 Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-26-31

УДК 512.64, 517.98.

Дата: поступления статьи: 27.09.2022
после рецензирования: 29.11.2022
принятия статьи: 05.12.2022

И.М. Избяков
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: iliya-izbyakov@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3358-966X

О СИСТЕМАХ ВЕКТОРОВ И ПОДПРОСТРАНСТВ КОНЕЧНОМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА, ВОССТАНАВЛИВАЮЩИХ ВЕКТОР-СИГНАЛ[1]

АННОТАЦИЯ

Предметом рассмотрения данной статьи являются системы векторов, допускающие восстановление неизвестного вектор-сигнала по модулям измерений, и подпространства, восстанавливающие сигнал по нормам проекторов на них. Проанализирована взаимосвязь свойств восстановления по модулям измерений и восстановления по нормам проекций со свойствами альтернативной полноты в евклидовом и унитарном пространствах. Рассмотрена теорема о рангах одного линейного оператора, которая может рассматриваться как еще один критерий возможности восстанавливать вектор-сигнал. Доказана эквивалентность свойства альтернативной полноты и утверждения упомянутой теоремы о рангах для евклидова пространства. Показано, что теорему о рангах в вещественном случае можно распространить на системы подпространств.

Рассмотрены вопросы о минимальном количестве векторов, допускающих восстановление по модулям измерений. Приведены имеющиеся на данный момент результаты, которые обобщены в виде таблицы для пространств размерности 10 и ниже. Также кратко приведены известные результаты к вопросу о минимальном количестве подпространств, допускающих восстановление по нормам проекций.

Ключевые слова: восстановление по модулям измерений; восстановление по нормам проекций; спектральная теорема; альтернативная полнота системы векторов; инъективность отображения; скалярное произведение Гильберта — Шмидта; метод подъема фазы; самосопряженные матрицы.

Цитирование. Избяков И.М. О системах векторов и подпространств конечномерного пространства, восстанавливающих вектор-сигнал // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 26–31. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-26-31.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Илья Михайлович Избяков — аспирант кафедры безопасности информационных систем, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Восстановление по модулям измерений

Во многих прикладных исследованиях возникает задача восстановления неизвестного вектор-сигнала $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^D$ ($\mathbb{H}^D$ обозначает D-мерное евклидово или унитарное пространство) с помощью набора изме-

[1]Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-878).

рительных векторов $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^N$, когда доступны лишь результаты измерений этого сигнала в виде модулей скалярных произведений $|\langle \mathbf{x}, \varphi_k\rangle|$.

Определение 1.1. Набор векторов $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^N$ восстанавливает вектор-сигнал по модулям измерений (**ВМИ**), если для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}^D$, таких, что $|\langle \mathbf{x}, \varphi_k\rangle| = |\langle \mathbf{y}, \varphi_k\rangle|$ для всех $k = 1, \ldots, N$, имеем $\mathbf{x} = c\mathbf{y}$, где $|c| = 1$.

Это определение также может быть сформулировано в виде свойства инъективности (с точностью до унимодулярного множителя) нелинейного оператора $(\mathcal{A}(\mathbf{x}))(k) := |\langle \mathbf{x}, \varphi_k\rangle|^2$, $k = 1, \ldots, N$.

Определение 1.2. Набор векторов $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ в $\mathbb{H}^D$ обладает свойством альтернативной полноты (**АП**), если для каждого подмножества $T \subseteq \{1, \ldots, N\}$, по крайней мере, одно из множеств $\{\varphi_k\}_{k\in T}$ или $\{\varphi_k\}_{k\in T^C}$ полно в $\mathbb{H}^D$.

Известно [1], что в $\mathbb{R}^D$ свойства ВМИ и АП оказываются эквивалентными. В $\mathbb{C}^D$ свойство АП является необходимым, но недостаточным для выполнения свойства ВМИ [1].

