УДК 517.956
doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-3

Вариант формальной теоремы о нулях линейных дифференциальных операторов

В. И. Титаренко[1], А. И. Фомин[2]

[1]Государственный университет управления, Москва, Россия
[1]vera_xmel@mail.ru, [2]fomin45@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* В теории линейных дифференциальных уравнений существенную роль играют преобразования, порожденные дифференциальными заменами зависимых переменных. Исследование этих преобразований привело к созданию общей теории дифференциальных алгебр симметрии однородных линейных систем дифференциальных уравнений и к теории дифференциальных гомоморфизмов. Эти теории оказались тесно связанными с понятием теоремы о нулях линейных дифференциальных операторов (ЛДО). К настоящему времени доказано несколько теорем о нулях ЛДО, но этих теорем недостаточно для исследования алгебр дифференциальной симметрии и соотношений между разными типами линейных однородных систем дифференциальных уравнений. Формулировка и доказательство новых теорем о нулях ЛДО является актуальной задачей. Основная цель работы – формулировка и доказательство варианта формальной теоремы о нулях ЛДО. Другая важная цель – построение примеров применения теоремы, которые подтверждают ее полезность и основательность. *Материалы и методы.* Приведены общие сведения о работах, в которых представлены теоремы о нулях ЛДО. Поясняется смысл формальных теорем о нулях и роль, которую такие частные теоремы могут играть в общей теории. Представлены основные обозначения и понятия, приведено определение теоремы о нулях линейных дифференциальных операторов для семейства модулей над кольцом скалярных линейных дифференциальных операторов. Описаны элементы теории псевдообратных матриц и операторов, которые используются при доказательстве основной теоремы работы. *Результаты.* Формулируется и доказывается вариант формальной теоремы о нулях. Приведены примеры семейств линейных дифференциальных операторов, для которых выполняются условия теоремы 1 (теоремы 2, 3, 4). Описан метод построения локальных сечений в общей задаче псевдообращения; в новой ситуации применена псевдообратная матрица; использован специальный базис, в котором координаты ЛДО совпадают с его коэффициентами; введено полезное понятие матрицы главных символов ЛДО по столбцам. *Выводы.* Результаты работы могут служить основой доказательства справедливости формальной теоремы о нулях для множества конкретных линейных дифференциальных операторов и семейств операторов.

Ключевые слова: линейный дифференциальный оператор, алгебры дифференциальной симметрии, теоремы о нулях, формальная теорема, псевдообратный оператор, псевдообратная матрица, матрица главных символов линейного дифференциального оператора по столбцам

Для цитирования: Титаренко В. И., Фомин А. И. Вариант формальной теоремы о нулях линейных дифференциальных операторов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 2. С. 27–43. doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-3

A variant of the formal theorem on the zeros of linear differential operators

V.I. Titarenko[1], A.I. Fomin[2]

[1]State University of Management, Moscow, Russia

[1]vera_xmel@mail.ru, [2]fomin45@mail.ru

Abstract. *Background*. In the theory of linear differential equations, transformations generated by differential substitutions of dependent variables play an essential role. The study of these transformations led to create a general theory of differential symmetry algebras of homogeneous linear systems of differential equations and to the theory of differential homomorphisms. These theories turned out to be closely related to the concept of the theorem on the zeros of linear differential operators (LDO). To date, several theorems on the zeros of linear equations have been proved, but these theorems are not sufficient to study the algebras of differential symmetry and the relations between different types of linear homogeneous systems of differential equations. The formulation and proof of new theorems about the zeros of LDO is an urgent task. The main objective of the work is to formulate and prove a version of the formal theorem on the zeros of linear differential operators. Another important objective is to construct examples of the theorem's application that confirm its usefulness and validity. *Materials and methods.* Section 1 (Introduction) provides general information on the works that present theorems on zeros of LDO. The meaning of formal theorems on zeros and the role that such particular theorems can play in the general theory are explained. Section 2 presents the basic notations and concepts, and provides a definition of the theorem on zeros of linear differential operators for a family of modules over the ring of scalar linear differential operators. Section 3 describes the elements of the theory of pseudoinverses of matrices and operators, which are used in proving the main theorem of the work. *Results.* Section 4 formulates and proves a version of the formal theorem on zeros (Theorem 1). Section 5 gives examples of families of linear differential operators for which the conditions of Theorem 1 are satisfied (Theorems 2, 3, 4). In addition, a method for constructing local sections in the general pseudoinverse problem is described; a pseudoinverse matrix is applied in a new situation; a special basis is used in which the coordinates of the LDO coincide with its coefficients; a useful concept of the matrix of the main symbols of the LDO by columns is introduced. *Conclusions*. The results of the work can serve as the basis for proving the validity of the formal theorem on zeros for a set of specific linear differential operators and families of operators.

Keywords: linear differential operator, differential symmetry algebras, zero theorems, formal theorem, pseudo-inverse operator, pseudo-inverse matrix, matrix of the main symbols of LDO by columns

For citation: Titarenko V.I., Fomin A.I. A variant of the formal theorem on the zeros of linear differential operators. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(2):27–43. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-3

Введение

Теорема о нулях линейных дифференциальных операторов упоминалось в работах [1, 2], равносильные понятия были использованы в статье [3], в которой доказаны варианты глобальной теоремы о нулях невырожденных линейных дифференциальных операторов (ЛДО) с постоянными коэффициентами, эллиптических ЛДО с вещественно аналитическими коэффициентами и невырожденных обыкновенных ЛДО с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами (теоремы 5.1, 3.1 в [3]), а в теореме 4.1 установлен вариант локальной теоремы о нулях. Однако окончательный вид понятие теоремы о нулях ЛДО приобрело в работе [4].

Настоящую статью следует рассматривать как продолжение работ [3, 4]. Здесь устанавливается вариант формальной теоремы о нулях ЛДО. Суть формальных теорем состоит в том, что если некоторый линейный дифференциальный оператор G обращается в нуль на всех формальных решениях однородной линейной системы дифференциальных уравнений $Pv=0$ в некоторой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, то он представляется в виде произведения $G=LP$ (делится на оператор этой системы). При этом на коэффициенты левого делителя L могут накладываться дополнительные условия. В частности, в точных формулировках теорем о нулях коэффициенты оператора L должны быть того же типа, что и коэффициенты оператора P (например, бесконечно дифференцируемыми, если бесконечно дифференцируемы коэффициенты ЛДО). Более точный смысл этому условию придает понятие кольца коэффициентов.

Формальные теоремы выглядят как весьма частный случай по отношению ко всему многообразию теорем о нулях. Существуют еще локальные и глобальные теоремы о нулях. Однако при постановке общей задачи о делении одного заданного ЛДО на другой оператор обычно говорится, что все нули заданного ЛДО являются и нулями другого оператора. А формальные решения, конечно же, входят в число всех решений соответствующей однородной линейной системы уравнений.

Можно выдвинуть гипотезу, что если к решениям системы уравнений присоединить обобщенные решения, то оператор, который обращается в нуль на всех решениях системы, будет обязательно делиться на оператор этой системы. Но пока такая гипотеза ничем не обоснована. В то же время с технической точки зрения расширение запаса решений системы однородных линейных дифференциальных уравнений до формальных решений позволяет получать новые условия справедливости теорем о нулях ЛДО.

