Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 4 (2024). С. 542–560
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 519.213
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-542-560
EDN: VSOLEA

УНИМОДАЛЬНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЭКСТЕНСИВНОГО ФУНКЦИОНАЛА ВЫБОРОК СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Ю. П. Вирченко[1], **А. М. Теволде**[2]

[1] *Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, Белгород, Россия*
[2] *Белгородский государственный университет, Белгород, Россия*

Аннотация. Устанавливается критерий унимодальности распределения вероятностей функционала, который представляется суммой набора независимых одинаково распределенных случайных неотрицательных величин $\tilde{x}_k$ со случайным числом слагаемых, распределенных по Пуассону. Общее распределение слагаемых $\tilde{x}_k$ сосредоточено на отрезке $[0,1]$ и таково, что $\Pr\{\tilde{x}_k = 0\} \neq 0$. Его абсолютно непрерывная часть асимптотически близка к равномерному распределению. Вводится понятие о сглаживающих функциях и находится явный вид распределения любого фиксированного числа слагаемых, равномерно распределенных на $[0,1]$.

Ключевые слова: сумма независимых одинаково распределенных случайных величин, унимодальность распределения вероятностей, сглаживающая функция, одновершинная функция.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *Ю. П. Вирченко, А. М. Теволде.* Унимодальность распределения вероятностей экстенсивного функционала выборок случайной последовательности// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 4. С. 542–560. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-542-560

1. Введение

Исследование унимодальности вероятностных распределений, определяемых какими-либо естественными, с точки зрения постановки задач теории вероятностей, условиями представляется очень важным, так как ее наличие, с точки зрения математического моделирования природных процессов, отражает факт отсутствия каких-либо причин, регулярным образом оказывающих влияние на их протекание. Среди первых публикаций, посвященных этому направлению, назовем работу [9]. Не давая в настоящей статье сколько-нибудь значительного исторического обзора этому направлению, укажем на работы [5, 7, 10, 11], которые были посвящены установлению одновершинности распределений, связанных с суммами независимых одинаково распределенных случайных величин — традиционному объекту исследований в теории вероятностей. Другое направление исследований унимодальности распределений начало оформляться в связи с изучением качественных свойств распределений для функционалов от выборок случайных процессов, в частности, для экстенсивных функционалов [1, 12–14], в терминологии настоящей работы, и для максимумов выборок [3, 15].

Задача, изучению которой посвящена настоящая работа, связана с изучением математической модели электропробоя гетерогенно-неупорядоченной конденсированной среды как объекта статистической математической физики [2] (см. также [4, 16]). С математической точки зрения, она состоит в нахождении условий, при которых абсолютно непрерывная часть распределения вероятностей суммы независимых, одинаково распределенных, неотрицательных случайных величин является унимодальным.

Опишем общую постановку задачи. Рассмотрим случайную последовательность $\langle \tilde{x}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, компоненты которой являются элементами пространства Ω. Вероятностное пространство последовательности строится в виде $\langle \Omega^{\mathbb{N}}, \mathfrak{B}^{\mathbb{N}}, \mathsf{P}^{\mathbb{N}} \rangle$, где $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра на Ω, P — вероятностная мера, определенная на $\mathfrak{B}$, $\mathsf{P}(A) = \Pr\{\tilde{x} \in A\}$, $\tilde{x} \in \Omega$, $A \in \mathfrak{B}$.

Пусть на множестве Ω определен измеримый функционал со значениями в $\mathbb{R}$, $\mathsf{V} : \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Каждый такой функционал порождает функционалы $\mathsf{S}^{(N)}[\cdot; \mathsf{H}]$, $N \in \mathbb{N}$ на пространствах Ω^N конечных подпоследовательностей длины N. Эти функционалы, называемые нами *экстенсивными*, определяются формулой

$$\mathsf{S}^{(N)}[\langle \tilde{x}_n; n \in I_N \rangle; \mathsf{H}] = \sum_{n=1}^{N} \mathsf{H}(\tilde{x}_n), \quad I_n = \{1 \div N\}.$$

Они, очевидным образом, измеримы. Так как распределение вероятностей на Ω^N является N-кратной степенью меры P, то значения каждого функционала $\mathsf{S}^{(N)}[\cdot]$ представляются суммами независимых одинаково распределенных величин. Функция распределения вероятностей $G^{(N)}(x)$ каждого из них, определяемая мерой P, определяется формулой (см. по этому поводу, например, [6])

$$G^{(N)}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \theta\Big(x - \sum_{n=1}^{N} x_n\Big) \prod_{n=1}^{N} d\Pr\{\mathsf{H}(\tilde{x}_n) \leqslant x_n\}, \tag{1.1}$$

где $\theta(x) = \{1, x \geqslant 0; 0, x < 0\}$ — функция Хевисайда. Мы ограничиваемся случаем, когда общая функция распределения $V(x) = \Pr\{\tilde{x} \leqslant x\}$, $x \in \mathbb{R}$ случайных величин $\tilde{x}_k$, $k \in \mathbb{N}$ не содержит сингулярной компоненты. В этом случае функция распределения $G^{(N)}(x)$ также не содержит сингулярной компоненты, т. е. обладает плотностью распределения $g^{(N)}(x)$ в терминах обобщенных функций над основным пространством локально-непрерывных функций на $\mathbb{R}$.

Изучению распределений вероятностей сумм независимых случайных величин посвящена богатая литература, так как этот математический объект связан с основами теории вероятностей. Следует заметить, однако, что в основном в этих исследованиях решаются задачи, связанные с предельными при $N \to \infty$ распределениями вероятностей для центрированных сумм случайных независимых величин при их подходящей нормировке. Эти результаты очень важны для обработки статистических данных в условиях малости информации о распределении P, но при этом имеется возможность свободного оперирования экспериментальными данными относительно каждого отдельного слагаемого суммы. В противоположном случае, когда такая возможность отсутствует, а именно, экспериментально не определены ни число слагаемых суммы, ни каждое из слагаемых, а регистрируется только лишь результат — случайное значение суммы, то статистические оценки параметров предельных распределений становятся невозможны. Следствием этого является то, что приходится изучать распределения вероятностей $G^{(N)}$ с конкретным значением N, которое может быть как малой величиной, так и очень большой. В такой ситуации, ввиду существенной зависимости аналитической формы распределений вероятностей $G^{(N)}$ от распределения вероятностей P, естественно интересоваться, в первую очередь, не этой формой, а ее качественными свойствами и классифицировать распределения согласно этим свойствам.

Следуя описанной идеологической установке, в настоящей работе мы исследуем возможность возникновения унимодальности распределений $G^{(N)}$ вероятностей сумм независимых неотрицательных случайных величин в том случае, когда распределение каждого из слагаемых сосредоточено на конечном отрезке. Объектом нашего изучения является установление признаков унимодальности распределений $G^{(N)}$ в случае пуассоновского предела при $N \to \infty$. При этом распределение вероятностей каждого из слагаемых предполагается асимптотически близким к равномерному. Такая постановка задачи возникает естественным образом при анализе электрической прочности тонкой полимерной пленки по отношению к электрическому пробою в условиях случайным образом распределенных гетерогенным образом в ней с малой плотностью инородных включений со случайными геометрическими характеристиками [2]. Описанная выше постановка задачи возникает вследствие ограниченной возможности экспериментального изучения распределения вероятностей геометрических характеристик отдельных включений, а также ввиду случайности их числа в материале.

В следующем разделе мы даем конкретную частную постановку задачи, к которой относится полученный в работе результат. В разделе 3 мы вводим понятие о классе неотрицательных функций, обладающих сглаживающим свойством. В разделе 4 вычисляется явный аналитический вид плотностей распределений сумм независимых равномерно распределенных случайных величин. Наконец, в разделе 5 устанавливаются необходимое и достаточное условия унимодальности распределения $G^{(N)}$ в пуассоновском пределе $N \to \infty$ в случае, когда $\tilde{x}_k$ распределены равномерно на $[0, 1]$.

2. Постановка задачи

Положим, что компоненты случайной последовательности $\langle \tilde{x}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ принимают значения в $\Omega = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ и $\mathfrak{B} - \sigma$-алгебра борелевских подмножеств в $\mathbb{R}_+$. Вероятностная мера P на Ω представляется функцией распределения V на $\mathbb{R}_+$. Будем предполагать, что она состоит из абсолютно непрерывной компоненты с плотностью $pv(x) = dV(x)/dx > 0$ при $x > 0$, где $1 > p > 0$, $\int\limits_0^\infty v(x)dx = 1$, и дискретной компоненты, представленной распределением $(1-p)\delta(x)$ с δ-функцией Дирака. Мы полагаем, что кусочно-непрерывная на $[0, \infty)$ неотрицательная плотность v непрерывна справа.

Ввиду непрерывности справа θ-функции, согласно ее определению, предел при $x \to +0$ производной по x интеграла $\int\limits_0^\infty \theta(x-y)u(y)dy$ с любой непрерывной в окрестности $x = 0$ и кусочно-непрерывной на $[0, \infty)$ функцией должен пониматься как $\int\limits_{-0}^\infty \delta(x-y)u(y)dy = u(0)$.

Таким образом, случайную последовательность $\langle \tilde{x}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ можно рассматривать как обобщение однородной *последовательности независимых испытаний* с вероятностью появления «успеха» p, $0 < p < 1$, и с пространством $\Omega = [0, \infty)$ возможных состояний для каждого из испытаний.

