УДК 519.6
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-82-88

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ В НЕПЕРИОДИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

© **Е. Б. Ланеев, М. Н. Муратов, Н. С. Сибелев, А. В. Герасимова**

Получено устойчивое решение задачи продолжения поля потенциала с неплоской поверхности в рамках непериодической модели.
Ключевые слова: некорректно поставленная задача; продолжение потенциального поля; метод регуляризации Тихонова.

В данной работе обратная задача потенциала [1] решается в рамках концепции регуляризованного [2] аналитического продолжения поля потенциала [3]. В отличие от работ [4], [5], [6], [7], использующих периодические модели [4], здесь рассматривается поле непериодического потенциала. Тем не менее, продолжение осуществляется с поверхности общего вида в пределах той же области, что и в [4] — цилиндре прямоугольного сечения, что позволяет, использовать разложения в ряды Фурье, удобные для приложений при численных рассчетах. Задача некорректно поставлена. Устойчивое решение строится с использованием метода регуляризации Тихонова [2]. Отметим, что в работе [3] продолжение осуществляется с плоской поверхности.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в пространстве R^3 потенциальное поле $\mathbf{E}$, источники которого имеют плотность ρ с ограниченным носителем

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \ M \in R^3 \\ &\operatorname{div}\mathbf{E} = -4\pi\rho. \end{aligned} \tag{1}$$

Если плотность ρ известна, поле $\mathbf{E}$ может быть найдено как градиент ньютонова объемного потенциала

$$\mathbf{E}(M) = -\nabla \int\limits_{Supp\rho} \frac{\rho(P)}{r_{MP}} dV_P = -\int\limits_{Supp\rho} \nabla_M \frac{1}{r_{MP}} \rho(P) dV_P, \ M \in R^3.$$

Будем считать, что носитель плотности ρ располагается в бесконечном цилиндре прямоугольного сечения

$$D^\infty = \left\{(x,y,z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, -\infty < z < \infty\right\}.$$

Если построить нечетно-периодическое продолжение относительно D^∞ плотности ρ на все пространство R^3, то соответствующее такой модели поле является решением задачи [5]

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{E}(M) = 0, \qquad M \in D^\infty, \\ &\operatorname{div}\mathbf{E}(M) = -4\pi\rho, \\ &[\mathbf{n},\mathbf{E}]|_{x=0,l_x} = 0, \ [\mathbf{n},\mathbf{E}]|_{y=0} = 0, \\ &\mathbf{E} \to 0 \text{ при } z \to \pm\infty. \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть в области D^∞ задана поверхность S

$$\begin{array}{l} S = \{(x,y,z): 0<x<l_x, 0<y<l_y, z=F(x,y)\}\,, \\ F\in C^2,\ S\cap Supp\rho=\varnothing. \end{array} \tag{3}$$

Будем считать, что поверхность S такова, что ее пересечение с боковыми гранями цилиндра D^∞ лежит на плоскости $z=0$, то есть

$$F(0,y)=0,\ F(l_x,y)=0, F(x,0)=0,\ F(x,l_y)=0.$$

Рассмотрим область

$$D(F,H)=\{(x,y,z): 0<x<l_x, 0<y<l_y, H<z<F(x,y)\}\,,$$

где H такое, что носитель плотности находится вне рассматриваемой области $D(F,H)$, а именно в области $z>H$.

Предположим, что в рамках модели (2) плотность ρ неизвестна, а значение поля $\mathbf{E}$ на поверхности S задано в виде известной вектор-функции $\mathbf{E}^0=(E^0_x,E^0_y,E^0_z)$

$$\mathbf{E}|_S=\mathbf{E}^0.$$

Тогда в области $D(F,H)$, то есть в области вне источников, плотность которых неизвестна, получаем задачу продолжения поля [5]

$$\begin{array}{ll} \operatorname{rot}\mathbf{E}(M)=0, & M\in D(F,H), \\ \operatorname{div}\mathbf{E}(M)=0, & \\ \mathbf{E}|_S=\mathbf{E}^0, & \\ [\mathbf{n},\mathbf{E}]|_{x=0,l_x}=0,\ [\mathbf{n},\mathbf{E}]|_{y=0,l_y}=0, & \end{array} \tag{4}$$

В [5] построено устойчивое решение задачи. Информация о плотности ρ может быть получена интерпретацией поля, полученного как решение задачи (4), при $z=H$, то есть вблизи носителя плотности.

