УДК 519.86
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-9-16

О ПОЛОЖЕНИИ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ С ТРАНЗАКЦИОННЫМИ ИЗДЕРЖКАМИ

© Е. С. Белякова, Н. Г. Павлова

В работе обобщаются результаты, полученные в [1], на случай различных долей транзакционных издержек. Получены как следствие теорем теории метрически регулярных отображений о существовании точек совпадения достаточные условия существования вектора равновесных цен в исследуемых моделях.
Ключевые слова: экономическое равновесие; транзакционные издержки; точки совпадения.

В настоящей работе исследован вопрос существования вектора равновесных цен в модели конкурентного равновесия, в которой учитываются транзакционные издержки, связанные с продажей продукции. В отличие от работы [1], в рассматриваемых моделях доли транзакционных издержек для различных типов продукции, вообще говоря, различны. Для получения достаточных условий существования положения равновесия применяются методы, основанные на теоремах о точках совпадения липшицева и накрывающего отображений.

Формализуем поставленную задачу. Будем рассматривать метрические пространства X и Y с метриками ρ_X и ρ_Y соответственно. Замкнутый шар в пространстве X с центром в точке x радиуса r будем обозначать через $B_X(x,r)$, а замкнутый шар в пространстве Y с центром в точке y радиуса r — через $B_Y(y,r)$.

Определение 1 (см. [2]). *Пусть задано* $\alpha>0$. *Отображение* $D:X\to Y$ *называется* α*-накрывающим, если*

$$D(B_X(x,r)) \supseteq B_Y(D(x),\alpha r) \ \ \forall r\geq 0,\ \forall x\in X.$$

Теорема 1 (см. [2]). *Пусть пространство* X *полно, а* D, $S:X\to Y$ *– произвольные отображения, первое из которых непрерывно и является* α*-накрывающим, а второе удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица* $\beta<\alpha$. *Тогда для произвольного* $x_0\in X$ *существует такое* $\xi=\xi(x_0)\in X$, *что*

$$D(\xi)=S(\xi), \tag{1}$$

$$\rho_X(x_0,\xi)\leq \frac{\rho_Y(D(x_0),S(x_0))}{\alpha-\beta}.$$

Решение ξ уравнения (1) может быть не единственным. Это решение ξ называется точкой совпадения отображений D и S.

Из приведенной теоремы вытекает (см. [2]) следующая теорема Милютина о возмущении накрывающего отображения.

Теорема 2. *Пусть* X *— полное метрическое пространство,* Y *— нормированное пространство, отображение* $D:X\to Y$ *является непрерывным и* α*-накрывающим. Тогда для* *любого отображения* $S\colon X \to Y$, *удовлетворяющего условию Липшица с константой Липшица* $\beta < \alpha$, *отображение* $D+S$ *является* $(\alpha-\beta)$*-накрывающим.*

Пусть $M \subset X$ – заданное непустое множество.

О п р е д е л е н и е 2. (см. [3]). *Пусть* $\alpha > 0$. *Отображение* $D\colon X \to Y$ *называется* α*-накрывающим на множестве* M, *если для любых* $x \in M$, $r > 0$ *таких, что* $B_X(x,r) \subseteq M$, *выполнено включение*

$$D(B_X(x,r)) \supseteq B_Y(D(x), \alpha r).$$

Точную верхнюю грань всех $\alpha > 0$ *таких, что отображение* D *является* α*-накрывающим на множестве* M *обозначим через* $\operatorname{cov}(D|\,M)$. *В случае, когда* $M = X$, *это число будем обозначать через* $\operatorname{cov}(D)$.

О п р е д е л е н и е 3. (см. [3]). *Пусть* $\alpha > 0$. *Отображение* $D\colon X \to Y$ *называется локально* α*-накрывающим в точке* $x \in X$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует положительное* $r < \varepsilon$ *такое, что*

$$D(B_X(x,r)) \supseteq B_Y(D(x), \alpha r).$$

Точную верхнюю грань всех $\alpha > 0$ *таких, что отображение* D *является локально* α*-накрывающим в точке* $x \in X$ *обозначим через* $\operatorname{cov}(D|\,x)$.