Операция свертки двух кусочно-непрерывных плотностей распределения $v_1(x)$ и $v_2(x)$, сосредоточенных на $[0, \infty)$, определяется формулой

$$(v_1 * v_2)(x) = \int\limits_{-0}^{\infty} v_1(y) v_2(x-y)dy. \tag{2.1}$$

Эту бинарную операцию можно рассматривать как коммутативное умножение на множестве всех кусочно-непрерывных функций на $[0, \infty)$. Множество таких функций, снабженное операцией свертки, является коммутативной полугруппой. При таком определении умножения соответствующая ему m-я степень $(v_*^m)(x)$, $m \in \mathbb{N}$ любой кусочно-непрерывной функции $v(x)$ определяется посредством рекуррентного соотношения

$$(v_*^m)(x) = \int\limits_0^x v(x-y)(v_*^{m-1})(y)dy, \quad N \geqslant 2.$$

Так как свертка пары кусочно-непрерывных функций на полуоси является кусочно-непрерывной функцией, то, представив дифференциал функции распределения V описанного выше типа в виде $dV(x) = [(1-p)\delta(x) + pv(x)]dx$, находим, что плотность распределения $g^{(N)}(x) = dG^{(N)}(x)/dx$ вероятностей значений функционала $\mathsf{S}^{(N)}[\cdot]$ принимает вид

$$g^{(N)}(x) = (1-p)^N \delta(x) + \sum_{m=1}^{N} \mathrm{C}_N^m p^m (1-p)^{N-m} v_*^N(x).$$

Таким образом, распределение вероятностей значений суммы $\mathsf{S}^{(N)}[\cdot]$ с плотностью $[(1-p)\delta+pv]_*^N$, очевидным образом, состоит из дискретной компоненты с одной точкой роста $x=0$ и абсолютно непрерывной компоненты с плотностью

$$g_N(x) = \sum_{m=1}^{N} \mathrm{C}_N^m p^m (1-p)^{N-m} v_*^N(x). \tag{2.2}$$

В соответствии со сказанным в разделе 1, нас интересуют условия унимодальности получаемой из g_N абсолютно непрерывной части g плотности распределения в т. н. *пуассоновском пределе* $p=\lambda/N \to 0$ при $N\to\infty$, $\lambda>0$

$$g(x) = e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} v_*^m(x). \tag{2.3}$$

Полученный нами результат относится к случаю, когда плотность v зависит от некоторого параметра $\eta>0$ так, что $v(x)\equiv w(x;\eta) = w(x)+o(1)$ при $\eta\to+0$ равномерно по $x\in[0,1]$, где $w(x)=\theta(x)\theta(1-x)$.

3. Сглаживание неотрицательных кусочно-непрерывных функций

Уточним понятия, в терминах которых будет далее проведено исследование. При этом мы не стремимся к формулировкам в наиболее общей форме, а ограничиваемся их разумной достаточностью для решения задачи.

Будем рассматривать кусочно-непрерывные функции u на $[0,\infty)$. Это означает, что в каждой точке $x\in[0,\infty)$ функция u имеет односторонний предел справа и ее область определения $[0,\infty)$ представляется в виде не более чем счетного дизъюнктивного объединения $[0,\infty)=\bigcup\limits_j [a_j,a_{j+1})$, где $a_1=0$, $a_j<a_{j+1}$, так, что во всех интервалах (a_j,a_{j+1}), $j\in\mathbb{N}$ функция u непрерывна, а в точках a_j, $j=2,3,4,\dots$ она может иметь разрывы первого рода.

Для любой точки x максимума кусочно-непрерывной функции u на $[0,\infty)$ существует такой отрезок $[a,b]$, что $x\in[a,b]$ и $u(y)=\mathrm{const}$ при $y\in(a,b)$, где $\lim\limits_{y\to a+0} u(y) = \lim\limits_{y\to b-0} u(y)$, для которого при достаточно малом $\varepsilon>0$ имеет место $u(x)<u(a)$, если $x\in(a-\varepsilon,a)$, и $u(x)<u(b)$, если $x\in(b,b+\varepsilon)$, $x\in(a,b)$. При этом если $x=a$ либо $x=b$, то допустима возможность, что $u(x)\neq\mathrm{const}$. Отрезок $[a,b]$ будем называть *отрезком максимальности* функции u.

Точку максимума мы будем называть *локальным максимумом* кусочно-непрерывной функции u, если достаточно малая ее окрестность не содержит отличных от нее максимальных точек и при этом $a=b$. Локальный максимум может как достигаться функцией u, если точка a является точкой ее непрерывности слева/справа, так и, в противном случае, не достигаться.

Для любой точки x минимума кусочно-непрерывной функции u на $[0,\infty)$ существует такой отрезок $[a,b]$, что $x\in[a,b]$ и $u(y)=\mathrm{const}$ при $y\in(a,b)$, где $\lim\limits_{y\to a+0} u(y) = \lim\limits_{y\to b-0} u(y)$, для которого при достаточно малом $\varepsilon>0$ имеет место $u(y)>u(a)$, если $y\in(a-\varepsilon,a)$, и $u(y)>u(b)$, если $y\in(b,b+\varepsilon)$. Если $x=a$ либо $x=b$, то допускается возможность, что $u(x)\neq\mathrm{const}$. Отрезок $[a,b]$ будем называть *отрезком минимальности* функции u.

Точку минимума мы называем *локальным минимумом* кусочно-непрерывной функции u, если она является изолированной, $a=b$, когда достаточно малая ее окрестность не содержит отличных от нее точек минимума. Аналогично понятию локального максимума, локальный минимум может как достигаться функцией u, если точка a является точкой ее непрерывности слева/справа, так и не достигаться в противном случае.

Замечание 3.1. Из данных определений следует, что точка $x=0$, по определению, всегда является либо точкой максимума, либо точкой минимума.

Определение 3.1. Неотрицательную кусочно-непрерывную функцию u на $[0,\infty)$, обладающую единственным отрезком максимальности, назовем *одновершинной* (*унимодальной*).

Введение этого термина связано с понятием одновершинного (унимодального) распределения вероятностей на $\mathbb{R}$, когда функция u представляет собой его плотность. Справедливо следующее довольно очевидное утверждение.

Теорема 3.1. *Для любой кусочно-непрерывной функции u на $[0,\infty)$ существует не более чем счетное дизъюнктивное разбиение области определения $[0,\infty) = \bigcup\limits_j [b_j, b_{j+1})$, $b_1 = 0$, $b_j < b_{j+1}$, где каждый из отрезков $[b_j, b_{j+1}]$ состоит только из точек максимальности функции u или только из ее точек минимальности, либо в отрезке, входящем в состав этого разбиения, функция u является монотонно невозрастающей/неубывающей.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть отрезки изменения функции u, которые не пересекаются ни с одним интервалом, состоящем из точек максимальности/минимальности. Пусть $[a,b]$ — такой отрезок. Не ограничивая общности, такой отрезок можно считать не имеющим пересечения ни с каким интервалом, в котором имеются точки максимальности/минимальности. Для него существуют такие точки $a' < a$ и $b' > b$, что u постоянна на интервалах (a', a), (b, b'). В противном случае можно расширить отрезок $[a,b]$, положив точку a равной наибольшей из всех точек, для которых интервал (a', a) обладает указанным свойством, либо $a' = -\infty$, а точку b' можно выбрать наименьшей среди всех возможных, либо $b' = \infty$.

Пусть x и y — пара произвольных точек из интервала (a,b), $x < y$, таких, что $u(x) \neq u(y)$. Допустим, что u не монотонна на (x,y). Положим, для определенности, что $u(x) \leqslant u(y)$. Тогда найдется точка z из (x,y) такая, что $u(z) < u(x)$, $u(z) < u(y)$. Следовательно, внутри интервала $(x,y) \subset (a,b)$ кусочно-непрерывная функция u имеет точку минимальности. Если на интервале (x,y) найдется точка z, в которой имеет место $u(z) > u(x)$, $u(z) > u(y)$, то функция u на интервале $(x,y) \subset (a,b)$ имеет точку максимальности. □

Следствие 3.1. *На каждом отрезке $[0,L]$, $L > 0$ кусочно-непрерывная функция u может иметь не более чем конечный набор отрезков максимальности и минимальности.*

Следствие 3.2. *Отрезки максимальности и минимальности кусочно-непрерывной функции u чередуются на полуоси $[0,\infty)$.*

Кусочно-непрерывную функцию u назовем *кусочно-гладкой*, если ее область определения $[0,\infty)$ представляется в виде не более чем счетного дизъюнктивного объединения $[0,\infty) = \bigcup\limits_j [a_j, a_{j+1})$, где $a_1 = 0$, $a_j < a_{j+1}$, и во всех интервалах (a_j, a_{j+1}), $j \in \mathbb{N}$ функция u непрерывно дифференцируема. В каждой из точек a_j, $j = 2, 3, 4, \dots$ ее производная может иметь лишь разрывы первого рода.

Определение 3.2. Неотрицательную кусочно-гладкую функцию v на $[0,\infty)$ назовем *сглаживающей*, если для любой неотрицательной кусочно-непрерывной функции u, обладающей конечным набором отрезков максимальности и минимальности, ее образ при действии операции свертки $v * u$ представляет собой функцию, у которой каждое из чисел отрезков максимальности и минимальности не превосходит, соответственно, чисел отрезков максимальности и минимальности функции u.

Замечание 3.2. Сглаживающее свойство функции — более широкое понятие, чем понятие строго одновершинного распределения [7,8]. Если функция v является сглаживающей и является плотностью абсолютно непрерывного распределения, то это распределение является обязательно строго одновершинным.

