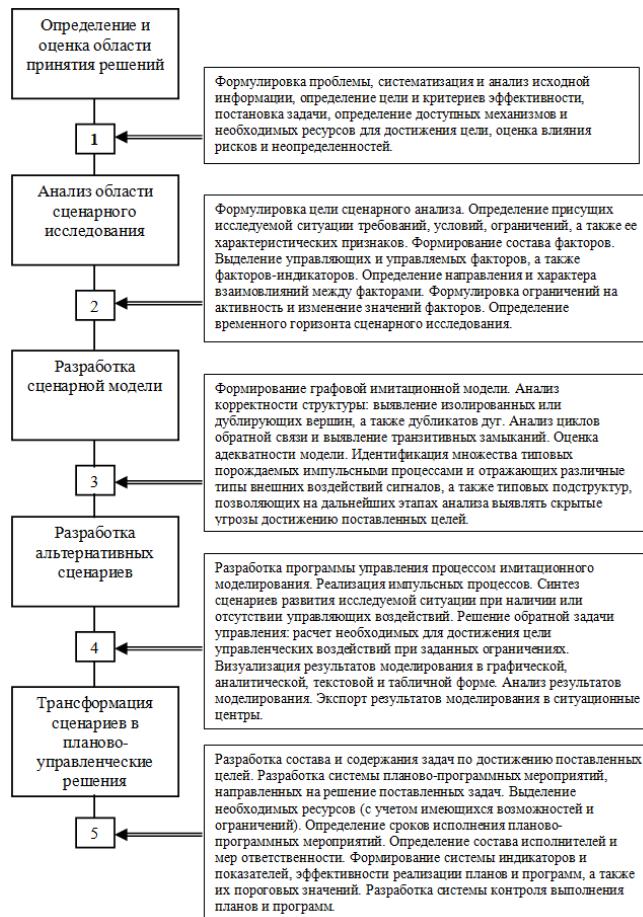


Рис. 2. Сценарный анализ в управлении

Одновременно с этим необходимо отметить, что использование технологий автоматизации сценарно-прогнозных исследований в качестве средств информационной поддержки процессов подготовки и принятия управленческих решений сущес-

ственно расширяет возможности использования сценариев в качестве основы процессов планирования с целью повышения обоснованности, эффективности, устойчивости и результативности разрабатываемых планов и программ.

Если в рамках традиционного подхода, когда разработка и анализ сценариев развития исследуемой ситуации осуществляется экспертами и профильными специалистами вручную и, соответственно, требует значительных временных затрат, в результате чего решения принимаются на основе единственного базового сценария, то использование средств автоматизации кардинально меняет ситуацию. Технология автоматизации синтеза сценариев позволяет практически на любом этапе процесса планирования и управления использовать полный набор различных необходимых для принятия решений сценариев, а также проводить уточняющие сценарно-прогнозные исследования их эффективности с учетом как полученных в процессе анализа новых знаний об исследуемых процессах и явлениях, так и поступающей в систему управления оперативной информации об их развитии.

4. Сценарное исследование процессов управления развитием нефтегазовой отрасли Арктической зоны РФ

С целью исследования проблем повышения эффективности управления развитием Арктической зоны в современных условиях с использованием аппарата знаковых орграфов разработана базовая интегрированная многофакторная модель, позволяющая проводить сценарный анализ процессов развития ресурсной базы АЗРФ, на основе результатов которого оценивать качество принимаемых управленческих решений. Структура имитационной модели представлена на рис. 3.

Модель разработана на основе стратегических доктринальных и программных документов, определяющих долгосрочные цели, основные направления и механизмы реализации государственной политики России в Арктике, материалов Государственной комиссии по вопросам развития Арктики и совещаний

различного уровня по рассматриваемой тематике, а также результатов аналитических исследований по проблемам управления развитием нефтегазовой отрасли АЗРФ.

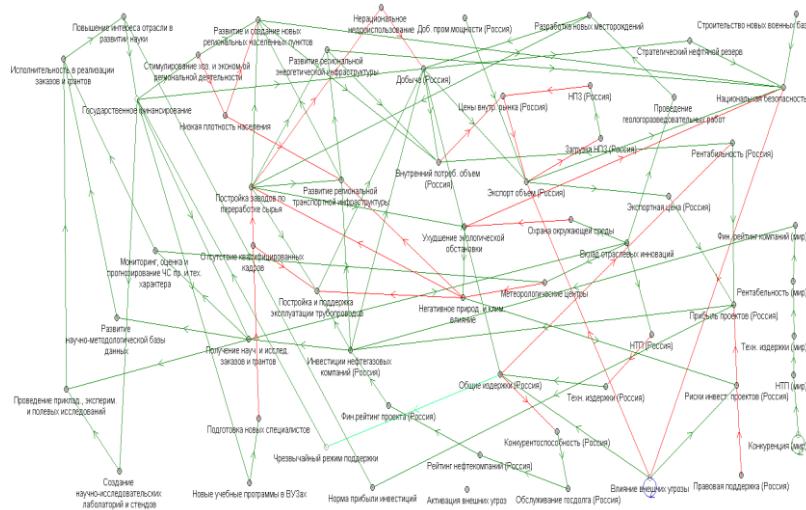


Рис. 3. Структура сценарной имитационной модели расширения ресурсной базы АЗРФ

Основой структуры разработанной сценарной модели развития нефтегазовой отрасли в Арктической зоне РФ являются результаты проведенного анализа факторов, непосредственно влияющих на процессы развития мультирегиона, а также их взаимосвязей и взаимозависимостей между ними. При этом основное внимание уделено факторам, оказывающим наиболее значительное негативное влияние на процессы реализации проектов освоения энергетических ресурсов Арктической зоны, а также возможным путям снижения их деструктивного воздействия.

Целью сценарного исследования является оценка необходимости смещения акцента и изменения приоритетов государственного управления развитием АЗРФ в качестве реакции

на деструктивные внешние воздействия, в условиях которых эффективность использования только экономических механизмов достижения целей государственной политики в Арктике существенно снижается под воздействием различного рода угроз и ограничений.

В условиях стабильности управление развитием АЗРФ базируется на рыночных механизмах хозяйствования и заключается в создании благоприятных условий работы значительного количества экономических субъектов различных форм собственности, как принимающих непосредственное участие в мероприятиях государственных или федеральных целевых программ, так и работающих по сути на достижение рассматриваемой главной цели освоения природных ресурсов российского Севера на инициативной основе с ориентацией на проявляемый государством интерес к проектам освоения Арктических территорий, и, соответственно, востребованность результатов своей работы в течение достаточно длительного периода времени [20].

В настоящее время процессы реализации крупных проектов освоения АЗРФ существенно усложняются, что связано с резким обострением международной обстановки; беспрецедентным внешним санкционным давлением на Российскую Федерацию; неустойчивостью мировой экономики; усложнением логистики и т.д., что приводит к росту рисков успешной реализации проектов, а также появлению новых и достаточно существенных внутренних «окон» уязвимости.

Это объективно требует изменения характера влияния государства на процессы реализации арктической политики путем усиления адресной (в некоторых случаях – точечной) финансовой и иных видов поддержки экономических субъектов, а также в определенной мере усиления административных аспектов процессов управления в части решения проблем координации работы исполнителей арктических проектов, обеспечивающих и снабжающих организаций (в первую очередь – в области решения проблем импортозамещения и обеспечения технологической независимости), а также усиления контроля реализации наиболее важных (приоритетных) проектов.

В ходе моделирования получен и исследован ряд альтернативных сценариев развития процессов освоения АЗРФ при различных условиях, направлениях и характере управлеченческих воздействий в условиях влияния угроз и ограничений различной природы.

Ключевым фактором успешной реализации планов освоения Арктики является финансирование проектов, за редким исключением осуществляемое при непосредственной поддержке государства (в модели – фактор «Государственное финансирование»). В настоящее время используются различные модели взаимодействия государства и бизнеса в рамках освоения ресурсов АЗРФ: государственные целевые программы, бюджетные инвестиции, льготные кредиты, налоговые льготы и каникулы, концессии (в том числе новый механизм — арктическая концессия), контракты жизненного цикла, энергосервисные контракты, выделение «арктических гектаров» малому бизнесу и т.д.

Важными факторами исследования сценарной имитационной модели являются также: «Инвестиции нефтегазовых компаний» (влияние нефтегазовых компаний, как субъектов управления разработкой и реализацией конкретных проектов), «Влияние внешних угроз» (в основном влияние внешнеполитических угроз и внешнеэкономических санкций), «Национальная безопасность» (целевой фактор – состояние защищенности национальных интересов Российской Федерации от внешних и внутренних угроз), «Добыча» (совокупная добыча нефтегазовых ресурсов), «Вклад отраслевых инноваций» (уровень инновационного развития нефтегазовой отрасли и мультирегиона в целом), «Общие издержки» (затраты на освоение энергетических ресурсов региона), «Развитие региональной транспортной инфраструктуры» (одно из важнейших и крайне необходимых условий регионального развития).

Критерием для смены акцентов в процессах управления развитием АЗРФ в первом сценарии служат результаты анализа динамики изменения значений ключевых социально-экономических факторов модели.

Внешнее воздействие в процессе синтеза сценариев имитируется подачей входного управляющего сигнала (в терминоло-

гии моделирования – импульса) на фактор «Активация внешних угроз», что в свою очередь усиливает фактор «Влияние внешних угроз». Затем имитирующие деструктивные влияния импульсы подаются на факторы «Общие издержки» и «Экспортируемые объемы».

Сценарий 1. Запаздывание господдержки. В рамках данного сценария интенсификация процессов финансовой поддержки арктических проектов начинает осуществляться в ситуации, когда в результате негативного влияния внешней среды (а в настоящее время – прежде всего воздействия санкционных ограничений) сроки реализации проектов освоения АЗРФ уже начинают отставать от запланированных значений. Данная ситуация в модели отражается активацией фактора «Чрезвычайный режим поддержки» и связанной с этим фактором подструктуры, направленной на стабилизацию ситуации путем расширения финансовой и иных видов поддержки (в модели активируется фактор «Государственное финансирование», отражающий усиление процессов адресной финансовой помощи государства исполнителям наиболее важных и крупных проектов).

Результаты моделирования показали, что подобная (а по сути – запоздалая) реакция на внешние деструктивные воздействия и связанное с ними ухудшение обстановки привели к отсутствию возможности качественно и в короткие сроки «переломить» негативные тенденции: уравновесить нарастающее значение фактора «Общие издержки» и поддержать фактор «Добыча» нефтегазовых ресурсов даже за счет существенного роста масштабов государственного финансирования и инвестирования (рис. 4).

Данный сценарий развития ситуации приводит к снижению интенсивности и темпов развития субъектов и инфраструктуры Арктической зоны РФ, что, в частности, иллюстрируется характером и динамикой изменения значения фактора «Развитие региональной транспортной инфраструктуры», росту значения фактора «Внутренние потребительские цены» (здесь имеются в виду цены на продукцию нефтегазовой отрасли для конечного потребителя внутри страны, существенно влияющие на инфляционные процессы), резкому снижению значения фактора

«Национальная безопасность» и в конечном итоге финансовым потерям нефтегазовых компаний. Таким образом, как показал анализ результатов моделирования, в случае запаздывания процесса усиления государственного регулирования и финансирования лавинообразно накапливаются издержки освоения региона со всеми вытекающими отсюда негативными последствиями.

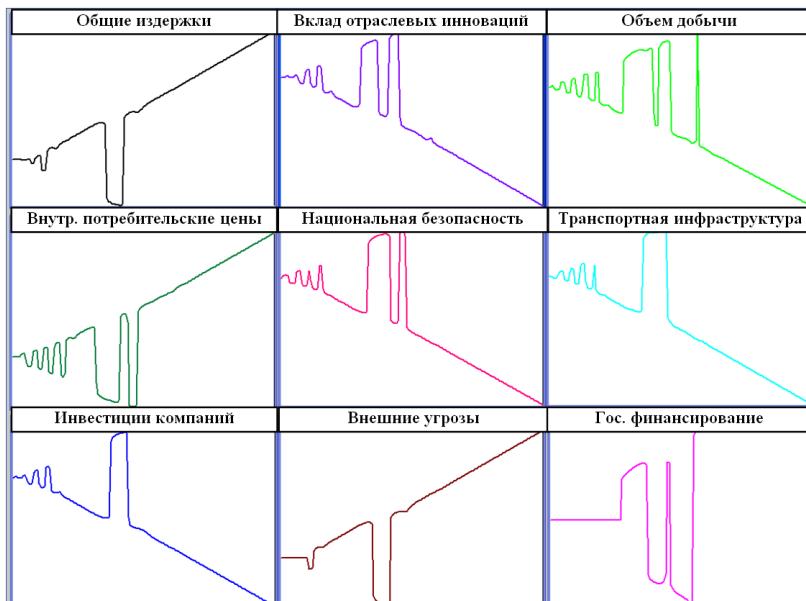


Рис.4. Сценарий 1. Результаты моделирования

Сценарий 2. Своевременное усиление роли государства. Данный сценарий (рис. 5) отражает ситуацию, когда на основе использования результатов прогнозного мониторинга происходит упреждающая активация фактора «Чрезвычайный режим поддержки» (за счет отслеживания динамики изменения фактора «Влияние внешних угроз») и перенос нагрузки по финансовой и иной поддержке проектов от фактора «Инвестиции нефтегазовых компаний» к фактору «Государственное финансирование», который при этом оказывает положительное влияние

на значения остальных ключевых параметров модели, что компенсирует негативное влияние факторов «Влияние внешних угроз» и «Общие издержки».

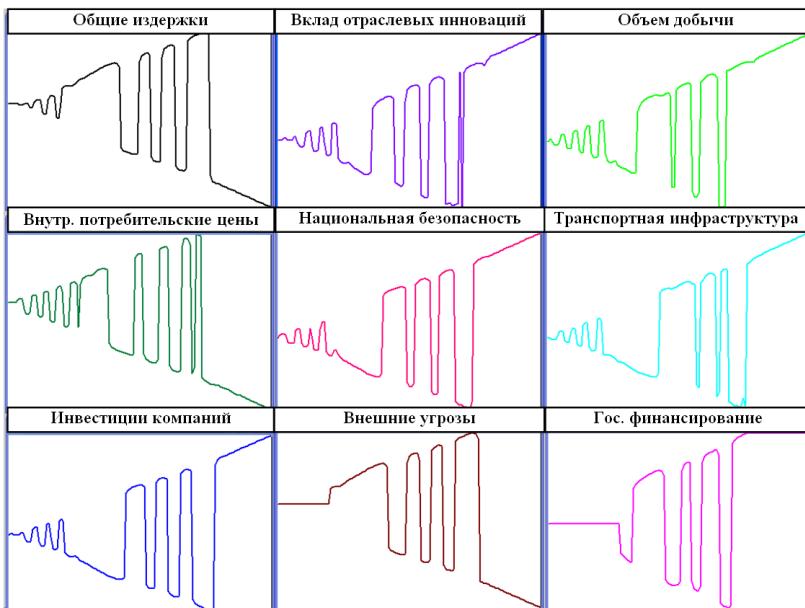


Рис. 5. Сценарий 2. Результаты моделирования

При благоприятном изменении ситуации и ее стабилизации в момент начала снижения значений фактора «Влияние внешних угроз» происходит деактивация фактора «Государственное финансирование» (на основе результатов прогнозного мониторинга значения фактора «Внешние угрозы»), что отражает возрастание роли рыночных механизмов экономического регулирования (рост значения фактора «Инвестиции нефтегазовых компаний»).

Результаты имитационного моделирования показали, что рассматриваемая стратегия управления оказывает положительное влияние и поддержку таким ключевым факторам модели, как: «Национальная безопасность», «Добыча», «Развитие транспортной инфраструктуры», а также приводит к снижению зна-

чений факторов «Общие издержки» и «Внутренние потребительские цены».

Сценарий 3. В данном сценарии рассматривается ситуация, когда решение об усилении государственной поддержки и, соответственно, повышении роли государства в управлении развитием ресурсной базы АЗРФ происходит еще раньше – на стадии проявления устойчивых негативных тенденций изменения фактора «Общие издержки» в течение ограниченного периода времени, диагностируемого по результатам анализа данных упреждающего мониторинга развития обстановки.

На рис. 6 представлены графические зависимости, а на рис. 7 – аналитические результаты моделирования, отражающие изменения расчетных значений ключевых факторов модели (здесь зеленая штриховка соответствует росту значения фактора, красная – падению, синяя отражает стабильное значение отображаемого фактора).

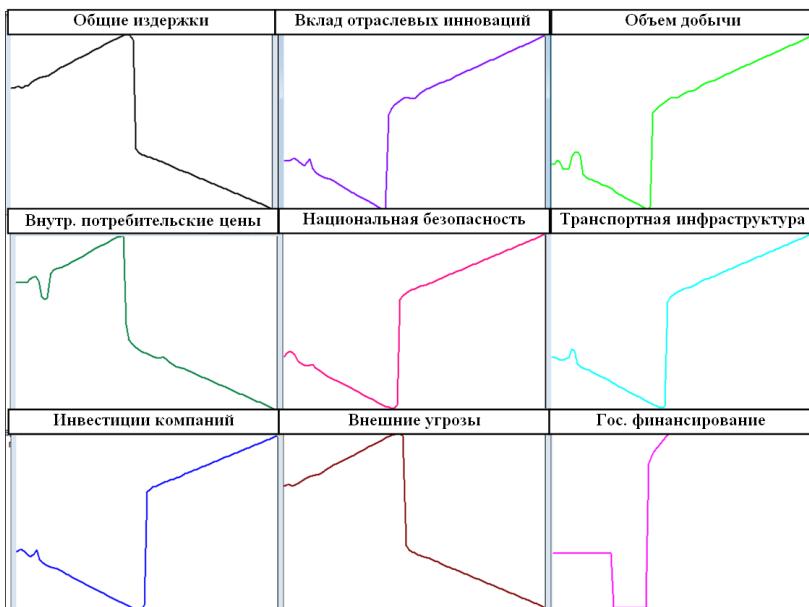


Рис. 6. Сценарий 3. Результаты моделирования

На рис. 7 также в качестве примера представлен и фрагмент автоматически сформированного ПАК текстового описания четвертого события в сценарии (средства программно-аналитического комплекса позволяют формировать и привязывать к каждому фактору соответствующее контекстное описание тенденции его изменения, определяемое в словаре модели на стадии ее формирования средствами автоматизации).

Результаты моделирования показали, что опережающая реакция системы управления на негативные тенденции привела к значительному улучшению обстановки. Причем усиление влияния государства на процессы освоения ресурсов АЗРФ имело ограниченный по времени характер и далее, после улучшения ситуации, осуществился возврат к рыночному механизму, эффективно функционирующему в условиях стабильности.



Рис. 7. Сценарий 3. Результаты моделирования
(аналитическая форма)

Одновременно с этим проявление негативных тенденций развития исследуемой ситуации и, как результат, ухудшение обстановки в целом все же возможно, но только при резкой интенсификации внешних деструктивных воздействий, остроту которых, как и тяжесть последствий, рассматриваемая система управления при наличии соответствующих ресурсов принципиально способна существенно снизить.

5. Заключение

Приведенные выше результаты сценарного моделирования являются лишь одним из первых шагов на пути решения проблем повышения эффективности управления развитием Арктической зоны Российской Федерации. Многоаспектность и многоплановость целей развития АЗРФ требует разработки целого ряда детализированных сценарных моделей управления процессами их достижения, отражающих специфику различных взаимосвязанных задач и проектов освоения территорий и ресурсов российского Севера, а также позволяющих оценивать эффективность возможных путей противодействия внешним и внутренним угрозам и анализировать влияние связанных с ними рисков.

Проведенные модельные исследования показали, что использование сценарного подхода в процессе решения рассматриваемых задач в принципе позволяет проводить комплексный многофакторный опережающий анализ эффективности стратегических управлеченческих решений в рассматриваемой предметной области в условиях риска и неопределенности, а также осуществлять информационную поддержку данных процессов.

В частности, полученные результаты показали, что в крайне сложной экономической ситуации, вызванной внешним санкционным давлением, наиболее эффективной является управлеченческая стратегия, основанная на существенном и своевременном (в идеале – опережающем) усилении влияния государства на процессы освоения ресурсов АЗРФ, а также наращивании финансовой и иных видов поддержки реализуемых на территории российского Севера нефтегазовых проектов, осуществляемых экономическими субъектами различных форм собственности.

В сложившихся условиях только государство как субъект управления верхнего уровня иерархии, находясь «выше» частных интересов и экономических критериев компаний и предприятий, способно обеспечить достижение стратегических целей социально-экономического развития арктических территорий, решая на межотраслевом и межрегиональном уровне

крайне сложные проблемы устойчивого социально-экономического и инновационного развития страны в целом и обеспечения ее технологической независимости.

Одновременно с этим, по мере укрепления и адаптации экономики нашей страны к реалиям сегодняшнего дня, задачей государства в качестве инвестора и регулятора преимущественно становится создание благоприятных условий для самостоятельного и инициативного развития бизнеса в желаемом направлении без прямого и масштабного вмешательства.

Дальнейшее развитие фундаментальных и прикладных междисциплинарных исследований в рассматриваемой области обеспечит возможность повышения качества и результативности решения широкого круга методологических и практических задач планирования и управления процессами реализации государственной политики Российской Федерации в Арктике.

Литература

1. АКОФФ Р. *Искусство решения проблем*. – М.: Мир, 1982. – 230 с.
2. АНСОФФ И. *Стратегическое управление*. – М.: Экономика, 1989. – 519 с.
3. АХРЕМЕНКО А.С. *Сценариотехника в аналитическом обеспечении процедуры принятия политических решений* // Вестник Московского университета. Серия 12. Политические науки. – 1997. – № 5. – С. 93–107.
4. БЕЛЯКОВИЧ Н.Н. *Сценариотехника как метод политического прогнозирования* // Право и демократия. Сб. научных трудов Белорусского гос. ун-та. – 2002. – Вып. 12. – С. 3–8.
5. В Москве прошло первое заседание президиума научно-экспертного совета Государственной комиссии по вопросам развития Арктики / Официальный сайт Правительства Российской Федерации. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://government.ru/news/48907/> (дата обращения: 30.06.23).
6. ДРАНКО О.И., НОВИКОВ Д.А., РАЙКОВ А.Н., ЧЕРНОВ И.В. *Управление развитием региона. Моделирование возможностей*. – М.: URSS, ООО «ЛЕНАНД», 2023. – 432 с.

7. КАЧЕЛИН А.С. *Научно-технологическое развитие в нефтегазовой отрасли России в условиях глобальной нестабильности* // Neftegaz.RU. – 2023. – №3. – С. 80–92.
8. КОТОВ А.В. *Перспективы развития ключевых арктических проектов РФ в условиях санкций* // Научно-аналитический вестник Института Европы РАН. – 2022. – №5. – С. 113–123.
9. КРАСНОВ Б.И. *Анализ политической ситуации. Метод сценариев* // Социально-полит. журнал. – 1997. – №5. – С. 91–93.
10. КУЛЬБА В.В., КОВАЛЕВСКИЙ С.С., КОНОНОВ Д.А., ЧЕРНОВ И.В. и др. *Проблемы обеспечения экономической безопасности сложных социально-экономических систем*. – М.: ИПУ РАН, 2000. – 126 с.
11. *Модели и методы анализа и синтеза сценариев развития социально-экономических систем: в 2-х кн.* / Под ред. В.Л. Шульца и В.В. Кульбы. – М.: Наука, 2012. Кн. 1. – 304 с., кн. 2. – 358 с.
12. САЯПИН В.О. *О сценарном подходе к прогнозированию* // Вестник Тамбовского университета. Серия: гуманитарные науки. – 2010. – № 10 (90). – С. 164–168.
13. СЕРОВА Н.А., СЕРОВА В.А. *Транспортная инфраструктура российской Арктики: специфика функционирования и перспективы развития* // Проблемы прогнозирования. – 2021. – № 2(185). – С. 142–151.
14. ФЕОФАНОВ К.А. *Сценарные возможности современного прогнозирования и управления* // Вестник МГТУ «Станкин». – 2009. – №4(8). – С. 126–132.
15. ЦЫГИЧКО В.Н., ЧЕРЕШКИН Д.С. *Сценарный метод прогнозирования и оценки рисков возникновения негативных последствий стратегических решений в организационных системах* // Труды ИСА РАН. – 2018. – Т. 68, № 4. – С. 74–83.
16. ЧЕРНОВ И.В. *Повышение эффективности управленческих решений на основе использования программно-аналитического комплекса сценарного анализа и прогнозирования* // Вестник РГГУ. Серия: Экономика. Управление. Право. – 2018. – №1(11). – С. 40–57.
17. ШУЛЬЦ В.Л., БОЧКАРЕВ С.А., КУЛЬБА В.В., ШЕЛКОВ А.Б. и др. *Сценарное исследование проблем обеспечения общественной безопасности в условиях цифровизации*. – М.: Проспект, 2020. – 240 с.

18. ШУЛЬЦ В.Л., КУЛЬБА В.В., ЧЕРНОВ И.В., ШЕЛКОВ А.Б. *Сценарный анализ проблем управления обеспечением безопасности сложных социально-экономических систем* // Труды 15-й Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2022). – М.: ИПУ РАН, 2022. – С. 55–66.
19. ШУЛЬЦ В.Л., КУЛЬБА В.В., ШЕЛКОВ А.Б., ЧЕРНОВ И.В. *Диагностика и сценарный анализ угроз социально-экономическому развитию Арктической зоны Российской Федерации*. – М.: ИПУ РАН, 2012. – 164 с.
20. ШУЛЬЦ В.Л., КУЛЬБА В.В., ШЕЛКОВ А.Б., ЧЕРНОВ И.В. *Методы эффективного управления социально-экономическим развитием Арктических территорий* // Труды 12-й Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2019). – М.: ИПУ РАН, 2019. – С. 166–178.
21. ШУЛЬЦ В.Л., КУЛЬБА В.В., ШЕЛКОВ А.Б., ЧЕРНОВ И.В. *Сценарный анализ в управлении geopolитическим информационным противоборством*. – М.: Наука, 2015. – 542 с.
22. ШУЛЬЦ В.Л., КУЛЬБА В.В., ШЕЛКОВ А.Б., ЧЕРНОВ И.В., БОГАТЫРЕВА Л.В. *Анализ методов группового управления развитием Арктической зоны Российской Федерации* // Тренды и управление. – 2017. – №4. – С. 35–51.
23. HOGWOOD B.W., GUNN L.A. *Policy analysis for the real world*. – New York: Oxford University Press, 1984. – 289 p.
24. KAHN H. *On escalation: Metaphors and scenarios*. – New York: Praeger, 1965. – 308 p.
25. KAHN H., WIENER A. *The year 2000: A framework for speculations on the next 33-year*. – New York: Macmillan, 1967. – 431 p.

SCENARIO TECHNOLOGIES IN MANAGING THE DEVELOPMENT OF THE RUSSIAN FEDERATION ARCTIC ZONE OIL AND GAS COMPLEX

Nikita Komanich, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, senior software engineer
(komanichnickitca@gmail.com).

Igor Chernov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., leading researcher
(ichernov@gmail.com).

Aleksey Shelkov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., leading researcher (abshelkov@gmail.com).

Abstract: The paper deals with the scenario study of the problems of increasing the effectiveness of managing the Russian North socio-economic development in the context of sanctions pressure. As a research tool, a developed mathematical model of scenario simulation and forecasting is used. The main advantage of scenario approach is the possibility of foreseeing the most important events in the process of large-scale systems development managing, as well as evaluating management decisions efficiency and identifying new opportunities to achieve the set of management goals in conditions of incomplete information and uncertainty. Based on signed digraphs mathematical model a scenario research technology has been developed, which is the basis of a designed simulation modeling software complex. A basic multifactorial scenario model for managing the development of natural resources of the Russian Federation Arctic zone has been designed. The results of the study of the developed scenarios in particular, showed that in difficult economic situation caused by external sanctions pressure, the most effective is a management strategy based on an expansion of the scale of financial and other types of support for oil and gas projects implemented in the Russian North by various economic entities.

Keywords: management, scenario analysis, simulation modeling, the Arctic zone of the Russian Federation, state support, oil and gas industry.

УДК 021.8 + 025.1

ББК 78.34

DOI: 10.25728/ubs.2023.101.5

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.С. Манделем.*

Поступила в редакцию 21.08.2023.

Опубликована 30.11.2023.

ЭВОЛЮЦИОННАЯ ИГРА С УЧЕТОМ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ И МНЕНИЯМИ ИГРОКОВ

Лориц Е. М.¹, Губар Е. А.²

(Санкт-Петербургский Государственный Университет,
Санкт-Петербург)

Эволюционные игры являются развивающимся подразделом теории игр, который применяется при изучении адаптации больших, но конечных популяций к изменениям окружающей среды. При этом предполагается, что каждый из агентов не оказывает значительного влияния на систему. Теория эволюционных игр находит широкое применение во многих областях науки. В частности, в биологии, медицине и моделировании беспроводных сетей. В данной работе исследуется эволюционная игра с двумя уровнями взаимодействия агентов популяции. На первом уровне изменение состояния популяции зависит от изменения состояния окружающей среды, увеличения или уменьшения доступных для агентов ресурсов. На втором уровне изменение состояния популяции зависит от мнений агентов о состоянии окружающей среды. Эти уровни образуют двухуровневую структуру принятия решений, где изменение одного параметра системы, например, состояния среды, влечет за собой изменение остальных элементов системы, т.е изменение состояния популяции и мнений агентов. В рамках исследования был проведен анализ модифицированной эволюционной игры с учетом влияния состояния окружающей среды и мнений агентов, разработаны вычислительные процедуры на языке MATLAB и проведены две серии численных экспериментов.

Ключевые слова: эволюционные игры, динамика мнений, репликативная динамика, имитационная динамика.

1. Введение

Эволюционные игры являются развивающимся подразделом теории игр [11, 18]. Эволюционные игры применяются при моделировании изменений в больших, но конечных популяциях, где все агенты обладают биологическими, социальными или экономическими особенностями, которые определяют их тип поведе-

¹ Екатерина Михайловна Лориц, студент (kate.lorits@gmail.com).

² Елена Алексеевна Губар, к.ф.-м.н., доцент (e.gubar@spbu.ru, alyona.gubar@gmail.com).

ния. Кроме того, считается, что каждый из агентов не оказывает существенного влияния на состояние популяции.

Теория эволюционных игр находит широкое применение во многих областях науки. Например, в 2022 году опубликована книга [9], в которой собрано большое количество эволюционных моделей реальных биологических процессов. Кроме этого, эволюционные игры применяются для моделирования взаимодействия большого числа агентов в сети [2, 8, 15, 17]. В медицине эволюционные игры могут применяться, например, для поиска методов борьбы с раком [7, 10, 14] или для решения задачи о вакцинации населения [1, 22].

В работах [6, 13, 20] рассматривается популяция и происходящие в ней изменения с учетом окружающей среды и ее состояния. Кроме того, активно изучается влияние информации о среде на популяцию [4, 12, 21]. Следуя этой идеи, в данной работе исследуется, как состояние окружающей среды и мнение агентов о состоянии среды влияют на динамику изменения состояния популяции. Популяция, окружающая среда и мнения агентов образуют структуру, где изменение одного параметра системы, отвечающего за состояние среды, популяции или мнений агентов, влечет за собой изменение остальных элементов системы. Состояние среды зависит от распространенности того или иного типа поведения в популяции. Состояние популяции зависит от популярности мнений агентов в популяции. Популярность мнений агентов зависит от состояния среды и популяции. В данной работе в качестве управляющего воздействия рассматривается влияние среды и мнений агентов на популяцию.

2. Постановка эволюционной игры

Рассмотрим популяцию размера N , которая существует в ограниченном пространстве. Предполагается, что изменение состояния популяции происходит в результате случайных попарных взаимодействий между ее агентами. Причем считается, что число агентов велико, но при этом каждый отдельный агент не оказывает значительного влияния на популяцию [16, 19]. Еще

одним предположением является то, что в популяции присутствует два типа поведения, которых могут придерживаться агенты. Выбор агентом i -го типа поведения аналогичен использованию i -й чистой стратегии в бескоалиционной игре и приводит к разбиению популяции на две подгруппы. Агенты каждой подгруппы запрограммированы использовать одинаковую чистую стратегию. Состояние популяции определяется как вектор $x_N(t) = (x_1(t), x_2(t))$, где каждая компонента $x_i(t)$ – это доля популяции, использующая чистую стратегию i . Этот вектор может рассматриваться в качестве смешанной стратегии популяции [19]. Обозначим $x(t) = x_1(t)$, тогда $x_2(t) = 1 - x(t)$. Под выигрышами агентов подразумевается количество потомков (в биологических системах) или количество последователей (в экономических и социальных системах), которые придерживаются чистой стратегии i . С течением времени в популяции происходят случайные попарные встречи между агентами. Результаты этих встреч могут быть описаны биматричной игрой [5]. По традиции в эволюционных играх принято все процессы рассматривать от лица первого игрока, поэтому в дальнейшем все формулируется относительно первого игрока.

Обозначим как e^i вектор, отвечающий i чистой стратегии игрока. У данного вектора i -й элемент единица, а все остальные – нули. Введем функцию $u(e^i, x_N) = e^i \cdot Ax$ как ожидаемый выигрыш агента, использующего чистую стратегию i , при встрече со случайным оппонентом. Этот выигрыш зависит от вектора состояния популяции $x_N(t) = (x(t), 1 - x(t))$. Соответствующий средний выигрыш популяции определяется на основании выигрыша случайно выбранного агента

$$(1) \quad u(x_N, x_N) = \sum_{i \in K} x_i u(e^i, x_N).$$

Изменение состава популяции соответствует изменению доли агентов, придерживающихся чистой стратегии i . Данные изменения описываются с помощью уравнения репликативной динамики (replicator dynamic) [13], в зависимости от долевого распределения игроков в популяции x_N и матрицы выигрышей первого

игрока A :

$$(2) \quad \dot{x} = x(1-x)(u(e^1, x_N) - u(e^2, x_N)).$$

В данной работе предполагается, что популяция зависит от воздействия окружающей среды, которая может оказывать влияние на ожидаемые выигрыши игроков. В качестве окружающей среды рассматриваются ресурсы, доступные для агентов. Состояние среды описывается с помощью параметра $n(t)$, $n \in [0, 1]$, где значение $n = 0$ ($n = 1$), если среда полностью истощена (пополнена). Изменение состояние среды в зависимости от изменения долей агентов популяции, придерживающихся той или иной стратегии, определяется динамикой (3), предложенной в статье [13]:

$$(3) \quad \dot{n} = n(1-n)(\theta x - (1-x)),$$

где $\theta > 0$ параметр, отражающий скорость, с которой агенты, придерживающиеся первой чистой стратегии восполняют ресурсы среды.

Связь между популяцией и состоянием среды устанавливается с помощью матрицы выигрышей [20]

$$(4) \quad A_n = nA_1 + (1-n)A_0.$$

В статье [13] исследуется изменение состава популяции на основе использования репликативной динамики, которая учитывает обратную связь с окружающей средой и зависит от общественного мнения. При этом мнение отражает информированность агентов популяции о состоянии окружающей среды. В отличие от исследования [13] в текущей работе предполагается, что каждый агент имеет свое личное мнение (представление) о состоянии окружающей среды, но не обладает достоверной информацией об этом состоянии.

Рассмотрим случай, при котором агент может придерживаться одного из двух мнений m_1 или m_2 независимо от стратегии, которую он выбирает. Распределение мнений в популяции определим как вектор $y_N(t) = (y_1(t), y_2(t))$, где каждая компонента $y_i(t)$ – это доля агентов популяции, придерживающихся мнения m_i . Для удобства обозначим $y_1 = y(t)$, $y_2(t) = 1 - y(t)$. Процесс распределения мнений в популяции может быть описан с помощью динамики средних (mean dynamic), которая позволяет опи-

сывать изменения происходящие в популяции с помощью протокола пересмотра решений [16].

Поскольку любой протокол пересмотра решений предполагает наличие шума, который влечет ошибки в оценивании ожидаемого выигрыша оппонента, предполагается, что агенты могут считать мнение оппонента более или менее весомым, в зависимости от стратегии оппонента.

Введем в рассмотрение матрицу B , элементы которой b_{ij} представляют собой степень доверия агента с мнением i агенту, который придерживается стратегии j . На основе протокола попарной имитации [15] был составлен имитационный протокол, используемый для динамики изменения популярности мнений в популяции:

$$(5) \quad p_{ij} = \left[y_j \sum_{l=1}^2 x_l u(e^l, x_N, A_n) b_{jl} - y_i \sum_{l=1}^2 x_l u(e^l, x_N, A_n) b_{il} \right]_0^1,$$

где $[z]_0^1 = \max(0, \min(z, 1))$, т.е $p_{ij} \in [0, 1]$ [15].

В данном выражении функция выигрыша $u(e^i, x_N, A_n)$ показывает зависимость от изменяющейся матрицы выигрышей.

Таким образом, динамика, описывающая изменение популярности мнений в популяции – это динамика средних, построенная на протоколе попарной имитации (5), – принимает вид

$$(6) \quad \dot{y} = (1 - y)p_{21} - y p_{12}.$$

Предполагается, что состояние популяции изменяется в зависимости от популярности каждого из мнений о состоянии окружающей среды в популяции. В соответствии с этим предположением матрица выигрышей первого игрока может быть переписана в виде $A_y = yA_1 + (1 - y)A_0$, который получается из матрицы (4), при замене параметра n , отражающего состояние окружающей среды, долей игроков y , которые придерживаются мнения m_1 .

Таким образом, эволюционную игру с обратной связью окружающей среды и мнением можно представить в виде

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{x} = x(1 - x)(u(e^1, x_N, A_y) - u(e^2, x_N, A_y)), \\ \dot{n} = n(1 - n)(\theta x - (1 - x)), \\ \dot{y} = (1 - y)p_{21} - y p_{12}. \end{cases}$$

В дифференциальном уравнении для популяции (2) используется матрица A_y , поскольку предполагается, что агенты принимают решение на основе мнения об окружающей среде и, соответственно, их выигрыш определяется мнениями. А в дифференциальном уравнении для описания динамики мнений (6) используется протокол попарной имитации, который зависит от матрицы A_n ; в нашем случае предполагается, что мнение агентов зависит от состояния среды и выигрыш агентов в этом состоянии. Таким образом, динамика изменения популяции зависит от изменения мнений агентов, а динамика мнений зависит от состояния окружающей среды.

