Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, № 2 (2020). С. 182–208

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-182-208 УДК 517.958

К ПРОБЛЕМЕ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ, ЗАПОЛНЯЮЩИХ НЕПОДВИЖНЫЙ СОСУД (МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА)

© 2020 г. **Д. А. ЗАКОРА, Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ**

Аннотация. В работе изучается скалярная задача сопряжения, моделирующая проблему малых колебаний двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд. Исследуется начально-краевая задача и методами теории полугрупп доказывается теорема о ее однозначной разрешимости на положительной полуоси. Возникающая при этом спектральная проблема для нормальных колебаний системы исследуется методами спектральной теории оператор-функций (операторных пучков). Полученный операторный пучок обобщает как известный операторный пучок С. Г. Крейна (колебания вязкой жидкости в открытом сосуде), так и пучок, возникающий в задаче о малых движениях вязкоупругой жидкости в частично заполненном сосуде. Рассмотрен пример двумерной задачи, допускающей разделение переменных, найдены все точки существенного спектра и ветви собственных значений. На основе этой двумерной задачи сформулирована гипотеза о структуре существенного спектра в скалярной задаче сопряжения и доказана теорема о кратной базисности системы корневых элементов основного операторного пучка.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Постановка скалярной модельной задачи

1.1. Введение. Одними из первых работ, связанных с применением методов функционального анализа к исследованию проблемы малых движений и нормальных колебаний вязкоупругой жидкости в частично заполненном сосуде, являются работы А. И. Милославского (см. [13, 23, 24]). В них для обобщенной модели Олдройта ($m > 1$) применен операторный подход, развивающий построения, проведенные ранее С. Г. Крейном и его учениками (см. [7, 9], а также [6, 22]), применительно к задаче о малых колебаниях вязкой жидкости в частично заполненном сосуде либо системы из несмешивающихся жидкостей. Случай полного заполнения полости вязкоупругой жидкостью рассмотрен в [16], а также в [5]. Вариант начально-краевой задачи для сосуда, заполненного двумя несмешивающимися вязкоупругими жидкостями, изучен в [19]. Там же сформирована спектральная проблема в задаче о нормальных колебаниях гидросистемы, которая приведена к исследованию операторного пучка, обобщающего известный пучок С. Г. Крейна.

Работа выполнена при частичной поддержке второго автора грантом Российского научного фонда (№ 16-11-10125, «Операторные уравнения в функциональных пространствах и приложения к нелинейному анализу», выполняемого в Воронежском госуниверситете).

В данной работе изучается модельная спектральная задача, обладающая всеми особенностями векторной проблемы о нормальных колебаниях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих произвольный сосуд, а также ее частный случай (двумерная проблема в прямоугольной области). Для произвольного сосуда изучена начально-краевая задача и получена спектральная проблема для операторного пучка, обобщающая пучок С. Г. Крейна. Далее изучается соответствующая спектральная задача в упомянутом частном случае, допускающем разделение переменных. Характеристическое уравнение задачи позволяет проводить ее исследование графически с использованием асимптотических методов. В итоге двумерная задача позволяет выдвинуть гипотезу, позволяющую исследовать структуру спектра в модельной спектральной задаче. Модельная задача, в свою очередь, позволяет сделать качественные выводы относительно свойств векторной гидродинамической задачи в случае, когда сосуд заполнен двумя или более несмешивающимися жидкостями.

1.2. Предварительная постановка проблемы. Будем считать, что две вязкоупругих жидкости модели Олдройта заполняют сосуд $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и в состоянии равновесия под действием гравитационного поля занимают области Ω_1 и Ω_2 соответственно с горизонтальной границей раздела Γ. Обозначим через S_1 и S_2 те части границы $\partial\Omega$, которые примыкают к первой и второй жидкостям соответственно.

Введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, чтобы ось Ox_3 была направлена вверх, т. е. против действия однородного гравитационного поля, а начало координат O находилось на Γ. Тогда ускорение гравитационного поля $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, $g > 0$, а в состоянии покоя поле давлений в жидкостях выражаются по законам Архимеда:

$$P_{0,k}(x_3) = p_0 - \rho_k g x_3, \quad k = 1, 2, \tag{1.1}$$

где $\rho_k > 0$ — постоянные плотности жидкостей, а p_0 — давление на границе раздела Γ.

Приведем теперь постановку задачи о малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей модели Олдройта (см. [19]). Пусть $\vec{u}_k(t,x)$ — поля малых скоростей, а $p_k(t,x)$ — отклонения полей давлений от их равновесных значений (1.1). Полагаем, что на гидросистему дополнительно к гравитационному действует малое поле внешних сил $\vec{f}(t,x)$, $x \in \Omega$.

Тогда линеаризованные уравнения движения жидкостей имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}
\rho_k \frac{\partial \vec{u}_k(t,x)}{\partial t} = -\nabla p_k(t,x) + \mu_k \Delta \vec{v}_k(t,x) + \rho_k \vec{f}_k(t,x), \quad \operatorname{div}\vec{u}_k(t,x) = 0, \quad x \in \Omega_k, \\
\vec{v}_k(t,x) = \vec{u}_k(t,x) + \alpha_k \int\limits_0^t e^{-\beta_k(t-s)} \vec{u}_k(s,x)\,ds =: I_{0,k}(t)\vec{u}_k(t,x), \quad k = 1, 2,
\end{gathered} \tag{1.2}$$

где $\mu_k > 0$ — динамические вязкости жидкостей, $\alpha_k \geqslant 0$, $\beta_k \geqslant 0$ — коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругости жидкостей модели Олдройта, $\vec{f}_k(t,x) := \vec{f}(t,x)\big|_{\Omega_k}$, $k = 1, 2$, а Δ — трехмерный оператор Лапласа.

Для вязких жидкостей, как известно, на твердых стенках S_k сосуда должны выполняться условия прилипания, т. е.

$$\vec{u}_k(t,x) = \vec{0}, \quad x \in S_k, \quad k = 1, 2, \tag{1.3}$$

а на границе Γ — условия непрерывности полей скоростей:

$$\vec{u}_1(t,x) = \vec{u}_2(t,x), \quad x \in \Gamma. \tag{1.4}$$

Пусть

$$x_3 = \zeta(t,x), \quad x \in \Gamma, \tag{1.5}$$

— вертикальное отклонение границы раздела между жидкостями в процессе малых движений системы. Тогда на Γ должно выполняться кинематическое условие

$$\frac{\partial \zeta(t,x)}{\partial t} = \vec{u}_1(t,x) \cdot \vec{n} =: \gamma_{n,1}\vec{u}_1(t,x) = \vec{u}_2(t,x) \cdot \vec{n} =: \gamma_{n,2}\vec{u}_2(t,x), \quad \vec{n} = \vec{e}_3, \tag{1.6}$$

где символом $\gamma_{n,k}$ обозначена операция взятия нормальной компоненты поля скорости. Заметим также, что из условия сохранения объема каждой из жидкости имеем связь

$$\int_\Gamma \zeta(t,x)\,d\Gamma = 0. \tag{1.7}$$

Сформулируем теперь динамические условия на Γ. Они состоят в том, что на движущейся границе раздела жидкостей векторное поле напряжений при переходе из одной жидкости к другой изменяется непрерывно. Линеаризация этого условия и его снос на Γ приводят к следующим соотношениям: на Γ касательные напряжения изменяются непрерывно, а нормальное напряжение (т. е. вдоль оси Ox_3) компенсируется гравитационным скачком давлений. Имеем

$$\begin{gathered}\mu_1\tau_{j3}\big(\vec v_1(t,x)\big) = \mu_2\tau_{j3}\big(\vec v_2(t,x)\big), \quad \vec v_k(t,x) = I_{0,k}(t)\vec u_k(t,x), \quad j,k=1,2;\\ \big[-p_1(t,x)+\mu_1\tau_{33}\big(\vec v_1(t,x)\big)\big] - \big[-p_2(t,x)+\mu_2\tau_{33}\big(\vec v_2(t,x)\big)\big] = -g(\rho_1-\rho_2)\zeta(t,x), \quad x\in\Gamma.\end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь $\tau_{jl}(\vec u) := \dfrac{\partial u_j}{\partial x_l} + \dfrac{\partial u_l}{\partial x_j}$, $j,l=1,2,3$ — удвоенный тензор скоростей деформаций в жидкости с полем скоростей $\vec u(t,x)$, а $I_{0,k}(t)$ — закон действия памяти в модели Олдройта (см. (1.2)).

Наконец, для искомых функций $\vec u_k(t,x)$, $p_k(t,x)$, $k=1,2$, и $\zeta(t,x)$ необходимо еще задать начальные условия:

$$\vec u_k(0,x) = \vec u_k^0(x), \quad x\in\Omega_k, \quad k=1,2; \quad \zeta(0,x)=\zeta^0(x), \quad x\in\Gamma. \tag{1.9}$$

1.3. Формулировка модельной начально-краевой и спектральной задачи. Опираясь на постановку задачи (1.2)–(1.9), сформулируем модельную начально-краевую задачу о малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, разбитую на две части Ω_1 и Ω_2, как это было описано выше в пункте 1.2. При этом воспользуемся следующими упрощающими предположениями.

1. Векторные поля скоростей $\vec u_k(t,x)$ заменяем скалярными полями $u_k(t,x)$, $x\in\Omega_k$, $k=1,2$, поля давлений $p_k(t,x)$ считаем тождественно равными нулю, а условия соленоидальности отбрасываем.
2. Кинематические условия (1.6) заменяем соотношениями с $u_1(t,x)=u_2(t,x)$, $x\in\Gamma$.
3. В динамических условиях (1.8) условие равенства касательных напряжений нулю отбрасываем, а нормальные напряжения на Γ заменяем производными от $u_k(t,x)$ по внешней нормали к границе области Ω_k.

Тогда при тех же обозначениях для остальных параметров и функций приходим к следующей начально-краевой задаче:

$$\rho_k\frac{\partial u_k(t,x)}{\partial t} = \mu_k\Delta v_k(t,x) + \rho_k f_k(t,x), \quad x\in\Omega_k, \quad k=1,2, \tag{1.10}$$

$$v_k(t,x) := u_k(t,x) + \alpha_k\int_0^t e^{-\beta_k(t-s)}u_k(s,x)\,ds =: I_{0,k}(t)u_k(t,x), \quad k=1,2, \tag{1.11}$$

$$u_k(t,x)=0, \quad x\in S_k, \quad k=1,2, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial\zeta(t,x)}{\partial t} = u_1(t,x) =: \gamma_1u_1(t,x) = u_2(t,x) =: \gamma_2u_2(t,x), \quad x\in\Gamma, \tag{1.13}$$

$$\int_\Gamma \zeta(t,x)\,d\Gamma = 0, \tag{1.14}$$

$$\mu_1\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial n} - \mu_2\frac{\partial v_2(t,x)}{\partial n} = -g(\rho_1-\rho_2)\zeta(t,x), \quad x\in\Gamma, \quad \vec n = \vec e_3, \tag{1.15}$$

$$u_k(0,x) = u_k^0(x), \quad x\in\Omega_k, \quad k=1,2; \quad \zeta(0,x)=\zeta^0(x), \quad x\in\Gamma. \tag{1.16}$$

Далее будем рассматривать также задачу о нормальных движениях, т. е. о решениях однородной начально-краевой проблемы (1.10)–(1.16), зависящих от t по экспоненциальному закону:

$$u_k(t,x) = \exp(-\lambda t)u_k(x), \quad x\in\Omega_k, \quad k=1,2,$$
$$\zeta(t,x) = \exp(-\lambda t)\zeta(x), \quad x\in\Gamma, \quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

При этом воспользуемся следствиями из соотношений (1.11) для модели вязкоупругой жидкости Олдройта:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_k(t,x)}{\partial t} &= \alpha_k^{1/2} u_k(t,x) - \beta_k w_k(t,x), \quad w_k(0,x) = 0, \\ w_k(t,x) &:= \alpha_k^{1/2} \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)} u_k(s,x)\, ds, \quad k = 1,2. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Тогда для амплитудных функций $u_k(x)$, $k = 1,2$, $\zeta(x)$, а также амплитудных функций $w_k(x)$, $k = 1,2$, отвечающих связям (1.17), возникает следующая спектральная задача:

$$\begin{gathered} -\lambda\rho_k u_k(x) = \mu_k \Delta\big(u_k(x) + \alpha_k^{1/2} w_k(x)\big), \quad x \in \Omega_k, \quad k = 1,2, \\ -\lambda w_k(x) = \alpha_k^{1/2} u_k(x) - \beta_k w_k(x), \quad x \in \Omega_k, \quad k = 1,2, \\ u_k(x) = w_k(x) = 0, \quad x \in S_k, \quad k = 1,2, \\ -\lambda\zeta(x) = u_1(x) = u_2(x), \quad x \in \Gamma, \quad \int_\Gamma \zeta(x)\, d\Gamma = 0, \end{gathered} \tag{1.18}$$

$$\mu_1 \frac{\partial}{\partial n}\big(u_1(x) + \alpha_1^{1/2} w_1(x)\big) - \mu_2 \frac{\partial}{\partial n}\big(u_2(x) + \alpha_2^{1/2} w_2(x)\big) = -g(\rho_1 - \rho_2)\zeta(x), \quad x \in \Gamma, \quad \vec{n} = \vec{e}_3.$$

Далее задачу (1.10)–(1.16), а также задачу (1.18), будем исследовать методами функционального анализа и спектральной теории операторных пучков с использованием обобщенной формулы Грина для оператора Лапласа, приспособленной к изучению краевых задач в областях с липшицевой границей.

1.4. О формуле Грина для оператора Лапласа. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — область с границей $\partial\Omega$, разбитой на два куска S и Γ. Введем пространство функций $H^1(\Omega)$ с нормой, эквивалентной стандартной: $\|u\|^2_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega + \left|\int_\Gamma u\, d\Gamma\right|^2$.

Для подпространства $H^1_\Gamma(\Omega)$ функций из $H^1(\Omega)$, у которых выполнено условие $\int_\Gamma u\, d\Gamma = 0$, имеем $\|u\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega)} := \int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega$, т. е. квадрат нормы совпадает с интегралом Дирихле.

Введем далее подпространство $H^1_{0,S}(\Omega)$ функций, обращающихся в нуль на S:

$$H^1_{0,S}(\Omega) := \big\{u \in H^1_\Gamma(\Omega) : \ u\big|_S = 0\big\}. \tag{1.19}$$

Будем считать, что граница $\partial\Omega$ области Ω липшицева, причем ее куски S и Γ, на которые она разбита, также липшицевы. Тогда, как известно (см. [19]), след функций из $H^1(\Omega)$, вычисленный на $\partial\Omega$, принадлежит пространству $H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L_2(\partial\Omega)$. Более того, функции на его кусках, заданные на Γ и S, также принадлежат соответствующим пространствам $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{1/2}(S)$ соответственно (см. [4]).

Введем в $H^1_\Gamma(\Omega)$ множество функций, которые обладают следующим свойством: их следы $\gamma_\Gamma u \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}$ продолжимы нулем на кусок S в классе $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Обозначим соответствующее множество из $H^1_\Gamma(\Omega)$ символом $\widehat{H}^1_\Gamma(\Omega)$, а совокупность следов на Γ — через $\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma$. Тогда оказывается, что имеет место оснащение пространства $L_{2,\Gamma} = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$ в виде $\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma \hookrightarrow\hookrightarrow L_{2,\Gamma} \hookrightarrow\hookrightarrow \left(\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma\right)^* = H^{-1/2}_\Gamma$; при этом для элементов $\varphi \in \widetilde{H}^{1/2}_\Gamma$ и $\psi \in H^{-1/2}_\Gamma$ выражение $\langle\varphi,\psi\rangle_{L_{2,\Gamma}}$ является полуторалинейной формой в $L_{2,\Gamma}$: $\left|\langle\varphi,\psi\rangle_{L_{2,\Gamma}}\right| \leqslant \|\varphi\|_{\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma} \cdot \|\psi\|_{H^{-1/2}_\Gamma}$. Здесь $\langle\varphi,\psi\rangle_{L_{2,\Gamma}}$ — замыкание формы $\big(\varphi,\psi\big)_{L_{2,\Gamma}} := \int_\Gamma \varphi\overline{\psi}\, d\Gamma$, заданное на гладких функциях, по соответствующим нормам.

