ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 514, с. 79–81

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984.52

ОПЕРАТОРНАЯ ГРУППА, ПОРОЖДЕННАЯ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМОЙ ДИРАКА

© 2023 г. А. М. Савчук[1,*], И. В. Садовничая[1,]**

Представлено академиком Б.С. Кашиным
Поступило 26.06.2023 г.
После доработки 25.10.2023 г.
Принято к публикации 01.11.2023 г.

В работе изучается вопрос о построении и оценках сильно непрерывной операторной группы, порожденной одномерным оператором Дирака, действующем в пространстве $\mathbb{H} = (L_2[0,\pi])^2$. Потенциал предполагается суммируемым. Доказано, что эта группа определена в пространстве $\mathbb{H} = (L_2[0,\pi])^2$ и в пространствах $\mathbb{H}_U^\theta$, $\theta > 0$, учитывающих краевые условия. Аналогичные результаты получены и в пространствах $(L_\mu[0,\pi])^2$, $\mu \in (1,\infty)$. Кроме того, получены оценки на рост группы.

Ключевые слова: оператор Дирака, суммируемый потенциал, операторная группа
DOI: 10.31857/S2686954323600568, **EDN:** CZLLLF

Рассмотрим одномерный оператор Дирака

$$\mathcal{L}\mathbf{y} = \mathrm{B}\mathbf{y}' + P(x)\mathbf{y},$$

где $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

$x \in [0,\pi]$, $\mathbb{H} = (L_2[0,\pi])^2$. Предполагается, что краевые условия

$$U\mathbf{y} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix} = 0$$

регулярны по Биркгофу, т.е. $J_{14} \cdot J_{23} \neq 0$. Здесь J_{ik} – определитель, составленный из i-го и k-го столбцов матрицы $U = (u_{lj})_{1\le l\le 2, 1\le j\le 4}$. Оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ определен на области

$$\mathfrak{D}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{y} \in W_1^1[0,\pi] : \mathcal{L}\mathbf{y} \in \mathbb{H}, U\mathbf{y} = 0\}.$$

Функция $P(x)$ – комплекснозначная, $p_j \in L_1[0,\pi]$. Работа посвящена построению и оценкам сильно непрерывной операторной группы

$$T(t) = \exp\{it\mathcal{L}_{P,U}\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Иными словами, ищется решение динамического уравнения

$$\mathrm{i} \cdot \mathbf{u}_t = \mathrm{B}\mathbf{u} + P(x)\mathbf{u}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{u}(x,0) = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix}.$$

Показано, что указанная группа определена в пространстве $\mathbb{H} = (L_2[0,\pi])^2$ и в пространствах $\mathbb{H}_U^\theta$, $\theta \in (0,1]$, построенных по оператору $\mathcal{L}$ с помощью комплексной интерполяции

$$\mathbb{H}_U^\theta = [\mathbb{H}, \mathbb{H}_U^1]_\theta.$$

В частности, $\mathbb{H}_U^\theta$ совпадает с классическим пространством бесселевых потенциалов $\mathbb{H}^\theta$ при $\theta \in [0,1/2)$. Пространство $\mathbb{H}_U^1$ – это классическое пространство Соболева $(W_2^1[0,\pi])^2$, суженное на краевые условия $U\mathbf{y} = 0$. Аналогичные результаты получены и в пространствах $(L_\mu[0,\pi])^2$, $\mu \in (1,\infty)$. Кроме того, получены оценки вида

$$\|T(t)\| \le C(1+|t|^p)e^{\beta|t|}. \tag{1}$$

Несложно показать, что спектр невозмущенного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ состоит из собственных значений, которые можно записать двумя сериями $-\frac{i}{\pi}\ln z_0 + 2n$ и $-\frac{i}{\pi}\ln z_1 + 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, где z_0 и z_1 – корни квадратного уравнения

$$J_{23}z^2 - [J_{12} + J_{34}]z - J_{14} = 0, \tag{2}$$

[1]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: savchuk@cosmos.msu.ru*
***E-mail: ivsad@yandex.ru*

а значения ветви логарифма фиксируются в полосе $\operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]$. В дальнейшем мы будем нумеровать эти собственные значения одним индексом $n \in \mathbb{Z}$, объединяя две серии в одну. В случае, если дискриминант квадратного уравнения (2) равен нулю, все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ двукратны. Краевые условия будем называть *сильно регулярными*, если $(J_{12}+J_{34})^2 \neq 4J_{23}J_{14}$. Обозначим $\varkappa_0 = -\dfrac{i}{\pi}\ln z_0$, $\varkappa_1 = -\dfrac{i}{\pi}\ln z_1 - 1$. Справедливо следующее утверждение (см. [1, 2]).

Лемма 1. *Любой регулярный оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ с внедиагональным потенциалом представим в виде суммы $\mathcal{L}_{P,U} = A + V$, ограниченного в $\mathbb{H}$ оператора V и неограниченного замкнутого оператора A с плотной областью определения и компактной резольвентой. В частности, если краевые условия сильно регулярны, то оператор V можно взять конечномерным.*

Спектр $\sigma(A)$ расположен в некоторой полосе Π_α и состоит из собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Их нумерацию (с учетом алгебраической кратности) можно провести так, чтобы выполнялись асимптотические равенства

$$\lambda_n = n + \varkappa_{[n/2]} + o(1), \quad |n| \to \infty,$$

причем геометрическая и алгебраическая кратности собственных значений совпадают, т.е. оператор A не имеет присоединенных функций. Система нормированных собственных функций оператора A образует базис Рисса в $\mathbb{H}$.

Таким образом, оператор iA порождает сильно непрерывную группу в $\mathbb{H}$. Возмущение генератора группы ограниченным оператором снова дает генератор группы.