3. Примеры

Пример 1. «Ястреб–Голубь».

В рамках текущего эксперимента для системы (7) в качестве базовой игры, которая описывает взаимодействия агентов, выбирается игра «Ястреб – Голубь». Параметр v определяет ценность ресурса, параметр c – затраты на его получение.

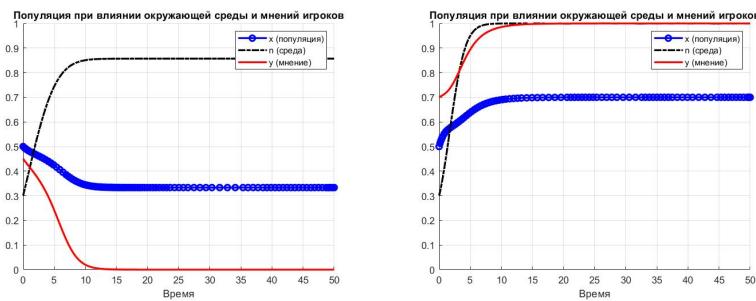
Поскольку в модели рассматривается изменение состояния популяции в зависимости от мнения агентов, в соответствии с формулой (4) необходимо ввести в рассмотрение две матрицы выигрышей:

$$(8) \quad A_0 = \begin{pmatrix} \frac{v_0 - c_0}{2} & v_0 \\ 0 & \frac{v_0}{2} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} \frac{v_1 - c_1}{2} & v_1 \\ 0 & \frac{v_1}{2} \end{pmatrix}.$$

Для игры «Ястреб – Голубь» характерны три положения равновесия по Нэшу: два асимметричных равновесия в чистых стратегиях (e^1, e^2) , (e^2, e^1) и одно симметричное равновесие в смешанных стратегиях (x_N, x_N) , где $x_N = (\frac{v}{c}, 1 - \frac{v}{c})$ [1]. В этом случае средний выигрыш популяции $u(x_N, x_N) = \frac{v}{2} - \frac{v^2}{2c}$.

В численном эксперименте используются следующие параметры для системы (7): скорость пополнения ресурсов ястребами $\theta = 2$, состояние окружающей среды, в начальный момент времени $n(0) = 0,3$, параметры матриц (8) принимают значения

$v_0 = 4$, $c_0 = 12$, $v_1 = 7$, $c_1 = 10$. Предполагается, что агенты, которые придерживаются мнения m_1 (m_2), доверяют только ястребам (голубям). Матрица B диагональная со значениями 0,5 на диагонали. Агенты популяции в начальный момент времени равномерно распределены между стратегиями ястреба и голубя.



a) $y(0) = 0,45$

б) $y(0) = 0,7$

Рис. 1. Зависимость состояния системы от начального значения части популяции, придерживающейся мнения m_1 , $y(0)$; $x(0) = 0,5$, $n(0) = 0,3$.

На рис. 1 представлено поведение популяции в зависимости от распределения агентов по мнениям. Наблюдается, что при начальных значениях доли агентов популяции, придерживающихся мнения m_1 , меньше 0,5, популяция приходит к стационарному положению, где $x_N = (0,33; 0,67)$ (рис. 1 а)). В то время как при начальном значении доли агентов популяции, придерживающихся мнения m_1 , не меньше 0,5, система приходит к стационарному положению, где $x_N = (0,7; 0,3)$ (рис. 1 б)).

Пример 2. Дилемма заключенного.

В рамках текущего эксперимента в качестве базовой игры, которая описывает взаимодействия агентов, выбирается игра «Дилемма заключенного» в ее экономической интерпретации. В данной игре первая стратегия соответствует выбору игрока сотрудничать, а вторая – не сотрудничать.

Поскольку в модели рассматривается изменение состояния

популяции в зависимости от мнения агентов, в соответствии с формулой (4) необходимо ввести в рассмотрение две матрицы выигрышей:

$$(9) \quad A_0 = \begin{pmatrix} 3,5 & 1 \\ 2 & 0,75 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4,5 & 1,25 \end{pmatrix},$$

для элементов которых верны соотношения

$$(10) \quad a_{11}^0 > a_{21}^0, \quad a_{12}^0 > a_{22}^0, \quad a_{11}^1 < a_{21}^1, \quad a_{12}^1 < a_{22}^1.$$

Для игры «Дilemma заключенного» характерно существование одного состояния равновесия по Нэшу, причем для игры, которая задается матрицей $A_1(A_0)$, с учетом соотношений (10) это состояние $(e^2, e^2)((e^1, e^1))$.

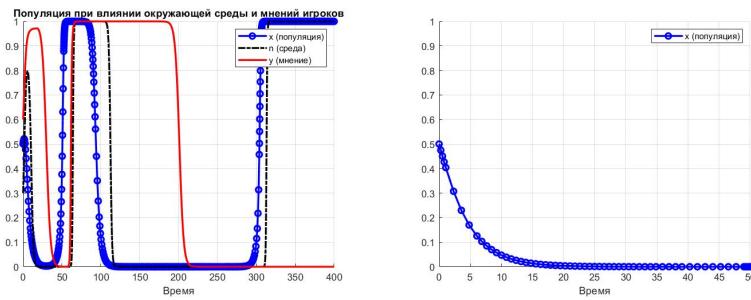


Рис. 2. Иллюстрация состояния системы: а) с зависимостью от среды и распределения агентов между мнениями; $x(0) = 0,5, y(0) = 0,6, n(0) = 0,3$; б) без влияния среды и мнений; $x(0) = 0,5$, предполагается, что $n = 1$

В рамках текущего численного эксперимента параметры системы (7) принимают значения: скорость пополнения ресурсов сотрудничающими агентами, $\theta = 2$, матрицы выигрышей агентов задаются соотношением (9). Предполагается, что агенты, которые придерживаются мнения m_1 (m_2), доверяют только тем агентам, которые предпочитают сотрудничать (не сотрудничать). Матрица доверия B диагональная со значениями 0,5 на диагонали. В начальный момент времени в популяции одинаковое количество агентов, которые сотрудничают и не сотрудничают.

Как видно из графиков на рис. 2а) в начальный момент времени доля сотрудничающих агентов убывает до нуля, в то время как среда начинает обогащаться. Но при увеличении доли агентов популяции, отказывающихся от сотрудничества, среда убывает до нуля. После нескольких колебаний система приходит в состояние равновесия (e^1, e^1) , все игроки придерживаются мнения m_2 , среда восстановлена, т. е. $n = 1$.

4. Заключение

Рассматривается структура, которая содержит в себе среду, популяцию агентов, распределенную между стратегиями, и ту же популяцию, но распределенную между мнениями. Эти три объекта различной природы могут быть рассмотрены как по отдельности, так и в совокупности, образуя связь, где изменение величин долей агентов, придерживающихся той или иной чистой стратегии, влечет за собой изменение состояния окружающей среды. Выигрыши агентов зависят от состояния среды, поэтому агенты учитывают информацию об его изменении при помощи мнений, которые зависят и от состояния среды, и от состояния популяции.

Помимо этого стоит отметить, что в одной среде может существовать несколько популяций. Изучение сосуществования нескольких популяций в одной среде является темой дальнейшего исследования.

В результате проведения серии численных экспериментов было обнаружено, что окружающая среда и мнения агентов оказывают значительное влияние на стационарное положение популяции. В большинстве случаев изменение начального значения параметра популяции, среды или популярности мнений вызывает изменение стационарного положения, к которому приходит система. Выбор матрицы доверия также играет большую роль в результатах моделирования изменений, происходящих в популяции в зависимости от состояния окружающей среды и мнений агентов.

В ходе дальнейшего исследования планируется распространить рассмотренный в работе подход и на другие классы бимат-

ричных игр, провести большее количество экспериментов и найти тренды, определяющие зависимость популяции от изменения состояния окружающей среды и изменения мнений агентов.

Литература

1. КОЛЕСИН И.Д., ГУБАР Е.А., ЖИТКОВА Е.М. *Стратегии управления в медико-социальных системах*. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2014. – 128 с.
2. КУРНОСЫХ З.А., ГУБАР Е.А. *Моделирование эволюционной игры с учетом сетевой структуры* // Процессы управления и устойчивость. – 2017. – Т. 4, № 1. – С. 631–635.
3. ЛОРИЦ Е.М. *Эволюционная игра с учетом обратной связи с окружающей средой и мнениями игроков* // Процессы управления и устойчивость. – 2023. – Т. 10, № 1. – С. 462–466.
4. МАЗАЛОВ В.В., ДОРОФЕЕВА Ю.А., КОНОВАЛЬЧИКОВА Е.Н. *Моделирование влияния среди участников образовательного коллектива* // Вестник Санкт-Петербургского университета. – 2019. – Т. 15, Вып. 2. – С. 259–273.
5. ПЕТРОСЯН Л.А., ЗЕНКЕВИЧ Н.А., ШЕВКОПЛЯС Е.В. *Теория Игр*. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 432 с.
6. ARGASINSKI K., BROOM M. *Evolutionary stability under limited population growth: Eco-evolutionary feedbacks and replicator dynamics* // Ecol. Complex. – 2017. – Vol. 34, No. 6.
7. BAYER P., GATENBY R. ET AL. *Coordination games in cancer* // PLoS ONE. – 2022. – Vol. 17, Iss. 1. – Art. e0261578.
8. BROOM M., KRIVAN V. *Two-strategy games with time constraints on regular graphs* // Journal of Theoretical Biology. – 2020. – Vol. 506. – Art. 110426.
9. BROOM M., RYCHTAR J. *Game-Theoretical Models in Biology*. – CRC Press, 2022. – 591 p.
10. BROWN J.S., THUIJSMAN F. ET AL. *The contribution of evolutionary game theory to understanding and treating cancer* // Dynamic Games and Applications. – 2022. – Vol. 12. – P. 313–342.

11. CRESSMAN R. *Evolutionary Dynamics and Extensive Form Games*. – Cambridge: MIT Press, 2003. – 316 p.
12. MENG Y., BROOM M., LI A. *Impact of misinformation in the evolution of collective cooperation*. – 2023.
13. PAARPORN K., EKSIN C. ET AL. *Optimal control policies for evolutionary dynamics with environmental feedback* // IEEE Conf. on Decision and Control (CDC). – 2018. – P. 1905–1910.
14. PRESSLEY M., SALVIOLI M. *Evolutionary dynamics of treatment-induced resistance in cancer informs understanding of rapid evolution in natural systems* // Frontiers in Ecology and Evolution. – 2021. – Vol. 9. – Art. 681121.
15. RIEHL J.R., CAO M. *Control of stochastic evolutionary games on networks* // IFAC. – 2015. – Vol. 48, Iss. 22. – P. 76–81.
16. SANDHOLM W.H. *Population Games and Evolutionary Dynamics*. – Cambridge: MIT Press, 2010. – 616 p.
17. TEMBINE H., ALTMAN E., EL-AZOUZI R., HAYEL Y. *Evolutionary games in wireless networks* // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics. – 2009. – Vol. 40. Iss. 3. – P. 634–646.
18. VINCENT T.L., BROWN J.S. *Evolutionary Game Theory, Natural Selection, and Darwinian Dynamics*. – New York: Cambridge University Press, 2005. – 400 p.
19. WEIBULL J.W. *Evolutionary Game Theory*. – Cambridge: MIT Press, 1995. – 265 p.
20. WEITZ J.S., EKSIN C., PAARPORN K. ET AL. *An oscillating tragedy of the commons in replicator dynamics with game-environment feedback* // PNAS. – 2016. – Vol. 113, No 47. – P. E7518–E7525.
21. ZHILIANG Z., YULI Z. ET AL. *Evolutionary game dynamics of the competitive information propagation on social networks* // Complexity. – 2019. – Vol. 2019. – Art. 8385426.
22. ZHU Q., GUBAR E., ALTMAN E. (EDS.). *Special Issue on Modeling and Control of Epidemics*. // Dynamic Games and Applications. – 2022. – Vol. 12.

AN EVOLUTIONARY GAME WITH ENVIRONMENTAL FEEDBACK AND PLAYERS' OPINIONS

Ekaterina Lorits, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint Petersburg State University, St. Petersburg, student (kate.lorits@gmail.com).

Elena Gubar, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Ph.d, associated professor (e.gubar@spbu.ru, alyona.gubar@gmail.com).

Abstract: Evolutionary games are a developing sub-field of game theory. This branch of game theory is used in the study of the adaptation of large, but finite, populations of agents to changes in the environment. It assumes that each agent has no significant influence on the system. Many scientific areas use the theory of evolutionary games. In particular, it is used in biology, medicine and the modelling of wireless networks. In this paper we study an evolutionary game with two levels of interaction between population agents. At the first level, changes in the population state depend on changes in the environment and on increasing or decreasing the resources available to the agents. At the second level, the population's state changes according to how the agents evaluate the state of the environment. These levels make up a decision-making structure with two levels. A change in one parameter of the system, for example the state of the environment, causes a change in the other elements of the system, that is, a change in the state of the population and the opinions of the agents. The study involves the analysis of a modified evolutionary game taking into account the influence of the environment and the opinions of the agents. It also involves the development of computational methods in MATLAB and two sets of numerical experiments.

Keywords: evolutionary games, opinion dynamics, replicative dynamics, imitation dynamics.

УДК 519.83

ББК 22.18

DOI: 10.25728/ubs.2023.106.6

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.Г. Чхартишвили.*

Поступила в редакцию 30.08.2023.

Дата опубликования 30.11.2023.

ОПТИМИЗАЦИЯ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ С ЛОКАЛЬНЫМИ ГЕНЕРАТОРАМИ И НАКОПИТЕЛЯМИ ЭНЕРГИИ

Марьин О. Ю.¹, Плохотнюк А. Н.²

(Ярославский государственный технический университет,
Ярославль)

В работе рассмотрена проблема оптимизации энергопотребления предприятия, использующего для энергоснабжения не только центральную энергосистему, но и локальные генераторы и накопители энергии. Для решения этой проблемы в работе предложен эвристический алгоритм оптимального планирования энергопотребления предприятия, включающий решение задачи линейного программирования. Для уменьшения риска существенного расхождения планового и фактического профилей энергопотребления в работе предлагаются использовать алгоритм оптимального планирования энергопотребления со сдвигающимся шагом. Особенностью задачи оптимального планирования энергопотребления предприятия, решаемой в данной работе, является использование дополнительных условий, выполнение которых при достаточной мощности локальных генераторов и накопителей энергии приводит к сглаживанию оптимального профиля энергопотребления предприятия. Это облегчает реализацию такого профиля энергопотребления предприятия, так как не требует резкого изменения рабочих режимов, перенастройки оборудования и изменения интенсивности работы персонала предприятия. Предложенный авторами эвристический алгоритм позволяет реализовать выполнение дополнительных условий и при этом избежать сведения задачи оптимального планирования энергопотребления предприятия к задаче линейно-целочисленной оптимизации. В работе выполнена реализация примера оптимизации энергопотребления небольшого предприятия, на территории которого расположены два потребителя электроэнергии и различные локальные генераторы и накопители энергии.

Ключевые слова: оптимизация энергопотребления, оптимальное планирование энергопотребления, возобновляемые источники энергии, micro smart grid, линейное программирование.

1. Введение

В настоящее время многие предприятия приобретают локальные генераторы, в том числе возобновляемые (Renewable

¹ Олег Юрьевич Марьин, к.т.н., доцент (maryasin2003@list.ru).

² Артем Николаевич Плохотнюк, аспирант (admin@nixson.ru).

Energy Sources – RES), и накопители энергии с целью снижения оплаты за электроэнергию, уменьшения выбросов парниковых газов и повышения надежности электроснабжения своих энергопотребителей. Это обусловило появление локальных малых интеллектуальных сетей (Micro Smart Grid – MSG) предприятий [5, 15, 23]. Все генераторы энергии сети MSG предприятия разделим на RES-генераторы и на генераторы на ископаемом топливе (Fossil Energy Sources – FES). В качестве RES-генераторов для энергоснабжения предприятий чаще всего используются массивы PV-панелей и ветряные турбины. В качестве FES-генераторов могут выступать дизельгенераторы, газапоршневые генераторы, микротурбины, когенераторы (Combined Heat and Power – CHP) и микрокогенераторы (micro CHP), генераторы на топливных элементах (Fuel Cell Generators). Энергия от RES-генераторов может потребляться для энергоснабжения предприятия непосредственно или через распределенные накопители энергии (Distributed Energy Storage – DES).

Цена на электроэнергию для потребителей Российской Федерации, рассчитывающихся за электроэнергию по 3–6 ценовым категориям, складывается из нерегулируемой составляющей оптового рынка электроэнергии (мощности), регулируемых тарифов на услуги по передаче электрической энергии, сбытовых надбавок гарантирующих поставщиков и платы за иные услуги. Доля нерегулируемой части в конечной стоимости электроэнергии для потребителя зависит от уровня напряжения и максимальной мощности его энергопринимающих устройств. Эта доля может изменяться от 38% для объектов мощностью до 670 кВт, подключенных на низком напряжении (менее 0,4 кВ), до 60% для объектов присоединенной мощностью более 10 МВт на высоком напряжении (110 кВ и выше) [26].

Нерегулируемая часть стоимости электроэнергии включает стоимость мощности, которая в среднем составляет около 35% от суммы затрат на электроэнергию [26]. Стоимость мощности, в зависимости от ценовой категории энергопотребителя, складывается из стоимости покупной (потребленной) и сетевой

мощности (только для 4, 6 ценовых категорий). Стоимость покупной мощности рассчитывается как произведение средневзвешенной рыночной цены на мощность на среднее энергопотребление предприятия в часы пиковой нагрузки за текущий месяц. Для того чтобы снизить стоимость покупной мощности для энергопотребителя, необходимо максимально сократить потребление электроэнергии в часы пиковой нагрузки.

Суточный график полной цены (включающей покупную мощность) на электроэнергию для энергопотребителей 3, 4 ценовых категорий имеет вид, подобный показанному на рис. 1. Из графика видно, что в часы пиковой нагрузки полная цена на электроэнергию может возрастать по сравнению с ценой в другие часы в десятки раз. Это обусловлено размером платы за покупную мощность, величина которой зависит от потребления электроэнергии в часы пиковой нагрузки.

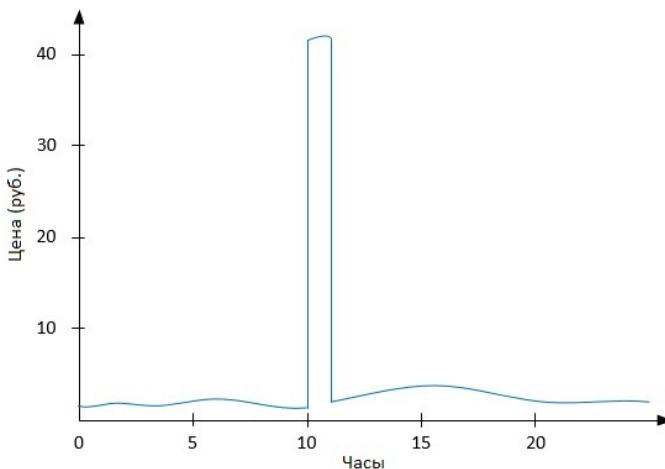


Рис. 1. График полной цены на электроэнергию

Для предприятий, рассчитывающихся за электроэнергию по 3-6 ценовым категориям, существует несколько способов уменьшения оплаты за электроэнергию за счет управления энергопотреблением с учетом цен на электроэнергию и платы

за мощность. В первом случае добиться снижения энергозатрат в часы, отличные от часов пиковой нагрузки, можно уменьшая потребление электроэнергии в периоды высоких почасовых рыночных цен на электроэнергию и увеличивая нагрузку в часы, когда цена становится ниже. Во втором случае необходимо максимально сократить потребление электроэнергии в часы пиковой нагрузки.

В условиях необходимости выполнения производственной программы предприятия сокращение потребления электроэнергии в одни периоды времени будет приводить к увеличению энергопотребления в другое время. При этом необходимо учитывать ограничения, накладываемые на минимальное и максимальное энергопотребление, связанные с работой технологического оборудования, безопасностью производства, жизнедеятельностью людей и др.

Снижение энергопотребления в часы высоких цен на электроэнергию и часы пиковой нагрузки возможно за счет изменения графика работы предприятия и режимов работы оборудования и персонала. Однако на практике реализация таких мер является крайне затруднительной для предприятия, так как периоды высоких цен и часы пиковой нагрузки могут изменяться фактически каждые сутки и соответственно так же должен изменяться график работы предприятия. Частая смена рабочих режимов и изменение интенсивности работы оборудования и персонала предприятия может привести к возникновению не только технических, но и социальных проблем. Поэтому в данной работе основным способом достижения снижения затрат на электроэнергию будет использование собственных источников энергии предприятия, RES- и FES-генераторов и устройств DES.

Таким образом, для получения максимальной экономии необходимо реализовать управление энергопотреблением объектов предприятия путем оптимальной организации энергоснабжения в течение суток от центральной энергосистемы, локальных генераторов и накопителей энергии с учетом цен на электроэнергию от различных источников энергии, часов пиковой нагрузки

и других ограничений на энергопотребление. Следовательно, может быть поставлена задача оптимального планирования энергопотребления (Optimal Energy Consumption Scheduling – OECS) предприятия. Подобные задачи находят широкое распространение в системах управления спросом (Demand Side Management – DSM) и в сетях Smart Grid [25, 32, 33, 35]. Задачи OECS соответствуют разомкнутой системе, когда значения оптимизируемых параметров определяются заранее для всего периода планирования на основе прогнозирования важнейших показателей системы. Недостатком такого подхода является то, что погрешности прогнозирования и различные внешние возмущения и внештатные ситуации могут привести к тому, что фактический профиль энергопотребления будет существенно отличаться от планового.

Другим подходом, широко применяемым на практике для оптимизации энергопотребления, является оптимальное управление энергопотреблением (Optimal Energy Consumption Control – OECC). Задачи OECC соответствуют замкнутой системе, когда значения оптимизируемых параметров определяются на основе текущего состояния системы. Это значительно повышает точность управления и позволяет оперативно реагировать на внешние возмущения. Примером таких задач является задачи оптимального управления энергопотреблением здания [19, 21].

В [29] одним из авторов был описан способ, который позволяет сблизить эти два разных подхода. В предлагаемом в [29] алгоритме после решения задачи OECS горизонт планирования сдвигается вперед на один шаг, размер которого значительно меньше длины горизонта планирования. Идея использования сдвигающегося горизонта планирования не является новой. Она давно и широко применяется в алгоритмах Model Predictive Control (MPC) для решения задач OECC [4, 7, 9]. В дальнейшем подобные схемы стали использоваться и для решения задач OECS. Например, описание методов оптимального планирования со сдвигающимся горизонтом можно найти в недавних работах, посвященных оптимизации режимов работы энергосистем, включающих локальные генераторы и накопители энергии

[11, 13, 36]. Так, в [36] оптимизация со скользящим горизонтом (a rolling horizon optimization) используется, чтобы максимизировать прибыль энергосистемы, включающей PV-панели и ветряные турбины в сочетании с системой накопления энергии. В [11] утверждается, что подход к оптимизации со скользящим горизонтом более реалистичен, чем традиционные методы, которые учитывают полное знание рыночных цен и объемов производства/потребления энергии за весь оптимизируемый период. Оптимизация со скользящим горизонтом также применялась в [13] при реализации двухэтапной процедуры оптимального планирования генерации MSG сети, включающей генерацию электроэнергии на сутки вперед и генерацию внутри текущих суток. В отличие от работ [11, 13, 36] схема алгоритма со сдвигающимся горизонтом, описанная в [29], больше напоминает схему, применяемую в алгоритмах MPC, так как после решения задачи OECS реальные значения мощности локальных генераторов и накопителей используются для определения новых значений этих переменных на следующем шаге.

Кроме того, в отличие от задач OECS, описанных в [29, 30], в данной работе приводится расширенный вариант постановки этой задачи. Это связано с использованием специальных приемов для выравнивания оптимального профиля энергопотребления предприятия.

2. Задача OECS

В данной работе предполагается, что предприятие включает N объектов, являющихся потребителями электроэнергии. Под объектом понимается одно или несколько зданий предприятия и прилегающая к ним территория. Если на прилегающей территории находятся какие-то энергопотребители, например, парковка с зарядной станцией для электромобилей или технологическое оборудование, то их энергоснабжение производится от близлежащего здания.

Пусть $x_{i,h}$ – мощность потребляемая объектом $i = 1, \dots, N$ предприятия от центральной энергосети в час $h = t + \Delta h, \dots,$

$t + H$; $p_{g,h}$ – мощность g -го генератора, $g = 1, \dots, G$, в час h ; $G = R + F$ – общее число генераторов на предприятии; R – число RES-генераторов; F – число FES-генераторов; $d_{s,h}$ – мощность s -го устройства DES, $s = 1, \dots, S$, в час h ; t – начальный момент времени; H – горизонт планирования. В данной работе горизонт планирования принимается равным 24 часа, а шаг по времени Δh – равным одному часу. Каждое s -е устройство DES, $s = 1, \dots, S$, связано с g -м RES-генератором, $g = 1, \dots, R$, от которого оно заряжается.

Критерий оптимальности для задачи оптимального планирования энергопотребления предприятия будет иметь вид

$$(1) \quad E_{OECS} = \sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^H \left(c_h x_{i,h} + \sum_{g=1}^G c_g p_{g,h} + \sum_{s=1}^S c_s d_{s,h} \right),$$

где c_h – прогнозное значение рыночной цены на электроэнергию от центральной энергосети в час h , $h = t + \Delta h, \dots, t + H$; c_g – цена за электроэнергию от g -го генератора; c_s – цена за электроэнергию от s -го устройства DES. Критерий (1) включает мощности локальных генераторов и накопителей энергии, так как в общем случае цена электроэнергии, полученной из этих источников, может быть сравнимой по уровню или даже временами превышать цену за электроэнергию от центральной энергосети.

Обозначим X_d среднее потребление электроэнергии (уровень спроса) на горизонте планирования H , необходимое предприятию для выполнения своих функций. Тогда будет справедливо условие

$$(2) \quad \sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^H \left(x_{i,h} + \sum_{g=1}^G p_{g,h} + \sum_{s=1}^S d_{s,h} \right) = X_d.$$

Зададим нижние и верхние границы почасового энергопотребления, мощности генераторов и устройств DES:

$$(3) \quad x_{i,h,l} \leq x_{i,h} \leq x_{i,h,u}, \quad h = t + \Delta h, \dots, t + H,$$

$$(4) \quad p_{g,h,l} \leq p_{g,h} \leq p_{g,h,u}, \quad g = 1, \dots, G, \quad h = t + \Delta h, \dots, t + H,$$

$$(5) \quad d_{s,h,l} \leq d_{s,h} \leq d_{s,h,u}, \quad s = 1, \dots, S, \quad h = t + \Delta h, \dots, t + H,$$

где $x_{i,h,l}$, $x_{i,h,u}$ – нижние и верхние границы почасового энергопотребления от центральной энергосети объекта i ; $p_{g,h,l}$, $p_{g,h,u}$ – нижние и верхние границы почасового энергопотребления от генераторов; $d_{s,h,l}$, $d_{s,h,u}$ – нижние и верхние границы почасового энергопотребления от устройств DES. Условие (4) для FES-генераторов будет иметь вид $p_{g,h,l} = 0$, $p_{g,h,u} = p_{g,h,n}$, где $p_{g,h,n}$ – номинальная мощность генератора, т.е. предполагается что FES-генераторы могут работать только на их номинальной мощности. Возможность работы FES-генераторов на мощности, отличной от номинальной, в данной работе не рассматривается.

Границы почасового энергопотребления определяются возможностями предприятия сокращать или увеличивать свое энергопотребление, а также возможностями локальных генераторов и накопителей энергии. В интервале пиковой нагрузки h_{pp} необходимо снизить энергопотребление до минимально возможного X_{pp} , т.е. должно выполняться условие

$$(6) \quad \sum_{i=1}^N x_{i,h} \leq X_{pp}, \quad h \in h_{pp}.$$

В идеальном случае при $X_{pp} = 0$ потребление электроэнергии из центральной энергосети в час пиковой нагрузки должно отсутствовать. Такой режим функционирования MSG предприятия еще называют режимом острова (*islanded mode*), в отличие от режима, когда MSG потребляет электроэнергию из центральной энергосети (*grid-connected mode*) [12]. В этом случае при соблюдении ограничения (6) и точных прогнозов часов пиковой нагрузки в течение месяца плата за мощность для предприятия будет равна нулю.

Одним из недостатков методов OECS, представленных в [29, 30], является существенная нестабильность профиля энергопотребления в течение суток, связанная с провалами и резкими изменениями профиля, в особенности в дневное и вечернее время и во время интервала пиковой нагрузки. Это сильно затрудняет реализацию такого профиля энергопотребления предприятием, так как требует резкого изменения рабочих режимов, перенастройки оборудования и изменения интенсивности работы персонала

предприятия.

При наличии у предприятия локальных генераторов и накопителей энергии, особенно если среди генераторов есть FES-генераторы, т.е. $F > 0$, можно ввести дополнительное условие способствующее выравниванию профиля энергопотребления. Пусть X_h – среднее энергопотребление предприятия в час h . Для полной компенсации потребления электроэнергии из центральной энергосети за счет локальных генераторов и накопителей энергии должно выполняться неравенство

$$(7) \quad X_h - \sum_{i=1}^N x_{i,h} \leq \sum_{g=1}^G p_{g,h} + \sum_{s=1}^S d_{s,h}.$$

Выполнение условия (7) приводит к сглаживанию оптимального профиля энергопотребления предприятия. При отсутствии или недостаточной мощности локальных генераторов и накопителей, в особенности FES-генераторов, условие (7) может быть нереализуемым или не приводить к выравниванию профиля.

В интервале пиковой нагрузки h_{pp} выражение (7) будет иметь вид

$$(8) \quad X_{h_{pp}} - X_{pp} \leq \sum_{g=1}^G p_{g,h} + \sum_{s=1}^S d_{s,h}.$$

При $X_{pp} = 0$ (в режиме острова) для выполнения условия (8) необходимо, чтобы суммарная мощность всех локальных генераторов и накопителей превышала среднее энергопотребление предприятия X_h на интервале h_{pp} . Это довольно жесткое условие, которое можно удовлетворить только при наличии достаточной мощности локальных генераторов и накопителей.

Решение задачи ОЕСС и выполнение условия (7) может привести к тому, что FES-генераторы будут включаться и выключаться слишком часто в течение дня. Это повышает износ оборудования FES-генераторов и может привести к снижению срока службы данных генераторов. Поэтому для FES-генераторов вводится дополнительное условие сокращающее количество их пусков и остановов в соседние часы путем продления времени работы генераторов.

$$(9) \quad p_{g,h} = p_{g,h,n}, \text{ if } h_u[h] = h_d[h-1] = 1, h_u[h] = h_d[h-2] = 1,$$

192

где $h_u[h]$ – массив из 0 и 1, показывающий часы пуска FES-генератора, где 0 – генератор остановлен, 1 – генератор запущен; $h_d[h]$ – массив из 0 и 1, показывающий часы останова FES-генератора. Выполнение условия (9) приводит к тому, что FES-генераторы будут работать более длительное время без частых пусков и остановов.

На сглаживание профиля также может влиять число устройств DES и время, когда они переключаются на энергоснабжение предприятия. Если условие (8) не выполняется, то для сокращения энергопотребления от центральной энергосети все устройства DES должны переключаться на энергоснабжение предприятия в интервале h_{pp} . Таким путем можно обеспечить минимальный провал профиля энергопотребления в интервале пиковой нагрузки. Если интервал h_{pp} включает несколько часов, то для обеспечения выполнения условия (6), при выполнении условия (8) для первого часа, подключение накопителей энергии для энергоснабжения предприятия можно разнести по разным часам интервала пиковой нагрузки.

В данной работе в качестве базового варианта рассматривается вариант, когда устройства DES заряжаются от RES-генераторов и переключаются на энергоснабжение предприятия только один раз в день, в интервале пиковой нагрузки. Если накопителей энергии много или зарядка накопителей энергии происходит достаточно быстро, то в этом случае устройства DES могут подключаться для энергоснабжения предприятия по несколько раз в день. В этом случае может быть рассмотрена задача определения оптимальных моментов времени подключения накопителей с учетом ограничений на интервалы времени подключения. Это также может способствовать выравниванию профиля энергопотребления предприятия.

Таким образом, задача OECS будет состоять в минимизации критерия (1) при выполнении условий (2)–(9). Искомыми переменными в данной задаче будут переменные $x_{i,h}, p_{g,h}, d_{s,h}$. Задача (1)–(8) без учета условия (9) и описанных ранее случаев, когда устройства DES переключаются на энергоснабжение пред-

приятия более одного раза в день, является линейной. Поэтому для ее решения можно использовать метод линейного программирования. Учет условия (9) и случаев, когда устройства DES переключаются на энергоснабжение предприятия более одного раза в день, приводит к задаче смешанной линейно-целочисленной оптимизации, решение которой является гораздо более трудоемким, чем решение задачи линейной оптимизации. Поэтому в данной работе авторы предложили эвристический алгоритм, позволяющий избежать сведения задачи OECS к задаче линейно-целочисленной оптимизации и при этом реализовать условие (9) и последовательное подключение накопителей в течение двухчасового интервала пиковой нагрузки. Это осуществляется за счет итеративной коррекции ограничений (4) и (5).

Эвристический алгоритм решения задачи OECS включает следующие основные шаги:

1. Выполняются прогнозы рыночных цен на электроэнергию c_h и часов пиковой нагрузки h_{pp} на месяц вперед. Производится прогноз значений мощности RES генераторов $p_{g,h}, g = 1, \dots, R$, и мощности устройств DES $d_{s,h}$ на горизонте планирования H . Полученные значения $p_{g,h}$ и $d_{s,h}$ используются для задания $p_{g,h,u}$ и $d_{s,h,u}$ в условиях (4) и (5) соответственно. Задаются нижние $x_{i,h,l}$ и верхние $x_{i,h,u}$ границы почасового энергопотребления.

2. Решается задача OECS (1)–(6) на горизонте планирования H и определяются оптимальные значения переменных $x_{i,h}, p_{g,h}$ и $d_{s,h}$ в моменты $h = t + \Delta h, \dots, t + H$ без учета условия (7). Если полученный суммарный профиль энергопотребления предприятия признается трудно реализуемым, то производится повторное решение задачи OECS на горизонте планирования H с учетом условия (7).

3. Производится анализ работы FES генераторов и при необходимости корректируются ограничения (4) для выполнения условия (9), производится повторное решение задачи OECS на горизонте планирования H .

4. При наличии избытков мощности устройств DES для первого часа пиковой нагрузки рассматривается вариант последо-

вательного подключения накопителей энергии для энергоснабжения предприятия в разные часы интервала пиковой нагрузки за счет корректировки ограничений (5) и производится повторное решение задачи OECS на горизонте планирования H .

3. Задача OECS со сдвигающимся горизонтом

Алгоритм решения задачи OECS со сдвигающимся горизонтом позволяет преодолеть недостаток задач OECS, связанный с тем, что погрешности прогнозирования и различные внешние возмущения и внештатные ситуации могут привести к тому, что фактический профиль энергопотребления будет существенно отличаться от планового оптимального профиля.

Алгоритм решения задачи OECS со сдвигающимся горизонтом включает следующие основные шаги:

1. Решается задача OECS на горизонте планирования H и определяются оптимальные значения переменных $x_{i,h}, p_{g,h}$ и $d_{s,h}$ в моменты $h = t + \Delta h, \dots, t + H$. В результате решения задачи определяется оптимальный профиль энергопотребления от центральной энергосети, RES-генераторов и устройств DES на горизонте планирования H . Оптимальные значения переменных $x_{i,h}, p_{g,h}$ и $d_{s,h}$ в текущий момент времени используются для задания нагрузок производственного и энергетического оборудования.

2. Горизонт планирования сдвигается на один шаг вперед. Определяются реальные значения переменных $x_{i,h}, p_{g,h}$ и $d_{s,h}$. Полученные реальные значения мощности RES-генераторов и накопителей вместе с накопленными ранее данными используются для прогнозирования новых значений $p_{g,h}$ и $d_{s,h}$ в моменты $h = t + 2\Delta h, \dots, t + H + \Delta h$. Новые значения $p_{g,h}$ и $d_{s,h}$ используются для задания значений $p_{g,h,u}$ и $d_{s,h,u}$ в условиях (4) и (5).

3. Выполняется переход на шаг 1 алгоритма, и вся процедура повторяется с данного шага.

На шаге 2 алгоритма используются реальные значения энергопотребления, мощности локальных генераторов и накопите-

лей энергии. Все это значительно уменьшает риск существенного расхождения планового и фактического профилей энергопотребления, что может привести к нарушению производственной программы предприятия. Использование сдвигающегося горизонта позволяет добавить в задачу OECS элементы обратной связи и тем самым приблизить задачу OECS к задаче OECC. Представленная схема алгоритма решения задачи OECS со сдвигающимся горизонтом напоминает схему, применяемую в МРС-алгоритмах, включающую сдвиг горизонта планирования на один шаг дискретизации, использование текущих значений переменных состояния объекта и реализацию полученных оптимальных значений управления только для текущего момента времени.

4. Практический пример

4.1. Сеть MSG предприятия

Рассмотрим пример предприятия, включающего два объекта и локальные генераторы энергии в составе: солнечной электростанции (СЭС), ветровой электростанции (ВЭС) и газопоршневой электростанции (ГПЭ). СЭС и ВЭС работают в комплексе с сетевыми накопителями энергии (СНЭ). В данной работе не рассматривалась задача определения оптимального состава и мощности локальных генераторов и накопителей энергии. Однако предложенные в данной работе методы можно использовать для оценки вариантов по получаемой экономии. Следовательно, может быть поставлена и решена задача определения оптимального состава и мощности локальных генераторов и накопителей энергии. Пример решения подобной задачи представлен в [29].