Пусть функция v на $[0,\infty)$ обладает носителем $[a,b]$, $a \geqslant 0$. Определим функцию $v^{(a)}$ формулой $v(x+a) = v^{(a)}(x)$, $x \in [0,\infty)$. Эта функция обладает носителем $[0, b-a]$.

Теорема 3.2. *Для того чтобы функция v была сглаживающей, необходимо и достаточно, чтобы сглаживающей была функция $v^{(a)}$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{supp} v = [a,b]$. Рассмотрим ее свертку с произвольной кусочно-непрерывной функцией u:

$$(v*u)(x) = \int\limits_0^x v(y)u(x-y)dy = \int\limits_a^x v(y)u(x-y)dy = \int\limits_0^{x-a} v(y+a)u(x-a-y)dy = \int\limits_0^{x-a} v^{(a)}(y)u(x-a-y)dy.$$

Так как функция, стоящая в правой части равенства, непрерывна, то все точки ее максимальности/минимальности на отрезке $[0, L]$ совпадают с точками максимальности/минимальности функции $v * u$ на отрезке $[0, L+a]$. Ввиду произвольности числа $L > 0$ убеждаемся в справедливости утверждения теоремы. $\square$

Следствие 3.3. *Множество всех точек максимальности/минимальности функции $v * u$ на отрезке $[0, L]$ получается переносом на $-a$ множества точек максимальности/минимальности функции $v^{(a)} * u$ на $[a, L]$.*

Справедливы следующие довольно очевидные утверждения.

Теорема 3.3. *Пусть $C > 0$ — произвольная постоянная. Для того чтобы функция v была сглаживающей, необходимо и достаточно, чтобы сглаживающей была функция Cv.*

Доказательство. Для любой функции u ее точки максимальности/минимальности совпадают с точками максимальности/минимальности функции Cu с произвольно выбранной постоянной $C > 0$. $\square$

Теорема 3.4. *Пусть $\mu > 0$ — произвольная постоянная. Для того чтобы функция $v(\cdot)$ была сглаживающей, необходимо и достаточно, чтобы сглаживающей была функция $v(\mu(\cdot))$.*

Доказательство. Пусть Σ — множество точек максимальности/минимальности функции $u(\cdot)$. Тогда для любого $\mu > 0$ множество $\mu\Sigma$ представляет точки максимальности/минимальности функции $u(\mu^{-1}(\cdot))$. Справедливость утверждения следует из равенства

$$\int_0^x v(\mu(x-y))u(y)dy = \mu^{-1}\int_0^{\mu x} v(\mu(\mu x - y)u(\mu^{-1}y)dy. \tag{3.1}$$

$\square$

Определим функцию $w(x; a, b, C)$, $a < b$ на $[0, \infty)$, $C > 0$ по формуле

$$w(x; a, b, C) = \begin{cases} C, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Вычислим свертку $(w(\cdot; a, b, C) * u)(x)$ с произвольной кусочно-непрерывной функцией u, носитель которой содержит $[a, b]$:

$$(w(\cdot; a, b, C) * u)(x) = \int_0^x w(y; a, b, C)u(x-y)dy =$$
$$= C\theta(x-a)\Big[\theta(b-x)\int_a^x u(x-y)dy + \theta(x-b)\int_a^b u(x-y)dy\Big] =$$
$$= C\theta(x-a)\Big[\theta(b-x)\int_0^{x-a} u(y)dy + \theta(x-b)\int_{x-b}^{x-a} u(y)dy\Big].$$

Значения ее производных при $x > a$ представляются формулой

$$\frac{d}{dx}(w(x; a, b, C) * u)(x) = C\begin{cases} \theta(x-a)u(x-0), & x < b; \\ \theta(x-a)\big[u(x-a+0) - u(x-b-0)\big], & x > b. \end{cases} \tag{3.2}$$

Обозначим через $w(x) = w(x; 0, 1, 1)$ плотность равномерного распределения на $[0, 1]$.

Теорема 3.5. *Если функция u обладает единственным интервалом максимальности или минимальности на $[0, \infty)$, то функция $w * u$ также обладает единственным интервалом максимальности, соответственно, минимальности. Если при этом точка максимума/минимума неотрицательной функции u на $[0, \infty)$ единственна и функция u не имеет интервалов постоянства, то точка максимума/минимума функции $w * u$ также единственна и эта функция не имеет интервалов постоянства.*

Доказательство. Из формулы (3.2) при $a = 0$, $b = C = 1$ следует, что $(w(\cdot) * u)(x)$ возрастает при $x < 1$, и поэтому ее точки стационарности возможны только при $x \geqslant 1$. Рассмотрим сначала случай, когда функция u непрерывна. В этом случае функция

$$(w * u)(x) = \int\limits_{\max\{0,x-1\}}^{x} u(y)dy$$

непрерывно дифференцируема, и поэтому каждая ее экстремальная точка x_*, определяемая обращением в нуль производной, может находиться только при $x > 1$, и она должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dx}(w * u)(x) = u(x) - u(x-1) = 0. \tag{3.3}$$

Разберем случай, когда u имеет единственный максимальный отрезок на $[0, \infty)$. Случай же, когда u обладает единственным минимальным отрезком, разбирается аналогично.

Положим, сначала, что u имеет единственную точку максимальности, и допустим противное, что у функции $w * u$ имеется пара точек x_j, $j \in \{1, 2\}$ максимума на $(0, \infty)$, причем $x_1 < x_2$. Они являются решениями уравнения (3.3). Так как точка максимума x_* функции единственна, то $x_j \geqslant x_*$, $j \in \{1, 2\}$. Равенство здесь невозможно, так как в противном случае точка x_* не единственна. Точно также получается, что $x_j - 1 < x_*$, $j \in \{1, 2\}$. Если при этом $u(x_2) = u(x_1)$, то функция u имеет интервал постоянства (x_1, x_2), что исключается условием теоремы. Таким образом, имеется единственная возможность $u(x_2) < u(x_1)$. Точно также рассуждая, находим, что $u(x_2 - 1) > u(x_1 - 1)$. Тогда, вычитая друг из друга равенства $u(x_j) = u(x_j - 1)$, получаем противоречие, так как $u(x_2) - u(x_1) < 0$ и одновременно $u(x_2) - u(x_1) = u(x_2 - 1) - u(x_1 - 1) > 0$.

Пусть теперь u кусочно-непрерывна. Найдется последовательность $\langle u_\varepsilon; \varepsilon > 0\rangle$ одновершинных функций u_ε, которая сходится к функции u при $\varepsilon \to +0$ в ее точках непрерывности. Эта последовательность строится следующим образом. Пусть функция u имеет разрыв первого рода в какой-то точке x_*. У функции u_ε эта точка разрыва устраняется посредством соединения точек $\langle x_* - \varepsilon, u(x_* - \varepsilon)\rangle$ и $\langle x_* + \varepsilon, u(x_* + \varepsilon)\rangle$ на графике функции u отрезком прямой, где ε выбирается настолько малым, чтобы на интервале $(x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon)$ не имелось точек разрыва функции u, отличных от x_*. Это возможно сделать, так как функция u имеет только лишь конечный набор точек разрыва. Так как точка x_* выбрана произвольно, то, проводя описанную процедуру устранения точек разрыва в каждой из таких точек функции u, построим функцию u_ε с фиксированной величиной ε. Так как величина $\varepsilon > 0$ выбрана произвольно при условии ее достаточной малости, то, выбрав монотонно стремящуюся к нулю последовательность $\langle \varepsilon_n > 0; n \in \mathbb{N}\rangle$ и проделав для каждого из значений ε_n описанную процедуру устранения точек разрыва, построим указанную выше последовательность функций $\langle u_\varepsilon; \varepsilon > 0\rangle$. Очевидно, что все функции u_ε в этой последовательности одновершинны и последовательность при $\varepsilon \to +0$ сходится к функции u поточечно в каждой из точек непрерывности функции u.

Все функции u_ε не имеют интервалов постоянства, если не имеет таких интервалов функция u. Тогда для каждой из функций $w * u_\varepsilon$, в силу непрерывности всех функций u_ε, утверждение теоремы справедливо, как это было установлено выше. Переходя к пределу в последовательности одновершинных функций $w * u_\varepsilon$, получим, что предельная функция $w * u$ также одновершинна. Она не имеет интервала постоянства в том случае, когда интервалов постоянства не имеет функция u.