Т е о р е м а 3. (см. теорему 1 из [3]). *Предположим, что пространство* X *полно и заданы* $x_0 \in X$, $\alpha > 0$, $R > 0$. *Пусть отображение* $D\colon X \to Y$ *является* α*-накрывающим на* $B_X(x_0,R)$ *и замкнутым. Тогда для любого неотрицательного* $\beta < \alpha$ *и любого отображения* $S\colon\ B_X(x_0,R) \to Y$, *удовлетворяющего условию Липшица с константой* β, *такого, что*

$$\rho_Y(D(x_0), S(x_0)) \le (\alpha-\beta)R,$$

для отображений D *и* S *существует точка совпадения* $\xi \in X$, *т.е.* $D(\xi) = S(\xi)$, *такая, что*

$$\rho_X(x_0,\xi) \le \frac{\rho_Y\big(D(x_0), S(x_0)\big)}{\alpha-\beta}.$$

Используя теорему 3, исследуем вопрос о существовании равновесия в моделях экономического равновесия с транзакционными издержками.

Рассмотрим модели поведения производителей и потребителей. Пусть имеется $n \in \mathbb{N}$ товаров, причем i-ый товар для потребителя имеет цену $p_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. Будем также предполагать, что цены $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_n)$, по которым производитель реализует товары, меньше цен $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, которые платит за них потребитель, причем $\tilde{p} = Ap$, где $A = diag\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, $\alpha_i \in (0;1)$ $\forall i = \overline{1,n}$.

Производственные возможности производителя описываются технологическим множеством $T \subset \mathbb{R}_+^{2n}$. Причем

$$T = \left\{ y = (y_+; y_-) | \varphi(y_+; y_-) \le 0, y_+, y_- \in \mathbb{R}_+^n \right\},$$

где $\varphi\colon \mathbb{R}_+^{2n} \to \mathbb{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая и сильно выпуклая функция, $y_- = (y_{-1}, y_{-2}, \ldots, y_{-n})$ — вектор затрат, а $y_+ = (y_{+1}, y_{+2}, \ldots, y_{+n})$ — соответствующий ему вектор выпусков ($y_{+i} \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1,n}$, — валовый выпуск i-ой продукции, $y_{-i} \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1,n}$, — объем i-ой продукции, используемой при производстве 1-ой продукции в объеме y_{+1}, 2-ой продукции в объеме y_{+2}, $\ldots$, n-ой продукции в объеме y_{+n}).

Будем считать, что в производственном процессе используются все n видов ресурсов. Из всех возможных производственных процессов производитель выбирает тот, при котором прибыль максимальна. Таким образом, выбор производителя сводится к задаче отыскания условного экстремума функции прибыли:

$$\langle Ap, y_+\rangle - \langle p, y_-\rangle \to \max, \quad (y_+; y_-) \in T. \tag{2}$$

Заметим, что в силу сделанных предположений задача (2) эквивалентна

$$\begin{cases} \langle (Ap; -p), (y_+; y_-)\rangle \to \max, \\ \varphi(y_+; y_-) \le 0, \\ (y_+; y_-) > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Пусть $y^* = (y^*_+, y^*_-)$ — решение задачи (3). Тогда предложение производителя i-го товара $S_i(p) = y^*_+ - y^*_-$, $i = \overline{1,n}$.

Будем предполагать, что потребительские предпочтения потребителя, обладающего бюджетом $I(p)$, задаются функцией полезности $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, являющейся дважды непрерывно дифференцируемой, строго вогнутой (т.е. функция $(-u)$ строго выпукла) и не имеющей максимумов (т.е. является ненасыщаемой). Функция $I : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ является дифференцируемой положительно однородной первой степени, кроме того, существует число $C > 0$, такое что $I(p) \ge C||p||$ для любых $p \in \mathbb{R}^n_+$. Будем считать также, что потребитель приобретает все n видов товаров, причем, приобретая набор товаров $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n_+$, потребитель приобретает y_1 единиц 1-го товара, y_2 единиц 2-го товара, ..., y_n единиц n-го товара

Выбор потребителя сводится к задаче отыскания условного экстремума функции полезности:

$$u(y) \to \max, \quad \langle p, y\rangle \le I(p), \quad y > 0.$$

Спрос потребителя описывается отображением

$$D : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+, \quad D(p) = \operatorname{Argmax}\left\{u(y) | y \in \mathbb{R}^n_+, \ \langle p, y\rangle \le I(p)\right\}.$$