1. Предварительные понятия

Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\partial^\alpha = \partial^{|\alpha|}\big/\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$; $P=P(x,\partial)=\sum_\alpha a_\alpha(x)\partial^\alpha$ – скалярный (для одной функции) линейный дифференциальный оператор с коэффициентами $a_\alpha(x)\in C^\infty(\Omega,\mathbb{C})$; D – алгебра таких ЛДО конечного порядка $\operatorname{ord}P=\max\{|\alpha|: a_\alpha\neq 0\}$; $\operatorname{ord}_x P=\max\{|\alpha(x)|: a_\alpha(x)\neq 0\}$ – порядок ЛДО в точке x (точечный порядок); $D(r,m)$ – множество матричных ЛДО $P=\|P_{ij}\|$ размера $r\times m$ с элементами $P_{ij}\in D$; $\operatorname{ord}P=\max(\operatorname{ord}P_{ij})$ – порядок матричного ЛДО, $D^m(P)$ – подмодуль свободного левого D-модуля $D^m\approx D(1,m)$ с образующими $P_i=(P_{i1},\cdots,P_{im})$; $\mathfrak{M}_P=D^m\big/D^m(P)$, $\{V_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$ – семейство левых унитарных D-модулей, $v^\gamma=(v_1^\gamma,\ldots,v_m^\gamma)\in V_\gamma^m$;

$P_i v^\gamma = P_{i1} v_1^\gamma + \dots + P_{im} v_m^\gamma$, $Pv^\gamma = (P_1 v^\gamma, \dots, P_r v^\gamma)$, $(V_\gamma^m)_P = \left\{ v^\gamma \in V^m : Pv^\gamma = 0 \right\}$ – подпространство решений однородной линейной системы дифференциальных уравнений (уравнения) $Pv^\gamma = 0$ в V_γ^m, $D^m(P, \{V_\gamma\}) = \left\{ \beta \in D^m : \beta\, (V_\gamma^m)_P = 0,\ \forall \gamma \in \Gamma \right\}$; $A = D(m,m)$ – ассоциативная алгебра с единицей по отношению к стандартным операциям над матричными ЛДО; $J_P = \left\{ a \in A : a_i \in D^m(P) \right\}$, $A_P = \{ a \in A : J_P a \subseteq J_P \}$ – нормализатор левого идеала J_P; $A_P\{V_\gamma\} = \left\{ a \in A : a(V_\gamma^m)_P \subseteq (V_\gamma^m)_P,\ \forall \gamma \in \Gamma \right\}$ – алгебра операторов дифференциальной симметрии семейства уравнений $Pv^\gamma = 0$; $J_P\{V_\gamma\} = \left\{ a \in A : a(V_\gamma^m)_P = 0,\ \forall \gamma \in \Gamma \right\}$ – левый идеал A. Алгебры $A_P\{V_\gamma\}$ и A_P называются соответственно внешней и внутренней алгебрами дифференциальной симметрии семейства уравнений $Pv^\gamma = 0$, а факторалгебры $T_P\{V_\gamma\} = A_P\{V_\gamma\} / J_P\{V_\gamma\}$ и $T_P = A_P / J_P$ – внешней и внутренней трансвекторными алгебрами симметрии [3, 4].

Определение 1. Для ЛДО $P \in D(r,m)$ выполняется теорема о нулях над кольцом коэффициентов $C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ для семейства D-модулей $\left\{ V_\gamma : \gamma \in \Gamma \right\}$, если справедливо равенство $D^m\left(P, \{V_\gamma\}\right) = D^m(P)$, другими словами, ЛДО $\beta \in D^m$ обращается в нуль на всех решениях семейства уравнений $Pv^\gamma = 0$ тогда и только тогда, когда $\beta \in D^m(P)$.

В следующем предложении приводятся условия, эквивалентные теореме о нулях для семейства D-модулей $\left\{ V_\gamma : \gamma \in \Gamma \right\}$.

Предложение 1 (теорема 1 в [4]). Теорема о нулях ЛДО $P \in D(r,m)$ над кольцом $C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ для семейства D-модулей $\left\{ V_\gamma : \gamma \in \Gamma \right\}$ выполняется тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:

1). ЛДО $G \in D(s,m)$ делится на ЛДО $P \in D(r,m)$ над кольцом коэффициентов $C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$, т.е. имеет вид $G = LP$, $L \in D(s,r)$, тогда и только тогда, когда $(V_\gamma^m)_P \subseteq (V_\gamma^m)_G$ при всех $\gamma \in \Gamma$;

2) справедливо равенство $J_P\{V_\gamma\} = J_P$;

3) справедливо равенство алгебр $A_P\{V_\gamma\} = A_P$ и равенство факторалгебр $T_P\{V_\gamma\} = T_P$;

4) гомоморфизмы D-модуля $\mathfrak{M}_P = D^m / D^m(P)$ в D-модули V_γ для всех $\gamma \in \Gamma$ разделяют точки $\mathfrak{M}_P$.

2. Псевдообратная матрица и псевдообратный оператор

Определение 2. Пусть A – числовая матрица размера $m \times n$ и ранга η. Скелетным разложением матрицы A называется представление A в виде произведения $A = BC$ матриц B и C ранга η размеров $m \times \eta$ и $\eta \times n$. Матрица A^+ размера $n \times m$, заданная равенством

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*, \tag{1}$$

называется псевдообратной матрицей по отношению к матрице A.

В равенстве (1) звездочка обозначает операцию эрмитова сопряжения: $X^* = \bar{X}^t$, где t – символ транспонирования, а черта над символом означает комплексное сопряжение. Нетрудно показать, что определенная равенствами $A = BC$ и (1) матрица A^+ удовлетворяет четырем условиям:

$$AA^+A = A;\ A^+AA^+ = A^+;\ (AA^+)^* = AA^+;\ (A^+A)^* = A^+A. \tag{2}$$

Эти условия можно заменить тремя равносильными условиями:

$$AA^+A = A,\ A^+ = UA^*,\ A^+ = A^*V, \tag{3}$$

где U, V – некоторые матрицы размеров $n \times n$ и $m \times m$ соответственно.

Равенство $AA^+A = A$ показывает, что если y – такая правая часть системы линейных уравнений $Ax = y$, что система совместна, то выражение A^+y является одним из возможных решений этой системы: $A(A^+y) = A(A^+Ax) = (AA^+A)x = Ax = y$. Следовательно, матрица A^+ является «разрешающей матрицей» системы линейных уравнений. Таких матриц может быть бесконечно много, но если выполнены все условия (2) или равносильные условия (3), то эти условия определяют единственную псевдообратную матрицу. Теорема существования и единственности псевдообратной матрицы A^+ вместе с ее конструктивным построением была доказана Элиакимом Муром [5], а затем независимо Роджером Пенроузом [6].

Определяющие условия (3), скелетное разложение матрицы и доказательство формулы (1) приводится в книге Ф. Р. Гантмахера (гл. 1, § 5 в [7]). Другие сведения о псевдообратной матрице содержатся в книге [8] (теорема 1, с. 191; предложение 10, с. 197; предложение 12, с. 199).