Оказывается, для функций из $\widehat{H}^1_\Gamma(\Omega)$ имеет место следующая формула Грина для оператора Лапласа (см. [4]):

$$\big(\eta, u\big)_{H^1_{0,S}(\Omega)} = \big\langle \eta, -\Delta u\big\rangle_{L_2(\Omega)} + \Big\langle \gamma_\Gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\Big\rangle_{L_2(\Gamma)}, \tag{1.20}$$

где $-\Delta u \in \big(H^1_\Gamma(\Omega)\big)^*$, $\gamma_\Gamma\eta \in \widetilde{H}^{1/2}_\Gamma$, $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma \in H^{-1/2}_\Gamma$.

Перейдем теперь к соответствующим формулам Грина для задачи (1.10)–(1.16). Считаем, что области $\Omega_k \subset \mathbb{R}^m$, $k = 1, 2$, имеют липшицевы границы $\partial\Omega_k$, состоящие из липшицевых кусков S_k и Γ соответственно, $k = 1, 2$. Введем множества $\widehat{H}^1_{0,S_k}(\Omega_k) \subset H^1_{0,S_k}(\Omega_k)$, а также наборы пар функций $\eta = (\eta_1; \eta_2)$ и $u = (u_1; u_2)$, $\eta_k, u_k \in \widehat{H}^1_{0,S_k}(\Omega_k)$, $k = 1, 2$. Для таких наборов определим скалярные произведения

$$\big(\eta, u\big)_{L_2(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2} \rho_k \big(\eta_k, u_k\big)_{L_2(\Omega_k)}, \tag{1.21}$$

$$\big(\eta, u\big)_{\widehat{H}^1_\Gamma(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2} \mu_k \big(\eta_k, u_k\big)_{H^1_{0,S_k}(\Omega_k)}. \tag{1.22}$$

Тогда оказывается (см. [4]), что для таких наборов имеет место следующая обобщенная формула Грина:

$$\big(\eta, u\big)_{\widehat{H}^1_\Gamma(\Omega)} = \sum_{k=1}^{2} \big\langle \eta_k, -\mu_k \Delta u_k \big\rangle_{L_2(\Omega_k)} + \sum_{k=1}^{2} \Big\langle \gamma_k \eta_k, \mu_k \frac{\partial u_k}{\partial n_k} \Big\rangle_{L_{2,\Gamma}}, \tag{1.23}$$

где $\eta, u \in \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)$, $\gamma_k \eta_k := \eta_k\big|_\Gamma \in \widetilde{H}^{1/2}_\Gamma$, $\dfrac{\partial u_k}{\partial n_k} \in H^{-1/2}_\Gamma$, $k = 1, 2$, которая далее будет использоваться.

1.5. Закон баланса полной энергии. Будем считать, что начально-краевая задача (1.10)–(1.16) имеет классическое решение, т. е. все заданные и искомые функции, а также их производные, входящие в уравнения и краевые условия, являются непрерывными функциями своих переменных. Тогда, используя обобщенные формулы Грина для оператора Лапласа в областях Ω_k, $k = 1, 2$, можно установить, что для классического решения задачи имеет место следующее тождество:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\bigg\{ \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int_{\Omega_k} |u_k(t,x)|^2 d\Omega_k + g(\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma} |\zeta(t,x)|^2 d\Gamma \bigg\} = \\ = -\sum_{k=1}^{2} \mu_k \int_{\Omega_k} \nabla v_k(t,x) \cdot \overline{\nabla u_k(t,x)}\, d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int_{\Omega_k} f_k(t,x)\, \overline{u_k(t,x)}\, d\Omega_k.\end{aligned} \tag{1.24}$$

Это тождество — закон баланса полной энергии системы в дифференциальной форме. Оно показывает, что изменение полной энергии исследуемой системы обусловлено мощностью диссипативных и внешних сил, действующих на систему.

Тождество (1.24) показывает также, что для искомых объектов следует выбирать пары функций $u = (u_1; u_2)$ из пространства $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega) \subset \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)$, которое определяется следующим образом:

$$\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega) := \Big\{ u = (u_1; u_2) \in \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega) : \ \gamma_1 u_1 := u_1\big|_\Gamma = u_2\big|_\Gamma =: \gamma_2 u_2 \Big\}. \tag{1.25}$$

Пространство $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ плотно в пространстве $L_2(\Omega)$ (см. (1.21)), так как оно в качестве подпространства содержит множество $H^1_0(\Omega) := H^1_0(\Omega_1) \oplus H^1_0(\Omega_2) := \{u = (u_1; u_2) \in \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega) : u_k = 0$ $(x \in \Gamma),\ k = 1, 2\}$.

Лемма 1.1. *Имеет место следующее ортогональное разложение*:

$$\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega) = \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega) \oplus \widehat{H}^1_h(\Omega), \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned}\widehat{H}^1_h(\Omega) := \Big\{ u = (u_1; u_2) \in \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega) : -\mu_k \Delta u_k = 0 \ (x \in \Omega_k), \quad u_k = 0 \ (x \in S_k), \ \ k = 1, 2, \\ \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \ (x \in \Gamma), \quad \vec{n} = \vec{e}_3 \Big\}.\end{aligned} \tag{1.27}$$

Доказательство. Оно основано на формуле Грина (1.23) для областей Ω_1 и Ω_2, а также на определении (1.25). □

Лемма 1.2. *Ортопроектор* $P_1: \ \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega) \to \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ *действует по закону*

$$P_1(u_1;u_2) = \Big\{u_1 - \mu_1^{-1}V_1(\mu_1^{-1}C_1+\mu_2^{-1}C_2)^{-1}(\gamma_1u_1-\gamma_2u_2); \ u_2+\mu_2^{-1}V_2(\mu_1^{-1}C_1+\mu_2^{-1}C_2)^{-1}(\gamma_1u_1-\gamma_2u_2)\Big\}, \tag{1.28}$$

где $C_k := \gamma_k V_k$ $(k=1,2)$, *а* V_1 *и* V_2 — *операторы вспомогательных задач*

$$-\mu_k\Delta v_k = 0 \ (x\in\Omega_k), \quad v_k = 0 \ (x \in S_k), \quad \mu_k\frac{\partial v_k}{\partial n_k} = \pm\psi \ (x\in\Gamma), \quad \vec{n}_k = \vec{e}_3, \quad k=1,2. \tag{1.29}$$

Доказательство. Опираясь на (1.25)–(1.27), получим закон действия ортопроектора P_1. Пусть $(u_1;u_2)\in\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)$. Тогда

$$P_1(u_1;u_2) = (u_1;u_2) - (v_1;v_2), \tag{1.30}$$

где $(v_1;v_2)\in\widehat{H}^1_h(\Omega)$ — такой элемент, который в силу (1.25) удовлетворяет условию

$$\gamma_1u_1 - \gamma_1v_1 = \gamma_2u_2 - \gamma_2v_2, \quad x\in\Gamma. \tag{1.31}$$

Рассмотрим слабые решения вспомогательных задач (1.29).

При $k=1$ определим на основе формулы Грина вида (1.20) для области Ω_1 слабое решение задачи (1.29) тождеством $\mu_1\big(\eta_1,v_1\big)_{\widehat{H}^1_{0,S_1}(\Omega_1)} = \big\langle\gamma_1\eta_1,\psi\big\rangle_{L_2,\Gamma}$ $\forall\eta_1\in\widehat{H}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$.

Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (1.29) при $k=1$ является условие $\psi\in H_\Gamma^{-1/2} = \big(\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}\big)^*$. Если это условие выполнено, то задача (1.29) при $k=1$ имеет единственное слабое решение

$$\mu_1v_1 = V_1\psi, \quad V_1\in\mathcal{L}\big(H_\Gamma^{-1/2};\widehat{H}^1_{0,S_1}(\Omega_1)\big). \tag{1.32}$$

Аналогичным образом получаем, что слабое решение второй вспомогательной задачи (1.29) определяется из тождества $\mu_2\big(\eta_2,v_2\big)_{H^1_{0,S_2}(\Omega_2)} = \big\langle\gamma_2\eta_2,-\psi\big\rangle_{L_2,\Gamma}$ $\forall\eta_2\in\widehat{H}^1_{0,S_2}(\Omega_2)$, и поэтому

$$\mu_2v_2 = V_2(-\psi), \quad V_2\in\mathcal{L}\big(H_\Gamma^{-1/2};\widehat{H}^1_{0,S_2}(\Omega_2)\big). \tag{1.33}$$

Теперь из (1.31)–(1.33) получим связь

$$\gamma_1v_1 - \gamma_2v_2 = (\mu_1^{-1}\gamma_1V_1 + \mu_2^{-1}\gamma_2V_2)\psi = \gamma_1u_1 - \gamma_2u_2. \tag{1.34}$$

Можно проверить, что оператор

$$\mu_1^{-1}\gamma_1V_1 + \mu_2^{-1}\gamma_2V_2 =: \mu_1^{-1}C_1 + \mu_2^{-1}C_2 \tag{1.35}$$

ограниченно действует из $H_\Gamma^{-1/2} = \Big(\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}\Big)^*$ на все пространство $\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}$. Поэтому по теореме Банаха существует ограниченный обратный оператор $(\mu_1^{-1}C_1+\mu_2^{-1}C_2)^{-1}\in\mathcal{L}\big(\widetilde{H}_\Gamma^{1/2};H_\Gamma^{-1/2}\big)$. Отсюда, из (1.34), (1.32), (1.33) и (1.30) получим (1.28). □

В дальнейшем нам понадобятся также ортопроекторы P_{jl} $(l=1,2)$, действующие в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$. А именно, если $u=(u_1;u_2)\in L_2(\Omega)$, то $P_{j1}u := (u_1;0)$, $P_{j2}u := (0;u_2)$.

2. Операторный подход к начально-краевой задаче

2.1. Вспомогательные краевые задачи. Система интегродифференциальных операторных уравнений. Будем считать, что начально-краевая задача (1.10)–(1.16) имеет решение $u=(u_1;u_2)$, являющееся функцией переменной t со значениями в пространстве $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, и получим уравнение, которому должно удовлетворять это решение.

С этой целью перепишем уравнение в областях Ω_1 и Ω_2 в виде пар соотношений:

$$\left\{\rho_k\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\}_{k=1}^2 = \big\{\mu_k\Delta v_k\big\}_{k=1}^2 + \big\{\rho_kf_k\big\}_{k=1}^2. \tag{2.1}$$

Представим функцию $v=(v_1;v_2)$ в виде суммы решений двух вспомогательных проблем:

$$v = (v_1;v_2) = w_1 + w_2 =: (w_{11};w_{12}) + (w_{21};w_{22}). \tag{2.2}$$

Первая проблема соответствует неоднородным уравнениям в областях Ω_k $(k=1,2)$, а вторая — неоднородным краевым условиям.

Для первой проблемы имеем:

$$\begin{gathered}\big\{-\mu_k\Delta w_{1k}\big\}_{k=1}^2=-\left\{\rho_k\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\}_{k=1}^2+\big\{\rho_k f_k\big\}_{k=1}^2,\\ w_{11}\big|_{S_1}=0,\quad w_{12}\big|_{S_2}=0,\quad \gamma_1 w_{11}=\gamma_2 w_{12},\quad x\in\Gamma,\\ \mu_1\frac{\partial w_{11}}{\partial n}-\mu_2\frac{\partial w_{12}}{\partial n}=0,\quad x\in\Gamma,\quad \vec n=\vec e_3.\end{gathered}\tag{2.3}$$

Для второй проблемы соответственно получаем:

$$\begin{gathered}\big\{-\mu_k\Delta w_{2k}\big\}_{k=1}^2=0,\\ w_{21}\big|_{S_1}=0,\quad w_{22}\big|_{S_2}=0,\quad \gamma_1 w_{21}=\gamma_2 w_{22}=:\varphi,\quad x\in\Gamma,\\ \mu_1\frac{\partial w_{21}}{\partial n}-\mu_2\frac{\partial w_{22}}{\partial n}=-g(\rho_1-\rho_2)\zeta,\quad x\in\Gamma,\quad \vec n=\vec e_3.\end{gathered}\tag{2.4}$$

Лемма 2.1. *Задача* (2.4) *имеет единственное слабое решение* $w_2=(w_{21};w_{22})\in\widehat H^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие* $\zeta\in H_\Gamma^{-1/2}$. *Это решение имеет вид*

$$w_2=(w_{21};w_{22})=-g(\rho_1-\rho_2)V\zeta:=$$
$$:=-g(\rho_1-\rho_2)\left(\widetilde\gamma_1^{-1}(\mu_1C_1^{-1}+\mu_2C_2^{-1})^{-1}\zeta;\widetilde\gamma_2^{-1}(\mu_1C_1^{-1}+\mu_2C_2^{-1})^{-1}\zeta\right),\tag{2.5}$$
$$V\in\mathcal L\big(H_\Gamma^{-1/2};\widehat H^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)\big).\tag{2.6}$$

Доказательство. Если функция φ известна, то задача (2.4) распадается на две независимые задачи Дирихле для уравнения Лапласа. При этом для элементов $w_{2k}\in\widehat H^1_{0,S_1}(\Omega_1)$ следы функций на Γ, т. е. элементы $\gamma_k w_{2k}$, должны принадлежать пространству $\widetilde H_\Gamma^{1/2}$, и тогда должно выполняться необходимое условие разрешимости $\varphi=\gamma_1w_{21}=\gamma_2w_{22}\in\widetilde H_\Gamma^{1/2}$, которое является и достаточным для каждой из распадающихся задач. Так как между следами гармонических функций из $\widehat H^1_{0,S_k}(\Omega_k)$ и самими функциями имеется взаимно однозначное соответствие, то (см. [4]) имеем связи

$$w_{2k}=\widetilde\gamma_k^{-1}\varphi,\quad \widetilde\gamma_k^{-1}\in\mathcal L\big(\widetilde H_\Gamma^{1/2};\widehat H^1_{0,S_k}(\Omega_k)\big),\quad k=1,2.\tag{2.7}$$

Учитывая еще соотношения (1.32), (1.33) (см. также (1.29)), из динамического условия на Γ в (2.4) приходим к соотношению

$$(\mu_1C_1^{-1}+\mu_2C_2^{-1})\varphi=-g(\rho_1-\rho_2)\zeta,\quad C_k=\gamma_kV_k\in\mathcal L\big(H_\Gamma^{-1/2};\widetilde H_\Gamma^{1/2}\big),\quad k=1,2.\tag{2.8}$$

Здесь оператор $\mu_1C_1^{-1}+\mu_2C_2^{-1}$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между $\widetilde H_\Gamma^{1/2}$ и $H_\Gamma^{-1/2}$ и является ограниченным оператором. Поэтому по теореме Банаха существует ограниченный обратный оператор: $(\mu_1C_1^{-1}+\mu_2C_2^{-1})^{-1}\in\mathcal L\big(H_\Gamma^{-1/2};\widetilde H_\Gamma^{1/2}\big)$, $k=1,2$. Отсюда, из (2.7), (2.8) получим (2.5), (2.6). $\square$

Рассмотрим теперь вопрос о существовании слабого решения первой вспомогательной задачи, т. е. задачи (2.3), с учетом леммы 2.1. При этом понадобится формула Грина (1.23), приспособленная к определению обобщенного решения задачи (2.3).

Определение 2.1. Функцию $w_1(t)=(w_{11}(t);w_{12}(t))$ со значениями в пространстве $\widehat H^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ назовем обобщенным решением задачи (2.3), если для нее выполнено тождество, следующее из (1.23), а также из уравнений и краевых условий задачи (2.3):

$$\big(\eta,w_1(t)\big)_{\widehat H^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)}=\left(\eta,-\frac{du}{dt}+f(t)\right)_{L_2(\Omega)}\quad\forall\,\eta\in\widehat H^1_{0,S,\Gamma}(\Omega).\tag{2.9}$$

Здесь выражение $\widehat f(t):=-du/dt+f(t)$ считается функцией переменной t со значениями в $L_2(\Omega)$ (и потому $\partial/\partial t$ заменено на d/dt). Если, в частности, выполнено условие $\widehat f\in C(\mathbb R_+;L_2(\Omega))$ ($\mathbb R_+:=[0,+\infty)$), то, как известно из теории слабых и обобщенных решений краевых задач, обобщенное решение $w_1(t)$ задачи (2.3) существует, единственно и является непрерывной функцией переменной t со значениями в $\widehat H^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$.