Сформулируем основной результат. Рассмотрим модель экономического равновесия, описываемую набором данных

$$\sigma = (\alpha, \varphi, u, I, c_1, c_2),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in (0,1)$ $\forall i = \overline{1,n}$ — заданные числа, $\varphi : \mathbb{R}^{2n}_+ \to \mathbb{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая, сильно выпуклая функция, $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая, строго вогнутая функция, $I : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ — дифференцируемая положительно однородная первой степени функция, $c_1 = (c_{11}, ..., c_{n1})$, $c_2 = (c_{12}, ..., c_{n2}) \in \mathbb{R}^n_+$ — заданные векторы, причем $c_{i1} < c_{i2}$, $i = \overline{1,n}$.

Набор (α, φ, u, I) однозначно определяет функции спроса $D : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$, $D(\cdot) = (D_1(\cdot), ..., D_n(\cdot))$ и предложения $S : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$, $S(\cdot) = (S_1(\cdot), ..., S_n(\cdot))$. Числа α_i $\forall i = \overline{1,n}$ — числа, характеризующие размеры транзакционных издержек производителей. Компоненты векторов c_1, c_2 определяют естественные ограничения на цены товаров, т.е. предполагается, что $c_{i1} \le p_i \le c_{i2}$, $i = \overline{1,n}$. Множество наборов $\sigma = (\alpha, \varphi, u, I, c_1, c_2)$, для которых выполнены неравенства $c_{i2} > c_{i1}$, $i = \overline{1,n}$, обозначим через Σ.

Если для заданного p существует индекс i такой, что $D_i(p) > S_i(p)$, то на рынке возникает дефицит i-го товара, а в случае, если существует i такой, что $D_i(p) < S_i(p)$, то появляются излишки i-го товара. Такие цены не могут считаться удовлетворительными, т. к. в одном случае ущемлены интересы покупателей, а в другом продавцов. Таким образом, считается, что наилучшим вариантом для экономики является равенство $S(p) = D(p)$.

О п р е д е л е н и е 4. *Вектор* $p\in\mathbb{R}^n_+$ *называется вектором равновесных цен в модели* σ, *если* $S(p)=D(p)$.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ определим нормы по формулам

$$\|x\|_1 = 2\max_{i=\overline{1,n}}\frac{|x_i|}{c_{i2}-c_{i1}} \quad \forall\, x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

$$\|x\|_2 = \max_{i=\overline{1,n}}|x_i| \quad \forall\, x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим метрические пространства (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y), где $X=\mathbb{R}^n_+$, $Y=\mathbb{R}^n_+$, метрика ρ_X определяется нормой $\|\cdot\|_1$, а метрика ρ_Y — нормой $\|\cdot\|_2$.

Положим

$$\tilde c = \frac{c_1+c_2}{2}, \quad M = B_X(\tilde c, 1).$$

Введем обозначения

$$\tilde\alpha(\sigma) = 2\left(||\bar\lambda||_C \max_{i=\overline{1,n}}\frac{c_{i2}}{c_{i2}-c_{i1}}\right)^{-1}\max_{i=\overline{1,n}}\frac{c_{i1}}{c_{i2}-c_{i1}}\min_{p\in M}\sum_{i=1}^{n}|I'_{p_i}(p)-y_i(p)|u_2-$$

$$-(n+1)||u_1||_C||\bar\lambda||_C\left(\max_{i=\overline{1,n}}\frac{c_{i1}}{c_{i2}-c_{i1}}\right)^{-1},$$

$$\tilde\beta(\sigma) = \frac{n+1}{2}\min_{i=\overline{1,n}}\frac{c_{i2}-c_{i1}}{c_{i1}}||\varphi_1||_C||\lambda||_C,$$

$$\tilde\gamma(\sigma) = \max_{i=\overline{1,n}}|\bar y_i - \bar y_{+i} + \bar y_{-i}|,$$