Укрупненная схема сети MSG предприятия показана на рис. 2. Сеть MSG включает внешнюю сеть 10 кВ, Шину 1 и Шину 2 на 10 кВ, Линию 1 на 10 кВ, трансформатор 10 кВ/0,4 кВ и Шину 3 на 380 В. К Линии 2 на 380 В и Шине 4 подключен объект 1 (Потребитель 1). К Линии 3 на 380 В и Шине 5 подключен объект 2 (Потребитель 2). Потребитель 1 включает Нагрузку 1 (Здание 1) мощностью 150 кВт и Нагрузку 2 (Здание 2) мощностью 110 кВт. Потребитель 2 содержит Нагрузку 3 (Здание 3)

мощностью 200 кВт. К Линии 4 на 380 В и Шине 7 подключены ГПЭ мощностью 500 кВт, ВЭС мощностью 200 кВт с СНЭ мощностью 160 кВА и СЭС мощностью 300 кВт с СНЭ мощностью 200 кВА. Линия 5 соединяет локальные генераторы и накопители энергии с Потребителем 1, а Линия 6 – с Потребителем 2.

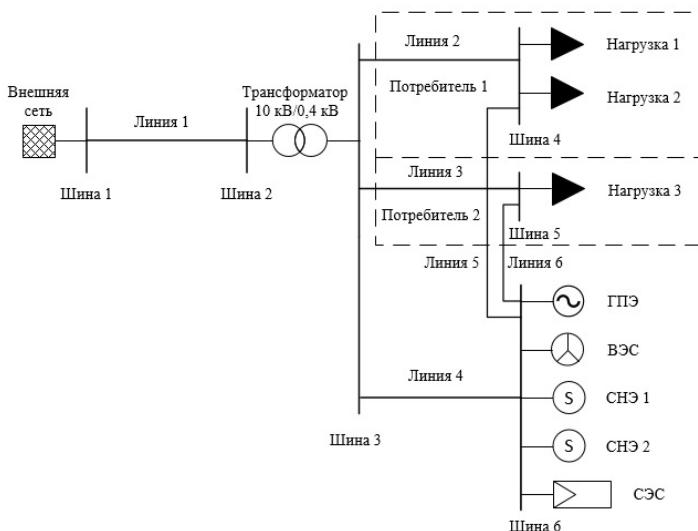


Рис. 2. Схема MSG предприятия

4.2. Прогнозирование цен и часов пиковой нагрузки

Для решения задачи ОЕСС необходимо иметь информацию о рыночных ценах на электроэнергию в текущем месяце. Особенностью розничного рынка электроэнергии для регионов Российской Федерации, относящихся к ценовым зонам, является то, что данные о рыночных ценах на электроэнергию для текущего месяца становятся известны только после десятого числа следующего месяца. Поэтому для решения задачи ОЕСС необходимо выполнить прогноз рыночных цен на электроэнергию на месяц вперед.

Тема прогнозирования рыночных цен на электроэнергию широко представлена в мировой научной литературе [37, 42].

В последнее время для прогнозирования рыночных цен на электроэнергию все более популярными становятся глубокие нейронные сети (Deep Neural Networks – DNN) [22, 38, 39]. В данной работе для прогнозирования рыночных цен на электроэнергию на месяц вперед применялось разработанное ранее одним из авторов приложение, описанное в [28]. Приложение позволяет получить прогноз цен на электроэнергию на месяц вперед с использованием различных вариантов структур искусственных нейронных сетей (Artificial Neural Networks – ANN). Среди возможных вариантов многослойный персептрон (Multilayer perceptron – MLP) и такие популярные архитектуры DNN, как сети долгой краткосрочной памяти (Long Short Term Memory NN – LSTM NN), управляемые рекуррентные нейроны (Gated Recurrent Unit – GRU) и сверточные нейронные сети (Convolutional NN – CNN), а также их комбинации в виде последовательного, параллельного или последовательно-параллельного соединения ANN различных типов. В [27] произведено сравнение различных вариантов структур ANN по точности прогнозирования цен на электроэнергию. Из всех вариантов ANN при прогнозировании рыночных цен на электроэнергию наиболее предпочтительными по точности оказались многовходовой вариант Multiple Input LSTM, комбинации CNN с MLP и LSTM с CNN и MLP.

В качестве исходных данных для прогнозирования рыночных цен на электроэнергию использовалась информация, которая ежемесячно публикуется на сайте гарантировавшего поставщика того региона в котором находится предприятие [2].

В [30] показано, что использование прогнозных значений цен на электроэнергию вместо их реальных значений может оказывать влияние на вид полученного в результате решения задачи ОECS оптимального профиля энергопотребления. Однако это влияние ограничивается небольшим снижением экономии, получаемой от оптимального планирования.

Данные о часах пиковой нагрузки в текущем месяце также становятся известны только в следующем месяце. Поэтому кроме прогноза рыночных цен на электроэнергию для решения задачи

OECS необходимо знать прогноз часов пиковой нагрузки на месяц вперед. В отличие от задач прогнозирования энергопотребления и цен на электроэнергию задача прогнозирования часов пиковой нагрузки не является популярной в научной литературе. В зарубежной литературе можно найти только публикации, посвященные решению близких по характеру задач прогнозирования пиков (максимумов) рыночной цены (price spike) на электроэнергию и пиков электрической нагрузки [6, 34]. Из российских публикаций на эту тему следует отметить работы [1, 40].

В данной работе для прогнозирования часов пиковой нагрузки на месяц вперед применялось упомянутое ранее приложение [28]. В данном приложении для прогнозирования часов пиковой нагрузки используется косвенный метод, основанный на прогнозировании на месяц вперед суммарного потребления электроэнергии региона. Выполнив прогнозирование и определив по прогнозу пики суммарного потребления региона за каждые сутки, можно найти значения часов пиковой нагрузки в следующем месяце [26]. Такой метод позволяет получить прогноз часов пиковой нагрузки, который обеспечит совпадение с реальными данными на уровне около 30–40%.

Для повышения точности прогноза можно использовать данные, полученные в результате анализа часов пиковой нагрузки за предыдущие годы. В [1, 26] на основе такого анализа были выявлены наиболее вероятные значения часов пиковой нагрузки для каждого месяца и наиболее вероятное распределение часов пиковой нагрузки по дням недели. Коррекция результатов прогнозирования часов пиковой нагрузки на месяц вперед на основе анализа данных за предыдущие годы позволяет повысить процент совпадений с реальными данными до 45–65%.

Можно еще более увеличить процент совпадений, если вместо одн часового интервала для пиковой нагрузки рассматривать двух часовую интервал. Расширение интервала для пиковой нагрузки позволяет увеличить вероятность того, что реальный час пиковой нагрузки попадет в расширенный интервал. При использовании двух часовых интервалов можно довести точность про-

гнозов часов пиковой нагрузки до уровня 70–75% и выше.

Ошибка, связанная с прогнозированием часов пиковой нагрузки, приводит к тому, что при неверном прогнозе экономия, получаемая за счет максимального снижения энергопотребления в час пиковой нагрузки, не будет получена. В [29] показано, что среднесуточная экономия, получаемая в результате решения задачи OECS в течение месяца, для двухчасовых интервалов пиковой нагрузки будет выше, чем для одночасового интервала. Поэтому для предприятий, имеющих локальные генераторы и накопители энергии достаточной мощности, использование двухчасовых интервалов пиковой нагрузки может быть экономически целесообразным. Далее решение задачи OECS будет произведено как для одночасового, так и для двухчасового интервала.

Получить реальные данные о часах пиковой нагрузки для прогнозирования можно с сайта АО «Администратор торговой системы» [3].

4.3. Прогнозирование мощности RES генераторов и устройств DES

Другими прогнозами, необходимыми для решения задачи OECS, являются прогнозы значений мощности RES-генераторов. Если горизонт планирования H в задаче OECS составляет одни сутки, то для ее решения необходимо иметь прогнозы мощности RES-генераторов на день вперед (day ahead).

Мощности RES-генераторов можно рассчитать по известным формулам [14, 18], используя прогнозы необходимых климатических параметров, таких как интенсивность солнечной радиации, облачность, скорость ветра и др. Однако прогнозирование временных рядов климатических параметров – это не менее сложная задача, чем прогнозирование мощности RES-генераторов. Для ее решения часто используются те же методы, что и для прогнозирования мощности RES-генераторов [10, 20, 43]. Поэтому, имея информацию о мощности RES-генераторов в настоящий и прошедшие периоды времени, предприятие может делать прогнозы, не уступающие по точности прогнозам, которые могли быть сделаны на основе прогнозов ме-

теослужб.

Существуют готовые библиотеки для определения мощности RES-генераторов на основании открытых данных о погоде в различных регионах земли [17]. В данной работе были использованы данные о мощности массива PV-панелей и ветряной турбины, полученные таким способом.

Для выполнения прогнозов мощности RES-генераторов может использоваться подход на основе краткосрочного предикатора. Краткосрочный предикатор выполняет прогноз значений мощности $p_{g,h}, g = 1, \dots, R$, на горизонте прогнозирования $H, h \in [0, H]$. Прогнозирование производится по формуле

$$(10) \quad p_{g,h+1} = f(a_{g,h}, \dots, a_{g,h-l}),$$

где $a_{g,h}, \dots, a_{g,h-l}$ – векторы параметров, включающие значения мощности RES генераторов $p_{g,h}, \dots, p_{g,h-l}$; f – в общем случае нелинейная функция; l – число, задающее количество значений мощности в предыдущие часы, участвующих в прогнозе. Вектор параметров $a_{g,h}$ может включать не только значения мощности $p_{g,h}$, но и дополнительные признаки, например, текущий час, день и месяц.

В начальный момент времени (в 0 часов) значения $p_{g,h}, \dots, p_{g,h-l}$ представляют собой значения мощности RES-генераторов в предыдущие часы предыдущих суток. Эти значения известны. По этим значениям прогнозируется значения мощности RES-генераторов в следующий час. Следовательно, в начальный момент времени по формуле (10) реализуется одношаговый предикатор. После этого в цикле производится формирование массива значений мощности по часам по правилу $p_{g,h-l} = p_{g,h-l+1}, \dots, p_{g,h} = p_{g,h+1}$. Таким образом, сначала при прогнозировании используются реальные значения мощности $p_{g,h}$, а затем начиная со следующего шага начинают использоваться значения мощности полученные в результате прогноза.

Хорошо известно, что использование краткосрочного предикатора (10) с течением времени приводит к накоплению ошибки. Чем больше горизонт прогнозирования, тем большей может оказаться ошибка. Поэтому для повышения устойчивости результа-

тов прогнозирования необходимо использовать дополнительные признаки. В качестве таких признаков могут выступать календарные данные о часе, дне и месяце. Однако это не позволяет достичь приемлемого качества прогнозирования, в особенности при прогнозировании мощности ветрогенераторов [31].

Другие дополнительные признаки, которые могут использоваться для повышения качества прогнозирования мощности RES-генераторов, можно получить путем декомпозиции исходного временного ряда на отдельные составляющие (modes). К наиболее популярным методам декомпозиции относятся WD (Wavelet Decomposition), WPD (Wavelet Packet Decomposition), EMD (Empirical Mode Decomposition), EEMD (Ensemble Empirical Mode Decomposition), EWT (Empirical Wavelet Transform) [16, 41]. В [8] отмечено, что EWT при обработке нестационарных сигналов превосходит по эффективности все остальные методы и у EWT отсутствуют многие недостатки, которые имеются у других методов.

Для прогнозирования значений мощности RES-генераторов на горизонте планирования H в [31] применялись популярные DNN-архитектуры LSTM, CNN, MLP и такие известные алгоритмы машинного обучения как Random forest, XGBost, LightGBM, CatBoost компании Yandex. Из всех перечисленных ранее моделей наилучшие результаты по точности прогнозирования мощности PV-модулей показали алгоритмы Random forest и CatBoost с использованием двух мод EWT. При прогнозировании мощности ветрогенератора наилучшие результаты по точности прогнозирования показали MLP ANN и алгоритм CatBoost с использованием трех мод EWT.

Мощность устройств DES $d_{s,h}$ на интервале $[t + \Delta h, t + H]$ может быть определена по формуле [14]

$$(11) \quad d_{s,h+1} = d_{s,h}(1 - \sigma) + (p_{g,h} - \sum_{i=1}^N x_{i,h}/\eta_{inv})\eta_b,$$

где σ – коэффициент скорости саморазряда батареи; η_{inv} – коэффициент эффективности инвертера; η_b – коэффициент эффективности батареи.

Как сказано ранее, предполагается, что устройства DES заряжаются от RES-генераторов и переключаются на энергоснабжение предприятия только один раз в день в интервале пиковой нагрузки. В этом случае сетевые накопители будут заряжены гораздо раньше, чем будут использованы для энергоснабжения предприятия. Поэтому для определения их мощности достаточно воспользоваться формулами (11) и (5). Если устройства DES могут заражаться и подключаться для энергоснабжения предприятия по нескольку раз в день, то в этом случае для более точного определения уровня заряда устройств DES и моментов времени их полного заряда может применяться прогнозирование. В последнее время наиболее успешно для прогнозирования уровня заряда сетевых накопителей применяются DNN, такие как LSTM и GRU [44, 45].

4.4. Решение задачи OECS

Для решения задачи OECS применяется эвристический алгоритм, представленный в разделе 2 данной работы. Так как задача (1)–(8) линейная, то для ее решения использовался метод линейного программирования. Метод линейного программирования находит широкое применение как для решения задачи оптимизации энергопотребления предприятий [30], так и для оптимизации энергопотребления частных домашних хозяйств [24]. Для решения задачи OECS применялось разработанное ранее одним из авторов приложение, описанное в [28].

Далее для определенности, в качестве конкретной даты, для которой будет решаться задача OECS, возьмем 18.06.2021. Соответственно, будут использоваться данные о ценах на электроэнергию за июнь 2021 года. Час пиковой нагрузки для 18.06.2021 приходился на 14 часов. Для наглядности сначала будут приведены решения задачи OECS для начального момента времени для одночасового интервала пиковой нагрузки без учета и с учетом условия (7), потом соответствующие решения для двухчасового интервала. Условие (9) будет учитываться во всех случаях.

Полученные в результате решения задачи OECS графики оптимальных профилей суммарного энергопотребления от цен-

тральной энергосети всех объектов (Net Power), мощности СЭС (PV Power), ВЭС (WT Power), ГПЭ (GG Power), СНС (Battery 1 Power, Battery 2 Power), а также суммарного энергопотребления от всех источников (Sum Power) для одночасового интервала пиковой нагрузки без учета условия (7) показаны на рис. 3. Суммарное энергопотребление от всех источников энергии на всех графиках показывается ограниченным сверху на уровне максимального энергопотребления предприятия. Графики оптимальных профилей энергопотребления из электросети для объекта 1 (Net1 Power) и объекта 2 (Net2 Power) показаны на рис. 4.

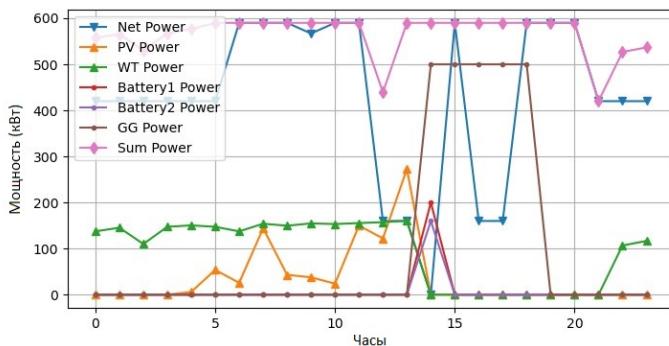


Рис. 3. Графики для одночасового интервала без учета (7)

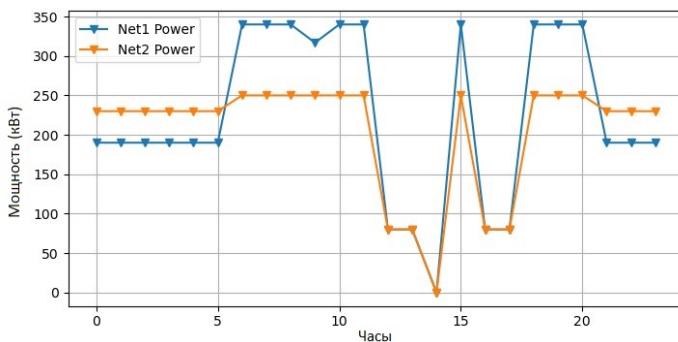


Рис. 4. Графики оптимальных профилей энергопотребления из электросети для объекта 1 и объекта 2 для одночасового интервала

Рис. 3 показывает, что в результате решения задачи OECS обеспечивается снижение энергопотребления от центральной энергосети в час пиковой нагрузки до нуля. Это позволяет получить существенную экономию электроэнергии. Однако суммарный профиль энергопотребления имеет значительные провалы в дневное и вечернее время. Провалы профиля связаны, во-первых, с необходимостью обеспечения минимального энергопотребления от центральной энергосети в час пиковой нагрузки, во-вторых, с более высокой ценой на электроэнергию в эти часы.

Для выравнивания профиля необходимо увеличивать мощность используемых локальных генераторов и сетевых накопителей. Увеличение продолжительности работы FES-генераторов также способствует выравниванию профиля. Необходимо учитывать, что большая часть энергии RES-генераторов тратится на зарядку СНС. Работа СНС должна быть организована таким образом, чтобы при достижении интервала пиковой нагрузки сетевые накопители были полностью заряжены. При полностью заряженных накопителях энергия от RES-генераторов может использоваться для энергоснабжения предприятия.

Графики оптимальных профилей энергопотребления и мощности для одночасового интервала пиковой нагрузки с учетом условия (7) показаны на рис. 5. Выполнение условия (7) возможно только при достаточной мощности локальных генераторов и накопителей, в особенности FES-генераторов. В данном случае, как видно из рис. 5, выполнение условия (7) достигается путем длительного включения газового генератора.

Графики оптимальных профилей энергопотребления и мощности для двухчасового интервала пиковой нагрузки без учета условия (7) показаны на рис. 6. Рис. 6 показывает, что для двухчасового интервала пиковой нагрузки присутствуют провалы профиля в дневное и вечернее время. Провал во втором часе интервала пиковой нагрузки связан с тем, что в этот час СНЭ уже разряжены, энергия от RES-генераторов идет на зарядку СНЭ, а мощности ГПЭ недостаточно для выравнивания профиля. В этом случае даже такие меры, как увеличение мощности используе-

мых локальных генераторов и сетевых накопителей и увеличение продолжительность работы FES-генераторов без увеличения их мощности, не приведут к полному выравниванию профиля.

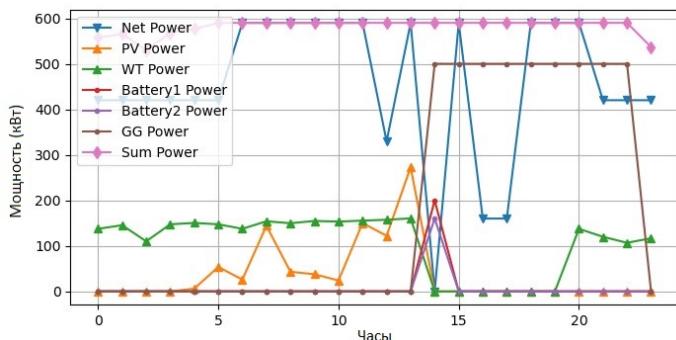


Рис. 5. Графики для одночасового интервала с учетом (7)

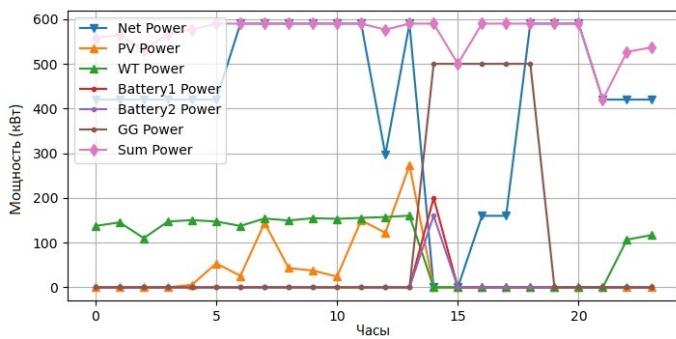


Рис. 6. Графики для двухчасового интервала без учета (7)

Графики оптимальных профилей энергопотребления и мощности для двухчасового интервала пиковой нагрузки с учетом условия (7) показаны на рис. 7.

Как видно из рис. 7 использование условия (7) лишь незначительно способствует выравниванию профиля и не удаляет профиль во втором часе интервала пиковой нагрузки. Для его удаления можно воспользоваться тем, что мощность одного из СНЭ, используемая в первом часе интервала пиковой нагрузки, оказывается избыточной. Если произвести подключение одного СНЭ

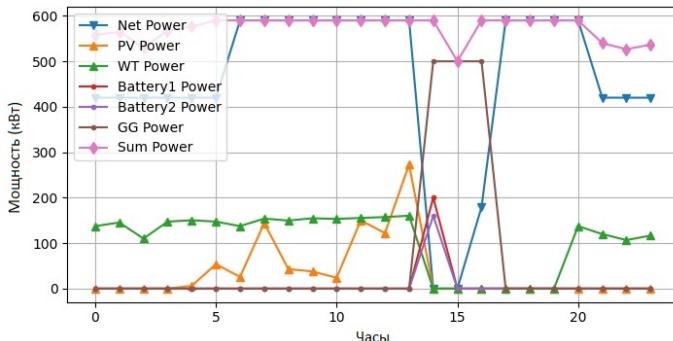


Рис. 7. Графики для двухчасового интервала с учетом (7)

для энергоснабжения предприятия в первом часе интервала пиковой нагрузки, а другого СНЭ – во втором часе, то можно ликвидировать провал профиля энергопотребления, как показано на рис. 8.

Графики оптимальных профилей энергопотребления из электросети для объекта 1 (Net1 Power) и объекта 2 (Net2 Power) для двухчасового интервала пиковой нагрузки показаны на рис. 9.

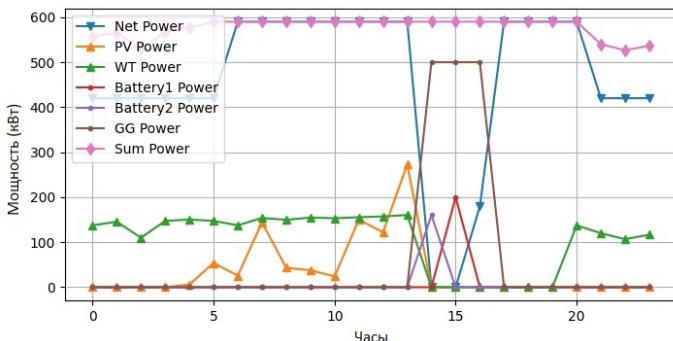


Рис. 8. Графики для двухчасового интервала с учетом (7) и последовательным включением СНЭ

Таким образом, путем решения задачи ОЕСС при достаточной мощности локальных генераторов и сетевых накопителей можно одновременно обеспечить максимальное сокращение

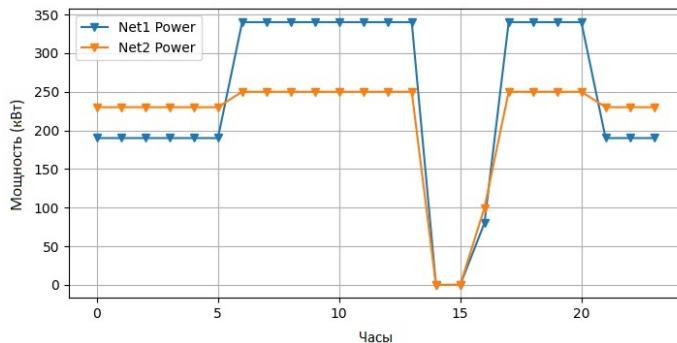


Рис. 9. Графики оптимальных профилей энергопотребления из электросети для объекта 1 и объекта 2 для двухчасового интервала

потребления электроэнергии в часы пиковой нагрузки и выравнивание оптимального профиля энергопотребления предприятия.

Как показано в [29], использование алгоритма OECS со сдвигающимся горизонтом вместо OECS может влиять на профиль энергопотребления.

На рис. 10 показаны графики суммарного энергопотребления от всех источников, полученные в результате решения задачи OECS и OECS со сдвигающимся горизонтом (Optimal Energy Consumption Scheduling with a Moving Horizon – OECSMG) для одночасового интервала пиковой нагрузки без учета условия (7).

Как видно из рис. 10 профили суммарного энергопотребления для задач OECS и OECSMG несколько отличаются. Основная причина этого – различие реальных и спрогнозированных значений мощности RES генераторов и устройств DES. Однако в целом использование алгоритма OECSMG не дает какого-то выигрыша в плане экономии на электроэнергии. Главным преимуществом использования алгоритма OECSMG является то, что на шаге 2 алгоритма используются реальные значения мощности RES-генераторов и устройств DES. Поэтому оптимальный профиль энергопотребления, полученный в результате решения задачи OECSMG, оказывается наиболее близким к реальному.

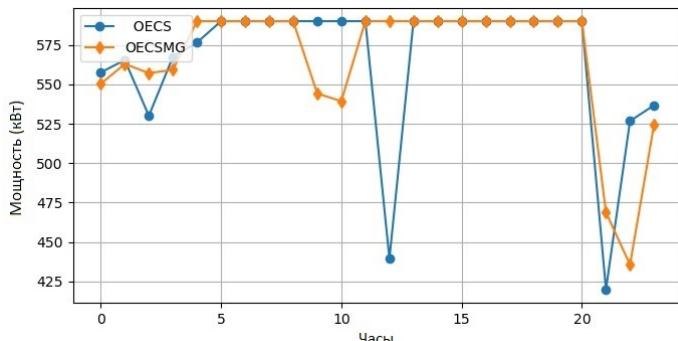


Рис. 10. Графики для одночасового интервала без учета (7)

Анализируя рис. 3–9 можно заметить, что в некоторые моменты времени возникают избытки суммарной мощности от всех источников энергии, которые никак не используются. Эти избытки можно минимизировать путем оптимального подбора оборудования СЭС, ВЭС и ГПЭ. Альтернативным вариантом является использование избыточной мощности, в частности от FES-генераторов для зарядки дополнительных накопителей энергии. Эти накопители затем могут использоваться в качестве дополнительных источников энергии.

5. Выводы

В работе рассмотрена проблема оптимизации энергопотребления предприятия, использующего для энергоснабжения не только центральную энергосистему, но и локальные генераторы и накопители энергии. Для решения этой проблемы в работе предложен эвристический алгоритм оптимального планирования энергопотребления предприятия, включающий решение задачи (1)–(8) линейного программирования. При большом риске существенного расхождения планового и фактического профилей энергопотребления вместо задачи OECS должна решаться задача OECS со сдвигающимся горизонтом.

Для решения задачи OECS требуется прогнозы рыночных цен на электроэнергию, часов пиковой нагрузки, мощности RES-

генераторов и устройств DES. Поэтому в данной работе обсуждаются вопросы, связанные с прогнозированием и определением этих показателей. Для прогнозирования рыночных цен на электроэнергию, часов пиковой нагрузки, мощности RES-генераторов и решения задачи OECS применялось разработанное ранее одним из авторов приложение, описанное в [28].

Особенностью задачи OECS, решаемой в данной работе, по сравнению с подобными задачами в [29, 30], является возможность использования дополнительных ограничений (7), выполнение которых при достаточной мощности локальных генераторов и накопителей энергии приводит к сглаживанию оптимального профиля энергопотребления предприятия. Это облегчает реализацию такого профиля энергопотребления предприятием, так как не требует резкого изменения рабочих режимов, перенастройки оборудования и изменения интенсивности работы персонала предприятия. Для уменьшения износа оборудования FES-генераторов и продления их срока службы вводится дополнительное условие (9), сокращающее количество пусков и остановов FES-генераторов в соседние часы путем продления времени работы генераторов.

Дополнительные возможности по выравниванию профиля могут быть получены при наличии избытков мощности устройств DES. Например, как показано в работе, они могут подключаться для энергоснабжения предприятия в разные часы интервала пиковой нагрузки. Предложенный авторами эвристический алгоритм позволяет реализовать условие (9) и последовательное подключение накопителей в течение двухчасового интервала пиковой нагрузки и при этом избежать сведения задачи OECS к задаче линейно-целочисленной оптимизации.

Еще большие возможности, не рассмотренные в работе, возникают, если устройств DES много, их зарядка происходит достаточно быстро и они могут подключаться для энергоснабжения предприятия по нескольку раз в день. В этом случае может решаться задача определения оптимальных моментов времени подключения накопителей энергии с учетом ограничений на интер-

валы времени подключения. Также за рамками работы осталось использование избытков суммарной мощности от всех источников энергии для заряда дополнительных сетевых накопителей. Описанные возможности могут рассматриваться в качестве дальнейшего развития работы.

Как было сказано во введении, стоимость мощности в среднем составляет около 35% от общей стоимости электроэнергии для предприятий, рассчитывающихся за электроэнергию по 3–6 ценовым категориям. Если предприятие сократит энергопотребление в часы пиковой нагрузки в течение месяца хотя бы в два раза, то это даст ему получить экономию около 15%. Полное сокращение энергопотребления в часы пиковой нагрузки позволит довести экономию примерно до 30% от общей стоимости электроэнергии для потребителей. Для предприятий, которые тратят значительные суммы на оплату электроэнергии, это может быть весомым доводом для приобретения локальных генераторов и накопителей энергии и внедрения системы управления энергопотреблением на основе предложенных в работе методов оптимизации энергопотребления.

Литература

1. МАРЬЯСИН О.Ю, ЛУКАШОВ А.И., СМИРНОВ Н.А. *Прогнозирование рыночных цен на электроэнергию и часов пиковой нагрузки для региона Российской Федерации* // Управление большими системами. – 2022. – Vol. 99. – P. 81–113.
2. Цены на электроэнергию "ТНС энерго Ярославль". [Электронный ресурс]. – URL: <https://yar.tns-e.ru/legal-entities/prices> (дата обращения: 10.08.2023).
3. Часы пиковой нагрузки от ATC. [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.atsenergo.ru/results/market/calcfacthour> (дата обращения: 10.08.2023).
4. AFRAM A., JANABI-SHARIFI F. *Theory and applications of HVAC control systems – A review of model predictive control (MPC)* // Building and Environment. – 2014. – Vol. 72. – P. 343–355.

5. AHMAD A., KHAN A., JAVAID N., HUSSAIN H.M. ET AL. *An Optimized Home Energy Management System with Integrated Renewable Energy and Storage Resources* // Energies. – 2017. – Vol. 10. – P. 2–35.
6. AMJADY N., KEYNIA F. *A new prediction strategy for price spike forecasting of day-ahead electricity markets* // Applied Soft Computing. – 2011. – Vol. 11. – P. 4246–4256.
7. ASCIONE F., BIANCO N., DE STASIO C., MAURO G.M. ET AL. *Simulation-based model predictive control by the multi-objective optimization of building energy performance and thermal comfort* // Energy and Buildings. – 2016. – Vol. 111. – P. 131–144.
8. ASLAM S., HERODOTOU H., MOHSIN S.M., JAVAID N. ET AL. *A survey on deep learning methods for power load and renewable energy forecasting in smart microgrids* // Renewable and Sustainable Energy Reviews. – 2021. – Vol. 144. – P. 1–23.
9. BASANTES J.A., PAREDES D.E., LLANOS J.R., ORTIZ D.E. ET AL. *Energy Management System (EMS) Based on Model Predictive Control (MPC) for an Isolated DC Microgrid* // Energies. – 2023. – Vol. 16. – P. 1–22.
10. CANTILLO-LUNA S., MORENO-CHUQUEN R., CELEITA D., ANDERS G. *Deep and Machine Learning Models to Forecast Photovoltaic Power Generation* // Energies. – 2023. – Vol. 16. – P. 1–24.
11. CAO Z., HAN Y., WANG J., ZHAO Q. *Two-stage energy generation schedule market rolling optimisation of highly wind power penetrated microgrids* // Int. Journal of Electrical Power & Energy Systems. – 2019. – Vol. 112. – P. 12–27.
12. CHAUDHARY G., LAMB J.J., BURHEIM O.S., AUSTB B. *Review of Energy Storage and Energy Management System Control Strategies in Microgrids* // Energies. – 2021. – Vol. 14. – P. 1–25.

13. CORINALDESI C., SCHWABENEDER D., LETTNER G., AUER H. *A rolling horizon approach for real-time trading and portfolio optimization of end-user flexibilities* // Sustainable Energy, Grids and Networks. – 2020. – Vol. 24. – P. 1–10.
14. DESHMUKH M.K., DESHMUKH S.S. *Modeling of hybrid renewable energy systems* // Renewable and Sustainable Energy Reviews. – 2008. – Vol. 12. – P. 235–249.
15. DILEEP G. *A survey on smart grid technologies and applications* // Renewable Energy. – 2020. – Vol. 146. – P. 2589–2625.
16. GILLES J. *Empirical wavelet transform* // IEEE Trans. on Signal Process. – 2013. – Vol. 61. – P. 3999–4010.
17. GitHub - *oemof/feedinlib* [Электронный ресурс]. – URL: <https://github.com/oemof/feedinlib> (дата обращения: 10.08.2023).
18. HEMEIDA A.M., EL-AHMAR M.H., EL-SAYED A.M., HASANIEN H.M. ET AL. *Optimum design of hybrid wind/PV energy system for remote area* // Ain Shams Engineering Journal. – 2020. – Vol. 11. – P. 11–23.
19. ILBEIGI M., GHOMEISHI M., DEHGHANBANADAKI A. *Prediction and optimization of energy consumtion in an office building using artificial neural network and a genetic algorithm* // Sustainable Cities and Society. – 2020. – Vol. 61. – P. 1–15.
20. JIANG P., WANG Y., WANG J. *Short-term wind speed forecasting using a hybrid model* // Energy. – 2017. – Vol. 119. – P. 561–577.
21. KIM W.; JEON Y.; KIM Y. *Simulation-based optimization of an integrated daylighting and HVAC system using the design of experiments method* // Applied Energy. – 2016. – Vol. 15. – P. 666–674.
22. LAGO J., DE RIDDER F., DE SCHUTTER B. *Forecasting spot electricity prices: deep learning approaches and empirical comparison of traditional algorithms* // Applied Energy. – 2018. – Vol. 221. – P. 386–405.

23. LAMNATOU C., CHEMISANA D., CRISTOFARI C. *Smart grids and smart technologies in relation to photovoltaics, storage systems, buildings and the environment* // Renewable Energy. – 2022. – Vol. 185. – P. 1376–1391.
24. LEE J.Y., CHOI S.G. *Linear programming based hourly peak load shaving method at home area* // Int. Conf. on Advanced Communication Technology. – 2014. – P. 310–313.
25. MAHARJAN I.K. *Demand Side Management: Load Management, Load Profiling, Load Shifting, Residential and Industrial Consumer, Energy Audit, Reliability, Urban, Semi-Urban and Rural Setting*. – LAP Lambert Academic Publishing, – 2010. – 116 p.
26. MARYASIN O.YU., LUKASHOV A.I. *Analyzing and Forecasting Peak Load Hours* // Int. Conf. on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing. – 2021. – P. 25–30.
27. MARYASIN O.YU., LUKASHOV A.I. *Comparing Neural Networks in Forecasting Market Electricity Prices and Regional Energy Consumption* // Int. Conf. on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing. – 2022. – P. 40–45.
28. MARYASIN O.YU., LUKASHOV A.I. *Developing a Digital Model of an Electricity Consumer using Deep Learning* // Int. Conf. on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency. – 2020. – P. 624–629.
29. MARYASIN O.YU., LUKASHOV A.I. *Optimal Energy Consumption Scheduling for Enterprises with Local Energy Sources* // Lecture Notes in Electrical Engineering. – 2023. – Vol. 986. – P. 282–293.
30. MARYASIN O.YU., LUKASHOV A.I. *Optimizing the Daily Energy Consumption of an Enterprise* // Lecture Notes in Electrical Engineering. – 2022. – Vol. 857. – P. 370–382.

31. MARYASIN O.YU., PLOHOTNYUK A. *Day-Ahead Power Forecasting of Renewable Energy Sources Using Neural Networks and Machine Learning* // Int. Conf. on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing. – 2023. – P. 130–135.
32. RAJA S.C., DHARSSINI A.C.V., NESMALAR J.J.D., KARTHICK T. *Deployment of IoT-Based Smart Demand-Side Management System with an Enhanced Degree of User Comfort at an Educational Institution* // Energies. – 2023. – Vol. 16. – P. 1–24.
33. REZAEI N., AHMADI A., DEIHIMI M.A. *Comprehensive Review of Demand-Side Management Based on Analysis of Productivity: Techniques and Applications* // Energies. – 2022. – Vol. 15. – P. 1–28.
34. SANDHU H.S., FANG L., GUAN L. *Forecasting day-ahead price spikes for the Ontario electricity market* // Electric Power Systems Research. – 2016. – Vol. 141. – P. 450–459.
35. SHAH A.S., NASIR H., FAYAZ M., LAJIS A. ET AL. *A Review on Energy Consumption Optimization Techniques in IoT Based Smart Building Environments* // Information. – 2019. – Vol. 10. – P. 1–34.
36. SILVENTE J., KOPANOS G.M., PISTIKOPOULOS E.N., ESPUNA A. *A rolling horizon optimization framework for the simultaneous energy supply and demand planning in microgrids* // Applied Energy. – 2015. – Vol. 155. – P. 485–501.
37. SINGH N., MOHANTY S.R., MISHRA K.K., NERI F. *A Review of Electricity Price Forecasting Problem and Techniques in Deregulated Markets* // Int. Journal of Economics and Statistics. – 2017. – Vol. 5 – P. 101–112.
38. TIAN C., MA J., ZHANG C., ZHAN P.A. *Deep Neural Network Model for Short-Term Load Forecast Based on Long Short-Term Memory Network and Convolutional Neural Network* // Energies. – 2018. – Vol. 11. – P. 1–13.