Более того, так как $(\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$ — гильбертова пара пространств, то в сформированных условиях $w_1(t)$ — непрерывная функция t со значениями в $\mathcal{D}(\widetilde{A})$, где $\widetilde{A}$ — оператор гильбертовой пары. Напомним здесь, что оператор $\widetilde{A}$ самосопряжен и положительно определен в $L_2(\Omega)$. Из компактности вложения $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ в пространство $L_2(\Omega)$ следует компактность оператора $\widetilde{A}^{-1}$.

Опираясь на тождество (2.9), получим интегродифференциальное соотношение, которому должно удовлетворять сильное по переменной t решение проблемы (1.10)–(1.16). Предварительно отметим следующий факт: так как в (2.9) $\eta \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, то $P_1\eta = \eta$, где P_1 — ортопроектор из леммы 1.2. Кроме того, упомянутые выше доводы влекут следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\big(\eta, w_1(t)\big)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} &= \big(P_1\eta, w_1(t)\big)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = \big(\eta, P_1 w_1(t)\big)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = \\ &= \big(\widetilde{A}^{1/2}\eta, \widetilde{A}^{1/2}P_1 w_1(t)\big)_{L_2(\Omega)} = \big(\eta, \widetilde{A}P_1 w_1(t)\big)_{L_2(\Omega)} \quad \forall\, \eta \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega).\end{aligned} \tag{2.10}$$

Отсюда следует, что тождество (2.9) равносильно связи

$$\widetilde{A}P_1 w_1(t) = -\frac{du}{dt} + f(t), \tag{2.11}$$

которая имеет место в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$. Здесь $\widetilde{A}$ — оператор гильбертовой пары $(\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$, P_1 — упомянутый выше ортопроектор (см. лемму 1.2), $w_1(t)$ — обобщенное решение первой вспомогательной задачи (см. (2.3)), а $w_2(t)$ — обобщенное решение второй краевой вспомогательной задачи (см. (2.4)).

Таким образом, если начально-краевая задача (1.10)–(1.16) имеет сильное решение, то функции $u(t)$, $\zeta(t)$ со значениями в $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ и в $L_{2,\Gamma}$ соответственно являются сильным решением следующей задачи Коши:

$$\begin{gathered}\frac{du}{dt} = -\widetilde{A}P_1\big(I_0(t)u + g(\rho_1-\rho_2)V\zeta\big) + f(t), \quad \frac{d\zeta}{dt} = \gamma_1 u_1 = \gamma_2 u_2 =: \widehat{\gamma}u, \\ u(0) = u^0, \quad \zeta(0) = \zeta^0, \quad I_0(t)u := \left\{u_k(t) + \alpha_k \int\limits_0^t \exp(-\beta_k(t-s))u_k(s)\,ds\right\}_{k=1}^2.\end{gathered} \tag{2.12}$$

2.2. Переход к задаче Коши для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве. Преобразуем систему (2.12) к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_{2,\Gamma}$.

Введем оператор $A := \{A_k\}_{k=1}^2$, где A_k — операторы гильбертовых пар $(\widehat{H}^1_{0,S_k}(\Omega_k); L_2(\Omega_k))$ (см. (1.19)). Очевидно, что A — оператор гильбертовой пары $(\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega); L_2(\Omega))$. По предположению $u(t)$ является функцией переменной t со значениями в $\mathcal{D}(\widetilde{A}^{1/2}) = \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega) \subset \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})$. В связи с этим обстоятельством введем искомую функцию

$$\psi(t) := \left\{\alpha_k^{1/2}\int\limits_0^t \exp(-\beta_k(t-s))A_k^{1/2}u_k(s)\,ds\right\}_{k=1}^2, \quad \psi(0) = 0. \tag{2.13}$$

Тогда будем иметь связь

$$\frac{d\psi}{dt} = A^{1/2}\alpha^{1/2}u - \beta\psi, \quad \alpha^{1/2} := \left\{\alpha_k^{1/2}\right\}_{k=1}^2, \quad \beta := \{\beta_k\}_{k=1}^2. \tag{2.14}$$

Осуществим в задаче (2.12), с целью ее симметризации, также следующую замену:

$$\eta(t) = \big(g(\rho_1-\rho_2)\big)^{1/2}\zeta(t). \tag{2.15}$$

Уравнение из (2.14), начальные условия и преобразованные уравнения из (2.12) составляют следующую систему уравнений и начальных условий:

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt} = -\widetilde{A}^{1/2}\Big[\widetilde{A}^{1/2}u + \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\psi + \big(g(\rho_1-\rho_2)\big)^{1/2}\widetilde{A}^{1/2}V\eta\Big] + f(t), \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -\Big[-A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}\big(\widetilde{A}^{1/2}u\big) + \beta\psi\Big], \\ \dfrac{d\eta}{dt} = -\Big[-\big(g(\rho_1-\rho_2)\big)^{1/2}\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}\big(\widetilde{A}^{1/2}u\big)\Big],\end{cases} \tag{2.16}$$

$$u(0) = u^0, \quad \psi(0) = 0, \quad \eta(0) = \big(g(\rho_1 - \rho_2)\big)^{1/2}\zeta^0. \tag{2.17}$$

Докажем две леммы о свойствах операторов из системы (2.16).

Лемма 2.2. *Имеют место свойства*

$$A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2},\ \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} \in \mathcal{L}\big(L_2(\Omega)\big), \quad \big(A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}\big)^* = \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}. \tag{2.18}$$

Доказательство. Ограниченность рассматриваемых операторов проверяется непосредственно, если заметить, что в этих произведениях операторов каждый сомножитель ограничен из одного пространства в другое. В частности, $A^{-1/2} \in \mathcal{L}(L_2(\Omega); \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega))$, $\alpha^{1/2} \in \mathcal{L}(\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega); \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega))$, $P_1 \in \mathcal{L}(\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega); \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega))$, $\widetilde{A}^{1/2} \in \mathcal{L}(\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$, и отсюда следует ограниченность второго из операторов в (2.18). Для первого оператора проверка аналогична.

Проверим взаимную сопряженность этих операторов. С использованием свойства $(u,v)_{\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)} = (A^{1/2}u, A^{1/2}v)_{L_2(\Omega)}$, $(u,v)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = (\widetilde{A}^{1/2}u, \widetilde{A}^{1/2}v)_{L_2(\Omega)}$, а также того факта, что $\alpha^{1/2}$ самосопряжен в $\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)$, для любых $u, v \in L_2(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned}
\big(\widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}u, v\big)_{L_2(\Omega)} &= \big(\widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}u, \widetilde{A}^{1/2}\widetilde{A}^{-1/2}v\big)_{L_2(\Omega)} = \\
&= \big(P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}u, \widetilde{A}^{-1/2}v\big)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = \big(\alpha^{1/2}A^{-1/2}u, P_1\widetilde{A}^{-1/2}v\big)_{\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)} = \\
&= \big(A^{-1/2}u, \alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}v\big)_{\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)} = \big(u, A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}v\big)_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.3. *Имеют место свойства*

$$\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty\big(L_2(\Omega), L_{2,\Gamma}\big), \quad \widetilde{A}^{1/2}V \in \mathfrak{S}_\infty\big(L_{2,\Gamma}, L_2(\Omega)\big), \quad \big(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}\big)^* = \widetilde{A}^{1/2}V. \tag{2.19}$$

Доказательство. Из включений $\widetilde{A}^{-1/2} \in \mathcal{L}\big(L_2(\Omega); \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)\big)$, $\widehat{\gamma} \in \mathcal{L}\big(\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega); \widetilde{H}^{1/2}_\Gamma\big)$ следует, что $\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2} \in \mathcal{L}\big(L_2(\Omega); \widetilde{H}^{1/2}_\Gamma\big)$. Аналогично из включений $V \in \mathcal{L}\big(H^{-1/2}_\Gamma; \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)\big)$ (см. (2.6)), $\widetilde{A}^{1/2} \in \mathcal{L}\big(\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega)\big)$ следует, что $\widetilde{A}^{1/2}V \in \mathcal{L}\big(H^{-1/2}_\Gamma; L_2(\Omega)\big)$. Отсюда в силу компактности вложений $\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma \subsetneqq\subsetneqq L_{2,\Gamma} \subsetneqq\subsetneqq H^{-1/2}_\Gamma$ (см. теорему Гальярдо в [19]) следуют свойства (2.19).

Докажем теперь свойство взаимной сопряженности операторов из (2.19). Пусть $u \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ — решение вспомогательной задачи (2.4) при $\psi = \zeta \in H^{-1/2}_\Gamma$. Тогда $u = V\zeta \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ (см. (2.5) и (2.6)), и если $\eta \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, то

$$\begin{aligned}
(\eta, u)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} &= \mu_1 \int\limits_{\Omega_1} \nabla\eta_1 \cdot \nabla u_1 \, d\Omega_1 + \mu_2 \int\limits_{\Omega_2} \nabla\eta_2 \cdot \nabla u_2 \, d\Omega_2 = \\
&= \Big\langle \gamma_1\eta_1, \mu_1\frac{\partial u_1}{\partial n_1}\Big\rangle_{L_{2,\Gamma}} + \Big\langle \gamma_2\eta_2, \mu_2\frac{\partial u_2}{\partial n_2}\Big\rangle_{L_{2,\Gamma}} = \langle\widehat{\gamma}\eta, \zeta\rangle_{L_{2,\Gamma}}.
\end{aligned}$$

Вспоминая, что $(\eta, u)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = \big(\widetilde{A}^{1/2}\eta, \widetilde{A}^{1/2}u\big)_{L_2(\Omega)}$, получаем при $\eta = \widetilde{A}^{-1/2}\psi$, $\psi \in L_2(\Omega)$, тождество

$$\big(\psi, \widetilde{A}^{1/2}V\zeta\big)_{L_2(\Omega)} = \big\langle\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}\psi, \zeta\big\rangle_{L_{2,\Gamma}} \quad \forall\, \psi \in L_2(\Omega), \quad \zeta \in H^{-1/2}_\Gamma, \tag{2.20}$$

а значит, операторы $\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}$ и $\widetilde{A}^{1/2}V$ взаимно сопряжены. □

Задачу (2.16)-(2.17) перепишем в виде следующей основной задачи Коши в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := L_2(\Omega) \oplus \big(L_2(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma}\big)$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0. \tag{2.21}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&\xi(t) := \big(u(t); w(t)\big)^\tau, \quad w(t) := \big(\psi(t); \eta(t)\big)^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := \big(f(t); 0\big)^\tau, \\
&\xi^0 := \big(u^0; w^0\big)^\tau, \qquad\quad w^0 := \big(0; \big(g(\rho_1 - \rho_2)\big)^{1/2}\zeta^0\big)^\tau.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Оператор $\mathcal{A}$ определен по формулам:

$$\mathcal{A} := \operatorname{diag}\big(\widetilde{A}^{1/2}, \mathcal{I}\big) \begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \operatorname{diag}\big(\widetilde{A}^{1/2}, \mathcal{I}\big) \equiv \tag{2.23}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{Q}\widetilde{A}^{-1/2} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \operatorname{diag}\big(\widetilde{A}, \mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*\big) \begin{pmatrix} I & \widetilde{A}^{-1/2}\mathcal{Q}^* \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix}, \tag{2.24}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{\xi = (u; w)^\tau \in \mathcal{H} \big|\ u + \widetilde{A}^{-1/2}\mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(\widetilde{A})\Big\}, \tag{2.25}$$

где I, $\mathcal{I}$ — единичные операторы в $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma}$,

$$\mathcal{Q} := \Big(A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}, \big(g(\rho_1 - \rho_2)\big)^{1/2}\widetilde{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}\Big)^\tau, \quad \mathcal{G} := \operatorname{diag}\big(\beta, 0\big). \tag{2.26}$$

Определение 2.2. *Сильным решением* задачи Коши (2.21) назовем такую функцию $\xi(t)$, что $\xi \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$, выполнены начальное условие и уравнение из (2.21) для любого $t \in \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$.

2.3. Исследование эволюционного уравнения. Перейдем к рассмотрению задачи (2.21), предварительно изучив свойства операторной матрицы $\mathcal{A}$.

Лемма 2.4. *Оператор $\mathcal{A}$ — максимальный секториальный. Более того, $\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \big\{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\lambda| \leqslant 2\|\mathcal{Q}^*\|(\mathrm{Re}\lambda)^{1/2}\big\}$, где $\mathcal{W}(\mathcal{A})$ — числовая область значений оператора $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Докажем, что оператор $\mathcal{A}$ плотно определен и замкнут. Из (2.23) найдем, что оператор $\mathcal{A} - \lambda$ представим в виде

$$\mathcal{A} - \lambda = \operatorname{diag}\big(\widetilde{A}^{1/2}, \mathcal{I}\big) \begin{pmatrix} I - \lambda\widetilde{A}^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \operatorname{diag}\big(\widetilde{A}^{1/2}, \mathcal{I}\big) =$$

$$= \operatorname{diag}\big(\widetilde{A}^{1/2}, \mathcal{I}\big) \begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \operatorname{diag}\big(\widetilde{A}^{1/2}, \mathcal{I}\big), \tag{2.27}$$

где $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) := (\mathcal{G} - \lambda)^{-1}$, $L(\lambda) := I - \lambda\widetilde{A}^{-1} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}$. Из положительной определенности оператора $L(\lambda)$ при $\lambda < 0$ следует, что $L^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(L_2(\Omega))$. Отсюда и из (2.27) следует, что при $\lambda < 0$ существует $(\mathcal{A} - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, а значит оператор $\mathcal{A}$ замкнут на своей естественной области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (2.25)). Легко видеть также, что $\operatorname{Ker}\big((\mathcal{A} - \lambda)^{-1}\big)^* = \{0\}$, а значит, оператор $\mathcal{A}$ плотно определен.

Докажем, что оператор $\mathcal{A}$ секториален. Пусть $\xi = (u; w)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, тогда $u \in \mathcal{D}(\widetilde{A}^{1/2})$ и из факторизации (2.23) оператора $\mathcal{A}$ в симметричной форме получим, что

$$\mathrm{Re}\big(\mathcal{A}\xi, \xi\big)_\mathcal{H} = \mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{A}^{1/2}u \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widetilde{A}^{1/2}u \\ w \end{pmatrix}\right)_\mathcal{H} = \|\widetilde{A}^{1/2}u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\mathcal{G}^{1/2}w\|^2,$$

$$\big|\mathrm{Im}\big(\mathcal{A}\xi, \xi\big)_\mathcal{H}\big| = \big|\mathrm{Im}\big[(\mathcal{Q}^*w, \widetilde{A}^{1/2}u) - (\mathcal{Q}\widetilde{A}^{1/2}u, w)\big]\big| = \big|2\,\mathrm{Im}(\mathcal{Q}^*w, \widetilde{A}^{1/2}u)\big| \leqslant 2\,\|\widetilde{A}^{1/2}u\|_{L_2(\Omega)}\|\mathcal{Q}^*w\|.$$

Из этих оценок при любом $\delta > 0$ получим, что

$$\mathrm{Re}\big(\mathcal{A}\xi, \xi\big)_\mathcal{H} - \delta\big|\mathrm{Im}\big(\mathcal{A}\xi, \xi\big)_\mathcal{H}\big| \geqslant \big(\|\widetilde{A}^{1/2}u\|_{L_2(\Omega)} - \delta\|\mathcal{Q}^*w\|\big)^2 - \delta^2\|\mathcal{Q}^*w\|^2 + \|\mathcal{G}^{1/2}w\|^2 - \delta^2\|\mathcal{Q}^*\|^2 \cdot \|\xi\|^2_\mathcal{H}.$$

Следовательно, $\mathrm{Re}\big(\big[\mathcal{A} + \gamma(\delta)\big]\xi, \xi\big)_\mathcal{H} - \delta\big|\mathrm{Im}\big(\big[\mathcal{A} + \gamma(\delta)\big]\xi, \xi\big)_\mathcal{H}\big| \geqslant 0$, где $\gamma(\delta) := \delta^2\|\mathcal{Q}^*\|^2$. Таким образом, $\big|\mathrm{Im}\big(\big[\mathcal{A} + \gamma(\delta)\big]\xi, \xi\big)_\mathcal{H}\big| \leqslant \delta^{-1}\mathrm{Re}\big(\big[\mathcal{A} + \gamma(\delta)\big]\xi, \xi\big)_\mathcal{H}$ $\forall \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\delta > 0$. Отсюда следует, что $\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \big\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\big(\lambda + \gamma(\delta)\big)| \leqslant \operatorname{arctg}\delta^{-1}\big\}$ при любом $\delta > 0$, т. е. оператор $\mathcal{A}$ секториален. Максимальность оператора $\mathcal{A}$ следует из $(\mathcal{A} - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ при $\lambda < 0$.