Для линеаризации задачи вводится оператор суперанализа $\mathbf{A}$, определенный на пространстве самосопряженных матриц $\mathbb{H}^{D\times D}$ равенством

$$(\mathbf{A}H)(k) = \langle H, \varphi_k\varphi_k^*\rangle_{HS} = \mathrm{tr}\,[\varphi_k\varphi_k^*\mathbf{x}\mathbf{x}^*]\,, \tag{1.1}$$

где HS — скалярное произведение Гильберта — Шмидта.

В силу линейности скалярного произведения по первому аргументу $\mathbf{A}$ является линейным оператором, и

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^*)(k) = \langle \mathbf{x}\mathbf{x}^*, \varphi_k\varphi_k^*\rangle_{HS} = \mathrm{tr}\,[\varphi_k\varphi_k^*\mathbf{x}\mathbf{x}^*] = \mathrm{tr}\,[\varphi_k^*\mathbf{x}\mathbf{x}^*\varphi_k] = \varphi_k^*\mathbf{x}\mathbf{x}^*\varphi_k = |\langle \mathbf{x}, \varphi_k\rangle|^2 = \mathcal{A}(\mathbf{x})(k). \tag{1.2}$$

Переход от нелинейного оператора $\mathcal{A}$ к линейному оператору $\mathbf{A}$ называют «подъемом фазы» (в англоязычной литературе phase lift). Таким образом, $\mathbf{x} \bmod \mathbb{T}$ «поднимается» до $\mathbf{x}\mathbf{x}^*$, что позволяет линеаризовать оператор $\mathcal{A}$ за счет увеличения размерности пространства — области определения.

Теорема 1.3. Оператор $\mathcal{A}$ не является инъективным тогда и только тогда, когда ядро оператора $\mathbf{A}$ содержит матрицы, ранг которых равен 1 или 2. (В [2] эта теорема доказана для пространства $\mathbb{C}^D$).

Доказательство. ($\Rightarrow$)

Если оператор $\mathcal{A}$ не является инъективным, то

$$\exists\, \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{C}^D/\mathbb{T} : \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{y}\mathbf{y}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\mathbf{y}^* \in \ker \mathbf{A}.$$

$rank(\mathbf{x}\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\mathbf{y}^*) = 1$, когда $\mathbf{x}\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}\mathbf{y}^*$ либо линейно зависимы, либо один и только один из них нулевой. В случае, когда они линейно независимы, $rank(\mathbf{x}\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\mathbf{y}^*) = 2$.

($\Leftarrow$)

rank H = 1.

Пусть $H \in \ker \mathbf{A}$. Тогда существует $\mathbf{x} \neq 0 \in \mathbb{C}^D/\mathbb{T}$ такой, что $H = \mathbf{x}\mathbf{x}^*$. $\mathbf{A}H(k) = \mathbf{A}(\mathbf{x}\mathbf{x}^*)(k) = 0$. В то же время $(\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^*)(k) = \mathcal{A}(\mathbf{x})(k)$. Таким образом $\mathcal{A}(\mathbf{x})(k) = 0 = \mathcal{A}(\mathbf{0})(k)$. Однако $\mathbf{x} \not\equiv 0 \mod \mathbb{T}$, таким образом получили, что оператор $\mathcal{A}$ отображает два различных вектора: один нулевой и один ненулевой в нулевое значение, следовательно, не является инъективным.

В пространстве $\mathbb{R}^D$ из равенства $\mathrm{rank}\ H = 1$ может не следовать существования $\mathbf{x} \neq 0 \in \mathbb{R}^D/\{\pm 1\}$ такого, что $H = \mathbf{x}\mathbf{x}^T$. Такой $\mathbf{x}$ не существует, если на главной диагонали H стоят отрицательные элементы. Однако в таком случае можно рассмотреть $-H \in \ker \mathbf{A}$, откуда в силу линейности $\mathbf{A}$ следует, что $H \in \ker \mathbf{A}$.

rank H = 2.

