УДК 517.977.52
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-28-39

НЕПРЕРЫВНОСТЬ МЕРЫ-МНОЖИТЕЛЯ ЛАГРАНЖА ИЗ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ И НЕРАВЕНСТВ В УСЛОВИЯХ СЛАБОЙ РЕГУЛЯРНОСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ПРОЦЕССА

© **А. В. Горбачева**

В условиях слабой регулярности исследуется свойство непрерывности меры-множителя Лагранжа из принципа максимума Понтрягина для задач управления с фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств. Доказаны соответствующие утверждения.
Ключевые слова: оптимальное управление; принцип максимума; фазовые ограничения.

1. Постановка задачи и основные определения

Настоящая работа является дальнейшим развитием результатов, полученных в [1]. Приведем необходимые формулировки и определения из [1]. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{cases} \varPhi(p,u(\cdot)) := e_0(p) + \int_{t_1}^{t_2} \varphi_0(x,u,t)dt \to \min, \\ \dot{x} = \varphi(x,u,t),\ t \in [t_1,t_2],\ t_1 < t_2, \\ g_1(x,t) = 0,\ g_2(x,t) \le 0, \\ r(x,u,t) \le 0, \\ e_1(p) = 0,\ e_2(p) \le 0, \\ p = (x_1,x_2,t_1,t_2). \end{cases} \tag{1}$$

Будем считать, что вектор-функции r, e_i, g_i принимают значения в евклидовых пространствах размерности $d(r)$, $d(e_i)$, $d(g_i)$ соответственно, функции e_0, φ_0, φ являются скалярными, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $t \in [t_1,t_2]$ – время (концы времени t_1 и t_2 не предполагаются фиксированными), x есть фазовая переменная из n-мерного евклидового пространства $\mathbb{R}^n$, и $u \in \mathbb{R}^m$ – переменная управления. Вектор $p \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ называется *концевым.* Управляющая функция, или просто *управление*, есть измеримая существенно ограниченная функция $u(\cdot)$, т. е. элемент пространства $L_\infty([t_1,t_2])$.

Предположим, что функции e_0, e_i, φ_0, φ непрерывно дифференцируемы, функции g_i дважды непрерывно дифференцируемы, а функции φ, φ_0, r дважды непрерывно дифференцируемы по u для всех x, t.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $u(t)$, $t \in [t_1,t_2]$ – управление, а $x(t)$, $t \in [t_1,t_2]$ – соответствующая этому управлению траектория, то есть $\dot{x} = \varphi(x(t),u(t),t)$, и p – соответствующий концевой вектор. Допустимым процессом будем называть тройку (p,x,u), если она удовлетворяет

- концевым ограничениям: $e_1(p) = 0$, $e_2(p) \le 0$,
- смешанным ограничениям: $r(x(t),u(t),t) \le 0$ для п.в. $t \in [t_1,t_2]$, и
- фазовым ограничениям $g_1(x(t),t) = 0$, $g_2(x(t),t) \le 0$ $\forall\, t \in [t_1,t_2]$.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что допустимый процесс оптимален, если значение функционала $\varPhi$ является наименьшим на множестве всех допустимых процессов.

О п р е д е л е н и е 3. Концевые ограничения называются регулярными в точке $p=(x_1,x_2,t_1,t_2):\ e_1(p)=0$, $e_2(p)\le 0$, если

$$\operatorname{rank}\frac{\partial e_1}{\partial p}(p)=d(e_1),\ \exists\, d\in \operatorname{Ker}\ \frac{\partial e_1}{\partial p}(p):\ \Big\langle \frac{\partial e_2^j}{\partial p}(p),d\Big\rangle>0\ \ \forall\, j:\ e_2^j(p)=0.$$

(Верхние индексы означают координаты вектора или вектор-функции).

О п р е д е л е н и е 4. Смешанные ограничения называются регулярными, если для любых $(x,u,t):\ r(x,u,t)\le 0$ существует вектор $q=q(x,u,t)$ такой, что

$$\Big\langle \frac{\partial r^j}{\partial u}(x,u,t),q\Big\rangle>0\ \ \forall\, j: r^j(x,u,t)=0. \tag{2}$$

О п р е д е л е н и е 5. Фазовые ограничения называются регулярными, если для любых $(x,t):\ g_1(x,t)=0$, $g_2(x,t)\le 0$, имеет место

$$\operatorname{rank}\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,t)=d(g_1),\quad \exists\, z=z(x,t)\in\operatorname{Ker}\ \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,t):$$

$$\langle\frac{\partial g_2^j}{\partial x}(x,t),z\rangle>0\quad \forall j: g_2^j(x,t)=0.$$

О п р е д е л е н и е 6. Фазовые ограничения называются согласованными с концевыми ограничениями в точке p^*, если существует число $\varepsilon>0$ такое, что

$$\{p\in\mathbb{R}^{2n+2}:\ |p^*-p|\le\varepsilon,\ e_1(p)=0,\ e_2(p)\le 0\}\subseteq$$

$$\{p:\ g_1(x_1,t_1)=0,\ g_2(x_1,t_1)\le 0,\ g_1(x_2,t_2)=0,\ g_2(x_2,t_2)\le 0.\}$$

О п р е д е л е н и е 7. Будем говорить, что в концевых точках выполнены условия управляемости относительно фазовых ограничений, если для $s=1,2$,

$$\begin{aligned}&\exists\,\varphi_s\in\operatorname{conv}\varphi(x_s^*,U(x_s^*,t_s^*),t_s^*):\\ &\qquad(-1)^s\left[\Big\langle\frac{\partial g_2^j}{\partial x}(x_s^*,t_s^*),\varphi_s\Big\rangle+\frac{\partial g_2^j}{\partial t}(x_s^*,t_s^*)\right]>0,\ \forall\, j\in J(x_s^*,t_s^*).\end{aligned}$$

Пусть (p^*,x^*,u^*) допустимый процесс в задаче (1). Здесь $p^*=(x_1^*,x_2^*,t_1^*,t_2^*)$. Введем необходимые обозначения:

$$J(x,t)=\{j: g_2^j(x,t)=0\},\ \ I(x,u,t)=\{i:\ r^i(x,u,t)=0\},$$

$$\Gamma_i(x,u,t)=\frac{\partial g_i}{\partial x}(x,t)\varphi(x,u,t)+\frac{\partial g_i}{\partial t}(x,t),\ \ i=1,2,$$

$$U(x,t)=\{u\in\mathbb{R}^m:\ r(x,u,t)\le 0,\ \Gamma_1(x,u,t)=0\},$$

$$T=[t_1^*,t_2^*],\ \ \Gamma=(\Gamma_1,\Gamma_2),\ \ g=(g_1,g_2).$$

Пусть $\xi(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ заданная измеримая ограниченная функция.