Формула из утверждения леммы получается построением огибающих соответствующих семейств прямых. $\square$

Замечание 2.1. Из (2.27) получим представление для резольвенты оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} \widetilde{A}^{-1/2} & 0 \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{A}^{-1/2} & -\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \widetilde{A}^{-1/2}L^{-1}(\lambda)\widetilde{A}^{-1/2} & -\widetilde{A}^{-1/2}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\widetilde{A}^{-1/2} & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) - \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

$$L(\lambda) := I - \lambda \widetilde{A}^{-1} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}$$

при всех $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G}) \cup \sigma(L(\lambda))$, где $\sigma(\mathcal{G}) = \{0, \beta_1, \beta_2\}$, $\sigma(L(\lambda))$ — спектры оператора $\mathcal{G}$ и операторного пучка $L(\lambda)$ соответственно.

Из (2.24) можно найти также, что при $\lambda < 0$ оператор $\mathcal{A} - \lambda$ представим в виде

$$\mathcal{A} - \lambda = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{Q}\widetilde{A}^{-1/2}(I - \lambda\widetilde{A}^{-1})^{-1} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{A} - \lambda & 0 \\ 0 & \mathcal{D}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & (I - \lambda\widetilde{A}^{-1})^{-1}\widetilde{A}^{-1/2}\mathcal{Q}^* \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix}, \qquad (2.29)$$

$$\mathcal{D}(\lambda) := \mathcal{G} - \lambda + \mathcal{Q}(I - \lambda\widetilde{A}^{-1})^{-1}\mathcal{Q}^*.$$

Теорема 2.1. *Пусть в начально-краевой задаче* (2.21) $u^0 + g(\rho_1 - \rho_2)V\zeta^0 \in \mathcal{D}(\widetilde{A})$, *а функция* $f(t)$ *удовлетворяет локальному условию Гельдера, т. е. для любого* $\tau \in \mathbb{R}_+$ *существуют такие* $K(\tau) > 0$, $k(\tau) \in (0, 1]$, *что при всех* $0 \leqslant s, t \leqslant \tau$ *выполнено* $\|f(t) - f(s)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant K|t - s|^k$.

Тогда задача (2.21) *имеет единственное сильное решение.*

Доказательство. Пусть $u^0 + g(\rho_1 - \rho_2)V\zeta^0 \in \mathcal{D}(\widetilde{A})$, тогда $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (2.22), (2.25), (2.26)). Из условия на функцию $f(t)$ следует, что функция $\mathcal{F}(t)$ из (2.21) также локально гельдерова.

По теореме [2, гл. 1, § 5, теорема 5.9] оператор $-\mathcal{A}$ порождает сильно непрерывную полугруппу операторов, голоморфную в некотором секторе, содержащем положительную полуось. По теореме [2, гл. 2, § 1, теорема 1.4] задача Коши (2.21) имеет единственное сильное (в смысле определения 2.2) решение $\xi(t)$. □

Замечание 2.2. Из теоремы 2.1 получаем достаточное условие существования и единственности решения задач (2.21), отвечающее в модельной проблеме (1.10)–(1.16) нулевому отклонению границы раздела жидкостей: $\zeta^0 \equiv 0$, $u^0 \in \mathcal{D}(\widetilde{A}) \subset \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$.

Теорема 2.2. *Для сильного решения* $\xi(t)$ *задачи* (2.21) *выполнен закон баланса полной энергии в следующей дифференциальной форме* (*ср. с* (1.24)):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + g(\rho_1 - \rho_2)\|\zeta(t)\|^2_{L_{2,\Gamma}}\Big\} = -\mathrm{Re}\big(I_0(t)u(t), u(t)\big)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + \mathrm{Re}\big(f(t), u(t)\big)_{L_2(\Omega)} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \qquad (2.30)$$

Доказательство. Пусть $\xi(t) = (u(t); \psi(t); \eta(t))^\tau$ — сильное решение задачи (2.21), т. е. выполнены все уравнения системы (2.16) и каждое слагаемое является непрерывной функцией t со значениями в соответствующем пространстве. Вернемся от задачи (2.21) к проблеме (2.12) используя промежуточные формулы (2.13)–(2.15).

Умножим скалярно обе части первого уравнения в (2.12) справа на функцию $u(t)$ в пространстве $L_2(\Omega)$. С учетом того, что $u(t) \in \mathcal{D}(\widetilde{A}^{1/2}) = \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, будем иметь соотношение

$$\Big(\frac{du}{dt}, u\Big)_{L_2(\Omega)} + \big(P_1 I_0(t)u, u\big)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + g(\rho_1 - \rho_2)\big(\widetilde{A}^{1/2}V\zeta, \widetilde{A}^{1/2}u\big)_{L_2(\Omega)} = (f, u)_{L_2(\Omega)}.$$

Учитывая свойства оператора P_1 (см. лемму 1.2), взаимную сопряженность операторов $\widetilde{A}^{1/2}V$ и $\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}$ (см. лемму 2.3) и второе уравнение в (2.12), последнее соотношение можно преобразовать к следующему виду:

$$\Big(\frac{du}{dt}, u\Big)_{L_2(\Omega)} + \big(I_0(t)u, u\big)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + g(\rho_1 - \rho_2)\Big(\zeta, \frac{d\zeta}{dt}\Big)_{L_{2,\Gamma}} = (f, u)_{L_2(\Omega)}.$$

Умножение первого уравнения в (2.12) слева на $u(t)$ в пространстве $L_2(\Omega)$ дает комплексно сопряженное выражение, и из этих двух соотношений следует закон баланса (2.30). □

3. Плоская задача, допускающая разделение переменных

3.1. Модельная спектральная проблема в прямоугольной области. Для уточнения характера спектра в исследуемой проблеме исследуем спектральную задачу (1.18) в случае, когда область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ является прямоугольной, а граница раздела Γ — отрезок вещественной оси: $\Gamma = \{(x; 0) : 0 < x < \pi\}$, нижняя жидкость занимает область $\Omega_1 := \{(x, y) :\ 0 < x < \pi,\ -a_1 < y < 0\}$, а верхняя — область $\Omega_2 := \{(x, y) :\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < a_2\}$, см. рис. 1.

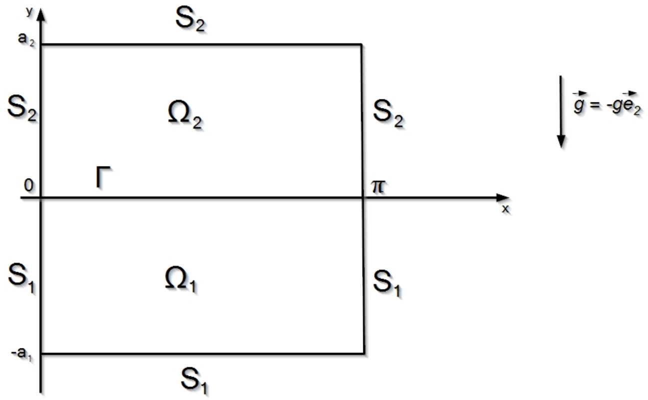

Рис. 1

В этом случае спектральная проблема (1.18) формулируется следующим образом. Для искомых амплитудных функций u_k, w_k $(k=1,2)$ и ζ должны быть выполнены следующие уравнения и краевые условия:

$$\begin{gathered}
-\rho_1\lambda u_1=\mu_1\triangle(u_1+\alpha_1^{1/2}w_1)\quad((x,y)\in\Omega_1),\quad u_1(0,y)=u_1(\pi,y)=u_1(x,-a_1)=0,\\
-\rho_2\lambda u_2=\mu_2\triangle(u_2+\alpha_2^{1/2}w_2)\quad((x,y)\in\Omega_2),\quad u_2(0,y)=u_2(\pi,y)=u_2(x,a_2)=0,\\
-\lambda w_1=\alpha_1^{1/2}u_1-\beta_1w_1\quad((x,y)\in\Omega_1),\qquad -\lambda w_2=\alpha_2^{1/2}u_2-\beta_2w_2\quad((x,y)\in\Omega_2),\\
-\lambda\zeta=u_1=u_2\quad((x,y)\in\Gamma),\quad \triangle:=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad \lambda\in\mathbb{C},\\
\mu_1\frac{\partial}{\partial y}(u_1+\alpha_1^{1/2}w_1)-\mu_2\frac{\partial}{\partial y}(u_2+\alpha_2^{1/2}w_2)=-g(\rho_1-\rho_2)\zeta\quad((x,y)\in\Gamma).
\end{gathered}\tag{3.1}$$

Исключая в (3.1) переменные $\zeta(x)$ и $w_l(x,y)$ $(l=1,2)$ при $\lambda\notin\{0,\beta_1,\beta_2\}$, приходим к проблеме

$$\begin{gathered}
-\triangle u_1=\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}\,u_1\quad((x,y)\in\Omega_1),\quad m_1(\lambda):=\mu_1\Big(1+\frac{\alpha_1}{\beta_1-\lambda}\Big),\\
-\triangle u_2=\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}\,u_2\quad((x,y)\in\Omega_2),\quad m_2(\lambda):=\mu_2\Big(1+\frac{\alpha_2}{\beta_2-\lambda}\Big),\\
u_1=0\ \ ((x,y)\in S_1),\quad u_2=0\ \ ((x,y)\in S_2),\quad u_1=u_2\ \ ((x,y)\in\Gamma),\\
m_1(\lambda)\frac{\partial u_1}{\partial y}-m_2(\lambda)\frac{\partial u_2}{\partial y}=\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{\lambda}\,u_1\quad((x,y)\in\Gamma).
\end{gathered}\tag{3.2}$$

3.2. Вывод характеристических уравнений задачи. Задача (3.2) допускает разделение переменных с использованием разложения искомых функций в ряды Фурье по системе $\big\{\sin kx\big\}_{k=1}^{\infty}$. Итак, будем разыскивать функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ в виде рядов $u_1(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_{1k}(y)\sin kx$, $u_2(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_{2k}(y)\sin kx$.

Используя это представление для решения в уравнениях и граничных условиях в (3.2), получим, что для функций $u_{1k}(y)$ и $u_{2k}(y)$ $(k\in\mathbb{N})$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
\frac{d^2u_{1k}}{dy^2}-\Big(k^2-\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}\Big)u_{1k}=0,\quad -a_1<y<0,\quad u_{1k}(-a_1)=0,\\
\frac{d^2u_{2k}}{dy^2}-\Big(k^2-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}\Big)u_{2k}=0,\qquad 0<y<a_2,\quad u_{2k}(a_2)=0.
\end{gathered}$$

Отсюда получим: $u_{1k}(y)=c_{1k}\,\mathrm{sh}\Big((y+a_1)\sqrt{k^2-\dfrac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\Big)$, $u_{2k}(y)=c_{2k}\,\mathrm{sh}\Big((y-a_2)\sqrt{k^2-\dfrac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\Big)$, где c_{nk} $(n=1,2,\ k\in\mathbb{N})$ — набор постоянных.

Для получения связей между функциями $u_{1k}(y)$ и $u_{2k}(y)$ используем кинематическое и динамическое условия на Γ из (3.2). Из кинематического условия получаем связь

$$c_{1k}\,\mathrm{sh}\left(a_1\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\right)+c_{2k}\,\mathrm{sh}\left(a_2\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\right)=0, \tag{3.3}$$

а динамическое условие дает соотношение

$$c_{1k}\left[m_1(\lambda)\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\,\mathrm{ch}\left(a_1\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\right)-\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{\lambda}\,\mathrm{sh}\left(a_1\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\right)\right]-$$
$$-c_{2k}m_2(\lambda)\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\,\mathrm{ch}\left(a_2\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\right)=0. \tag{3.4}$$

Приравнивая к нулю определитель системы линейных однородных уравнений (3.3)-(3.4), приходим к характеристическим уравнениям для нахождения собственных значений λ спектральной задачи (3.1). После простых преобразований эти уравнения принимают следующий вид:

$$\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{\lambda}-m_1(\lambda)\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\,\mathrm{cth}\left(a_1\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\right)-$$
$$-m_2(\lambda)\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\,\mathrm{cth}\left(a_2\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\right)=0,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{3.5}$$

3.3. Исследование характеристических уравнений. Из общих соображений, которые будут приведены далее (см. п. 1 теоремы 4.2), следует, что корни всей последовательности уравнений (3.5), за исключением не более, чем конечного количества комплексно сопряженных пар, лежат на положительной действительной полуоси. Поэтому, поскольку в первую очередь нас интересуют точки сгущения корней уравнений (3.5), мы ограничимся рассмотрением уравнений (3.5) на положительной полуоси.

Рассмотрим следующую зону для параметра λ:

$$\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}<k^2,\quad \frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}<k^2,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Предположим, что $\lambda\notin\{0\}\cup\{\alpha_1+\beta_1\}\cup\{\alpha_2+\beta_2\}\cup\{+\infty\}$ — точка сгущения корней характеристических уравнений (3.5) ($m_l(\alpha_l+\beta_l)=0,\ l=1,2$). Тогда из (3.5) найдем, что

$$\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{\lambda k}-m_1(\lambda)\sqrt{1-\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)k}}\,\mathrm{cth}\left(a_1\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\right)-$$
$$-m_2(\lambda)\sqrt{1-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)k}}\,\mathrm{cth}\left(a_2\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\right)=-\big(m_1(\lambda)+m_2(\lambda)\big)+o(1)\ \text{ при }\ k\to+\infty,$$

откуда следует уравнение для определения точек сгущения в зоне (3.6):

$$m_1(\lambda)+m_2(\lambda)=0. \tag{3.7}$$

Обозначим через $\lambda_l>0$ $(l=1,2)$ корни уравнения (3.7) в случае, когда $\alpha_1+\beta_1\neq\alpha_2+\beta_2$. При $\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2$ корни уравнения (3.7) имеют вид $\lambda_1:=\alpha_1+\beta_1$, $\lambda_2=(\mu_1\beta_2+\mu_2\beta_1)(\mu_1+\mu_2)^{-1}$.

Исследуем точки $\lambda=\lambda_l$ $(l=1,2)$ в зоне (3.6). Из представления (см. (3.5))

$$\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{k}-\lambda m_1(\lambda)\sqrt{1-\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)k^2}}\,\mathrm{cth}\left(a_1\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\right)-$$
$$-\lambda m_2(\lambda)\sqrt{1-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)k^2}}\,\mathrm{cth}\left(a_2\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\right)=$$
$$=\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{k}-\lambda_l\left(\frac{\mu_1\alpha_1}{(\beta_1-\lambda_l)^2}+\frac{\mu_2\alpha_2}{(\beta_2-\lambda_l)^2}\right)(\lambda-\lambda_l)+o((\lambda-\lambda_l))+O\Big(\frac{1}{k^2}\Big)$$
$$\text{при }\ \lambda\to\lambda_l,\ \ k\to+\infty\quad(l=1,2)$$

следует, что точка $\lambda = \lambda_l$ является предельной для последовательности корней характеристических уравнений (3.5) из рассматриваемой зоны. Для этих последовательностей корней $\{\lambda_k^{(l)}\}_{k=1}^{+\infty}$ $(l = 1, 2)$ имеют место асимптотические формулы:

$$\lambda_k^{(l)} = \lambda_l + \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_l\Big(\dfrac{\mu_1\alpha_1}{(\beta_1 - \lambda_l)^2} + \dfrac{\mu_2\alpha_2}{(\beta_2 - \lambda_l)^2}\Big)} \cdot \frac{1}{k}\big(1 + o(1)\big), \quad k \to +\infty \quad (l = 1, 2). \tag{3.8}$$

Исследуем точку $\lambda = +\infty$ в зоне (3.6). Из соотношения (см. (3.5))

$$\overline{\lim_{k\to+\infty,\,\lambda\to+\infty}} \Bigg[\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda} - m_1(\lambda)\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\,\mathrm{cth}\Big(a_1\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\Big) - \\ - m_2(\lambda)\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\,\mathrm{cth}\Big(a_2\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\Big)\Bigg] \leqslant -\Big(\frac{\mu_1}{a_1} + \frac{\mu_2}{a_2}\Big) < 0$$

следует, что точка $\lambda = +\infty$ не является предельной для последовательности корней характеристических уравнений (3.5) из рассматриваемой зоны.