Пусть $H \in \ker \mathbf{A}$. Тогда согласно спектральной теореме для самосопряженных матриц существуют ортонормированные $u_1, u_2 \in \mathbb{C}^D$ и ненулевые значения $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ такие, что $H = U\Lambda U^* = \lambda_1 u_1 u_1^* + \lambda_2 u_2 u_2^*$ [10]. Следовательно,

$$\mathbf{A}H(k) = \langle H, \varphi_k\varphi_k^*\rangle_{HS} = \langle \lambda_1 u_1 u_1^* + \lambda_2 u_2 u_2^*, \varphi_k\varphi_k^*\rangle_{HS} =$$

$$= \lambda_1 |\langle u_1, \varphi_k\rangle|^2 + \lambda_2 |\langle u_2, \varphi_k\rangle|^2.$$

Взяв $x = \sqrt{|\lambda_1|}u_1$ и $y = \sqrt{|\lambda_2|}u_2$, заметим, что $y \not\equiv x \mod \mathbb{T}$, поскольку они ненулевые и ортогональные.

Пусть λ_1 и λ_2 одного знака, тогда для любого n выполняется равенство $|\langle x, \varphi_k\rangle|^2 + |\langle y, \varphi_k\rangle|^2 = 0$, отсюда $|\langle x, \varphi_k\rangle|^2 = |\langle y, \varphi_k\rangle|^2 = 0$, следовательно, $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y)$ и оператор $\mathcal{A}$ не инъективен.

Теперь предположим, что λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, тогда $xx^* - yy^* = \lambda_1 u_1 u_1^* + \lambda_2 u_2 u_2^* = H \in \ker \mathbf{A}$. Следовательно, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{y}\mathbf{y}^* = \mathcal{A}(\mathbf{y})$ и оператор $\mathcal{A}$ не инъективен.

2. Задача о минимальном количестве измерительных векторов

На данный момент до сих пор остается нерешенным в общем случае вопрос о том, каково минимальное количество $N = N(D)$ измерительных векторов $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$, обладающих свойством (ВМИ) в $\mathbb{H}^D$?

Определение 2.1. Спарком системы векторов Φ называется наименьшее количество линейно зависимых векторов этой системы.

Спарк системы векторов можно определить формально, расположив векторы $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ в виде столбцов $D \times N$-матрицы Φ, и воспользоваться обозначением $\|\mathbf{x}\|_0$ для количества ненулевых координат вектора $\mathbf{x}$.

При таком подходе

$$\mathrm{spark}(\mathbf{\Phi}) = \min\left\{\|\mathbf{x}\|_0 : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \quad \text{такие что} \quad \mathbf{\Phi x} = \mathbf{0}\right\}.$$

Ответ на вопрос о минимальном количестве измерительных векторов, обладающих свойством ВМИ, в вещественном случае хорошо известен. Оказывается, что для $\mathbb{R}^D$ минимальное количество таких векторов оказывается равным $N(D) = 2D - 1$, причем для того, чтобы система из $2D - 1$ измерительных векторов в $\mathbb{R}^D$ обладала свойством ВМИ, необходимо и достаточно, чтобы она имела полный спарк.

В вопросе поиска минимального количества $N(D)$ измерительных векторов, обладающих свойством ВМИ в пространстве $\mathbb{C}^D$, на данный момент имеются следующие результаты.

1) Для любого $D \geqslant 2$, $N(D) \leqslant 4D - 4$ [3].

2) Если $D = 2^k + 1$ для целого неотрицательного k, то $N(D) = 4D - 4$ [4].

3) В $\mathbb{C}^4$ Vinzant [5] нашла 11 векторов, обеспечивающих ВМИ. На данный момент пространство $\mathbb{C}^4$ является единственным, в котором найден набор векторов, обеспечивающих ВМИ с их числом $N < 4D - 4$.