Рассмотрим, теперь, не ограничивая общности, случай, когда у функции u имеется отрезок максимальности $[a, b]$ ненулевой длины. Допустим, что функция $w * u$ обладает отрезком максимальности $[a', b']$. При этом имеет место $a' \geqslant b$. Допустим, что имеется еще по крайней мере один отрезок экстремальности функции $w * u$. Этот отрезок является с необходимостью отрезком минимальности, и он расположен правее $[a', b']$, не пересекаясь с ним. Тогда имеется точка $y \in (a', b')$ непрерывности функции u, в которой имеет место $u(y) = u(y - 1)$, и существует точка $z > y$, в которой функция u непрерывна. Поэтому функция $w * u$ непрерывно дифференцируема и ее производная положительна, т. е. $u(z) > u(z-1)$. При этом обязательно должно иметь место $z - 1 < b$, $u(z - 1) \leqslant u(b)$. Тогда $y - 1 = z - 1$ и поэтому $u(y - 1) \leqslant u(z - 1)$. Из этих неравенств следует, что $u(y) < u(z)$. Но это неравенство противоречит тому, что точки y и z находятся на интервале невозрастания функции u, что указывает на отсутствие какой-либо точки минимальности. $\square$

Следствие 3.4. *Пусть при выполнимости утверждения теоремы относительно функции* u *ее единственный максимум/минимум реализуется в точке разрыва первого рода. В случае реализации максимума, точки* x_ε *максимумов функций* $w * u_\varepsilon$*, каждая из которых является решением уравнения* $u_\varepsilon(x_\varepsilon) = u_\varepsilon(x_\varepsilon - 1)$*, могут стремиться при* $\varepsilon \to 0$ *к точке максимума* x_* *функции* u *— решению уравнения* $u(x_* + 0) = u(x_* - 1)$*, если функция* u *имеет разрыв в точке* x_* *с отрицательным скачком. Наоборот, они могут стремиться к решению уравнения* $u(x_*) = u(x_* - 1 - 0)$*, если функция* u *имеет разрыв в точке* $x_* - 1$ *с положительным скачком.*

Аналогично, если минимум функции u *реализуется в точке разрыва, то точки* x_ε *минимумов функций* $w * u_\varepsilon$*, каждая из которых является решением уравнения* $u_\varepsilon(x_\varepsilon) = u_\varepsilon(x_\varepsilon - 1)$*, могут стремиться при* $\varepsilon \to 0$ *к точке* x_* *минимума функции* $w * u$ *— решению уравнения* $u(x_*) = u(x_* - 1 - 0)$*, если функция* u *имеет разрыв в точке* $x_* - 1$ *с отрицательным скачком. Наоборот, они могут стремиться к решению уравнения* $u(x_* + 0) = u(x_* - 1)$*, если функция* u *имеет разрыв в точке* x_* *с положительным скачком.*

Замечание 3.3. В связи с доказанным утверждением, функция w представляет собой плотность т. н. *строго одновершинного* распределения. Свертка такого распределения с любым одновершинным распределением является плотностью одновершинного распределения. Однако, в формулировке теоремы утверждается не только одновершинность свертки, но также указывается тип вершины.

Теорема 3.6. *Функция* $w(x) \equiv w(x; 0, 1; 1)$ *является сглаживающей на* $[0, \infty)$.

Доказательство. Функция $(w(\cdot) * u)(x)$ возрастает при $x < 1$, и поэтому ее точки стационарности/постоянства возможны только при $x \geqslant 1$. Как и при доказательстве теоремы 3.5, рассмотрим сначала случай, когда функция u непрерывна. Если функция u имеет единственный максимум/минимум, то утверждение теоремы справедливо в силу указанной теоремы 3.5.

Не ограничивая общности, будем считать, что все экстремальные точки функции u изолированные. В этом случае понятие сглаживаемости определено для функций u, обладающих конечным набором точек максимума и минимума. Тогда можно считать, что все точки $x_1, x_2, \dots, x_N$ экстремальности функции u находятся на интервале $(0, 1)$, т. е. функция u либо монотонно не убывает, либо монотонно не возрастает при $x > 1$. Такого положения всегда можно добиться выбором, согласно теореме 3.4, подходящего масштабного множителя $\mu > 0$ и переходом к эквивалентной в смысле сглаживающего свойства функции.

Таким образом, интервал $(0, 1)$ состоит из $N + 1$ интервала (x_j, x_{j+1}) монотонного изменения функции u. Они разделены граничными точками x_j, $j = 0 \div N$, $x_0 = 0$, $x_{N+1} = 1$. Допустим, для определенности, что последняя экстремальная точка x_N функции u является максимумом. Тогда функция u не возрастает при $x > 1$.

Точки x экстремальности функции $w * u$ с необходимостью удовлетворяют уравнению $u(x) = u(x-1)$ и в рассматриваемом случае находятся на интервале $(1, 2)$ ввиду монотонного изменения функции u при $x > 1$. Они являются точками, в которых происходит пересечение графиков монотонной функции u и функции $u_- \equiv u(x - 1)$, которая обладает интервалами $(x_j - 1, x_{j+1} - 1)$ монотонного изменения в $(1, 2)$, разделенных граничными точками $x_j - 1$, $j = 0 \div N$. Ввиду монотонного невозрастания функции u на $(1, 2)$ ее график может иметь не более одной точки пересечения с графиком функции u_- на каждом интервале из числа указанных, где она не убывает. Каждая такая точка пересечения является точкой максимума функции $w * u$, так как $(w * u)(x - \delta) = u(x - \delta) - u(x - 1 - \delta) > 0$ и $(w * u)(x + \delta) = u(x + \delta) - u(x - 1 + \delta) < 0$ при достаточно малых $\delta > 0$. На тех же интервалах $(x_j - 1, x_{j+1} - 1)$, где функция u_- не возрастает, ее график может иметь несколько точек пересечения с графиком функции u. Точки пересечения в таких интервалах могут быть только точками минимума функции $w * u$ ввиду того, что при достаточно малых $\delta > 0$ должно выполняться $(w * u)(x - \delta) = u(x - \delta) - u(x - 1 - \delta) < 0$ и $(w * u)(x + \delta) = u(x + \delta) - u(x - 1 + \delta) > 0$. А так как точки максимальности и минимальности должны чередоваться, то только одна из точек пересечения на каждом из интервалов невозрастания функции u_- может быть точкой минимальности. Таким образом, функция $w * u$ может иметь не более, чем $N + 1$ точку экстремальности, так как интервал $(1, 2)$ разбивается точками $x_j + 1$, $j = 0 \div N$ на $N + 1$ интервалов.

Наконец, заметим, что на первом интервале $(1, x_1 + 1)$ точка пересечение графиков функций $u_-(x)$ и $u(x)$ отсутствует, так как такая точка соответствовала бы экстремальной точке функции $w * u$ на интервале $(0, x_1)$, которая отсутствует ввиду монотонного неубывания на нем этой функции. Таким образом, на интервале $(1, 2)$ имеется не более чем N точек пересечения графиков функций u_- и u. $\square$

Обобщением доказанной теоремы является следующая теорема.

Теорема 3.7. *Для любой упорядоченной пары* $\{a, b\} \subset [0, \infty)$, $a < b$ *и любой постоянной* $C > 0$ *функция* $w(x; a, b, C)$ *на* $[0, \infty)$ *является сглаживающей.*

Доказательство. В силу утверждения 3.3 множество всех точек максимальности/минимальности функции $w(\cdot; a, b, C) * u$ на отрезке $[0, L]$ получается переносом на $(-a)$ множества точек максимальности/минимальности функции $w(\cdot; 0, b - a, C) * u$ на $[a, L + a]$. Следовательно, числа отрезков максимальности/минимальности функции $w(\cdot; 0, b-a, C)*u$ не превосходит чисел таких же отрезков у функции $w(\cdot; a, b, C) * u$. Таким образом, достаточно доказать, что сглаживающей является функция $w(\cdot; 0, b - a, C)$. В силу теоремы 3.3 свойство сглаживания не зависит от величины постоянной C, а в силу теоремы 3.4 свойство сглаживания функции $w(\cdot; 0, b - a, C)$ не зависит от размера $(b - a)$ ее носителя.

Так как функция $w(x)$ является сглаживающей на $[0, \infty)$ в силу теоремы 3.5, то функция $w(x; a, b, C)$ также является сглаживающей. $\square$

Замечание 3.4. Сглаживающая функция $w(x; a, b, (b - a)^{-1})$ является плотностью строго одновершинного по Ибрагимову распределения. Очевидно, что для нее справедлива теорема Ибрагимова [7, 8], так как, полагая

$$u(x; \eta) = \begin{cases} w(x; a, b, (b - a)^{-1}), & x \in [a, b]; \\ (b - a)^{-1} \exp(-\eta(x - b)^2), & x \geqslant b; \\ (b - a)^{-1} \exp(-\eta(x - a)^2), & x \leqslant a, \end{cases}$$

получаем логарифмически вогнутую плотность распределения на $\mathbb{R}$. Переходом к пределу $\eta \to \infty$ получаем, что распределение вероятностей с плотностью $w(x; a, b, (b - a)^{-1})$ является пределом распределений, каждое из которых обладает логарифмически вогнутой плотностью.

Теорема 3.8. *Свертка любых двух сглаживающих функций* v_1 *и* v_2 *на* $[0, \infty)$ *является сглаживающей функцией на* $[0, \infty)$.

Доказательство. Пусть u — произвольная кусочно-непрерывная функция на $[0, \infty)$, имеющая N экстремальных точек. Тогда, согласно определению сглаживающей функции, $v_1 * u$ имеет не более чем N экстремальных точек. Применяя к этой функции операцию свертки со сглаживающей функцией v_2, находим, что функция $v_2 * (v_1 * u) = (v_2 * v_1) * u$ также имеет не более чем N экстремальных точек. $\square$

Теорема 3.9. *Предел последовательности* $\langle v_n;\ n \in \mathbb{N}\rangle$ *сглаживающих функций является сглаживающей функцией на* $[0, \infty)$.

Доказательство. Для произвольной кусочно-непрерывной функции u с N экстремальными точками рассмотрим последовательность $\langle v_n * u; n \in \mathbb{N}\rangle$. Ввиду сглаживающего свойства функций v_n каждая функция этой последовательности имеет не более чем N экстремальных точек. Так как эта последовательность, по предположению, имеет предел при $N \to \infty$, то имеет какой-то предел M последовательность $\langle M_n; n \in \mathbb{N}\rangle$, где M_n — число экстремальных точек у функции $v_n * u$, $M_n \leqslant N$. Переходя к пределу в неравенстве $M_n \leqslant N$, получаем, что $M \leqslant N$. $\square$

Следствием теорем 3.7–3.9 является следующая теорема.