Исследуем точку $\lambda = 0$ в зоне (3.6). Из представления (см. (3.5))

$$\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda k} - m_1(\lambda)\sqrt{1 - \frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)k^2}}\,\mathrm{cth}\Big(a_1\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\Big) - \\ - m_2(\lambda)\sqrt{1 - \frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)k^2}}\,\mathrm{cth}\Big(a_2\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\Big) = \\ = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda k} - m_1(0) - m_2(0) + O(\lambda) + o\Big(\frac{1}{k^2}\Big) \text{ при } \lambda \to 0, \quad k \to +\infty$$

следует, что точка $\lambda = 0$ является предельной для последовательности корней характеристических уравнений (3.5) из рассматриваемой зоны. Для этой последовательности корней $\{\lambda_k^{(0)}\}_{k=1}^{+\infty}$ имеет место асимптотическая формула:

$$\lambda_k^{(0)} = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\mu_1\Big(1 + \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}\Big) + \mu_2\Big(1 + \dfrac{\alpha_2}{\beta_2}\Big)} \cdot \frac{1}{k}\big(1 + o(1)\big), \quad k \to +\infty. \tag{3.9}$$

Исследуем точку $\lambda = \alpha_1 + \beta_1$ в зоне (3.6) при условии, что $\alpha_1 + \beta_1 \neq \alpha_2 + \beta_2$ (случай $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$ укладывается в формулу (3.8)). Из соотношения (см. (3.5))

$$\lim_{k\to+\infty,\,\lambda\to\alpha_1+\beta_1} \Bigg[\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda k} - \frac{m_1(\lambda)}{k}\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\,\mathrm{cth}\Big(a_1\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\Big) - \\ - m_2(\lambda)\sqrt{1 - \frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)k^2}}\,\mathrm{cth}\Big(a_2\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\Big)\Bigg] = -m_2(\alpha_1 + \beta_1) \neq 0$$

следует, что точка $\lambda = \alpha_1 + \beta_1$ не является предельной для последовательности корней характеристических уравнений (3.5) из рассматриваемой зоны. Аналогичный вывод справедлив и для точки $\lambda = \alpha_2 + \beta_2$.

Рассмотрим теперь зону для параметра λ (правая полуокрестность точки $\lambda = \alpha_1 + \beta_1$):

$$k^2 < \frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}, \quad \frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)} < k^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Характеристические уравнения (3.5) в зоне (3.10) примут вид

$$\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda}\sin\Big(a_1\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)} - k^2}\Big) - m_1(\lambda)\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)} - k^2}\cos\Big(a_1\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)} - k^2}\Big) - \\ - m_2(\lambda)\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\sin\Big(a_1\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)} - k^2}\Big)\,\mathrm{cth}\Big(a_2\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\Big) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда получим, что

$$\begin{aligned}
&\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{\lambda k}\sin\Big(a_1\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}-k^2}\Big)-\frac{m_1(\lambda)}{k}\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}-k^2}\cos\Big(a_1\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}-k^2}\Big)-\\
&\qquad-m_2(\lambda)\sqrt{1-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)k^2}}\sin\Big(a_1\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}-k^2}\Big)\operatorname{cth}\Big(a_2\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\Big)=\\
&\qquad=-m_2(\alpha_1+\beta_1)\sin\Big(a_1\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}-k^2}\Big)\big(1+o(1)\big)+o(1)\ \text{ при }\ \lambda\to\alpha_1+\beta_1,\quad k\to+\infty.
\end{aligned}$$

Из этого соотношения следует, что точка $\lambda=\alpha_1+\beta_1$ является предельной для последовательности корней $\{\lambda_{nk}^{(1)}\}_{n,k=1}^{+\infty}$ характеристических уравнений (3.5) из рассматриваемой зоны. Аналогично, рассматривая характеристические уравнения (3.5) в зоне, связанной с правой полуокрестностью точки $\lambda=\alpha_2+\beta_2$, также найдем, что точка $\lambda=\alpha_2+\beta_2$ является предельной для последовательности корней $\{\lambda_{nk}^{(2)}\}_{n,k=1}^{+\infty}$ характеристических уравнений (3.5). Для этих последовательностей корней $\{\lambda_{nk}^{(l)}\}_{n,k=1}^{+\infty}$ $(l=1,2)$ имеют место асимптотические формулы:

$$\lambda_{nk}^{(l)}=\alpha_l+\beta_l+\frac{a_l^2\rho_l\alpha_l(\alpha_l+\beta_l)}{\mu_l\big(\pi^2n^2+a_l^2k^2\big)}\cdot\big(1+o(1)\big),\quad n,k\to+\infty\quad(l=1,2). \tag{3.11}$$

Рассмотрим теперь зону, связанную окрестностью точки $\lambda=+\infty$:

$$k^2<\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)},\quad k^2<\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)},\quad k\in\mathbb{N}. \tag{3.12}$$

Характеристические уравнения (3.5) в зоне (3.12) примут вид

$$\begin{aligned}
&\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{\lambda}\sin\Big(a_1\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}-k^2}\Big)\sin\Big(a_2\sqrt{\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}-k^2}\Big)-\\
&\qquad-m_1(\lambda)\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}-k^2}\cos\Big(a_1\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}-k^2}\Big)\sin\Big(a_2\sqrt{\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}-k^2}\Big)-\\
&\qquad-m_2(\lambda)\sqrt{\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}-k^2}\cos\Big(a_2\sqrt{\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}-k^2}\Big)\sin\Big(a_1\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}-k^2}\Big)=0,\quad k\in\mathbb{N}.
\end{aligned}\tag{3.13}$$

Можно показать, что точка $\lambda=+\infty$ является предельной для некоторой подпоследовательности корней уравнений (3.13).

Таким образом, спектр задачи (1.18) в случае, когда область $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ является прямоугольной, а граница раздела Γ — отрезок вещественной оси, т. е. спектр задачи (3.2), дискретен и имеет конечное количество точек сгущения. А именно, спектр можно разбить на шесть ветвей собственных значений.

Предельной точке $\lambda=+\infty$ отвечает ветвь $\{\lambda_k^{(+\infty)}\}_{k=1}^{+\infty}$ конечнократных собственных значений задачи, которые являются последовательными минимумами вариационного отношения $\Big(\sum\limits_{k=1}^{2}\mu_k\int\limits_{\Omega_k}|\nabla u_k|^2\,d\Omega_k\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}|u_k|^2\,d\Omega_k\Big)^{-1}$, $u=(u_1;u_2)\in\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$. Отсюда видно, что силы вязкоупругости не влияют на асимптотику собственных значений. Соответствующие нормальные колебания отвечают внутренним диссипативным волнам, как и в задаче о колебаниях двух обычных вязких жидкостей.

Предельной точке $\lambda=0$ отвечает ветвь $\{\lambda_k^{(0)}\}_{k=1}^{+\infty}$ конечнократных собственных значений, которые имеют асимптотическое распределение (3.9) и являются последовательными максимумами вариационного отношения задачи Стеклова: $\Big(g(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma}|u_1|^2\,d\Gamma\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{2}\Big(1+\frac{\alpha_k}{\beta_k}\Big)\mu_k\int\limits_{\Omega_k}|\nabla u_k|^2\,d\Omega_k\Big)^{-1}$, $u=(u_1;u_2)\in\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$. Отсюда следует, что вязкоупругие силы в жидкостях вносят существенный вклад в асимптотику собственных значений, связанных с колебаниями границы раздела между жидкостями. Отметим, что аналогичные волновые движения возникают и в задаче о колебаниях двух обычных вязких жидкостей с общей границей раздела.

Предельным точкам $\lambda = \alpha_1 + \beta_1$, $\lambda = \alpha_2 + \beta_2$ отвечают ветви $\{\lambda_{nk}^{(l)}\}_{n,k=1}^{+\infty}$ $(l = 1, 2)$ конечнократных собственных значений, которые имеют асимптотическое распределение (3.11). Волновые движения, отвечающие этим собственным значениям, носят преимущественно внутренний характер и возникают исключительно от действия сил вязкоупругости. Этот тип волновых движений в жидкостях останется и в случае, если границу раздела Γ между жидкостями заменить на твердую стенку.

Предельным точкам $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, где λ_l $(l = 1, 2)$ корни уравнения (3.7), отвечают ветви $\{\lambda_k^{(l)}\}_{k=1}^{+\infty}$ $(l = 1, 2)$ конечнократных собственных значений, которые имеют асимптотическое распределение (3.8) и связаны с последовательными максимумами вариационного отношения задачи Стефана: $\Big(\dfrac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_l} \int\limits_\Gamma |u_1|^2\, d\Gamma\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{2} \dfrac{\mu_k \alpha_k}{(\beta_k - \lambda_l)^2} \int\limits_{\Omega_k} |\nabla u_k|^2\, d\Omega_k\Big)^{-1}$, $u = (u_1; u_2) \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ $(l = 1, 2)$.

Волновые движения, отвечающие этим собственным значениям, происходят преимущественно в окрестности границы раздела Γ и возникают исключительно от действия сил вязкоупругости. Этот тип волновых движений в жидкостях пропадет в случае, если границу раздела Γ между жидкостями заменить на твердую стенку.

Отметим здесь, что все сказанное относится исключительно к спектру задачи (3.2), а относящиеся к векторным задачам гидродинамики термины использованы лишь для удобства.

4. Операторный подход к спектральной задаче

4.1. Основная спектральная задача. Пересчет корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ и пучка $L(\lambda)$. Будем разыскивать решения однородного уравнения $(\mathcal{F}(t) \equiv 0)$ из (2.21) в форме $\xi(t) = \exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, а ξ — амплитудный элемент. В результате придем к следующей основной спектральной задаче:

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}, \tag{4.1}$$

которую будем ассоциировать с задачей о спектре скалярной задачи сопряжения, которая моделирует систему из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд.

При $\lambda \notin \{0, \beta_1, \beta_2\} = \sigma(\mathcal{G})$ с задачей (4.1) свяжем также следующую спектральную задачу для операторного пучка (см. замечание 2.1):

$$\begin{aligned} L(\lambda)z &:= \big[I - \lambda\widetilde{A}^{-1} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}\big]z = \\ &= \Big[I - \lambda\widetilde{A}^{-1} - \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda}(\widetilde{A}^{1/2}V)(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}) + \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha(\beta - \lambda)^{-1}\widetilde{A}^{-1/2}\Big]z = 0, \quad z \in L_2(\Omega). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Для выяснения связи между корневыми элементами задач (4.1) и (4.2) нам понадобятся вспомогательные леммы о связи цепочки из собственного и присоединенного к нему элементов пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ с некоторой функцией из $\mathcal{H}$ и о связи цепочек элементов некоторых специальных оператор-функций.

Определение 4.1 (см. [10, гл. 2, § 11, с. 61]). Пусть λ_0 собственное значение, а η_0 отвечающий ему собственный элемент (с.э.) оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, т. е. $\mathcal{A}(\lambda_0)\eta_0 = 0$. Элементы $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ называют *присоединенными* к с.э. η_0, если $\sum\limits_{k=0}^{j}(k!)^{-1}\mathcal{A}^{(k)}(\lambda_0)\eta_{j-k} = 0$ $(j = 1, 2, \dots, n-1)$. Число n называют *длиной цепочки* $\{\eta_k\}_{k=0}^{n-1}$ из собственного и присоединенных элементов.

Лемма 4.1 (см. [10, гл. 2, § 11, лемма 11.3]). *Элементы $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ образуют цепочку из собственного и присоединенных элементов $\mathcal{A}(\lambda)$, отвечающую числу λ_0, тогда и только тогда, когда существует функция $\eta(\lambda)$, голоморфная в некоторой окрестности точки λ_0, такая, что $\eta(\lambda_0) \neq 0$, $\eta^{(k)}(\lambda_0) = k!\eta_k$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ и что функция $\mathcal{A}(\lambda)\eta(\lambda)$ в точке λ_0 имеет нуль кратности, большей или равной n.*

Определение 4.2 (см. [10, гл. 2, § 11, с. 62]). Пусть $\eta(\lambda)$ — функция из $\mathcal{H}$, причем $\eta(\lambda_0) \neq 0$ и $\mathcal{A}(\lambda_0)\eta(\lambda_0) = 0$. Если порядок нуля функции $\mathcal{A}(\lambda)\eta(\lambda)$ в точке λ_0 равен n, то $\eta(\lambda)$ называется *производящей функцией* для цепочки из собственного и присоединенных элементов $\{(k!)^{-1}\eta^{(k)}(\lambda_0)\}_{k=0}^{n-1}$ оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$. Число n будем называть *рангом* производящей функции $\eta(\lambda)$.

Рассмотрим операторный пучок $\mathcal{A}(\lambda)$, действующий в пространстве $\mathcal{H} = L_2(\Omega) \oplus \mathcal{H}_0$, и соответствующую спектральную задачу:

$$\mathcal{A}(\lambda)\eta := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}(\lambda) & \mathcal{A}_{12}(\lambda) \\ \mathcal{A}_{21}(\lambda) & \mathcal{A}_{22}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (z; w)^\tau \in \mathcal{H} = L_2(\Omega) \oplus \mathcal{H}_0. \tag{4.3}$$

С задачей (4.3) при $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$ свяжем спектральную задачу:

$$L(\lambda)z = \big[\mathcal{A}_{11}(\lambda) - \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\big]z = 0, \quad z \in L_2(\Omega). \tag{4.4}$$

Замечание 4.1. В области $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$ спектральную задачу (4.3) можно переписать следующим образом:

$$\mathcal{A}(\lambda)\eta = \begin{pmatrix} I & \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{22}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda) & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда после замены $\big(z; \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)z + w\big)^\tau =: (z; w_z)^\tau$ найдем, что в области $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$ спектральные задачи (4.3) и (4.4) эквивалентны.

Лемма 4.2. *Пусть $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$. Функция $\eta(\lambda) := (z(\lambda); w(\lambda))^\tau$ из $\mathcal{H}$ является производящей функцией ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке $\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$ тогда и только тогда, когда $z(\lambda)$ является производящей функцией ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0 и*

$$w(\lambda) = -\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)z(\lambda) + (\lambda - \lambda_0)^n \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)p(\lambda), \tag{4.5}$$

где $p(\lambda)$ — функция, голоморфная в некоторой окрестности точки λ_0.

Доказательство. Доказательство этой леммы следует рассуждениям [10, гл. 2, § 12, лемма 12.3]. Начнем с достаточности. Пусть $z(\lambda)$ является производящей функцией ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке $\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$ и выполнено соотношение (4.5). Поскольку $L(\lambda)z(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности $\geqslant n$, то из вида $L(\lambda)$ получим:

$$L(\lambda)z(\lambda) = \big[\mathcal{A}_{11}(\lambda) - \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\big]z(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n q(\lambda), \tag{4.6}$$

где $q(\lambda)$ — некоторая функция, голоморфная в окрестности точки λ_0. Подставим (4.5) в (4.6) и запишем полученное соотношение вместе с (4.5) в виде одного векторно-матричного выражения в $\mathcal{H}$. После простых преобразований получим, что $\mathcal{A}(\lambda)\big(z(\lambda); w(\lambda)\big)^\tau = (\lambda - \lambda_0)^n\big(q(\lambda) + \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)p(\lambda); p(\lambda)\big)^\tau$. Отсюда следует, что $\eta(\lambda) = (z(\lambda); w(\lambda))^\tau$ есть производящая функция ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке λ_0. Достаточность доказана.

