Современная математика. Фундаментальные направления. Том 71, № 2 (2025). С. 253–266
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.95
DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-253-266
EDN: MXJTII

СИНГУЛЯРНЫЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ КИПРИЯНОВА—КАТРАХОВА

Л. Н. Ляхов[1,2,3], **Ю. Н. Булатов**[2], **С. А. Рощупкин**[2]

[1] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
[2] *Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия*
[3] *Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия*

Аннотация. Сингулярные псевдодифференциальные операторы, созданные на базе смешанного преобразования Фурье—Бесселя, принято называть сингулярными псевдодифференциальными операторами (СПДО) Киприянова. В работе приведен обзор трех видов таких операторов. СПДО Киприянова приспособлены для работы с сингулярными операторами Бесселя $B_{\gamma_i} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \dfrac{\gamma_i}{x_i}\,\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $\gamma_i > -1$. Основное внимание в работе уделено двум модификациям, возникшим на базе «четных $\mathbb{J}$-преобразований Бесселя» (т. е. при $\gamma \in (-1,0)$) и «четных-нечетных $\mathbb{J}$-преобразований Бесселя—Киприянова—Катрахова». Последние введены для исследования дифференциальных уравнений с сингулярными дифференциальными операторами $\dfrac{\partial}{\partial x_i} B_{\gamma_i}$ с отрицательным параметром оператора Бесселя $\gamma_i \in (-1,0)$.

Ключевые слова: сингулярные псевдодифференциальные операторы, операторы Киприянова, операторы Киприянова—Катрахова, преобразование Фурье—Бесселя.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00387).

Для цитирования: *Л. Н. Ляхов, Ю. Н. Булатов, С. А. Рощупкин.* Сингулярные псевдодифференциальные операторы Киприянова—Катрахова// Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. **71**, № 2. С. 253–266. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-253-266`

Посвящается 100-летию со дня рождения
Ивана Александровича Киприянова
и 75-летию со дня рождения
Валерия Вячеславовича Катрахова

1. Введение

j-функцией Бесселя (Клиффорда) будем называть функцию

$$j_\nu(t) = 2^\nu\,\Gamma(\nu+1)\,\frac{J_\nu(t)}{t^\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1)}{(-1)^k\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}, \quad \nu = \frac{\gamma-1}{2}, \quad \gamma > 0.$$

Эта функция является одним из линейно независимых решений сингулярного уравнения Бесселя (см. [6]):

$$B_\gamma u + u = 0, \quad B_\gamma = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t}\,\frac{\partial}{\partial t}, \quad \gamma > 0.$$

Пусть $x = (x', x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}_n$, $\mathbb{R}_n^+ = \{x : x_n > 0\}$. Смешанные прямое и обратное преобразования Фурье—Бесселя определяются выражениями

$$F_B[f](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} e^{-i\langle x', \xi'\rangle}\; j_\nu(x_n\xi_n)\; f(x)\; x_n^\gamma\; dx,$$

$$F_B^{-1}[f](\xi) = C(\nu) \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} e^{-i\langle x', \xi'\rangle}\; j_\nu(x_n\xi_n)\; f(x)\; x_n^\gamma\; dx,$$

где

$$\nu = \frac{\gamma - 1}{2}, \quad C(\nu) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1} 2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)} = \frac{1}{(2\pi)^{n-1} 2^{\gamma-1}\Gamma^2\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)} = C_\gamma.$$

Изучение сингулярных псевдодифференциальных операторов на основе смешанного преобразования Фурье—Бесселя было инициировано И. А. Киприяновым в 1974 году. Формально этот класс псевдодифференциальных операторов построен в [5] по символу $a(x, \xi)$ следующим представлением:

$$A(x, D) = F_B^{-1}\Big[a(x,\xi) F_B[u](\xi)\Big](x) = C_\gamma \int\limits_{\mathbb{R}_n^+}\int\limits_{\mathbb{R}_n^+} e^{-i(x'-y', \xi')}\, T_{x_n}^{y_n}\, j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_n\xi_n)\, a(x,\xi)\, u(y)\, y_n^\gamma\, dy\, \xi_n^\gamma\, d\xi.$$

Это выражение будем называть *сингулярным j-псевдодифференциальным оператором Киприянова*. Также будем использовать сокращение — j-ПДО. Здесь $T_{x_n}^{y_n}$ — обобщенный сдвиг Пуассона[1]

$$T_{x_n}^{y_n}\; f(x', x_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f\left(x', \sqrt{{x_n}^2 + {y_n}^2 - 2x_n y_n \cos\alpha}\right) \sin^{2\nu}\alpha\; d\alpha. \tag{1.1}$$

В [6] для j-функции Бесселя доказана следующая теорема сложения:

$$j_\nu(\xi)\; j_\nu(t) = T_\xi^t\; j_\nu(\xi),$$

где оператор T_ξ^t определен формулой (1.1).

Поскольку в образах Фурье—Бесселя имеет место

$$B_{\gamma, x_n} u(x', x_n) = F_B^{-1}\left[-\xi^2\, F_B[u](x', \xi_n)\right](x),$$

то введенный Киприяновым класс j-ПДО приспособлен для исследования дифференциальных уравнений, содержащих сингулярный дифференциальный оператор Бесселя $B_{\gamma,x_n} = \dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{\gamma}{x_n}\dfrac{d}{dx}$, $\gamma > 0$.

Из представления j-функции Бесселя видим, что эта функция четная, поэтому прямое и обратное j-преобразования Бесселя — четные функции. Далее преобразования F_B и F_B^{-1} будем называть *четными преобразованиями Фурье—Бесселя.*

Через $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ обозначим подпространство пространства основных функций Л. Шварца, состоящее из четных по переменной x_n функций.

Теория j-ПДО и применение этой теории к построению регуляризаторов граничных задач для B-эллиптических уравнений было развито Л. Н. Ляховым в его кандидатской диссертации [7].

[1] Впервые название «обобщенный сдвиг» для представленного ниже интегрального оператора появилось в работах Ж. Дельсарта и А. Ванштейна, поэтому часто называется сдвигом Ванштейна—Дельсарта. В работе [6] «обобщенный сдвиг» применен для определения решения задачи Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу, которое названо формулой Пуассона.

Однако было выяснено, что используемое «четное» преобразование Фурье—Бесселя не дает возможности построить алгебру таких операторов, как это сделано для классических псевдодифференциальных операторов, построенных на основе преобразования Фурье. Например, применение оператора Бесселя к произведению функций определено формулой

$$B_{x_n}(u\,v) = B_{x_n}u\ v + u\ B_{x_n}v + 2\,u'_{x_n}\,v'_{x_n},$$

в которой производные первого порядка по x_n оказываются нечетными функциями и не могут быть определены в рамках четного j-преобразования Бесселя. Поэтому регуляризаторы граничных задач построены для сингулярных дифференциальных уравнений главного типа, т. е. для линейных дифференциальных уравнений, в которых каждое слагаемое представлено дифференциальным оператором фиксированного порядка m. Было установлено, что невозможно в рамках четного j-преобразования Бесселя построить алгебру таких сингулярных j-ПДО истинного порядка $-\infty$.