Теорема 3.10. *Для любого не более чем счетного множества* $A \subset \mathbb{N}$ *свертка функций* $w(\cdot; a_j, b_j, C_j)$, *определяемая множеством троек чисел* $\{\langle a_j, b_j, C_j\rangle; j \in A\}$, *является сглаживающей функцией*

$$v(x) = \Big(\bigotimes_{j \in A} w(\cdot; a_j, b_j, C_j)\Big)(x), \quad x \in [0, \infty).$$

Доказательство. Доказательство получается применением утверждения 3.9 к последовательности сглаживающих, в силу теоремы 3.8, функций

$$v_n(x) = \Big(\bigotimes_{j \in A_N} w(\cdot; a_j, b_j, C_j) \Big)(x), \quad x \in [0, \infty),$$

где $A_N = A \cap I_N$. □

4. Свойства функций w_*^N

Неотрицательные кусочно-непрерывные функции u на $[0, \infty)$ образуют полугруппу относительно бинарной операции свертки пары таких функций. Сглаживающие функции в этой полугруппе образуют подполугруппу. Каждая из функций $w(\cdot; a, b, C)$, $0 < a < b$, $C > 0$ является ее образующей этой. Изучим качественное поведение степеней $w_*^m(x)$, $m \in \mathbb{N}$ плотности распределения $w(x) = \theta(x)\theta(1-x)$. Прежде всего докажем следующую формулу.

Теорема 4.1. *Для плотностей $w_*^m(x)$, $m \in \mathbb{N}$ справедлива формула*

$$w_*^m(x) = w_*^m(m - x). \tag{4.1}$$

Доказательство. Обозначим

$$\bar{u}_j(k) = \int_{-\infty}^{\infty} u_j(x) e^{ikx} dx, \quad j \in \{1, 2\}.$$

Фурье-образы плотностей $u_1(x)$ и $u_2(x)$, согласно (2.1),

$$(\overline{u_1 * u_2})(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} (u_1 * u_2)(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} u_1(y) u_2(x - y) dy \Big) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} u_1(y) \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} u_2(x - y) dx \Big) dy = \bar{u}_1(k) \bar{u}_2(k).$$

Следовательно, Фурье-образ m-й степени плотности $u(x)$

$$(\overline{u_*^m})(k) = \int_{-\infty}^{\infty} (u_*^m)(x) e^{ikx} dx, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

удовлетворяет соотношению $(\overline{u_*^m})(k) = (\overline{u_*^{m-1}})(k) \cdot \bar{u}(k)$, и поэтому

$$(\overline{u_*^m})(k) = \bar{u}^m(k).$$

Плотность $w(x)$ обладает свойством $w(x) = w(1 - x)$. Следовательно, для ее Фурье-образа справедливы равенства

$$\bar{w}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} w(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} w(1 - x) dx = e^{ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-1)} w(1 - x) dx = e^{ik} \bar{w}(-k),$$

т. е.

$$\bar{w}(k) = e^{ik} \bar{w}(-k).$$

Отсюда следует, что $\bar{w}^m(k) = e^{ikm} \bar{w}^m(-k)$. Применив обратное преобразование Фурье к обеим частям этого равенства, находим

$$w_*^m(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx} \bar{w}^m(k) dk = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ik(x-m)} \bar{w}^m(-k) dk = w_*^m(m - x).$$

□

Следствие 4.1. *Максимум функции $w_*^m(x)$ находится в точке $x = m/2$.*

Доказательство. Утверждение следует из (4.1). □

Следующее утверждение является уточнением известной теоремы Ибрагимова (см. [7]) о т. н. *строго унимодальных* распределениях при применении ее к плотности $w(x)$.

Следствие 4.2. *Функции $w_*^m(x)$ при $m \geqslant 2$ имеют единственную точку максимума.*

Доказательство. Функция $w_*^2(x)$ имеет явным образом единственную точку максимума в $x = 1$. Справедливость общего утверждения для любого числа $m \geqslant 2$ получается индукцией по $m > 2$ с использованием сглаживающего свойства функции w. □

Последовательное вычисление степеней операции свертки плотности $w(x)$ осуществляется на основе формулы

$$w_*^{m+1}(x) = \int_0^x w(x-y)w_*^m(y)dy = \int_0^x \theta(x-y)\theta(1-x+y)w_*^m(y)dy. \tag{4.2}$$

Очевидно, что $w_*^m(x) = \theta(x)w_*^m(x)$. Более того, на основе формулы (4.2) индукцией по m доказывается следующая теорема.

Теорема 4.2. *Каждая плотность $w_*^m(x)$ сосредоточена на $[0, m]$, $m = 1, 2, 3, \dots$, т. е. имеет место формула $w_*^m(x) = \theta(m-x)w_*^m(x)$.*

Доказательство. Заменим плотность $w_*^m(y)$ в подынтегральном выражении на $w_*^m(y)\theta(m-y)$, согласно предположению индукции. Ввиду того, что при $x > m+1$ и $y < m$, $1 + y > x$ должно выполняться $1+m > 1+y > x > m+1$, что невозможно, имеем $\theta(m-y)\theta(1-x+y)\theta(x-m-1) = 0$. Следовательно, интеграл в (4.2) пропорционален $\theta(m+1-x)$. □

Согласно (4.2), учитывая, что функция $w_*^{m+1}(x)$ сосредоточена на $[0, m+1]$, запишем ее выражение на этом отрезке в виде

$$w_*^{m+1}(x) = \int_0^x \theta(x-y)\theta(1-x+y)w_*^m(y)dy = \int_0^x w_*^m(y)dy + \theta(x-1)\int_{x-1}^x w_*^m(y)dy. \tag{4.3}$$

Индукцией по m с использованием (4.2) доказывается, что функции $w_*^m(x)$ непрерывны, начиная с $m = 2$, и при $m > 2$ они s раз непрерывно дифференцируемы, где $s < m-2$.

На основе формулы (4.3) докажем следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Для функций $w_*^m(x)$ имеет место представление*

$$w_*^m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \theta(x-k)\theta(k+1-x)P_{m,k}(x), \tag{4.4}$$

где для полиномов $P_{m,k}(x)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $m = 1, 2, 3, \dots$ справедливы рекуррентные соотношения

$$P_{m+1,0}(x) = \int_0^x P_{m,0}(y)dy, \quad x \in [0,1); \tag{4.5}$$

$$P_{m+1,m}(x) = \int_{x-1}^m P_{m,m-1}(y)dy, \quad x \in [m, m+1); \tag{4.6}$$

$$P_{m+1,k}(x) = \int_{x-1}^k P_{m,k-1}(y)dy + \int_k^x P_{m,k}(y)dy, \quad x \in [k, k+1), k = 1 \div m-1. \tag{4.7}$$

Доказательство. Представление (4.4) имеет место при $m = 1$ с $P_{1,0}(x) = 1$. Построим индукционный шаг от m к $m+1$. Подстановка разложения (4.4) в правую часть формулы (4.7) при $x \in [0, m+1]$ приводит к равенству

$$w_*^{m+1}(x) = \theta(1-x)\int_0^x P_{m,0}(y) + \theta(x-1)\sum_{k=0}^{m-1}\int_{x-1}^x \theta(y-k)\theta(k+1-y)P_{m,k}(y)dy, \tag{4.8}$$

где учтено, что в первый интеграл дает ненулевой вклад только слагаемое с полиномом $P_{m,0}(y)$. Последний интеграл при $k = 0, 1, 2, \ldots$ запишем в виде

$$\int\limits_{x-1}^{x} \theta(y-k)\theta(k+1-y)P_{m,k}(y)dy = \theta(x-k)\theta(k+2-x)\int\limits_{x-1}^{x} \theta(y-k)\theta(k+1-y)P_{m,k}(y)dy,$$

так как при $x-1 > k+1$ и при $x < k$ он равен нулю.

При $k < m$, если $k+1 < x < k+2$, то $k < x-1 < k+1$, и в этом случае

$$\int\limits_{x-1}^{x} \theta(y-k)\theta(k+1-y)P_{m,k}(y)dy = \int\limits_{x-1}^{k+1} P_{m,k}(y)dy;$$

если же $k < x < k+1$, то $x-1 < k$, и в этом случае

$$\int\limits_{x-1}^{x} \theta(y-k)\theta(k+1-y)P_{m,k}(y)dy = \int\limits_{k}^{x} P_{m,k}(y)dy.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{x-1}^{x} \theta(y-k)\theta(k+1-y)P_{m,k}(y)dy = \theta(x-k-1)\theta(k+2-x)\int\limits_{x-1}^{k+1} P_{m,k}(y)dy +$$
$$+\,\theta_k\theta(x-k)\theta(k+1-x)\int\limits_{k}^{x} P_{m,k}(y)dy,$$

где $\theta_k = 1 - \delta_{k,0}$. Подставив полученные представления для интегралов в (4.8), находим, что

$$w_*^{m+1}(x) = \theta(x)\theta(1-x)\int\limits_{0}^{x} P_{m,0}(y) +$$
$$+\sum_{k=0}^{m-1}\Big[\theta_k\theta(x-k)\theta(k+1-x)\int\limits_{k}^{x} P_{m,k}(y)dy + \theta(x-k-1)\theta(k+2-x)\int\limits_{x-1}^{k+1} P_{m,k}(y)dy\Big] =$$
$$= \sum_{k=1}^{m-1}\theta(x-k)\theta(k+1-x)\Big[\int\limits_{k}^{x} P_{m,k}(y)dy + \int\limits_{x-1}^{k} P_{m,k-1}(y)dy\Big] +$$
$$+\,\theta(x)\theta(1-x)\int\limits_{0}^{x} P_{m,0}(y)dy + \theta(x-m)\theta(m+1-x)\int\limits_{x-1}^{m} P_{m,m-1}(y)dy.$$