39. UGURLU U., OKSUZ I., TAS O. *Electricity Price Forecasting Using Recurrent Neural Networks* // Energies. – 2018. – Vol. 11. – P. 1–23.
40. VORONIN V., NEPSHA F., KRASILNIKOV M. *Short term forecasting peak load hours of regional power systems using machine learning methods* // Cigre science & Engineering. – 2023. – Vol. 29. – P. 1–18.
41. WANG Y., WU L. *On practical challenges of decomposition-based hybrid forecasting algorithms for wind speed and solar irradiation* // Energy. – 2016. – Vol. 112. – P. 208–220.
42. WERON R. *Electricity price forecasting: A review of the state-of-the-art with a look into the future* // Int. Journal of Forecasting. – 2014. – Vol. 30. – P. 1030–1081.
43. YADAV A.K., CHANDEL S. *Solar radiation prediction using Artificial Neural Network techniques: a review* // Renewable and Sustainable Energy Reviews. – 2014. – Vol. 33. – P. 772–781.
44. YANG F., LI W., LI C., MIAO Q. *State-of-charge estimation of lithium-ion batteries based on gated recurrent neural network* // Energy. – 2019. – Vol. 175. – P. 66–75.
45. ZHANG Q., LIU B., ZHOU F., WANG Q. ET AL. *State-of-charge estimation method of lithium-ion batteries based on long-short term memory network* // IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. – 2018. – P. 1–7.

ENERGY CONSUMPTION OPTIMIZATION OF ENTERPRISE WITH LOCAL GENERATORS AND ENERGY STORAGE DEVICES

Oleg Maryasin, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, PhD in technique, associate professor (maryasin2003@list.ru).

Artem Plohotnyuk, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, graduate student (admin@nixson.ru).

Abstract: This paper considers the energy consumption optimization for an enterprise using both the centralized power grid, local generators and energy storage systems. To solve this problem, the authors suggest a heuristic algorithm for the energy consumption optimization of an enterprise, including the solution of a linear programming problem. To reduce the risks of significant discrepancies between the scheduled and actual power consumption profiles, one can use the optimal energy consumption scheduling algorithm with a moving scheduling horizon. The optimal energy consumption scheduling problem solved in this paper has additional restrictions that can result in the smoothing of the optimal power consumption profile of the enterprise, provided the power of local generators and storage devices is enough. This facilitates the implementation of such energy consumption profile of the enterprise, since it does not require a sharp change in operating modes, reconfiguration of equipment and changes in the intensity of work of enterprise personnel. The heuristic algorithm proposed by the authors makes it possible to implement additional conditions, and, at the same time, avoid reducing the optimal energy consumption scheduling problem of the enterprise to a linear-integer optimization problem. This article provides an example of energy consumption optimization for a small enterprise featuring two power consumers, as well as various local generators and power storage devices.

Keywords: energy consumption optimization, optimal energy consumption scheduling, renewable energy sources, micro smart grid, linear programming.

УДК 620.92

ББК 31.281

DOI: 10.25728/ubs.2023.106.7

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.Н. Бурковым.*

Поступила в редакцию 21.09.2023.

Дата опубликования 30.11.2023.

**ИННОВАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ РЕГИОНОВ
РОССИЙСКОЙ АРКТИКИ: СТРУКТУРНЫЕ
ОСОБЕННОСТИ, СЦЕНАРИИ РАЗВИТИЯ
И АСПЕКТЫ УПРАВЛЕНИЯ
(ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДИКИ DEA-АНАЛИЗА)¹**

Рослякова Н. А.²

*(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

Волков А. Д.³, Тишков С. В.⁴

*(Институт экономики Карельского научного центра РАН,
Петрозаводск)*

Целью настоящей работы является выявление особенностей структурных взаимосвязей между элементами инновационных систем, актуальных для формирования эффективных моделей управления инновационным развитием арктических регионов. В исследовании применялась методика DEA-анализа (Data Envelopment Analysis). Объектом исследования выбраны регионы, полностью или частично входящие в европейскую часть Арктической зоны Российской Федерации (АЗРФ). В Модели 1 в качестве затратных (входных) параметров рассмотрены «затраты на исследования» и «затраты на технологические инновации», в качестве результирующих (выходных) параметров – «выбросы загрязняющих веществ в воздух», «производительность труда», «количество разработанных технологий», «количество используемых технологий». В Модели 2 затратными (входными) параметрами являются: «затраты на исследования», «затраты на технологические инновации», «выбросы загрязняющих веществ в воздух», в качестве результирующих (выходных) параметров приняты «производительность труда», «количество разработанных технологий», «количество используемых технологий», «объем инновационной продукции». В рамках полученных результатов предложен методический подход выявления типов структурных взаимосвязей между элементами региональной инновационной системы (РИС) с использованием инструментария DEA. Осуществлены оценки эффективности сложившихся в рассматриваемых регионах структур взаимосвязи между элементами РИС. Разработаны сценарии перехода от фактических к оптимальным значениям параметров РИС.

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-28-00693, <https://rscf.ru/project/23-28-00693/>.

² Наталья Андреевна Рослякова, к.э.н. (na@roslyakova24.ru).

³ Александр Дмитриевич Волков, к.э.н. (kov8vol@gmail.com).

⁴ Сергей Вячеславович Тишков, к.э.н. (insteco_85@mail.ru).

Ключевые слова: региональные инновационные системы (РИС), арктические регионы, DEA-анализ, структурные взаимосвязи элементов РИС, сценарии развития РИС.

1. Введение

Последние десятилетия характеризуются ростом интенсивности инновационных процессов в северных и арктических территориях, традиционно относимых к неблагоприятным для ведения хозяйственной деятельности [34]. При этом фокус научного поиска смещается в сторону исследования инновационных систем различных уровней, дифференцируемых в соответствии с пространственными особенностями процессов, обеспечивающих продуцирование и коммерциализацию новшеств [1]. Стrатегическая задача развития национальной инновационной системы, опирающейся на региональные возможности инновационного развития, обуславливает необходимость формирования инновационных систем российских регионов. Выявление ресурсов и факторов инновационного развития регионального уровня становится первейшей задачей разработки региональных стратегий инновационного развития.

Особым вызовом является противоречие развития российской Арктики, сформировавшееся в результате схождения трех тенденций. Первая из них заключается в сохраняющемся преобладании сырьевого характера экономик арктических регионов, истощительного для окружающей среды и не обеспечивающего долгосрочное устойчивое развитие местных сообществ. Длительное время Арктика была сырьевой базой обеспечения производств на территории всей страны, а также вносила значимый вклад в формирование экспортных доходов. На протяжении нескольких десятилетий это позволяло формировать финансовую основу экономического роста и относительного социального благополучия страны. Второй значимой тенденцией является то, для самих арктических регионов сохранявшийся инерционный путь развития привел к обострению экологого-экономических и социальных проблем. Что выразилось в росте числа аварий, накоплении экологического ущерба, грозящего разрушением

уникальных экосистем [25, 26], сохраняющемся оттоке населения из арктических регионов [31]. Эти аспекты являются яркими признаками неустойчивого характера функционирования региональных социально-экономических систем. Третьим и наименее изученным аспектом является то, что обозначенные проблемные тенденции развития обостряются исключительными по своей силе внешними шоками. Преодоление которых практически невозможно в рамках сложившейся парадигмы развития [32]. Для достижения национального приоритета развития Арктической зоны прежние модели развития потеряли свою актуальность. Новые вызовы требуют формирования подходов в управлении, основанных на принципах интенсификации инновационных процессов в развитии ключевых системообразующих видов экономической деятельности. Данный аспект исключительно важен для обеспечения технологического суверенитета в стратегической перспективе. Это обуславливает актуальность формирования научных основ управления инновационным развитием арктических территорий.

В отличие от российских регионов-лидеров в арктических регионах процесс формирования инновационных систем во всей полноте не завершился. В существующих условиях его необходимо рассматривать в тесной увязке с условиями становления специального экономического режима Арктической Зоны Российской Федерации (АЗРФ), формирующего современную основу для усиления инновационного потенциала Российской Арктики.

В условиях российских арктических регионов, в отличие от европейских, инновационная подсистема экономики продолжает играть второстепенную роль, что отражается и в относительном отставании уровня инновационного развития [23]. Инновационные системы регионов Арктической зоны России характеризуются как значительно дифференцированные по отдельным показателям, в частности – инновационности, инновационной активности, инновационной восприимчивости [18]. Несмотря на существование достаточно обширного спектра исследований, рассматривающих как отдельные аспекты инновационного развития регионов АЗРФ [20], так и интегральные индексы и рейт-

тинги инновационного развития (например, [16]). В то же время неполнота развития инновационных систем требует обратить особое внимание на характер сложившейся структуры взаимосвязей между элементами инновационной системы. Для решения данной исследовательской задачи наиболее эффективным, но до настоящего времени практически неиспользуемым методом является DEA-анализ (Data Envelopment Analysis) [21, 30]. Целью настоящей работы является выявление особенностей структурных взаимосвязей между элементами инновационных систем, актуальных для формирования эффективных моделей управления инновационным развитием арктических регионов.

Объектом исследования выбраны те регионы, полностью или частично входящие в европейскую часть Арктической зоны Российской Федерации, на территориях которых сосредоточен основной экономический потенциал АЗРФ, локализованы транспортные узлы, порты и инфраструктура Северного морского пути. Данные регионы были и остаются плацдармом освоения Арктики и играют ключевую роль в поддержании контроля над арктическим пространством.

2. Обзор литературы и исследований по теме региональных инновационных систем

В разных странах сложились разные типы инновационных систем, и, соответственно, разные механизмы государственного регулирования инновационной деятельности. В то же время все инновационные системы развиваются по общим правилам, законам и закономерностям экономического развития. Изучению фундаментальных основ и механизмов развития инновационных систем в региональной проекции посвящена концепция тройной спирали, разработанная Х. Ицковицем и Л. Лейдесдорфом [24]. Среди работ отечественных ученых следует выделить концепцию О.Г. Голиченко, которая была разработана в 2003 г. [5]. В структуре инновационной системы автор выделяет макроструктуры:

- предпринимательскую среду;
- среду, занимающуюся генерацией и производством знаний;

- среду, которая через свои механизмы занимается передачей знаний;
- государство.

Аспект регионального управления и координации работы региональных инновационных систем проводится государством, что определяет его особую роль в этом процессе.

В науке на данный момент сложилось три основных подхода, характеризующих специфику региональных инновационных систем.

1. В работах С. Меткалфа [27], Д. Норта [28], Л.М. Гохберга [7] и др. исследователей разрабатывается институциональный подход, региональная инновационная система представлена комплексом условий развития и механизмов преодоления институциональных барьеров, с которыми сталкиваются организации, генерирующие научные знания, при реализации передовых технологических решений. В работе [27] было доказано, что благодаря усилиям по созданию институциональных систем по внедрению нововведений развитые в экономическом плане страны оказались на лидирующих позициях в научно-технологическом развитии, коммерциализации результатов интеллектуальной деятельности, внедрении и продвижении инновационной продукции на международные рынки.

2. В исследованиях в рамках сетевого подхода (Р. Штернберга [33], М.А. Каменских [10]) региональная инновационная система представлена комплексом взаимоотношений и механизмов усиления коллaborации, направленных на получение эффектов синергии при взаимодействии компаний-потребителей и генераторов инноваций.

3. В исследованиях в рамках комплексного системно-функционального подхода (Х. Отта, П. Ронде [29], Л.А. Горюновой [6] и др.) региональная инновационная система представляется как совокупность структурных элементов и их взаимосвязей. Концептуальным посылом данного подхода является концентрация усилий и ресурсного потенциала различных элементов системы на определенных функциональных свойствах в рамках инновационного процесса и их соорганизация для получения системных эффектов.

В рамках авторского подхода нами предложено следующее определение РИС, от которого мы и отталкиваемся в аналитической работе: региональная инновационная система – это сегмент национальной инновационной системы, состоящий из комплекса активно взаимодействующих учреждений и организаций различных форм собственности, находящихся на территории региона и осуществляющих процессы создания и распространения новых технологий, а также организационно-правовые условия их хозяйствования, определенные совокупным влиянием государственной научно-технической политики, проводимой на федеральном уровне, и стратегией социально-экономического развития региона.

Следует отметить, что разработка научных основ регулирования инновационного развития арктических территорий как особого объекта управления сталкивается с рядом трудностей и противоречий. Арктические территории в качестве объектов стратегических приоритетов были выделены совсем недавно в рамках Стратегии развития арктической зоны РФ, институциональные основы социально-экономического развития арктического макрорегиона находятся на этапе активного формирования [4]. Неопределенность стратегических перспектив и путей их достижения усиливается периодом глобальной геополитической нестабильности и трудностями в определении ресурсного потенциала развития в текущих условиях. Тем не менее указанные аспекты только повышают актуальность научных исследований в рассматриваемом предметном поле. Переход к новой модели развития требует выработки новых подходов к оценке эффективности перспективных драйверов роста и структурных взаимодействий между элементами инновационных систем регионов.

До этого исследования потенциала экономического развития и оценка эффективности производились преимущественно в рамках проектного подхода, актуального в отношении проектов разработки месторождений полезных ископаемых. Именно поэтому основной фокус оценки эффективности был направлен на операционную эффективность в виде мощности добычи и объема приращения, а также на финансовую эффективность

добывающих проектов [13, 15]. Исследование инновационного аспекта данных процессов было оставлено за рамками государственного финансирования и реализовывалось компаниями-операторами проектов исходя из своих возможностей и потребностей. Можно сказать, что единственным аспектом, через который производилась оценка инновационных, а также социальных эффектов, был показатель экологической нагрузки проекта (например, [12]). В этом отношении следует отметить, что методологические принципы анализа инновационных систем в Арктике разработаны недостаточно. Чаще всего исследователи используют рейтинговые и индексные методы, направленные на ранжирование и свертку доступных показателей, описывающих инновационные системы регионов [2, 9]. Следует заметить, что статистический учет данных по объемам инновационной продукции и связанным показателям объективно затруднен, ввиду отсутствия достаточной проверки и контроля достоверности информации, предоставляемой хозяйствующими субъектами в органы статистики.

Регионы Арктической зоны Российской Федерации характеризуются значительной дифференциацией отдельных составляющих инновационного потенциала, их неравномерной динамикой в пространственном разрезе [8]. Проявлением этих процессов является сокращение доли инновационных работ и услуг в общем объеме отгруженных товаров, выполненных работ, услуг в ряде регионов. В большинстве регионов не наблюдается выраженной и стабильной положительной динамики по данному показателю [11]. Это препятствует компенсаторному росту внутреннего инновационного потенциала регионов, позволяющему преодолеть негативные последствия технологической блокады. В то же время в отношении арктических регионов В.А. Цукерманом отмечается выраженная корреляция между показателями развития инновационной экономики, инвестициями в основной капитал, фондооруженностью, прямыми иностранными инвестициями, разработанными и используемыми передовыми производственными технологиями [17].

В условиях санкционных ограничений объективно возрастают и экологические риски. При этом для Российской Арктики

учет экологических параметров инновационного развития особенно актуален в контексте стратегической задачи снижения антропогенного воздействия на арктические экосистемы, в том числе за счет экологических инноваций в промышленности (например, [14]).

В то же время в АЗРФ в крайне малой степени развита инновационная среда в виде технопарков, инкубаторов и т.п. Именно этим обусловлен низкий выпуск инновационной продукции. Соответственно, весь инновационный процесс концентрируется на добывающих предприятиях, которые аккумулируют инновации, но выпускают традиционную продукцию. И здесь у компаний есть определенные ресурсы, которые могут быть направлены на инновации, а могут быть распределены иным образом.

В этом контексте использование инструментария DEA в рамках анализа структурных взаимосвязей между элементами инновационной системы позволяет отойти как от индексного метода, так и от проектного подхода. Использование инструментария DEA в рамках комплексного системно-функционального подхода при оценке эффективности РИС опирается на анализ эффектов, возникающих на предприятиях регионов, внедряющих инновации. Преимуществом использования DEA является его непараметрический характер. В отличие от эконометрических методов оценки производственной функции и кривой производственных возможностей указанный инструментарий позволяет идентифицировать особенности структуры взаимосвязей и параметров эффективности. Ввиду существенной неоднородности как продукции традиционных видов деятельности, так и продукции инновационного характера данный инструментарий позволяет не выдвигать исходные предположения о пропорциях преобразования ресурсов в результаты инновационной деятельности. В качестве примера можно привести работы [19, 22, 35], где была предложена оценка эффективности региональных инновационных систем с применением методики DEA-анализа.

В представленном исследовании применены две модели в рамках методики DEA-анализа. Данная методика позволяет

определить структуру внутренних взаимосвязей между входными и выходными параметрами развития региональных инновационных систем, которая изначально предполагается неизвестной. Дополнительным преимуществом предлагаемого инструментария является возможность полноценного учета спектра вариации параметров элементов региональных инновационных систем посредством оценки спецификации с переменным масштабом VRS (variable returns on scale). Это позволит корректно, с учетом предположения о постоянном масштабе CRS (constant returns to scale), более подходящем для гомогенных групп регионов) определить место каждого региона в пространстве РИС Арктики.

3. Материалы и методы

Применение инструментария DEA предполагает отыскание единиц наблюдения, характеризующихся наибольшей эффективностью (с максимальным значением отношения полученных результатов (выходов) к затраченным ресурсам (входам)). На этой основе осуществляется дальнейшее определение как наиболее эффективных регионов, так и параметров трансформации для менее эффективных регионов. По результатам исследования было построено две модели, отражающие разные наборы затратных и результирующих параметров. Каждая модель может быть ориентирована на вход (input-oriented) и на выход (output-oriented). В первом случае речь идет об экономии затрат при условии, что значения показателей инновационного развития (выходные параметры) либо остаются на текущем уровне, либо увеличиваются в результате осуществленных трансформаций. Во втором случае речь идет о наращивании результирующих параметров (увеличении значений выходных параметров модели) при условии, что осуществленные затраты (входные параметры) остаются либо на текущем уровне, либо уменьшаются. Содержательная сторона рассмотрения разных модификаций модели заключается в учете различных ограничений развития инновационных систем, обуславливающих выбор комбина-

ции приоритетов развития. Данные спецификации отражают две стратегии: экономии затрат и максимизации результатов.

Модель 1 в качестве затратных параметров, обеспечивающих развитие, предполагает использование двух параметров: «затраты на исследования и разработки» и «затраты на технологические инновации». В качестве результирующих параметров рассмотрены «выбросы загрязняющих веществ в воздух», «производительность труда», «количество разработанных технологий», «количество используемых технологий». В рамках первой модели мы сознательно ушли от рассмотрения параметра «инновационная продукция» как результирующего параметра, понимая, что арктические регионы имеют хозяйственную систему, ориентированную в первую очередь на выпуск ресурсной продукции. В этих условиях технологические инновации могут внедряться достаточно активно, не приводя, однако, к приросту значений выпуска инновационной продукции в региональной экономике. В то же время происходит стимуляция роста выпуска ресурсной продукции в рамках традиционных отраслей специализации.

В Модели 2 в качестве затратных (входных) рассмотрены уже три параметра, а именно: «затраты на исследования», «затраты на технологические инновации», «выбросы загрязняющих веществ в воздух». В качестве результирующих рассматриваются четыре параметра: «производительность труда», «количество разработанных технологий», «количество используемых технологий», «объем инновационной продукции».

Добавление параметра «объем инновационной продукции» во вторую модель (в качестве одного из целевых для развития региональной экономики) осуществляется для идентификации системных эффектов, обусловленных видами деятельности, общепризнанно относимыми к перечню инновационных. Для более полного учета фактора экологического благополучия регионов европейской части АЗРФ, в качестве входящего (затратного) был введен параметр «выбросы загрязняющих веществ в воздух». Его введение позволяет оценить эффективность системы использования экологического потенциала регионов

как ресурса для достижения целевых значений экономических и инновационных показателей в регионах.

В качестве фактологической базы использовались данные Росстата по соответствующим показателям за 2010–2020 гг. Все денежные показатели были приведены к сопоставимому виду через индекс промышленных цен (к уровню 2010 г.). Выбор дефлятора обусловлен изначальным акцентом исследования на производственно-хозяйственной сфере, как ключевом базисе инновационно-технологического развития региона. При этом аспект социальных инноваций остается за рамками нашего исследования, составляя его ограничение: в данном исследовании мы концентрируем внимание на производственной сфере. В этом контексте процедура преобразования показателей и переход от абсолютных к удельным значениям опирался не на показатель численности постоянного населения, проживающего в регионе, а на показатель численности занятых в экономике региона.

4. Результаты исследования

4.1. РЕЗУЛЬТАТЫ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ

Для регионов АЗРФ характерна неустойчивая динамика показателей инновационного развития. В разрезе регионов наблюдаются как резкие всплески значений показателей (например, по показателю объема выпуска инновационной продукции в Архангельской области в 2017 г., рис. 1), так и значительные спады.

С другой стороны, динамика значений экологического параметра («выбросы загрязняющих веществ в атмосферу») характеризуется устойчивостью в 2010–2020 гг. Указанная выше неустойчивая динамика показателей инновационного развития сопровождается их значительной межрегиональной дифференциацией, что характерно и для показателей общего экономического развития. Отдельные характеристики арктических регионов СЗФО в 2020 г. представлены в таблице 1.

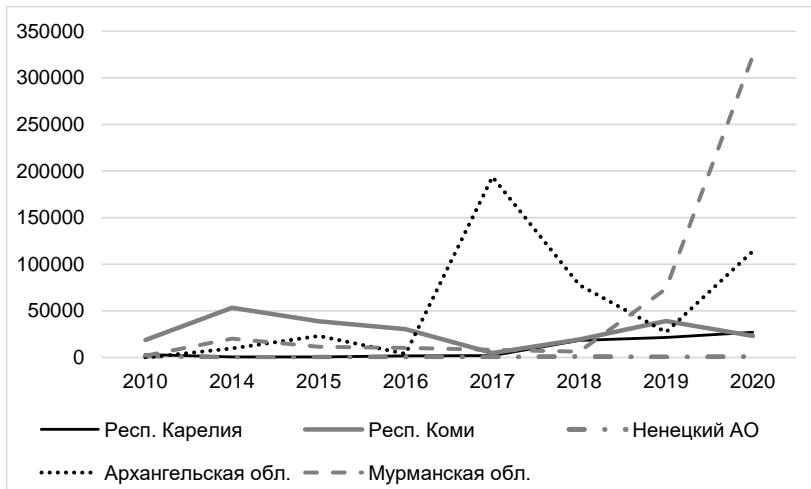


Рис. 1. Динамика объема выпуска инновационной продукции в регионах европейской части АЗРФ в 2010–2020 гг.

Таблица 1. Характеристики экономического и инновационного развития регионов европейской части АЗРФ в 2020 г.

Регионы	ВРП на душу населения, тыс. руб.	Затраты на исследования и технолог. инн., руб. на одного занят.	Кол-во разработанных и использ. передовых производственных технологий, ед.
Архангельская область без АО (Arkhang.)	514 200,4	7431,1	1141
Мурманская область (Murman)	1 072 337,1	18018,7	1535
Республика Карелия (Rkarel)	522 245,3	22340,3	953
Республика Коми (Rkomy)	749 219,3	19626,8	1404
Ненецкий автономный округ (Nenezk)	5 206 287,1	1217,9	143

Указанные данные легли в основу реализации инструментария DEA с параметрами, описанными в разделе «Материалы и методы», что позволяет получить следующие оценки эффективности в рамках региональных инновационных систем (таблицы 2 и 3).

Таблица 2. Оценки эффективности РИС европейской части АЗРФ по различным спецификациям DEA (Модель 1) в 2020 г. (получены авторами)

Объект наблюдения	CRS-input	CRS-output	VRS-input	VRS-output
Rkarel_2020	0,201417	0,201417	0,220486	0,799413
Rkomy_2020	0,150248	0,150248	0,164468	0,799464
Nenezk_2020	1	1	1	1
Arkhang_2020	0,166046	0,166046	0,259343	0,533645
Murman_2020	0,121445	0,121445	0,123271	0,961685

Таблица 3. Оценки эффективности РИС европейской части АЗРФ по различным спецификациям DEA (Модель 2) в 2020 г. (получены авторами)

Объект наблюдения	CRS-input	CRS-output	VRS-input	VRS-output
Rkarel_2020	0,854268	0,854268	1	1
Rkomy_2020	0,55759	0,55759	0,720428	0,848728
Nenezk_2020	1	1	1	1
Arkhang_2020	0,9111	0,9111	1	1
Murman_2020	0,862951	0,862951	1	1

Применение модели с переменным масштабом, ориентированной на максимизацию результирующих показателей, позволяет получить значительно более высокие оценки эффективности РИС. Иными словами, при заданных и неизменных входных параметрах («затраты на исследования и инновации», «выбросы загрязняющих веществ воздух») и максимизации значений выходных («производительность», «объем инновационной продукции», «разрабатываемые и используемые технологии») возможно достижение более высокого уровня эффективности, чем при иной спецификации (input-oriented). Мы видим, что наращивание значений результирующих показателей функциониро-

вания РИС возможно и без увеличения объема затрат. Однако получение таких результатов требует воздействия на иные факторы развития инновационных систем (например, институциональную среду), за счет направленных и последовательных управленческих усилий. В разрез к этому выводу, в практике управления РИС европейской части Арктической зоны наблюдается сокращение затрат при минимизации усилий по распространению инноваций. Также сопоставляя результаты, представленные в таблицах 2 и 3, можно видеть, что учет параметра «объем инновационной продукции» повышает оценки эффективности. Включение данного параметра в число определяющих итоговую эффективность РИС, позволяет идентифицировать системные эффекты, обусловленные видами деятельности, традиционно рассматриваемыми как инновационные.

В данном контексте более подробного рассмотрения заслуживает оценка Моделей 1 и 2 по спецификации VRS-output (модели с переменным масштабом, ориентированные на максимизацию результирующих показателей). Оценки реальных и оптимальных параметров представлены в таблицах 4 и 5, где входные параметры имеют белую заливку, а выходные – серую).

Таблица 4. Фактические данные и оценки оптимального уровня факторов (Projection), полученные с помощью спецификации VRS-output Модели 1 для 2020 г. (получены авторами)

	Факт (ZatrIssled)	Projection (ZatrIssled)	Факт (ZatrInnov)	Projection (ZatrInnov)
RKarel	4083,43	1028,85	18256,82	189,10
RKomy	5474,17	1028,79	14152,66	189,40
Nenezk	1028,85	1028,85	189,10	189,10
Arkhang	3306,54	1028,85	4124,54	189,10
Murman	8146,43	1028,76	9872,24	189,55
	Факт (VibrVozd)	Projection (VibrVozd)	Факт (Proizvod)	Projection (Proizvod)
RKarel	0,50	1,89	0,99	2,25
RKomy	0,91	1,89	2,23	2,79
Nenezk	1,89	1,89	2,25	2,25
Arkhang	0,28	1,89	0,82	2,25
Murman	0,57	1,89	2,97	3,09

Таблица 4 (продолжение).

	Факт (RazrabTehn)	Projection (RazrabTehn)	Факт (IspolzTehn)	Projection (IspolzTehn)
RKarel	0	0	0,0037	0,0046
RKomy	0	0	0,0037	0,0046
Nenezk	0	0	0,0046	0,0046
Arkhang	0	0	0,0024	0,0046
Murman	0	0	0,0044	0,0046

Таблица 5. Фактические данные и оценки оптимального уровня факторов (Projection), полученные с помощью спецификации VRS-output для Республики Коми согласно Модели 2 для 2020 г. (получены авторами)

	Факт	Projection
VibrVozd	0,91	0,91
ZatrIssled	5474,17	5474,16
ZatrInnov	14152,66	8807,60
	Факт	Projection
InnovProd	23186,60	181892,34
Proizvod	2,23	2,63
RazrabTehn	0	0
IspolzTehn	0,0037	0,0043

Мы видим, что согласно Модели 1 (таблица 4), где в качестве единственного региона с оптимальными результатами инновационной деятельности выделяется НАО, затраты и на инновации, и на исследования в других регионах должны быть уменьшены существенно. Это обусловлено тем, что в рамках такой системы взаимосвязей только хозяйственная система НАО позволяет иметь соответствующий уровень производительности труда, в первую очередь благодаря высокой концентрации и малой численности работников. Остальные регионы ввиду более диверсифицированной экономики и большей населения существенно уступают по параметру производительности труда в расчете на одного работника. Следовательно, важно подчеркнуть, что поскольку для других регионов АЗРФ не целесообразно и объективно невозможно прийти к парамет-

рам РИС НАО, важно определить параметры, которые позволят им повысить эффективность функционирования РИС с учетом их региональной специфики.

Применение обеих output-oriented моделей позволяет говорить о структурных различиях в инновационных системах, требующих не пропорциональных (Proportionate Movement), а трансформационных изменений (Slack Movement) для достижения параметров максимальной эффективности. Допуская сценарий избегания трансформационных изменений в РИС и копирования структурных взаимосвязей РИС НАО для других регионов достижение максимизации значений результирующих параметров требует сокращения затрат на исследования от 3 до 8 раз, а затрат на инновации – от 22 до 100 раз. В рамках данного допущения предполагается также увеличение значений входного параметра «выбросы в воздух» от 2 до 7 раз и сопутствующее увеличение производительности труда на величину, варьирующуюся в пределах от 4 (Мурманская обл.) до 274 процентных пунктов (п.п.) (Архангельская обл.), а также показателя используемых технологий на величину до 100 п.п. (Архангельская обл.). В части разработанных технологий предполагается сохранение нулевых значений. Важно отметить, что Модель 1 наглядно показывает принципиальное отличие структур взаимосвязей РИС НАО от остальных регионов. Очевидным является и то, что указанные выше изменения в параметрах инновационного развития регионов, необходимые для копирования особенностей структуры РИС НАО, не отвечают логике экономических и инновационных процессов.

Оценки по Модели 2 (таблица 5) представляются более взвешенными, поскольку РИС НАО в ее рамках сохраняет свою эффективность, и при этом более корректно отображаются структурные взаимосвязи РИС остальных арктических регионов. РИС четырех регионов функционируют в оптимальном состоянии. Республика Коми является единственным регионом, РИС которого требует корректировок затратных и результирующих параметров для достижения целевых структурных пропорций, присущих РИС других регионов. Для входных параметров «выбросы в воздух» и «затраты на исследования и разработ-

ки» оптимальные оценки совпадают с фактическими значениями. Необходимые трансформационные изменения РИС будут сопровождаться сокращением значения входного параметра «затраты на технологические инновации» на 60 п.п. При увеличении значения выходного параметра «объем инновационной продукции» в 7,5 раз. Основной вклад в достижение данного результата приходится на трансформационные изменения (их вклад составляет 97%). В отношении остальных результирующих параметров необходимы меньшие изменения: прирост производительности труда должен составить 18 п.п., а рост количества используемых технологий – 16 п.п.

4.2. РЕЗУЛЬТАТЫ ПОСТРОЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Преимуществом инструментария DEA относительно стандартных методов, рассмотренных в обзорном разделе, является возможность работать со значительным числом затратных и результирующих переменных. С одной стороны, это позволяет более полно оценить структуру взаимосвязей региональных инновационных систем, но, с другой стороны, затрудняет представление и интерпретацию результатов. Оптимальным в рамках данной работы является представление поверхностей в трехмерном пространстве на основе квадратичного сглаживания, полученных с использованием программного пакета Statistica 10. Для Модели 1 по двум осям в горизонтальной плоскости были отражены входные параметры «затраты на исследования» (ZatrIssled) и «затраты на инновации» (ZatrInnov), по вертикальной оси было отложена полученная с помощью инструментария DEA оценка эффективности РИС (Score) (рис. 2, 3). Для Модели 2 по осям были отражены три входных параметра: «затраты на исследования и разработки» (ZatrIssled), «затраты на технологические инновации» (ZatrInnov), «выбросы загрязняющих веществ в воздух» (VibrVozd) (рис. 4, 5). Для каждой модели было построено по два графика на основе фактических и оценочных (оптимальных) параметров. Данный способ представления позволяет установить структурные отличия РИС с соответствующими фактическими и оптимальными входными параметрами.

Графическое отображение результатов моделирования на основе фактических затратных параметров показало:

1) вариация затрат на инновации в меньшей степени влияет на конечную оценку эффективности РИС – высокий уровень эффективности (Score) наблюдается и для высоких, и для низких значений затрат на инновации;

2) вариация значений параметра «затраты на исследования» обуславливает три типа структурных взаимосвязей между параметрами РИС: а) сочетание низкого уровня затрат и высокой эффективности (правая сторона плоскости типа «гамак»), который характерен для экономики НАО; б) сочетание высокого уровня затрат на исследования и высокой эффективности (левая сторона плоскости типа «гамак»), которая характеризует регионы с более диверсифицированной экономикой (Мурманская обл.).

3М Графики поверхностей для Score и ZatrInnov и ZatrIssled
Таблица данных 3 3v*40c
Score = 1,0603-1,6384E-5*x-0,0002*y+9,0366E-10*x*x-1,1618E-9*x*y+1,89E-8*y*y

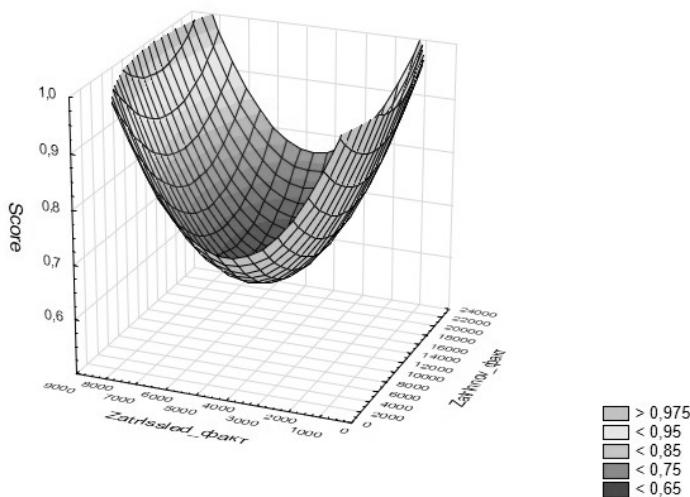


Рис. 2. Соотношение меры эффективности и фактических затратных параметров в рамках Модели 1 для регионов европейской части АЗРФ в 2010–2020 гг.

3) среднему уровню затрат на инновации соответствует структура взаимосвязей РИС, ведущая к наименьшей эффективности (провал в «гамаке»).

Опираясь на выявленные особенности взаимосвязей структур РИС можно сделать вывод: затраты на инновации в арктических регионах России должны носить целевой характер, направленный или на максимизацию результативности (производительности труда) отрасли специализации за счет затрат на инновации (сценарий НАО), или на максимизацию выпуска инновационной продукции за счет повышения эффективности затрат на исследования (сценарий Мурманской обл.).

3М Графики поверхностей для Score и Projection (ZatrInnov) и Projection (ZatrIssled)

Таблица данных2 3x*40c

$$\text{Score} = 0,3405 + 7,8021 \cdot 10^{-5} \cdot x + 0,0005 \cdot y + 8,2274 \cdot 10^{-10} \cdot x^2 - 7,0296 \cdot 10^{-8} \cdot x \cdot y - 6,8959 \cdot 10^{-8} \cdot y^2$$

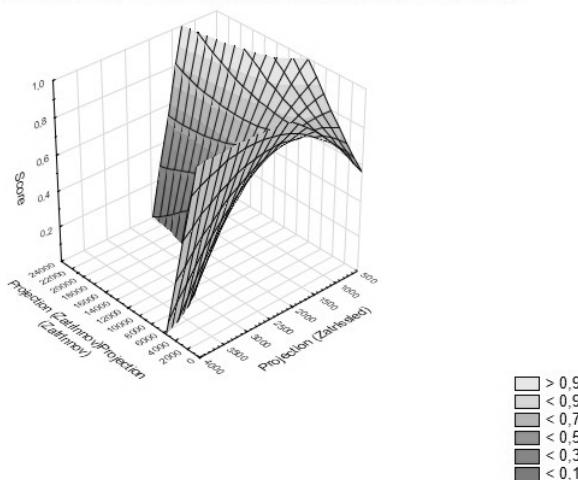


Рис. 3. Соотношение меры эффективности и оптимальных затратных параметров в рамках Модели 1 для регионов европейской части АЗРФ в 2010–2020 гг.

Представленный на рис. 3 график иллюстрирует, что в рамках применения Модели 1 наибольшую эффективность демонстрирует структура РИС НАО, для которой значения фактических и оптимальных затратных и результирующих параметров

совпадают. Для других регионов актуальны следующие сценарии повышения эффективности:

- приоритет затрат на инновации (заимствование) при минимизации затрат на исследования (разработку собственных инноваций) (правое крыло вверху – применение сценария НАО, стратегия инноватора-имитатора);
- приоритет затрат на исследования при минимальных затратах на инновации (заимствование технологий извне) (левое крыло в верхней части рисунка) – применение сценария Мурманской обл., стратегия развития и диверсификации РИС.

Важнейшей особенностью графического отображения Модели 2 (рис. 4, 5) является сохранение типа структуры взаимосвязи фактических и оптимальных значений затратных параметров (в отличие от Модели 1), что выражается в сохранении общего вида плоскости.

Следует отметить, что на данных графиках по вертикальной оси отображается не уровень эффективности РИС, а уровень выбросов загрязняющих веществ в воздухе, и, следовательно, более высокие уровни плоскости соответствуют уже не более совершенной модели РИС, а менее экологичной структуре взаимосвязей ее элементов. При среднем уровне затрат на исследования и инновации наблюдаются самые низкие значения выбросов загрязняющих веществ в воздухе. Высоким уровням выбросов загрязняющих веществ в воздухе, обозначенным на графиках темными областями в верхних частях проекций, соответствуют сценарии специализации на затратах на инновации, которые ориентированы на рост производительности труда, но не снижают экологическую нагрузку (рис. 4, 5).

Можно говорить о развитии менее экологичных и более производительных технологий, которые закладывают риски техногенных катастроф и снижения качества жизни в будущем.