Пусть теперь функция $\eta(\lambda) = (z(\lambda); w(\lambda))^\tau$ является производящей функцией ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке λ_0. По условию теоремы $\mathcal{A}(\lambda)\eta(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности $\geqslant n$, следовательно:

$$\mathcal{A}_{11}(\lambda)z(\lambda) + \mathcal{A}_{12}(\lambda)w(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n r(\lambda), \tag{4.7}$$

$$\mathcal{A}_{21}(\lambda)z(\lambda) + \mathcal{A}_{22}(\lambda)w(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n p(\lambda), \tag{4.8}$$

где $r(\lambda)$, $p(\lambda)$ — некоторые функции, голоморфные в окрестности точки λ_0. Из (4.8) следует (4.5). Подставив (4.5) в (4.7), получим, что $L(\lambda)z(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n\big(r(\lambda) - \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)p(\lambda)\big)$. Отсюда следует, что $L(\lambda)z(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль порядка не ниже n. □

В качестве следствия из леммы 4.2 получим следующую лемму о пересчете корневых элементов спектральных задач (4.3) и (4.4).

Лемма 4.3. *Пусть набор элементов $\{\eta_k = (z_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ является цепочкой из собственного и присоединенных элементов задачи* (4.3)*, отвечающей собственному значению λ_0 ($\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$), тогда $\{z_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов задачи* (4.4)*, отвечающая собственному значению λ_0.*

Обратно, пусть набор элементов $\{z_k\}_{k=0}^{n-1}$ — *цепочка из собственного и присоединенных элементов спектральной задачи* (4.4)*, отвечающая собственному значению* λ_0*, тогда* $\{\eta_k = (z_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$*, где*

$$w_k = -\sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}} \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} z_l, \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{4.9}$$

— *цепочка из собственного и присоединенных элементов спектральной задачи* (4.3).

Доказательство. По лемме 4.2, если функция $\eta(\lambda) = = (z(\lambda); w(\lambda))^\tau$ из $\mathcal{H}$ является производящей функцией ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке $\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$, то функция $z(\lambda)$ является производящей функцией ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0. Отсюда и из леммы 4.1 следует прямое утверждение.

Обратно, пусть функция $z(\lambda)$ является производящей функцией из H ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0. Определим функцию $w(\lambda)$ по формуле (4.5). Тогда по лемме 4.2 функция $\eta(\lambda) = (z(\lambda); w(\lambda))^\tau$ из $\mathcal{H}$ является производящей функцией ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке λ_0. При этом (см. определение 4.2)

$$\begin{aligned} w_k = -\frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)z(\lambda) + (\lambda-\lambda_0)^n\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)p(\lambda)\right]\Big|_{\lambda=\lambda_0} = \\ = -\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!(k-l)!}\frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}}\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0}\frac{d^l z(\lambda)}{d\lambda^l}\Big|_{\lambda=\lambda_0} = \\ = -\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{(k-l)!}\frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}}\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} z_l \quad (k = \overline{0, n-1}). \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

В качестве следствия из леммы 4.3 получим следующую теорему о связи собственных и присоединенных элементов оператора $\mathcal{A}$ и пучка $L(\lambda)$.

Теорема 4.1. *Пусть набор элементов* $\{\xi_k = (u_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ *является цепочкой из собственного и присоединенных элементов оператора* $\mathcal{A}$*, отвечающей собственному значению* λ_0 $(\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{G}) = \{0, \beta_1, \beta_2\})$*, тогда набор элементов* $\{z_k\}_{k=0}^{n-1} := \{\widetilde{A}^{1/2}u_k\}_{k=0}^{n-1}$ — *цепочка из собственного и присоединенных элементов пучка* $L(\lambda)$*, отвечающая собственному значению* λ_0.

Обратно, пусть набор элементов $\{z_k\}_{k=0}^{n-1}$ — *цепочка из собственного и присоединенных элементов пучка* $L(\lambda)$*, отвечающая собственному значению* λ_0*, тогда* $\{\xi_k = (\widetilde{A}^{-1/2}z_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$*, где* $w_k = \sum_{l=0}^{k}(\mathcal{G}-\lambda_0)^{-(k-l+1)}\mathcal{Q}z_l$ — *цепочка из собственного и присоединенных элементов оператора* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Пусть λ_0 $(\lambda_0 \notin \{0, \beta_1, \beta_2\})$ — собственное значение оператора $\mathcal{A}$ и $\xi(\lambda)$ производящая функция для цепочки из собственного и присоединенных элементов $\{\xi_k := (k!)^{-1}\xi^{(k)}(\lambda_0)\}_{k=0}^{n-1}$ (см. определение 4.2).

Запишем спектральную задачу для оператора $\mathcal{A}$ в виде $(\mathcal{A}-\lambda)\xi = \mathcal{B}\mathcal{A}(\lambda)\mathcal{B}\xi = 0$, $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, где $\mathcal{B} := \mathrm{diag}(\widetilde{A}^{1/2}, \mathcal{I})$, а оператор-функция $\mathcal{A}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ имеет вид:

$$\mathcal{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}(\lambda) & \mathcal{A}_{12}(\lambda) \\ \mathcal{A}_{21}(\lambda) & \mathcal{A}_{22}(\lambda) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} I - \lambda\widetilde{A}^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}-\lambda \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Отсюда следует, что $\mathcal{B}\xi(\lambda) = (\widetilde{A}^{1/2}u(\lambda); w(\lambda))^\tau$ — производящая функция для оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$. Согласно лемме 4.2, $z(\lambda) := \widetilde{A}^{1/2}u(\lambda)$ — производящая функция для оператор-функции $L(\lambda)$, и первое утверждение в теореме доказано.

Пусть теперь λ_0 — собственное значение операторного пучка $L(\lambda)$, а $z(\lambda)$ — производящая функция для цепочки из собственного и присоединенных элементов $\{z_k := (k!)^{-1}z^{(k)}(\lambda_0)\}_{k=0}^{n-1}$ (см. определение 4.2) оператор-функции $L(\lambda)$. Тогда в соответствии с леммой 4.3 получим, что

$$(z_k; w_k)^\tau := \Big(z_k; -\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{(k-l)!}\frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}}\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} z_l\Big)^\tau, \quad k = \overline{0, n-1} \tag{4.11}$$

— цепочка из собственного и присоединенных элементов оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_0. Для вторых компонент из (4.11) имеем, с учетом вида $\mathcal{A}_{22}(\lambda)$ и $\mathcal{A}_{21}(\lambda)$ (см. (4.10) и определение 4.2):

$$\begin{aligned} w_k &= -\sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}} \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} z_l = \\ &= \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}} (\mathcal{G}-\lambda)^{-1}\mathcal{Q}\Big|_{\lambda=\lambda_0} z_l = \sum_{l=0}^{k} (\mathcal{G}-\lambda_0)^{-(k-l+1)}\mathcal{Q}z_l. \end{aligned}$$

Таким образом, набор элементов $\{\eta_k = (z_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ является цепочкой из собственного и присоединенных элементов оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$, отвечающей собственному значению λ_0. Отсюда следует, что набор элементов $\{\xi_k = (\widetilde{A}^{-1/2} z_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов оператора $\mathcal{A}$. □

4.2. Структура и локализация спектра. Часть рассуждений в следующей теореме будет основана на применении методов индефинитной метрики, которые можно найти в [1] (см. также [16]). В связи с этим обстоятельством будем считать, что $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, где $\mathcal{H}_+ := L_2(\Omega)$, $\mathcal{H}_- := L_2(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma}$.

Определим оператор $\mathcal{J} := \operatorname{diag}(I, -\mathcal{I})$ и введем в $\mathcal{H}$ индефинитное скалярное произведение по формуле $[\xi_1, \xi_2] := (\mathcal{J}\zeta_1, \zeta_2)_{\mathcal{H}} = (u_1, u_2)_{\mathcal{H}_+} - (w_1, w_2)_{\mathcal{H}_-}$. Введем ортопроекторы $\mathcal{P}_+$ и $\mathcal{P}_-$: $\mathcal{P}_+\mathcal{H} = \mathcal{H}_+$, $\mathcal{P}_-\mathcal{H} = \mathcal{H}_-$. Приведем необходимые понятия и факты из теории пространств с индефинитной метрикой.

Подпространство L_+ пространства Крейна $\mathcal{H}$ называется *неотрицательным*, если $[\xi, \xi] \geqslant 0$ для любого $\xi \in L_+$, и *максимальным неотрицательным* ($L_+ \in \mathfrak{M}^+$), если оно не является частью другого неотрицательного подпространства. Аналогично определяется *неположительное* подпространство L_-. Подпространство L_0 пространства Крейна $\mathcal{H}$ называется *изотропным*, если $[\xi, \eta] = 0$ для любых ξ, $\eta \in L_0$.

Известно [1, гл. 1, § 8, п. 3], что $L_+ \in \mathfrak{M}^+$ тогда и только тогда, когда существует $K_+ : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$ ($\|K_+\| \leqslant 1$) такой, что $L_+ = \{\xi = \xi_+ + K_+\xi_+ : \xi_+ \in \mathcal{H}_+\}$.

Подпространство L_+ называется *равномерно положительным*, если оно является гильбертовым пространством по отношению к скалярному произведению, порождаемому индефинитной метрикой.

Будем говорить, что пространство L_+ *принадлежит классу* h^+, если оно допускает разложение в прямую $\mathcal{J}$-ортогональную сумму конечномерного изотропного подпространства и равномерно положительного подпространства. В частности, $L_+ \in h^+$, если $K_+ \in \mathfrak{S}_\infty$ (см. [1, гл. 1, § 9, задача 18], [21]).

Если $L_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$ и L_+ $\mathcal{J}$-ортогонально L_-, то будем говорить, что они образуют *дуальную пару* $\{L_+, L_-\}$. Будем писать $\{L_+, L_-\} \in h$, если $L_\pm \in h^\pm$.

Будем говорить, что непрерывный $\mathcal{J}$-самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ *принадлежит классу* (H) ($\mathcal{A} \in (H)$), если у него есть хотя бы одна дуальная пара $\{L_+, L_-\}$ инвариантных подпространств и каждая $\mathcal{A}$-инвариантная дуальная пара принадлежит классу h.

Определение 4.3 (см. [18, гл. 4, § 1, п. 20]). *Существенным спектром* оператора $\mathcal{A}$ называется множество $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) := \big\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{оператор } \mathcal{A} - \lambda \text{ нефредгольмов}\big\}$.

Теорема 4.2. *Справедливы утверждения*:

1. *Спектр оператора $\mathcal{A}$ действительный, за исключением, быть может, конечного количества собственных значений, расположенных симметрично относительно действительной оси.*
2. *Имеет место включение $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset \sigma_{ess}(L(\lambda)) \subset \big[0, \max\{\beta_1, \beta_2\} + \|A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}\|^2\big]$. Множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$.*

3. *Если λ — невещественное собственное значение оператора $\mathcal{A}$, то*

$$
\begin{gathered}
\gamma_1 := \big[2\|\widetilde{A}^{-1/2}\|^2\big]^{-1} < \mathrm{Re}\lambda < \widetilde{b} + \widetilde{q} + \widetilde{q}^{1/2}\big(\widetilde{b} + \widetilde{q}\big)^{1/2} =: \gamma_2,\\
|\lambda|^2 < \big(\widetilde{b} + 2\widetilde{q} + 2\widetilde{q}^{1/2}\big(\widetilde{b} + \widetilde{q}\big)^{1/2}\big)\big(2\widetilde{b} + \widetilde{q}\big),\\
\widetilde{b} := \max\{\beta_1, \beta_2\}, \quad \widetilde{q} := g(\rho_1 - \rho_2)\|\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}\|^2 + \|A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}\|^2.
\end{gathered}
\tag{4.12}
$$

Спектр оператора $\mathcal{A}$ действительный, если выполнено условие

$$
2\|\widetilde{A}^{-1/2}\|^2 \leqslant \big(\widetilde{b} + \widetilde{q} + \widetilde{q}^{1/2}\big(\widetilde{b} + \widetilde{q}\big)^{1/2}\big)^{-1}. \tag{4.13}
$$

Доказательство. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Из факторизации (2.29) при $\lambda = -a$, где $a > 0$, и из $\widetilde{A}^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$ найдем

$$
\begin{gathered}
(\mathcal{A} + a)^{-1} = \begin{pmatrix} I & -(I + a\widetilde{A}^{-1})^{-1}\widetilde{A}^{-1/2}\mathcal{Q}^* \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\widetilde{A} + a)^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{D}^{-1}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{Q}\widetilde{A}^{-1/2}(I + a\widetilde{A}^{-1})^{-1} & \mathcal{I} \end{pmatrix} =\\
= \begin{pmatrix} (\widetilde{A} + a)^{-1} - (I + a\widetilde{A}^{-1})^{-1}\widetilde{A}^{-1/2}\mathcal{Q}^*\mathcal{D}^{-1}\mathcal{Q}\widetilde{A}^{-1/2}(I + a\widetilde{A}^{-1})^{-1} & -(I + a\widetilde{A}^{-1})^{-1}\widetilde{A}^{-1/2}\mathcal{Q}^*\mathcal{D}^{-1} \\ \mathcal{D}^{-1}\mathcal{Q}\widetilde{A}^{-1/2}(I + a\widetilde{A}^{-1})^{-1} & \mathcal{D}^{-1}(a) \end{pmatrix} =\\
=: \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & \mathcal{D}^{-1}(a) \end{pmatrix}, \quad A_{11},\, A_{12},\, A_{21} \in \mathfrak{S}_\infty.
\end{gathered}
\tag{4.14}
$$

Оператор $(\mathcal{A} + a)^{-1}$ — $\mathcal{J}$-самосопряженный и ограниченный, следовательно, спектр оператора $\mathcal{A} + a$ симметричен относительно действительной оси (этот же факт следует и из самосопряженности пучка $L(\lambda)$). Теорема будет доказана полностью, если оператор $(\mathcal{A} + a)^{-1}$ имеет не более конечного количества невещественных собственных значений. Последнее, в свою очередь, будет верно, если $(\mathcal{A} + a)^{-1} \in (H)$ (см. в [1, гл. 3, § 5, следствие 5.21] условия принадлежности оператора $(\mathcal{A} + a)^{-1}$ классу Хелтона). В самом деле, из компактности оператора $\widetilde{A}^{-1/2}$ следует, что $\mathcal{P}_+(\mathcal{A} + a)^{-1}\mathcal{P}_-$ компактен, а значит (см. [1, гл. 4, § 3, теорема 3.7]) оператор $(\mathcal{A} + a)^{-1}$ имеет дуальную инвариантную пару $\{L_+((\mathcal{A} + a)^{-1}), L_-((\mathcal{A} + a)^{-1})\}$. Пусть K_+ — угловой оператор инвариантного неотрицательного подпространства $L_+((\mathcal{A} + a)^{-1})$, тогда $K_+ : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$, $\|K_+\| \leqslant 1$ и $L_+((\mathcal{A} + a)^{-1}) = \big\{(u; w)^\tau \in \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- : (u; w)^\tau = (u; K_+u)^\tau,\ u \in \mathcal{H}_+\big\}$.

Пусть $(u_1; w_1)^\tau = (u_1; K_+u_1)^\tau \in L_+((\mathcal{A} + a)^{-1})$, тогда $(\mathcal{A} + a)^{-1}(u_1; K_+u_1)^\tau = (u_2; K_+u_2)^\tau$. Отсюда и из (4.14) следует уравнение для определения углового оператора K_+:

$$
\mathcal{D}^{-1}K_+ = -A_{21} + K_+A_{11} + K_+A_{12}K_+. \tag{4.15}
$$

Отсюда и из $A_{11}, A_{12}, A_{21} \in \mathfrak{S}_\infty$ следует, что $K_+ \in \mathfrak{S}_\infty$.

2. Покажем, что $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset \sigma_{ess}(L(\lambda))$. Пусть $\lambda \notin \sigma_{ess}(L(\lambda))$. Тогда из теоремы о произведении фредгольмовых операторов (см. [20, гл. 17, § 3, теорема 3.1]) и (2.27) найдем, что оператор

$$
\begin{gathered}
\mathcal{A} - \lambda = \begin{pmatrix} \widetilde{A}^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\widetilde{\lambda}A^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{A}^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} =\\
= \begin{pmatrix} \widetilde{A}^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{A}^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix}
\end{gathered}
$$

фредгольмов. Следовательно, $\lambda \notin \sigma_{ess}(\mathcal{A})$, и для существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ получаем включение $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset \sigma_{ess}(L(\lambda))$.