Определяя функции $P_{m+1,0}(x)$, $P_{m+1,m}(x)$, $P_{m+1,k}$, $k = 1 \div m-1$, согласно (4.5)–(4.7), получаем искомое представление для плотности $w_*^{m+1}(x)$:

$$w_*^{m+1}(x) = \sum_{k=0}^{m}\theta(x-k)\theta(k+1-x)P_{m+1,k}(x).$$

$\square$

Следствие 4.3. *Полиномы $P_{m+1,k}(x)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$ удовлетворяют тождествам*

$$P_{m,k}(x) = P_{m,m-1-k}(m-x). \tag{4.9}$$

Доказательство. Подставляя в тождество (4.1) разложения для функций $w_*^m(x)$ и $w_*^m(m-x)$ по формуле (4.4), находим, что должно выполняться равенство

$$\sum_{k=0}^{m-1}\theta(x-k)\theta(k+1-x)P_{m,k}(x) = \sum_{k=0}^{m-1}\theta(m-x-k)\theta(k+1-m+x)P_{m,k}(m-x).$$

Замена переменной суммирования $m-1-k$ на k в сумме правой части равенства приводит к тождеству

$$\sum_{k=0}^{m-1}\theta(x-k)\theta(k+1-x)P_{m,k}(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\theta(x-k)\theta(k+1-x)P_{m,-1-k}(m-x),$$

из которого следует, что имеет место (4.9) при $x\in[k,k+1]$. ☐

Замечание 4.1. Из условия непрерывности плотностей w_*^m, $m\geqslant 2$ и непрерывности их производных $(w_*^m)^{(s)}$ порядка $s\leqslant m-2$, $m>2$ в точках $x=1\div m$, заключаем, что полиномы $P_{m,k}$ должны обладать свойством $P_{m,k}^{(s)}(k+1)=P_{m,k+1}^{(s)}(k+1)$ при $k=0\div m-2$ и указанных значениях s, а также должно выполняться $P_{m,m-1}(m)=0$.

Явный вид полиномов $P_{m,k}$ находится на основе формул (4.3)–(4.5), $k=1\div m$, $m\in\mathbb{N}$. Он определяется ими однозначно, если учесть, что $P_{1,0}(x)=1$ вследствие определения функции $w(x)=\theta(x)\theta(1-x)$, $x\in\mathbb{R}$ и разложения (3.1). Этот факт легко устанавливается рассуждением по индукции при $m\in\mathbb{N}$ при заданной функции $P_{1,0}(x)$ сначала для полиномов $P_{m,0}$ и $P_{m,m-1}$, а затем для каждого фиксированного значения $k<m$. Доказательству утверждения, устанавливающего вид полиномов $P_{m,k}$, мы предпошлем следующие комбинаторные леммы.

Лемма 4.1. *Для любых $m\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{N}_+$, $s<m$ имеет место тождество*

$$\sum_{l=s}^{m}\frac{(-1)^l}{(l-s)!(m-l)!}=0.$$

Доказательство. Справедливы следующие тождественные преобразования:

$$\sum_{l=s}^{m}\frac{(-1)^l}{(l-s)!(m-l)!}=\sum_{l=s}^{m}(-1)^l\frac{l!}{((l-s)!}\mathrm{C}_m^l=\Big[\frac{d^s}{d\xi^s}\sum_{l=0}^{m}(-\xi)^l\mathrm{C}_m^l\Big]_{\xi=1}=\Big[\frac{d^s}{d\xi^s}(1-\xi)^m\Big]_{\xi=1}=0$$

ввиду $x<m$. ☐

Следствие 4.4. *Для любых $m\in\mathbb{N}$ и $s\in\{0,1,\ldots,m-1\}$ имеет место тождество*

$$\sum_{l=1}^{m}(-1)^l l^s\mathrm{C}_m^l=0. \tag{4.10}$$

Доказательство. При $s=0$ имеем известное комбинаторное тождество. Положим, что (4.10) имеет место для всех $s\in\{0,1,\ldots,t\}$, $t<m-1$. Тогда для любого полинома Π степени не выше, чем t, имеет место аналогичное тождество

$$\sum_{l=1}^{m-1}(-1)^l\Pi(l)\mathrm{C}_m^l=0.$$

Так как $l(l-1)\ldots(l-t+2)=l^{t+1}+\Pi(l)$, где $\deg\Pi\leqslant t$, то используя тождество леммы 4.2 при $s=t+1$, получаем равенство (4.10) при $s=t+1$. ☐

Лемма 4.2. *Для любых $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}_+$, $n<m$ при $z\in\mathbb{C}$ имеет место тождество*

$$(-1)^{m-1}(z-m)^n=\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k(z-k)^n\mathrm{C}_m^k. \tag{4.11}$$

Доказательство. Положив $s=n-k$, $k\in\{0,1,\ldots,n\}$, запишем (4.11) в виде

$$(-1)^{m-1}m^{n-k}=\sum_{l=1}^{m-1}(-1)^l l^{n-k}\mathrm{C}_m^l.$$

Просуммировав эти тождества по $k\in\{0,1,\ldots,n\}$ с применением формулы бинома Ньютона, предварительно умножив их на $(-1)^{n-k}z^k\mathrm{C}_n^k$, получим (4.11). ☐

Теорема 4.4. *Для полиномов $P_{m,k}$ справедлива формула*

$$P_{m,k}(x) \equiv \frac{S_{m,k}(x)}{(m-1)!}, \quad S_{m,k}(x) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l (x-l)^{m-1} \mathrm{C}_m^l \tag{4.12}$$

при $x \in [k, k+1]$, $k = 0 \div m-1 \in \mathbb{N}$, $m = 2, 3, \ldots$

Доказательство. Рассуждая индукцией по $m \in \mathbb{N}$ с использованием формулы (4.5) и условия $P_{1,0}(x) = 1$ при $m = 1$, устанавливаем, что имеет место формула $P_{m,0}(x) = [(m-1)!]x^{m-1}$, $x \in [0,1]$. Точно также индуктивным рассуждением при $m \in \mathbb{N}$, используя формулу (4.6) при том же условии, если $m = 1$, находим, что $P_{m,m-1}(x) = (-1)^{m-1}[(m-1)!](x-m)^{m-1}$, $x \in [m-1, m]$.

При фиксированных функциях $P_{m,0}$, $m \in \mathbb{N}$ формулу (4.7) можно рассматривать как систему неоднородных интегральных уравнений относительно семейства кусочно-непрерывных функций $\{P_{m,k}(x);\ k = 1 \div m-1, m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}\}$, которые определены, соответственно, на $[k, k+1]$. Эта система уравнений определяет указанное множество полиномов однозначным образом. Необходимо доказать, что все функции этого семейства имеют вид (4.12) при условии, что $P_{m,0}(x) = [(m-1)!]x^{m-1}$, $x \in [0,1]$ и $P_{m,m-1}(x) = (-1)^{m-1}[(m-1)!](x-m)^{m-1}$, $x \in [m-1, m]$.

Из этой системы уравнений дифференцированием по x получаем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{P}_{m+1,k}(x) = P_{m,k}(x) - P_{m,k-1}(x-1), \quad k = 1 \div m-1, m \in \mathbb{N}, \tag{4.13}$$

где каждое уравнение выполняется на отрезке $[k, k+1]$ для фиксированных значений k и m. Эта система дифференциальных уравнений однозначно разрешима при дополнительном условиях в точках $x = k$, $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$. Таковыми являются условия непрерывности $P_{m,k-1}(k) = P_{m,k}(k)$, где $P_{m,1}(1) = P_{m,0}(1) = [(m-1)!]^{-1}$ и $P_{m,m-2}(m-1) = P_{m,m-1}(m-1) = [(m-1)!]^{-1}$, согласно уже вычисленным функциям $P_{m,0}$, $P_{m,m-1}$.

Доказательство теперь состоит в верификации того, что набор полиномов (4.12) удовлетворяет системе уравнений (4.13) и условиям непрерывности. При указанных значениях k и m имеет место $\dot{S}_{m+1,k}(x) = mS_{m+1,k}(x)$. Кроме того, при тех же значениях, имеет место равенство

$$S_{m,k}(x) - S_{m,k-1}(x-1) = \left[x^{m-1} + \sum_{l=1}^{k} (-1)^l (x-l)^{m-1} \Big(\mathrm{C}_m^{l-1} + \mathrm{C}_m^l\Big)\right] =$$

$$= \sum_{l=0}^{k} (-1)^l (x-l)^{m-1} \mathrm{C}_{m+1}^l = S_{m+1,k}(x), \quad k = 1 \div m-1.$$

где введены биномиальные коэффициенты C_m^l и использовано тождество $\mathrm{C}_m^{l-1} + \mathrm{C}_m^l = \mathrm{C}_{m+1}^l$. Тогда полиномы $S_{m,k}(x)/(m-1)!$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (4.13). Выполнимость условий непрерывности для этих полиномов в точках $2, \ldots, m-2$ следует из того, последнее слагаемое при $l = k+1$ в сумме $S_{m,k+1}(k+1)$ равно нулю и поэтому она совпадает с суммой $S_{m,k}(k+1)$. В точке же $x = 1$ имеем $S_{m,1}(1) = S_{m,0}(1) = 1$. Наконец, выполнимость условия непрерывности в точке $x = m-1$ следует из формулы (4.13) при $x = m$. $\square$

5. Одновершинность функции $g(x)$

В этом разделе мы найдем условия унимодальности функции g — абсолютно непрерывной части плотности распределения $g^{(N)}$ вероятностей экстенсивного функционала от случайной последовательности $\langle \tilde{x}_k, k = 1 \div N\rangle$ в пуассоновском пределе при $0 < p < 1$ в случае, когда компоненты последовательности распределены с общей плотностью $w(x)$.