О п р е д е л е н и е 8. Замыканием справа по мере функции $\xi(t)$ в точке τ называется множество $\Xi^+(\tau)$ таких векторов $u\in\mathbb{R}^m$ что

$$\ell\Big(\{t\in[\tau,\tau+\varepsilon]:\ \xi(t)\in B_\varepsilon(u)\}\Big)>0\ \ \forall\,\varepsilon>0.$$

Здесь, $B_\varepsilon(u)=\{v\in\mathbb{R}^m: |v-u|\le\varepsilon\}$, и ℓ – мера Лебега на $\mathbb{R}$. Соответственно, замыкание слева – это множество $\Xi^-(\tau)$ таких векторов $u\in\mathbb{R}^m$ что

$$\ell\Big(\{t\in[\tau-\varepsilon,\tau]:\,\xi(t)\in B_\varepsilon(u)\}\Big)>0\ \ \forall\,\varepsilon>0.$$

Многозначное отображение $\Xi(t):=\Xi^-(t)\cup\Xi^+(t)$, где $t\in\mathbb{R}$, называется замыканием $\xi(t)$ по мере Лебега.

Некоторые свойства замыкания по мере приведены в [1]. Ниже будем обозначать через $\mathcal{U}(t)$ замыкание по мере функции $u^*(t)$. Будем также считать, что $\mathcal{U}^-(t_1^*)=\mathcal{U}^+(t_1^*)$, $\mathcal{U}^+(t_2^*)=$ $=\mathcal{U}^-(t_2^*)$.

Следующее определение является ослаблением условий регулярности из [1] (см. там Определение 9).

О п р е д е л е н и е 9. Допустимый процесс (p^*,x^*,u^*) называется слабо регулярным, если для любых $t\in T$, и $u\in\mathcal{U}(t)$, векторы $\frac{\partial\Gamma_1^j}{\partial u}(x^*(t),u,t)$, $j=1,...,d(g_1)$, $\frac{\partial r^i}{\partial u}(x^*(t),u,t)$, $i\in I(x^*(t),u,t)$ линейно независимы, и существует вектор $d=d(u,t)\in\mathbb{R}^m$ такой, что $d\in\operatorname{Ker}\frac{\partial r^i}{\partial u}(x^*(t),u,t)$ $\forall\,i\in I(x^*(t),u,t)$, $d\in\operatorname{Ker}\frac{\partial\Gamma_1}{\partial u}(x^*(t),u,t)$,

$$\left\langle\frac{\partial\Gamma_2^j}{\partial u}(x^*(t),u,t),d\right\rangle>0\ \ \forall\,j\in J(x^*(t),t):\ \Gamma_2^j(x^*(t),u,t)=0. \tag{3}$$

В общем случае, когда множество $\mathcal{U}(t)$ трудно вычислимо, достаточно проверить условие (3) для всех $u\in U(x^*(t),t)$. Кроме того, имеет место следующее простое утверждение.

З а м е ч а н и е 1. Любой допустимый процесс задачи (1) является слабо регулярным, если для любых x,t и любого $u\in U(x,t)$, векторы $\frac{\partial\Gamma_1^j}{\partial u}(x,u,t)$, $j=1,...,d(g_1)$, $\frac{\partial r^i}{\partial u}(x,u,t)$, $i\in I(x,u,t)$ линейно независимы, и существует вектор $d=d(x,u,t)\in\mathbb{R}^m$ такой, что $d\in\operatorname{Ker}\frac{\partial r^i}{\partial u}(x,u,t)$ $\forall\,i\in I(x,u,t)$, $d\in\operatorname{Ker}\frac{\partial\Gamma_1}{\partial u}(x,u,t)$, и

$$\left\langle\frac{\partial\Gamma_2^j}{\partial u}(x,u,t),d\right\rangle>0\ \ \forall\,j\in J(x,t):\ \Gamma_2^j(x,u,t)=0.$$

Наряду с определением регулярного процесса ниже нам также понадобится понятие регулярной точки множества $U(x,t)$. В отличие от регулярности процесса это понятие никак не связано с фазовыми ограничениями типа неравенств.

О п р е д е л е н и е 10. Назовем точку $u\in U(x,t)$ регулярной, если $\operatorname{rank}\frac{\partial\Gamma_1}{\partial u}(x,u,t)=d(g_1)$, и существует вектор $q\in\operatorname{Ker}\frac{\partial\Gamma_1}{\partial u}(x,u,t)$ такой, что

$$\left\langle\frac{\partial r^i}{\partial u}(x,u,t),q\right\rangle>0\ \ \forall\,i\in I(x,u,t).$$

Подмножество всех регулярных точек множества $U(x,t)$ обозначим через $U_R(x,t)$. Положим $\Omega(x,t):=\mathrm{cl}U_R(x,t)$ (cl обозначает замыкание). Отметим, что если процесс регулярен, то $\mathcal{U}(t)\subseteq U_R(x^*(t),t)$ $\forall\,t\in T$, и значит все близкие точки из некоторой его окрестности регулярны. В частности смешанные ограничения будут регулярными в некоторой окрестности регулярного процесса. Отсюда, поскольку $\mathcal{U}(t)\neq\varnothing$ $\forall\,t\in T$, также следует, что $\Omega(x^*(t),t)\neq\varnothing$ $\forall\,t\in T$. Будем неявно (т.е. не ссылаясь на них каждый раз) использовать эти факты ниже.