Для того чтобы определить псевдообратную матрицу с помощью равенства (1), необходимо знать матрицы B и C. Существует стандартный способ построения скелетного разложения матрицы A (гл. 1, § 5 в [9]). Именно этот способ понадобится нам для доказательства основной теоремы статьи в следующем разделе, поэтому мы его опишем.

Ранг матрицы A равен η, поэтому можно выделить η линейно независимых столбцов $\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_\eta$ и составить из них матрицу B. Матрица C составляется из коэффициентов разложения столбцов матрицы A по базису из линейно независимых столбцов $\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_\eta$. Для нахождения коэффициентов разложения можно применить известный метод (гл. 2, § 10 в [8]). Наряду с выделенными столбцами матрицы A надо выделить η линейно независимых строк. Квадратная подматрица $\hat{a}$, составленная из элементов, расположенных на пересечении выделенных столбцов и строк, невырождена: $\det \hat{a} = \Delta \neq 0$. Теперь надо присоединить к столбцам $\hat{b}_1,\ldots,\hat{b}_\eta$ столбец $\hat{b}$ матрицы A (или любой другой зависимый вектор-столбец $\hat{G}$). Получится матрица Λ ранга η и размера $m\times(\eta+1)$. При этом к подматрице $\hat{a}$ присоединяется часть столбца $\hat{b}$ (или $\hat{G}$), получается подматрица $\hat{a}$ размера $\eta\times(\eta+1)$. К этой подматрице надо последовательно присоединять строки матрицы Λ и представлять определители возникающей квадратной подматрицы Λ_1 порядка $(\eta+1)$ в виде суммы произведений элементов присоединенной строки на соответствующие алгебраические дополнения. Матрица Λ имеет ранг η, поэтому определитель подматрицы Λ_1, полученной после присоединения строки, не являющейся строкой подматрицы $\hat{a}$, равен нулю. Определитель равен нулю и в том случае, когда в качестве присоединенной оказывается строка подматрицы $\hat{a}$, потому что в этом случае получается матрица, содержащая две одинаковые строки. В результате элемент присоединенного вектор-столбца и присоединенной строки представляется в виде суммы произведений элементов столбцов $\hat{b}_1,\ldots,\hat{b}_\eta$ на частные от деления, взятых с обратным знаком алгебраических дополнений на определитель $\Delta = \det \hat{a}$. Эти коэффициенты одинаковы для всех элементов присоединенного столбца. Возникает разложение присоединенного вектор-столбца по линейно независимым столбцам $\hat{b}_1,\ldots,\hat{b}_\eta$. Построенная матрица C имеет размерность $\eta\times n$ и ранг η, потому что она содержит единичную подматрицу порядка η, образованную столбцами коэффициентов разложения базисных столбцов $\hat{b}_1,\ldots,\hat{b}_\eta$.

Обращаясь к понятию псевдообратного оператора, отметим, что псевдообратный оператор можно рассматривать как частный случай более общей конструкции. Пусть E_1, E_2 – линейные пространства, $P: E_1 \to E_2$ – линейное отображение, $\ker P$, $\operatorname{im} P$ – ядро и образ оператора P, $Px = y$, $x \in E_1$, $y \in E_2$ – линейное операторное уравнение. Если $y \notin \operatorname{im} P$, то это уравнение не имеет решений. Если $y \in \operatorname{im} P$ и $\ker P \neq 0$, то решений уравнения $Px = y$ бесконечно много (совместное неопределенное уравнение). В каждом классе смежности пространства E_1 по подпространству $\ker P$ можно выбрать такой элемент x_y, что $Px_y = y$ и определить на подпространстве $\operatorname{im} P$ «разрешающий оператор» P_{s}^{-1} равенством $P_{\mathrm{s}}^{-1} y = x_y$. Если фиксировать в пространстве E_1 дополнительное к $\ker P$ подпространство $(\ker P)_{ad}$ и представить E_1 в виде прямой суммы $E_1 = \ker P \dotplus (\ker P)_{\mathrm{ad}}$, то ограничение оператора P на подпространство $(\ker P)_{\mathrm{ad}}$ будет изоморфизмом линейных пространств: $(\ker P)_{\mathrm{ad}} \approx \operatorname{im} P$. В качестве решения $P_{\mathrm{s}}^{-1}(y)$ уравнения $Px = y$ можно будет взять единственный прообраз $x_y \in (\ker P)_{\mathrm{ad}}$ элемента $y \in \operatorname{im} P$. Выбор дополнительного подпространства эквивалентен построению дополнительного базиса к базису в подпространстве $\ker P$. Можно выбрать базис подпространства $\operatorname{im} P$, а в качестве базиса в дополнительном подпространстве $(\ker P)_{\mathrm{ad}}$ взять прообразы выбранных базисных элементов. Такой метод будет использован в следующем разделе при доказательстве первой части теоремы 1.

Оператор P_{s}^{-1} определен только на подпространстве $\operatorname{im} P$. Для его продолжения на все пространство можно выбрать в E_2 дополнительное к $\operatorname{im} P$ подпространство $(\operatorname{im} P)_{\mathrm{ad}}$ и определить на этом подпространстве продолжение оператора P_{s}^{-1}. Проще всего считать, что продолженный оператор на дополнительном подпространстве обращается в нуль. Но если в линейных пространствах E_1, E_2 фиксированы эрмитовы скалярные произведения $(x,x')_1$, $(y,y')_2$, то в качестве дополнительных подпространств $(\ker P)_{\mathrm{ad}}$ и $(\operatorname{im} P)_{\mathrm{ad}}$ удобно брать ортогональные дополнения $(\ker P)^{\perp}$, $(\operatorname{im} P)^{\perp}$. В бесконечномерном случае необходимо потребовать, чтобы пространства E_1, E_2 были гильбертовыми, а оператор $P: E_1 \to E_2$ был непрерывным. При таких предположениях подпространства $\ker P$, $\operatorname{im} P$ замкнуты, пространства E_1, E_2 могут быть представлены как прямые суммы ортогональных подпространств: $E_1 = \ker P \oplus (\ker P)^{\perp}$, $E_2 = \operatorname{im} P \oplus (\operatorname{im} P)^{\perp}$, а псевдообратный оператор можно определить следующим образом.

Определение 3. Пусть E_1, E_2 – гильбертовы пространства; $P: E_1 \to E_2$ – непрерывное линейное отображение; $\ker P$, $\operatorname{im} P$ – ядро и образ оператора P; $E_1 = \ker P \oplus (\ker P)^{\perp}$, $E_2 = \operatorname{im} P \oplus (\operatorname{im} P)^{\perp}$ – разложения в прямые суммы ортогональных подпространств; $Px = y$, $x \in E_1$, $y \in E_2$, – линейное операторное уравнение. Псевдообратным оператором по отношению к оператору P называется оператор $P^{+}: E_2 \to E_1$, который равен нулю на подпространстве $(\operatorname{im} P)^{\perp}$, а на подпространстве $\operatorname{im} P$ совпадает с обратным оператором по отношению к изоморфизму $P: (\ker P)^{\perp} \to \operatorname{im} P$.