Выясним расположение множества $\sigma_{ess}(L(\lambda))$ на $\mathbb{R}_+$. Из $\widetilde{A}^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$, леммы 2.3 и из теоремы о сохранении существенного спектра при относительно компактных возмущениях (см. [3, гл. 4, § 5, п. 6, теорема 5.35]) следует, что $\sigma_{ess}(L(\lambda)) = \sigma_{ess}(L_0(\lambda))$, где $L_0(\lambda) := I + \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha(\beta - \lambda)^{-1}\widetilde{A}^{-1/2} = I + (A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2})^*(\beta - \lambda)^{-1}(A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2})$ (см. лемму 2.2). Очевидно, что оператор $L_0(\lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda < 0$. Из теоремы Неймана об обращении оператора, близкого к единичному, и оценки

$$
\|(A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2})^*(\beta - \lambda)^{-1}(A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2})\|_{\mathcal{L}(L_2(\Omega))} \leqslant \frac{\|A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}\|^2}{\lambda - \max\{\beta_1, \beta_2\}},\ \lambda > \max\{\beta_1, \beta_2\},
$$

следует также, что оператор $L_0(\lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda > \max\{\beta_1, \beta_2\} + \|A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}\|^2$.

Таким образом, $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset \sigma_{ess}(L(\lambda)) \subset \big[0, \max\{\beta_1, \beta_2\} + \|A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}\|^2\big]$.

Множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ является связным, а оператор $\mathcal{A}$ имеет регулярные точки (см. лемму 2.4). Отсюда и из теоремы об устойчивости индекса и дефекта замкнутого оператора (см. [20, гл. 17, § 2, теорема 2.1], а также [3, гл. 4, § 5, п. 2, теорема 5.17]) следует, что множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$.

3. Пусть λ_0 — невещественное собственное значение оператора $\mathcal{A}$, тогда λ_0 — собственное значение оператора $L(\lambda_0)$ (см. теорему 4.1), отвечающее некоторому собственному элементу $z_0 \in L_2(\Omega)$. Очевидно, что λ_0 будет корнем уравнения $\|z_0\|^{-2}\big(L(\lambda)z_0, z_0\big) = 0$, которое после ряда простых преобразований записывается следующим образом:

$$1 - \lambda p - \frac{1}{\lambda}\Big(q - \sum_{l=1}^{2}\frac{q_l}{\beta_l - \lambda}\Big) = 0, \tag{4.16}$$

$$p := \frac{\|\widetilde{A}^{-1/2}z_0\|^2}{\|z_0\|^2} > 0, \quad q := \frac{g(\rho_1 - \rho_2)\|\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}z_0\|^2 + \|A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}z_0\|^2}{\|z_0\|^2} \geqslant 0,$$

$$q_l := \beta_l\frac{\|P_{jl}A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}z_0\|^2}{\|z_0\|^2} \geqslant 0 \quad (l = 1, 2).$$

Напомним, что здесь P_{jl} $(l = 1, 2)$ — ортопроекторы, действующие в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$. Точнее, если $z = (z_1; z_2) \in L_2(\Omega)$, то $P_{j1}z := (z_1; 0)$, $P_{j2}z := (0; z_2)$.

В последующих вычислениях будем считать для определенности, что $\beta_1 < \beta_2$. Случай $\beta_1 = \beta_2$ также укладывается в последующие вычисления после введения соответствующих обозначений.

Перепишем уравнение (4.16) в следующей форме:

$$0 = (\lambda - \lambda^2 p - q)\prod_{l=1}^{2}(\beta_l - \lambda) + \sum_{l=1}^{2} q_l \prod_{k \neq l}^{2}(\beta_k - \lambda) = -p\lambda^4 + \lambda^3\Big[1 + p\sum_{l=1}^{2}\beta_l\Big] - \lambda^2\Big[q + \sum_{l=1}^{2}\beta_l + p\beta_1\beta_2\Big] + \ldots \tag{4.17}$$

Уравнение (4.16) имеет два действительных корня, которые мы обозначим через λ_l $(l = 1, 2)$ $(\lambda_1 \in (0, \beta_1)$, $\lambda_2 \in (\beta_1, \beta_2))$, и еще два корня: λ_0 и $\overline{\lambda_0}$. Обозначим $\xi_0 := \mathrm{Re}\lambda_0$, $\eta_0 := \mathrm{Im}\lambda_0$, тогда

$$0 = -p\prod_{l=1}^{2}(\lambda_l - \lambda)\big((\lambda - \xi_0)^2 + \eta_0^2\big) = -p\lambda^4 + \lambda^3 p\Big[2\xi_0 + \sum_{l=1}^{2}\lambda_l\Big] - \lambda^2 p\Big[(\xi_0^2 + \eta_0^2) + 2\xi_0\sum_{l=1}^{2}\lambda_l + \lambda_1\lambda_2\Big] + \ldots \tag{4.18}$$

Приравнивая коэффициенты при λ^3 и λ^2 из (4.17) и (4.18), получим

$$2\xi_0 + \sum_{l=1}^{2}\lambda_l = \frac{1}{p} + \sum_{l=1}^{2}\beta_l, \tag{4.19}$$

$$(\xi_0^2 + \eta_0^2) + 2\xi_0\sum_{l=1}^{2}\lambda_l + \lambda_1\lambda_2 = \frac{q}{p} + \frac{1}{p}\sum_{l=1}^{2}\beta_l + \beta_1\beta_2. \tag{4.20}$$

Из (4.19) следует оценка снизу $2\mathrm{Re}\lambda_0 = 2\xi_0 = p^{-1} + \sum\limits_{l=1}^{2}(\beta_l - \lambda_l) > p^{-1} \geqslant \|\widetilde{A}^{-1/2}\|^{-2}$.

Далее мы следуем идеям из [22, гл. 11, § 5, п. 11.5.2(2)]. Введем обозначения $\delta := 2^{-1}\sum\limits_{l=1}^{2}(\beta_l - \lambda_l)$, $\omega := (2p)^{-1}$, тогда $\xi_0 = \omega + \delta$ (см. (4.19)). Выразим из (4.19) $\sum\limits_{l=1}^{2}\lambda_l$ и подставим его в (4.20). После ряда преобразований получим

$$\eta_0^2 + 2\delta\sum_{l=1}^{2}\lambda_l - (\beta_1\beta_2 - \lambda_1\lambda_2) = -\omega^2 + 2\omega(\delta + q) - \delta^2. \tag{4.21}$$

Из условий $\lambda_1 \in (0, \beta_1)$, $\lambda_2 \in (\beta_1, \beta_2)$ можно вывести следующую оценку (см. [22, гл. 11, §5, п. 11.5.2, формула (5.24)]):

$$(\beta_1\beta_2 - \lambda_1\lambda_2) < \sum_{l=1}^{2}(\beta_l - \lambda_l)\biggl(\sum_{l=1}^{2}\lambda_l\biggr) = 2\delta\sum_{l=1}^{2}\lambda_l. \tag{4.22}$$

Из (4.22) следует положительность правой части в (4.21), следовательно, $\omega < \delta+q+(2\delta q+q^2)^{1/2}$. Отсюда $\mathrm{Re}\lambda_0 = \xi_0 < 2\delta+q+(2\delta q+q^2)^{1/2} \leqslant \widetilde{b}+\widetilde{q}+\widetilde{q}^{1/2}\bigl[\widetilde{b}+\widetilde{q}\bigr]^{1/2}$, и оценка сверху на $\mathrm{Re}\lambda_0$ получена.

Из оценки на $\mathrm{Re}\lambda_0$ выводится условие (4.13), достаточное для отсутствия невещественного собственного значения λ_0.

Далее, выразим из (4.20) $(\xi_0^2+\eta_0^2) = |\lambda_0|^2$ и преобразуем его с помощью (4.19). С использованием оценки (4.22) получим, что $|\lambda_0|^2 < 2\omega(q+4\delta)$. После простых оценок отсюда следует неравенство для $|\lambda_0|^2$. $\square$

Замечание 4.2. Из (4.14)-(4.15) следует, что $K_+ \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 2q$, если $\widetilde{A}^{-1} \in \mathfrak{S}_q(L_2(\Omega))$.

Следствием общих теорем А. С. Маркуса и В. И. Мацаева из [11,12] является следующее условное утверждение.

Теорема 4.3. *Справедливы утверждения*:

1. *Если собственные значения оператора $\widetilde{A}$ имеет степенную асимптотику, то спектр оператора $\mathcal{A}$ имеет ветвь собственных значений $\{\lambda_k^{(+\infty)}(\mathcal{A})\}_{k=1}^{+\infty}$ со следующей асимптотикой*:
$$\lambda_k^{(+\infty)}(\mathcal{A}) = \lambda_k(\widetilde{A})(1+o(1)), \quad k \to +\infty. \tag{4.23}$$
2. *Если оператор $B := g(\rho_1-\rho_2)\bigl(I+T^*\alpha\beta^{-1}T\bigr)^{-1/2}(\widetilde{A}^{1/2}V)(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2})\bigl(I+T^*\alpha\beta^{-1}T\bigr)^{-1/2}$, где $T := A^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2} \in \mathcal{L}(L_2(\Omega))$ (см. лемму 2.2), имеет степенную асимптотику собственных значений, то спектр оператора $\mathcal{A}$ имеет ветвь собственных значений $\{\lambda_k^{(0)}(\mathcal{A})\}_{k=1}^{+\infty}$ со следующей асимптотикой*:
$$\lambda_k^{(0)}(\mathcal{A}) = \lambda_k(B)(1+o(1)), \quad k \to +\infty. \tag{4.24}$$

Доказательство. Пучок $L(\lambda)$ (см. (4.2)) может быть записан в виде $L(\lambda) = I - \lambda\widetilde{A}^{-1} + F_1(\lambda)$, где $F_1(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Отсюда и из условий на оператор $\widetilde{A}$ следует формула (4.23).

Осуществим в спектральной задаче (4.2) замену спектрального параметра $\mu := \lambda^{-1}$. Получим

$$\begin{aligned}
L(\mu^{-1})z &:= \Bigl[I - \mu g(\rho_1-\rho_2)(\widetilde{A}^{1/2}V)(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}) - \mu^{-1}\widetilde{A}^{-1} + \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha(\beta-\mu^{-1})^{-1}\widetilde{A}^{-1/2}\Bigr]z = \\
&= \Bigl[I - \mu g(\rho_1-\rho_2)(\widetilde{A}^{1/2}V)(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}) - \mu^{-1}\widetilde{A}^{-1} + \widetilde{A}^{1/2}P_1\bigl[\alpha\beta^{-1} + \alpha\beta^{-1}(\mu\beta-1)^{-1}\bigr]\widetilde{A}^{-1/2}\Bigr]z = \\
&= \Bigl[\bigl(I+T^*\alpha\beta^{-1}T\bigr) - \mu g(\rho_1-\rho_2)(\widetilde{A}^{1/2}V)(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}) - \mu^{-1}\widetilde{A}^{-1} + \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha\beta^{-1}(\mu\beta-1)^{-1}\widetilde{A}^{-1/2}\Bigr]z = \\
&= \bigl(I+T^*\alpha\beta^{-1}T\bigr)^{1/2}\Bigl[I - \mu B + F_2(\mu)\Bigr]\bigl(I+T^*\alpha\beta^{-1}T\bigr)^{1/2}z = 0,
\end{aligned}$$

где $F_2(\mu) \to 0$ при $\mu \to \infty$. Отсюда и из условий на оператор $\widetilde{A}$ следует формула (4.24). $\square$

Замечание 4.3. Как следует из доказательства п. 2 в теореме 4.2, имеет место равенство $\sigma_{ess}(L(\lambda)) = \sigma_{ess}(L_0(\lambda))$, где $L_0(\lambda) := I + \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha(\beta-\lambda)^{-1}\widetilde{A}^{-1/2} = \widetilde{A}^{1/2}P_1\bigl(I+\alpha(\beta-\lambda)^{-1}\bigr)\widetilde{A}^{-1/2}$. По теореме о произведении фредгольмовых операторов (см. [20, гл. 17, § 3, теорема 3.1]), оператор $L_0(\lambda)$ фредгольмов в $L_2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда оператор $P_1\bigl(I+\alpha(\beta-\lambda)^{-1}\bigr)$ фредгольмов в $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$. Из леммы 1.2, с использованием обозначений из (2.14) и (3.2), получим, что для любого $(u_1;u_2) \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ имеет место представление

$$\begin{aligned}
P_1\bigl(I+\alpha(\beta-\lambda)^{-1}\bigr)(u_1;u_2) = \Bigl\{&\Bigl(\frac{m_1(\lambda)}{\mu_1} - \frac{\mu_1^{-1}m_1(\lambda)-\mu_2^{-1}m_2(\lambda)}{\mu_1}V_1\bigl(\mu_1^{-1}C_1+\mu_2^{-1}C_2\bigr)^{-1}\gamma_1\Bigr)u_1; \\
&\Bigl(\frac{m_2(\lambda)}{\mu_2} + \frac{\mu_1^{-1}m_1(\lambda)-\mu_2^{-1}m_2(\lambda)}{\mu_2}V_2\bigl(\mu_1^{-1}C_1+\mu_2^{-1}C_2\bigr)^{-1}\gamma_2\Bigr)u_2\Bigr\}.
\end{aligned}$$

Из этого представления видно, что если $\lambda = \alpha_1 + \beta_1$, т. е. $m_1(\lambda) = 0$, то рассматриваемый оператор не является фредгольмовым. Действительно, в этом случае ядро оператора содержит элементы вида $(u_1; 0)$, где $u_1 \in \operatorname{Ker}\gamma_1 = H_0^1(\Omega_1)$, а значит, бесконечномерно. Аналогично с точкой $\lambda = \alpha_2 + \beta_2$. Таким образом, $\{\alpha_l + \beta_l,\ l = 1,2\} \subset \sigma_{ess}(L(\lambda))$. Опираясь на последнее представление, можно предположить также, что рассматриваемый оператор не является фредгольмовым в точках, в которых $m_1(\lambda) + m_2(\lambda) = 0$. Причиной этого является то обстоятельство, что, вероятно, оператор $C_1 - C_2$ нефредгольмов как действующий из $H_\Gamma^{-1/2}$ в $\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}$.

4.3. Теорема о базисности системы корневых элементов оператора $\mathcal{A}$. В этом пункте будем предполагать, основываясь на результатах для спектральной задачи в прямоугольной области, что спектр оператора $\mathcal{A}$ имеет не более, чем счетное множество точек сгущения.

Определение 4.4. Назовем систему $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ *базисом Рисса* пространства $\mathcal{H}$, если $\xi_k = \mathcal{T}\zeta_k$, где $\mathcal{T}, \mathcal{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, а $\{\zeta_k\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированный базис пространства $\mathcal{H}$. Если $\mathcal{T} = \mathcal{I} + \mathcal{K}$, где $\mathcal{K} \in \mathfrak{S}_p$, то система $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ называется *p-базисом $\mathcal{H}$*.

Определение 4.5. Назовем базис $\mathcal{J}$-пространства $\mathcal{H}$ *почти $\mathcal{J}$-ортонормированным*, если его можно представить как объединение конечного подмножества элементов и $\mathcal{J}$-ортонормированного подмножества, причем эти подмножества $\mathcal{J}$-ортогональны друг другу.

Обозначим через $\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A})$ корневой линеал оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ $(\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A}))$. Введем также следующие обозначения: $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) := \overline{\operatorname{sp}\{\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) |\ \lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})\}}$, $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) := \overline{\operatorname{sp}\{\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda) |\ \lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})\}}$. Будем писать $\lambda \in s(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}$, если $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ вырождено, т. е. если существует $\xi_0 \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ такое, что $[\xi_0, \xi] = 0$ для любого $\xi \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$.

Основываясь на теореме Азизова—Лангера (см. [1, гл. 4, § 2, теорема 2.12]), установим следующую теорему в предположении, что спектр оператора $\mathcal{A}$ не более, чем счетен.