Эта «неадекватность» введенных четных j-ПДО исправлена в работе И. А. Киприянова и В. В. Катрахова [4] введением «нечетного» j-преобразования Бесселя, называемого сейчас интегральным *преобразованием Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова.* Ядром служила «четная+нечетная» функция

$$k_\nu^{\pm}(t) = j_\nu(t) \pm i\frac{t}{2(\nu+1)}\,j_{\nu+1}(t), \quad \nu = \frac{\gamma-1}{2},\ \gamma > 0.$$

Введенное преобразование позволило исследовать решения уравнений, содержащих сингулярные дифференциальные операторы нечетного порядка вида

$$(D_B)^{2m+1}_{x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n}B^m_{\gamma,x_n}.$$

Алгебра многомерных сингулярных псевдодифференциальных операторов, где преобразование Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова применялось только по одной переменной, построена В. В. Катраховым и Л. Н. Ляховым уже в 2011 году в работе [2].

Для многих весовых переменных теория j-ПДО Киприянова—Катрахова построена в совместных работах Л. Н. Ляхова и С. А. Рощупкина [10, 14, 18].

2. Об операторах Бесселя с отрицательным параметром

Исследовать уравнения, содержащие оператор Бесселя с отрицательным параметром, было предложено И. А. Киприяновым в 1980-х гг. на одном из научных семинаров в ВГУ. Такого рода исследования начаты были В. В. Катраховым, но публикаций по этой теме не было. В. В. Катрахов в начале 2000-х годов отметил, что требуется новый математический аппарат и продолжение исследований на эту тему оставлено «на потом». Этот математический аппарат возник в работах [8, 9, 11–13] для Δ_B-операторов Киприянова (название из работы [11])

$$\Delta_{B_{-\gamma}} = \sum_{i=1}^{n} B_{-\gamma_i}, \quad B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad -\gamma = (-\gamma_1, \ldots, -\gamma_n), \quad -\gamma_i \in (-1, 0). \tag{2.1}$$

Представление оператора $\Delta_{B_{-\gamma}}$ в виде оператора Бельтрами на сфере позволяет считать сингулярный оператор Бесселя в качестве среднего между операторами Лапласа в $\mathbb{R}_n$ и оператором Лапласа в $\mathbb{R}_{n+1}$ (это замечено в [20], доказано в [12]). Отсюда повышенный интерес к исследованию сингулярных дифференциальных уравнений, инициированных И. А. Киприяновым еще в 1980 году.

Но принципиальной особенностью новых исследований оказалась *теорема сложения* функций Бесселя, удовлетворяющих сингулярному дифференциальному уравнению Бесселя с отрицательным параметром. Эта теорема сложения представлена через посредство интегрального оператора, который не является «оператором обобщенного сдвига» Б. М. Левитана, но при этом коммутирует с $\Delta_{B_{-\gamma}}$-оператором Киприянова (2.1).

Сингулярное дифференциальное уравнение Бесселя

$$B_{-\gamma}\,u(x) + u(x) = 0, \quad -1 < -\gamma < 0$$

имеет следующий набор линейно независимых решений:

$$u_1 = \mathbb{J}_{-\mu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1-\mu)}{m!\,\Gamma(m+1-\mu)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m} = \Gamma(1-\mu)\, 2^{-\mu}\, t^{\mu} J_{-\mu}(t) = t^{2\mu} j_{-\mu}, \tag{2.2}$$

$$u_2 = \mathbb{J}_{\mu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\ \Gamma(1+\mu)}{m!\,\Gamma(m+1+\mu)}\, \frac{t^{2(m+\mu)}}{2^{2m}} = \Gamma(1+\mu)\, 2^{\mu}\, t^{\mu}\ J_{\mu}(t) = t^{2\mu} j_{\mu}. \tag{2.3}$$

где $J_{\mp\mu}$ — функции Бесселя первого рода и $j_{\mp\mu}$ — j-функции Бесселя. Можно заметить, что $\mathbb{J}$-функции Бесселя удовлетворяют условиям

$$\lim_{x\to 0} x^{-2\mu}\ \mathbb{J}_{\mu}(x) = 1, \qquad \mathbb{J}_{-\mu}(0) = 1.$$

Из (2.3) видна связь функций j_μ и $\mathbb{J}_\mu$ положительного индекса, откуда аналогично теореме сложения Б. М. Левитана (для j-функций Бесселя) вытекает теорема сложения для $\mathbb{J}$-функций Бесселя:

$$\mathbb{J}_{\mu}(x)\, \mathbb{J}_{\mu}(y) = \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_{\mu}(x).$$

Оператор *обобщенного* $\mathbb{T}$*-псевдосдвига* имеет следующий вид:

$$\mathbb{T}_x^y f(x) = \int_0^{\pi} f\left(x \overset{\alpha}{\to} y\right) \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)} \frac{(x\,y)^{\gamma+1}}{(x_i \overset{\alpha}{\to} y\,)^{\gamma+1}}\ (\sin\alpha)^{\gamma+1}\ d\alpha, \tag{2.4}$$

где $(x \overset{\alpha}{\to} y\,) = \sqrt{x^2+y^2-2x\,y\cos\alpha}$. Принципиально важно отметить, что $\mathbb{T}$-псевдосдвиг не принадлежит классу обобщенных сдвигов Левитана (т. к. $\mathbb{T}^0 f(x) \neq f(x)$, $\mathbb{T}_x^y\ 1 \neq 1$).

Решение (2.2) более востребовано в спектральной теории сингулярных дифференциальных уравнений, что продемонстрировано в работах [15, 16]. Для построения теории соответствующих сингулярных псевдодифференциальных операторов подходит только $\mathbb{J}_\mu$-функция Бесселя (2.3), которая имеет положительный порядок $\mu = \dfrac{\gamma+1}{2}$, $\gamma > 0$.

В [8] доказана обратимость на четных функциях $(x^2)^{-\gamma/2} f(x) \in L_2(\mathbb{R}_1^+)$ следующих интегральных преобразований:

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{J}_{\mu}(\xi\, y)\, f(y)\, y^{-\gamma}\, dy, \tag{2.5}$$

$$\left(\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}\right)^{-1}[f](x) = f(x) = C(\mu) \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{J}_{\mu}(\xi\, x)\, \widehat{f}(\xi)\, \xi^{-\gamma}\, d\xi, \quad C(\mu) = \frac{1}{2^{2\mu}\,\Gamma^2(\mu+1)}, \quad \mu = \frac{\gamma+1}{2}, \tag{2.6}$$

которые в этой работе названы соответственно *прямым и обратным* $\mathbb{J}$*-преобразованиями Бесселя.*

Многомерное $\mathbb{J}$-преобразование Бесселя имеет своим ядром произведение $\mathbb{J}_\mu$-функций Бесселя:

$$\mathbb{J}_{\mu}(x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n^+,$$

где $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — мультииндекс, каждая координата которого связана с параметром $-\gamma_i$ сингулярного дифференциального оператора Бесселя $B_{-\gamma_i}$ равенством $\mu_i = \dfrac{\gamma_i+1}{2}$, $\gamma_i \in (0,1)$, $\mu_i \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$, $i = \overline{1,n}$.