Кроме определения числа $N(D)$ ведутся поиски числа $\mathcal{N}(D)$ такого, что если $N \leqslant \mathcal{N}(D)$, то *ни один* сигнал $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^D$ не может быть однозначно восстановлен (с точностью до унимодулярного множителя) по набору $\{|\langle \mathbf{x}, \varphi_1\rangle|, \ldots, |\langle \mathbf{x}, \varphi_N\rangle|\}$, т. е. для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^D$ найдется $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^D$, $\mathbf{x} \neq h\mathbf{y}$ ни для какого $h \in \mathbb{T}$, и $|\langle \mathbf{x}, \varphi_n\rangle| = |\langle \mathbf{y}, \varphi_n\rangle|$, $n = 1, \ldots, N$.

В [6] показано, что $\mathcal{N}(D) \geqslant 4D - 4 - 2s_2(D-1)$, где $s_2(D-1)$ обозначает количество единиц в двоичном представлении числа $D - 1$. Для $D = 4$ получаем $N(4) \geqslant 8$, оставляя возможность уменьшать число 11 в примере Vinzant.

В таблице приведем значения чисел $N(D)$ и $\mathcal{N}(D)$ при $2 \leqslant D \leqslant 10$.

Таблица

Зависимость $N(D)$ и $\mathcal{N}(D)$ от D

Table

Dependence of $N(D)$ and $\mathcal{N}(D)$ on D

D	$N(D)$ в $\mathbb{R}^D$	$\mathcal{N}(D)$ в $\mathbb{C}^D$	$N(D)$ в $\mathbb{C}^D$
2	3	3	4
3	5	7	8
4	7	$\geqslant 8$	$\leqslant 11$
5	9	15	16
6	11	$\geqslant 16$	$\leqslant 20$
7	13	$\geqslant 20$	$\leqslant 24$
8	15	$\geqslant 22$	$\leqslant 28$
9	17	31	32
10	19	$\geqslant 32$	$\leqslant 36$

Таким образом, например, для пространства $\mathbb{C}^6$ о количестве векторов, допускающих ВМИ, на данный момент известно лишь то, что оно не менее 16 и не превосходит 20. Попытка проверить хотя бы один случайный набор из 19 векторов в $\mathbb{C}^6$ на обладание свойством ВМИ методом, описанным Винзант в своей статье, требует вычислительных мощностей, значительно превосходящих мощности математических пакетов, которые использовались при проверке ее набора из 11 векторов в $\mathbb{C}^4$, и, по всей видимости, требует иных подходов.

3. Восстановление по нормам проекций

Некоторые прикладные задачи приводят к задаче восстановления сигнала по нормам его проекций на подпространства, например, проблема близнецов в кристаллографии.

Определение 3.1. Семейство подпространств $\{W_k\}_{k=1}^N$ в $\mathbb{H}^D$ с соответствующими ортопроекторами $\{\mathbf{P}_k\}_{k=1}^N$ восстанавливает по нормам векторов (**ВНП**), если для произвольных $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}^D$ таких, что $\|\mathbf{P}_k\mathbf{x}\| = \|\mathbf{P}_k\mathbf{y}\|$ для всех $k = 1, 2, \ldots, N$, имеем $\mathbf{x} = c\mathbf{y}$, где $|c| = 1$ [7].

Это определение также может быть сформулировано в виде свойства инъективности (с точностью до унимодулярного множителя) нелинейного оператора:

$$\mathcal{A} : \mathbb{H}^D/\mathbb{T} \to \mathbb{R}^N,\ (\mathcal{A}(\mathbf{x}))(k) := \|P_k\mathbf{x}\|^2,\ k = 1, \ldots, N.$$

Определим *вещественное* D^2-мерное пространство $\mathbb{H}^{D\times D}$ самосопряженных $D \times D$-матриц. Для набора проекций $\{W_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{R}^D$ с соответствующими проекторами P_k введем *оператор супер-анализа* $\mathbf{A} : \mathbb{H}^{D\times D} \to \mathbb{R}^N$:.