Рассмотрим расширенную функцию Гамильтона–Понтрягина

$$\bar H(x,u,\psi,\mu,\lambda^0,t)=\big\langle\psi,\varphi(x,u,t)\big\rangle-\big\langle\mu,\Gamma(x,u,t)\big\rangle-\lambda^0\varphi_0(x,u,t),$$

где $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, и малый Лагранжиан

$$l(p,\lambda) = \lambda^0 e_0(p) + \langle \lambda^1, e_1(p) \rangle + \langle \lambda^2, e_2(p) \rangle, \quad \lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2).$$

О п р е д е л е н и е 11. Будем говорить, что допустимый процесс (p^*, x^*, u^*) в задаче (1) удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, если существует вектор $\lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2)$: $\lambda^0 \in \in \mathbb{R}$, $\lambda^1 \in \mathbb{R}^{d(e_1)}$, $\lambda^2 \in \mathbb{R}^{d(e_2)}$, $\lambda^0 \geq 0$, $\lambda^2 \geq 0$, $\langle \lambda^2, e_2(p^*) \rangle = 0$, абсолютно непрерывная функция $\psi\colon\ T \to \mathbb{R}^n$, функция $\mu = (\mu_1, \mu_2)\colon\ T \to \mathbb{R}^{d(g)}$ и измеримая ограниченная функция $\nu\colon\ T \to \mathbb{R}^{d(r)}$ такие, что

$$\text{либо } \lambda^0 + |\mu_2(t_1^*)| > 0, \text{ либо } \psi(t) \notin \operatorname{im} \frac{\partial g_1^*}{\partial x}(t)\ \forall t \in T, \tag{4}$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x}(t) + \nu(t)\frac{\partial r}{\partial x}(t) \text{ п.в. } t, \tag{5}$$

$$\psi(t_s^*) = (-1)^{s+1}\frac{\partial l}{\partial x_s}(p^*, \lambda) + \mu_2(t_s^*)\frac{\partial g_2}{\partial x_s}(t_s^*), \ s = 1, 2, \tag{6}$$

$$\max_{u \in \Omega(t)} \bar{H}(u,t) = \bar{H}(t) \text{ п.в. } t, \tag{7}$$

$$\dot{h} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}(t) - \nu(t)\frac{\partial r}{\partial t}(t) \text{ п.в. } t, \tag{8}$$

$$h(t_s^*) = (-1)^s \frac{\partial l}{\partial t_s}(p^*, \lambda) - \mu_2(t_s^*)\frac{\partial g_2}{\partial t}(t_s^*), \ s = 1, 2, \tag{9}$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial u}(t) = \nu(t)\frac{\partial r}{\partial u}(t) \text{ п.в. } t, \tag{10}$$

$$\langle \nu(t), r(t) \rangle = 0, \ \nu(t) \geq 0 \text{ п.в. } t, \tag{11}$$

где $h(t) := \max_{u \in \Omega(t)} \bar{H}(u,t)$.

Более того, функция $h(t)$ абсолютно непрерывна на T, а вектор-функция $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ удовлетворяет следующим свойствам:

а) каждая из функций μ_2^j постоянна на каждом отрезке времени $[a,b]$, на котором траектория $x^*(t)$ целиком лежит во внутренности фазового множества, задаваемого j-ым фазовым ограничением-неравенством, т. е. когда $g_2^j(t) < 0 \quad \forall\, t \in [a,b]$;

б) вектор-функция μ_2 непрерывна слева на интервале (t_1^*, t_2^*), и $\mu_2(t_2^*) = 0$;

в) каждая из функций μ_2^j (нестрого) монотонно убывает;

г) вектор-функция μ_1 измерима и ограничена на T.

Процесс (p^*, x^*, u^*), удовлетворяющий принципу максимума, называется экстремалью, а набор $(\lambda, \psi, \mu, \nu)$ – множителями Лагранжа, отвечающими процессу (p^*, x^*, u^*) в силу принципа максимума.

В работе приняты следующие соглашения относительно обозначений. Во-первых, если у отображений $\bar{H}, g, r, \varphi, \Omega$, и т. п. или их производных какие-нибудь из аргументов опущены, то вместо них подставлены значения $x^*(t), u^*(t)$ или множители Лагранжа $\psi(t), \mu(t), \lambda$. Во-вторых, все множители Лагранжа или элементы сопряженных пространств рассматриваются как вектор-строки, в то время как вектор-функции или векторы, такие как φ, x, u рассматриваются как вектор-столбцы. Градиенты функций считаются элементами сопряженных пространств. Элементы матрицы Якоби $F(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ имеют вид $\frac{\partial F^i}{\partial x_j}(x)$, и ее строками являются градиенты координатных функций F^i.

2. Гельдеровость $\mu_2(t)$.

В этом разделе ослабим условия регулярности, приведенные в [1], таким образом, чтобы по-прежнему выполнялось условие гельдеровости μ_2. Ослабление условий регулярности (и тем самым усиление Теоремы 2 из [1]) предполагает, что фазовое ограничение g_2 скалярно.

В случае векторной функции g_2 ниже потребуются дополнительные предположения.

Предположение (А) Существует целое число $N > 0$ и точки $t_i \in (t_1^*, t_2^*)$, $i = 1, ..., N$ такие, что $t_1 < t_2 < ... < t_N$, отображение $J(t)$ постоянно для каждого интервала (t_1^*, t_1), (t_i, t_{i+1}), $i = 1, ..., N-1$ и (t_N, t_2^*). Точка t_i или t_1^*, t_2^* называется *точкой стыка* (или *точкой контакта*), если отображение $J(t)$ не является постоянным в любой из ее окрестностей.