Функцию, определенную на полуоси $x_n > 0$, будем называть *четной по Киприянову*, если возможно ее четное продолжение на отрицательную полуось с сохранением класса своей принадлежности.

Введем весовую билинейную форму следующего вида:

$$(u,v)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_n^+} u(x)\ v(x)\ x^{-\gamma} dx, \qquad x^{-\gamma} = \prod_i\ x_i^{-\gamma_i}, \quad -\gamma_i \in (-1, 0). \tag{2.7}$$

Класс основных функций обозначим символом $S_{ev,-\gamma} = S_{ev,-\gamma}(\mathbb{R}_n^+)$. В этот класс входят два множества функций. К первому из них относятся функции из $S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ такие, что $x^{-\gamma}\,\varphi \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$. Ко второму множеству отнесем производные первого порядка от этих функций. Ясно, что

$$\forall\varphi \in S_{ev} \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i\, \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} \in S_{ev,-\gamma}(\mathbb{R}_n^+) \qquad (a_i \in \mathbb{R}_1).$$

Топология в $S_{ev,-\gamma}$ определяется системой норм

$$|\langle u\rangle|_N = \sup\left|(1+x)^k\, D^{\alpha}_{B_{-\gamma}}\, u(x)\right|,$$

где верхняя грань берется по всем $x \in \overline{\mathbb{R}_n^+}$ и всем k и α таким, что $k+\alpha \leqslant \mathbb{N}$.

Пространство, двойственное к $S_{ev,-\gamma}$ в смысле билинейной формы (2.7), будем называть *распределениями Киприянова* и обозначать $S'_{ev,-\gamma}$. Обобщенные D_B^{α}-производные распределений Киприянова понимаются в следующем смысле:

$$(D_B^{\alpha} u, \varphi(x))_{-\gamma} = (-1)^{|\alpha|}\ (u,\ D_B^{\alpha}\varphi(x))_{-\gamma}.$$

Ясно, что регулярными распределениями Киприянова могут быть как четные, так и нечетные (в смысле Киприянова) функции.

2.1. Теорема сложения Б. М. Левитана для ядер многомерного $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя. Из теоремы сложения для $\mathbb{J}$-функций Бесселя (одного переменного) вытекает теорема сложения для ядер многомерного $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя:

$$\mathbb{J}_\mu(x)\,\mathbb{J}_\mu(y) = \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x).$$

Здесь оператор *обобщенного* $\mathbb{T}$*-псевдосдвига* имеет следующий вид:

$$\mathbb{T}_x^y f(x,t) = \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi f\left(x \overset{\alpha}{\to} y, t\right) \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i+2}{2}\right)} \frac{(x_i\, y_i)^{\gamma_i+1}}{(x_i \overset{\alpha_i}{\to} y_i\,)^{\gamma_i+1}}\ (\sin\alpha_i)^{\gamma_i+1}\ d\alpha_i, \tag{2.8}$$

где

$$(x \overset{\alpha}{\to} y\,) = (\ldots, x_i \overset{\alpha}{\to} y_i, \ldots) = (\ldots, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i\, y_i \cos\alpha_i}, \ldots).$$

Отметим, что далее будет указан только верхний индекс в левой части равенства (2.8), если переменная нижнего индекса полностью совпадает с аргументом функции.

Весовая билинейная форма (2.7) порождает весовое функциональное пространство

$$L_2^{-\gamma} = \{u:\ \|u\|_{L_2^{-\gamma}} = \sqrt{(u,u)_{-\gamma}} < \infty\}.$$

Приведем необходимые нам свойства $\mathbb{T}$-псевдосдвига (доказательства приведены в [8]).

Свойство 1. *Эрмитовость* $\mathbb{T}$*-псевдосдвига в* $L_2^{-\gamma}$*: если f и g — функции, суммируемые с весом $x^{-\gamma}$, то*

$$(\mathbb{T}^y\, f,\, g)_{-\gamma} = (f,\, \mathbb{T}^y\, g)_{-\gamma}\,.$$

Свойство 2. *Коммутируемость с оператором $\Delta_{B_{-\gamma}}$: если $u(x)$ — суммируемая с весом $x^{-\gamma}$, дважды непрерывно дифференцируемая и четная по Киприянову функция, то*

$$\mathbb{T}^y \Delta_{B_{-\gamma},\,x} u(x) = \Delta_{B_{-\gamma},\,x} \mathbb{T}^y u(x) = \Delta_{B_{-\gamma},\,y} \mathbb{T}^y u(x).$$

Свойство 3. *Переместительность и ассоциативность* $\mathbb{T}$*-псевдосдвига: если функция f представлена равномерно сходящимся рядом Фурье по $\mathbb{J}$-функциям Бесселя, то*

$$\mathbb{T}_x^y \mathbb{T}_x^z f(x) = \mathbb{T}_x^z \mathbb{T}_x^y f(x), \quad \mathbb{T}_y^z \mathbb{T}_x^y f(x) = \mathbb{T}_x^z \mathbb{T}_x^y f(x).$$

2.2. Рекуррентное соотношение для производных $\mathbb{J}$-функций Бесселя.

Лемма 2.1. *Пусть* $2\mu_i{=}\gamma_i{+}1$, $-\gamma_i{\in}(-1,0)$. *Имеют место следующие формулы*:

$$\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i)}{\partial x_i} = 2\mu_i\ x_i\ \mathbb{J}_{\mu_i-1}(x_i),$$

$$\nabla \mathbb{J}_{\mu}(x) = 2\left(\mu_1\ x_1\ \mathbb{J}_{\mu_1-1}(x_1), \ldots,\ \mu_n\ x_n\ \mathbb{J}_{\mu_n-1}(x_n)\right).$$

Доказательство приведено в [1].

Следствие 2.1.

$$\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i\xi_i)}{\partial x_i} = 2\mu_i\ \xi_i^2\, x_i\ \mathbb{J}_{\mu_i-1}(x_i\xi_i).$$

Доказательство с очевидностью вытекает из леммы 2.1.

3. Четное, нечетное и полное $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя

Формула Ханкеля представления L_2-функций, примененная к функции

$$u(x)x^{-\gamma} \in L_2(\mathbb{R}_n), \quad \text{где} \quad x^{-\gamma} = \prod_{i=1}^{n} |x_i|^{-\gamma_i},$$

приводит к равенству

$$u(x) = C_\mu \int\limits_{\mathbb{R}_n} \mathbb{J}_\mu(x\xi)\ \xi^{-\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}_n} \mathbb{J}_\mu(y\xi)\ f(y)\ y^{-\gamma} dy\, d\xi,$$

которое будем называть *интегралом Фурье—Бесселя—Киприянова*[1]. Из него вытекают определения (2.5) и (2.6) в одномерном случае. В общем случае: *четным прямым и четным обратным* $\mathbb{J}$-*преобразованиями Бесселя* будем называть выражения

$$\mathbb{F}^{(ev)}_{B_{-\gamma}}[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_n} \mathbb{J}_\mu(\xi\, y)\, f(y)\, y^{-\gamma}\, dy,$$

$$\left(\mathbb{F}^{(ev)}_{B_{-\gamma}}\right)^{-1}[f](\xi) = C(\mu)\int\limits_{\mathbb{R}_n} \mathbb{J}_\mu(\xi\, x)\, \widehat{f}(\xi)\, \xi^{-\gamma}\, d\xi, \quad C(\mu) = \frac{1}{2^{2\mu}\,\Gamma^2(\mu{+}1)}, \quad \mu = \frac{\gamma+1}{2}.$$