где

$$\varphi_1(y_+;y_-) = ||\varphi'(y_+;y_-)||,$$

$$u_1(y) = ||u'(y)||, \quad u_2(y) = ||u''(y)||,$$

$$\lambda(y_+;y_-) = \max_{i=\overline{1,2n}}(\lambda_i(y_+;y_-))^{-1},$$

$\lambda_i(y_+;y_-)$, $i=\overline{1,2n}$, — собственные значения матрицы $\varphi''(y_+;y_-)$,

$$\bar\lambda(y) = \max_{i=\overline{1,n}}\left|\bar\lambda_i(y)\right|^{-1},$$

$\bar\lambda_i(y)$, $i=\overline{1,n}$, — собственные значения матрицы $u''(y)$,

$\forall p\in M$ $y=y(p)$ — решение задачи

$$\begin{cases} u(y)\to\max, \\ \langle p,y\rangle \le I(p), \\ y\ge 0, \end{cases}$$

$\bar y$ — решение задачи

$$\begin{cases} u(y)\to\max, \\ \langle c_1+c_2,y\rangle \le I(c_1+c_2), \\ y\ge 0, \end{cases}$$

$(\bar y_+,\bar y_-)$ — решение задачи

$$\begin{cases} \langle(\alpha(c_1+c_2);-c_1-c_2),(y_+;y_-)\rangle\to\max, \\ \varphi(y_+;y_-)\le 0, \\ (y_+;y_-)\ge 0. \end{cases}$$

Т е о р е м а 4. *Пусть модель* $\sigma \in \Sigma$ *удовлетворяет условиям:*
1) $\tilde{\alpha}(\sigma) > \tilde{\beta}(\sigma)$ *;*
2) $\tilde{\gamma}(\sigma) < \tilde{\alpha}(\sigma) - \tilde{\beta}(\sigma)$.
Тогда в исследуемой модели существует вектор равновесных цен $p = (p_1, ..., p_n)$ *такой, что* $c_{i1} < p_i < c_{i2}$, $i = \overline{1, n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим константу Липшица отображения S. Обозначим через $\mathrm{lip}(S|\,M)$ точную нижнюю грань всех чисел $\beta \geq 0$ таких, что отображение S удовлетворяет на M условию Липшица с константой β. Тогда

$$\mathrm{lip}(S|\,M) = \sup_{p \in \mathrm{int} M} \left\| \frac{\partial S}{\partial p}(p) \right\|.$$

Для любого $p \in \mathrm{int} M$ имеем

$$\frac{\partial S}{\partial p}(p) = \frac{\partial(y_+ - y_-)}{\partial(y_+; y_-)}(p) \frac{\partial(y_+; y_-)}{\partial(\alpha p; -p)}(p) \frac{\partial(\alpha p; -p)}{\partial p}(p).$$

Тогда в силу леммы 1 из [1] для $p \in \mathrm{int} M$

$$\frac{\partial S}{\partial p}(p) = B \left(C^{-1} - \frac{\left(C^{-1} a^*\right) \left(C^{-1} a^*\right)^*}{\langle C^{-1} a^*, a^* \rangle} \right) F,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = ||p|| \cdot ||\varphi'(y_+; y_-)||^{-1} \varphi''(y_+; y_-), \quad a = \varphi'(y_+; y_-),$$

$$F = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \\ -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в силу леммы 3 из [1] имеем

$$\mathrm{lip}(S|\,M) \leq \left(2 \max_{i = \overline{1,n}} \frac{c_{i1}}{c_{i2} - c_{i1}} \right)^{-1} (n+1) ||\varphi_1||_C ||\lambda||_C = \tilde{\beta}(\sigma).$$

Оценим $\mathrm{cov}(D|\,M)$.
Из теоремы 4 из [3] следует, что

$$\mathrm{cov}(D|\,M) = \inf_{p \in \mathrm{int} M} \mathrm{cov}(D|\,p) = \inf_{p \in \mathrm{int} M} \mathrm{cov}\left(\frac{\partial D}{\partial p}(p) \right).$$

В силу леммы 2 из [1] для $p \in \mathrm{int} M$

$$\frac{\partial D}{\partial p}(p) = \bar{\mathcal{A}}(p) + \bar{\bar{\mathcal{A}}}(p),$$

где $\bar{\mathcal{A}}(p),\ \bar{\bar{\mathcal{A}}}(p):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — линейные операторы, действующие по формулам

$$\bar{\mathcal{A}}(p)\xi=\frac{\bar{A}^{-1}p^*(I'(p)-y)}{\langle\bar{A}^{-1}p^*,p^*\rangle}\xi\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^n,$$

$$\bar{\bar{\mathcal{A}}}(p)\xi=\bar{a}\left(\bar{A}^{-1}-\frac{\left(\bar{A}^{-1}p^*\right)\left(\bar{A}^{-1}p^*\right)^*}{\langle\bar{A}^{-1}p^*,p^*\rangle}\right)\xi\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^n,$$

$\bar{A}=u''(y)$, $\bar{a}=||u'(y)||\cdot||p||^{-1}$.