Пусть

$$\mathcal{G}^+(t) := \{u \in U(t) : \Gamma_2^j(u,t) \geq 0 \, \forall \, j \in J(t)\},$$
$$\mathcal{G}^-(t) := \{u \in U(t) : \Gamma_2^j(u,t) \leq 0 \, \forall \, j \in J(t)\}.$$

Далее будем считать, что априори справедливы следующие условия:

$$\mathcal{U}^+(t) \cap \mathcal{G}^-(t) \neq \varnothing, \;\; \mathcal{U}^-(t) \cap \mathcal{G}^+(t) \neq \varnothing \;\; \forall \, t \in T. \tag{12}$$

Следующее утверждение предлагает два важных класса задач.

П р е д л о ж е н и е 1. Пусть выполняется хотя бы одно из следующих двух условий.

a) $|J(t)| \leq 1 \;\; \forall \, t$;

b) управление $u^*(t)$ кусочно-непрерывно, и выполняется Предположение (А).

Тогда справедливо (12).

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно. Оно следует из допустимости траектории $x^*(t)$. □

П р е д л о ж е н и е 2. Предположим, что выполнены условия (12), и процесс (p^*, x^*, u^*) слабо регулярен.

Тогда $x^*(t)$ управляема в концах.

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно и следует непосредственно из определений.

Если выполнены условия слабой регулярности для экстремального процесса, то имеет место следующий результат.

Т е о р е м а 1. Предположим, что допустимый процесс (p^*, x^*, u^*) экстремален. Пусть концевые ограничения регулярны в точке p^*, фазовые ограничения согласованы с концевыми ограничениями в точке p^*, процесс (p^*, x^*, u^*) слабо регулярен, выполнено условие (12), и имеет место хотя бы одно из следующих условий:

1) выполняется Предположение (А);

2) $|J(t)| \leq 1 \;\; \forall \, t$.

Тогда, для любых множителей Лагранжа λ, ψ, μ, v, отвечающих (p^*, x^*, u^*) в силу принципа максимума, выполняется:

i) условие нетривиальности

$$\text{либо} \quad \lambda^0 > 0, \quad \text{либо} \quad \psi(t) - \mu_2(t)\frac{\partial g_2}{\partial x}(t) \notin \operatorname{im} \frac{\partial g_1^*}{\partial x}(t) \;\; \forall \, t \in T; \tag{13}$$

ii) в каждой точке $t_* \in (t_1^*, t_2^*)$ функция $\mu_2(t)$ непрерывна и более того имеет корневой рост справа и слева; если оптимальная траектория выходит негладко на границу j-ого фазового ограничения в точке t_*, $j \in J(t_*)$, тогда рост μ_2^j линеен справа; в случае негладкого схода с границы j-ого фазового ограничения, рост μ_2^j линеен слева;

iii) существует вектор $\lambda_{\rm m} = (\lambda^0, \lambda^1_{\rm m}, \lambda^2_{\rm m})$ и функция $\psi_{\rm m}(t)$ такие что, набор $\lambda_{\rm m}, \psi_{\rm m}, \mu_1, \bar{\mu}_2, \nu$, где

$$\bar{\mu}_2(t) = \begin{cases} \mu_2(t) - \mu_2(t_2^{*-}),\ t \in (t_1^*, t_2^*), \\ \mu_2(t_1^{*+}) - \mu_2(t_2^{*-}),\ t = t_1^*, \\ 0,\ t = t_2^*. \end{cases}$$

удовлетворяет принципу максимума и условию (12); и

iv) при дополнительном предположении, что $d(g_2) = 1$, функция $\bar{\mu}_2(t)$ является гельдеровой с показателем $\alpha = \frac{1}{2}$, то есть

$$|\bar{\mu}_2(t) - \bar{\mu}_2(s)| \le \text{const}\sqrt{|t-s|} \quad \forall\, t, s \in T. \tag{14}$$

Теорема 1 является развитием результатов из [5] на случай, когда также присутствуют фазовые ограничения типа равенств. Заметим, что благодаря Теореме 1 и Замечанию 1 можно априори (т. е. не вычисляя оптимальный процесс) гарантировать непрерывность $\mu_2(t)$. Приведем несколько примеров.

П р и м е р 1. Пусть $n = m$, r_1, r_2 – заданные положительные числа, $\phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^1$, $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – заданные гладкие функции. Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \phi(x,u)dt \to \min, \\ \dot{x} = \theta(x) + u, \\ |u|^2 \le r_1,\ |x|^2 \le r_2, \\ x(0) = x_A,\ x(1) = x_B. \end{cases}$$

Предположим, что

$$|\langle \theta(x), x\rangle| < \sqrt{r_1 r_2}\ \ \forall\, x:\ |x|^2 = r_2. \tag{15}$$

Тогда любой допустимый процесс Примера 1 слабо регулярен.

Покажем, что в примере выполнены все предположения, сформулированные в Замечании 1. Тогда в его силу любой допустимый процесс будет слабо регулярным. Действительно, имеем:

$$g_2(x) = |x|^2 - r_2,\ \ r(u) = |u|^2 - r_1,\ \ \Gamma_2(x,u) = \langle 2x, \theta(x) + u\rangle.$$

Покажем, что векторы $\frac{\partial r}{\partial u}$ и $\frac{\partial \Gamma_2}{\partial u}$ линейно независимы на множестве

$$(x,u):\ \ r(u) = 0,\ \Gamma_2(x,u) = 0,\ g_2(x) = 0.$$

Действительно, имеем, что

$$\frac{\partial r}{\partial u}(u) = 2u,\ \ \frac{\partial \Gamma_2}{\partial u}(x,u) = 2x.$$

Поскольку $\Gamma_2(x,u) = 0$, то $\langle x, u\rangle = -\langle \theta(x), x\rangle$. Из (15) имеем, что $|\langle x, u\rangle| < \sqrt{r_1 r_2}$. Но $|x| = \sqrt{r_2}$, $|u| = \sqrt{r_1}$, и поэтому последнее неравенство влечет линейную независимость векторов $\frac{\partial r}{\partial u}(u)$ и $\frac{\partial \Gamma_2}{\partial u}(x,u)$.