Следуя [4] и следствию 2.1, введем *нечетное* $\mathbb{J}$-*преобразование Бесселя*, основанное на функции

$$\frac{1}{\xi_i}\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i\xi_i)}{\partial x_i} = 2\mu_i\, \xi_i\, x_i\ \mathbb{J}_{\mu_i-1}(x_i\xi_i),$$

которое имеет вид

$$\mathbb{F}^{(od)}_{B_{-\gamma}}[f](\xi) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}_n} f(x)\ \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i}\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i\xi_i)}{\partial x_i}\ x_i^{-\gamma_i}\ dx_i,$$

где $x = (x_i, x^i)$, $x^i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Несобственный интеграл здесь, как обычно, понимается в смысле главного значения по Коши. Как видим, ядро этого преобразования нечетно, поэтому для четных функций $\mathbb{F}^{(od)}_{B_{-\gamma}}[f](\xi) = 0$.

Лемма 3.1. *Пусть* $f \in S_{ev,-\gamma}(\mathbb{R}_n^+)$. *Тогда*

$$\mathbb{F}^{(od)}_{B_{-\gamma}}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right](\xi) = \xi_i\ \mathbb{F}^{(ev)}_{B_{-\gamma}}[f](\xi) = \xi_i\ \widehat{f}(\xi),$$

где $\widehat{f}(\xi)$ — *четное* $\mathbb{J}$-*преобразование Бесселя.*

---

[1]Для j-функций Бесселя аналогичное представление функций L_2^γ, $\gamma > 0$, называется *интегралом Фурье—Бесселя*, см. [3].

Из леммы 3.1 видно, что преобразование $\mathbb{F}^{(od)}_{B_{-\gamma}}$ производной четной функции свелось к преобразованию $\mathbb{F}^{(ev)}_{B_{-\gamma}}$. Поэтому удобно ввести одно преобразование со смешанным ядром

$$\mathbf{\Lambda}_\mu(x\xi) = \mathbb{J}_\mu(x\xi) - \psi\ \mathbb{J}_{\mu-1}(x\xi), \quad \psi = 2\prod_{i=1}^{n} \mu_i\, x_i\, \xi_i.$$

При этом, полагая $f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} = f_{ev}(x) + f_{od}(x)$, получим

$$\mathbb{K}_\mu[f](\xi) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}_n} f(x)\ \mathbf{\Lambda}(x\xi)\ x^{-\gamma}dx = \mathbb{F}^{(ev)}_{B_{-\gamma}}[f_{ev}](\xi) + \mathbb{F}^{(od)}_{B_{-\gamma}}[f_{od}](\xi),$$

где первое слагаемое представляет собой четное $\mathbb{J}$-преобразование Бесселя, а второе — нечетное $\mathbb{J}$-преобразование Бесселя.

Приведем основные формулы $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя. Доказательства равенств 1) и 2) см. в [1], а равенства 3) и 4) доказаны в статье [8].

Теорема 3.1. *Пусть $\varphi,\ \psi \in S_{ev}$. Тогда*

1) $\int\limits_{\mathbb{R}_n^+} \widehat{\varphi}(x)\,\psi(x)\,x^{-\gamma}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} \varphi(x)\,\widehat{\psi}(x)\,x^{-\gamma}\,dx$ (*равенство Парсеваля*);
2) $\int\limits_{\mathbb{R}_n^+} \widehat{\varphi}(x)\,\overline{\psi(x)}\,x^{-\gamma}\,dx = C_\mu \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} \varphi(x)\,\overline{\widehat{\psi}(x)}\,x^{-\gamma}\,dx$ (*равенство Планшереля*);
3) $\mathbb{F}^{(ev)}_{B_{-\gamma}}\left[(\varphi * \psi)_{-\gamma}\right](\xi) = \widehat{\varphi}\,(\xi)\ \widehat{\psi}\,(\xi)$;
4) $\mathbb{F}^{(ev)}_{B_{-\gamma}}\,[\,\varphi\ \psi\,]\,(\xi) = C_\mu\ \left(\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}\right)_{-\gamma}(\xi)$, *где* $(\varphi*\psi)_{-\gamma} = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} \mathbb{T}^y\varphi(x)\,\psi(y)\,y^{-\gamma}\,dy$.

Замечание 3.1. Легко видеть, что утверждения теоремы 3.1 справедливы для полного $\mathbb{K}$-преобразования Бесселя.

Пусть $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$. Введем сингулярный дифференциальный оператор

$$\left(D^{\alpha_i}_{B_{-\gamma_i}}\right)_x = \left\{\begin{array}{ll} B^{\alpha_i/2}_{-\gamma_i}, & \text{если } \alpha_i = 2k \\ \dfrac{\partial}{\partial x_i}\, B^{\alpha_i/2}_{-\gamma_i}, & \text{если } \alpha_i = 2k+1 \end{array}\right| , \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Заметим, что этот оператор ограниченно действует на четную по Киприянову по аргументу x_i функцию $u \in C^2$, поскольку

$$\lim_{x_i\to 0} B_{\pm\gamma_i}\, u(x_i, x^i) = (1\pm\gamma_i)\,u(x_i,x^i)\big|_{x_i=0} < \infty.$$

Теорема 3.2 (о символе $D^{\alpha_i}_{B_{-\gamma_i}}$-оператора). *Пусть* $\mu_i = \dfrac{\gamma_i+1}{2}$, $-\gamma_i \in (-1,0)$. *Для* $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ *имеет место формула*

$$\mathbb{K}_\mu[D^{\alpha_i}_{B_{-\gamma_i}} f](\xi) = \left\{\begin{array}{ll} (-\xi_i^2)^k\,\widehat{f}(\xi), & \textit{если } \alpha = 2k - \textit{четное} \\ (-\xi_i^2)^k\,\xi_i\ \widehat{f}(\xi), & \textit{если } \alpha = 2k+1 - \textit{нечетное} \end{array}\right| , \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Доказательство достаточно просто вытекает из определения $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя и определения $D^{\alpha_i}_{B_{-\gamma_i}}$ оператора (см. [1, 19]).