Конечно, оператор P^{+} является одним из разрешающих операторов P_{s}^{-1}, но он обладает дополнительными свойствами, которые делают его удобным для решения многих прикладных задач. С прикладной точки зрения рассматривается и более сложная ситуация: оператор P определен на плотном в бесконечномерном гильбертовом пространстве E_1 множестве и всего лишь замкнут [9]. Но наибольший интерес для разного рода приложений и для целей этой статьи представляет случай конечномерных пространств. Именно в этом случае проявляется связь псевдообратного оператора с псевдообратной матрицей.

Предположим, что E_1, E_2 – конечномерные линейные пространства размерностей $\dim E_1 = n$, $\dim E_2 = m$ с базисами $\{e_i\}$, $\{f_j\}$; $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{m} y_j f_j$ – координатные разложения векторов $x \in E_1$ $y \in E_2$. Эти линейные пространства превращаются в конечномерные гильбертовы пространства, если заданы стандартные координатные эрмитовы скалярные произведения: $(x,x')=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{x_i'}$, $(y,y')=\sum_{j=1}^{m}y_j\overline{y_j'}$. Очевидно, выбранные базисы $\{e_i\}$, $\{f_j\}$ относительно таких скалярных произведений становятся ортонормированными. Доказательство следующего утверждения можно найти, например, в книге Д. В. Беклемишева [8] (предложение 2, с. 200) или в статье [10].

Предложение 2. Если A – матрица оператора P относительно ортонормированных базисов в конечномерных линейных пространствах E_1, E_2 размерностей $\dim E_1 = n$, $\dim E_2 = m$, то матрица псевдообратного оператора P^+ совпадает с псевдообратной матрицей A^+. Другими словами, матрица оператора P^+ может быть представлена в виде произведения (1): $A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$, где матрицы B и C имеют тот же ранг, что и матрица A, и справедливо равенство $A = BC$.

4. Вариант формальной теоремы о нулях линейных дифференциальных операторов

Введем обозначения DC – алгебра скалярных ЛДО с постоянными коэффициентами; DO – множество скалярных ЛДО, коэффициенты которых могут быть любыми функциями, определенными в области Ω; D_x – ЛДО с постоянными коэффициентами, равными значениям коэффициентов ЛДО D в точке x; F_x – пространство степенных рядов с центром в точке x; S_d – подмножество множества ЛДО S, состоящее из операторов s порядка $\operatorname{ord} s \le d$. Если ЛДО $P\in D(r,m)$ и $a\in DC^r$, то равенство $P'(x)a=(aP)_x$ задает линейное отображение $P'(x): DC^r \to DC^m$. Пусть $\operatorname{im} P'(x)$ – образ этого отображения; $P_d'(x)$ – ограничение $P'(x)$ на подпространство DC_d^r.

Теорема 1. Пусть $P\in D(r,m)$ – ЛДО порядка $\operatorname{ord} P = k$, $\nu\in\mathbb{Z}_+$, и выполнены следующие условия:

1) размерность любого подпространства $(\operatorname{im} P'(x))_\nu \subseteq DC_\nu^m$ не зависит от точки x;

2) для любого целого числа $\nu \ge k$ существует целое неотрицательное число $d = d(\nu) = d_\nu$ такое, что $(\operatorname{im} P'(x))_\nu = (\operatorname{im} P_d'(x))_\nu$ для всех $x\in\Omega$.

Если выполнено только условие 1, то у каждой точки $x\in\Omega$ существует окрестность Ω_x такая, что если ЛДО $G\in D(1,m)$ обращается в нуль на всех формальных решениях системы уравнений $Pv=0$ в области Ω_x, то существует ЛДО L размера $1\times r$ с коэффициентами, принадлежащими $C^\infty(\Omega_x,\mathbb{C})$ такой, что в области Ω_x верно равенство $G = LP$.

Если выполнены оба условия, то для ЛДО P справедлива формальная теорема о нулях: $D^m(P,\{F_x\}) = D^m(P)$, т.е. ЛДО $G\in D(1,m)$ обращается в нуль на всех формальных решениях уравнения $Pv = 0$ в области Ω тогда и только тогда, когда $G \in D^m(P)$.

Доказательство. Основу доказательства доставляет следующие утверждение.

Предложение 3 (теорема 2 в [4]). Пусть $P \in D(r, m)$, $G \in D(1, m)$. Если любое формальное решение системы $Pv = 0$ в области Ω является решением уравнения $Gv = 0$, то существует ЛДО $L \in DO(1, r)$ такой, что верно равенство $G = LP$.

Теорема 2 [4] является следствием более общей теоремы 3 [4]. Из этой теоремы следует, что уравнение $G_x = (LP)_x = (L_x P)_x = P'(x) L_x$ имеет решение L_x тогда и только тогда, когда $(F_x)_P^m \subseteq (F_x)_G^m$. Таким образом, смысл теоремы 1 [4] заключается в том, что при сделанных предположениях из множества точечных решений L_x уравнения $G = LP$ можно сконструировать решение L с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Сделать это можно в некоторой окрестности любой фиксированной точки $x \in \Omega$, если выполнено только условие 1. И это можно сделать во всей области Ω, если выполнены оба условия.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Предположим, что выполнено условие 1. Пусть $\mu \in \mathbb{Z}_+$, $e_{\alpha,j} = (0, \ldots, \partial^\alpha, \ldots, 0)$ – элемент DC^μ, у которого от нуля отлична j-я компонента. Покомпонентные частные производные $e_{\alpha,j}$ образуют счетный базис в линейных пространствах DC^μ и конечный базис в подпространствах DC_τ^μ, $|\alpha| \le \tau \in \mathbb{Z}_+$. Можно считать, что эти базисные векторы упорядочены и занумерованы (например, по порядкам мультииндексов, компонент j и лексикографически). ***Преимущество базисов $\{e_{\alpha,j}\}$ – координаты ЛДО в базисах такого типа совпадают с коэффициентами оператора***.

Фиксируем точку x области Ω. Подпространство $(\operatorname{im} P'(x))_\nu$ конечномерно, поэтому числа $\tilde{d}(\nu, x)$ такие, что верно равенство $(P'(x) DC^r)_\nu = (P'(x) DC^r_{\tilde{d}(\nu,x)})_\nu$, существуют. Среди таких чисел выберем наименьшее число $d(\nu, x)$. Ограничим уравнение $P'(x) L_x = G_x$ на подпространства $DC^r_{d(\nu,x)}$, DC^m_ν. Возникнут линейное отображение конечномерных пространств $P'_{d(\nu,x)}(x)$, операторное уравнение и соответствующая матричная координатная система уравнений:

$$P'_{d(\nu,x)}(x) : DC^r_{d(\nu,x)} \to DC^m_\nu, \; P'_{d(\nu,x)}(x) L_x = G_x, \; A_{P,d(\nu,x)} \hat{L}_x = \hat{G}_x, \tag{4}$$

здесь $A_{P,d(\nu,x)}$ – матрица оператора $P'_{d(\nu,x)}(x)$ относительно базисов из элементов вида $e_{\alpha,j}$; $\hat{L}_x$, $\hat{G}_x$ – вектор-столбцы координат ЛДО L_x, G_x относительно тех же базисов.