Пусть теперь в рамках модели (1) плотность ρ неизвестна, а задано значение поля $\mathbf{E}$ на поверхности S

$$\mathbf{E}|_S=\mathbf{E}^0.$$

и на боковых гранях цилиндра $D(F,H)$

$$\mathbf{E}|_{x=0,l_x,y=0,l_y}=\mathbf{E}^1,$$

Тогда в области $D(F,H)$, т. е. как и в задаче (4) в области вне источников, плотность которых неизвестна, получаем задачу продолжения поля в модели (1), т. е. в непериодической модели:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{rot}\mathbf{E}(M)=0, & M\in D(F,H), \\ \operatorname{div}\mathbf{E}(M)=0, & \\ \mathbf{E}|_S=\mathbf{E}^0, & \\ \mathbf{E}|_{x=0,l_x,y=0,l_y}=\mathbf{E}^1, & \end{array} \tag{5}$$

В отличие от задачи (4) в задаче (5) продолжения непериодического поля условия на боковых гранях цилиндра неоднородны. Функция $\mathbf{E}^1$, как и $\mathbf{E}^0$, предполагается известной.

Для компоненты поля E_z аналогично [5] получаем смешанную задачу, по сути — задачу Коши для уравнения Лапласа [8]

$$\begin{array}{l} \Delta E_z(M)=0, \quad M\in D(H,F), \\ E_z|_S=E^0_z, \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial n}|_S=\dfrac{1}{n_1}\Big(\dfrac{\partial E^0_x}{\partial x}+\dfrac{\partial E^0_y}{\partial y}\Big), \quad \mathbf{n}_1=(F_x,F_y,-1), \\ E_z|_{x=0,l_x}=E^1_z,\ E_z|_{y=0,l_y}=E^1_z, \end{array} \tag{6}$$

Задача продолжения (6) компоненты поля E_z с поверхности S, также как и задача (5) некорректно поставлена.

Построим точное решение задачи (6).

2. Решение задачи в случае точно заданного поля $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{E}^1$

Рассмотрим функцию $\varphi(M,P)$ — функцию источника задачи

$$\begin{array}{ll} \Delta u(M) = \rho, & M \in D^\infty, \\ u|_{x=0,l_x} = 0, & u|_{y=0,l_y} = 0, \\ u \to 0 & \text{при} \quad |z| \to \infty, \end{array}$$

т. е.

$$\varphi(M,P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} + W(M,P),$$

где $W(M,P)$ — гармоническая функция по P.

Функцию источника можно получить [9] в виде ряда Фурье

$$\varphi(M,P) = \frac{2}{\pi l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}|z_M - z_P|}}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}} \sin\frac{\pi n x_M}{l_x} \sin\frac{\pi m y_M}{l_y} \sin\frac{\pi n x_P}{l_x} \sin\frac{\pi m y_P}{l_y}, \tag{7}$$

или в виде суммы источников с периодом $2l_x$ по x и $2l_y$ по y

$$\varphi(M,P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \Big(\frac{1}{r_{1,nm}} - \frac{1}{r_{2,nm}} - \frac{1}{r_{3,nm}} + \frac{1}{r_{4,nm}} \Big), \tag{8}$$

где

$$\begin{array}{l} r_{1,nm} = [(x_M - x_P + 2l_x n)^2 + (y_M - y_P + 2l_y m)^2 + (z_M - z_P)^2]^{1/2} \\ r_{2,nm} = [(x_M + x_P + 2l_x n)^2 + (y_M - y_P + 2l_y m)^2 + (z_M - z_P)^2]^{1/2} \\ r_{3,nm} = [(x_M - x_P + 2l_x n)^2 + (y_M + y_P + 2l_y m)^2 + (z_M - z_P)^2]^{1/2} \\ r_{4,nm} = [(x_M + x_P + 2l_x n)^2 + (y_M + y_P + 2l_y m)^2 + (z_M - z_P)^2]^{1/2}. \end{array}$$

Следуя работе [5] можно получить точное решение E_z задачи (6) в виде

$$\begin{aligned} E_z(M) = v_z(M) - \Phi_z(M) - B_z(M) = \\ \sum_{n,m=1}^{\infty} (\tilde{\Phi}_{z,nm}(a) + \tilde{B}_{z,nm}(a)) e^{\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}(z_M - a)} \sin\frac{\pi n x_M}{l_x} \sin\frac{\pi m y_M}{l_y} - \Phi_z(M) - B_z(M), \end{aligned} \tag{9}$$