3.1. Представление линейного сингулярного дифференциального оператора в рамках $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя. Рассмотрим линейный сингулярный дифференциальный оператор

$$L\left(D^{\alpha}_{B_{-\gamma}}\right) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\ D^{\alpha}_{B_{-\gamma}},$$

где $D^{\alpha}_{B_{-\gamma}} = D^{\alpha_1}_{B_{-\gamma_1}} \ldots D^{\alpha_n}_{B_{-\gamma_n}}$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Пусть функция u — четная по Киприянову, $u \in C^m_{ev}$. Тогда $u(x) = \left(\mathbb{F}^{(ev)}_{B_{-\gamma}}\right)^{-1} [\widehat{u}](x)$. Следовательно,

$$L\left(D^\alpha_{B_{-\gamma}}\right) u(x) = \mathbb{K}^{-1}_{\mu,\,\xi\to x} \left[\ \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\ \xi^\alpha\ \ \widehat{u}(\xi)\ \right](x),$$

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}, \ldots, \xi_n^{\alpha_n}, \quad \xi_i^{\alpha_i} = \left\{ \begin{array}{ll} (-\xi_i^2)^k, & \text{если } \alpha = 2k \text{ — четное} \\ (-\xi_i^2)^k\,\xi_i, & \text{если } \alpha = 2k+1 \text{ — нечетное} \end{array} \right| , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Действие оператора $L(D^\alpha_{B_{-\gamma}})$ в рамках $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя имеет следующий вид:

$$L\left(D^\alpha_{B_{-\gamma}}\right) u(x) = \mathbb{K}^{-1}_\mu \left[a(x,\xi)\ \mathbb{F}^{(ev)}_{B_{-\gamma}}\ [u]\right], \tag{3.1}$$

где функция

$$a(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\ \xi_i^{\alpha_i}, \qquad \xi_i^{\alpha_i} = \left\{ \begin{array}{ll} (-\xi_i^2)^k, & \text{если } \alpha = 2k \text{ — четное,} \\ (-\xi_i^2)^k\,\xi_i, & \text{если } \alpha = 2k+1 \text{ — нечетное,} \end{array} \right. \tag{3.2}$$

— символ сингулярного дифференциального оператора $L(D^\alpha_{B_{-\gamma}})$.

3.2. Представление $L(D^\alpha_{B_{-\gamma}})$-сопряженного оператора в рамках $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя. Рассмотрим весовую линейную форму (2.7) в виде

$$(u,v)_{-\gamma} = \int\limits_{\mathbb{R}_n} u(x)\ \overline{v(x)}\ x^{-\gamma}\,dx, \qquad x^{-\gamma} = \prod_i\ |x_i|^{-\gamma_i}, \quad -\gamma_i \in (-1,0).$$

Упрощая, предположим, что $u, v \in S_{ev}(\mathbb{R}_n)$. Тогда

$$\left(L\left(D^\alpha_{B_{-\gamma}}\right)\ u, v\right)_{-\gamma} = \int\limits_{\mathbb{R}_n} L\left(D^\alpha_{B_{-\gamma}}\right)\ u(x)\ \overline{v(x)}\ x^{-\gamma}\ dx.$$

Исходя из $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя оператора $L\left(D^\alpha_{B_{-\gamma}}\right)$, получим

$$\left(L\left(D^\alpha_{B_{-\gamma}}\right)\ u, v\right)_{-\gamma} = C_\mu \int\limits_{\mathbb{R}_n}\ x^{-\gamma}\ dx \int\limits_{\mathbb{R}_n}\ \xi^{-\gamma}\ d\xi \int\limits_{\mathbb{R}_n}\ \mathbb{T}^y_x \mathbb{J}_\mu(x\xi)\ a(x,\xi)\ \overline{v(x)}\ u(y)\ y^{-\gamma}\,dy =$$

$$= C_\mu \int\limits_{\mathbb{R}_n}\ u(y)\ y^{-\gamma}\,dy \int\limits_{\mathbb{R}_n} \xi^{-\gamma}\ d\xi \int\limits_{\mathbb{R}_n}\ \mathbb{T}^y_x \mathbb{J}_\mu(x\xi)\ a(x,\xi)\ \overline{v(x)}\ \ x^{-\gamma}\ dx.$$

Введём обозначение

$$\widetilde{L}\left(D^\alpha_{B_{-\gamma}}\right) v(y) = C_\mu \int\limits_{\mathbb{R}_n}\ x^{-\gamma}\ dx \int\limits_{\mathbb{R}_n}\ \overline{\mathbb{T}^y_x \mathbb{J}_\mu(x\xi)\ \overline{a(x,\xi)}\ v(x)}\ \xi^{-\gamma}\ d\xi.$$

Тогда

$$\left(L\left(D^\alpha_{B_{-\gamma}}\right)\ u,\ v\right)_{-\gamma} = \left(u,\ \widetilde{L}\left(D^\alpha_{B_{-\gamma}}\right)\ v\right)_{-\gamma}.$$

Таким образом, оператор $\widetilde{L}\left(D^\alpha_{B_{-\gamma}}\right)$ с комплексно сопряженным символом $\overline{a(x,\xi)}$ оказывается формально сопряжённым оператору $L\left(D^\alpha_{B_{-\gamma}}\right)$.

Подобно (3.1) имеем следующую формальную запись действия сопряженного оператора

$$L\left(D^\alpha_{B_{-\gamma}}\right) u(x) = \mathbb{K}^{-1}_\mu \left[\ \mathbb{F}^{(ev)}_{B_{-\gamma}}\ \left[\ \overline{a(x;\xi)}\ u\ \right]\right], \tag{3.3}$$

где $\overline{a(x;\xi)}$ — символ оператора $\widetilde{L}(B_{-\gamma})$, комплексно сопряженный символу (3.2).

3.3. Пространства Соболева—Киприянова, ассоциированные с оператором $D^\alpha_{B_{-\gamma}}$. В этой работе вводится следующее пространство Соболева—Киприянова: для любого вещественного s через $H^s_{-\gamma}(\mathbb{R}^+_n)$ обозначим пополнение множества $S_{ev,-\gamma}$ по норме

$$\|u\|^2_{H^s_{-\gamma}} = \int\limits_{\mathbb{R}_n} \left(1+|\xi|^2\right)^s \ |\mathbb{K}_\mu[u](\xi)|^2 \ \xi^{-\gamma}\, d\xi, \qquad \xi^{-\gamma} = \prod_{i=1}^n |\xi_i|^{-\gamma_i}, \tag{3.4}$$

где $\mathbb{K}_\mu[u]$ — полное $\mathbb{J}$-преобразование Бесселя.

В рамках наших исследований нечетным по переменной ξ_i символом линейного сингулярного дифференциального оператора является производная четной по ξ_i функции $a(x,\xi)$. В результате первая производная интегрированием по частям окажется примененной к функции $x_i^{-\gamma_i}\,\dfrac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi\, x)}{\partial x_i}$. При этом $\mathbb{J}$-преобразование Бесселя с ядром Λ_μ превращается в $\mathbb{F}^{(ev)}_{B_{-\gamma}}$-преобразование четной функции с ядром $\mathbb{J}_{\mu_i}$, что приводит к равенству

$$x_i^{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_i^{-\gamma_i}\ \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi\, x)}{\partial x_i}\right) = B_{-\gamma_i}\mathbb{J}_{\mu_i}(\xi\, x) = -\xi_i^2\ \ \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi\, x).$$

После таких действий операторы с «нечетным» символом окажутся операторами с «четным» символом, и мы имеем дело с $\mathbb{F}^{(ev)}_{B_{-\gamma}}$ преобразованием, для которого соответствующие результаты приведены в работах [17, 19].