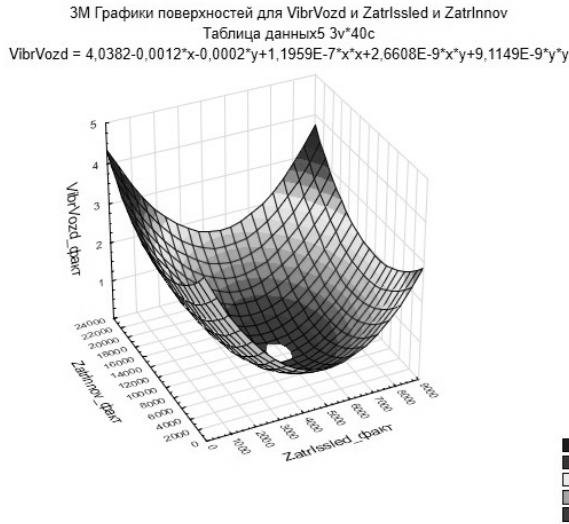


Рис. 4. Соотношение меры эффективности и фактических затратных параметров в рамках Модели 2 для регионов европейской части АЗРФ в 2010–2020 гг.

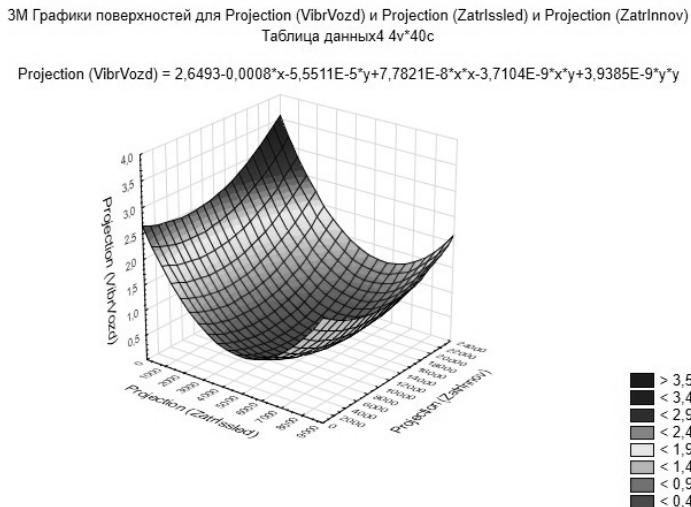


Рис. 5. Соотношение меры эффективности и оптимальных затратных параметров в рамках Модели 2 для регионов европейской части АЗРФ в 2010–2020 гг.

Сочетание параметров, показывающих наибольшую эффективность РИС, отражено на графиках в средней части (светлая заливка). Помимо двух описанных выше моделей, с приоритетами на затратах на исследования и затратах на инновации, можно выделить третью. Для нее характерен возрастающий уровень затрат на инновации и сохраняющийся низкий уровень затрат на исследования, что может говорить о реализации сценария технологической модернизации производств при обеспечении приемлемых показателей экологической нагрузки, что обеспечивает приемлемые значения эффективности структуры РИС.

Давая резюмирующую характеристику арктических РИС можно говорить о том, что они не являются сугубо автономными образованиями. Для Арктики важны переливы инноваций из других регионов, тогда их РИС могут сконцентрироваться на специфических исследованиях и результатах. Данная стратегия соответствует сценарию инноватора-имитатора.

5. Выводы

Полученная оценка моделей различных спецификаций позволяет утверждать, что в системе приоритетов для арктических регионов должно быть снятие барьеров для распространения инноваций, формирование благоприятной институциональной среды, стимулирование развития инновационной среды («рэдинесс-среды» в терминах С.Д. Бодрунова [3]), позволяющее даже в условиях сохранения или уменьшения затрат на исследования наращивать значения показателей результативности РИС (выпуск инновационной продукции). Для регионов с более наукоемкой и диверсифицированной экономикой затраты на исследования трансформируются в рост количества результатов интеллектуальной деятельности и объемов выпуска инновационной продукции.

Масштабная и быстрая трансформацию затрат в конкретные технологические результаты в виде количества используемых технологий и прироста производительности труда возможна для регионов с концентрированной добывающей промыш-

ленностью (сценарий НАО). Оценка особенностей структуры РИС с использованием инструментария DEA позволила обосновать приоритизацию развития РИС в европейской части АЗРФ. Именно концентрация усилий на повышении уровня технологического развития через затраты на инновации или концентрация на увеличении количества РИД через затраты на исследования позволяют региональным инновационным системам получать более высокие оценки эффективности. При этом установлено, что для достижения сбалансированных результатирующих показателей РИС, технологические инновации должны быть направлены не только на рост производительности труда в экономике, но и на улучшение значений экологических параметров. Последний аспект наиболее актуален в условиях риска возрастания техногенных катастроф и падения качества жизни при ужесточении санкционных ограничений и необходимости долгосрочного выстраивания новых технологических цепочек внутри страны. С другой стороны, концентрация всех затрат на экологических технологиях и недостаточный учет других приоритетов технологического развития обусловят отставание в параметрах производительности. Таким образом, мы можем заключить, что экологические параметры при реализации экономической политики не должны выступать в роли целевых. Однако для достижения оптимальных структурных пропорций региональных инновационных систем, обязательной является коррекция базовых параметров (входных переменных) в соответствии с выявленными экологическими ограничениями.

Научно-практическая ценность данной работы заключается в том, что представленные модели позволяют обосновать наиболее эффективные структуры взаимосвязей элементов РИС, обеспечивающие развитие арктических регионов. Результаты вносят вклад в разработку современных подходов к анализу и оценке уровня инновационного развития арктических регионов, актуальных в силу изменяющегося геополитического и геоэкономического контекста инновационного развития Арктической зоны России, расширения ее границ за счет хозяйствственно связанных территорий Севера, а также продолжающегося этапа институционального проектирования развития макрорегиона.

Дальнейшие исследования будут посвящены квантификации структурных взаимосвязей элементов РИС АЗРФ и разработке на этой основе мер государственной политики, направленных на оптимизацию РИС. Особую актуальность это имеет для преодоления последствий внешнего санкционного давления и технологической блокады экономики страны.

Литература

1. АГАРКОВ С.А. *Особенности пространственной организации инновационных процессов в арктическом регионе: вызовы и задачи современности* // Вопросы инновационной экономики. – 2022. – Т. 12, №3. – С. 1759–1786.
2. АРХИПОВА К. *Оценка инновационного развития регионов Арктической зоны Российской Федерации* // МИР (Модернизация. Инновации. Развитие). – 2019. – Т. 10, №2. – С. 261–274.
3. БОДРУНОВ С. *Ноономика*: монография. – М.: Культурная революция, 2018. – 432 с.
4. ВОЛКОВ А., ТИШКОВ С., НИКИТИНА А. *Эволюция механизмов управления экономическим пространством российской Арктики: современный этап* // ARS Administrandi (Искусство управления). – 2022. – Т. 14, №2. – С. 174–201.
5. ГОЛИЧЕНКО О.Г. *Российская инновационная система: проблемы развития* // Вопросы экономики. – 2004. – №12. – С. 16–34.
6. ГОРЮНОВА Л. *Инновационная система региона: Инструменты и механизмы управления*: монография. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2001. – 216 с.
7. ГОХБЕРГ Л. *Национальная инновационная система России в условиях «новой экономики»* // Вопросы экономики. – 2003. – №3. – С. 26–38.
8. ЕГОРОВ Н., БАБКИН А., БАБКИН И., МАРТЫНУШКИН А. *Оценка устойчивости и эффективности инновационного развития субъектов российской Арктики* // Север и рынок: формирование экономического порядка. – 2022. – Т. 25, №2(76). – С. 35–44.

9. ЕГОРОВ Н., КОВРОВ Г. Сравнительная оценка инновационного развития регионов крайнего севера // Арктика и Север. – 2020. – №41. – С. 62–74.
10. КАМЕНСКИХ М., ПОСТНИКОВ В. Исследование особенностей и перспектив развития бизнес-акселератора как института сетевого взаимодействия (на примере Пермского края) // Региональная экономика: теория и практика. – 2019. – Т. 17, №2(461). – С. 369–382.
11. КУЗНЕЦОВА М., ВАСИЛЬЕВА А. Инновационный потенциал регионов Арктической зоны РФ: методика оценки, сравнительный анализ, перспективы развития // Экономические и социальные перемены: факты, тенденции, прогноз. – 2023. – Т. 16, №2. – С. 69–87.
12. ПЕТРОВ И., МЕРКУЛИНА И., ХАРИТОНОВА Т. Научно-методический подход к экологической оценке горнодобывающих и энергетических проектов Арктики // Уголь. – 2023. – №5. – С. 77–83.
13. ПРОЩИНА Ю.С., НАЗАРОВА Ю.А. Совершенствование форм государственной поддержки проектов освоения энергетических ресурсов арктического региона // Вестник РГГУ. Серия «Экономика. Управление. Право». – 2022. – №1. – С. 126–139.
14. ТОРЦЕВ А., ТОРЦЕВА Т. Экологические инновации в регионах Арктической зоны Российской Федерации // Региональная экономика: теория и практика. – 2019. – Т. 17, №8. – С. 1577–1592.
15. ФАДЕЕВ А., ЧЕРЕПОВИЦЫН А., ЛАРИЧКИН Ф. Устойчивое развитие нового добывающего региона при реализации нефтегазовых проектов на шельфе Арктики // Экономические и социальные перемены: факты, тенденции, прогноз. – 2012. – №1(19). – С. 27–38.
16. ЦУКЕРМАН В., ГОРЯЧЕВСКАЯ Е. Инновационный потенциал арктических регионов России // Арктика и Север. – 2022. – №49. – С. 70–85.
17. ЦУКЕРМАН В., ГОРЯЧЕВСКАЯ Е. О методологии оценки уровня инновационного развития регионов Севера и Арктики

- ки // Север и рынок: формирование экономического порядка. – 2017. – №3(54). – С. 57–68.
18. ЦУКЕРМАН В., ГОРЯЧЕВСКАЯ Е. *Оценка инновационного развития арктических регионов* // Север и Рынок: формирование экономического порядка. – 2018. – №2(58). – С. 138–146.
19. AVILÉS-SACOTO S., COOK W., GÜEMES-CASTORENA D., ZHU J. *Modelling Efficiency in Regional Innovation Systems: A Two-Stage Data Envelopment Analysis Problem with Shared Outputs within Groups of Decision-Making Units* // European Journal of Operational Research. – 2020. – Vol. 287. – P. 572–582.
20. BEREZIKOV S. *Structural changes and innovation economic development of the Arctic regions of Russia* // Journal of Mining Institute. – 2019. – Vol. 240. – P. 716–723.
21. CAMANHO A., SILVA M., PIRAN F., LACERDA D. *A literature review of economic efficiency assessments using Data Envelopment Analysis* // European Journal of Operational Research. – 2023. – DOI:10.1016/j.ejor.2023.07.027.
22. CHOU H., LU W., KWEH Q., TSAI C. *Using hierarchical network data envelopment analysis to explore the performance of national research and development organizations* // Expert Systems with Applications. – 2023. – Vol. 234. –121109.
23. EGOROV N., POSPELOVA T., YARYGINA A., KLOCHKOVA E. *The Assessment of Innovation Development in the Arctic Regions of Russia Based on the Triple Helix Model* // Resources. – 2019. – No. 8(2). – P. 72.
24. ETZKOWITZ H. *The Triple Helix: University-Industry-Government Innovation in Action*. – New York and London: Routledge, 2008. – 176 p.
25. KARNAEVA A., KULIKOVA O., MAZLOVA E., BURYAK A. *Aged diesel and heavy metal pollution in the Arctic tundra (Yamal Peninsula, Russia)* // Science of The Total Environment. – 2021. – Vol. 792. – 148471.
26. LIFSHITS S., GLYAZNETSOVA Y., EROFEEVSKAYA L., CHALAYA O. et al. *Effect of oil pollution on the ecological condition of soils and bottom sediments of the arctic region*

- (Yakutia) // Environmental Pollution. – 2021. – Vol. 288. – 117680.
27. METCALFE S. *The Economic Foundations of Technology Policy: Equilibrium and Evolutionary Perspectives* // Handbook of the Economics of Innovation and Technological Change. – Oxford, UK: Blackwell, 1995. – P. 409–513.
28. NORTH D.C. *Institutions, Institutional Change and Economic Performance: Economic performance*. – Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1990. – 152 p.
29. OTT H., RONDÉ P. *Inside the Regional Innovation System Black Box: Evidence from French Data* // Papers in Regional Science. – 2019. – No. 98. – P. 1993–2026.
30. SCHMIDT DE OLIVEIRA M., STEFFEN V., CARLOS DE FRANCISCO A., TROJAN F. *Integrated data envelopment analysis, multi-criteria decision making, and cluster analysis methods: Trends and perspectives* // Decision Analytics Journal. – 2023. – Vol.8. – 100271.
31. SHIKLOMANOV N., STRELETSKIY D., SUTER L., ORT-TUNG R. et al. *Dealing with the bust in Vorkuta, Russia* // Land Use Policy. – 2020. – No. 93. – 03908.
32. SKUFINA T., BARANOV S., SAMARINA V., SAMARIN A. *The impact of the national Arctic policy on the socio-economic transformations of Russia's polar regions* // The North and the Market: Forming the Economic Order. – 2022. – No. 2. – P. 69–81.
33. STERNBERG R. *Innovation networks and regional development—evidence from the European Regional Innovation Survey (ERIS): theoretical concepts, methodological approach, empirical basis and introduction to the theme issue* // European Planning Studies. – 2000. – No. 8. – P. 389–407.
34. XU K., MEI R., SUN W., ZHANG H. et al. *Estimation of sustainable innovation performance in European Union countries: Based on the perspective of energy and environmental constraints* // Energy Reports. – 2023. – Vol. 9. – P. 1919–1925.
35. ZEMTSOV S., KOTSEMIR M. *An assessment of regional innovation system efficiency in Russia: the application of the DEA approach* // Scientometrics. – 2019. – Vol. 120, No. 2. – P. 375–404.

INNOVATIVE SYSTEMS OF THE RUSSIAN ARCTIC REGIONS: STRUCTURAL FEATURES, DEVELOPMENT SCENARIOS AND ASPECTS OF MANAGEMENT (APPLICATION OF THE DEA METHODOLOGY)

Natalya Roslyakova, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (na@roslyakova24.ru).

Alexander Volkov, Institute of Economics of the Karelian Scientific Center of RAS, Petrozavodsk, Cand.Sc. (kov8vol@gmail.com).

Sergey Tishkov, Institute of Economics of the Karelian Scientific Center of RAS, Petrozavodsk, Cand.Sc. (insteco_85@mail.ru).

Abstract: The purpose of this work is to identify the features of structural relationships between elements of innovation systems that are relevant for the formation of effective models for managing the innovative development of the Arctic regions. The study used the DEA analysis (Data Envelopment Analysis) tools. The objects of the study are regions that are fully or partially included in the European part of the Arctic zone of the Russian Federation (AZRF). Model 1 considers "research costs" and "technological innovation costs" as cost (input) parameters, and "emissions of pollutants into the air", "labor productivity", "number of developed technologies", "number of technologies used" as resulting (output) parameters. In Model 2, the cost (input) parameters are: "research costs", "technological innovation costs", "emissions of pollutants into the air"; the resulting (output) parameters "labor productivity", "number of developed technologies", "number of technologies used", "volume of innovative products". As part of the results obtained, a methodological approach is proposed to identify the types of structural relationships between elements of the regional innovation system (RIS) using DEA tools. The effectiveness of the interrelationship structures between the elements of the RIS that have developed in the regions under consideration has been assessed. Scenarios for transition from actual to optimal values of RIS parameters have been developed.

Keywords: regional innovation systems (RIS), Arctic regions, DEA-analysis, structural relationships of RIS elements, scenarios for the development of RIS.

УДК 332.012.2

ББК 65.050

DOI: 10.25728/ubs.2023.101.8

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Р.М. Нижегородцевым.*

Поступила в редакцию 26.09.2023.

Опубликована 30.11.2023.

СКОРОСТНОЙ ПД-РЕГУЛЯТОР С ШИРОКИМИ РОБАСТНЫМИ СВОЙСТВАМИ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ МОСТОВЫМ КРАНОМ¹

Круглов С. П.²

(ФГБОУ ВО Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск)

Рассматривается управление тележкой мостового крана в задаче перемещения груза по одной горизонтальной оси в заданную точку с демпфированием угловых колебаний и возможностью парирования внешних возмущений, например, ветровых, с обеспечением заданных качественных характеристик. Предполагается, что кран оборудован сервоприводом, способным достаточно быстро отследить заданную скорость перемещения тележки. Это соответствует использованию современных асинхронных сервоприводов. Берется во внимание автоматизированная система управления, предполагающая наличие оператора крана. Предлагается построение ПД-регулятора, формирующего заданную скорость тележки. Он строится на основе линеаризованной одномаятниковой модели перемещения груза в зависимости от скорости тележки. Включает в себя пропорциональную часть по ошибке линейного перемещения тележки крана и дифференциальную часть по углу отклонения подвеса от вертикали с низкочастотной фильтрацией. Обоснование синтеза параметров ПД-регулятора предлагается поэтапно, путем рассмотрения четырех его вариантов. Особенностью выбора параметров ПД-регулятора является то, что все они основываются на паспортных данных крана и привода, на заданных качественных показателях переходного процесса, а также на расстоянии перемещения груза. Замкнутая система управления при фиксированной настройке обладает робастными свойствами в очень широкой области вариации параметров крана и груза, покрывающей возможные режимы использования крана на практике, способна парировать внешние возмущения. Приводятся результаты модельных исследований.

Ключевые слова: мостовой кран, система управления, ПД-регулятор, качественные показатели управления, робастность.

1. Введение

Одной из главных задач автоматизации управления кранами является автоматическое обеспечение позиционирования

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-29-00654, <https://rscf.ru/project/23-29-00654/>.

² Сергей Петрович Круглов, д.т.н., профессор (kruglov_s_p@mail.ru).

переносимого груза в заданной точке и устранение его раскачивания. Существует много методов построения систем управления кранами. Сюда, в частности, относятся системы с формированием входного сигнала, с плавным (фильтрованным) стартом, системы на основе ПИД-регуляторов и их вариаций, системы оптимального и адаптивного управления, системы на нейроконтроллерах и с нечеткой логикой, на основе скользящих режимов и др. [21]. Для своей работы они требуют либо достаточно полную информацию о параметрах системы управления, переносимого груза и отсутствия внешних возмущений, либо отличаются сложностью построения и связаны со значительными ограничениями при работе.

Для повышения производительности и безопасности крановых работ очевидными требованиями к этим системам в современных условиях являются: транспортировка груза в заданную точку как можно быстрее и качественнее и гашение угловых движений при как можно большем многообразии параметров крана и грузов; способность парировать неконтролируемые внешние возмущения; простота построения и отсутствие затратных методов эксплуатации и др.

Одним из привлекательных подходов в этом отношении являются системы управления на основе ПИД-, ПИ-, П-регуляторов в силу их изученности, простоты построения, достигаемого качества управления, массовости использования в современной автоматизации. Обязательным условием является обеспечение робастных свойств, достаточных для условий практики, при фиксированной настройке параметров этих регуляторов.

Известен ряд работ, посвященных ПИД-управлению тележкой (балкой) мостового крана. Так, в работе [17] рассматривается использование двух (трех) ПИД-регуляторов, функционирующих по ошибке линейного перемещения тележки, по углу отклонения крюка (груза) от вертикальной оси. Настройку параметров этих регуляторов предлагается строить на основе метода оптимизации роя частиц (particle swarm optimization). В работе [19] рассматривается ПИД-регулятор по ошибке положения тележки и ПД-регулятор по угловому отклонению груза от верти-

кали. Алгоритм настройки регуляторов – на основе вариации метода стохастического поиска. Похожий алгоритм настройки ПИД-регулятора также описан в [15]. Одним из недостатков этих подходов является необходимость предварительной настройки коэффициентов регуляторов для достаточно узкой области изменения параметров крана и груза.

В работах [18, 20] предлагается использовать нелинейный ПД-регулятор. В [18] входной переменной регулятора является нелинейная функция от линейного перемещения и углового положения груза. В [20] входной переменной является ошибка линейного перемещения тележки, причем коэффициент в дифференциальной части регулятора нелинейно зависит от угла отклонения груза от вертикали и его скорости. Доказана устойчивость замкнутой системы управления с нелинейным ПД-регулятором, но нет конкретных рекомендаций по назначению его коэффициентов.

В работе [9] рассматривается двухконтурная система перемещения тележки мостового крана. Во внутреннем контуре решается задача гашения угловых колебаний груза, во втором внешнем – задача по перемещению тележки в заданное положение. Оба контура используют ПИД-регуляторы. Параметры регуляторов выбираются на основе метода разделения движений на быстрые и медленные в каждом контуре и с учетом априорной информации о параметрах системы управления и груза. Последнее является недостатком, поскольку на практике не все они известны.

В работе [10] рассматривается система управления, состоящая из двух аддитивных составляющих: первая – это ПД-регулятор с входной переменной в виде ошибки перемещения тележки, вторая – регулятор, построенный по методу локализации. Параметры ПД-регулятора подбираются по результирующему качеству. Метод локализации требует измерения или вычисления старшей производной и использования большого пропорционального коэффициента регулятора [13]. На практике такой подход трудно реализовать из-за сложности достаточно точного определения старшей производной, а также в условиях

Управление техническими системами и технологическими процессами

задержек управления, наличия недомоделированной высокочастотной динамики объекта и пр.

В работе [16] рассматривается ПИД-регулятор, дополненный скользящими режимами. Скользящие режимы также описываются в работе [22] при управлении башенным краном. Недостатком скользящих режимов является наличие высокочастотных составляющих движения на достаточно протяженных участках времени.

Общей особенностью указанных работ является то, что они рассматривают системы управления, формирующие силу воздействия на тележку крана. Часто нет учета внешнего возмущения. Заявленные рабочие свойства систем не полностью удовлетворяют требованиям практики. В работах приводятся результаты модельных исследований, где, например, вариация веса груза предполагается максимум в 2 раза. Известно, что на производственных участках вес груза может меняться в десятки и даже сотни раз.

В работах [4, 14] для гашения угловых колебаний предлагаются использовать П-регулятор в замкнутом контуре следящей системы по скорости перемещения тележки крана с входным сигналом в виде угла отклонения груза от вертикали. Коэффициент регулятора рассчитывается на основе длины подвеса, которая определяется автоматически по периоду колебаний. Недостатком подхода является отсутствие решения по позиционированию груза в назначеннной точке. Также предлагаемый способ определения длины подвеса имеет временную задержку, что критично при формировании управления в начале движения груза.

Данная работа является попыткой устранения указанных недостатков. В качестве приводов рассматривается использование асинхронных сервоприводов. Это соответствует современному подходу к построению крановых приводов – использованию асинхронных электродвигателей с частотными преобразователями и соответствующей системой управления ими, а также отслеживанию заданной скорости. Управление по скорости тележки крана также использовалось в работах [4, 14] – для гашения угловых колебаний, [5, 6] – для адаптивного управления

перемещением груза, [7] – для модального управления в задаче гашения колебаний.

Примечательным свойством таких сервоприводов является очень быстрая (практически мгновенная) отработка заданной скорости тележки (балки) крана. Это поясняется следующим. С точки зрения автоматики сервопривод электродвигателя – это замкнутая следящая система, как правило, с ПИ-регулятором, коэффициенты которого задаются по параметрам приводного двигателя [12]. Как показывают исследования таких асинхронных сервоприводов по их моделям (см. [1]) с отслеживанием заданной скорости вращения, время переходного процесса не превышает 0,1 с практически в полном диапазоне эксплуатационных моментов нагрузки. На это же указывают параметры современных асинхронных приводов (см., например, [11]), а также результаты исследований в [4]. При этом скорость перемещения тележки (балки) современных мостовых кранов ограничена величиной обычно не более единиц м/с [2, 3], а собственная частота угловых движений груза не превышает величины 3 с^{-1} [4]. Не углубляясь в более подробное обсуждение этого вопроса, далее будем считать истинным это утверждение о практически мгновенной отработке сервоприводами заданной скорости тележки. Оно является важным для дальнейших рассуждений.

В работе предлагается построение ПД-регулятора, построенного на основе линеаризованной одномаятниковой модели перемещения груза в зависимости от скорости тележки и формирующего заданную скорость тележки крана. При этом рассматривается автоматизированная система управления краном, предполагающая наличие оператора крана. Обоснование синтеза параметров ПД-регулятора предлагается поэтапно путем рассмотрения четырех его вариантов по мере достижения результирующей его формы. В конце приводятся результаты модельных исследований.

2. Постановка задачи

Модель мостового крана по переносу груза по одной горизонтальной оси можно представить в виде схемы, представленной на рис. 1 [6].

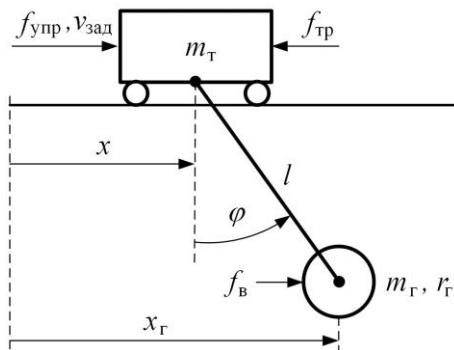


Рис. 1. Схема мостового крана при перемещении груза по одной оси

На рисунке обозначено: m_t , m_g – массы тележки крана и переносимого груза соответственно; l – длина подвеса груза, или расстояние от точки крепления подвеса на тележке до центра тяжести груза; примем, что $l_{min} \leq l \leq l_{max}$, где l_{min} , l_{max} – минимальная и максимальная длина подвеса соответственно; r_g – радиус инерции груза; x – горизонтальное перемещение тележки от назначенного положения; $\dot{x} = v$ – скорость перемещения тележки, а $v_{зад}$ – заданное значение этой скорости; примем, что $|v| \leq v_{max}$, где v_{max} – максимальное значение скорости; f_{upr} – управляющая сила, формируемая приводом тележки крана; f_{tp} – сила трения, противодействующая перемещению тележки; f_v – сила ветрового воздействия, приложенная в центре масс груза; φ – угол отклонения подвеса груза от вертикальной оси; $x_g = x + l \sin \varphi$ – горизонтальное перемещение груза.

Динамика движения объекта на рис. 1 при допущениях об отсутствии веса троса и сопротивления угловым движениям хорошо изучена на основе уравнений Эйлера – Лагранжа.

Без учета начального состояния по линейному и угловому перемещению и их скорости она может быть описана следующей системой дифференциальных уравнений (см., например, [21]):

$$(1) \quad \begin{cases} (m_{\text{т}} + m_{\text{г}})\ddot{x} + m_{\text{т}}l\cos\varphi\ddot{\varphi} = f_{\text{упр}} - f_{\text{тр}} + m_{\text{т}}l\dot{\varphi}^2\sin\varphi, \\ m_{\text{т}}l\cos\varphi\ddot{x} + m_{\text{т}}(l^2 + r_{\text{г}}^2)\ddot{\varphi} = -m_{\text{т}}gl\sin\varphi - lf_{\text{в}}\cos\varphi, \\ x_{\text{г}} = x + l\sin\varphi; \end{cases}$$

где g – ускорение свободного падения.

Поскольку угол отклонения груза небольшой (на практике не более $10\text{--}20^\circ$), угловая скорость также невысокая, с учетом кинематики движения можно принять: $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$, $\dot{\varphi}^2\sin\varphi \approx 0$. Поэтому систему (1) можно описать в линеаризованном виде как

$$(2) \quad \begin{cases} \ddot{x} \approx a_x^f (f_{\text{упр}} - f_{\text{тр}}) + a_x^\varphi \varphi + a_x, \\ \ddot{\varphi} \approx a_\varphi^f (f_{\text{упр}} - f_{\text{тр}}) + a_\varphi^\varphi \varphi + a_\varphi, \\ x_{\text{г}} \approx x + l\varphi; \end{cases}$$

где $a_x^f = \gamma^{-1}m_{\text{т}}(l^2 + r_{\text{г}}^2)$; $a_x^\varphi = \gamma^{-1}g(m_{\text{т}}l)^2$;

$$a_x = \gamma^{-1}m_{\text{т}}[-(l^2 + r_{\text{г}}^2)f_{\text{тр}} + l^2f_{\text{в}}]; \quad a_\varphi^f = -\gamma^{-1}m_{\text{т}}l;$$

$$a_\varphi^\varphi = -\gamma^{-1}(m_{\text{т}} + m_{\text{г}})m_{\text{т}}gl; \quad a_\varphi = \gamma^{-1}l[m_{\text{т}}f_{\text{тр}} - (m_{\text{т}} + m_{\text{г}})f_{\text{в}}];$$

$$\gamma = m_{\text{т}}[m_{\text{т}}l^2 + (m_{\text{т}} + m_{\text{г}})r_{\text{г}}^2].$$

Подставляя первое и второе равенства системы (2) в дважды проинтегрированное третье равенство этой системы, также выражая сигнал $(f_{\text{упр}} - f_{\text{тр}})$ из первого равенства (2) и подставляя его в полученный результат, определим, что движение груза через скорость тележки можно описать приближенным равенством:

$$(3) \quad \ddot{x}_{\text{т}} \approx a_{\text{т}}^{\ddot{v}} \ddot{v} + a_{\text{т}}^\varphi \varphi + a_{\text{т}},$$

$$\text{где } a_{\text{т}}^{\ddot{v}} = r_{\text{г}}^2/(r_{\text{г}}^2 + l^2); \quad a_{\text{т}}^\varphi = l(a_\varphi^\varphi - a_x^\varphi a_\varphi^f / a_x^f) = -g\mu,$$

$\mu = l^2/(l^2 + r_{\text{г}}^2)$ – безразмерный коэффициент влияния радиуса инерции груза; $a_{\text{т}} = l(a_\varphi - a_x a_\varphi^f / a_x^f)$ – параметр, определяемый действием внешних возмущений $f_{\text{тр}}$ и $f_{\text{в}}$.

С использованием третьего равенства из (2), уравнение (3) запишем в следующем виде:

$$(4) \quad \mu \ddot{x} + l \ddot{\phi} \approx a_r^\phi \phi + a_r.$$

Для определения свойств собственного углового движения при отсутствии возмущений и $\ddot{x} \equiv 0$ это равенство перепишется как

$$(5) \quad \ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi \approx 0,$$

где $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \sqrt{-a_r^\phi/l} = \sqrt{\mu g/l}$ – собственная частота углового движения подвеса груза, равная собственной частоте физического маятника при отсутствии ускорения тележки; $T_0 = 2 T_{0,5}$ – период собственных колебаний, а $T_{0,5}$ – полупериод собственных колебаний.

Для дальнейших рассуждений примем следующие допущения:

$$(6) \quad r \leq l, \quad \mu \in [1/2, 1],$$

что соответствует большинству практических случаев. Также примем, что сила ветрового воздействия f_v представляет собой ступенчатую функцию в произвольный момент времени и с ограниченной интенсивностью.

Сформулируем следующую цель, основанную на свойствах апериодического и колебательного движений [8]: построить закон формирования заданной скорости тележки ($v_{\text{зад}}$), который бы при фиксированном наборе своих параметров и условии $\dot{x} \equiv v_{\text{зад}}$ обеспечил для широкой области параметров крана и груза, действия внешнего возмущения следующие свойства переходных процессов:

$$(7) \quad \begin{aligned} & x_r \xrightarrow{\approx T_{\text{зад}}} x_{r \text{ зад}}; \quad \dot{\phi} \xrightarrow{\approx \xi_{\text{зад}}} 0, \end{aligned}$$

где $x_{r \text{ зад}}$ – заданное положение груза, или его целевая точка; $T_{\text{зад}}$ – заданная постоянная времени линейного перемещения груза по апериодической динамике; $\xi_{\text{зад}}$ – заданный коэффициент демпфирования углового движения. То есть требуется, чтобы груз перемещался в целевую точку с динамикой, близкой динамике апериодического движения с постоянной времени $T_{\text{зад}}$, а угловое движение было близко колебательному движению

с коэффициентом демпфирования $\zeta_{\text{зад}}$. Знак « \approx » в (7) имеет смысл приблизительного обеспечения указанных качественных характеристик замкнутой системы управления.

В качестве датчиков информации могут использоваться измерители: x, φ или $x, \dot{\varphi}$.

3. Формирование закона управления

Из изложенного выше о свойствах современных сервоприводов примем, что текущая скорость тележки приблизительно равна заданной: $\dot{x} \approx v_{\text{зад}}$. Рассмотрим четыре варианта закона управления, последовательно вытекающие друг из друга.

3.1. ПЕРВЫЙ ВАРИАНТ

Заданную скорость тележки сформируем в виде

$$(8) \quad \dot{x} \approx v_{\text{зад}} = k_{\varphi} \varphi,$$

где k_{φ} – задаваемый положительный коэффициент. Тогда с учетом (5) и описания колебательного процесса по теории автоматического управления равенство (4) можно записать как

$$(9) \quad \ddot{\varphi} + (2\xi_0\omega_0)\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi \approx a_r/l,$$

где ξ_0 – относительный коэффициент затухания, который можно определить по одному из равенств (в зависимости от располагаемой априорной информации – ω_0, T_0 или l и μ):

$$(10) \quad \xi_0 = \left(\frac{\omega_0}{2g} \right) k_{\varphi} = \left(\frac{\pi}{T_0 g} \right) k_{\varphi} = 0,5 \left(\sqrt{\frac{\mu}{g l}} \right) k_{\varphi}.$$

Отсюда несложно определить коэффициент k_{φ} по заданному значению относительного коэффициента затухания ($\zeta_{\text{зад}}$):

$$(11) \quad k_{\varphi} = (2g/\omega_0)\xi_{\text{зад}} = (T_0 g/\pi)\xi_{\text{зад}} = \left(2\sqrt{g l/\mu} \right) \xi_{\text{зад}}.$$

Для качественного гашения колебаний требуется назначить, например, $\zeta_{\text{зад}} = 0,8$, что следует из известного влияния этого параметра на качество колебательного процесса [8]. Тогда закон управления (8) обеспечит устойчивость колебательного движения замкнутой системы управления, быстрое и эффективное гашение колебаний при отсутствии внешних возмущений.

На основе полученного можно предложить целесообразный для практики вариант назначения коэффициента k_φ в (8), требующий знания лишь длины подвеса (без учета значения μ , в силу (6)) или периода собственных колебаний (единицы измерения в системе СИ):

$$(12) \quad k_\varphi \overset{\xi_{\text{зад}}=0,8}{\approx} 5\sqrt{l} \approx 5T_{0,5}.$$

Для дальнейших рассуждений будем использовать первую зависимость в (12). Не сложно определить, что при назначении k_φ по ней в замкнутой системе управления при всех вариациях радиуса инерции груза в указанном ограничении (6) относительный коэффициент затухания будет находиться в диапазоне

$$(13) \quad \xi_0 \overset{\xi_{\text{зад}}=0,8}{\in} [0,71\xi_{\text{зад}}, \xi_{\text{зад}}] \approx [0,57; 0,8].$$

Соотношение (13) детализировано в виде графиков на рис. 2 на примере изменения длины подвеса в диапазоне $l = 5 - 15$ м и изменения радиуса инерции груза в диапазоне $r_g = 0 - 5$ м.

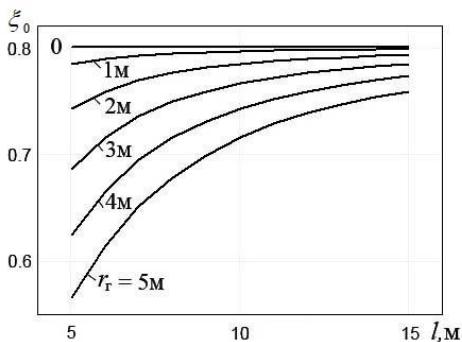


Рис. 2. Кривые реализуемых значений относительного коэффициента затухания

Из теории автоматического управления следует, что если левая часть равенства (9) является устойчивой, то в силу принятого характера внешнего возмущения угол φ стремится к своему установившемуся значению:

$$(14) \varphi \rightarrow a_r / (l \omega_0^2) = \text{const}.$$

Можно утверждать, что закон управления (8) обеспечивает выполнение второй части целевой задачи (7) по демпфированию угловых колебаний, но не дает решения по перемещению груза в целевую точку.

3.2. ВТОРОЙ ВАРИАНТ

Для устранения указанного недостатка вместо (8) примем другой закон управления в виде

$$(15) \dot{x} \approx v_{\text{зад}} = k_{\varphi} \varphi + T_{\text{зад}}^{-1} (x_{\text{зад}} - x_r) = k_{\varphi} \varphi + T_{\text{зад}}^{-1} (x_{\text{зад}} - x),$$

где $x_{\text{зад}} = x_r \text{ зад} - l \varphi_{\text{уст}}$ – положение тележки, формируемое оператором крана по наблюдению за положением груза относительно его целевой точки с учетом установленного значения угла подвеса (для простоты дальнейших рассуждений будем считать, что оператор это делает мгновенно); $T_{\text{зад}} > 0$ – задаваемая постоянная времени линейного движения, требование к которой указано ниже.