Размерность образа линейного отображения $P'_{d(\nu,x)}(x)$ совпадает с рангом его матрицы $A_{P,d(\nu,x)}$. По предположению, размерность $\dim(\operatorname{im} P'(x))_\nu = = \eta(x) \in \mathbb{Z}_+$ в любом подпространстве DC_ν^m не зависит от точки $x \in \Omega$, $\eta(x) = \eta$. Значит, можно выделить η линейно независимых столбцов $\hat{b}_1(x),\ldots,\hat{b}_\eta(x)$ и η линейно независимых строк матрицы $A_{P,d(\nu,x)}$. Квадратная подматрица $\hat{a}(x)$, составленная из элементов на пересечении этих столбцов и строк, невырождена: $\Delta(x) = \det \hat{a}(x) \neq 0$.

Заменим фиксированную точку x переменной точкой $\tilde{x} \in \Omega$ и введем открытое подмножество $\Omega_x = \{\tilde{x} \in \Omega : \Delta(\tilde{x}) \neq 0\} \subseteq \Omega$. Элементы столбцов $\hat{b}_{\alpha,j}(\tilde{x})$ матрицы $A_{P,d(\nu,\tilde{x})}$ являются значениями коэффициентов разложения образов $P'(\tilde{x})(e_{\alpha,j}) = ((0,\ldots,\partial^\alpha,\ldots,0)P)_{\tilde{x}} = b_{\alpha,j}(\tilde{x})$ одних и тех же векторов вида $e_{\alpha,j} \in DC^r_{d(\nu,x)}$ по аналогичным базисным векторам пространства DC_ν^m. Поэтому все элементы матрицы $A_{P,d(\nu,x)}(\tilde{x})$ оказываются бесконечно дифференцируемыми функциями $\tilde{x}$.

На множестве Ω_x столбцы $\hat{b}_1(\tilde{x}),\ldots,\hat{b}_\eta(\tilde{x})$ остаются линейно независимыми. Следовательно, эти столбцы состоят из коэффициентов векторов некоторого базиса $b_1(\tilde{x}),\ldots,b_\eta(\tilde{x})$ подпространства $\operatorname{im} P'_{d(\nu,x)}(x) = (\operatorname{im} P'(x))_\nu$. При этом прообразы $e_{\alpha,j} \in DC^r_{d(\nu,x)}$ векторов $b_{\alpha,j}(\tilde{x})$ и, в частности, базисных векторов $b_i(\tilde{x})$, не зависят от точки $\tilde{x}$. Поэтому по-прежнему выполняется равенство $(P'(\tilde{x})DC^r)_\nu = (P'(\tilde{x})DC^r_{d(\nu,x)})_\nu$, и можно считать, что число $d_\nu(\tilde{x})$ постоянно, $d_\nu(\tilde{x}) = d_\nu(x) = d_\nu$. Отметим, что хотя понятие порядка ЛДО является «точечным», при сделанных предположениях вместе с рангом отображения $P'_{d_\nu}(\tilde{x})$ не изменяется и порядок ЛДО.

Предположим теперь, что ЛДО $G \in D(1,m)$ обращается в нуль на всех формальных решениях системы уравнений $Pv = 0$. Тогда операторное уравнение $P'_{d_\nu}(\tilde{x})L_{\tilde{x}} = G_{\tilde{x}}$ и соответствующее матричное уравнение $A_{P,d_\nu}(\tilde{x})\hat{L}_{\tilde{x}} = \hat{G}_{\tilde{x}}$ разрешимы в каждой точке $\tilde{x} \in \Omega_x$. В общем случае система линейных уравнений $A_{P,d_\nu}(\tilde{x})\hat{L}_{\tilde{x}} = \hat{G}_{\tilde{x}}$ является совместной неопределенной, т.е. имеет в каждой точке бесконечно много решений. Для того чтобы выделить в каждой точке $\tilde{x} \in \Omega_x$ из множества возникающих решений единственное решение, можно, как было отмечено ранее, построить дополнительное подпространство к ядру оператора $P'_{d_\nu}(\tilde{x})$. Разрешимость системы $A_{P,d_\nu}(\tilde{x})\hat{L}_{\tilde{x}} = \hat{G}_{\tilde{x}}$ в точке $\tilde{x} \in \Omega_x$ означает, что вектор-столбец координат $\hat{G}_{\tilde{x}}$ и столбцы $\hat{b}_i(\tilde{x})$ линейно зависимы. Поэтому вектор-столбец $\hat{G}_{\tilde{x}}$ можно разложить по вектор-столбцам $\hat{b}_1(\tilde{x}),\ldots,\hat{b}_\eta(\tilde{x})$: $\hat{G}_{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^{\eta} \alpha_i(\tilde{x})\hat{b}_i(\tilde{x})$. Коэффициенты разложения $\alpha_i(\tilde{x})$ можно найти так же, как это было описано в разд. 2 для числовой матрицы. В результате коэффициенты представляются в виде сумм произведений элементов вектор-столбцов $\hat{b}_1(\tilde{x}),\ldots,\hat{b}_\eta(\tilde{x})$ и $\hat{G}_{\tilde{x}}$, деленных на ненулевой определитель $\det\hat{a}(\tilde{x})$, поэтому коэффициенты оказываются бесконечно дифференцируемыми в области Ω_x. Ясно, что с теми же коэффициентами раскладывается по векторам $b_1(\tilde{x}),\ldots,b_\eta(\tilde{x})$ вектор $G_{\tilde{x}}$: $G_{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^{\eta}\alpha_i(\tilde{x})b_i(\tilde{x})$. В качестве локального решения операторного уравнения $P'_{d_\nu}(\tilde{x})L_{\tilde{x}} = G_{\tilde{x}}$ можно взять ЛДО $L_{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^{\eta}\alpha_i(\tilde{x})\tilde{e}_i$. Первая часть теоремы 1 доказана.

Существует другое доказательство, в котором используются понятия псевдообратной матрицы и псевдообратного оператора. Эти понятия для числовой матрицы описаны в разд. 2 настоящей работы. В данном случае речь идет о функциональной системе линейных уравнений с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами $A_{P,d_\nu}(\tilde{x})\hat{L}_{\tilde{x}} = \hat{G}_{\tilde{x}}$. Введем в пространствах DC^{μ} координатные эрмитовы скалярные произведения:

$$a = \sum_{j=1}^{\mu}\sum_{\alpha} a^{\alpha,j}e_{\alpha,j},\; b = \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{\beta} b^{\beta,i}e_{\beta,i},\; (a,b)_\mu = \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{\alpha} a_{\alpha,i}\overline{b}^{\alpha,i}.$$

Относительно таких произведений элементы $e_{\alpha,j}$ образуют ортонормированные базисы. В каждой фиксированной точке $\tilde{x}\in\Omega_x$ определим псевдообратный оператор $P^{+}_{d_\nu}(\tilde{x})$. Это элемент $\hom_{\mathbb{C}}\left(DC^m_\nu, DC^r_{d_\nu}\right)$, который равен нулю на ортогональном дополнении $\left(\operatorname{im}P'_{d_\nu}(\tilde{x})\right)^{\perp}$, а на $\operatorname{im}P'_{d_\nu}(\tilde{x})$ является обратным по отношению к изоморфизму $\left(\ker P'_{d_\nu}(\tilde{x})\right)^{\perp} \approx \operatorname{im}P'_{d_\nu}(\tilde{x})$, задаваемому оператором $P'_{d_\nu}(\tilde{x})$. С помощью оператора $P^{+}_{d_\nu}(\tilde{x})$ можно в каждой точке $\tilde{x}\in\Omega_x$ получить одно из возможных решений $L_{\tilde{x}} = P^{+}_{d_\nu}(\tilde{x})G_{\tilde{x}}$ уравнения $G = LP$ в DO^m.