Легко видеть, что выполнены все предположения, сформулированные в Замечании 1. Поэтому любой допустимый процесс является слабо регулярным.

Таким образом, в силу Теоремы 1, для любого оптимального процесса найдется гельдерова функция-множитель Лагранжа $\mu_2(t)$.

П р и м е р 2. Пусть $n=m$, r_1 – заданное положительное число, w – заданный единичный вектор, $\phi:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^1$, $\theta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ – заданные гладкие функции. Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \int_0^1 \phi(x,u)dt \to \min, \\ \dot{x}=\theta(x)+u, \\ |u|^2 \le r_1, \ \langle w,x\rangle \le 0, \\ x(0)=x_A, \ x(1)=x_B. \end{cases}$$

Предположим, что

$$|\langle\theta(x),w\rangle| < \sqrt{r_1} \ \ \forall x:\langle w,x\rangle = 0. \tag{16}$$

Тогда любой допустимый процесс Примера 2 слабо регулярен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что в примере выполнены все предположения, сформулированные в Замечании 1. Тогда в его силу любой допустимый процесс будет слабо регулярен. Действительно, имеем:

$$g_2(x) = \langle w,x\rangle, \ \ r(u) = |u|^2 - r_1, \ \ \Gamma_2(x,u) = \langle w,\theta(x)+u\rangle.$$

Покажем, что векторы $\frac{\partial r}{\partial u}(u)$ и $\frac{\partial \Gamma_2}{\partial u}(x,u)$ линейно независимы на множестве

$$(x,u): \ \ r(u)=0, \ \Gamma_2(x,u)=0, \ g_2(x)=0.$$

Действительно, $\frac{\partial r}{\partial u}(u)=2u$, $\frac{\partial \Gamma_2}{\partial u}(x,u)=w$. Поскольку $\Gamma_2(x,u)=0$, то $\langle w,u\rangle = -\langle\theta(x),w\rangle$. Из (16) имеем, что $|\langle w,u\rangle| < \sqrt{r_1}$, а поскольку $|w|=1$ и $|u|=\sqrt{r_1}$, то векторы $\frac{\partial r}{\partial u}$ и $\frac{\partial \Gamma_2}{\partial u}$ не коллинеарны.

Легко видеть, что выполнены все предположения, сформулированные в Замечании 1. Поэтому любой допустимый процесс является слабо регулярным.

Таким образом, в силу Теоремы 1, для любого оптимального процесса найдется гельдерова функция-множитель Лагранжа $\mu_2(t)$.

П р и м е р 3. Пусть $n=m$, $k<m$, a – заданное положительное число, w – заданный единичный вектор, $\phi:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^1$, $\theta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ – заданные гладкие функции. Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \int_0^1 \phi(x,u)dt \to \min, \\ \dot{x}=\theta(x)+u, \\ |u^j| \le a, \ j=1,...,k, \\ \langle w,x\rangle \le 0, \\ x(0)=x_A, \ x(1)=x_B. \end{cases}$$

Предположим, что

$$\exists j_* > k: \ w^{j_*} \neq 0. \tag{17}$$

Тогда любой допустимый процесс Примера 3 слабо регулярен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что в примере выполнены все предположения, сформулированные в Замечании 1. Тогда в его силу любой допустимый процесс будет слабо регулярным. Действительно, имеем:

$$g_2(x) = \langle w,x\rangle, \ \ r^j(u) = u^j - a, \ j=1,...,k,$$

$$r^j(u) = -u^{j-k} - a, \ j=k+1,...,2k,$$

$$\Gamma_2(x,u) = \langle w, \theta(x) + u\rangle.$$

Легко видеть, что векторы $\frac{\partial r^j}{\partial u}(u)$, $j \in I(u)$, и $\frac{\partial \Gamma_2}{\partial u}(x,u)$ линейно независимы на множестве

$$(x,u): \quad \Gamma_2(x,u) = 0, \; g_2(x) = 0.$$

Действительно, $\frac{\partial r^j}{\partial u}(u)$ есть соответствующий единичный вектор (взятый с плюсом или минусом), у которого все координаты с номером выше, чем k , равны нулю, а $\frac{\partial \Gamma_2}{\partial u}(x,u) = w$. Поэтому условие (17) сразу влечет, что векторы не коллинеарны. Значит, выполнены все предположения Замечания 1. Поэтому любой допустимый процесс является слабо регулярным.

Примеры 1–3 несложно обобщить, рассматривая их на некоторой регулярной поверхности уровня, т. е. добавляя фазовые ограничения типа равенств.

Рассмотрим ряд вспомогательных утверждений. Следующее утверждение является простым следствием Предложения 5 из [1], условия (12) и определений $\mathcal{G}^+$, $\mathcal{G}^+$.

С л е д с т в и е 1. Существуют числа $C, \delta > 0$ такие, что для произвольного $t_* \in (t_1^*, t_2^*)$, $u_* \in \mathcal{U}(t_*)$, $j \in J(t_*)$ и $\Delta t > 0$ справедливы следующие оценки.

Если $u_* \in \mathcal{U}^-(t_*) \cap \mathcal{G}^+(t_*)$ и $\Gamma_2^j(u_*, t_*) > 0$, то

$$|\mu_2^j(t_* + \Delta t) - \mu_2^j(t_*^-)| \leq \frac{C \cdot \Delta t}{\Gamma_2^j(u_*, t_*)}.$$

Если $u_* \in \mathcal{U}^+(t_*) \cap \mathcal{G}^-(t_*)$ и $\Gamma_2^j(u_*, t_*) < 0$, то

$$|\mu_2^j(t_* - \Delta t) - \mu_2^j(t_*^+)| \leq \frac{-C \cdot \Delta t}{\Gamma_2^j(u_*, t_*)}.$$

Обозначим через $\varepsilon(t_*)$ наибольшее положительное число $\varepsilon > 0$ такое, что $J(t) \subseteq J(t_*)$ $\forall\, t \in (t_* - \varepsilon, t_* + \varepsilon)$, значение $+\infty$ включая. (Будем считать, что $x^*(t) = x_2^*$ $\forall\, t > t_2^*$ и $x^*(t) = x_1^*$ $\forall\, t < t_1^*$). Многозначное отображение $J(t)$ полунепрерывно сверху, поэтому число $\varepsilon > 0$ существует (оно зависит от t_*).