Поскольку по (15)

$$\ddot{x} \approx k_{\varphi} \dot{\varphi} - T_{\text{зад}}^{-1} \dot{x} = k_{\varphi} \dot{\varphi} - T_{\text{зад}}^{-1} k_{\varphi} \varphi - T_{\text{зад}}^{-2} (x_{\text{зад}} - x),$$

подстановка этой зависимости в (4) порождает:

$$(16) \ddot{\varphi} + 2\xi_{\text{зад}} \omega_0 \dot{\varphi} + [\omega_0^2 - (\mu/l) T_{\text{зад}}^{-1} k_{\varphi}] \varphi \approx (\mu/l) T_{\text{зад}}^{-2} (x_{\text{зад}} - x) + a_r / l.$$

Правая часть этого уравнения практически не зависит от левой его части. Только один ее член зависит от текущего значения φ на переходном процессе: $-T_{\text{зад}}^{-2} (\mu/l) x$. Но в силу малости первого его коэффициента, на что будет указано ниже, таким влиянием можно пренебречь. Тогда для устойчивости уравнения (16) требуется обеспечить устойчивость левой его части, что в свою очередь требует условия $\omega_0^2 > (\mu/l) T_{\text{зад}}^{-1} k_{\varphi}$. Подставляя сюда значение k_{φ} по (11), находим требование к постоянной времени $T_{\text{зад}}$:

$$(17) T_{\text{зад}} >> (2\xi_{\text{зад}}) \omega_0^{-1} = (\xi_{\text{зад}} / \pi) T_0 = (2\xi_{\text{зад}} / \sqrt{\mu g}) \sqrt{l}, T_{\text{зад}} \rightarrow \infty.$$

Первое из требований (17) с увеличением $T_{\text{зад}}$ обеспечивает приближение уравнения (16) к уравнению (9), т.е. к переходному

процессу по угловому движению при законе управления (8). Нарушение второго требования (17) приводит к затянутости переходного процесса по x . Это следует непосредственно из закона управления (15):

$$(18) \quad T_{\text{зад}} \dot{x} + x - x_{\text{зад}} \approx T_{\text{зад}} k_{\varphi} \varphi.$$

Отсюда также ясно, что динамика движения тележки близка к апериодическому процессу с постоянной времени $T_{\text{зад}}$ с возмущением от изменения φ . В силу (16), (17) можно отнести апериодическое (собственное) движение тележки, описываемое левой частью (18), к низкочастотному движению, а угловое движение, или возмущение для апериодического движения – уравнение (16) и правую часть (18) – к высокочастотному. Это объясняет смысловое содержание параметра $T_{\text{зад}}$ и второе условие (17).

При выборе параметра $T_{\text{зад}}$ закона управления (15) также нужно учесть максимальную скорость тележки (v_{max}). Для учета этого будем рассматривать только второе слагаемое в правой части (15). Тогда из динамики собственного апериодического движения (18) следует, что для этого требуется условие: $|x_{\text{г зад}} - x_{\text{г 0}}| / T_{\text{зад}} \leq v_{\text{max}}$, где $x_{\text{г 0}}$ – начальное положение груза [8]. Отсюда с учетом того, что движение тележки (груза) не чисто апериодическое, можно записать дополнительное требование к назначению параметра $T_{\text{зад}}$:

$$(19) \quad T_{\text{зад}} \geq k_1 |x_{\text{г зад}} - x_{\text{г 0}}| / v_{\text{max}},$$

где $1/3 < k_1 \leq 1$ – назначаемый коэффициент со значением меньше единицы для ускорения переходного процесса (с сопутствующим этому отставанием от желаемого движения на некоторых этапах переходного процесса – см. модельные исследования); нижняя граница соответствует минимально возможному времени переходного процесса при заданном параметре v_{max} .

Из указанных соотношений (17)–(19) можно сформировать два варианта зависимостей по выбору параметра $T_{\text{зад}}$ при $\zeta_{\text{зад}} = 0,8$ (в приведенных ниже зависимостях – единицы измерения в системе СИ):

– если имеется требование обеспечить заданное время переходного процесса ($t_{\text{пп зад}}$) с очевидным ограничением $t_{\text{пп зад}} \geq |x_{\Gamma \text{ зад}} - x_{\Gamma 0}| / v_{\max}$:

$$(20) \begin{cases} T_{\text{зад}} > 0,51\sqrt{l}, \\ T_{\text{зад}} \geq k_1 |x_{\Gamma \text{ зад}} - x_{\Gamma 0}| / v_{\max}, \\ T_{\text{зад}} \rightarrow t_{\text{пп зад}} / 3; \end{cases}$$

– если требуется обеспечить максимальное быстродействие крановых работ:

$$(21) T_{\text{зад}} = \max \left[(k_1 |x_{\Gamma \text{ зад}} - x_{\Gamma 0}| / v_{\max}), k_2 0,51\sqrt{l} \right],$$

где $k_2 \gg 1$ – назначаемый безразмерный коэффициент; по опыту исследований достаточной его величиной является, например, число 3.

Кроме указанного при рассмотрении второго варианта закона управления, из (16) при соблюдении (17), зависимости (18) и из ранее изложенного также следует, что при отсутствии внешних возмущений ($a_{\Gamma} \equiv 0$) в замкнутой системе управления с законом (15) и k_{φ} по (11) или (12): $\varphi \rightarrow 0$, $x \rightarrow x_{\text{зад}}$, а значит по (15) и $x_{\Gamma} \rightarrow x_{\Gamma \text{ зад}}$, т.е., с учетом изложенного выше, достигается цель управления (7).

При наличии внешнего возмущения ($a_{\Gamma} \neq 0$): $\varphi \rightarrow \varphi_{\text{уст}} = \text{const} \neq 0$, $\dot{x} \rightarrow 0$, $x \rightarrow x_{\text{зад}}$, $x_{\Gamma} \rightarrow x_{\Gamma \text{ зад}}$, т.е. цель управления (7) не достигается.

3.3. ТРЕТИЙ ВАРИАНТ

Он предназначен для устранения указанного недостатка. Здесь вместо закона управления (15) примем:

$$(22) \dot{x}(s) \approx v_{\text{зад}}(s) = k_{\varphi} T_{\varphi} \dot{\varphi}_{\text{нч}}(s) + T_{\text{зад}}^{-1} [x_{\Gamma \text{ зад}}(s) - x_{\Gamma}(s)],$$

где s – переменная преобразования Лапласа; $\dot{\varphi}_{\text{нч}}(s) = \varphi(s)s / (T_{\varphi}s + 1) = \dot{\varphi}(s) / (T_{\varphi}s + 1)$ – низкочастотная составляющая скорости углового движения; $T_{\varphi} > 0$ – задаваемая постоянная времени углового движения, требования к которой сформированы ниже.

Исходя из частотных характеристик первого слагаемого рассматриваемого закона управления (см., например, [8]), уравнение (22) с учетом (15) можно записать как:

$$\dot{x} \approx T_{\text{зад}}^{-1}(x_{\text{зад}} - x) + \begin{cases} k_{\varphi}\varphi, & \text{на частотах выше } T_{\varphi}^{-1}, \\ k_{\varphi}T_{\varphi}\dot{\varphi} & \text{на частотах менее } T_{\varphi}^{-1}. \end{cases}$$

Отсюда и из ранее рассмотренного следует, что на частотах выше $1/T_{\varphi}$, если в эту область попадает собственная частота угловых движений: $\varphi \rightarrow \varphi_{\text{уст}} = \text{const}$, $\dot{x} \rightarrow 0$, т.е. обеспечивается устойчивость системы управления. По низким частотам (область частот ниже $1/T_{\varphi}$), в частности во время приближении переходного процесса к установившемуся состоянию, получаем вместо (18): $T_{\text{зад}}\dot{x} + x \approx x_{\text{зад}} + T_{\text{зад}}k_{\varphi}T_{\varphi}\dot{\varphi}$, т.е. $x \rightarrow x_{\text{зад}}$, а значит $x_{\Gamma} \rightarrow x_{\text{зад}}$, чем достигается цель управления (7). При этом если справедливо частотное соотношение: $1/T_{\varphi} > 1/T_{\text{зад}}$, то это происходит с динамикой не хуже представленной в (7). Обобщая указанное, можно записать требование к параметру T_{φ} :

$$(23) \quad \omega_0^{-1} \ll T_{\varphi} < T_{\text{зад}}, \text{ или } 3\omega_0^{-1} < T_{\varphi} < T_{\text{зад}},$$

где второе соотношение основано на модельных исследованиях; при этом желательно, чтобы параметр T_{φ} был ближе к середине указанного диапазона.

На основании (5) и (6), вместо (23) можно записать достаточное условие для его выполнения:

$$(24) \quad 4.2\sqrt{I/g} < T_{\varphi} < T_{\text{зад}}.$$

Таким образом, закон управления (22) является ПД-регулятором с пропорциональной частью по ошибке линейного перемещения груза и дифференциальной частью по углу отклонения подвеса груза от вертикали с низкочастотной фильтрацией. Он обеспечивает достижение цели (7), но его недостатком является то, что его параметры k_{φ} , $T_{\text{зад}}$, T_{φ} должны перестраиваться в зависимости от длины подвеса. Заметим, что закон управления требует измерения переменных x , φ . Последняя может быть заменена на $\dot{\varphi}$. Например, для измерения угла можно использовать видеокамеру, а если используется микромехани-

ческий датчик типа MPU6050, расположенный на тросе подвеса [6], – лучшим вариантом будет измерение угловой скорости.

3.4. ЧЕТВЕРТЫЙ ВАРИАНТ – РЕЗУЛЬТИРУЮЩИЙ

Он устраняет необходимость настройки по длине подвеса рассмотренного выше ПД-регулятор, или закона управления (22). Здесь предлагается, что все указанные параметры настраиваются по максимальной длине подвеса крана (l_{max}). То есть вместо l подставляется l_{max} в зависимостях (11) или (12) для расчета k_ϕ , (20) или (21) для расчета $T_{зад}$, (24) для назначения T_ϕ . Обозначим настроенные таким образом параметры как $k_\phi(l_{max})$, $T_{зад}(l_{max})$, $T_\phi(l_{max})$, $\xi_0(l_{max})$, а параметры по прежней настройке – как $k_\phi(l)$, $T_{зад}(l)$, $T_\phi(l)$, $\xi_0(l)$.

Из изложенного выше следует, что такая настройка закона управления обеспечит выполнение цели управления (7) при $l = l_{max}$. Возникает естественный вопрос: что будет, если $l < l_{max}$, как будут соблюдаться требования к параметрам закона управления и как будет вести себя замкнутая система управления? Попробуем на него ответить.

Из первого неравенства (20) и зависимости (24) следует, что $T_{зад}(l_{max})$ и $T_\phi(l_{max})$ также будут удовлетворять уменьшенным значениям длины подвеса, если вместо l_{max} в них подставить l . Из (10)–(12) следует, что $k_\phi(l_{max})$ порождает

$$\xi_0(l_{max}) > \xi_0(l) \approx \xi_{зад} = 0,8.$$

То есть колебательное движение подвеса будет иметь завышенное значение относительного коэффициента затухания в сравнении с заданной его величиной.

Из теории автоматического управления следует, что увеличение относительного коэффициента затухания приводит к увеличению времени переходного процесса. Будем условно считать, что этот коэффициент может иметь значение: $\xi_0 \geq 1$. В этом случае колебательный процесс распадается на апериодический второго порядка с двумя постоянными времени, максимальная из которых ($T_{ан}$) определяется как

$$(25) \quad T_{ан} = \omega_0^{-1} \left(\xi_0 + \sqrt{\xi_0^2 - 1} \right) \approx \omega_0^{-1} (2,05 \xi_0 + 0,4),$$

где приблизительная зависимость получена линейной аппроксимацией для $\xi_0 > 1,5$; при меньших значениях ξ_0 реальная функция меньше аппроксимационной, т.е. $T_{\text{ап}} < T_{\text{зад}}$.

Как было установлено ранее, движение по φ является более высокочастотным, чем собственное апериодическое движение тележки в (18) с собственной частотой ω_0 . Если потребовать, чтобы при повышенном относительной коэффициенте затухания выполнялось условие $T_{\text{ап}} \leq T_{\text{зад}}(l_{\max})$, то, очевидно, на результирующее качество перемещения груза в замкнутой системе управления это не окажет существенного влияния (далее подтверждено модельными исследованиями). Следовательно, из (25) и последнего соотношения следует условие справедливости указанного (в приблизительном смысле):

$$(26) \quad \xi_0(l_{\max}) \leq T_{\text{зад}}(l_{\max}) \omega_0 / 2,05 - 0,2.$$

Определим минимальное значение в правой части (26). Оно получится, если подставить сюда минимальное значение $T_{\text{зад}}(l_{\max})$ из возможных по (20), (21), т.е. по второму выражению в правой части (21), в плане достаточности, и $\omega_0 = \omega_0(l)$ по (5) с минимальным значением $\mu = 0,5$ по (6). Отсюда найдем достаточное условие выполнения (26):

$$(27) \quad \xi_0(l_{\max}) \leq 1,62 \sqrt{l_{\max}/l} - 0,2.$$

Из зависимостей (12) и (10) следует, что $k_{\varphi}(l_{\max})/k_{\varphi}(l) = \xi_0(l_{\max})/\xi_0(l) = \sqrt{l_{\max}/l}$, а также $\xi_0(l) \approx \xi_{\text{зад}} = 0,8$. Это значит, что при новой настройке и при текущем значении длины подвеса l относительный коэффициент затухания увеличится в $\sqrt{l_{\max}/l}$ раз. А по зависимости (27), поделенной на $\xi_0(l) \approx 0,8$, его можно увеличивать приблизительно в 2 раза больше указанной величины. То есть предлагаемая форма настройки параметров ПД-регулятора должна обеспечить достижение цели управления (7) независимо от вариации длины подвеса.

Следовательно, закон управления (22) с настройкой своих параметров: $k_{\varphi}(l_{\max})$, $T_{\text{зад}}(l_{\max})$, $T_{\varphi}(l_{\max})$ обеспечивает достижение цели (7) без подстроек по длине подвеса. Из зависимостей (11), (12), (20), (21) и (24) следует, что эти параметры не зависят

от параметров груза – его массы и момента инерции – и слабо зависят от длины подвеса, а значит система управления практически инвариантна к их вариациям. То есть замкнутая система управления обладает робастными свойствами в очень широкой области вариации параметров крана и груза.

4. Модельные исследования

В качестве модельного примера рассматривалось управление тележкой типового среднего крана с параметрами: $m_t = 4000$ кг, $m_r = 100 - 50 000$ кг, $l = 5 - 18$ м, $r_t = 0 - 5$ м, $f_{tr} = k_{tr}v$, $k_{tr} = 0,3$ Нс/м, $x_{r\text{ зад}} = 10$ м. Сервопривод, формирующий скорость перемещения тележки крана (\dot{x}) по заданной скорости ($v_{\text{зад}}$), моделировался апериодическим звеном с единичным коэффициентом усиления и с постоянной времени 0,04 с. Система управления также имела следующие нелинейности: временную задержку 0,1 с и ограничения по выходному сигналу: $v_{\text{max}} = 0,67$ м/с, $|v'| \leq 3$ м/с². Большинство из указанных параметров соответствуют стандарту [3] и многообразию типовых переносимых грузов.

Предполагалось, что на переносимый груз в момент времени 50 с действует ступенчатое ветровое возмущение интенсивностью 5% от веса груза («ступенька» сглажена апериодическим звеном с постоянной времени 1 с).

Модель с такими параметрами была реализована в компьютерной среде Matlab/Simulink/SimMechanics на основе соотношений (1), описывающих динамику движения крана, закон управления (ПД-регулятор) – по (22) с настройкой его параметров по (12), (21) и (24) для максимальной длины подвеса ($l_{\text{max}} = 18$ м). Поэтому эти параметры имеют значения ($\zeta_{\text{зад}} = 0,8$, $k_1 = 0,5$, $x_{r0} = 0$):

$$(28) \quad k_\varphi = 21,2 \text{ м/с}, \quad T_{\text{зад}} = 7,5 \text{ с}, \quad T_\varphi = 6,7 \text{ с}.$$

Дифференциальные уравнения решались методом Рунге – Кутты четвертого и пятого порядка с шагом 0,01 с.

Предполагалось измерение сигналов x , $\dot{\varphi}$, которые моделировались с аддитивными шумами, представляющими собой центрированный гауссовский случайный процесс со средне-

квадратическим отклонением 0,01 м и 0,1 град/с соответственно. Для снижения влияния шумов перед их подачей на формирование закона управления они сглаживались на фильтрах низких частот в виде апериодических звеньев с постоянными временем, выбранными по принципу практического отсутствия влияния на основные процессы: по линейному перемещению $0,1T_{\text{зад}} = 0,75$ с, по угловому движению $0,1/\omega_0(l_{\min}) = 0,1$ с.

Поведение замкнутой системы управления по переменной x_r сравнивалось с переменной x_r^M , которая является выходом эталона, соответствующего уравнению (15): $\dot{x}_r^M = T_{\text{зад}}^{-1}(x_{\text{зад}} - x_r^M)$ с указанным выше значением параметра $T_{\text{зад}}$, также оценивалась устойчивость поведения угла φ .

Исследование проводилось в полном диапазоне указанных характеристик крана и груза при одной настройке ПД-регулятора (28). Результаты представлены на рис. 3–5.

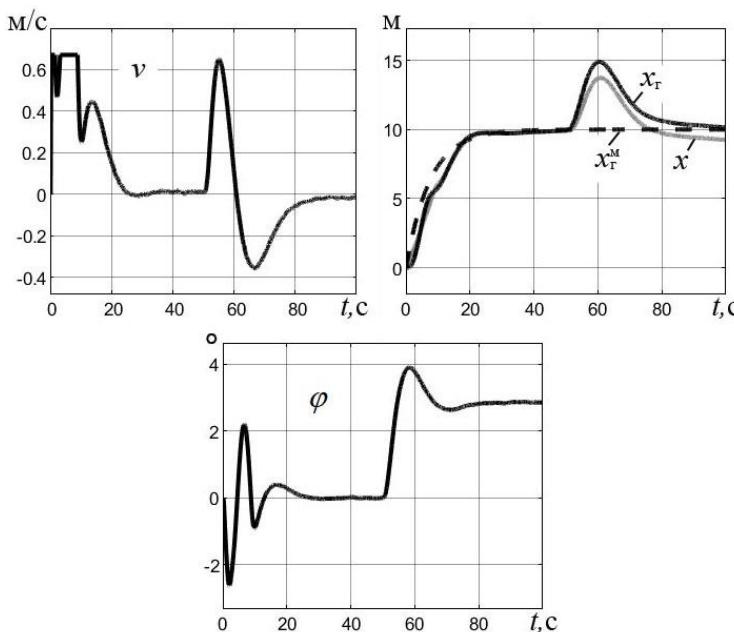


Рис. 3. Замкнутая система управления при $l = 18$ м,
 $v_{\max} = 0,67$ м/с

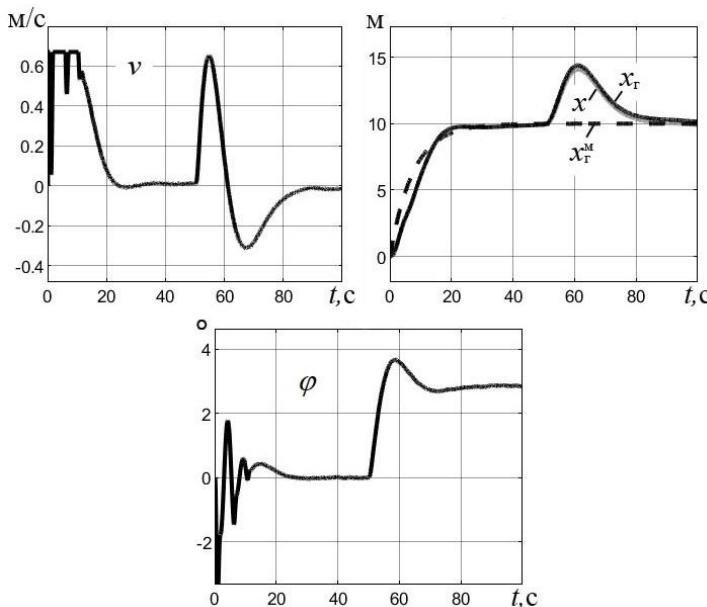


Рис. 4. Замкнутая система управления при $l = 5$ м,
 $v_{max} = 0,67$ м/с

На рис. 3 приведены графики поведения крана при $l = l_{max} = 18$ м, $m_r = 1000$ кг, $r_r = 2$ м. Представленные графики практически не отличаются от тех, которые получаются при варьировании параметров m_r , r_r в полных диапазонах их изменения, указанных выше. На рис. 4 – такие же характеристики при $l = l_{min} = 5$ м с теми же самыми свойствами. Промежуточные варианты длины подвеса дают промежуточное качество регулирования.

Как видим, линейное движение груза близко к эталонному, угловое движение устойчиво, действие ветрового воздействия парикуется. При уменьшении длины подвеса изменение в поведении объекта «тележка – груз» касается только более высокочастотных переходных процессов. Заметим, что повышенные колебания груза на начальном этапе его движения объясняются выходом на предел скорости перемещения тележки крана. Если

параметр v_{max} назначить больше, например, в 2 раза (остальные параметры – по рис. 3), то их не будет – см. рис. 5. Если постоянную времени $T_{зад}$ сделать больше, то на начальном этапе движения (до момента времени 40 с) переменные x_r и x_r^M практически тождественны. Подобные результаты были получены при других значениях x_r зад.

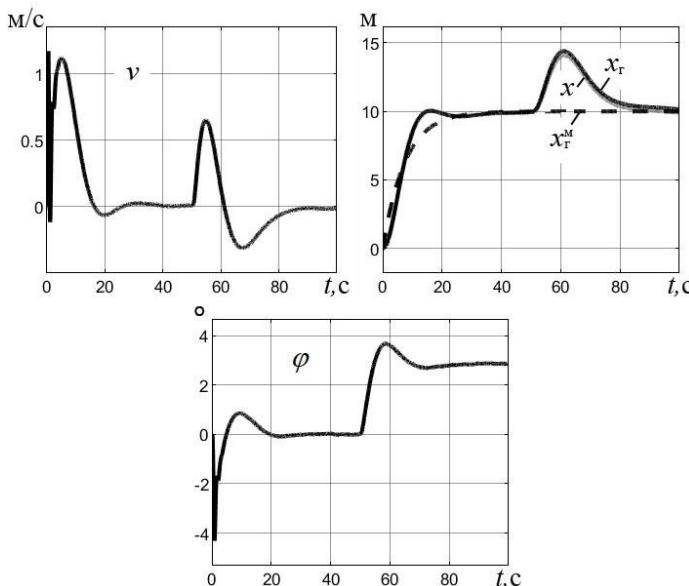


Рис. 5. Замкнутая система управления при $l = 5$ м,
 $v_{max} = 1,34$ м/с

5. Заключение

Полученный закон управления тележкой мостового крана (22) представляет собой ПД-регулятор, формирующий заданную скорость перемещения тележки, с пропорциональной частью по ошибке линейного перемещения тележки крана и с дифференциальной частью по углу отклонения подвеса от вертикали с низкочастотной фильтрацией. Настройка его параметров осуществляется по зависимостям (11) или (12) для расчета k_φ ,

(20) или (21) для расчета $T_{\text{зад}}$, (24) для назначения T_{φ} , где вместо l подставляется l_{max} . Этот закон управления обеспечивает достижение цели (7) в полном диапазоне вариаций параметров груза и крана без дополнительных подстроек. Также происходит парирование ветровых возмущений.

Особенностью выбора указанных параметров является то, что все они рассчитываются на основе паспортных данных крана и привода, заданных качественных показателей переходного процесса (коэффициента относительного затухания, времени переходного процесса), а также на расстоянии перемещения груза. Настройки закона управления не зависят от параметров груза – его массы и момента инерции – и слабо зависят от длины подвеса, а значит система управления практически инвариантна к их вариациям. То есть замкнутая система управления обладает робастными свойствами в очень широкой области вариации параметров крана и груза, покрывающую возможные режимы использования крана на практике. Это было показано на основе теоретических выкладок и модельного примера с основными характеристиками современного оборудования. Следует отметить, что в приведенных исследованиях не учтены задержки на принятие решения оператором крана.

Очевидно, что этот регулятор можно использовать и для управления балкой (мостом) мостового крана с соответствующей настройкой. В целом описанный подход можно использовать на других типах кранов с подвешенным грузом и имеющих сервоприводы для управления перемещением груза.

Предложенный закон управления планируется внедрить в конкретных практических задачах. Также ведется работа по использованию и исследованию предложенного закона управления на экспериментальной установке.

Литература

1. ГЕРМАН-ГАЛКИН С.Г. *Компьютерное моделирование по-
лупроводниковых систем в MATLAB 6.0: Учебное пособие.* –
СПб.: КОРОНА прнт, 2010. – 320 с.

2. ГОСТ 1575-81. Краны грузоподъемные. Ряды основных параметров. – М.: Издательство стандартов, 1987.
3. ГОСТ 3332-54. Краны мостовые электрические общего назначения грузоподъемностью от 5 до 50 т среднего и тяжелого режимов работы. Основные параметры и размеры. – М: Издательство стандартов, 1974.
4. ЕНИН С.С. Совершенствование системы управления электроприводами мостового крана для демпфирования колебаний подвешенного груза. Дисс. канд. техн. наук. – Магнитогорск: Магнитогорский ГТУ им. Г.И. Носова, 2020. – 150 с. – URL: <https://www.dissertcat.com/content/sovershenstvovanie-sistemy-upravleniya-elektroprivodami-mostovogo-krana-dlya-dempfirovaniya> (дата обращения 05.06.2023).
5. КРУГЛОВ С.П., АКСАМЕНТОВ Д.Н. Адаптивное управление мостовым краном по скорости перемещения тележки // Доклады ТУСУР. – 2022. – Т. 25, № 1. – С. 86–92.
6. КРУГЛОВ С.П., КОВЫРШИН С.В. Идентификационное скоростное управление мостовым краном с сокращенной моделью переноса груза // Проблемы управления. – 2023. – №4. – С. 28–37.
7. ПАХОМОВ А.Н., ФЕДОРЕНКО А.А., ЧЕРТЫКОВ П.Н. Модальное управление асинхронным электроприводом тележки мостового крана с наблюдющим устройством // Журн. Сиб. федер. ун-та. Техника и технологии. – 2022. – №15(5). – С. 583–592.
8. ПЕРВОЗВАНСКИЙ А.А. Курс теории автоматического управления. Учеб. пособие для вузов. – СПб: Лань, 2023. – 616 с.
9. РОГОВА Н.С., ЮРКЕВИЧ В.Д. Разработка алгоритмов управления для перемещения груза порталным краном // Сборник научных трудов НГТУ. – 2017. – №2 (88). – С. 7–18.
10. САБЛИНА Г.В., ХОДАКОВА Д.И. Разработка алгоритма стабилизации системы «подвешенный груз» // Сборник научных трудов НГТУ. – 2009. – №3(57). – С. 33–40.

11. Сайт компании ООО «Зетек»: https://www.servosystem.ru/catalog/servotekhnika_i_servoprivod/ (дата обращения: 25.09.2023).
12. ТЕРЕХОВ В.М., ОСИПОВ О.И. *Системы управления электроприводов. Учебник для студ. высш. учеб. заведений /* Под ред. В.М. Терехова. 2-е изд. – М.: Издательский центр «Академия», 2006. – 304 с.
13. ФРАНЦУЗОВА Г.А., ВОСТРИКОВ А.С. *Особенности синтеза ПИД-регулятора для нелинейного объекта второго порядка // Автометрия.* – 2019. – Т. 55, №4. – С. 57–64.
14. ENIN S. OMELCHENKO E., MAKSIMOV I. *Crane Anti-Sway Control System Algorithm // IEEE Russian Workshop on Power Engineering and Automation of Metallurgy Industry: Research & Practice – 2019 (PEAMI–2019), Magnitogorsk, Russia.* – 2019. – Р. 54–58.
15. FADLALLA A.A.M., HASSAN M. *Dynamic Modeling and Feedback Linearization Control of a 3-D Overhead Gantry Crane System // IEEE Int. IOT, Electronics and Mechatronics Conference – 2021 (IEMTRONICS–2021), Toronto, ON, Canada.* – 2021. – Р. 1–6.
16. HUANG W., ZHANG M., SUN F., ZHANG J. et al. *Saturated PD with sliding mode control method for 4-DOF tower crane systems // IEEE Int. Conf. on Real-time Computing and Robotics – 2021 (RCAR–2021), Xining, China.* – 2021. – Р. 96–100.
17. JAAFAR H.I., MOHAMED Z., MOHD SUBHA N.A., HUSSAIN A.R. et al. *Efficient control of a nonlinear double-pendulum overhead crane with sensorless payload motion using an improved PSO-tuned PID controller // Journal of Vibration and Control.* – 2018. – № 25(4). – Р. 907–921.
18. KISS B., LEVINE J., MULLHAUPT P. *A simple output feedback PD controller for nonlinear cranes // Proc. of the 39th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.00CH37187), Sydney, NSW, Australia.* – 2000. – Vol. 5. – Р. 5097–5101.
19. MOHAMED K.T., ABDEL-RAZAK M.H., HARAZ E.H., ATA A.A. *Fine tuning of a PID controller with inlet derivative filter using Pareto solution for gantry crane systems // Alexan-*

- dria Engineering Journal. – 2021. – Vol. 61, No. 9. – P. 6659–6673.
20. PAPADOPoulos A.-A.D., ROMPOKOS A.A., ALEXANDRIDIS A.T. *Nonlinear and observer-based PD position and sway control of convey-crane systems* // 24th Mediterranean Conference on Control and Automation – 2016 (MED–2016), Athens, Greece. – 2016. – P. 696–700.
21. RAMLI L., MOHAMED Z., ABDULLAHI A.M., JAAFAR H.I. et al. *Control strategies for crane systems: A comprehensive review* // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2017. – Vol. 95. – P. 1–23.
22. YANG T., SUN N., CHEN H., FANG Y. *Observer-Based Nonlinear Control for Tower Cranes Suffering From Uncertain Friction and Actuator Constraints with Experimental Verification* // IEEE Trans. on Industrial Electronics. – 2021. – Vol. 68, No. 7. – P. 6192–6204.

SPEED PD CONTROLLER WITH WIDE ROBUST PROPERTIES FOR OVERHEAD CRANE CONTROL

Sergey Kruglov, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Doctor of Technical Sciences, Professor (kruglov_s_p@mail.ru).

Abstract: Control of overhead crane trolley is considered in task of cargo movement along one horizontal axis to specified point with damping of angular oscillations and possibility of parry of external disturbances, for example, wind ones with provision of specified quality characteristics. It is assumed that the crane is equipped with a servo motor capable of quickly tracking the specified speed of movement of the trolley. This corresponds to the use of modern asynchronous servo motors. An automated control system is considered, which assumes the presence of a crane operator. It is proposed to build a PD-regulator, which forms the specified speed of the trolley. It is built on the basis of a linearized single-pendulum model of cargo movement depending on the speed of the trolley. Includes proportional part by error of linear movement of crane bogie and differential part by angle of suspension deviation from vertical with low-frequency filtration. The justification of the synthesis of the parameters of the PD-regulator is proposed in stages, by considering four of its options. The peculiarity of the PD-regulator parameters selection is that all of them are based on the passport data of the crane and the drive, on the specified qualitative parameters of the transient process, as well as at the distance of cargo movement. The closed-loop control system at a fixed setting has robust properties in a very wide range of variations in crane and cargo parameters, covering the possi-

ble modes of crane use in practice, is able to counteract external disturbances. The results of model studies are presented.

Keywords: overhead crane, control system, PD-regulator, qualitative indicators of control, robustness.

УДК 621.874, 681.521.7

ББК 30.2, 22.213

DOI: 10.25728/ubs.2023.101.9

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.А. Уткиным.*

*Поступила в редакцию 27.09.2023.
Опубликована 30.11.2023.*

НАХОЖДЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ УЗЛОВ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕНИЯ ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

Крыгин А. А.¹, Куприянов Б. В.²

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматривается задача поиска критических узлов транспортной сети, решаемая с помощью максимизации обобщенной стоимости проезда, которая зависит от потребности в движении и стоимости поездки между каждой парой узлов сети. Предлагаемый в работе метод является улучшением полного перебора, основная сложность которого состоит в многократном вычислении матрицы минимальных стоимостей поездок. Метод заключается в выделении замкнутого в определенном смысле множества вершин исходного графа. Выделение замкнутого множества вершин графа позволяет осуществить редуцирование графа, декомпозицию соответствующих ему матриц и раздельные вычисления подматриц. Данные преобразования позволили сократить вычисления при переборе вариантов. Построен общий алгоритм нахождения критических узлов и проведена его оптимизация. Замкнутое множество разделено на внутреннее и граничное подмножества. Показано, что алгоритм работает наиболее быстро при минимальной мощности граничного подмножества и оптимальной мощности внутреннего подмножества, для определения которой предложен соответствующий алгоритм. Также предложен алгоритм построения и расширения замкнутого множества, на его основе построен приближенный алгоритм нахождения оптимального замкнутого множества. Показано, что сложность нахождения оптимального замкнутого множества во много раз меньше сложности улучшенного метода полного перебора.

Ключевые слова: транспортные сети, поиск критических узлов.

1. Введение

В научной литературе существует класс задач, связанных с нахождением критических узлов в транспортных сетях. В данной работе рассматриваются автотранспортные сети, одним из видов узлов сети являются однородные и неветвящиеся участки дороги. Критические узлы ищутся среди узлов указанного вида. При решении таких задач автотранспортные сети моделируют-

¹ Андрей Александрович Крыгин, к.т.н. (andreyakr@yandex.ru).

² Борис Васильевич Куприянов, к.т.н. (kuprianovb@mail.ru).

ся в виде нагруженного графа, ребрам которого и соответствуют однородные неветвящиеся участки дорог. Задача решается с помощью оценки ущерба сети при удалении из графа сети подмножества ребер и нахождения критического подмножества, при котором ущерб достигает оптимума. Работы, посвященные этой задаче можно разделить на два направления:

1. Работы, в которых предлагаются различные методы оценки ущерба или метрики, количественно оценивающие общую надежность и уязвимость сети до и после возникновения на ней повреждений.

2. Работы, в которых предлагаются методы нахождения критических узлов сети на основе той или иной метрики.

В [11] вводятся две группы метрик: одна отражает «перспективу равных возможностей», а другая — «перспективу социальной эффективности». Метрика в [9] связана с оценкой риска, в ней учитывается как вероятность наступления инцидента, так и его последствия, причем распространение последствий от инцидента моделируется динамически во времени. В [15] предлагается алгоритм оценки риска с помощью машинного обучения, основанный на теории перколяции сетей и кластеризации на основе данных о трафике в реальном времени.

В [14] предлагается метрика, основанная на изолированной уязвимости, и метод сведения задачи к задаче линейного целочисленного программирования для нахождения критических узлов на ее основе.

В [16] используется потоковая модель сети и на основе данных поездок такси определяется потребность в движении между парами узлов. Далее, с помощью метода энтропийных весов и метода предпочтения порядка вводится характеристика важности (критичности) узла и оценивается структурный и функциональный ущерб сети при выходе из строя критических узлов.

Авторы [6] отмечают проблему вычислительной сложности нахождения всех критических узлов, предлагают свою метрику и метод сокращения вычислений, основанный на введенном ими понятии «зоны воздействия». Для каждого объекта сети опреде-

ляется множество поставок (зона воздействия), маршруты которых изменяются при возникновении повреждений на объекте. При поиске критических узлов основной вычислительной проблемой является определение значения уязвимости или надежности по выбранной метрике. Авторы предлагают сократить вычисления, рассматривая не всю сеть, а объединение зон воздействия для выбранного подмножества узлов.

Понятно, что независимо от метрики наибольшая практическая ценность будет от решения задачи нахождения всех критических узлов для заданной сети, т.е. всех наборов ее элементов, при удалении которых значение ущерба будет максимальным среди наборов той же мощности. Во многих из перечисленных и других рассмотренных работ [4, 5, 7, 8, 10, 12, 13] используется сценарный подход. В них предлагается метод оценки ущерба для заданного набора удаляемых элементов. Соответственно, задача нахождения полного множества критических узлов предлагаемыми методами эквивалентна использованию метода полного перебора. В других работах, таких как [16], фактически используется жадный алгоритм: строится характеристика узла и определяется ее значение. Критическими (будем называть их «важными») считаются узлы с наибольшими или наименьшими (в зависимости от характеристики) ее значениями. Такая группа методов считается приближенными и обычно применяется для сетей большой размерности, когда нахождение критических узлов занимает слишком большое время. Стандартные недостатки такого подхода заключаются в следующем:

- невозможно сказать, является ли конкретный важный узел критическим, т.е. существует ли набор критических узлов, содержащий важный узел;

- также нельзя утверждать, что не существует набора критических узлов, каждый из которых не является важным.

Подход, используемый в таких работах, как [6], базируется на эмпирическом допущении, что наибольший ущерб при возникновении повреждения на узле приходится на небольшую локальную зону вокруг этого узла. Для транспортных сетей и одно-

го узла это допущение является приемлемым, но при возникновении повреждений на нескольких узлах можно только утверждать, что зона наибольшего ущерба включает в себя объединение локальных зон каждого поврежденного узла. Несложно построить пример, в котором при удалении нескольких узлов ущерб будет приходиться на значительно большую зону, чем объединение локальных зон узлов. В [1] построена модель транспортной автодорожной сети, предложены и обоснованы методики определения всех ее параметров. Также предложен метод сведения задачи нахождения критических узлов к эквивалентной задаче линейного программирования. Данная работа является продолжением [1] и базируется на той же математической модели. Для метода полного перебора предложен алгоритм сокращения вычислений.

Количество вариантов удаления q ребер из графа, содержащего m ребер определяется как число сочетаний из m по q . Трудоемкой частью оценки величины ущерба является вычисление матрицы минимальных стоимостей путей для каждой комбинации удаления ребер из графа.

Как правило, плотность автодорог внутри области существенно больше чем плотность межобластных дорог, см. рис. 1. На данном графе можно выделить три подграфа, которые являются изолированными в некотором смысле от остальной части графа.

В данной статье рассматривается метод выделения замкнутого множества вершин в графе и связанных с ними ребер. Данное выделение замкнутого множества позволяет декомпозировать и сократить вычисление матрицы путей минимальной стоимости.