Следовательно, согласно приведенной выше теореме о возмущении

$$\operatorname{cov}\left(\frac{\partial D}{\partial p}(p)\right)=\operatorname{cov}\left(\bar{\mathcal{A}}(p)\right)-\operatorname{lip}\left(\bar{\bar{\mathcal{A}}}(p)\right).$$

Заметим, что

$$\operatorname{cov}\left(p^*(I'(p)-y)\right)=||p||\sum_{i=1}^{n}|I'_{p_i}(p)-y_i(p)|,$$

т. к. линейный оператор, действующий из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и определяемый матрицей $p^*(I'(p)-y)$, отображает единичный шар с центром в нуле в отрезок с концами в точках $\sum\limits_{i=1}^{n}|I'_{p_i}(p)-y_i(p)|p$ и $-\sum\limits_{i=1}^{n}|I'_{p_i}(p)-y_i(p)|p$.

Следовательно,

$$\operatorname{cov}\left(\bar{\mathcal{A}}(p)\right)\geq$$
$$\geq 2\left(||\bar{\lambda}||_C\max_{i=\overline{1,n}}\frac{c_{i2}}{c_{i2}-c_{i1}}\right)^{-1}\max_{i=\overline{1,n}}\frac{c_{i1}}{c_{i2}-c_{i1}}\min_{p\in M}\sum_{i=1}^{n}|I'_{p_i}(p)-y_i(p)|u_2,$$

В силу леммы (3) имеем

$$\operatorname{lip}\left(\bar{\bar{\mathcal{A}}}(p)\right)\leq\frac{||u'(y)||}{||p||}(n+1)\max_{i=\overline{1,n}}\left|\bar{\lambda}_i(y)\right|\leq$$
$$\leq(n+1)||u_1||_C||\bar{\lambda}||_C\left(\max_{i=\overline{1,n}}\frac{c_{i1}}{c_{i2}-c_{i1}}\right)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{cov}(D|\,M)\geq 2\left(||\bar{\lambda}||_C\max_{i=\overline{1,n}}\frac{c_{i2}}{c_{i2}-c_{i1}}\right)^{-1}\max_{i=\overline{1,n}}\frac{c_{i1}}{c_{i2}-c_{i1}}\min_{p\in M}\sum_{i=1}^{n}|I'_{p_i}(p)-y_i|u_2-$$
$$-(n+1)||u_1||_C||\bar{\lambda}||_C\left(\max_{i=\overline{1,n}}\frac{c_{i1}}{c_{i2}-c_{i1}}\right)^{-1}=\tilde{\alpha}(\sigma).$$

Из предположений теоремы и неравенств $\operatorname{cov}(D|\,M)\geq\tilde{\alpha}(\sigma)$, $\operatorname{lip}(S|\,M)\leq\tilde{\beta}(\sigma)$ следует, что существуют положительные числа $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ такие, что $\tilde{\beta}(\sigma)<\bar{\beta}<\bar{\alpha}<\tilde{\alpha}(\sigma)$, $\tilde{\gamma}(\sigma)<\bar{\alpha}-\bar{\beta}$, отображение D является $\bar{\alpha}$-накрывающим на множестве M, а отображение S является $\bar{\beta}$-липшицевым на множестве M. Поскольку $\rho_Y(D(\tilde{c}),S(\tilde{c}))=\tilde{\gamma}(\sigma)$, из предположения 2) теоремы следует, что $\rho_Y(D(\tilde{c}),S(\tilde{c}))\leq\bar{\alpha}-\bar{\beta}$. Таким образом, согласно теореме 1 из [3], существует вектор $p\in X$ такой, что $D(p)=S(p)$ и

$$\rho_X(p,\tilde{c})\leq\frac{1}{\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}}\rho_Y(D(\tilde{c}),S(\tilde{c})).$$