Матрица псевдообратного оператора в ортонормированном базисе совпадает с псевдообратной матрицей $A^{+}_{d_\nu}(\tilde{x})$. В координатной форме решение, полученное с помощью псевдообратного оператора, имеет вид $\hat{L}_{\tilde{x}} = A^{+}_{d_\nu}(\tilde{x})\hat{G}_{\tilde{x}}$. Элементы вектор-столбца $\hat{G}_{\tilde{x}}$ совпадают с коэффициентами ЛДО $G_{\tilde{x}}$, следовательно, они бесконечно дифференцируемы. Для доказательства бесконечной дифференцируемости коэффициентов ЛДО $L_{\tilde{x}}$ достаточно показать, что элементы матрицы $A^{+}_{d_\nu}(\tilde{x})$ бесконечно дифференцируемы. В разд. 2 псевдообратная матрица определялась с помощью представления матрицы $A_{P,d_\nu}(\tilde{x})$ в виде произведения $A_{P,d_\nu}(\tilde{x}) = B_{d_\nu}(\tilde{x})C_{d_\nu}(\tilde{x})$ матриц того же ранга, что и ранг матрицы $A_{P,d_\nu}(\tilde{x})$ (скелетное разложение). Матрица $B_{d_\nu}(\tilde{x})$ составлена из линейно независимых вектор-столбцов $\hat{b}_1(\tilde{x}),\ldots,\hat{b}_\eta(\tilde{x})$ матрицы $A_{P,d_\nu}(\tilde{x})$, а матрица $C_{d_\nu}(\tilde{x})$ составлена из коэффициентов разложения столбцов матрицы $A_{P,d_\nu}(\tilde{x})$ по линейно независимым столбцам. Элементы столбцов совпадают с коэффициентами разложения соответствующих ЛДО по базису $\{e_{\alpha,j}\}$, следовательно, бесконечно дифференцируемы. Элементы матрицы $C_{d_\nu}(\tilde{x})$ представляются как суммы произведений элементов матрицы $A_{P,d_\nu}(\tilde{x})$, деленных на определитель $\Delta(\tilde{x})$, и тоже бесконечно дифференцируемы на множестве Ω_x.

Псевдообратная матрица может быть определена с помощью равенства (1): $A^+_{d_\nu}(\tilde{x}) = C^*(\tilde{x})\left(C(\tilde{x})C^*(\tilde{x})\right)^{-1}\left(B^*(\tilde{x})B(\tilde{x})\right)^{-1}B^*(\tilde{x})$. В этом представлении элементы всех матриц бесконечно дифференцируемы, поэтому бесконечно дифференцируемы элементы псевдообратной матрицы. Следовательно, бесконечно дифференцируемы на множестве Ω_x элементы вектор-столбца $\hat{L}_{\tilde{x}}$, т.е. коэффициенты ЛДО $L_{\tilde{x}} = P^+_{d_\nu}(\tilde{x})G_{\tilde{x}}$.

Предположим теперь, что выполнено не только условие 1, но и условие 2 теоремы 1. В таком случае для любого подпространства $(\operatorname{im} P'(x))_\nu$ существует число $d = d_\nu$ такое, что $(P'(x)DC^r)_\nu = (P'(x)DC^r_d)_\nu$ в каждой точке $x \in \Omega$. И в окрестности каждой точки можно построить псевдообратный оператор так же, как это было сделано выше, и получить решение $L_{\tilde{x}}$ уравнения с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами.

Отметим некоторые естественные ограничения на порядки ЛДО. В общем случае порядок ЛДО может существенно зависеть от точки $x \in \Omega$. Другими словами, существует точечный порядок ЛДО, а его порядок в обычном смысле совпадает с наибольшим точечным порядком. Пусть $\operatorname{ord} P_x = k_x$, $\operatorname{ord} G_x = l_x$, $\operatorname{ord} P = k$, $\operatorname{ord} G = l$ – точечные и обычные порядки ЛДО с переменными коэффициентами P и G, $a \in DC^r$. Порядок произведения операторов не превосходит суммы порядков сомножителей. Так как по определению $P'(x)a = (aP)_x$, то для любого целого неотрицательного числа d и точки $x \in \Omega$ образ $\operatorname{im} P'_d(x)$ оператора $P'_d(x)$ принадлежит подпространству DC^m_{d+k}: $\operatorname{im} P'_d(x) = P'(x)(DC^r_d) \subseteq DC^m_{d+k_x} \subseteq DC^m_{d+k}$. Более того, существует ЛДО $a \in DC^r_d$ (например, вида $(0,\ldots,\partial^\alpha,\ldots,0)$, $|\alpha| = d$) такой, что порядок образа $P'(x)a$ равен в точности $d + k_x$. Если $(F_x)^m_P \subseteq (F_x)^m_G$, то $G_x \in \operatorname{im} P'_d(x) \subseteq DC^m_{d+k_x} \subseteq DC^m_{d+k}$. Так как $\operatorname{ord} G_x = l_x$, $\operatorname{ord} G = l$, то должны выполняться неравенства $l_x \le d + k_x$, $l \le d + k$, $d \ge l_x - k_x$, $d \ge l - k$.

4. Примеры применения основной теоремы

Пример 1. Очевидно, для ЛДО с постоянными коэффициентами выполняются условия 1 и 2 теоремы 1. Но для таких операторов формальную теорему о нулях можно усилить.

Определение 4. Кольцо коэффициентов θ – это подалгебра алгебры бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций $C^{\infty}(\Omega,\mathbb{C})$, которая содержит единицу и все производные своих элементов.

Теорема 2. Пусть θ – произвольное кольцо коэффициентов, $P \in DC(r,m)$, $G \in D(1,m;\theta)$ – ЛДО с коэффициентами из кольца θ. Если любое формальное решение системы дифференциальных уравнений $Pu = 0$ в области Ω является решением уравнения $Gv = 0$, то существует ЛДО $L \in D(1,r;\theta)$ такой, что $G = LP$. Другими словами, формальная теорема о нулях ЛДО с постоянными коэффициентами справедлива над любым кольцом коэффициентов.

Доказательство. В этом случае псевдообратный оператор $P^{+}_{d_\nu}(\tilde{x})$ не зависит от точки $x \in \Omega$, матрица $A^{+}_{d_\nu}(\tilde{x})$ является числовой матрицей. Равенство $\hat{L}_{\tilde{x}} = A^{+}_{d_\nu}(\tilde{x})\hat{G}_{\tilde{x}}$ показывает, что элементы вектор-столбца $\hat{L}_{\tilde{x}}$, т.е. коэффициенты ЛДО $L_{\tilde{x}}$, решения уравнения $P'_{d_\nu}(\tilde{x})L_{\tilde{x}} = G_{\tilde{x}}$ в представлении $L_{\tilde{x}} = P^{+}_{d_\nu}(\tilde{x})G_{\tilde{x}}$, принадлежат кольцу θ.