Тогда формула (2.2), при учете разложения (4.4), принимает вид разложения по целочисленным интервалам

$$g_N(x) = \sum_{m=1}^{N} \mathrm{C}_N^m p^m (1-p)^{N-m} w_*^m(x) = \sum_{m=1}^{N} \mathrm{C}_N^m p^m (1-p)^{N-m} \sum_{k=0}^{m-1} \theta(x-k)\theta(k+1-x) P_{m,k}(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \theta(x-k+1)\theta(k-x) R_k^{(N)}(x,p)$$

с коэффициентами

$$R_k^{(N)}(x,p) = (1-p)^N \sum_{m=k}^{N} \mathrm{C}_N^m \frac{\nu^m}{(m-1)!} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l (x-l)^{m-1} \mathrm{C}_m^l,$$

$\nu = p/(1-p)$, согласно (4.12). В пуассоновском пределе $N \to \infty$, $p = \lambda/N$ функция (2.3) $g(x) = \lim\limits_{N\to\infty} g^{(N)}(x)$ представляется разложением

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta(x-k)\theta(k+1-x) R_{k+1}(x,\lambda) \tag{5.1}$$

с коэффициентами $R_k(x,\lambda) = \lim\limits_{N\to\infty} R_k^{(N)}(x,p)$,

$$R_k(x) = e^{-\lambda} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} P_{m,k-1}(x) = e^{-\lambda} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\lambda^m}{(m-1)!} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^l}{l!(m-l)!} (x-l)^{m-1}. \tag{5.2}$$

Следующее утверждение описывает дифференциальные свойства функции g.

Теорема 5.1. *При любом $p \in (0,1)$ функция g — кусочно-гладкая на $\mathbb{R}_+$. Она имеет разрыв 1-го рода в точке $x_* = 1$, с $g(1-0) > g(1+0)$. Точка $x_* = 1$ является ее точкой максимальности. В точке $x = 2$ функция g непрерывна, но имеет разрыв 1-го рода производной в точке $x = 2$ и она непрерывно-дифференцируема на $\mathbb{R}_+ \setminus \{1,2\}$.*

Доказательство. Наличие разрывов у функции g в $x = 1$ и у функции $\dot{g}$ в $x = 2$, а также непрерывная дифференцируемость g на $\mathbb{R}_+ \setminus \{1,2\}$ следуют из представления (5.1), в котором функции R_k, $k \in \mathbb{N}$ согласно (5.2) непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$, причем из (5.2) также следует, что $R_1(1-0) > R_2(1+0)$, $R_k(k-0) = R_{k+1}(k+0)$, $k \geqslant 2$ и $\dot{R}_2(2-0) \neq R_3(2+0)$, $\dot{R}_k(k-0) = R_{k+1}(k+0)$, $k \geqslant 3$. В самом деле,

$$g(1-0) = R_1(1-0) = e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!(m-1)!},$$

$$g(1+0) = R_2(1+0) = e^{-\lambda} = R_1(1-0) - \lambda.$$

Точно также, на основе (5.2), находим

$$\dot{g}(2-0) = \dot{R}_2(2-0) = e^{-\lambda} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!(m-2)!} [2^{m-2} - m], \tag{5.3}$$

$$\dot{g}(2+0) = \dot{R}_3(2+0) = R_2(2-0) - \frac{\lambda^2}{2}. \tag{5.4}$$

Принимая во внимание (5.3), (5.4) и возрастание функции R_1 на отрезке $[0,1]$, мы видим, что в точке x_* реализуется вершина функции g со значением $R_1(1)$. □

Наконец, докажем утверждение, представляющее условия унимодальности функции g.

Теорема 5.2. *Если параметр $\lambda > 0$ удовлетворяет условию*

$$1 > \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{m!(m-1)!}, \tag{5.5}$$

то функция g имеет единственный максимум в точке $x_* = 1$. Если, наоборот, g имеет единственный максимум в x_*, то параметр λ с необходимостью удовлетворяет условию $\sum\limits_{m=3}^{\infty} \dfrac{\lambda^{m-2}}{m!(m-2)!} < 1/2$.

Доказательство. Введем в рассмотрение функции

$$w_k^{(N)}(x) = e^{-\lambda} \sum_{l=1}^{N} \frac{\lambda^m}{(m+k)!} w_*^m, \qquad k \in \mathbb{N}_+,\ N \geqslant 2. \tag{5.6}$$

Достаточность. Доказательство проведем индукцией по N. При $N = 2$ все функции $w_k^{(2)} = \lambda w/(1+k)! + \lambda^2 w_*^2/(2+k)!$, $k \in \mathbb{N}$ кусочно-непрерывны с разрывом 1-го рода в x_*, одновершинны с вершиной в x_* и не имеют интервалов постоянства, так как непрерывна и не имеет интервалов постоянства функция $w_*^2(x) = x\theta(x)\theta(1-x) + (2-x)\theta(x-1)\theta(2-x)$. Она имеет единственную вершину в x_*, а функция $w(x) = \{1, x \in [0,1]; 0, x \in (0,\infty)\}$.

Построим индукционный шаг от значения N к значению $N+1$. Положим, что все функции $w_k^{(N)}$ кусочно-непрерывны со скачком в x_*, каждая из них не имеет интервалов постоянства, а также обладает единственной вершиной в x_*. Тогда каждая функция $w * w_k^{(N)}$, $k \in \mathbb{N}_+$ непрерывна, так как непрерывны все функции w_*^m, $m \geqslant 2$. Каждая из них не имеет интервалов постоянства и имеет единственную вершину z_k, $k \in \mathbb{N}_+$ ввиду сглаживающего свойства функции w. При этом точки z_k удовлетворяют неравенству $z \geqslant x_*$ ввиду возрастания всех функций w_*^m на $[0,1]$, $m \geqslant 2$. Функции $w_k^{(N)}$ по предположению индукции убывают на (x_*, ∞). Из ограничения на параметр λ в условии теоремы следует, что

$$w_k^{(N)}(0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda}{k!} > e^{-\lambda}\frac{\lambda}{k!}\sum_{m=2}^{N}\frac{\lambda^m}{m!(m-1)!} > e^{-\lambda}\frac{\lambda}{k!}\sum_{m=2}^{N}\frac{\lambda^m}{(m+k)!(m-1)!} = w_k^{(N)}(1+0),$$

где использовано неравенство $(m+k)! > k!m!$. Таким образом, скачок $w_k^{(N)}(x_*-0) - w_k^{(N)}(x_*+0) = \lambda^1/(k+1)!$ у каждой из функций $w_k^{(N)}$ в точке x_* превосходит разность $w_k^{(N)}(0) - w_k^{(N)}(1+0)$. Тогда согласно утверждению 3.4 каждая из функций $(w * w_k^{(N)})(x)$, $k \in \mathbb{N}_+$ имеет вершину $z_k \leqslant 1$, и поэтому $z_k = x_*$.

Рассмотрим теперь функции $\lambda(w/(k+1)! + w * w_k^{(N)})$ при $k \in \mathbb{N}$. Ввиду $w(x) = \{1, x \in [0,1]; 0, x \in (0,\infty)\}$ они являются кусочно-непрерывными с одним разрывом 1-го рода в x_*, не имеют интервалов постоянства и одновершинны с вершиной в x_*. Кроме того,

$$\lambda\big[(w/(k+1)! + w * w_k^{(N)}\big] = \sum_{m=1}^{N}\frac{\lambda^{m+1}w_*^{m+1}}{(k+m)!} = w_{k-1}^{N+1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

что завершает построение индукционного шага. Из одновершинности всех функций $w_k^{(N)}$ с вершиной в x_* следует, в частности, что таковой является функция с $k = 0$. Переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем, что предельная функция $g = \lim\limits_{N\to\infty} w_0^{(N)}$ одновершинна с вершиной в точке $x_* = 1$, так как предел одновершинных функций является одновершинной функцией.

Необходимость. Если g одновершинна с вершиной в точке x_*, то $\dot{g}(x_*+0) < 0$. Следовательно, должно выполняться $\dot{R}_2(1+0) < 0$. Из формулы (5.2), вычислив производную в точке $x = 1$, находим $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!(m-2)!} < \lambda^2$. □

6. Заключение

В работе проведено исследование возможности реализации унимодальности абсолютно непрерывной части распределения вероятностей суммы неотрицательных независимых одинаково распределенных на случайных величин. Решенную задачу нужно рассматривать как частный случай общей проблемы определения качественно различных распределений вероятностей для значений экстенсивных функционалов от траекторий стационарных случайных процессов и, в частности, определение тех ситуаций, когда эти распределения являются унимодальными. Исследования в этом направлении представляются важными с точки зрения приложений в теоретической физике, так как потеря свойства унимодальности у распределения вероятностей (и более общó, точной унимодальности [1,13,14]) указывает на проявление приводящего к такой ситуации какого-то физического механизма. Нужно отметить, что даже в рамках той относительно простой математической модели, которая исследовалась в настоящей работе, задача не решена исчерпывающим образом. Во-первых, по-видимому, при увеличении параметра λ должна происходить потеря свойства унимодальности. В этом случае возникает вопрос об определении числа вершин распределения.