Обозначим через $\{\varphi_{k,j}\}_{j=1}^{J_k}$ ортонормированный базис подпространства $\{W_k\}$ и введем линейный оператор супераналиэа аналогично тому, как это было сделано выше:

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^*)(k) = \left\langle \mathbf{x}\mathbf{x}^T, P_k \right\rangle_{HS} = \operatorname{tr}\left[\mathbf{x}\mathbf{x}^T P_k\right] = \operatorname{tr}\left[\mathbf{x}\mathbf{x}^T \sum_{j=1}^{J_k} \varphi_{k,j}\varphi_{k,j}^T\right] = \tag{3.1}$$

$$= \sum_{j=1}^{J_k} \varphi_{k,j}^T \mathbf{x}\mathbf{x}^T \varphi_{k,j} = \sum_{j=1}^{J_k} |\langle \mathbf{x}, \varphi_{k,j}\rangle| = \|P_k\mathbf{x}\|^2 = \mathcal{A}(\mathbf{x})(k). \tag{3.2}$$

При этом оператор $\mathcal{A}$ так же, как и в случае **ВМИ**, не является инъективным тогда и только тогда, когда ядро оператора $\mathbf{A}$ содержит матрицы, ранг которых равен 1 или 2. Этот результат известен и сформулирован в [3] для $\mathbb{R}^D$. Аналогичный результат в $\mathbb{C}^D$ неизвестен.

4. Задача о минимальном количестве восстанавливающих подпространств

Подобно вопросу о минимальном количестве векторов, допускающих ВМИ, ставится вопрос о минимальном количестве $N = \mathbf{N}(D)$ подпространств $\{W_j\}_{j=1}^N$, обеспечивающих ВНП в $\mathbb{H}^D$. В настоящий момент получены некоторые результаты для вещественного пространства $\mathbb{R}^D$.

Теорема 4.1. Для любого набора чисел $1 \leqslant r_k \leqslant D-1$, $k = 1, 2, \ldots, 2D-1$, существуют подпространства $\{W_k\}_{k=1}^{2D-1}$ в $\mathbb{R}^D$, обеспечивающие ВНП, причем $\dim W_k = r_k$ [7].

Из вышеприведенной теоремы следует, что в $\mathbb{R}^D$ $\mathbf{N}(D) \leqslant 2D-1$.

В [8] построено $6 = 2 \cdot 4 - 2$ двумерных подпространств пространства $\mathbb{R}^4$, обеспечивающих (ВНП).

Как показывает следующая теорема, дальнейшее уменьшение числа $\mathbf{N}(D)$ невозможно.

Теорема 4.2. Пусть $\{W_k\}_{k=1}^N$ – подпространства $\mathbb{R}^D$ с соответствующими ортопроекторами $\{P_k\}_{k=1}^N$.

Следующие утверждения эквивалентны:

1) подпространства $\{W_k\}_{k=1}^N$ обеспечивают ВНП;

2) для любого $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$ семейство векторов $\{P_k\,\mathbf{x}\}_{k=1}^N$ полно в $\mathbb{R}^D$, т. е. $\operatorname{span}\left(\{P_k\,\mathbf{x}\}_{k=1}^N\right) = \mathbb{R}^D$.

Доказательство теоремы приведено в [4]. В рамках данной статьи опустим его, рассмотрев более подробно следующую теорему, для доказательства которой необходимо использование теоремы 4.2.

Теорема 4.3. В пространстве $\mathbb{R}^D$ $\mathbf{N}(D) \geqslant 2D-2$ [9].

Доказательство. Покажем, что для ВНП в $\mathbb{R}^D$ требуется не менее $2D-2$ *гиперплоскостей*. Предположим, что возможно ВНП с $N \leqslant 2D-3$ гиперплоскостями $\{W_k\}_{k=1}^N$. Выберем вектор $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \cap_{k=1}^{D-1} W_k$ так, чтобы $P_k\mathbf{x} = \mathbf{x}$ для $k = 1, 2, \ldots, D-1$. Рассмотрим семейство векторов $\{P_k\mathbf{x}\}_{k=1}^N = \{\mathbf{x}\} \cup \{P_k\mathbf{x}\}_{k=D}^N$. Общее количество таких векторов $\leqslant 1 + (2D-3) - (D-1) = D-1$, так что $\{P_k\mathbf{x}\}_{k=1}^N$ не полно в $\mathbb{R}^D$, что противоречит теореме 4.2. Можно показать, что для каждого семейства подпространств $\{W_k\}_{k=1}^N$, восстанавливающих по нормам проекторов в $\mathbb{R}^D$, найдутся гиперплоскости $W_k' \supset W_k$, которые также восстанавливают по нормам проекторов. Следовательно, $N \geqslant 2D-2$.