2. Определения и постановка задачи

Пусть имеется неориентированный граф $G = (V, E)$, $n = |V|$, $m = |E|$ с взвешенными ребрами. Множеству ребер E соответствуют однородные и неветвящиеся участки дорог: мосты, тунNELи, автострады. Ребро графа, соединяющее вершины v_i и v_j , обозначим как (i, j) . Множеству вершин V соответствует

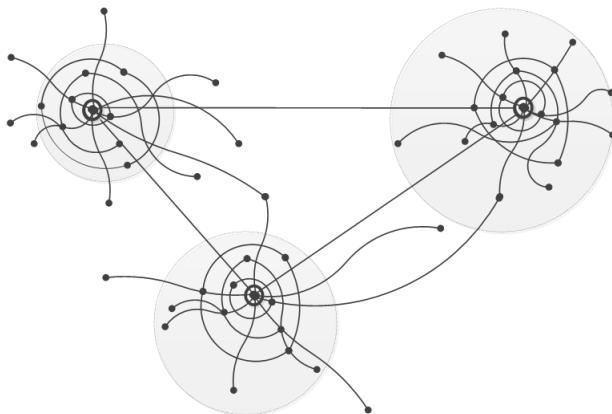


Рис. 1. Пример графа автотранспортной сети с тремя связанными областями

ют населенные пункты, перекрестки и границы смены категории дорог. Каждой паре вершин v_i и v_j ставится в соответствие два числа: $c_{i,j}$ и $d_{i,j}$. Величина $c_{i,j}$ характеризует стоимость поездки от узла v_i к узлу v_j , а $d_{i,j}$ характеризует потребность в движении (спрос на поездку), т.е. количество поездок от узла v_i к узлу v_j за единицу времени. В работе [1] приведена методика определения $c_{i,j}, d_{i,j}$. Величина $d_{i,j}$ не меняется при удалении ребер из графа; будем считать ее заданной. Величина $c_{i,j}$ определяется следующим образом. Для каждого ребра графа (i, j) задается его вес $w_{i,j}$, характеризующий длину соответствующего участка дороги. Путем в графе, соединяющим вершины v_i и v_j , является последовательность ребер $(i, l_1), (l_1, l_2), \dots, (l_{q-1}, l_q), (l_q, j)$. Длиной пути является сумма весов всех его ребер. Путем минимальной стоимости, соединяющим вершины v_i и v_j , является такой путь, что длина любого другого пути, соединяющего эти вершины, не меньше пути минимальной стоимости. Значение $c_{i,j}$ определяется как длина пути минимальной стоимости. Существуют эффективные алгоритмы вычисления минимальных стоимостей для всех пар вершин графа, например [2].

Рассматривается задача нахождения подмножества критиче-

ских ребер Q для заданного $q = |Q|$. Будем считать, что задача решается методом полного перебора следующим образом. Для каждой из C_m^q комбинаций q ребер, составляющих множество Q , вычисляется стоимость

$$S(G(V, E \setminus Q)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} d_{i,j} c_{i,j},$$

где $c_{i,j}$ – минимальная стоимость пути между вершинами v_i, v_j при удалении из графа комбинации; $d_{i,j}$ – потребность в движении. Находится комбинация Q_0 , при которой $S(G(V, E \setminus Q_0))$ достигает своего максимума. Основная часть этой операции – вычисление матрицы C для графа $G(V, E \setminus Q)$ – выполняется C_m^q раз. Задачей настоящего исследования является сокращение числа операций при вычислениях матрицы C .

Использование метода полного перебора в качестве базового было выбрано по следующим причинам.

1. При нахождении точного решения задачи известны только два метода: метод полного перебора и сведение этой задачи к эквивалентной задаче линейного программирования. Причем эти методы равноправны в том смысле, что для одних параметров задачи (т.е. заданного графа и величины q) выгоднее использовать метод полного перебора, а для других – решать задачу линейного программирования. Ниже это будет показано.

2. При оптимизации предлагаемого метода удобно проводить его сравнение с методом полного перебора.

Покажем выполнение первого пункта: для этого достаточно показать, что существуют параметры, при которых сложность метода полного перебора меньше сложности решения задачи ЛП. Будем рассматривать следующую последовательность задач нахождения критических узлов: граф сети является регулярным графом степени 4 (район Манхэттен в Нью-Йорке), имеющим вид квадрата, и количество вершин у графов этой последовательности неограниченно возрастает. При этом величина q фиксирована и постоянна для каждого элемента последовательности. Покажем, что для этой последовательности сложность задачи линейного программирования растет экспоненциально, а сложность

полного перебора – полиномиально от количества вершин. В [1] приводятся оценки для количества переменных и ограничений эквивалентной задачи. Общее количество неравенств в задаче ЛП составит $O(n^2k^2 + n^2kl)$, а общее количество переменных – $O(n^2k + m)$, где k – среднее количество путей между двумя вершинами, а l – средняя длина пути. Ключевая величина здесь – среднее количество путей, ее можно грубо оценить следующим образом. Известно, что у рассматриваемых графов количество кратчайших путей между двумя вершинами, отстоящими друг от друга на a ребер по горизонтали и b по вертикали, равно C_{a+b}^b . Тогда среднее количество ребер между парами вершин как по вертикали, так и по горизонтали можно оценить как $\frac{\sqrt{n}}{2}$, и

$$C_{\lceil \sqrt{n} \rceil}^{\lceil \frac{\sqrt{n}}{2} \rceil} = O((\sqrt{n})^{\frac{\sqrt{n}}{2}}) = O(e^{\frac{\ln(n)\sqrt{n}}{4}}).$$

То есть количество ограничений, соответствующих только кратчайшим путям, растет экспоненциально. Также известно, что сложность решения задачи линейного программирования растет полиномиально от количества ограничений. В итоге сложность задачи линейного программирования растет экспоненциально. Ниже будет показано, что сложность алгоритма полного перебора можно оценить как $O(n^{4+q})$, т.е. имеем полиномиальный рост.

3. Декомпозиция вычислений на основе замкнутого множества вершин

Выделим в графе подмножество вершин $S \subset V$. Определим подмножество Z , состоящее из внутреннего множества S и граничного множества P т.е. $Z = S \cup P$, следующим образом. Для любого ребра (i, j) , где $v_i \in S \rightarrow v_j \in Z$, Z таково, что все вершины S смежны только вершинам из Z . Соответственно, $P = Z \setminus S$ и обозначим $H = V \setminus S$.

Пример графа показан на рис. 2. Некоторое подмножество вершин $Z = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ выделено пунктиром. Сама пунктирная линия проходит по граничным вершинам Z . Таким образом,

вершины множества $S = \{6, 8\}$ – образуют внутреннее множество, а $P = \{4, 9, 5, 7\}$ образует граничное множество в Z . Пусть $n_z = |Z|$, $n_p = |P|$, $n_s = |S|$, в примере $n_z = 6$, $n_p = 4$ и $n_s = 2$. Очевидно, что $n_z = n_s + n_p$.

Переупорядочим номера вершин таким образом, что вершины из $V \setminus Z$ будут пронумерованы от 1 до $(n - n_z)$, далее будут идти вершины из P с номерами вершин от $(n - n_z + 1)$ до $(n - n_z + n_p) = (n - n_s)$, а в конце – вершины из S с нумерацией от $(n - n_s + 1)$ до n . Таким образом, будет следующее разбиение: $1, \dots, (n - n_z), (n - n_z + 1), \dots, (n - n_s), (n - n_s + 1), \dots, n$.

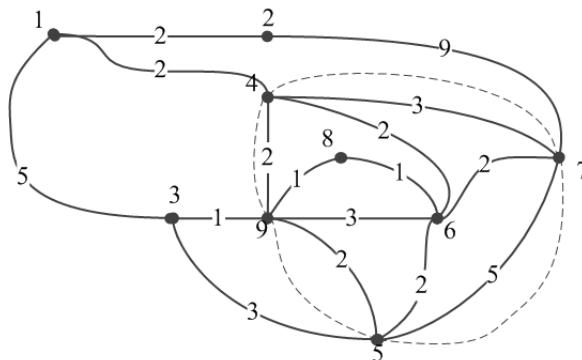


Рис. 2. Пример графа и некоторой области вершин Z

С учетом данной нумерации построим матрицу смежности W графа G :

$$W_{i,j} = \begin{cases} \text{вес ребра } (i,j), & \text{если ребро } (i,j) \in E; \\ 0, & \text{если ребро } (i,j) \notin E. \end{cases}$$

Например, для графа на рис. 2 матрица смежности W представлена в таблице 1.

Матрица W будет иметь структуру, показанную в двух разрезах на рис. 3.

В соответствии с данным разбиением будем рассматривать подматрицы матрицы W : W_H , W_M , W_Z , W_M^T . Подматрицы W_H , W_Z будут включать строки и столбцы, соответствующие граничным вершинам. Квадратная матрица W_H будет иметь

Таблица 1. Матрица смежности W

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	2	5	2	0	0	0	0	0
2	2	0	0	0	0	0	9	0	0
3	5	0	0	0	3	0	0	0	1
4	2	0	0	0	0	2	3	0	2
5	0	0	3	0	0	2	5	0	2
6	0	0	0	2	2	0	2	1	3
7	0	9	0	3	5	2	0	0	0
8	0	0	0	0	0	1	0	0	1
9	0	0	1	2	2	3	0	1	0

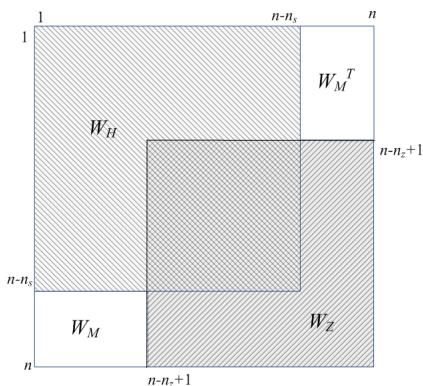


Рис. 3. Структура матрицы W

размерность $n - n_s$, матрица W_M будет иметь размерность $(n - n_z, n_s)$ и квадратная матрица W_Z будет иметь размерность n_z . Матрица W симметрична, поэтому в дальнейшем матрицу W_M^T рассматривать не будем, так как она является результатом транспонирования матрицы W_M .

Рассматривая веса ребер как стоимости, вычислим минимальные стоимости путей (далее просто минимальные стоимости) для всех пар вершин графа на основе матрицы W , например алгоритмом Флойда – Уоршалла [2]. Пусть C – матрица мини-

мальных стоимостей путей, вычисленная на основе матрицы W . Матрице C будет соответствовать 4 «вырезанные из нее» подматрицы C_H , C_M , C_M^T , C_Z . Ввиду симметрии матрицы C подматрицу C_M^T рассматривать не будем. В дальнейшем в статье будут рассматриваться граф $G = (V, E)$ и соответствующие ему подмножества вершин H, Z, P, S в описанном выше смысле.

Определение 1. Пусть граф $F = (V_F, E_F)$ является подграфом G , т.е. $V_F \subset V$ и $E_F \subset E$. В этом случае назовем W_F квадратной вырезкой из матрицы W , если номера вершин V_F являются индексами строк и столбцов матрицы W . То есть $W_F = ||W_{i,j}||$ б если $v_i, v_j \in V_F$. Определим функцию вырезки $Cut_F(W)$, т.е. $W_F = Cut_F(W)$.

Определение 2. Пусть для графа G определена матрица смежностей с весами ребер. Определим функцию $Ms(W)$, вычисляющую матрицу минимальных стоимостей для матрицы W .

Определение 3. Будем называть в графе $G = (V, E)$ подмножество вершин $Z \subset V$ замкнутым, если для каждой пары вершин множества Z существует путь минимальной стоимости, такой что все его вершины принадлежат множеству Z .

Рассмотрим матрицу $C_Z = Cut_Z(Ms(W))$, т.е. вырезку внутренней области Z из матрицы C (вычисленной по матрице W). Матрица минимальных стоимостей C представлена в таблице 2, а матрица C_Z – в таблице 3.

Если на основании матрицы $W_Z = Cut_Z(W)$, представленной в таблице 4, вычислить матрицу C , то она совпадет с матрицей C_Z . Это справедливо в общем случае благодаря следующему утверждению.

Утверждение 1. Пусть дан граф $G = (V, E)$ и подмножество вершин $Z \subset V$. Чтобы множество Z было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы

$$Ms(Cut_Z(W)) = Cut_Z(Ms(W)).$$

Доказательство. Заметим, что при поэлементном сравнении

$$Ms(Cut_Z(W)) \geq Cut_Z(Ms(W)),$$

Таблица 2. Матрица минимальных стоимостей C

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	2	5	2	6	4	6	5	4
2	2	0	7	4	8	6	7	7	6
3	5	7	0	3	3	3	5	2	1
4	2	4	3	0	4	2	3	3	2
5	6	8	3	4	0	2	4	3	2
6	4	6	3	2	2	0	2	1	2
7	6	7	5	3	4	2	0	3	4
8	5	7	2	3	3	1	3	0	1
9	4	6	1	2	2	2	4	1	0

Таблица 3. Вырезка C_Z из матрицы минимальных стоимостей C

	4	5	6	7	8	9
4	0	4	2	3	3	2
5	4	0	2	4	3	2
6	2	2	0	2	1	2
7	3	4	2	0	3	4
8	3	3	1	3	0	1
9	2	2	2	4	1	0

Таблица 4. Матрица W_Z

	4	5	6	7	8	9
4	0	0	2	3	0	2
5	0	0	2	5	0	2
6	2	2	0	2	1	3
7	3	5	2	0	0	0
8	0	0	1	0	0	1
9	2	2	3	0	1	0

так как в левой части минимальная стоимость вычисляется по подграфу. Докажем утверждение необходимости. Пусть Z – замкнутое подмножество. Предположим, что

$$\mathcal{Ms}(\text{Cut}_Z(W)) \neq \text{Cut}_Z(\mathcal{Ms}(W)),$$

т.е. для некоторых $v_i, v_j \in Z$ соответствующие элементы матриц $\mathcal{Ms}(\text{Cut}_Z(W))$ и $\text{Cut}_Z(\mathcal{Ms}(W))$ различны. В этом случае в графе G между вершинами v_i, v_j найдется путь меньшей стоимости, чем в подграфе $G_Z = (V_Z, E_Z)$, т.е. Z не замкнутое множество.

Аналогично доказывается достаточность. Утверждение доказано.

Матрица C однозначно определяется через матрицы C_H, C_M, C_Z . Покажем, как сократить вычисления при нахождении каждой из этих матриц.

Так как Z замкнутое подмножество, то

$$C_Z = \mathcal{Ms}(\text{Cut}_Z(W)),$$

т.е. вычисления проводятся по матрице меньшего размера.

Модифицируем матрицу W_H , заменив ее элементы, относящиеся к области P , т.е. $w_{i,j}$ такие, что $v_i, v_j \in P$, на соответствующие элементы матрицы C_Z , как показано на рис. 4.

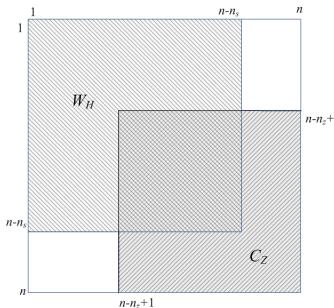


Рис. 4. Модификация матрицы W_H

Утверждение 2. Для модифицированной описанным образом матрицы W'_H выполняется равенство:

$$\mathcal{Ms}(W'_H) = \text{Cut}_H(\mathcal{Ms}(W)).$$

Доказательство. Если кратчайший путь между вершинами $v_i, v_j \in V \setminus Z$ не проходит через вершины множества Z , то соответствующие элементы матриц $Ms(W'_H)$ и $Cut_H(Ms(W))$ совпадут. Рассмотрим случай, когда все кратчайшие пути между этими вершинами проходят через вершины множества Z .

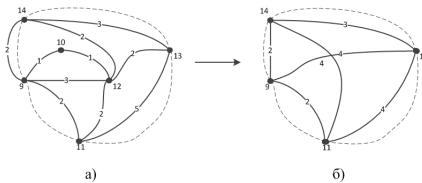


Рис. 5. Преобразование замкнутого множества

Преобразуем граф G так, что все вершины множества S и смежные с ними ребра удаляются из графа, а граничные вершины дополняются ребрами до полного графа со стоимостями ребер, равными соответствующим минимальным стоимостям путей исходного графа, как на примере рис. 5. Пусть путь минимальной стоимости в исходном графе G проходит в замкнутой области через вершины (a, b, \dots, c, d) , где a и d граничные вершины. В преобразованном графе этот путь проходит по ребру (a, d) , поэтому его минимальная стоимость не изменится. С другой стороны матрица смежности преобразованного графа совпадает с W'_H . Утверждение доказано.

Это позволяет рассчитать матрицу C_H по матрице W'_H меньшей размерности.

Покажем, как уменьшить вычисления при нахождении матрицы C_M : матрица кратчайших путей между вершиной $v_i \in (V \setminus Z)$ и вершиной $v_j \in S$. Определим функцию $minp(i, j)$, вычисляющую минимальную стоимость пути между вершинами v_i и v_j . Любой путь между этими вершинами проходит через вершины из P , поэтому

$$(1) \quad minp(v_i, v_j) = \min_{w \in P} (minp(v_i, w) + minp(w, v_j)).$$

Все значения $minp(v_i, w)$ и $minp(w, v_j)$ вычислены и имеются в матрицах C_H и C_S .

4. Алгоритм построения замкнутого множества

Алгоритм 1 (Построения замкнутого множества).

Исходные данные алгоритма: матрица смежностей W и начальное множество S_0 (внутренних вершин). Алгоритм строит замкнутое множество Z такое, что $S_0 \subseteq Z$.

1. Построить множество P_0 – множество смежных с S_0 вершин, такое что $P_0 \cap S_0 = \emptyset$. Определим $Z = S_0 \cup P_0$.

2. Вычислить матрицу минимальных стоимостей $C = Ms(W)$ и матрицу $C_Z = Cut_Z(C)$.

3. Вычислить матрицу $C'_Z = Ms(Cut_Z(W))$.

4. Если $C_Z = C'_Z$, то множество Z является замкнутым и перейти к п. 1.

5. Пусть $C'_Z(i, j) \neq C_Z(i, j)$. На основании матрицы C вычислим множество вершин пути минимальной стоимости (см. алгоритм [2]) $\{v_i, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_k, v_j\}$. Включим множество вершин $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_k\}$ в множество Z . Перейти к п. 1.

Для найденного замкнутого множества Z определяется внутреннее множество S . Перенумеруем номера вершин так, чтобы индексы вершины Z превышали индексы остальных вершин. Вершина $v_k \in Z$ является внутренней, если $W(k, i) = 0$ для любого $1 \leq i \leq (n - n_z)$.

Конец алгоритма.

Так как по построению множество S_0 окружено границей P_0 , то $S_0 \subseteq S$.

Данный алгоритм находит решение не более, чем за $|V|$ итераций, однако в худшем случае множество S может совпадать с множеством V .

Пример 1. Рассмотрим в качестве исходных данных граф на рис. 2. Матрица смежностей представлена в таблице 1. Соответствующая матрица минимальных стоимостей представлена в таблице 2. Выберем в качестве начального внутреннего множества $S_0 = \{8\}$. Построим множество $P_0 = \{6, 9\}$ – граничных вершин, $Z = \{6, 8, 9\}$. Матрицы $Ms(Cut_Z(W))$ и $Cut_Z(Ms(W))$

совпадают и равны

	6	8	9
6	0	1	2
8	1	0	1
9	2	1	0

Поэтому Z – замкнутое множество и после перенумерации вершин (п. 1) вершина 8 определяется как внутренняя. •

5. Алгоритм нахождения критических ребер

Будем считать, что вычисление матрицы путей минимальной стоимости (кратчайших путей) C осуществляется с помощью алгоритма Флойда – Уоршалла [2]. Сложность этого алгоритма зависит только от количества вершин, поэтому в дальнейшем фразу «вычисление матрицы C по матрице W размера n » будем понимать в смысле применения алгоритма Флойда – Уоршалла для матрицы смежности W размера $n \times n$ и получение в результате его работы матрицы C того же размера.

Алгоритм 2 (Нахождение критических ребер). Исходными данными алгоритма являются матрица весов W , матрица потребности в движении D и количество удаляемых ребер q .

1. Выполнить алгоритм вычисления замкнутого множества вершин, в частности алгоритм 1 вычислит первоначальную матрицу C для графа $G(V, E)$.

2. Выполнить в графе преобразование замкнутого множества и получить матрицу W'_H .

3. Для каждой из C_m^q комбинаций q ребер, составляющих множество Q , вычисляется обобщенная стоимость поездок

$$S(G(V, E \setminus Q)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} d_{i,j} c_{i,j}.$$

Основная часть этой операции – вычисление матрицы C для графа $G(V, E \setminus Q)$ – распадается на два случая.

3.1) если хотя бы одно из q ребер является ребром из замкнутого множества. В этом случае матрица C вычисляется обычным способом по матрице W размера n ;

3.2) если ни одно из q ребер не принадлежит замкнутому множеству. В этом случае матрица C для графа $G(V, E \setminus Q)$ однозначно определяется с помощью уже вычисленной матрицы C для графа $G(V, E)$ и вычислением матрицы C_H по матрице $W'_H(V, E \setminus Q)$ размера $n - n_s$.

4. Среди всех комбинаций определяются комбинации, имеющие максимальное значение обобщенной стоимости поездок. Ребра, составляющие эти комбинации, являются критическими.

Конец алгоритма.

Докажем справедливость этого алгоритма. При удалении хотя бы одного ребра из замкнутого множества уже нельзя гарантировать, что это множество останется замкнутым, т.е. что все пути минимальной стоимости лежат внутри замкнутой области. Именно поэтому в п. 3.1 матрица C вычисляется обычным способом. Остается показать справедливость п. 3.2. В зависимости от того, к какому множеству относятся вершины i и j , существует 6 вариантов;

1. $i \in V \setminus Z, j \in V \setminus Z;$
2. $i \in V \setminus Z, j \in P;$
3. $i \in V \setminus Z, j \in S;$
4. $i \in P, j \in P;$
5. $i \in P, j \in S;$
6. $i \in S, j \in S.$

Значения элементов $c_{i,j}$ матрицы C в вариантах 4, 5, 6 уже получены при вычислении первоначальной матрицы C в п.1. Варианты 1, 2, 3 соответствуют элементам матриц C_H и C_M , которые вычисляются описанным выше способом.

6. Оптимизация алгоритма

Отметим, что единственным параметром, на который можно влиять при реализации предложенного алгоритма, является мощность множества S – внутренних вершин замкнутого множества. Действительно, можно построить замкнутое множество, добавить к внутреннему множеству еще одну вершину (например, одну из граничных) и построить следующее замкнутое мно-

жество большего размера, пользуясь тем же алгоритмом. Также понятно, что чем больше будет мощность множества S , тем меньшего размера будет матрица W_H и меньшее число операций потребуется для вычисления матрицы C . А с другой стороны, тем меньше будет количество комбинаций ребер, не входящих в замкнутое множество, т.е. тем чаще придется вычислять матрицу C обычным способом по п. 3.1. Эти соображения позволяют предположить, что существует оптимальное значение n_s . Логично искать это оптимальное значение, оценивая количество операций алгоритма и минимизируя ее по n_s . В общем виде это сделать невозможно по следующей причине. Для конкретного графа и заданного множества S множество P определяется однозначно (если оно существует), при этом его мощность невозможно оценить, так как она зависит и от графа и от S . В то же время, как будет видно ниже, сложность алгоритма является функцией от мощностей реберных и вершинных, внутренних и граничных множеств, а сами эти величины не являются независимыми и их зависимость неизвестна. Тем не менее некоторый анализ функции сложности оказывается возможным.

Определим ребра замкнутого множества как ребра, соединяющие вершины из замкнутого множества и, по аналогии, ребра внутреннего и граничного множества. Введем следующие обозначения: m_s – количество ребер внутреннего множества; m_p – количество ребер граничного множества; m_z – количество ребер множества Z . При этом $m_z > m_s + m_p$, так как еще учитываются ребра, соединяющие вершины из S с вершинами из P .

В большинстве современных процессоров операции сложения и умножения занимают одинаковое количество тактов, поэтому будем оценивать только общее количество этих операций. Переменные m_s , n_p , m_p , n_z , m_z и переменная n_s , относительно которой ищется минимум сложности всего алгоритма, «участвуют» в пунктах 1, 3.1 и 3.2, поэтому будем оценивать сложность только этих пунктов. Ниже будет часто встречаться выражение сложности вычисления матрицы C , поэтому определим для него отдельную функцию. Обозначим $M(l)$, $l \in N$, – количество опе-

раций сложения и умножения, необходимых для нахождения матрицы кратчайших путей размера $l \times l$.

В алгоритме Флойда – Уоршалла элементы матрицы C определяются с помощью операции

$$\tilde{c}_{i,j} = \min_{k=1..l} (c_{i,j}, c_{i,k} + c_{k,j}),$$

которая проводится в тройном цикле, т.е. l^3 раз. Вся операция состоит из одной операции сложения, поэтому $M(l) = l^3$.

Оценим сложность алгоритма вычисления замкнутого множества. Будем рассматривать наихудший случай и считать, что вершины в п. 5 добавляются по одной и первоначальное множество состоит из одной внутренней и одной граничной вершины. По окончании выполнения алгоритма мощность множества Z равно n_z , т.е. количество операций для вычисления матрицы C'_Z равно $\sum_{i=2}^{n_z} M(i)$. Необходимо оценить сложность операции в п. 5 по определению множества вершин пути минимальной стоимости между вершинами (x, y) . Так как мы рассматриваем наихудший случай и вершины добавляются по одной, то количество ребер в этом пути равно двум. Стоимость (длина) этого пути известна из исходной матрицы C (п. 1) и в среднем необходимо перебрать половину вершин, соседних и с x и с y , чтобы найти добавляемую вершину. Это вершина w такая, что сумма длин ребер $c_{x,w}$ и $c_{w,y}$ равна стоимости кратчайшего пути. Тогда среднее количество операций сложения можно оценить как половину средней степени вершины. И общая сложность алгоритма вычисления замкнутого множества (обозначим ее Σ_1) оценивается как

$$\Sigma_1 = \sum_{i=2}^{n_z} \left(M(i) + \frac{m}{n} \right) = \frac{m(n_z - 1)}{n} + \sum_{i=2}^{n_z} M(i).$$

Рассмотрим пункты 3.1 и 3.2. Количество комбинаций ребер, соответствующее пункту 3.2 равно $C_{m-m_z}^q$, а пункту 3.1 – $(C_m^q - C_{m-m_z}^q)$. Тогда общая сложность п. 3.1 (обозначим ее Σ_2) оценивается как $\Sigma_2 = (C_m^q - C_{m-m_z}^q)M(n)$. Сложность п. 3.2 состоит из вычисления матрицы C_H по матрице $W'_H(V, E \setminus Q)$ размера $n - n_s$ и кроме одной группы случаев все элементы матрицы

C определяются без дополнительных расчетов. Эта группа соответствует комбинациям $i \in V \setminus Z$, $j \in S$, и количество таких комбинаций вершин равно $(n - n_z)n_s$. Для каждой комбинации необходимо найти

$$\min_{v_1 \in P} (minp(i, v_1) + minp(v_1, j))$$

по всем граничным вершинам. То есть необходимо выполнить n_p операций сложения. Общую сложность п. 3.2 (обозначим ее Σ_3) можно оценить так: $\Sigma_3 = C_{m-m_z}^q (M(n-n_s) + (n-n_z)n_s n_p)$. Суммируя результаты, получим, что количество операций сложения и умножения в рассматриваемых пунктах алгоритма нахождения критических ребер можно оценить так. $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$, где

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \frac{m(n_z - 1)}{n} + \sum_{i=2}^{n_z} M(i), \\ \Sigma_2 &= (C_m^q - C_{m-m_z}^q)M(n), \\ \Sigma_3 &= C_{m-m_z}^q (M(n - n_s) + (n - n_z)n_s n_p), \quad M(l) = l^3.\end{aligned}$$

Также отметим, что сложность алгоритма полного перебора (обозначим ее $\hat{\Sigma}$) можно по аналогии оценить как $\hat{\Sigma} = C_m^q M(n)$. Покажем, что $\hat{\Sigma} = O(n^{4+q})$. Граф транспортной сети является разреженным графом и $m = O(n)$, тогда $C_m^q = O(n^q) \cdot M(n)$ – это последовательная сумма кубов, которая оценивается как $O(n^4)$.

Выражение для Σ зависит от четырёх переменных, которые, в свою очередь, являются зависимыми друг от друга и эта зависимость неизвестна. Понятно, что методы математического анализа в такой ситуации неприменимы.

Построим график Σ , приняв следующее допущение. Будем считать, что в исходном графе транспортной сети отношения количества ребер к количеству вершин всего графа и его достаточно большого подграфа примерно равны. Так, на рис. 1 это отношение для всего графа примерно равно отношению для подграфа, представляющего собой одну из областей. Отношение для всего графа равно $\frac{229}{127} = 1,80$, а для подграфов, представляющих собой области, эти отношения равны $\frac{82}{48} = 1,71$, $\frac{83}{45} = 1,84$ и $\frac{60}{34} = 1,76$.

Обозначим это отношение $\xi = m/n = m_s/n_s = m_p/n_p$ и перепишем, используя также равенство $n_z = n_s + n_p$, выражение для Σ относительно n_s и n_p – количества вершин во внутренней и граничной областях. При этом необходимо через n_s и n_p оценить величину $m - m_z$. Это множество ребер состоит из ребер, соединяющих внешние вершины, количество которых оценивается как $\xi(n - n_s - n_p)$, и множества ребер, соединяющих внешнюю и граничную вершины. Оценим второе множество в наихудшем случае. С одной стороны, чем меньше будет размер внешней области, тем меньше будет количество комбинаций q ребер, лежащих во внешней области. С другой стороны, каждая граничная вершина по определению имеет хотя бы одно ребро, связанное с внешней вершиной. Поэтому оценим количество таких ребер величиной n_p . В результате получаем оценку $m - m_z \approx \xi(n - n_s - n_p) + n_p$.

После подстановки Σ_1 остается без изменений,

$$\Sigma_2 = (C_m^q - C_{\xi(n-n_s-n_p)+n_p}^q)M(n),$$

$$\Sigma_3 = C_{\xi(n-n_s-n_p)+n_p}^q(M(n - n_s) + (n - n_s - n_p)n_s n_p).$$

В итоге получаем функцию $\Sigma(n_s, n_p)$ с параметрами n , q и ξ .

На рис. 6 и 7 показаны графики этой функции в двух ракурсах при различных значениях параметров.

Показанные на рисунках графики – типичные, т.е. и при других значениях параметров наблюдается схожая картина: наличие «оврага», «дно» которого проходит примерно параллельно плоскости (Σ, n_p) . Примем это обстоятельство в качестве еще одного допущения. С его помощью становится возможным решить проблему зависимости переменных n_s и n_p . Обозначим n_s^0 – значение n_s , зависящее от n , q и ξ , в котором $\Sigma(n_s, n_p)$ достигает своего минимума при $n_p = 1$. В силу принятого допущения для других фиксированных значений n_p минимум $\Sigma(n_s, n_p)$ также будет достигаться при $n_s = n_s^0$. Тогда можно утверждать, что алгоритм нахождения критических ребер будет работать наиболее быстро, если замкнутое подмножество вершин удовлетворяет следующим условиям:

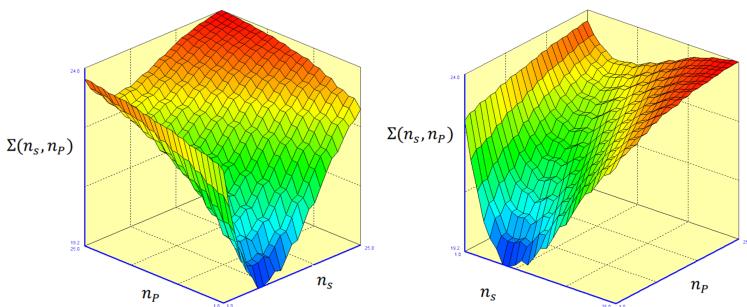


Рис. 6. График $\Sigma(n_s, n_p)$ при $n = 50$, $q = 4$, $\xi = 1,7$
в двух ракурсах

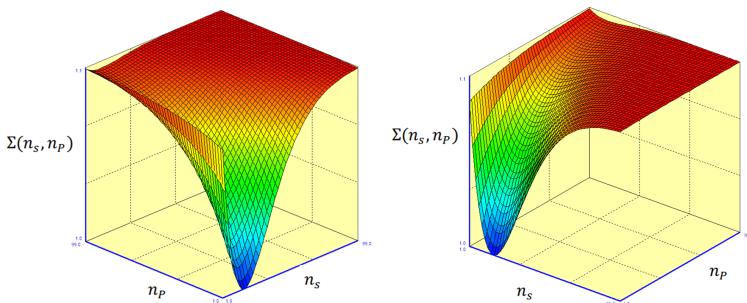


Рис. 7. График $\Sigma(n_s, n_p)$ при $n = 200$, $q = 10$, $\xi = 1,5$
в двух ракурсах

1. Мощность внутреннего множества примерно равна n_s^0 .

2. Мощность граничного множества минимальна.

Рассмотрим, как можно добиться выполнения каждого условия.

6.1. Мощность внутреннего множества

По заданному графу и величине q несложно определить значения n и ξ и численными методами найти n_s^0 . Чтобы ускорить эту операцию, был проведен анализ интервала значений n_s^0 при

различных параметрах n , q и ξ с целью его уменьшения. Для этого фиксировался один из параметров и рассматривался трехмерный график относительно двух других. Было установлено, что интервал значений n_s^0 практически не зависит от ξ . Диапазон изменения параметра ξ можно оценить интервалом (1, 2): если график сети представляет собой дерево, то ξ близко к единице; для наиболее плотных дорожных сетей (например, район Манхэттен в Нью-Йорке), график которых практически является регулярным графом степени 4, $\xi = 2$.

На рис. 8 показаны типичный график зависимости n_s^0 от n и q и для наглядности – зависимость относительного значения $\frac{n_s^0}{n}$ от этих же параметров.

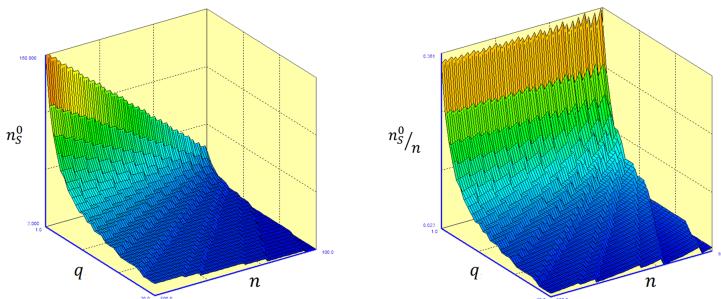


Рис. 8. График зависимости n_s^0 и $\frac{n_s^0}{n}$ при $\xi = 1,6$, $n = 100, \dots, 500$, $q = 1, \dots, 30$

Анализ этих и схожих графиков привел к следующим выводам:

1. При любых значениях n , q и ξ , величина n_s^0 не превосходит $n/2$, причем максимальное значение достигается при $q = 1$. Этот вывод был также подтвержден полным перебором значений $\Sigma(n_s, n_p)$ при различных значениях параметров.

2. График зависимости $\Sigma(n_s, 1)$ от n_s при фиксированных n , q , ξ и $n_p = 1$ имеет локальные минимумы. На рис. 9 показан пример такого графика. Для наглядности ось ординат имеет отно-

сительную шкалу: вместо абсолютного значения Σ используются значения $\frac{\Sigma - \Sigma_{\min}}{\Sigma_{\min}}$.

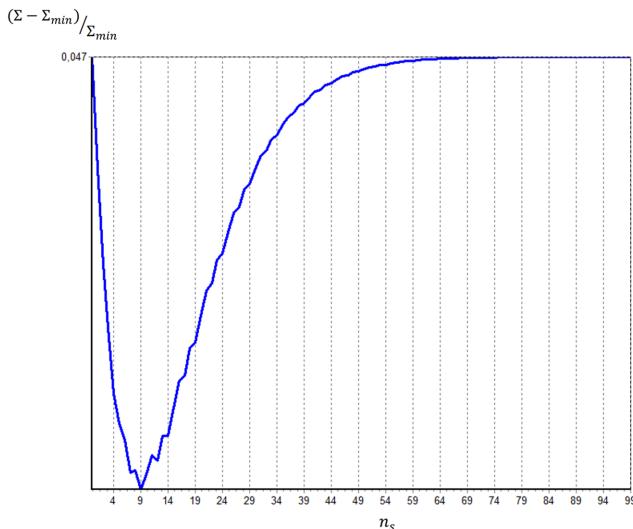


Рис. 9. График зависимости $\Sigma(n_s, 1)$ от n_s
при $\xi = 1,6, n = 200, \dots, 500, q = 20$

Поэтому логично определять n_s^0 численными методами, вычисляя значения $\Sigma(n_s, 1)$, начиная с $n_s = 1$ до $n_s = n/2$.

6.2. Мощность граничного множества

Итак, необходимо построить замкнутое множество такое, чтобы мощность внутреннего множества приблизительно равнялась заданной величине n_S^0 , а мощность граничного множества была как можно меньше. Создание эффективного алгоритма решения этой подзадачи требует дополнительного исследования по следующим причинам. Логично адаптировать и использовать один из многочисленных алгоритмов разбиения графа на сообщества и подобрать сообщество, мощность которого близка к n_S^0 . Но тут возникнут трудности связанные с тем, что кратчайший путь между двумя вершинами определяется как сумма длин ребер пути. Если две вершины в сообществе связаны ребром, то

это не означает, что кратчайший путь между ними проходит по этому ребру, и соответственно не обязательно является замкнутым множеством. Здесь приводится простой и, возможно, не самый эффективный алгоритм.

Для обоснования алгоритма был проведен анализ области применимости предлагаемого метода. Для этого фиксировались параметры n , q , ξ и рассматривалась плоскость, на которой оси абсцисс соответствует значение n_s , а оси ординат – n_p . На этой плоскости отмечались точки (синим цветом), для которых выгоднее использовать метод полного перебора, т.е. $\hat{\Sigma}(n_s, n_p) < \Sigma(n_s, n_p)$. На рис. 10 показан пример такой раскраски. Коричневой линией отмечено значение n_s^0 .

