Gerasimova Alyona Valer'evna, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, M.Sc. Student of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: olena.gerasimova@gmail.com

УДК 517
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-88-95

НАКРЫВАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕКТОРНОЗНАЧНОЙ МЕТРИКОЙ

© **Е. А. Плужникова**

Предложено распространение понятий накрывания и метрической регулярности на отображения пространств с векторнозначной метрикой (под такой «метрикой» понимается функция со стандартными свойствами метрики, значениями которой являются элементы конуса линейного пространства). Получена теорема о точках совпадения накрывающего и липшицева (относительно векторнозначной метрики) отображений. Это утверждение является аналогом теоремы А.В. Арутюнова о точках совпадения. На примере исследования одного класса разностных уравнений в пространстве измеримых существенно ограниченных функций иллюстрируются некоторые приложения полученных результатов.
Ключевые слова: точки совпадения отображений; накрывающие отображения; метрически регулярные отображения; пространства с векторнозначной метрикой; итерации.

А.В. Арутюновым в [1]–[4] получены утверждения о существовании и свойствах точек совпадения накрывающего и липшицева отображений, действующих в метрических пространствах. Эти работы положили начало ряду исследований свойств множеств точек совпадения, приложениям результатов о накрывающих отображениях к неявным дифференциальным и интегральным уравнениям, задачам управления и др. (см., например, [5]–[7]). В работах [8]–[13] было предложено распространение понятия накрывания и теорем о точках совпадения на произведения метрических пространств.

Данная статья продолжает исследования [8]–[13]. Предлагается определение векторного аналога свойства накрывания (метрической регулярности) для отображений, действующих в пространствах с векторнозначной метрикой. Этим термином мы называем функцию со стандартными свойствами метрики, но значениями которой вместо неотрицательных чисел являются элементы конуса линейного пространства. Отображения в пространствах с векторнозначной метрикой оказываются полезными при исследовании конечных и бесконечных систем уравнений, в том числе, краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, интегральных уравнений относительно функций нескольких переменных.

Для метрического пространства $X=(X,\rho_X)$ обозначаем через $\mathrm{B}_X(u,r)$ замкнутый шар $\{x\in X:\ \rho_X(x,u)\leqslant r\}$ с центром в точке $u\in X$ радиуса $r\geqslant 0$.

Пусть X, Y — метрические пространства с метриками ρ_X, ρ_Y. Пусть заданы отображения $\Psi: X\to Y$, $\Phi: X\to Y$. Рассмотрим уравнение

$$\Psi(x)=\Phi(x). \qquad (1)$$

Решение этого уравнения называют точкой совпадения отображений Ψ и Φ. Вопрос о существовании и свойствах точек совпадения исследован А.В. Арутюновым (см. [1]–[4]) в предположении, что отображение Ψ является накрывающим, а Φ — липшицевым.

Напомним определение накрывающего отображения.

О п р е д е л е н и е 1. Отображение $\Psi : X \to Y$ называется *накрывающим с коэффициентом* $\alpha > 0$ (α*-накрывающим*), если для любых $r \geqslant 0$, $u \in X$ имеет место включение

$$\mathrm{B}_Y(\Psi(u), \alpha r) \subset \Psi(\mathrm{B}_X(u, r)). \tag{2}$$

Отметим, что отображение $\Psi : X \to Y$ является α*-накрывающим* тогда и только тогда, когда для любых $u \in X$, $y \in Y$ существует $x \in X$, удовлетворяющий уравнению $\Psi(x) = y$ и оценке

$$\rho_X(x, u) \leqslant \alpha^{-1} \rho_Y(y, \Psi(u)). \tag{3}$$

Свойство (3) называют *метрической регулярностью с коэффициентом* $k = \alpha^{-1}$ (см., например, [14]).

В теореме А.В. Арутюнова [1] утверждается, что если пространство Y полное, и если коэффициент накрывания α замкнутого отображения Ψ превышает коэффициент Липшица β отображения Φ, то множество точек совпадения этих отображений не пусто и для любого $u \in X$ существует такая точка совпадения $x = \xi$, что

$$\rho_X(\xi, u) \leq (\alpha - \beta)^{-1} \rho_Y(\Psi(u), \Phi(u)). \tag{4}$$

В работах [8]–[13] было получено распространение результатов о точках совпадения на отображения, действующие в произведениях метрических пространств. Первоначально (см. [8]–[10]) в произведении $\overline{X} = \prod_{i=1}^{l} X_i$ пространств X_i определялась метрика, но более эффективным оказалось (см. [11]–[13]) не метризовать произведение $\overline{X}$, а вместо метрики определить вектор $\overline{\rho}_{\overline{X}} = (\rho_{X_1}, \ldots, \rho_{X_l})$. Оказалось, что утверждения о точках совпадения сохраняются для отображений, действующих в таких пространствах. При этом оценка (4) превращается в оценку компонент ξ_i точки совпадения $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_l) \in \overline{X}$. Этот результат стал удобным инструментом для исследования различных систем уравнений и, в частности, краевых задач для неявных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Здесь мы предлагаем дальнейшее распространение этих результатов на пространства с векторнозначными метриками. Сформулируем определение необходимого нам обобщения понятия метрики.