Пример 2. Напомним, что символ (главный символ) скалярного ЛДО $P = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x)\partial^{\alpha}$ порядка k – это функция $\sigma_P(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_{\alpha}(x)\xi^{\alpha}$ от точки x и n вещественных переменных $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Если ЛДО $P = \left\|P_{ij}\right\| \in DO(r,m)$, $P_{ij} = \sum_{\alpha} a^{ij}_{\alpha}(x)\partial^{\alpha}$ и $A_{\alpha}(x) = \left\|a^{ij}_{\alpha}(x)\right\|$, то такой матричный ЛДО можно записать в форме $P = \sum_{\alpha} A_{\alpha}(x)\partial^{\alpha}$. Главный символ матричного ЛДО порядка k можно определить по аналогии с символом обыкновенного оператора равенством $\sigma_P(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=k} A_{\alpha}(x)\xi^{\alpha}$ или равенством $\sigma_P(x,\xi) = \left\|\sum_{|\alpha|=k} a^{ij}_{\alpha}(x)\xi^{\alpha}\right\|$.

Понятие главного символа является точечным, а определение порядка ЛДО как максимума точечных порядков не вполне убедительно. Однако, если $L \in DO(s,r)$ – ЛДО порядка k_1 в точке x: $L = \left\|L_{ij}\right\| = \sum\limits_{|\beta| \le k_1} b_{\beta}(x)\partial^{\beta}$, $b_{\beta}(x) = \left\|b^{ij}_{\beta}(x)\right\|$, $i = 1,\ldots,s$, $j = 1,\ldots,r$, $\operatorname{ord}_x L = \max(\operatorname{ord}_x L_{ij})$ и $P \in D(r,m)$ – ЛДО порядка k в той же точке $x \in \Omega$, то справедливо равенство $(LP)_x = \sum\limits_{|\beta|=k_1} \sum\limits_{|\alpha|=k} b_{\beta}(x)a_{\alpha}(x)\partial^{\alpha+\beta} + \cdots$, где многоточие обозначает ЛДО, порядок которого не превосходит числа k_1+k-1. Из этого равенства вытекает, что порядок произведения LP в точке x равен сумме порядков сомножителей тогда и только тогда, когда произведение символов $\sigma_L(x,\xi)\sigma_P(x,\xi)$ не равно нулю в этой точке. И только в этом случае главный символ произведения в точке равен произведению главных символов: $\sigma_{LP}(x,\xi)=$ $=\sigma_L(x,\xi)\sigma_P(x,\xi)$.

Однако сами главные символы и, тем более, их произведение в общем случае могут в некоторых точках и на подмножествах области Ω обращаться в нуль. В скалярном случае главный символ произведения равен произведению главных символов только тогда, когда оба символа в данной точке не обращаются в нуль. Если оба скалярных ЛДО L и P имеют бесконечно дифференцируемые коэффициенты и не обращаются в нуль в точке x, то верны равенства: $\sigma_L(x,\xi)\sigma_P(x,\xi)=\sigma_P(x,\xi)\sigma_L(x,\xi)=\sigma_{LP}(x,\xi)$. Наконец, главный символ скалярного ЛДО равен нулю тогда и только тогда, когда сам этот ЛДО равен нулю.

Главный символ скалярного ЛДО является однородной функцией оператора: $\sigma_{\alpha P}(x,\xi)=\alpha\sigma_P(x,\xi)$, но символ суммы скалярных операторов равен сумме символов только тогда, когда операторы имеют одинаковый порядок. Другими словами, символ скалярного оператора в общем случае не является линейной функцией от оператора. Но главный символ скалярного оператора все же является линейной функцией от операторов, если все операторы соответствующей линейной комбинации имеют одинаковый порядок.

В следующей теореме вместо главного символа матричного ЛДО используется более общее понятие, а именно матрица размера $r\times m$, составленная из главных символов столбцов P^j оператора P: $\sigma(P;x,\xi)=$ $=\sigma(P^1,\dots,P^m;x,\xi)=\left\|\sigma_{P^j}(x,\xi)\right\|$. Аналогично можно ввести главный символ вектора-строки $a=(a_1,\dots,a_r)\in DC^r$, $\operatorname{ord}a=l$: $\sigma(a;x,\xi)=(\sigma_{a_i}(x,\xi):\operatorname{ord}a_i=l)$. В результате главный символ вектор-столбца произведения вектора-строки на вектор-столбец будет равен произведению главных символов: $\sigma(aP^j;x,\xi)=\sigma(a;x,\xi)\sigma(P^j;x,\xi)$. А матрицы главных символов строки и столбца перемножаются как числовые матрицы, поэтому для главных символов элементов произведения будет справедливым равенство:

$$\sigma((aP^j)_{ij};x,\xi)=\sum_i\Big(\sigma(a_i;x,\xi)\sigma(P_{ij};x,\xi):\operatorname{ord}a_i=l,\operatorname{ord}P_{ij}=\operatorname{ord}P^j\Big). \qquad (5)$$

Теорема 3. Пусть $P\in D(r,m)$ – ЛДО порядка k, выполняется неравенство $r\le m$, ранг матрицы символов столбцов $\sigma(P;x,\xi)$ в каждой точке $x\in\Omega$ и хотя бы при одном значении $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ равен значению r, если $r\le m$, и значению m, если $m\le r$. Тогда отображение $P_d'(x):DC_d^r\to DC^m$ при любом значении d является вложением, ранг этого отображения равен размерности подпространства DC_d^r, и для любого целого числа $\nu\ge k$ существует целое неотрицательное число d_ν такое, что $(\operatorname{im} P'(x))_\nu = (\operatorname{im} P'_d(x))_\nu$ для всех $x \in \Omega$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что в каждой точке $x \in \Omega$ существует квадратная, невырожденная в точке $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ подматрица матрицы символов столбцов $\sigma(P; x, \xi)$ порядка r или m. Если произведение числовой вектора-строки на такую подматрицу равно нулю, то эта вектор-строка равна нулю. Формула (5) показывает, что при умножении операторной вектора-строки на операторную подматрицу главные символы строки и столбца перемножаются как числовые матрицы. Но главные символы r столбцов образуют невырожденную числовую матрицу, по меньшей мере, в одной точке $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Поэтому матрица (вектор-строка) главных символов строки равна нулю. Следовательно, сама вектор-строка равна нулю. Значит, при сделанных предположениях ядро отображения $P'_d(x): DC^r_d \to DC^m$ при любом значении d равно нулю, и это отображение является вложением подпространства DC^r_d в пространство DC^r. Утверждение про ранг отображения очевидно, а существование числа d_ν является следствием конечномерности подпространства DC^r_d.