Теорема 4.4. *Имеют место следующие утверждения*:

1. $\operatorname{codim} \mathfrak{F}(\mathcal{A}) \leqslant \operatorname{codim} \mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) < \infty$.
2. $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{H} \iff \operatorname{sp}\{\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) | \lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{A}) \cap (\gamma_1, \gamma_2)\}$ — *невырожденное подпространство, где* γ_1, γ_2 — *числа, определенные в п.* 3 *теоремы* 4.2 (*см.* (4.12)).
3. $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H} \iff \mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ *при* $\lambda \neq \overline{\lambda}$ *и* $s(\mathcal{A}) = \varnothing$. *Если* $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$, *то* $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$.
4. *Если* $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$ (*соответственно,* $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$), *то в* $\mathcal{H}$ *существует почти* $\mathcal{J}$*-ортонормированный базис Рисса, составленный из собственных* (*соответственно, корневых*) *элементов оператора* $\mathcal{A}$. *Если* $\widetilde{A}^{-1} \in \mathfrak{S}_q(L_2(\Omega))$, *то эти базисы будут* p*-базисами при* $p > 2q$. *Если* $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$, *то данный базис из собственных элементов будет* $\mathcal{J}$*-ортонормированным.*

Доказательство. В теореме 4.2 установлено, что $(\mathcal{A} + a)^{-1} \in (H)$. По предположению спектр оператора $(\mathcal{A} + a)^{-1}$ имеет не более, чем счетное множество точек сгущения. Таким образом, оператор $(\mathcal{A} + a)^{-1}$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Азизова—Лангера. Применим эту теорему к оператору $(\mathcal{A} + a)^{-1}$.

1. Из равенств $\mathfrak{F}(\mathcal{A}+a) = \mathfrak{F}((\mathcal{A}+a)^{-1})$, $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}+a) = \mathfrak{F}_0((\mathcal{A}+a)^{-1})$ следует первое утверждение.

2. $\mathfrak{F}((\mathcal{A} + a)^{-1}) = \mathcal{H} \iff \operatorname{sp}\{\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}((\mathcal{A}+a)^{-1}) | \lambda^{-1} \in s((\mathcal{A}+a)^{-1})\}$ — невырожденное подпространство. Из [1, гл. 4, § 3, замечание 3.8] следует, что при доказательстве равенства $\mathfrak{F}((\mathcal{A} + a)^{-1}) = \mathcal{H}$ невырожденность $\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}((\mathcal{A} + a)^{-1})$ нужно проверять только для тех $\lambda^{-1} \in s((\mathcal{A}+a)^{-1})$, которые являются точками сгущения спектра оператора $(\mathcal{A}+a)^{-1}$. Из равенства $\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}((\mathcal{A} + a)^{-1}) = \mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A} + a)$ следует, что нужно проверять невырожденность $\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A})$ для $\lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{A}) \cap s(\mathcal{A})$.

Выясним расположение множества $s(\mathcal{A})$. Пусть $\lambda_0 = \overline{\lambda}_0 \in \sigma_p(\mathcal{A})$, $\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{G}) = \{0, \beta_1, \beta_2\}$ и $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_0)$ вырождено. В силу теоремы 4.1 это эквивалентно тому, что в $\operatorname{Ker}L(\lambda_0)$ существует такой z_0, что элемент $\xi_0 = (\widetilde{A}^{-1/2} z_0; (\mathcal{G} - \lambda_0)^{-1}\mathcal{Q}z_0)^\tau$ $\mathcal{J}$-ортогонален всем элементам вида $\xi = (\widetilde{A}^{-1/2} z; (\mathcal{G} - \lambda_0)^{-1}\mathcal{Q}z)^\tau$, где $z \in \operatorname{Ker}L(\lambda_0)$, т. е. $[\xi_0, \xi] = 0$. Используя введенные ранее обозначения, последнее уравнение можно привести к виду $\big(L'(\lambda_0)z_0, z\big) = 0$. В частности, имеем два соотношения: $\big(L(\lambda_0)z_0, z_0\big) = 0$, $\big(L'(\lambda_0)z_0, z_0\big) = 0$. Из этих соотношений следует, что λ_0 есть кратный корень уравнения (4.16). Уравнение (4.16) имеет два действительных корня, которые мы обозначим через λ_l $(l = 1,2)$ $(\lambda_1 \in (0, \beta_1),\ \lambda_2 \in (\beta_1, \beta_2)$ — здесь мы снова считаем для определенности, что $\beta_1 < \beta_2)$, и действительный двукратный корень λ_0. Положим $\xi_0 := \lambda_0$, $\eta_0 := 0$ и повторим рассуждения п. 3 теоремы 4.2. В результате получим, что $\lambda_0 \in (\gamma_1, \gamma_2)$ (см. (4.12)).

Положим $\lambda_0 = 0$ и предположим, что $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ вырождено, т. е. существует такое $\xi_0 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, что $[\xi_0, \xi] = 0$ для любого $\xi \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. В частности, $[\xi_0, \xi_0] = 0$. Тогда (см. (2.16))

$$\begin{cases} \widetilde{A}^{1/2}\Big[\widetilde{A}^{1/2}u_0 + \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\psi_0 + \big(g(\rho_1-\rho_2)\big)^{1/2}\widetilde{A}^{-1/2}V\eta_0\Big] = 0, \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}\big(\widetilde{A}^{1/2}u_0\big) + \beta\psi_0 = 0, \\ -\big(g(\rho_1-\rho_2)\big)^{1/2}\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}\big(\widetilde{A}^{1/2}u_0\big) = 0, \end{cases}$$

$$[\xi_0, \xi_0] = \|u_0\|^2 - \|\psi_0\|^2 - \|\eta_0\|^2 = 0.$$

Умножим первое уравнение системы скалярно на u_0 и преобразуем его с помощью оставшихся соотношений. Получим

$$\|\widetilde{A}^{1/2}u_0\|^2 + \big(\beta\psi_0, \psi_0\big) = 0, \quad \|u_0\|^2 - \|\psi_0\|^2 = \|\eta_0\|^2.$$

Отсюда следует, что $\xi_0 = 0$ и, значит, $0 \notin s(\mathcal{A})$.

Пусть $\beta_q \notin (\gamma_1, \gamma_2)$, тогда $\beta_q \leqslant \gamma_1$, поскольку $\beta_q \leqslant \max\{\beta_1, \beta_2\} < \gamma_2$. Допустим, что $\beta_q \leqslant \gamma_1$ и $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \beta_q)$ вырождено, т. е. существует такое $\xi_0 \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \beta_q)$, что $[\xi_0, \xi] = 0$ для любого $\xi \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \beta_q)$. В частности, $[\xi_0, \xi_0] = 0$. Тогда

$$\begin{cases} \widetilde{A}^{1/2}\Big[\widetilde{A}^{1/2}u_0 + \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\psi_0 + \big(g(\rho_1-\rho_2)\big)^{1/2}\widetilde{A}^{-1/2}V\eta_0\Big] = \beta_q u_0, \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}\big(\widetilde{A}^{1/2}u_0\big) + \beta\psi_0 = \beta_q\psi_0, \\ -\big(g(\rho_1-\rho_2)\big)^{1/2}\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}\big(\widetilde{A}^{1/2}u_0\big) = \beta_q\eta_0, \end{cases}$$

$$[\xi_0, \xi_0] = \|u_0\|^2 - \|\psi_0\|^2 - \|\eta_0\|^2 = 0.$$

Умножим здесь первое уравнение скалярно на u_0 и преобразуем его с помощью оставшихся соотношений. Получим

$$\|\widetilde{A}^{1/2}u_0\|^2 + \big(\beta\psi_0, \psi_0\big) - 2\beta_q\|u_0\|^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $\|z_0\|^2 < 2\beta_q\|\widetilde{A}^{-1/2}z_0\|^2$, где $z_0 := \widetilde{A}^{1/2}u_0$, а значит $\beta_q > (2\|\widetilde{A}^{-1/2}\|)^{-2} = \gamma_1$ (см. (2.16)), что противоречит предположению $\beta_q \leqslant \gamma_1$.

Таким образом, $s(\mathcal{A}) \subset (\gamma_1, \gamma_2)$, и второе утверждение доказано.

3. Первая часть третьего утверждения — это переформулировка соответствующего утверждения используемой теоремы Азизова—Лангера. Если $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$, то $s(\mathcal{A}) = \varnothing$, и оператор $\mathcal{A}$ не имеет невещественных собственных значений (см. (4.12)). Следовательно, $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$.

4. Первая часть четвертого утверждения — это переформулировка соответствующего утверждения используемой теоремы. Если $\widetilde{A}^{-1} \in \mathfrak{S}_q(L_2(\Omega))$, то $K_+ \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 2q$ (см. замечание 4.2), и указанные базисы будут p-базисами при $p > 2q$. Наконец, если $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$, то, как отмечено выше, оператор $\mathcal{A}$ не имеет невещественных собственных значений, и соответствующий p-базис при $p > 2q$ в $\mathcal{H}$, составленный из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$, будет $\mathcal{J}$-ортонормированным. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
2. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Выща школа, 1989.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
4. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. — Симферополь: ООО «Форма», 2016.
5. *Копачевский Н. Д.* К проблеме малых движений системы из двух вязкоупругих жидкостей в неподвижном сосуде// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2018. — *64*, № 3. — С. 547–572.
6. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
7. *Крейн С. Г.* О колебаниях вязкой жидкости в сосуде// Докл. АН СССР. — 1964. — *159*, № 2. — С. 262–265.
8. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
9. *Крейн С. Г., Лаптев Г. И.* К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде// Функц. анализ и его прилож. — 1968. — *2*, № 1. — С. 40–50.
10. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: «Штиинца», 1986.

11. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теоремы о сравнении спектров линейных операторов и спектральные асимптотики// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1982. — *45.* — С. 133–181.
12. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теорема о сравнении спектров и спектральная асимптотика для пучка М. В. Келдыша// Мат. сб. — 1984. — *123*, № 3. — С. 391–406.
13. *Милославский А. И.* Спектральный анализ малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом контейнере. — Киев: Ин-т мат. НАН Украины, 1989. — Деп. рукопись № 1221.
14. *Милославский А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом сосуде// Усп. мат. наук. — 1989. — *44*, № 4.
15. *Милославский А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой наследственной среды// Докл. АН СССР. — 1989. — *309*, № 3. — С. 532–536.
16. *Azizov T. Ya., Kopachevskii N. D., Orlova L. D.* Evolution and spectral problems related to small motions of viscoelastic fluid// Am. Math. Soc. Transl. — 2000. — *199.* — С. 1–24.
17. *Birman M. Sh., Solomyak M. Z.* Asymptotic behavior of the spectrum of differential equations// J. Soviet Math. — 1979. — *12*, № 3. — С. 247–283.
18. *Engel K.-J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. — New York: Springer-Verlag, 2000.
19. *Gagliardo E.* Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1957. — *27.* — С. 284–305.
20. *Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M. A.* Classes of Linear Operators. Vol. 1. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1990.
21. *Helton J. W.* Unitary operators on a space with an indefinite inner product// J. Funct. Anal. — 1970. — *6*, № 3. — С. 412–440.
22. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-Adjoint Problems for Viscous Fluids. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2003.
23. *Miloslavsky A. I.* Stability of certain classes of evolution equations// Sib. Math. J. — 1985. — *26*, № 5. — С. 723–735.
24. *Miloslavskii A. I.* Stability of a viscoelastic isotropic medium// Soviet Phys. Dokl. — 1988. — *33.* — С. 300.

Д. А. Закора
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com

Н. Д. Копачевский
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: kopachevsky@list.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-182-208 UDC 517.958

To the Problem on Small Oscillations of a System of Two Viscoelastic Fluids Filling Immovable Vessel: Model Problem

© 2020 **D. A. Zakora,** $\boxed{\text{N. D. Kopachevsky}}$

Abstract. In this paper, we study the scalar conjugation problem, which models the problem of small oscillations of two viscoelastic fluids filling a fixed vessel. An initial-boundary value problem is investigated and a theorem on its unique solvability on the positive semiaxis is proven with semigroup theory methods. The spectral problem that arises in this case for normal oscillations of the system is studied by the methods of the spectral theory of operator functions (operator pencils). The resulting operator pencil generalizes both the well-known S. G. Kreyn's operator pencil (oscillations of a viscous fluid in an open vessel) and the pencil arising in the problem of small motions of a viscoelastic fluid in a partially filled vessel. An example of a two-dimensional problem allowing separation of variables is considered, all points of the essential spectrum and branches of eigenvalues are found. Based on this two-dimensional problem, a hypothesis on the structure of the essential spectrum in the scalar conjugation problem is formulated and a theorem on the multiple basis property of the system of root elements of the main operator pencil is proved.

REFERENCES

1. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Osnovy teorii lineynykh operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy* [Fundamentals of the Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metric], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
2. J. Goldstein, *Polugruppy lineynykh operatorov i ikh prilozheniya* [Semigroups of Linear Operators and Applications], Vyshcha shkola, Kiev, 1989 (Russian translation).
3. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
4. N. D. Kopachevsky, *Abstraktnaya formula Grina i nekotorye ee prilozheniya* [Abstract Green's Formula and Applications], OOO «Forma», Simferopol', 2016 (in Russian).
5. N. D. Kopachevsky, "K probleme malykh dvizheniy sistemy iz dvukh vyazkouprugikh zhidkostey v nepodvizhnom sosude" [To the problem on small motions of the system of two viscoelastic fluids in a fixed vessel], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2018, **64**, No. 3, 547–572 (in Russian).
6. N. D. Kopachevsky, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike. Evolyutsionnye i spektral'nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamic. Evolutional and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
7. C. G. Kreyn, "O kolebaniyakh vyazkoy zhidkosti v sosude" [On oscillations of a viscous fluid in a vessel], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1964, **159**, No. 2, 262–265 (in Russian).
8. C. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in a Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
9. C. G. Kreyn and G. I. Laptev, "K zadache o dvizhenii vyazkoy zhidkosti v otkrytom sosude" [To the problem on motion of a viscous liquid in an open vessel], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1968, **2**, No. 1, 40–50 (in Russian).
10. A. S. Markus, *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu polinomial'nykh operatornykh puchkov* [Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils], «Shtiintsa», Kishinev, 1986 (in Russian).
11. A. S. Markus and V. I. Matsaev, "Teoremy o sravnenii spektrov lineynykh operatorov i spektral'nye asimptotiki" [Comparison theorems for spectra of linear operators and spectral asymptotics], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1982, **45**, 133–181 (in Russian).

12. A. S. Markus and V. I. Matsaev, “Teorema o sravnenii spektrov i spektral’naya asimptotika dlya puchka M. V. Keldysha” [Theorem on spectra comparison and spectral asymptotics for the Keldysh pencil], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1984, **123**, No. 3, 391–406 (in Russian).
13. A. I. Miloslavskiy, “Spektral’nyy analiz malykh kolebaniy vyazkouprugoy zhidkosti v otkrytom konteynere” [Spectral analysis of small oscillations of viscoelastic fluid in open container], Univ. Math. NAS Ukraine, Kiev, 1989, Preprint No. 1221 (in Russian).
14. A. I. Miloslavskiy, “Spektr malykh kolebaniy vyazkouprugoy zhidkosti v otkrytom sosude” [Spectrum of small oscillation of viscoelastic fluid in open vessel], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1989, **44**, No. 4 (in Russian).
15. A. I. Miloslavskiy, “Spektr malykh kolebaniy vyazkouprugoy nasledstvennoy sredy” [Spectrum of small oscillations of viscoelastic inheritance medium], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1989, **309**, No. 3, 532–536 (in Russian).
16. T. Ya. Azizov, N. D. Kopachevskii, and L. D. Orlova, “Evolution and spectral problems related to small motions of viscoelastic fluid,” *Am. Math. Soc. Transl.*, 2000, **199**, 1–24.
17. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, “Asymptotic behavior of the spectrum of differential equations,” *J. Soviet Math.*, 1979, **12**, No. 3, 247–283.
18. K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer-Verlag, New York, 2000.
19. E. Gagliardo, “Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili,” *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1957, **27**, 284–305.
20. I. Gohberg, S. Goldberg, and M. A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators. Vol. 1*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1990.
21. J. W. Helton, “Unitary operators on a space with an indefinite inner product,” *J. Funct. Anal.*, 1970, **6**, No. 3, 412–440.
22. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-Adjoint Problems for Viscous Fluids*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2003.
23. A. I. Miloslavsky, “Stability of certain classes of evolution equations,” *Sib. Math. J.*, 1985, **26**, No. 5, 723–735.
24. A. I. Miloslavskii, “Stability of a viscoelastic isotropic medium,” *Soviet Phys. Dokl.*, 1988, **33**, 300.

D. A. Zakora
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com

N. D. Kopachevsky
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: kopachevsky@list.ru