Теорема 1. *Оператор $i\mathcal{L}_{P,U}$ порождает в $\mathbb{H}$ сильно непрерывную операторную группу. Базисность Рисса позволяет записать группу явно*

$$T(t)\mathbf{u} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathbf{u}, \mathbf{z}_n) e^{i\lambda_n t} \mathbf{y}_n$$

Здесь $\{\mathbf{y}_n\}_{\mathbb{Z}}$ — система СПФ, собственные функции нормированы $\|\mathbf{y}_n\| = 1$, присоединенные выбираются классически (максимальные цепочки по Келдышу). $\{\mathbf{z}_n\}_{\mathbb{Z}}$ — биортогональная система — собственные и присоединенные функции сопряженного оператора. Для нормы $\|T(t)\|$ справедлива оценка (1), где $\beta = \sup|\operatorname{Im}\lambda_n|$, точная грань берется по всем собственным значениям оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Кроме того, если $P \in L_\varkappa$ при $\varkappa > 1$, то β ограниченно зависит от $\|P\|_\varkappa$.

Константа в оценке $\|T(t)\| \le Ce^{\beta t}$ есть константа Рисса базисов $\{\mathbf{y}_n\}$ и $\{\mathbf{z}_n\}$. В более ранних работах авторов показано, что при фиксации краевых условий она зависит только от $\|P\|_\varkappa$, $\varkappa > 1$.

Заметим далее, что оператор $(\mathcal{L} - \lambda_0 I)^{-1}$ является изоморфизмом пространства $\mathbb{H}$ на пространство $\mathbb{H}^1_U$. Тогда из существования операторной группы $\exp(i\mathcal{L}_{P,U})$ в $\mathbb{H}$ следует ее ограниченное действие и в $\mathbb{H}^1_U$. Случай пространства $\mathbb{H}^\theta_U$ получается из доказанного интерполяцией оператора $\exp(i\mathcal{L}_{p,U})$.

В пространствах L_μ при $\mu \neq 2$ вместо базисности Рисса доказана лишь базисность Шаудера системы СПФ, что не позволяет напрямую определить операторную группу. Критерий Хилле–Иосиды труднопроверяем. Оценок на $\|(\mathcal{L}_{P,U} - \lambda I)^{-k}\|$ нет. Достаточный признак существования полугруппы (А.М. Гомилко, [3]):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|(\mathcal{L}_{P,U} - (\sigma + i\tau)I)^{-2}\| d\sigma < \infty$$

(в гильбертовом случае является критерием), по-видимому, не выполнен. Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака с суммируемым внедиагональным потенциалом. Тогда оператор $i\mathcal{L}_{P,U}$ является генератором сильно непрерывной операторной группы $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$ в $(L_\mu[0,\pi])^2$ для любого $\mu \in (1,\infty)$. При этом справедливы оценки вида*

$$\|T(t)\| \le C\exp(\beta t)\|T_0(t)\|,$$

T_0 — группа, порожденная оператором с нулевым потенциалом, числа β и C зависят только от $\|P\|_{L_1}$.

Идея доказательства заключается в использовании операторов преобразования и асимптотик для собственных значений оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ специального вида, полученных в статье С. Альбеверио, Р. Гринива и Я. Микитюка [4]:

$$\lambda_n = n + e_n(p), \quad e_n(p) = \int_0^\pi p(x)e^{inx}\,dx,$$

где функция p определяется потенциалом — если $P \in L_\varkappa$, то и $p \in L_\varkappa$.

С историей вопроса и близкими результатами можно ознакомиться в работах [2, 5–10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шкаликов А.А.* // УМН. 1979. Т. 34. № 5(209). С. 235–236.
2. *Savchuk A.M., Shkalikov A.A.* // Math. Notes. 2014. V. 96 № 5. P. 777–810.

3. *Гомилко А.М.* // Функц. анализ и его прил. 1999. Т. 33 № 4. С. 66–69.
4. *Albeverio S., Hryniv R., Mykytyuk Ya.* // Russian J. Math. Phys. 2005. V. 12. № 4. P. 406–42.
5. *Баскаков А.Г., Дербушев А.В., Щербаков А.О.* // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75. № 3. С. 3–28.
6. *Djakov P., Mityagin B.* // Proc. Amer. Math. Soc. 2013. V. 141. № 4. P. 1361–1375.
7. *Beigl A., Eckhardt J., Kostenko A., Teschl G.* // J. Math. Phys. 2015. V. 56, 012102.
8. *Djakov P., Mityagin B.* // Russ. Math. Surv. 2020. V. 75. № 4. P. 587–626.
9. *Савчук А.М., Садовничая И.В.* // Совр. мат-ка. Фунд. напр-я. 2020. Т. 66. № 3. С. 373–530.
10. *Лунев А.А., Маламуд М.М.* // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2022. Т. 516. С. 69–120.

OPERATOR GROUP GENERATED BY A ONE-DIMENSIONAL DIRAC SYSTEM

A. M. Savchuk[a] and I. V. Sadovnichaya[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.S. Kashin

In this paper, we construct a strongly continuous operator group generated by a one-dimensional Dirac operator acting in the space $\mathbb{H} = (L_2[0,\pi])^2$. The potential is assumed to be summable. It is proved that this group is well-defined in the space $\mathbb{H}$ and in the Sobolev spaces $\mathbb{H}_U^\theta$, $\theta > 0$, with fractional index of smoothness θ and under boundary conditions U. Similar results are proved in the spaces $(L_\mu[0,\pi])^2$, $\mu \in (1,\infty)$. In addition we obtain estimates for the growth of the group as $t \to \infty$.

Keywords: Dirac operator, summable potential, operator group