где $a < \min\limits_{(x,y)} F(x,y)$, а функции Φ_z и B_z с учетом (7), (8), (3) имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_z(M) = \int_0^{l_x}\int_0^{l_y} [E_x^0(x_P,y_P)\frac{\partial}{\partial x_P}\varphi(M,P)|_{P\in S} + E_y^0(x_P,y_P)\frac{\partial}{\partial y_P}\varphi(M,P)|_{P\in S} + \\ + E_z^0(x_P,y_P)(\mathbf{n}_1, \nabla_P \varphi(M,P))|_{P\in S}] dx_P dy_P, \end{aligned} \tag{10}$$

$$B_z(M)=\int\limits_0^H\Big[\int\limits_0^{l_x}\Big[-E_z^1(x_P,0,z_P)\frac{\partial\varphi(M,P)}{\partial y_P}\Big|_{y=0}+E_z^1(x_P,l_y,z_P)\frac{\partial\varphi(M,P)}{\partial y_P}\Big|_{y=l_y}\Big]dx_P+$$
$$+\int\limits_0^{l_y}\Big[E_z^1(0,y_P,z_P)\frac{\partial\varphi(M,P)}{\partial x_P}\Big|_{x=0}+E_z^1(l_x,y_P,z_P)\frac{\partial\varphi(M,P)}{\partial x_P}\Big|_{x=l_x}\Big]dy_P\Big]dz_P \quad (11)$$

$\tilde{\Phi}_{z,nm}(a)$ и $\tilde{B}_{z,nm}(a)$ — коэффициенты Фурье функций Φ_z и B_z, в частности

$$\tilde{\Phi}_{z,nm}(a)=\frac{4}{l_xl_y}\int\limits_0^{l_x}\int\limits_0^{l_y}\Phi_z(x,y,a)\sin\frac{\pi nx}{l_x}\sin\frac{\pi my}{l_y}dxdy$$

Точное решение задачи (5), т. е. полный вектор $\mathbf{E}$, может быть получено на основе компоненты (9) с помощью двумерного преобразования Гильберта [10].

4. Решение задачи в случае приближенно заданного поля $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{E}^1$

Пусть теперь вместо точных вектор-функций $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{E}^1$ в задаче (6) известны функции $\mathbf{E}^{0,\delta}$ и $\mathbf{E}^{1,\delta}$ такие, что

$$||\mathbf{E}^{0,\delta}-\mathbf{E}^0||_{L_2(\Pi(0))}<\delta,\ ||\mathbf{E}^{1,\delta}-\mathbf{E}^1||_{L_2}<\delta$$

В этом случае функции Φ_z вида (10) и B_z вида (11) вычисляеются приближенно:

$$\Phi_z^\delta(M)=\frac{4}{l_xl_y}\int\limits_0^{l_x}\int\limits_0^{l_y}[E_x^{0,\delta}(x_P,y_P)\frac{\partial}{\partial x_P}\varphi(M,P)|_{P\in S}+E_y^{0,\delta}(x_P,y_P)\frac{\partial}{\partial y_P}\varphi(M,P)|_{P\in S}+$$
$$+E_z^{0,\delta}(x_P,y_P)(\mathbf{n}_1,\nabla_P\varphi(M,P))|_{P\in S}]dx_Pdy_P; \quad (12)$$

$$B_z^\delta(M)=\int\limits_0^H\Big[\int\limits_0^{l_x}\Big[E_z^{1,\delta}(x_P,0,z_P)\frac{\partial\varphi(M,P)}{\partial y_P}\Big|_{y=0}+E_z^{1,\delta}(x_P,l_y,z_P)\frac{\partial\varphi(M,P)}{\partial y_P}\Big|_{y=l_y}\Big]dx_P+$$
$$+\int\limits_0^{l_y}\Big[E_z^{1,\delta}(0,y_P,z_P)\frac{\partial\varphi(M,P)}{\partial x_P}\Big|_{x=0}+E_z^{1,\delta}(l_x,y_P,z_P)\frac{\partial\varphi(M,P)}{\partial x_P}\Big|_{x=l_x}\Big]dy_P\Big]dz_P \quad (13)$$

при этом устойчивое приближенное решение задачи (6) продолжение составляющей поля E_z с поверхности S может быть получено аналогично [5] с использованием метода регуляризации Тихонова [2] и имеет вид

$$E_{z,\alpha}^\delta(M)=v_z^\delta(M)-\Phi_z^\delta(M)-B_z^\delta(M)=$$
$$=\sum_{n,m=1}^\infty\frac{(\tilde{\Phi}_{z,nm}^\delta(a)+\tilde{B}_{z,nm}^\delta(a))e^{\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}(z_M-a)}}{1+\alpha e^{2\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}(H-a)}}\sin\frac{\pi nx_M}{l_x}\sin\frac{\pi my_M}{l_y}-\Phi_z^\delta(M)-B_z^\delta(M), \quad (14)$$

где $\tilde{\Phi}^{\delta}_{z,nm}(a)$ и $\tilde{B}^{\delta}_{z,nm}(a)$ - коэффициенты Фурье функций $B^{\delta}_{z}|_{\Pi(a)}$ и $\Phi^{\delta}_{z}|_{\Pi(a)}$ вида (12) и (13).