Пусть $u \in S'_{ev,-\gamma}$. В рамках весовой билинейной формы (2.7) для любой функции $\varphi \in S_{ev}$ действие $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя принимает следующий вид:

$$(\mathbb{K}_\mu u, \varphi)_{-\gamma} = \int\limits_{\mathbb{R}_n} u(\xi)\ \mathbb{K}_\mu[\varphi](\xi)\ \xi^{-\gamma} d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}_n} u(\xi)\ \mathbb{F}^{(ev)}_{B_{-\gamma}}[\varphi](\xi)\ \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Если же регулярный функционал u представлен производной четной функции по координате x_i своего аргумента, то

$$(\mathbb{K}_\mu u, \varphi'_{x_i})_{-\gamma} = \int\limits_{\mathbb{R}_n} u(\xi)\ \xi_i\ \mathbb{F}^{(ev)}_{B_{-\gamma}}[\varphi](x)\ \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Сказанное означает, что введенное нами пространство $H^s_{-\gamma}$ окажется пространством функций с конечной нормой

$$\|u\|^2_{H^s_{-\gamma}} = \int\limits_{\mathbb{R}_n} \left(1+|\xi|^2\right)^s \ |\widehat{u}(\xi)|^2\, \xi^{-\gamma}\, d\xi, \tag{3.5}$$

где $\widehat{u}$ — четное $\mathbb{J}$-преобразование Бесселя.

Утверждение 3.1. *Пусть* $u = u(x) \in S_{ev,-\gamma}$, $-1 < -\gamma_i < 0$. *При целом неотрицательном* $s = m$ *норма* (3.4) *эквивалентна норме*

$$\|u\|^2_{H^m_{-\gamma}} = \sum_{|\alpha|\leqslant s} \int\limits_{\mathbb{R}^+_n} \left|D^\alpha_{B_{-\gamma}} u(x)\right|^2\ x^{-\gamma}\, dx. \tag{3.6}$$

Доказательство. Из равенства Планшереля для $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя (см. теорему 3.1 и замечание 3.1) вытекает равенство

$$\left\|\sum_{|\alpha|\leqslant s} (D_B)^s u\right\|_{L_2^{-\gamma}} = \|\mathbb{K}_\mu[\psi]\|_{L_2^{-\gamma}}, \tag{3.7}$$

где $\psi = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant s} (D_B)^s u$. Но

$$\|\mathbb{K}_\mu[\psi]\|_{L_2^{-\gamma}} = \left\|\sum_{i=1}^n |\xi^\alpha|^2\, \widehat{u}\right\|_{L_2^{-\gamma}}.$$

Теперь утверждение 3.1 для $m \in \mathbb{N}$ вытекает из практически очевидного неравенства

$$C^{-1}(1+|\xi|^2)^s \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\xi^\alpha|^2. \leqslant C(1+|\xi|^2)^s$$

При $s=0$ норма (3.6) совпадает с $L_2^{-\gamma}$-нормой функции $\mathbb{K}_\mu[u]$, что вытекает из равенства (3.6). $\square$

4. Сингулярные $\mathbb{J}$-псевдодифференциальные операторы

Формулы (3.1) и (3.3) приводят к общим конструкциям операторов, включающих линейные сингулярные операторы типа $L\left(D^\alpha_{B_{-\gamma}}\right)$.

Поскольку норма, записанная в образах $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя, приведет к умножению на символ, представляющий многочлен порядка m, то для многочлена с ограниченными коэффициентами справедливо неравенство

$$\left|\sum_{\alpha\leqslant m} a_\alpha(x)\ \xi^\alpha\right| \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} |a_\alpha(x)|\ (1+|\xi|)^\alpha.$$

Определение 4.1. Через $\Xi^m_{-\gamma} = \Xi^m_{-\gamma}(\mathbb{R}^+_n \times \mathbb{R}^+_n)$ будем обозначать класс бесконечно дифференцируемых четных по Киприянову по каждой координате аргумента функций $a(x,\xi)$, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\left(D^{\alpha_i}_{B_{-\gamma_i}}\right)_x \left(D^{\beta_i}_{B_{-\gamma_i}}\right)_\xi\ a(x,\xi)\right| \leqslant C_{\alpha,\beta}\ \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m-|\beta|}{2}},$$

константа $C_{\alpha,\beta}$ не зависит от x и ξ. Класс функций $\Xi^m_{-\gamma}$ будем называть *пространством символов* порядка m.

Из определения 4.1 следует

$$\left|\mathbb{K}_{\mu,x\to\eta}\left[\left(\left(1+D^{\alpha_i}_{B_{-\gamma_i}}\right)^p\right)_x \left(D^{\beta_i}_{B_{-\gamma_i}}\right)_\xi\ a(x,\xi)\right]\right| =$$
$$= \left|(1+|\eta|^2)^p\ \left(D^{\beta_i}_{B_{-\gamma_i}}\right)_\xi\ {}^1\widehat{a}(\eta,\xi)\right| \leqslant C_{\alpha,\beta}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m-|\beta|}{2}},$$

где ${}^1\widehat{a}$ — обозначение $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя функции $a(x,\xi)$ по первой переменной. Следовательно, для любого положительного числа p найдется такая константа C, что

$$\left|{}^1\widehat{a}(\eta,\xi)\right| \leqslant C_{\alpha,\beta}\left(1+|\eta|^2\right)^{-p}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}},$$

$$\left|\left(D^{\beta_i}_{B_{-\gamma_i}}\right)_\xi\ {}^1\widehat{a}(\eta,\xi)\right| \leqslant C_{\alpha,\beta}\left(1+|\eta|^2\right)^{-p}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m-|\beta|}{2}}.$$

Определение 4.2. Операторы, действующие на функцию $u \in S_{ev,-\gamma}(\mathbb{R}^+_n)$, по формулам

$$A\,u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_n}\int\limits_{\mathbb{R}_n} \mathbb{T}^y_x\,\mathbf{\Lambda}_\mu(x\xi)\ a(x,\xi)\ u(y)\ y^{-\gamma}\ dy\ \xi^{-\gamma}\,d\xi, \tag{4.1}$$

$$\mathcal{A}\,u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_n}\int\limits_{\mathbb{R}_n} \mathbb{T}^y_x\,\mathbf{\Lambda}(x\xi)\ a(y,\xi)\ u(y)\ y^{-\gamma}\ dy\ \xi^{-\gamma}\,d\xi, \tag{4.2}$$

будем называть *сингулярными $\mathbb{J}$-псевдодифференциальными операторами Киприянова* ($\mathbb{J}$-*ПДО*).

Приведем формулировки основных теорем сингулярных $\mathbb{J}$-ПДО с символом из Ξ^m_{ev}, доказательства которых даны в работах [1, 17].