Замечание. Условие невырожденности матрицы главных символов вектор-столбцов всего лишь в одной точке является искусственным. Дело в том, что множество нулей определителя невырожденной подматрицы при фиксированном значении $x \in \Omega$ является однородным алгебраическим многообразием $\mathbb{R}^n$ коразмерности один. Поэтому дополнительное подмножество всюду плотно в $\mathbb{R}^n$. При значениях $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, принадлежащих этому подмножеству, определитель матрицы не равен нулю, а матица невырожденная. По непрерывности из условия обращения в нуль главного символа вектор-строки на всюду плотном в области Ω множестве следует, что эта вектора-строка равна нулю при всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Пример 3 демонстрирует преимущества матрицы главных символов по столбцам по сравнению с главным символом ЛДО.

Пример 3. Ниже в пространстве $\mathbb{R}^2$ (на координатной плоскости) используются привычные обозначения координат $x = (x, y)$ и соответствующие обозначения частных производных. Главный символ ЛДО

$$P = \begin{pmatrix} x\partial_y & \partial_{xy} \\ (x^2 + y^2)\partial_{xxy} & y^2\partial_x \end{pmatrix} \text{ имеет вид } \sigma_P(x, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (x^2 + y^2)\partial_{xxy}\xi_1\xi_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица вырожденная, но ее ранг сохраняется при ненулевых значениях координат и не равных нулю значениях ξ_1, ξ_2. В то же время матрица главных символов столбцов $\sigma(P; x, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & \partial_{xy}\xi_1\xi_2 \\ (x^2 + y^2)\partial_{xxy}\xi_1\xi_2 & 0 \end{pmatrix}$ невырожденная при ненулевых значениях координат x, y и не равных нулю значениях координат ξ_1, ξ_2.

Пример 4. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $P \in D(r,m)$ – ЛДО порядка k, и ранг матрицы символов столбцов $\sigma(P;x,\xi)$ в каждой точке $x \in \Omega$ и хотя бы при одном значении $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$ равен одному и тому же значению $\eta \le r$, если $r \le m$, и $\eta \le m$, если $m \le r$. Тогда размерность любого подпространства $(\operatorname{im} P'(x))_\nu \subseteq DC_\nu^m$ не зависит от точки x. Ранг отображения $P_d'(x): DC_d^r \to$ $\to DC^m$ при любом значении d равен размерности подпространства $(\operatorname{im} P'(x))_d$. И для любого целого числа $d \ge k$ существует целое неотрицательное число d_ν такое, что $(\operatorname{im} P'(x))_\nu = (\operatorname{im} P_d'(x))_\nu$ для всех $x \in \Omega$.

Доказательство. Выше было показано, что матрицы главных символов столбцов умножаются на главные символы строк как обычные матрицы. Если ранг матрицы столбцов ЛДО $P \in D(r,m)$ имеет постоянное значение $\eta \le r$, то в каждой точке $x \in \Omega$ существуют хотя бы при одном значении $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$, а тогда и при всех значениях, ровно η линейно независимых столбцов и столько же строк матрицы главных символов столбцов. В результате применения вектор-строки главных символов получается линейная комбинация этих базисных вектор-строк. И такими комбинациями заполняется образ любого подпространства DC_d^r в пространстве DC^m. С помощью базисных вектор-строк вида $e_{0,j} = (0,\ldots,1,\ldots,0)$ можно просто получить сами базисные вектор-строки. Другие элементы образа отображения $P_d'(x)$ будут просто линейными комбинациями этих строк над кольцом скалярных ЛДО. Очевидно, размерность подпространства $(\operatorname{im} P'(x))_d$ будет равна рангу матрицы главных символов $\eta \le r$, если $r \le m$, и $\eta \le m$, если $m \le r$. И эта размерность не изменяется.

Список литературы

1. Fomin A. I. Differential Homomorphisms of Linear Homogeneous Systems of Differential Equations // Russian Journal of Mathematical Physics. 2012. Vol. 19, № 2. P. 159–181.
2. Фомин А. И. Преобразования Лапласа как дифференциальные изоморфизмы // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии : сб. ст. по материалам XLIV–XLVIII Междунар. науч.-практ. конф. М. : Интернаука, 2016. № 8-12 (35). С. 5–12.
3. Fomin A. I. Differential symmetry algebras for linear homogeneous differential equations // Russian Journal of Mathematical Physics. 1997. Vol. 5, № 2. P. 189–210.
4. Фомин А. И. Титаренко В. И. Теоремы о нулях линейных дифференциальных операторов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 4. С. 18–34.
5. Moore H. On the reciprocal of the general algebraic matrix // Bulletin of the American Mathematical Society. 1920. Vol. 26. P. 394–395.
6. Пенроуз Р. A generalized inverse for matrices // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. Vol. 51. P. 406–413.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М. : Физматлит, 2016. 576 с.
8. Беклемишев Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры. М. : Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1983. 336 с.
9. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М. : Изд. Лань, 2024. 432 с.

10. Пытьев Ю. П. Псевдообратный оператор. Свойства и применения // Математический сборник. 1982. Т. 118 (160), № 1 (5). С. 19–49.

References

1. Fomin A.I. Differential Homomorphisms of Linear Homogeneous Systems of Differential Equations. *Russian Journal of Mathematical Physics*. 2012;19(2):159–181.
2. Fomin A.I. Laplace transforms as differential isomorphisms. *Nauchnaya diskussiya: voprosy matematiki, fiziki, khimii, biologii: sb. st. po materialam XLIV–XLVIII Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. = Scientific discussion: issues of mathematics, physics, chemistry, biology: proceedings of the 44th – 48th International scientific and practical conference*. Moscow: Internauka, 2016;(8-12):5–12. (In Russ.)
3. Fomin A.I. Differential symmetry algebras for linear homogeneous differential equations. *Russian Journal of Mathematical Physics*. 1997;5(2):189–210.
4. Fomin A.I. Titarenko V.I. Theorems on the zeros of linear differential operators. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2024;(4):18–34. (In Russ.)
5. Moore H. On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1920;26:394–395.
6. Penrouz R. A generalized inverse for matrices. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1955;51:406–413.
7. Gantmakher F.R. *Teoriya matrits = Matrix theory.* Moscow: Fizmatlit, 2016:576. (In Russ.)
8. Beklemishev D.V. *Dopolnitel'nye glavy lineynoy algebry = Additional chapters in linear algebra.* Moscow: Nauka, glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1983:336. (In Russ.)
9. Kurosh A.G. *Kurs vysshey algebry = Course of higher algebra.* Moscow: Izd. Lan', 2024:432. (In Russ.)
10. Pyt'ev Yu.P. Pseudo-inverse operator. Properties and applications. *Matematicheskiy sbornik = Mathematical collection*. 1982;118(160):19–49. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Вера Ивановна Титаренко
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики, Институт информационных систем, Государственный университет управления (Россия, г. Москва, Рязанский пр-кт, 99)

E-mail: vera_xmel@mail.ru

Vera I. Titarenko
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the sub-department of mathematics and computer science, Institute of Information Systems, State University of Management (99 Ryazanskiy avenue, Moscow, Russia)

Александр Иванович Фомин
кандидат физико-математических наук, доцент, независимый исследователь (Россия, г. Москва)

E-mail: fomin45@mail.ru

Aleksandr I. Fomin
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, independent researcher (Moscow, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 28.05.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 16.06.2025

Принята к публикации / Accepted 29.06.2025