П р е д л о ж е н и е 3. Пусть экстремальный процесс слабо регулярен и выполнено условие (12). Тогда существуют числа $C, \delta > 0$ такие, что для произвольных $t_* \in (t_1^*, t_2^*)$ и $\Delta t \in (0, \min\{\delta, \varepsilon(t_*)\})$ выполняются следующие оценки.

Оценка корневого роста справа:

$$|\mu_2(t_* + \Delta t) - \mu_2(t_*^-)| \leq C \cdot \sqrt{\Delta t}.$$

Оценка корневого роста слева:

$$|\mu_2(t_* - \Delta t) - \mu_2(t_*^+)| \leq C \cdot \sqrt{\Delta t}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о дается дословным повторением доказательства Предположения 5 из [1], но при слабой регулярности. Добавляя (12) к оценкам Предложения 5 из [1], ввиду слабой регулярности, получаем необходимую равномерность оценок.

П р е д л о ж е н и е 4. Пусть $t_* \in (t_1^*, t_2^*)$, $j \in J(t_*)$. Предположим, что

$$\mathcal{U}(t_*) \cap \{u : \Gamma_2^j(u, t_*) = 0\} = \varnothing, \tag{18}$$

Тогда, $\mu_2^j(t)$ является постоянной в окрестности точки t_* , то есть $\exists\, \delta = \delta(t_*) > 0 : \mu_2^j(t) = \mu_2^j(t_*)$ $\forall\, t \in [t_* - \delta, t_* + \delta]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (12) существуют векторы $u_+ \in \mathcal{U}^+(t_*) \cap \mathcal{G}^-(t_*)$ и $u_- \in \mathcal{U}^-(t_*) \cap \mathcal{G}^+(t_*)$. Тогда из (18) следует, что $\Gamma_2^j(u_+, t_*) < 0$ и $\Gamma_2^j(u_-, t_*) > 0$. Далее из Следствия 1 получаем, что функция μ_2^j имеет линейный рост в точке t_* .

Покажем, что существует число $\delta > 0$ такое, что

$$\ell(T_j \cap [t_* - \delta, t_* + \delta]) = 0.$$

Здесь $T_j = \{t \in T : j \in J(t)\}$. Действительно, в противном случае

$$\ell(T_j \cap [t_* - \delta, t_* + \delta]) > 0 \ \ \forall \, \delta > 0. \tag{19}$$

Функция $g_2^j(t)$, будучи абсолютно непрерывной, достигает своего максимального значения в каждой точке $t \in T_j$. Таким образом, для почти всех $t \in T_j$ производная этой функции равна нулю. Следовательно, $\frac{dg_2^j}{dt}(t) = \Gamma_2^j(t)$ для почти всех t . Таким образом, $\Gamma_2^j(t) = 0$ для почти всех $t \in T_j$. Теперь, (19) противоречит (18) ввиду определения замыкания по мере. Следовательно, необходимое число δ существует.

При уменьшении, если это необходимо, числа δ , можно гарантировать, что условие (18) выполняется для всех $t \in [t_* - \delta, t_* + \delta]$, а не только в одной точке t_* . Это возможно в силу полунепрерывности сверху отображения $\mathcal{U}(t)$ и непрерывности Γ_2^j . Тогда, используя рассуждения, приведенные выше, получаем, что μ_2^j имеет линейный рост в каждой точке $[t_* - \delta, t_* + \delta]$. Более того, ввиду оценки из Следствия 1, этот рост равномерен. Тогда $\mu_2(t)$ липшицева на этом интервале. Однако, носитель μ_2^j лежит во множестве T_j , которое имеет нулевую меру. Это доказывает, что μ_2^j является постоянной. $\square$

П р е д л о ж е н и е 5. Пусть $t_* \in [t_1^*, t_2^*)$, $j \in J(t_*)$. Предположим, что

$$\mathcal{U}^+(t_*) \cap \{u : \Gamma_2^j(u, t_*) = 0\} = \varnothing. \tag{20}$$

Тогда функция $\mu_2^j(t)$ является постоянной справа в окрестности t_* , то есть $\exists \, \delta = \delta(t_*) > 0 :$ $\mu_2^j(t) = \mu_2^j(s) \ \ \forall \, t, s \in (t_*, t_* + \delta)$.

Если $t_* \in (t_1^*, t_2^*]$ и $\mathcal{U}^-(t_*) \cap \{u : \Gamma_2^j(u, t_*) = 0\} = \varnothing$, тогда $\exists \, \delta = \delta(t_*) > 0 :$ $\mu_2^j(t) = \mu_2^j(s)$ $\forall \, t, s \in (t_* - \delta, t_*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что $\mu_2(t)$ является постоянной справа. Используя условие (20) и тот факт, что $\mathcal{U}^+(t_*) = \operatorname*{Limsup}_{t \to t_*+} \mathcal{U}(t)$, выберем число δ такое, что

$$\mathcal{U}(t) \cap \{u : \Gamma_2^j(u, t) = 0\} = \varnothing \ \ \forall \, t \in (t_*, t_* + \delta).$$

Тогда из Предложения 4 следует, что μ_2^j является постоянной в окрестности каждой точки $t \in T_j \cap (t_*, t_* + \delta)$. Из условия (a) ПМ не трудно получить, что μ_2^j является постоянной на $(t_*, t_* + \delta)$.