Теорема 4.1. *Сингулярные $\mathbb{J}$-ПДО (4.1), (4.2) с символом $a(x,\xi) \in \Xi^m_{ev}$ является операторами порядка m, то есть*

$$\|A\ u\|_{H^{s-m}_{-\gamma}} \leqslant C\ \|u\|_{H^s_{-\gamma}}.$$

Теорема 4.2. *Сингулярный $\mathbb{J}$-ПДО $(A - \mathcal{A})$ с символом $a(x,\xi) \in \Xi_{ev}^m$ является оператором порядка $m-1$, т. е.*

$$\|(A-\mathcal{A})\,u\|_{H_{-\gamma}^{s-m+1}} \leqslant C\,\|u\|_{H_{-\gamma}^s}.$$

Лемма 4.1. *Пусть $A \in \Xi_{ev}^m$. Для любой функции $u \in H_{-\gamma}^s$ имеет место неравенство*

$$|\,(Au,u)_{-\gamma}\,| = |\,(u,\mathcal{A}u)_{-\gamma}\,| \leqslant \mathrm{const}\,\|u\|_{\frac{m}{2},-\gamma}$$

с константой, не зависящей от функции u.

Пусть $a_1(x,\xi) \in \Xi_{ev}^{m_1}$, $a_2(x,\xi) \in \Xi_{ev}^{m_2}$, а A_1 и A_2 — соответствующие этим символам сингулярные $\mathbb{J}$-ПДО. Утверждение, аналогичное теореме 4.1, справедливо для произведения A_1A_2 и сингулярного псевдодифференциального оператора с символом, равным произведению символов операторов A_1 и A_2. Этот оператор будем обозначать $A_1 \circ A_2$.

Теорема 4.3. *Оператор $[A_1A_2 - A_1\circ A_2]$ имеет порядок m_1+m_2-1 в пространстве $H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_n^+)$, т. е.*

$$\|\,[A_1A_2 - A_1\circ A_2]\;u\,\|_{H_{-\gamma}^{s-m_1-m_2+1}} \leqslant C\|u\|_{H_{-\gamma}^s}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булатов Ю. Н.* Преобразование Ганкеля—Катрахова и сингулярные K-псевдодифференциальные операторы// Мат. заметки СВФУ. — 2024. — *31*, № 1. — С. 21–34.
2. *Катрахов В. В., Ляхов Л. Н.* Полное преобразование Фурье—Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов// Дифф. уравн. — 2011. — *47*, № 5. — С. 681–695.
3. *Киприянов И. А.* Преобразование Фурье—Бесселя и теоремы вложения для весовых классов// Тр. МИАН. — 1967. — *89*. — С. 130–213.
4. *Киприянов И. А., Катрахов В. В.* Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов// Мат. сб. — 1977. — *104*, № 1. — С. 49–68.
5. *Киприянов И. А., Ляхов Л. Н.* Об одном классе псевдодифференциальных операторов// Докл. АН СССР. — 1974. — *218*, № 2. — С. 278–280.
6. *Левитан Б. М.* Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя// Усп. мат. наук. — 1951. — *6*, № 2. — С. 102–143.
7. *Ляхов Л. Н.* Граничные задачи для B-эллиптических уравнений// Дисс. к.ф.-м.н. — Воронеж, 1981.
8. *Ляхов Л. Н., Булатов Ю. Н., Рощупкин С. А., Санина Е. Л.* Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B-оператора Киприянова// Дифф. уравн. — 2022. — *58*, № 12. — С. 1654–1665.
9. *Ляхов Л. Н., Булатов Ю. Н., Рощупкин С. А., Санина Е. Л.* Единственность решения задач Дирихле для уравнения Пуассона с сингулярным Δ_B-оператором Киприянова// Дифф. уравн. — 2022. — *59*, № 4. — С. 483–493.
10. *Ляхов Л. Н., Рощупкин С. А.* Полное преобразование Фурье—Бесселя некоторых основных функциональных классов// Науч. вед. Белгород. гос. унив. Сер. Мат. Физ. — 2013. — *154*, № 11. — С. 681–695.
11. *Ляхов Л. Н., Санина Е. Л.* Оператор Киприянова—Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения// Дифф. уравн. — 2020. — *56*, № 12. — С. 1610–1620.
12. *Ляхов Л. Н., Санина Е. Л.* Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха// Мат. заметки. — 2023. — *113*, № 4. — С. 517–528.
13. *Ляхов Л. Н., Санина Е. Л., Рощупкин С. А., Булатов Ю. Н.* Фундаментальное решение сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2022. — № 7. — С. 52–65.
14. *Рощупкин С. А.* Классы основных функций для полного преобразования Фурье—Бесселя// Науч. вед. Белгород. гос. унив. Сер. Мат. Физ. — 2015. — *214*, № 17. — С. 124–126.
15. *Сабитов К. Б.* О равномерной сходимости разложения функции в ряд Фурье—Бесселя// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2022. — № 11. — С. 89–96.
16. *Сабитов К. Б., Зайцева Н. В.* Вторая начально-граничная задача для B-гиперболического уравнения// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2019. — № 10. — С. 75–86.
17. *Lyakhov L. N., Bulatov Yu. N.* Composition and commutator of singular **J**-pseudodifferential Kipriyanov operators in $\mathbb{R}_{\boldsymbol{N}}$// Lobachevskii J. Math. — 2023. — *44*. — С. 3438–3454.
18. *Lyakhov L. N., Roschupkin S. A.* A priori estimate for solutions of singular B-elliptic pseudodifferential equations with Bessel ∂_B-operators// J. Math. Sci. — 2014. — *196*. — С. 563–571.

19. *Lyakhov L. N., Roschupkin S. A., Bulatov Yu. N.* Kipriyanov singular pseudodifferential operators generated by Bessel $\mathbb{J}$-transform// J. Math. Sci. — 2023. — *266*. — С. 205–216.
20. *Metzler R., Glöckle W. G., Nonnenmacher T. F.* Fractional model equation for anomalous diffusion// Phys. A: Stat. Mech. Appl. — 1994. — *211*, № 1. — С. 13–24.

Л. Н. Ляхов
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия
Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия
E-mail: levnlya@mail.ru

Ю. Н. Булатов
Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия
E-mail: y.bulatov@bk.ru

С. А. Рощупкин
Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия
E-mail: roshupkinsa@mail.ru

UDC 517.95
DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-253-266
EDN: MXJTII

Kipriyanov–Katrakhov singular pseudodifferential operators

L. N. Lyakhov[1,2,3], Yu. N. Bulatov[2], and S. A. Roschupkin[2]

[1] *Voronezh State University, Voronezh, Russia*
[2] *Bunin Yelets State University, Yelets, Russia*
[3] *Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia*

Abstract. Singular pseudodifferential operators created on the base of the mixed Fourier–Bessel transform are usually called Kipriyanov singular pseudodifferential operators (SPDO). The paper provides an overview of three types of such operators. The Kipriyanov SPDOs are adapted to work with singular Bessel operators $B_{\gamma_i} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \dfrac{\gamma_i}{x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $\gamma_i > -1$. The main attention in our work is paid to two modifications that arose on the base of the "even $\mathbb{J}$-Bessel transforms" (i.e., for $\gamma \in (-1, 0)$) and the "even-odd $\mathbb{J}$-Bessel–Kipriyanov–Katrakhov transforms". The latter are introduced to study differential equations with singular differential operators $\dfrac{\partial}{\partial x_i} B_{\gamma_i}$ with a negative parameter of the Bessel operator $\gamma_i \in (-1, 0)$.