Сходимость приближенного решения (14) задачи (6) к точному решению (9) обеспечивает теорема

Т е о р е м а [5]. Для любого $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ такого, что $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta/\sqrt{\alpha(\delta)} \to 0$ при $\delta \to 0$ функция $E^{\delta}_{z,\alpha}$ вида (14) равномерно сходится к точному решению задачи (6) на любом замкнутом множестве в $D(F, H)$.

Устойчивое приближенное решение задачи (5), то есть полный вектор $\mathbf{E}^{\delta}_{\alpha}$, может быть получено на основе компоненты (14) с помощью двумерного преобразования Гильберта [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прилепко А.И.* Обратные задачи теории потенциала // Матем. заметки. 1973. Т. 14. № 5. С. 755–767.
2. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
3. *Тихонов А.Н., Гласко В.Б., Литвиненко О.К., Мелихов В.Р.* О продолжени потенциала в сторону возмущающих масс на основе метода регуляризации // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1968. № 1. С. 30–48.
4. *Ланеев Е.Б.* О некоторых постановках задачи продолжения потенциального поля // Вестник РУДН. Серия Физика. 2000. № 8 (1). С. 21–28.
5. *Ланеев Е.Б.* Устойчивое решение одной некорректно поставленной краевой задачи для потенциального поля // Вестник РУДН. Серия Прикладная математика и информатика. 2000. № 1. С. 105–112.
6. *Ланеев Е.Б.* О погрешности периодической модели задаче продолжения потенциального поля // Вестник РУДН. Серия Физика. 2001. № 9 (1). С. 4–16.
7. *Ланеев Е.Б.* Об особенностях применения метода Фурье при численном решении задачи продолжения потенциального поля // Вестник РУДН. Серия Прикладная и компьютерная математика. 2002. № 1 (1). С. 87–97.
8. *Ланеев Е.Б., Васудеван Бхувана* Об устойчивом решении одной смешанной задачи для уравнения Лапласа // Вестник РУДН. Серия Прикладная математика и информатика. 1999. № 1. С. 128–133.
9. *Ланеев Е.Б.* Некорректные задачи продолжения гармонических функций и потенциальных полей и методы их решения. М.: Изд-во РУДН, 2006. 139 с.
10. *Ланеев Е.Б.* Двумерный аналог преобразования Гильберта в задаче продолжения потенциального поля // Вестник РУДН. Серия Прикладная математика и информатика. 2001. № 1. С. 110–119.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-05134).

Поступила в редакцию 15 декабря 2015 г.

Ланеев Евгений Борисович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: elaneev@yandex.ru

Муратов Михаил Николаевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: finger@ramler.ru

Сибелев Никита Сергеевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, аспирант, кафедра нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: elaneev@yandex.ru

Герасимова Алена Валерьевна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, студент магистратуры кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail:olena.gerasimova@gmail.com

UDC 519.6
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-82-88

ON A PROBLEM OF CONTINUATION OF THE POTENTIAL FIELD IN NON-PERIODIC MODELS

© **E. B. Laneev, M. N. Muratov, N. S. Sibelev, A. V. Gerasimova**

A stable solution to the problem of the continuation of potential fields with non-planar surfaces under non-periodic models was obtained.
Key words: ill-posed problem; linear inverse problem of the potential; method of Tikhonov regularization.

ACKNOWLEDGEMENTS: The present work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 15-01-05134).