Из последнего неравенства следует, что $p\in\operatorname{int}M$, поскольку $M=B_X(\tilde{c},1)$, а $\rho_Y(D(\tilde{c}),S(\tilde{c}))=$ $=\tilde{\gamma}(\sigma)<\bar{\alpha}-\bar{\beta}$. Поэтому $c_{i1}<p_i<c_{i2}$ для любого $i=\overline{1,n}$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнов А.В., Павлова Н.Г., Шананин А.А.* Равновесные цены в одной модели экономического равновесия // Математическое моделирование, 2016.
2. *Арутюнов А.В.* Точки совпадения двух отображений // Функциональный анализ и его приложения, 2014. Т. 48. № 1. С. 89–93.
3. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications, 2009. V. 5. № 1. P. 5–16.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-01-04601, 16-01-00677).

Поступила в редакцию 8 февраля 2016 г.

Белякова Екатерина Сергеевна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, магистр кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: esbelyakova@hotmail.com

Павлова Наталья Геннадьевна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: natasharussia@mail.ru

UDC 519.86
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-9-16

EQUILIBRIUM PRICES IN ECONOMIC EQUILIBRIUM MODELS WITH TRANSACTION COSTS

© E. S. Belyakova, N. G. Pavlova

In this paper, we generalize the results obtained in [1] for the case of different shares of transaction costs. As a corollary of the theory of metric regular maps (theorems about the existence of coincidence points), we obtain sufficient conditions of the existence of equilibrium price vector in the considered models.
Key words: economic equilibrium; transaction costs; coincidence points.

ACKNOWLEDGEMENTS: The present work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects № 15-01-04601, 16-01-00677).

REFERENCES

1. *Arutyunov A.V., Pavlova N.G., Shananin A.A.* Ravnovesnye ceny v odnoj modeli ehkonomicheskogo ravnovesiya // Matematicheskoe modelirovanie, 2016.
2. *Arutyunov A.V.* Tochki sovpadeniya dvuh otobrazhenij // Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya, 2014. T. 48. № 1. S. 89–93.
3. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications, 2009. V. 5. № 1. P. 5–16.

Received 8 February 2016.

Belyakova Ekaterina Sergeevna, People's Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Master of the Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: esbelyakova@hotmail.com

Pavlova Natalia Gennadievna, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: natasharussia@mail.ru

УДК 517.988; 517.968.4; 51-76
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-16-27

ON WELL-POSEDNESS OF GENERALIZED NEURAL FIELD EQUATIONS WITH IMPULSIVE CONTROL

© E.O. Burlakov, E. S. Zhukovskiy

We formulate and prove the theorem on well-posedness of abstract Volterra equations in metric spaces. We consider nonlinear nonlocal integral Volterra equation involving generalizing equations typically used in mathematical neuroscience. We investigate solutions that tend to zero at any moment with unbounded growth of the spatial variable. In the literature such solutions are called «spatially localized solutions» or «bumps». They correspond to normal brain functioning. For the main equation, we consider an impulsive control problem, where the control parameters are moments, when the solution discontinue, and corresponding jumps' values. Such control systems model electrical stimulation used in the presence of various diseases of central nervous system. We define suitable complete metric (not linear) space. Using the aforementioned theorem, we obtain conditions for existence and uniqueness of solution to this equation and continuous dependence of this solution on the control.
Key words: abstract Volterra equations; nonlinear integral equations; neural field equations; impulsive control; well-posedness.

1. Introduction

Unique solvability and continuous dependence of the solution on the model parameters has been always considered as important properties of a model, conditioning, in particular, its applicability, possibility to implement various numerical methods. The problem of continuous dependence on parameters of various classes of operator equations has been considered in numerous papers (see, e.g. the review [1] as well as the monograph [2] (pp. 203–210) and the references therein).

The present work extends the results of [21] on solvability of abstract Volterra equations in metric spaces by formulating and proving a statement on continuous dependence of solutions to these equations on a parameter. Utilizing these general results, we investigate well-posedness (existence, uniqueness and continuous dependence of solution on parameters) of an integral Volterra equation describing a broad class of models arising in neural field theory. Typical representative of this class is the Amari neural field equation [3]

$$w_t(t,x) = -w(t,x) + \int\limits_R \Omega(x-y) f(w(t,y))dy, \ \ t \geq 0, x \in \mathbb{R} \qquad (1.1)$$