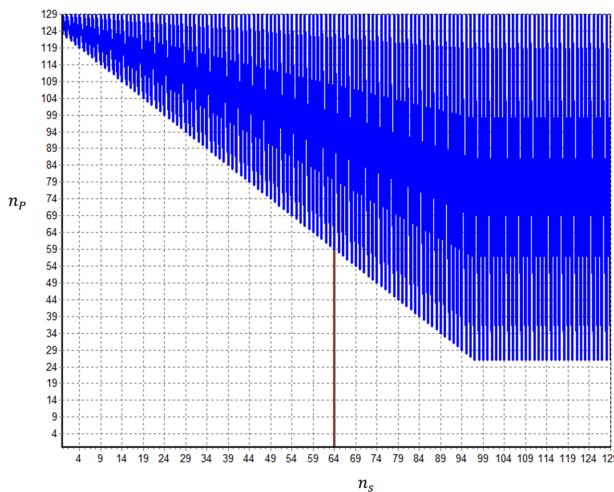


Рис. 10. Область применимости метода
при $n = 130$, $q = 11$, $\xi = 1,6$

Во всех подобных графиках синяя область представляла собой прямоугольную трапецию, хотя во многих случаях она отсутствовала. То есть значение \hat{n}_p такое, что для всех $n_p > \hat{n}_p$ выгоднее использовать метод полного перебора, превосходило n . Также из этих графиков видно, что если значение n_s мало, то использование предлагаемого метода выгоднее, чем метод пол-

ного перебора, так как в транспортных сетях не встречается ситуация, когда граничное множество для небольшого внутреннего множества состоит практически из всех вершин графа. Имеется в виду внутреннее множество, географическое расстояние между вершинами которого существенно меньше максимального географического расстояния между вершинами графа. Предлагаемый алгоритм нахождения замкнутого множества с требуемыми характеристиками основывается на методе перебора и состоит из следующих шагов.

1. Определяется величина n_s^0 . Величина Σ_{min} инициализируется равной бесконечности. Множества Z_{min} , S_{min} , P_{min} инициализируются как пустые множества.

2. Для каждой вершины графа v строится замкнутое множество $Z = S \cup P$ с начальным множеством $S_0 = \{v\}$.

3. Вычисляются значения $\Sigma(n_s, n_p)$ и $\hat{\Sigma}(n_s, n_p)$. Если полученное Z находится в области применимости метода и $n_s \leq n_s^0$, то $\Sigma(n_s, n_p)$ сравнивается с Σ_{min} . Если $\Sigma(n_s, n_p) < \Sigma_{min}$, то $Z_{min} = Z$, $S_{min} = S$, $P_{min} = P$, $\Sigma_{min} = \Sigma(n_s, n_p)$.

4. Если $n_s > n_s^0$, то переход к следующей вершине и п. 2.

5. Если $n_s \leq n_s^0$, то область Z расширяется: строится замкнутое множество с начальным множеством $S_0 = S \cup \{u\}$, где u – произвольная вершина из граничного множества P . Переход к п. 3.

Конец алгоритма.

Очевидно, что алгоритм работает за конечное число шагов. В п. 2 для каждой вершины строится замкнутое множество, в котором эта вершина является внутренней. В этом случае мощность S невелика, и это замкнутое множество находится в области применимости, т.е. практически сразу определяется замкнутое множество, для которого предлагаемый метод работает быстрее метода полного перебора. Далее (в п. 5) замкнутое множество расширяется до тех пор, пока мощность внутреннего множества не превысит оптимального значения n_s^0 . Алгоритм можно модифицировать и в п. 4 использовать условие $n_s \geq \beta n_s^0$, где β – константа, большая единицы. Но определение оптимального значе-

ния β также требует дополнительных исследований. Среди всех полученных замкнутых множеств для дальнейшей работы предлагаемого метода выбирается множество с минимальным значением $\Sigma(n_s, n_p)$. Из-за того, что расширение происходит через произвольную граничную вершину, алгоритм не перебирает все возможные замкнутые множества, поэтому найденное множество может не быть оптимальным. Тем не менее решение задачи предлагаемым методом с полученным замкнутым множеством происходит быстрее, чем полный перебор. Осталось показать, что выполнение этого алгоритма не приведет к заметному увеличению сложности решения всей задачи. Так как для каждой вершины строится замкнутое множество мощности n_s^0 , то это утверждение эквивалентно выполнению неравенства $n\Sigma_1 \ll \Sigma_2 + \Sigma_3$. Неравенство несложно обосновать, используя соотношение порядков. Будем считать, что все величины: количество вершин и ребер различных множеств (внутреннего, граничного и т.д.) по порядку оцениваются как $O(n)$. Тогда $n\Sigma_1 = O(n^5)$, так как основное слагаемое в Σ_1 – это последовательная сумма кубов. Из суммы $\Sigma_2 + \Sigma_3$ рассмотрим слагаемое $C_{m-m_z}^q M(n - n_s)$. $C_{m-m_z}^q M(n - n_s) = O(n^q)O(n^4) = O(n^{4+q})$ и уже при $q > 1$ это слагаемое растет быстрее, чем $n\Sigma_1$.

7. Заключение

В работе рассматривается задача нахождения критических узлов транспортной сети и метод ее решения с помощью вычисления аргументов, при которых функция обобщенной стоимости поездок достигает своего максимума. Наиболее трудоемкая операция в этом методе заключается в многократном вычислении матрицы длин кратчайших путей между всеми вершинами. Введено понятие замкнутой области и предложен метод сокращения вычислений этой матрицы. Метод основан на декомпозиции и последующих вычислений подматриц. Была приведена оценка количества операций и предложен метод построения замкнутой области, минимизирующей количество вычислений при решении задачи нахождения критических узлов.

Литература

1. КРЫГИН А.А., КУПРИЯНОВ Б.В. *Определение критических узлов транспортной сети*. – М.: Изд-во «УБС», 2023. – 24 с.
2. ЛИПСКИЙ В. *Комбинаторика для программистов*. – М.: «Мир», 1988.
3. ПАПАДИМИТРИУ Х.Х., СТАЙГЛИЦ К. *Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность*. – М.: «Мир», 1982. –512 с.
4. BELL M.G.H., CASSIR C. *Reliability of Transport Networks*. – Baldock, Herts: Research Studies Press, 2000.
5. BELL M.G.H., IIDA Y. *Transportation Network Analysis*. – Chichester: John Wiley and Sons, 1997.
6. BI Y.C., WILLIAM H.K., LAM A.S., QINGQUAN L. ET AL. *Vulnerability analysis for large-scale and congested road networks with demand uncertainty* // *Transportation Research Part A: Policy and Practice*. – 2012. – Vol. 46, Iss. 3. – P. 501–516. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tra.2011.11.018>. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S096585641100187X>.
7. D'ESTE G.M., TAYLOR M.A.P. *Modelling network vulnerability at the level of the national strategic transport network* // *Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies*. –2001. Vol. 4(2). – P. 1–14.
8. D'ESTE G.M., TAYLOR M.A.P. *Network vulnerability: an approach to reliability analysis at the level of national strategic transport networks* // In: *The Network Reliability of Transport* / Eds.: Y. Iida, M.G.H. Bell. – Oxford: Pergamon-Elsevier, 2003. – P. 23–44.
9. ESFEH M.A., KATTAN L., WILLIAM H.K., LAM M.S. ET AL. *Road network vulnerability analysis considering the probability and consequence of disruptive events: A spatiotemporal incident impact approach* // *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*. – 2021. – Vol. 136. –

- 103549 – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trc.2021.103549>. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0968090X21005313>.
10. GUZE S. *Graph Theory Approach to the Vulnerability of Transportation Networks* // Algorithms. – 2019. – Vol. 12(12). – P. 270.
 11. JENELIUS E., PETERSEN T., MATTSSON L.G. *Importance and exposure in road network vulnerability analysis* // Transportation Research Part A: Policy and Practice. – 2006. – Vol. 40, Iss. 7. – P. 537–560. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tra.2005.11.003>. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S096585640500162X>.
 12. JENELIUS E., PETERSEN T., MATTSSON L-G. *Importance and exposure in road network vulnerability analysis* // Transportation Research Part A Policy and Practice. – February 2006. – Vol. 40(7). – P. 537–560.
 13. NEUMANN T., BEHRISCH M. *Terminal reliability of road networks with multiple destination options* // Int. J. of Safety and Security Eng. – 2018. – Vol. 8, No. 3. – P. 426–437.
 14. SUGIURA S., KURAUCHI F. *Isolation vulnerability analysis in road network: Edge connectivity and critical link sets* // Transportation Research Part D: Transport and Environment. – 2023. – Vol. 119. – P. 103768. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trd.2023.103768>. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1361920923001657>.
 15. VIVEK S., CONNER H. *Urban road network vulnerability and resilience to large-scale attacks* // Safety Science. – 2022. – Vol. 147. – P. 105575. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ssci.2021.105575>. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925753521004173>.
 16. WANG S., CHEN C., ZHANG J., GU X., HUANG X. *Vulnerability assessment of urban road traffic systems based on traffic flow* // Int. Journal of Critical Infrastructure

Protection. – 2022. – Vol. 38. – P. 100536. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijcip.2022.100536>. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1874548222000269>.

FINDING CRITICAL NODES IN A TRANSPORTATION NETWORK BASED ON CONSTRUCTING A CLOSED REGION

Andrey Krygin, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (andreyakr@yandex.ru).

Boris Kupriyanov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (kuprianovb@mail.ru).

Abstract: The problem of finding critical nodes in a transportation network is considered, which is solved by maximizing the generalized cost of travel, which depends on the demand for movement and the cost of travel between each pair of network nodes. The proposed method in the paper is an improvement of exhaustive search, the main difficulty of which lies in the repeated computation of the matrix of minimum travel costs. The method consists of extracting a closed set of vertices from the original graph. The extraction of a closed set of vertices allows for graph reduction, decomposition of the corresponding matrices, and separate computations of sub-matrices. These transformations have helped reduce computations during the search for options. A general algorithm for finding critical nodes has been constructed and optimized. The closed set is divided into an internal and boundary subset. It has been shown that the algorithm works fastest with a minimum size of the boundary subset and an optimal size of the internal subset, for which a corresponding algorithm has been proposed to determine. An algorithm for constructing and expanding the closed set is also proposed, based on which an approximate algorithm for finding the optimal closed set is constructed. It has been shown that the complexity of finding the optimal closed set is much lower than the complexity of the improved exhaustive search method.

Keywords: transport networks, critical object search.

УДК 338.49

ББК 39.311

DOI: 10.25728/ubs.2023.106.10

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

Поступила в редакцию 27.07.2023.

Дата опубликования 30.11.2023.

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА – СТИЛТЬЕСА
ПИКОВОГО ВОЗРАСТА ИНФОРМАЦИИ
ДЛЯ СЛУЧАЯ, КОГДА ПЕРЕДАЧА ПАКЕТОВ
МОДЕЛИРУЕТСЯ СМО $PH|PH|1|R$
С ДИСЦИПЛИНОЙ FCFS**

Матюшенко С. И.¹

(Российский университет дружбы народов, Москва)

Самуилов К. Е.²

*(Российский университет дружбы народов, Москва; Институт
проблем информатики Федерального исследовательского
центра «Информатика и управление» РАН, Москва)*

На примере системы массового обслуживания $PH|PH|1|r$ получено преобразование Лапласа – Стильеса пикового возраста информации (Peak Age of Information, PAoI) – метрики, используемой в системах сотовой связи пятого поколения (5G) для мониторинга и управления удаленными системами со стороны центра управления. Метрика является функцией времени между генерациями обновлений в источнике и задержкой при доставке их по сети и предполагает, что только своевременно полученные обновления могут отражать текущее состояние системы. При теоретическом анализе технических систем передачи информации приходится учитывать, что метрика возраста информации значительно отличается от задержки, оцениваемой в моменты времени, когда пакет достигает пункта назначения, в то время как новая метрика PAoI определена для произвольного момента времени, что существенно усложняет ее анализ. Для проверки корректности полученных аналитических выражений проведено их сравнение с частным случаем СМО $M|M|1|1$, а также с результатами имитационного моделирования СМО с распределением фазового типа.

Ключевые слова: возраст информации, пиковый возраст информации, распределение фазового типа.

1. Введение

Одним из важных сценариев использования приложений сверхнадежной связи с малой задержкой (Ultra-Reliable Low

¹ Сергей Иванович Матюшенко, к.ф.-м.н., доцент (matyushenko-si@rudn.ru).

² Константин Евгеньевич Самуилов, д.т.н., зав. кафедрой; в.н.с. (samuylow-ke@rudn.ru).

Latency Service, URLLC) и массовой связи машинного типа (massive Machine Type Communications, mMTC) в беспроводных сетях связи пятого поколения (5G) является обмен информацией о состоянии удаленных систем между окончными устройствами и центром управления и мониторинга, который обеспечивает контроль за удаленными процессами и повышает их безопасность за счет эффективного использования информации о них [7]. Задачи своевременной доставки информации в центр контроля и управления возникают при мониторинге окружающей среды для предотвращения лесных пожаров, загрязнения атмосферы, утечек радиации, в технических системах – в индустриальном интернете вещей, в энергетическом и нефтегазовом секторах, в сфере автономного транспорта, в системах видеонаблюдения, в онлайновых социальных сетях [4]. В 2011 году для количественной оценки свежести доступной в центре управления и мониторинга информации о состоянии удаленной системы была предложена метрика Age of Information (Age of Information, AoI), представляющая собой функцию времени между генерациями обновлений на окончном устройстве (отправитель) и задержкой при доставке их по сети до центра управления и мониторинга (получатель) [5]. Обзор работ, в которых анализ возраста информации предлагается проводить с использованием аппарата теории массового обслуживания, можно найти в [8]. Там отмечено, что большинство исследователей ограничиваются простыми моделями, например, с экспоненциальным распределением времени между моментами генерации обновлений на узле-отправителе (УО) и экспоненциальным распределением длительности обработки обновления в узле-получателе (УП) с обслуживанием очереди в порядке поступления обновлений (First Come First Served, FCFS) или в обратном порядке (Last Come First Served, LCFS). Однако классические модели систем массового обслуживания позволяют получить лишь грубую оценку метрики возраста информации, поскольку однопараметрические распределения не дают возможности учесть особенности протоколов современных систем диспетчерского управления и сбора данных, случайный множественный

доступ от нескольких удаленных узлов-отправителей, многошаговые маршруты передачи пакетов-обновлений.

В настоящей работе для оценки возраста информации и его максимального значения – так называемого «пикового возраста информации» (Peak Age of Information, PAoI), которое является более простым для анализа показателем, – используется распределение фазового типа, выбор числа и параметров фаз которого позволяет гибко моделировать сложные зависимости, возникающие в современных системах передачи данных поколения 5G. В работе для сценария доставки пакета-обновления в соседний узел в предположении об отсутствии задержки передачи между узлами сети показаны случайные интервалы времени, определяющие возраст информации, содержащейся в пакете-обновлении. Для случая, когда передача пакетов моделируется СМО $PH|PH|1|r$ с дисциплиной FCFS, получено в аналитическом виде преобразование Лапласа – Стильеса пикового возраста информации. Для проверки корректности полученных аналитических выражений проведено их сравнение с частным случаем СМО $M|M|1|1$, а также с результатами имитационного моделирования СМО с распределением фазового типа.

2. Математическая модель для анализа пикового возраста информации

Предположим, что передача информации из УО в УП моделируется посредством однолинейной СМО с накопителем емкости $1 \leq r \leq \infty$, см. рис. 1.

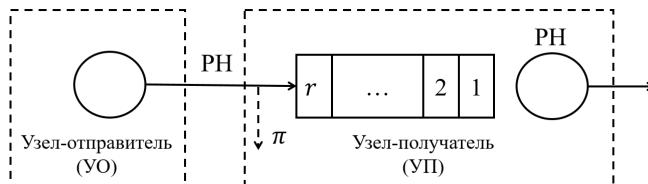


Рис. 1. СМО $PH|PH|1|r$

Возраст информации из пакета-обновления, полученного и обработанного узлом-получателем, представляет собой интервал времени от момента генерации этого пакета на узле- отправителе до момента окончания его обработки узлом- получателем. В терминах ТМО мы будем исследовать возраст информации, содержащейся в заявке, учитывая случайный интервал между соседними моментами генерации заявок в УО (так называемое «время генерации») и случайную длительность обслуживания заявки в УП.

Предположим, что поток заявок является рекуррентным с ФР $A(t)$ фазового типа

$$A(t) = 1 - \boldsymbol{\alpha}^\top e^{\boldsymbol{\Lambda}t} \mathbf{1}, \quad t > 0, \quad \boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{1} = 1,$$

допускающей неприводимое PH -представление $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\Lambda})$ порядка l .

Длительности обслуживания заявок имеют ФР $B(t)$ фазового типа

$$B(t) = 1 - \boldsymbol{\beta}^\top e^{\mathbf{M}t} \mathbf{1}, \quad t > 0, \quad \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{1} = 1,$$

допускающую неприводимое PH -представление $(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{M})$ порядка m .

Рассмотрим СМО с потерями, т.е. заявка, поступающая в систему в момент времени, когда накопитель полностью занят, теряется и больше в систему не возвращается. Выбор заявки из накопителя на обслуживание производится в соответствии с дисциплиной FCFS.

Функционирование рассмотренной СМО можно описать марковским процессом $\{X(t), t \geq 0\}$ над пространством состояний

$$\mathcal{X} = \bigcup_{k=0}^{r+1} \mathcal{X}_k,$$

где $\mathcal{X}_0 = \{(i, 0), i = \overline{1, l}\}$, $\mathcal{X}_k = \{(i, k, j), i = \overline{1, l}, j = \overline{1, m}\}$,
 $k = \overline{1, r+1}$.

Здесь $X(t) = (i, 0)$ означает, что система пуста, а генерация заявки происходит на фазе i , и $X(t) = (i, k, j)$ означает, что

в системе k заявок, генерация новой заявки происходит на фазе i , а обслуживание заявки прибором – на фазе j .

Обозначим через

$$p(i, 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = (i, 0)\},$$

$$p(i, k, j) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = (i, k, j)\}$$

пределевые вероятности МП $X(t)$ и введем векторы

$$\mathbf{p}_0^\top = (p(1, 0), \dots, p(l, 0)),$$

$$\mathbf{p}_k^\top = (p(1, k, 1), \dots, p(1, k, m), \dots, p(l, k, 1), \dots, p(l, k, m)).$$

Заметим, что из неприводимости PH -представлений следует, что все состояния МП $X(t)$ сообщаются, процесс эргодичен, а, следовательно, предельные вероятности совпадают со стационарными, не зависят от начального распределения и определяются с помощью матричной прогрессии, описанной в [1] на стр. 221.

Далее рассмотрим стационарные вероятности

$$\pi_A^-(0), \quad \pi_A^-(k, j), \quad k = \overline{1, r+1}, \quad j = \overline{1, m},$$

состояний ЦМ, вложенной по моментам $(t - 0)$ непосредственно перед поступлением заявок в систему, и введем векторы

$$\pi_A^{-\top}(k) = (\pi_A^-(k, 1), \dots, \pi_A^-(k, m)).$$

В [1] на стр. 229 доказано, что введенные вероятности определяются в соответствии с соотношениями

$$\pi_A^-(0) = \frac{1}{\lambda} \mathbf{p}_0^\top \boldsymbol{\lambda},$$

$$\pi_A^{-\top}(k) = \frac{1}{\lambda} \mathbf{p}_k^\top (\boldsymbol{\lambda} \otimes \mathbf{I}), \quad k = \overline{1, r+1},$$

где $\boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{1}$, $\lambda = -(\boldsymbol{\alpha}^\top \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{1})^{-1}$, \mathbf{I} – единичная матрица, знак \otimes означает кронекерово произведение матриц.

Пусть W – случайная величина (с.в.) пикового возраста информации из заявки (для краткости – пикового возраста заявки).

Согласно [6] пиковый возраст фиксированной заявки можно представить в виде суммы трех непересекающихся интервалов времени:

$$W = \hat{W}_1 + W_2 + W_3,$$

где \hat{W}_1 – суммарная длительность последовательных интервалов времени между соседними моментами генерации заявок, начиная от момента генерации фиксированной заявки и до момента первого присоединения к очереди заявки из числа следующих за фиксированной заявкой; W_2 – время ожидания начала обслуживания для заявки, присоединившейся к очереди вслед за фиксированной заявкой; W_3 – длительность обслуживания заявки, следующей в очереди за фиксированной заявкой.

В качестве иллюстрации введенных обозначений на рис. 2 представлена диаграмма формирования пикового возраста информации для фиксированной заявки с номером n для случая, когда в моменты $(t_{n+1} - 0)$ и $(t_{n+2} - 0)$ завершения генерации заявок $n + 1$ и $n + 2$ система оказалась полностью занятой.

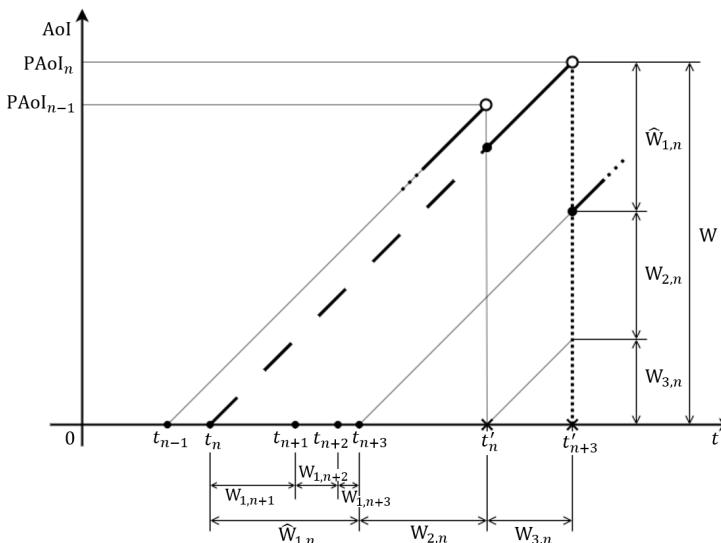


Рис. 2. Пример формирования пикового возраста информации для фиксированной заявки n

Заметим, что во многих указанных в обзоре [8] источниках интервал W на рис. 2 определяет пиковый возраст не для фиксированной заявки с номером n , а для фиксированной заявки с но-

мером $n+3$, следующей за заявкой n в очереди УП. Такой подход оправдан тем, что пиковый возраст фиксированной заявки определяется в момент непосредственно перед окончанием обслуживания в узле-получателе заявки, следующей в очереди за фиксированной заявкой. Приведенные ниже рассуждения и доказанные утверждения справедливы для обоих подходов к терминологии.

На рис. 2 используются следующие обозначения: t_n – момент поступления в систему (генерации) заявки n ; t_n' – момент выхода из системы (окончания обслуживания) заявки n ; $W_{j,n}$, $j = 1, 2, 3$, имеют тот же смысл, что и W_j , но для заявки n ; W_3 – длительность обслуживания заявки, следующей за фиксированной заявкой.

Как видно из рис. 2, в данном примере

$$\hat{W}_1 = W_{1,n+1} + W_{1,n+2} + W_{1,n+3},$$

так как заявки $n+1$ и $n+2$ теряются на выходе из УО, увеличивая пиковый возраст заявки n на время своей генерации. Под временем генерации заявки n понимаем интервал (t_{n-1}, t_n) , прошедший с момента генерации в УО предыдущей заявки $n-1$ до момента генерации в УО заявки n . Определим также с.в. W_1 – длительность интервала между соседними моментами генерации заявок в УО.

Лемма 1. $\hat{W}_1 = \frac{1}{1-\pi} W_1$, где π – вероятность потерь.

Доказательство. В системе с потерями заявка после генерации теряется с вероятностью π либо присоединяется к очереди с вероятностью $1-\pi$. В случае потери заявки, следующей за фиксированной заявкой, возраст информации, заключенной в фиксированной заявке, увеличивается на время генерации потерянной заявки. При этом цепочка потерь может быть сколь угодно длинной.

Формально это можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \hat{W}_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) W_1 \cdot \pi^k (1-\pi) = W_1 (1-\pi) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \pi^k = \\
 &= W_1 (1-\pi) \cdot \frac{d}{d\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \pi^k = W_1 (1-\pi) \frac{d}{d\pi} \left(\frac{\pi}{1-\pi} \right) = \\
 &= W_1 (1-\pi) \frac{1}{(1-\pi)^2} = \frac{1}{1-\pi} W_1.
 \end{aligned}$$

Заметим, что в соответствии с [1], стр. 230, вероятность потерь определяется по формуле

$$\pi = \frac{1}{\lambda} \mathbf{p}_{r+1}^{\top} (\boldsymbol{\lambda} \otimes \mathbf{1}).$$

Обозначим через $w_i(s)$ преобразование Лапласа – Стильеса (ПЛС) ФР с.в. W_i , $i = 1, 2, 3$.

В соответствии с [1] можно записать:

$$(1) \quad w_1(s) = 1 - s \boldsymbol{\alpha}^{\top} (s\mathbf{I} - \boldsymbol{\Lambda})^{-1} \mathbf{1},$$

$$(2) \quad w_3(s) = 1 - s \boldsymbol{\beta}^{\top} (s\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} \mathbf{1},$$

$$(3) \quad w_2(s) = \frac{1}{1-\pi} \left[\pi_A^-(0) + \sum_{k=1}^r \boldsymbol{\pi}_A^{-\top}(k) (s\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} \boldsymbol{\mu} \beta^{k-1}(s) \right].$$

С выводом формул (1), (2) можно ознакомиться в [1] на стр. 104, а формулы (3) – в [1] на стр. 232. При этом

$$\boldsymbol{\mu} = -\mathbf{M}\mathbf{1},$$

$$\beta(s) = \boldsymbol{\beta}^{\top} (s\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} \boldsymbol{\mu}, \quad [1], \text{стр. 232}.$$

Учитывая независимость с.в. \hat{W}_1 , W_2 и W_3 , а также то, что ПЛС ФР с.в. $\frac{1}{1-\pi} W_1$ равно $w_1 \left(\frac{s}{1-\pi} \right)$, приходим к следующему результату.

Теорема 1. ПЛС ФР с.в. W определяется соотношением

$$w(s) = w_1 \left(\frac{s}{1-\pi} \right) w_2(s) w_3(s),$$

где $w_i(s)$ вычисляются по формулам (1)–(3).

3. Пример СМО $M|M|1|1$

Функционирование СМО описывается МП $X(t)$ над пространством состояний $\mathcal{X} = \{(0), (1), (2)\}$, при этом

$$(4) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}^\top &= (1); \quad \boldsymbol{\Lambda} = (-\lambda); \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda); \\ \boldsymbol{\beta}^\top &= (1); \quad \mathbf{M} = (-\mu); \quad \boldsymbol{\mu} = (\mu). \\ p(0) &= \frac{1 - \rho}{1 - \rho^3} \stackrel{\Delta}{=} p_0, \text{ где } \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \end{aligned}$$

$$(5) \quad p(1) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^3} \rho \stackrel{\Delta}{=} p_1,$$

$$(6) \quad p(2) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^3} \rho^2 \stackrel{\Delta}{=} p_2,$$

$$(7) \quad \pi = p(2) = p_2.$$

$$\begin{aligned} w_1 &\stackrel{(1)}{=} 1 - s \cdot 1 \cdot (s + \lambda)^{-1} \cdot 1 = 1 - \frac{s}{s + \lambda} = \frac{\lambda}{s + \lambda}, \\ w_2 &\stackrel{(3),(7)}{=} \frac{p_0}{1 - p_2} \cdot 1 + \frac{p_1}{1 - p_2} \cdot \frac{\mu}{\mu + s}, \\ w_3 &\stackrel{(2)}{=} 1 - s \cdot 1 \cdot (s + \mu)^{-1} \cdot 1 = \frac{\mu}{s + \mu}. \end{aligned}$$

Таким образом, в соответствии с теоремой 1 получаем:

$$\begin{aligned} w(s) &= \frac{\lambda}{\lambda + \frac{s}{1 - \pi}} \left[\frac{p_0}{1 - p_2} + \frac{p_1}{1 - p_2} \cdot \frac{\mu}{\mu + s} \right] \frac{\mu}{\mu + s} = \\ &= \frac{\lambda}{\frac{s + \lambda(1 - p_2)}{1 - p_2}} \left[\frac{p_0}{1 - p_2} + \frac{p_1}{1 - p_2} \cdot \frac{\mu}{\mu + s} \right] \frac{\mu}{\mu + s} = \\ &= \frac{\lambda}{s + \lambda(1 - p_2)} \left[p_0 + p_1 \frac{\mu}{\mu + s} \right] \frac{\mu}{\mu + s}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$(8) \quad w(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda(1 - p_2)} \left[p_0 \frac{\mu}{\mu + s} + p_1 \frac{\mu^2}{(\mu + s)^2} \right].$$

Найдем математическое ожидание $E(W)$ пикового возраста информации

$$\begin{aligned}\frac{dw(s)}{ds} = & -\frac{\lambda}{(s + \lambda(1 - p_2))^2} \left[p_0 \frac{\mu}{\mu + s} + p_1 \frac{\mu^2}{(\mu + s)^2} \right] + \\ & + \frac{\lambda}{s + \lambda(1 - p_2)} \left[-\frac{p_0 \mu}{(\mu + s)^2} - \frac{2p_1 \mu^2}{(\mu + s)^3} \right], \\ \frac{dw(0)}{ds} = & -\frac{\lambda}{\lambda^2(1 - p_2)^2} \left[p_0 \frac{\mu}{\mu} + p_1 \frac{\mu^2}{\mu^2} \right] + \frac{\lambda}{\lambda(1 - p_2)} \left[-\frac{p_0 \mu}{\mu^2} - \frac{2p_1 \mu^2}{\mu^3} \right],\end{aligned}$$

следовательно,

$$E(W) = -\frac{dw(0)}{ds} = \frac{1}{\lambda(1 - p_2)} + \frac{1}{1 - p_2} \cdot \frac{p_0 + 2p_1}{\mu}.$$

Таким образом,

$$(9) \quad E(W) = \frac{\mu + \lambda p_0 + 2\lambda p_1}{\lambda \mu (1 - p_2)}.$$

Подставим в (9) формулы (4), (5), (6):

$$E(W) = \frac{\mu + \lambda \frac{1-\rho}{1-\rho^3} + 2\lambda \frac{1-\rho}{1-\rho^3} \rho}{\lambda \mu \left(1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^3} \rho^2\right)} = \frac{\mu(1 + \rho + \rho^2) + \lambda + 2\lambda\rho}{\lambda \mu (1 + \rho)}.$$

И, наконец, подставляя $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, получим

$$E(W) = \frac{\mu^2 + 2\lambda\mu + 3\lambda^2}{\lambda\mu(\mu + \lambda)}, \text{ что совпадает с результатом, полученным в [6] на стр. 37 (формула (3.80)).}$$

Мы провели численное исследование среднего пикового возраста информации для СМО $M|M|1|1$ при растущих значениях λ и различных фиксированных значениях μ : $\mu_1 = 1, 0$, $\mu_2 = 2, 0$, $\mu_3 = 3, 0$. Результаты исследования представлены в таблице 1 и на рис. 3. Как видно из этого рисунка, с ростом λ средний пиковый возраст информации убывает. При этом он тем меньше, чем больше значение μ , что вполне естественно, так как с ростом λ и μ информация генерируется на УО чаще и обрабатывается на УП быстрее. С ростом нагрузки средний пиковый возраст информации стабилизируется. Это эффект ограниченного накопителя — система переходит в режим полной загрузки и в ней больше ничего не меняется.

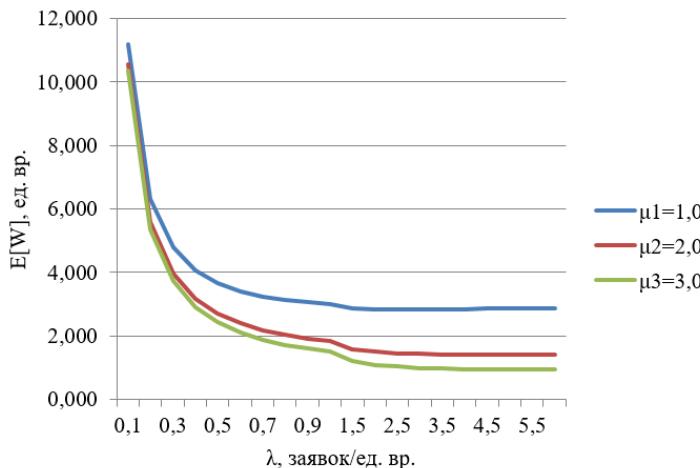


Рис. 3. Зависимость среднего пикового возраста информации от интенсивности входящего потока λ при фиксированных значениях интенсивности обслуживания μ

Таблица 1. Средний пиковый возраст информации

λ	μ_1 -аналит. 1,0	μ_1 -имитаци. 1,0	μ_2 2,0	μ_3 3,0
0,1	11,182	11,219	10,548	10,355
0,2	6,333	6,352	5,591	5,375
0,3	4,795	4,807	3,964	3,727
0,4	4,071	4,085	3,167	2,912
0,5	3,667	3,678	2,700	2,429
0,6	3,417	3,420	2,397	2,111
0,7	3,252	3,258	2,188	1,888
0,8	3,139	3,138	2,036	1,724
0,9	3,058	3,060	1,921	1,598
1,0	3,000	3,002	1,833	1,500
1,5	2,867	2,869	1,595	1,222

4. Заключение

Полученное аналитическое выражение для преобразования Лапласа-Стилтьеса пикового возраста заявки в СМО $PH|PH|1|r$ позволяет найти начальные моменты пикового возраста информации, а также основные числовые характеристики этой метрики для системы передачи данных, состоящей из пары «УО – УП», что соответствует одношаговому маршруту. Заметим, что для современных сценариев использования приложений сверхнадежной связи с малой задержкой URLLC и массовой связи машинного типа mMTC в системах сотовой связи поколения 5G необходимо строить более сложные модели, позволяющие проводить анализ метрики возраста информации с учетом специфики процесса передачи данных в беспроводных каналах связи, когда поступающий поток может быть коррелированным [2], процесс обслуживания должен учитывать схему опроса систем диспетчеризации [3], дисциплина обслуживания может зависеть от состояния беспроводных каналов пользователей. Наконец, услуга может предоставляться на многошаговом маршруте в несколько этапов, например, как это часто бывает в сотовых беспроводных технологиях mMTC, произвольный доступ и последующая передача данных, при этом как генерация пакетов-обновлений, так и их обслуживание на каждом этапе описывается более сложными, чем экспоненциальное, распределениями. Такой анализ является задачей дальнейших исследований.

Литература

1. БОЧАРОВ П.П., ПЕЧИНКИН А.В. *Теория массового обслуживания*. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
2. ВИШНЕВСКИЙ В.М., КЛИМЕНOK В.И., ЛАРИОНОВ А.А., МУХТАРОВ А.А., СОКОЛОВ А.М. *Исследование характеристик приоритетной мультисервисной системы ММАР/PH/M/N с использованием метода Монте-Карло* // Управление большими системами. – 2023. – №103. – С. 6–39.

3. ВИШНЕВСКИЙ В.М., СЕМЁНОВА О.В. *Системы поллинга: теория и применение в широкополосных беспроводных сетях.* – М.: Техносфера, 2007. – 312 с.
4. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А. *Модели совместной динамики мнений и действий в онлайновых социальных сетях. Ч. 1. Исходные данные и первичный анализ* // Проблемы управления. – 2023. – №2. – С. 37–53.
5. KAUL S., GRUTESER M., RAI V., KENNEY J. *Minimizing age of information in vehicular networks* // Proc. of the 2011 8th Annual IEEE communications society conference on sensor, mesh and ad hoc communications and networks. IEEE. – 2011. – P. 350–358.
6. KOSTA A., PAPPAS N., AGELAKIS V. *Age of Information: A New Concept, Metrics and Tools* // Foundations and Trends in Networking. – 2017. – Vol. 12, No. 3. – P. 162–259. – DOI: 10.1561/1300000060.
7. SULTAN A. *Ultra Reliable and Low Latency Communications / 3GPP*, 2023. – URL: <https://www.3gpp.org/technologies/urllc-2022> (дата обращения: 18.10.2023).
8. ZHBANKOVA E., MANAEVA V., MARKOVA E., GAIDAMAKA YU. *The Age of Information in Wireless Cellular Systems: Gaps, Open Problems, and Research Challenges* // Sensors. – 2023. – Vol. 23, No. 19. – P. 8238. – DOI: 10.3390/s23198238.

LAPLACE – STIELTJES TRANSFORM OF THE PEAK AGE OF INFORMATION FOR THE CASE WHEN PACKET TRANSMISSION IS MODELED BY A $PH|PH|1|R$ QUEUEING SYSTEM WITH FCFS DISCIPLINE

Sergey Matyushenko, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Cand.Sc., assistant professor (matyushenko-si@rudn.ru).

Konstantin Samouylov, Peoples' Friendship University of Russia
312

(RUDN University), Moscow, Head of Department; Federal Research Center “Computer Science and Control” of the RAS, Moscow, principal scientist, Doctor of Science (samuylov-ke@rudn.ru).

Abstract: This work is devoted to the analysis of Peak Age of Information (PAoI) – the metric used in 5G mobile cellular communications for remote groups monitoring and management at the control center. Currently, in the operation of the queueing system $PH|PH|1|r$, the Laplace – Stieltjes transform of the PAoI has been obtained. The PAoI presents the time between the generation of updates at the source and the delay in their delivery across the network and assumes that only timely received updates can reflect the current state of the system. When analyzing technical information transmission systems, it should be taken into account that the PAoI metric is significantly different from the delay measured at the time instants when the packet reaches its destination. The new PAoI metric is defined for an alternative time, that complicates its analysis. To check the correctness of the analytical results, they were compared with special cases of the queueing system $M|M|1|1$, as well as with the results of a simulation analysis of the queueing system with distributed cases of phase type.

Keywords: AoI, age of information, peak age of information, PH-distribution.

УДК 519.872

ББК 22.18

DOI: 10.25728/ubs.2023.106.11

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.В. Горбуновой.*

Поступила в редакцию 22.11.2023.

Дата опубликования 30.11.2023.