Доказательство слева от точки t_* аналогично. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о Теоремы 1. Из Предложения 3 и Леммы 2 из [1] сразу следует ii). Таким образом, μ_2 непрерывна на (t_1^*, t_2^*) . Будем использовать это ниже.

Далее, покажем, что в предположениях слабой регулярности выполнено условие нетривиальности (12). Предположим, что (12) нарушается. Тогда, $\lambda^0 = 0$ и $\exists \, t_0 \in T : \psi(t_0) -$ $- \ \mu_2(t_0) \frac{\partial g_2}{\partial x}(t_0) = a \frac{\partial g_1}{\partial x}(t_0)$, где a есть некоторый вектор из $\mathbb{R}^{d(g_1)}$. В силу Замечания 3.1 из [3], получаем, что множители Лагранжа

$$\lambda, \ \ \tilde{\psi}(t) := \psi(t) - (a, \mu_2(t_0)) \frac{\partial g}{\partial x}(t), \ \tilde{\mu}(t) := \mu(t) - (a, \mu_2(t_0)), \ \ \nu$$

удовлетворяют всем условиям ПМ кроме условия б).

Вначале предположим, что $t_0 \in (t_1^*, t_2^*)$. Рассмотрим произвольную точку $t_* \in (t_1^*, t_2^*)$ такую, что $\tilde{\mu}_2(t_*) = 0$. Установим существование положительных чисел δ и const, где const не зависит от t_*, таких, что

$$|\tilde{\mu}_2(t)| \le \text{const}\,|\tilde{\psi}(t)| \text{ для почти всех } t \in [t_* - \delta, t_* + \delta]. \tag{21}$$

Пусть выполняется предположение 1) теоремы. Тогда отображение $J(t)$ является постоянным справа и слева от точки t_*. Поэтому, существует число δ такое, что $J(t) = J(s) = Q \;\; \forall\, t, s \in (t_*, t_* + \delta)$. Тогда, $\tilde{\mu}_2^j(t) = 0 \;\; \forall\, t \in [t_*, t_* + \delta] \;\; \forall\, j \in J(t_*) \setminus Q$. (Здесь мы пользуемся непрерывностью μ_2^j и условием а) ПМ.) Для $j \in Q$ имеем $g_2^j(t) = 0 \;\; \forall\, t \in [t_*, t_* + \delta]$. Поэтому, существует вектор $u_* \in \mathcal{U}^+(t_*)$: $\Gamma_2^j(u_*, t_*) = 0 \;\; \forall\, j \in Q$.

Выберем вектор d, соответствующий u_*, t_* из определения слабой регулярности оптимального процесса, и умножим равенство (10) на вектор $-d$. Тогда учитывая монотонность μ_2^j и тот факт, что $\tilde{\mu}_2^j(t) \le 0$, где $t \ge t_*$, уменьшая при необходимости δ, получаем оценку (21) справа от t_*. (См. подробнее в [5], Теорема 4.5). Выполняя те же самые рассуждения слева от точки t_*, но умножая (10) на вектор d, а не на $-d$, получаем оценку (21) слева от точки t_*. Константа const не зависит от t_* в силу стандартных соображений компактности и слабой регулярности.

Пусть выполняется предположение 2) теоремы. В этом случае, если существует вектор $u_* \in \mathcal{U}^+(t_*)$: $\Gamma_2^j(u_*, t_*) = 0$, $j \in J(t_*)$, проведем все те же самые рассуждения, что и для случая 1). Если такого вектора не существует, тогда в силу непрерывности $\tilde{\mu}_2^j$ и Предложения 5 получаем, что $\tilde{\mu}_2^j(t) = 0 \;\; \forall\, t \in [t_*, t_* + \delta]$ для некоторых $\delta > 0$. Значит имеем оценку (21) справа от t_*. Проводя рассуждения слева от точки t_*, получаем (21) слева.

Таким образом, (21) доказано. Из слабой регулярности процесса и (21) несложно вытекает оценка

$$|\tilde{\mu}_1(t)| + |\nu(t)| \le \text{const}\,|\tilde{\psi}(t)| \text{ для почти всех } t \in [t_* - \delta, t_* + \delta]. \tag{22}$$

Теперь докажем, что

$$\tilde{\psi}(t) = 0, \quad \tilde{\mu}_2(t) = 0 \;\; \forall\, t \in (t_1^*, t_2^*). \tag{23}$$

Заметим, что обе функции непрерывны на рассматриваемом интервале. Далее, принимая во внимание, что множество нулей вектор-функции $(\tilde{\psi}, \tilde{\mu}_2)$ не пусто (точка t_0 принадлежит множеству нулей), для доказательства (23) достаточно установить что, если $\tilde{\psi}(t_*) = 0$ и $\tilde{\mu}_2(t_*) = 0$, то найдется число $\delta > 0$ такое, что $\tilde{\psi}(t) = 0$, $\tilde{\mu}_2(t) = 0 \;\; \forall\, t \in [t_* - \delta, t_* + \delta]$. Однако последнее является следствием неравенства Гронуолла, (5) и неравенств (21) и (22).

Ясно, что (22) и (23) влечет $\tilde{\mu}_1 = 0$, $\nu = 0$.