Таким образом, в пространстве $\mathbb{R}^D$ минимальное количество восстанавливающих подпространств равно $2D-2$ или $2D-1$, однако на данный момент построен только один пример в виде шести двумерных подпространств, обеспечивающих ВНП в $\mathbb{R}^4$. Кроме $D = 4$ неизвестен пример ни для одного пространства $\mathbb{R}^D$, для которых реализуется значение $\mathbf{N}(D) = 2D-2$.

Для комплексного пространства $\mathbb{C}^D$ в настоящий момент минимальное количество подпространств, обеспечивающее ВНП, неизвестно.

Выводы

В данной статье было показано, что в евклидовом пространстве свойства восстановления по модулям измерений, альтернативной полноты и отсутствия матриц ранга 1 или 2 в ядре оператора **A** являются эквивалентными. В унитарном пространстве свойство набора векторов восстанавливать вектор-сигнал по модулям измерений является эквивалентным только свойству отсутствия матриц ранга 1 или 2 в ядре оператора **A**, свойство альтернативной полноты является необходимым, но недостаточным для выполнения первых двух.

Также показано, что в евклидовом пространстве свойство набора подпространств восстанавливать вектор-сигнал по нормам проекций может быть охарактеризовано свойствами ядра оператора **A**. Предметом дальнейшего исследования является вопрос о том, являются ли эти свойства эквивалентными в унитарном пространстве.

Проанализированы имеющиеся результаты в отношении минимального количества векторов, допускающих ВМИ, и минимального количества подпространств, допускающих ВНП. Для пространств размерности, не превосходящей 10, приведена таблица, содержащая сведения о минимальном количестве векторов, допускающих ВМИ. Для некоторых подпространств это количество оказывается точно известным, в то время как для других известны лишь границы, в которых оно находится.

Литература

[1] Bahmanpour S., Cahill J., Casazza P.G., Jasper J., Woodland L.M. Phase retrieval and norm retrieval by vectors and projections. URL: https://arxiv.org/pdf/1409.8266.pdf.

[2] Bandeira A.S., Cahil J., Mixon D.G., Nelson A.A. Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval. URL: https://arxiv.org/pdf/1302.4618v2.pdf.

[3] Conca A., Edidin D., Hering M., Vinzant C. An algebraic characterization of injectivity in phase retrieval // Applied and Computational Harmonic Analysis, 2014. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.acha.2014.06.005.

[4] Edidin D. Projections and Phase retrieval. DOI: http://doi.org/10.48550/arXiv.1506.00674.

[5] Vinzant C. A small frame and a certificate of its injectivity // 2015 International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA). DOI: http://dx.doi.org/10.1109/SAMPTA.2015.7148879.

[6] Heinosaari T., Mazzarella L., Wolf M. Quantum Tomography under Prior Information // Communications in Mathematical Physics. 2013. Vol. 318. Pp. 355–374. DOI: http://doi.org/10.1007/s00220-013-1671-8.

[7] Cahill J., Casazza P., Peterson J., WoodlandPhase L. Phase retrieval by projections. URL: https://arxiv.org/pdf/1305.6226.pdf.

[8] Xu Z. The minimal measurement number for low rank matrix recovery. DOI: http://doi.org/10.1016/J.ACHA.2017.01.005.

[9] Casazza P., Ghoreishi D. Phase retrieval by projections in R^n requires $2n-2$ projections. URL: https://arxiv.org/abs/2012.10738v2.