Keywords: singular pseudodifferential operators, Kipriyanov operators, Kipriyanov–Katrakhov operators, Fourier–Bessel transform.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project No. 24-21-00387).

For citation: L. N. Lyakhov, Yu. N. Bulatov, S. A. Roschupkin, "Kipriyanov–Katrakhov singular pseudodifferential operators," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 2, 253–266. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-253-266`

REFERENCES

1. Yu. N. Bulatov, "Preobrazovanie Gankelya—Katrakhova i singulyarnye K-psevdodifferentsial'nye operatory" [Hankel–Katrakhov transform and singular K-pseudodifferential operators], *Mat. zametki SVFU* [Math. Notes North-East Fed. Univ.], 2024, **31**, No. 1, 21–34 (in Russian).
2. V. V. Katrakhov and L. N. Lyakhov, "Polnoe preobrazovanie Fur'e—Besselya i algebra singulyarnykh psevdodifferentsial'nykh operatorov" [The complete Fourier–Bessel transform and the algebra of singular pseudodifferential operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2011, **47**, No. 5, 681–695 (in Russian).
3. I. A. Kipriyanov, "Preobrazovanie Fur'e—Besselya i teoremy vlozheniya dlya vesovykh klassov" [Fourier–Bessel transform and embedding theorems for weight classes], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Acad. Sci.], 1967, **89**, 130–213 (in Russian).
4. I. A. Kipriyanov and V. V. Katrakhov, "Ob odnom klasse odnomernykh singulyarnykh psevdodifferentsial'nykh operatorov" [On a class of one-dimensional singular pseudodifferential operators], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1977, **104**, No. 1, 49–68 (in Russian).
5. I. A. Kipriyanov and L. N. Lyakhov, "Ob odnom klasse psevdodifferentsial'nykh operatorov" [On a class of pseudodifferential operators], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1974, **218**, No. 2, 278–280 (in Russian).
6. B. M. Levitan, "Razlozhenie v ryady i integraly Fur'e po funktsiyam Besselya" [Expansion into series and Fourier integrals in Bessel functions], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1951, **6**, No. 2, 102–143 (in Russian).
7. L. N. Lyakhov, "Granichnye zadachi dlya B-ellipticheskikh uravneniy" [Boundary-value problems for B-elliptic equations], *PhD Thesis*, Voronezh, 1981 (in Russian).
8. L. N. Lyakhov, Yu. N. Bulatov, S. A. Roschupkin, and E. L. Sanina, "Psevdosdvig i fundamental'noe reshenie Δ_B-operatora Kipriyanova" [Pseudoshift and the fundamental solution of the Kipriyanov Δ_B-operator], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2022, **58**, No. 12, 1654–1665 (in Russian).
9. L. N. Lyakhov, Yu. N. Bulatov, S. A. Roschupkin, and E. L. Sanina, "Edinstvennost' resheniya zadach Dirikhle dlya uravneniya Puassona s singulyarnym Δ_B-operatorom Kipriyanova" [Uniqueness of the solution of Dirichlet problems for the Poisson equation with a singular Kipriyanov Δ_B-operator], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2022, **59**, No. 4, 483–493 (in Russian).
10. L. N. Lyakhov and S. A. Roschupkin, "Polnoe preobrazovanie Fur'e—Besselya nekotorykh osnovnykh funktsional'nykh klassov" [Full Fourier–Bessel transform of some basic functional classes], *Nauch. ved. Belgorod. gos. univ. Ser. Mat. Fiz.* [Sci. Bull. Belgorod State Univ. Ser. Math. Phys.], 2013, **154**, No. 11, 681–695 (in Russian).
11. L. N. Lyakhov and E. L. Sanina, "Operator Kipriyanova—Bel'trami s otritsatel'noy razmernost'yu operatorov Besselya i singulyarnaya zadacha Dirikhle dlya *B*-garmonicheskogo uravneniya" [The Kipriyanov–Beltrami operator with negative dimension of Bessel operators and the singular Dirichlet problem for the *B*-harmonic equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2020, **56**, No. 12, 1610–1620 (in Russian).
12. L. N. Lyakhov and E. L. Sanina, "Differentsial'nye i integral'nye operatsii v skrytoy sfericheskoy simmetrii i razmernost' krivoy Kokha" [Differential and integral operations in hidden spherical symmetry and the dimension of the Koch curve], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2023, **113**, No. 4, 517–528 (in Russian).
13. L. N. Lyakhov, E. L. Sanina, S. A. Roschupkin, and Yu. N. Bulatov, "Fundamental'noe reshenie singulyarnogo differentsial'nogo operatora Besselya s otritsatel'nym parametrom" [Fundamental solution of the singular differential Bessel operator with a negative parameter], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2022, No. 7, 52–65 (in Russian).
14. S. A. Roschupkin, "Klassy osnovnykh funktsiy dlya polnogo preobrazovaniya Fur'e—Besselya" [Classes of basic functions for the full Fourier–Bessel transform], *Nauch. ved. Belgorod. gos. univ. Ser. Mat. Fiz.* [Sci. Bull. Belgorod State Univ. Ser. Math. Phys.], 2015, **214**, No. 17, 124–126 (in Russian).
15. K. B. Sabitov, "O ravnomernoy skhodimosti razlozheniya funktsii v ryad Fur'e—Besselya" [On the uniform convergence of the expansion of a function in a Fourier–Bessel series], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2022, No. 11, 89–96 (in Russian).
16. K. B. Sabitov and N. V. Zaytseva, "Vtoraya nachal'no-granichnaya zadacha dlya B-giperbolicheskogo uravneniya" [The second initial-boundary value problem for the B-hyperbolic equation], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2019, No. 10, 75–86 (in Russian).

17. L. N. Lyakhov and Yu. N. Bulatov, "Composition and commutator of singular **J**-pseudodifferential Kipriyanov operators in $\mathbb{R}_{\boldsymbol{N}}$," *Lobachevskii J. Math.*, 2023, **44**, 3438–3454.
18. L. N. Lyakhov and S. A. Roschupkin, "A priori estimate for solutions of singular B-elliptic pseudodifferential equations with Bessel ∂_B-operators," *J. Math. Sci.*, 2014, **196**, 563–571.
19. L. N. Lyakhov, S. A. Roschupkin, and Yu. N. Bulatov, "Kipriyanov singular pseudodifferential operators generated by Bessel $\mathbb{J}$-transform," *J. Math. Sci.*, 2023, **266**, 205–216.
20. R. Metzler, W. G. Glöckle, and T. F. Nonnenmacher, "Fractional model equation for anomalous diffusion," *Phys. A: Stat. Mech. Appl.*, 1994, **211**, No. 1, 13–24.

L. N. Lyakhov
Voronezh State University, Voronezh, Russia
Bunin Yelets State University, Yelets, Russia
Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia
E-mail: levnlya@mail.ru

Yu. N. Bulatov
Bunin Yelets State University, Yelets, Russia
E-mail: y.bulatov@bk.ru

S. A. Roschupkin
Bunin Yelets State University, Yelets, Russia
E-mail: roshupkinsa@mail.ru