Из условий трансверсальности (6), (9), и определения $\bar{H}$, получаем:

$$\max_{u \in \Omega(t_s^*)} \left\langle (-1)^{s+1} \frac{\partial l}{\partial x_s}(p^*, \lambda), \varphi(u, t_s^*) \right\rangle = (-1)^s \frac{\partial l}{\partial t_s}(p^*, \lambda), \quad s = 1, 2. \tag{24}$$

Из (23), в силу условий трансверсальности (6), получаем

$$(-1)^s \frac{\partial l}{\partial x_s}(p^*, \lambda) = \tilde{\mu}_2(t_s^*) \frac{\partial g_2}{\partial x_s}(t_s^*), \quad s = 1, 2.$$

Аналогично, в силу (9) и непрерывности h,

$$(-1)^s \frac{\partial l}{\partial t_s}(p^*, \lambda) = \tilde{\mu}_2(t_s^*) \frac{\partial g_2}{\partial t_s}(t_s^*), \quad s = 1, 2.$$

В итоге, $\tilde{\mu}_2(t_1^*) \ge 0$ и $\tilde{\mu}_2(t_2^*) \le 0$ в силу условия в) ПМ и того факта, что $\tilde{\mu}_2(t) = 0 \;\; \forall\, t \in (t_1^*, t_2^*)$. Поэтому, подставляя полученные формулы в (24), используя условия управляемости в p^* (которые выполняются благодаря Предложению 2), получаем $\tilde{\mu}_2(t_1^*) = \tilde{\mu}_2(t_2^*) = 0$. Следовательно,

$\tilde{\mu}_2 = 0$ и тогда $\mu_2(t) = \mu_2(t_0)$ $\forall\, t \in T$ $\Rightarrow$ $\mu_2 = 0$ в силу условия б). Поэтому $\psi(t_0) \in \mathrm{im}\, \frac{\partial g_1^*}{\partial x}(t_0)$. А это противоречит (4) и Теореме 1 из [1]. Значит, (12) доказано.

Случай, когда $t_0 = t_1^*$ или $t_0 = t_2^*$ рассматривается аналогично, но в определении $\tilde{\mu}_2$ из μ_2 вычитаем $\mu_2(t_1^{*+})$ или $\mu_2(t_2^{*-})$ соответственно, но не $\mu_2(t_0)$. Утверждение i) доказано.

Утверждение iii) доказывается полностью аналогично утверждению iii) Теоремы 2 из [1].

Далее покажем, что $\bar{\mu}_2$ удовлетворяет (13). Предположим, что выполняется 1). Рассматривая интервалы, где $J(t)$ является постоянной, применяя Лемму 3 из [1], рассматривая конечное покрытие для каждого интервала (оно существует благодаря равномерной оценке на Δt) и осуществляя те же самые выкладки, что и при доказательстве пункта iv) Теоремы 2 из [1], выводим оценку (13).

Предположим, что выполняется 2). В силу условия $J(t) \le 1$ $\forall\, t \in T$ и полунепрерывности сверху $J(t)$ существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $|t - s| > \varepsilon_0$, как только $|J(t)| = |J(s)| = 1$ и $J(t) \ne J(s)$. Следовательно, если $J(t_*) \ne \varnothing$, тогда $\varepsilon(t_*) > \varepsilon_0$. Теперь проведем выкладки аналогичные выкладкам доказательства пункта iv) Теоремы 2 из [1]. (Разница лишь в том, что вместо δ нужно взять $\min\{\delta, \varepsilon_0\}$). Условие (13) получено.

Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горбачева А.В., Карамзин Д.Ю.* Уточнение условий оптимальности в задачах управления с фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 1. С. 40–54.

2. *Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu.* On some continuity properties of the measure Lagrange multiplier from the maximum principle for state constrained problems // SIAM J. Control Optim. V. 53. № 4. P. 2514–2540.

3. *Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu., Pereira F.L.* The Maximum Principle for Optimal Control Problems with State Constraints by R.V. Gamkrelidze: Revisited // J. Optim. Theory Appl, 2011. V. 149. P. 474–493.

4. *Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu.* Non-degenerate necessary optimality conditions for the optimal control problem with equality-type state constraints // J. Glob. Optim., 2015. P. 1–25.

5. *Захаров Е.В., Карамзин Д.Ю.* К исследованию условий непрерывности меры-множителя Лагранжа в задачах с фазовыми ограничениями // Дифференциальные уравнения, 2015. Т. 51. № 3. С. 395–401.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МД-4639.2016.1.

Поступила в редакцию 9 февраля 2016 г.

Горбачева Анна Викторовна, Российский государственный социальный университет, г. Москва, Российская Федерация, преподаватель кафедры прикладной математики, e-mail: avgorbacheva@inbox.ru

UDC 517.977.52
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-28-39

THE CONTINUITY OF THE MEASURE LAGRANGE-MULTIPLIER FROM THE MAXIMUM PRINCIPLE FOR AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH EQUALITY AND INEQUALITY STATE CONSTRAINTS UNDER WEAK REGULARITY CONDITIONS OF THE EXTREMAL PROCESS

© **A. V. Gorbacheva**

Under weak regularity assumptions, the continuity of the measure Lagrange multiplier from the maximum principle for control problems with state constraints of equality and inequality types is investigated. Appropriate assertions are proved.
Key words: optimal control; maximum principle; state constraints.

ACKNOWLEDGEMENTS: The present work is partially supported by the grant of the President of the Russian Federation № МД-4639.2016.1.

REFERENCES

1. *Gorbacheva A.V., Karamzin D.Yu.* Utochnenie uslovij optimal'nosti v zadachah upravleniya s fazovymi ogranicheniyami tipa ravenstv i neravenstv // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2016. T. 21. Vyp. 1. S. 40–54.

2. *Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu.* On some continuity properties of the measure Lagrange multiplier from the maximum principle for state constrained problems // SIAM J. Control Optim. V. 53. № 4. P. 2514–2540.

3. *Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu., Pereira F.L.* The Maximum Principle for Optimal Control Problems with State Constraints by R.V. Gamkrelidze: Revisited // J. Optim. Theory Appl, 2011. V. 149. P. 474–493.

4. *Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu.* Non-degenerate necessary optimality conditions for the optimal control problem with equality-type state constraints // J. Glob. Optim., 2015. P. 1–25.

5. *Zaharov E.V., Karamzin D.Yu.* K issledovaniyu uslovij nepreryvnosti mery-mnozhitelya Lagranzha v zadachah s fazovymi ogranicheniyami // Differencial'nye uravneniya, 2015. T. 51. № 3. S. 395–401.

Received 9 February 2016.

Gorbacheva Anna Viktorovna, Russian State Social University, Moscow, the Russian Federation, Lecturer of the Applied Mathematics Department, e-mail: avgorbacheva@inbox.ru