Во-вторых, важно исследовать функции g_N при конечных значениях N с точки зрения определения области изменения параметра p, в которой они являются унимодальными. В-третьих, очень важно распространить результаты настоящей работы на распределения вероятностей более общего вида для случайных величин $\tilde{x}_k$, например, на класс всех строго одновершинных распределений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бакиров Н. К.* Экстремумы распределений квадратичных форм от гауссовских величин// Теор. вер. и ее примен. — 1989. — *34*, № 2. — С. 241–250.
2. *Брагинский Р. П., Гнеденко Б. В., Зайцева Г. М., Молчанов С. А.* Теоретическое и статистическое исследование дефектного множества в эмаль-лаковых электроизоляционных покрытиях// Докл. АН СССР. — 1988. — *303*, № 2. — С. 270–274.
3. *Вирченко Ю. П., Новосельцев А. Д.* Унимодальность распределений вероятностей для максимумов выборки независимых эрланговских случайных величин// Прикл. мат. и физ. — 2019. — *51*, № 3. — С. 366–373.
4. *Вирченко Ю. П., Новосельцев А. Д.* Бифуркация распределения напряжений электрического пробоя эмаль-лаковых полимерных покрытий// В сб.: «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». — Воронеж: Науч.-иссл. публ., 2021. — С. 1530–1534.
5. *Высочанский Д. Ф., Петунин Ю. И.* Обоснование правила 3σ для унимодальных распределений// Теор. вер. и мат. стат. — 1980. — *21*. — С. 25–36.
6. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — М.: Либроком, 2011.
7. *Ибрагимов И. А.* О композиции одновершинных распределений// Теор. вер. и ее примен. — 1956. — *1*, № 2. — С. 283–288.
8. *Лукач Е.* Характеристические функции. — М.: Наука, 1979.
9. *Хинчин А. Я.* Об унимодальных распределениях// Изв. НИИ Томск. мат. ин-та. — 1938. — *2*, № 2. — С. 1–7.
10. *Medgyssy P.* On the interconnection between the representation theorems of characteristic functions of unimodal distributions and of convex characteristic functions// Maguar Tud. Acad. Mat. Kutató Intér. Közl. — 1963. — *8*. — C. 425–430.
11. *Medgyssy P.* On a new class of infinitely divisible functions and related topics// Studia Sci. Math. Hungar. — 1967. — *2*. — C. 441–446.
12. *Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S.* Unimodality of a class of distributions connected with complex Ornstein—Uhlenbeck process// Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR. — 1988. — № 1. — C. 55–87.
13. *Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S.* Essential unimodality of probability distributions of random quadratic functionals// Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR. — 1990. — № 12. — C. 3-4.
14. *Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S.* Essential unimodality of probabilistic distributions for random quadratic functionals// Cybernet. Systems Anal. — 1992. — *285*, № 2. — C. 312–315.
15. *Virchenko Yu. P., Novoseltsev A. D.* Probability distributions unimodality of finite sample extremes of independent Erlang random variables// J. Phys. Conf. Ser. — 2020. — *1479*. — 012104. — DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012104.
16. *Virchenko Yu. P., Novoseltsev A. D.* Bifurcation of distribution function of electric breakdown voltages of polymer enamel–lacquer coatings// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1902*. — 012091. — DOI: 10.1088/1742-6596/1902/1/012091.

Ю. П. Вирченко

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, Белгород, Россия

E-mail: virch@bsu.edu.ru

А. М. Теволде

Белгородский государственный университет, Белгород, Россия

E-mail: amanuelmt1@gmail.com

UDC 519.213
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-542-560
EDN: VSOLEA

Unimodality of the probability distribution of the extensive functional of samples of a random sequence

Yu. P. Virchenko[1] and A. M. Tevolde[2]

[1] *Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia*
[2] *Belgorod State University, Belgorod, Russia*

Abstract. We establish a criterion for the unimodality of the probability distribution of a functional that is represented by the sum of a set of independent identically distributed random nonnegative variables $\tilde{x}_k$ with a random number of terms distributed according to Poisson. The general distribution of terms $\tilde{x}_k$ is concentrated on the interval $[0,1]$ and is such that $\Pr\{\tilde{x}_k = 0\} \neq 0$. Its absolutely continuous part is asymptotically close to a uniform distribution. We introduce the concept of smoothing functions and establish an explicit form of the distribution of any fixed number of terms uniformly distributed on $[0,1]$.

Keywords: sum of independent identically distributed random variables, unimodality of probability distribution, smoothing function, single-peak function.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: Yu. P. Virchenko, A. M. Tevolde, "Unimodality of the probability distribution of the extensive functional of samples of a random sequence," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 4, 542–560. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-542-560

REFERENCES

1. N. K. Bakirov, "Ekstremumy raspredeleniy kvadratichnykh form ot gaussovskikh velichin" [Extrema of distributions of quadratic forms from Gaussian variables], *Teor. ver. i ee primen.* [Probab. Theor. Appl.], 1989, **34**, No. 2, 241–250 (in Russian).
2. R. P. Braginskii, B. V. Gnedenko, G. M. Zaytseva, and S. A. Molchanov, "Teoreticheskoe i statisticheskoe issledovanie defektnogo mnozhestva v emal'-lakovykh elektroizolyatsionnykh pokrytiyakh" [Theoretical and statistical study of defect set in enamel-varnish electrical insulating coatings], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1988, **303**, No. 2, 270–274 (in Russian).
3. Yu. P. Virchenko and A. D. Novosel'tsev, "Unimodal'nost' raspredeleniy veroyatnostey dlya maksimumov vyborki nezavisimykh erlangovskikh sluchaynykh velichin" [Unimodality of probability distributions for maxima of samples of independent Erlang random variables], *Prikl. mat. i fiz.* [Appl. Math. Phys.], 2019, **51**, No. 3, 366–373 (in Russian).
4. Yu. P. Virchenko and A. D. Novosel'tsev, "Bifurkatsiya raspredeleniya napryazheniy elektricheskogo proboya emal'-lakovykh polimernykh pokrytiy" [Bifurcation of the distribution of electrical breakdown voltages of enamel-varnish polymer coatings], In: *Aktual'nye problemy prikladnoy matematiki, informatiki i mekhaniki* [Current Issues in Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics], Nauch.-issl. publ., Voronezh, 2021, pp. 1530–1534 (in Russian).
5. D. F. Vysochanskii and Yu. I. Petunin, "Obosnovanie pravila 3σ dlya unimodal'nykh raspredeleniy" [Justification of the 3σ rule for unimodal distributions], *Teor. ver. i mat. stat.* [Probab. Theor. Math. Stas.], 1980, **21**, 25–36 (in Russian).

6. B. V. Gnedenko, *Kupc teopii vepoyatnoctey* [Course in Probability Theory], Librokom, Moscow, 2011 (in Russian).
7. I. A. Ibragimov, “O kompozitsii odnovershinnykh raspredeleniy” [On the composition of single-peak distributions], *Teor. ver. i ee primen.* [Probab. Theor. Appl.], 1956, **1**, No. 2, 283–288 (in Russian).
8. E. Lukach, *Kharakteristicheskie funktsii* [Characteristic Functions], Nauka, Moscow, 1979 (in Russian).
9. A. Ya. Khinchin, “Ob unimodal’nykh raspredeleniyakh” [Ob unimodal’nykh raspredeleniyakh], *Izv. NII Tomsk. mat. in-ta* [Bull. Research Inst. Tomsk Math. Inst.], 1938, **2**, No. 2, 1–7 (in Russian).
10. P. Medgyssy, “On the interconnection between the representation theorems of characteristic functions of unimodal distributions and of convex characteristic functions,” *Maguar Tud. Acad. Mat. Kutató Intér. Közl.*, 1963, **8**, 425–430.
11. P. Medgyssy, “On a new class of infinitely divisible functions and related topics,” *Studia Sci. Math. Hungar.*, 1967, **2**, 441–446.
12. Yu. P. Virchenko and A. S. Mazmanishvili, “Unimodality of a class of distributions connected with complex Ornstein—Uhlenbeck process,” *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR*, 1988, No. 1, 55–87.
13. Yu. P. Virchenko and A. S. Mazmanishvili, “Essential unimodality of probability distributions of random quadratic functionals,” *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR*, 1990, No. 12, 3-4.
14. Yu. P. Virchenko and A. S. Mazmanishvili, “Essential unimodality of probabilistic distributions for random quadratic functionals,” *Cybernet. Systems Anal.*, 1992, **285**, No. 2, 312–315.
15. Yu. P. Virchenko and A. D. Novoseltsev, “Probability distributions unimodality of finite sample extremes of independent Erlang random variables,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2020, **1479**, 012104, DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012104.
16. Yu. P. Virchenko and A. D. Novoseltsev, “Bifurcation of distribution function of electric breakdown voltages of polymer enamel–lacquer coatings,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2021, **1902**, 012091, DOI: 10.1088/1742-6596/1902/1/012091.

Yu. P. Virchenko
Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia
E-mail: `virch@bsu.edu.ru`

A. M. Tevolde
Belgorod State University, Belgorod, Russia
E-mail: `amanuelmt1@gmail.com`