REFERENCES

1. *Ppilepko A.I.* Obpatnye zadachi teopii potenciala // Matem. zametki. 1973. T. 14. № 5. S. 755–767.
2. *Tihonov A.N., Arsenin V.YA.* Metody resheniya nekorrektnyh zadach. M.: Nauka, 1979. 288 c.
3. *Tihonov A.N., Glasko V.B., Litvinenko O.K., Melihov V.R.* O prodolzheni potenciala v storonu vozmushchayushchih mass na osnove metoda regulyarizacii // Izv. AN SSSR. Fizika Zemli. 1968. № 1. S. 30–48.
4. *Laneev E.B.* O nekotoryh postanovkah zadachi prodolzheniya potencial'nogo polya // Vestnik RUDN. Seriya Fizika. 2000. № 8 (1). S. 21–28.
5. *Laneev E.B.* Ustojchivoe reshenie odnoj nekorrektno postavlennoj kraevoj zadachi dlya potencial'nogo polya // Vestnik RUDN. Seriya Prikladnaya matematika i informatika. 2000. № 1. S. 105–112.
6. *Laneev E.B.* O pogreshnosti periodicheskoj modeli zadache prodolzheniya potencial'nogo polya // Vestnik RUDN. Seriya Fizika. 2001. № 9 (1). S. 4–16.
7. *Laneev E.B.* Ob osobennostyah primeneniya metoda Fur'e pri chislennom reshenii zadachi prodolzheniya potencial'nogo polya // Vestnik RUDN. Seriya Prikladnaya i komp'yuternaya matematika. 2002. № 1 (1). S. 87–97.
8. *Laneev E.B., Vasudevan Bhuvana* Ob ustojchivom reshenii odnoj smeshannoj zadachi dlya uravneniya Laplasa // Vestnik RUDN. Seriya Prikladnaya matematika i informatika. 1999. № 1. S. 128–133.
9. *Laneev E.B.* Nekorrektnye zadachi prodolzheniya garmonicheskih funkcij i potencial'nyh polej i metody ih resheniya. M.: Izd-vo RUDN, 2006. 139 c.
10. *Laneev E.B.* Dvumernyj analog preobrazovaniya Gil'berta v zadache prodolzheniya potencial'nogo polya // Vestnik RUDN. Seriya Prikladnaya matematika i informatika. 2001. № 1. S. 110–119.

Received 15 December 2015.

Laneev Evgeniy Borisovich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: elaneev@yandex.ru

Muratov Mikhail Nikolaevich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: finger@ramler.ru

Sibelev Nikita Sergeevich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: elaneev@yandex.ru

Gerasimova Alyona Valer'evna, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, M.Sc. Student of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: olena.gerasimova@gmail.com

УДК 517
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-88-95

НАКРЫВАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕКТОРНОЗНАЧНОЙ МЕТРИКОЙ

© Е. А. Плужникова

Предложено распространение понятий накрывания и метрической регулярности на отображения пространств с векторнозначной метрикой (под такой «метрикой» понимается функция со стандартными свойствами метрики, значениями которой являются элементы конуса линейного пространства). Получена теорема о точках совпадения накрывающего и липшицева (относительно векторнозначной метрики) отображений. Это утверждение является аналогом теоремы А.В. Арутюнова о точках совпадения. На примере исследования одного класса разностных уравнений в пространстве измеримых существенно ограниченных функций иллюстрируются некоторые приложения полученных результатов.
Ключевые слова: точки совпадения отображений; накрывающие отображения; метрически регулярные отображения; пространства с векторнозначной метрикой; итерации.

А.В. Арутюновым в [1]–[4] получены утверждения о существовании и свойствах точек совпадения накрывающего и липшицева отображений, действующих в метрических пространствах. Эти работы положили начало ряду исследований свойств множеств точек совпадения, приложениям результатов о накрывающих отображениях к неявным дифференциальным и интегральным уравнениям, задачам управления и др. (см., например, [5]–[7]). В работах [8]–[13] было предложено распространение понятия накрывания и теорем о точках совпадения на произведения метрических пространств.

Данная статья продолжает исследования [8]–[13]. Предлагается определение векторного аналога свойства накрывания (метрической регулярности) для отображений, действующих в пространствах с векторнозначной метрикой. Этим термином мы называем функцию со стандартными свойствами метрики, но значениями которой вместо неотрицательных чисел являются элементы конуса линейного пространства. Отображения в пространствах с векторнозначной метрикой оказываются полезными при исследовании конечных и бесконечных систем уравнений, в том числе, краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, интегральных уравнений относительно функций нескольких переменных.

Для метрического пространства $X=(X,\rho_X)$ обозначаем через $\mathrm{B}_X(u,r)$ замкнутый шар $\{x\in X:\ \rho_X(x,u)\leqslant r\}$ с центром в точке $u\in X$ радиуса $r\geqslant 0$.

Пусть X, Y — метрические пространства с метриками ρ_X, ρ_Y. Пусть заданы отображения $\Psi: X\to Y$, $\Phi: X\to Y$. Рассмотрим уравнение

$$\Psi(x)=\Phi(x). \tag{1}$$

Решение этого уравнения называют точкой совпадения отображений Ψ и Φ. Вопрос о существовании и свойствах точек совпадения исследован А.В. Арутюновым (см. [1]–[4]) в предположении, что отображение Ψ является накрывающим, а Φ — липшицевым.