[10] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Москва: Мир, 1989. 666 с. URL: https://dl.booksee.org/genesis/192000/422f69a9fb7edf390425b4a9c4a99b32/_as/[Horn_R.,_Dzhonson_CH.]_Matrichnuei_analiz(BookSee.org).pdf.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-26-31

Submited: 27.09.2022
Revised: 29.11.2022
Accepted: 05.12.2022

I.M. Izbiakov
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: iliya-izbyakov@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3358-966X

ABOUT SYSTEMS OF VECTORS AND SUBSPACES IN FINITE DIMENSIONAL SPACE RECOVERING VECTOR-SIGNAL[2]

[2]The work is performed under the development program of the Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2022-878).

ABSTRACT

The subject of this paper are the systems of vectors and subspaces in finite dimensional spaces admitting the recovery of an unknown vector-signal by modules of measurements. We analyze the relationship between the properties of recovery by modules of measurements and recovery by norms of projections and the properties of alternative completeness in Euclidean and unitary spaces. The theorem on ranks of one linear operator is considered, the result of which in some cases can be regarded as another criterion for the possibility to restore a vector-signal. As a result of this work, the equivalence of the alternative completeness property and the statement of the rank theorem for Euclidean space is proved. It is shown that the rank theorem in the real case can be extended to the systems of subspaces.

The questions about the minimum number of vectors admissible for reconstruction by modules of measurements are considered. The results available at the moment are presented, which are summarized in the form of a table for spaces of dimension less than 10. Also the known results to the question of the minimum number of subspaces admitting reconstruction by the norms of projections are briefly given.

Key words: recovery by measurement modules; recovery by projection norms; spectral theorem; alternative completeness of vector system; mapping injectivity; Hilbert — Schmidt scalar product; phase lift method; self-adjoint matrices.

Citation. Izbiakov I.M. About systems of vectors and subspaces in finite dimensional space recovering vector-signal. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 26–31. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-26-31. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Ilia M. Izbiakov — post-graduate student of the Department of Information Security, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

[1] Bahmanpour S., Cahill J., Casazza P.G., Jasper J., Woodland L.M. Phase retrieval and norm retrieval by vectors and projections. Available online: https://arxiv.org/pdf/1409.8266.pdf.

[2] Bandeira A.S., Cahil J., Mixon D.G., Nelson A.A. Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval. Available online: https://arxiv.org/pdf/1302.4618v2.pdf.

[3] Conca A., Edidin D., Hering M., Vinzant C. An algebraic characterization of injectivity in phase retrieval. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2014. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.acha.2014.06.005.

[4] Edidin D. Projections and Phase retrieval. Available online: https://doi.org/10.48550/arXiv.1506.00674.

[5] Vinzant C. A small frame and a certificate of its injectivity. In: *2015 International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA)*. DOI: http://dx.doi.org/10.1109/SAMPTA.2015.7148879.

[6] Heinosaari T., Mazzarella L., Wolf M. Quantum Tomography under Prior Information. *Communications in Mathematical Physics*, 2013, vol. 318, pp. 355–374. DOI: http://doi.org/10.1007/s00220-013-1671-8.

[7] Cahill J., Casazza P., Peterson J., Woodland L. Phase retrieval by projections. Available online: https://arxiv.org/pdf/1305.6226.pdf.

[8] Xu Z. The minimal measurement number for low rank matrix recovery. DOI: http://doi.org/10.1016/J.ACHA.2017.01.005.

[9] Casazza P., Ghoreishi D. Phase retrieval by projections in R^n requires $2n-2$ projections. Available online: https://arxiv.org/abs/2012.10738v2.

[10] Horn R., Johnson Ch. Matrix analysis. Moscow: Mir, 1989, 666 p. Available at: https://dl.booksee.org/genesis/192000/422f69a9fb7edf390425b4a9c4a99b32/_as/[Horn_R.,_Dzhonson_CH.]_Matrichnuei_analiz(BookSee.org).pdf. (In Russ.)