Пусть задано непустое множество $\mathcal{X}$ и линейное нормированное пространство E, в котором выделен некоторый замкнутый выпуклый конус E_+. Конус задает порядок в E, то есть для любых элементов $r_1, r_2 \in E$ выполнено неравенство $r_1 \leqslant r_2$ тогда и только тогда, когда $r_2 - r_1 \in E_+$.

О п р е д е л е н и е 2. Отображение $\mathcal{P}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}^2 \to E_+$ назовем *векторнозначной метрикой,* а $(\mathcal{X}, \mathcal{P}_{\mathcal{X}})$ — *пространством с векторнозначной метрикой*, если:
1) равенство $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x, u) = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $x = u$;
2) для любых $x, u \in \mathcal{X}$ справедливо $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x, u) = \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(u, x)$;
3) для любых $x, u, v \in \mathcal{X}$ имеет место неравенство $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x, u) \leqslant \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x, v) + \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(v, u)$.

На пространства с векторнозначной метрикой прямо переносятся многие понятия «обычного» метрического пространства. *Замкнутым шаром* с центром в некоторой точке $u \in \mathcal{X}$ радиуса $r \in E_+$ в $\mathcal{X} \doteq (\mathcal{X}, \mathcal{P}_{\mathcal{X}})$ называем множество $\mathrm{B}_{\mathcal{X}}(u, r) \doteq \{x \in \mathcal{X} : \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x, u) \leqslant r\}$. Естественным образом определяется сходимость в $\mathcal{X}$. Пусть даны последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ и элемент $x \in \mathcal{X}$. Под сходимостью $x_n \to x$ при $n \to \infty$ в $\mathcal{X}$ понимаем сходимость $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n, x) \to 0$ в E. Последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ будем называть *фундаментальной,* если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall m > N \quad \|\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n, x_m)\|_E \leqslant \varepsilon.$$

Если любая фундаментальная последовать в $\mathcal{X}$ сходится, то это пространство называется *полным.* Заметим, что замкнутый шар $\mathrm{B}_{\mathcal{X}}(u, r)$ будет замкнутым множеством в $\mathcal{X}$.

Пусть E, M — некоторые линейные нормированные пространства с заданными замкнутыми выпуклыми конусами E_+, M_+; пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — пространства с векторнозначными метриками $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}:\mathcal{X}^2\to E_+$, $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}:\mathcal{Y}^2\to M_+$. В пространстве $\mathcal{L}(M,E)$ линейных ограниченных операторов $F:M\to E$ определим множество

$$\mathcal{L}(M,E)_+ \doteq \{F:M\to E \mid F(M_+)\subset E_+\},$$

очевидно являющееся замкнутым выпуклым конусом.

О п р е д е л е н и е 3. Отображение $\Psi:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ будем называть *регулярным с коэффициентом* $K\in\mathcal{L}(M,E)_+$ или K*-регулярным* (*относительно векторнозначных метрик*), если для любых $u\in\mathcal{X}$, $y\in\mathcal{Y}$ существует такой $x\in\mathcal{X}$, что $\Psi(x)=y$ и имеет место оценка

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,u)\leqslant K\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(y,\Psi(u)).$$

Свойство регулярности относительно векторнозначных метрик эквивалентно следующему включению

$$\forall r\in E_+\quad \forall u\in\mathcal{X}\quad \mathrm{B}_{\mathcal{Y}}(\Psi(u),r)\subset\Psi(\mathrm{B}_{\mathcal{X}}(u,Kr)),$$

аналогичному соотношению (2). Эта аналогия позволяет назвать отображения, удовлетворяющие условию (2), *накрывающими* (*относительно векторнозначных метрик*). Таким образом, отображение $\Psi:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ является регулярным тогда и только тогда, когда оно накрывающее.

Для формулировки основного результата нам потребуется еще определить аналог свойства липшицевости для отображения, действующего в пространствах с векторнозначной метрикой.

О п р е д е л е н и е 4. Отображение $\Phi:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ будем называть *липшицевым с коэффициентом* $B\in\mathcal{L}(E,M)_+$ или B*-липшицевым* (*относительно векторнозначных метрик*), если для любых $u,x\in\mathcal{X}$ выполнено

$$\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Phi(x),\Phi(u)\big)\leqslant B\,\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,u).$$

Вернемся к рассмотрению уравнения (1) теперь в случае отображений $\Psi,\Phi:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$. Сформулируем утверждение о разрешимости этого уравнения, то есть о существовании точек совпадения данных отображений векторнозначных пространств.

В пространстве $\mathcal{L}(M,M)$ линейных ограниченных операторов $F:M\to M$ определим порядок: полагаем $F_1\leqslant F_2$ для операторов $F_1,F_2\in\mathcal{L}(M,M)$ тогда и только тогда, когда $F_2-F_1\in\mathcal{L}(M,M)_+$, здесь $\mathcal{L}(M,M)_+\doteq\{F:M\to M \mid F(M_+)\subset M_+\}$ — замкнутый выпуклый конус. Обозначим символом I тождественный оператор пространства M, заметим, что $I\in\mathcal{L}(M,M)_+$.

Т е о р е м а 1. *Пусть пространство M является банаховым, пространство $(\mathcal{X},\mathcal{P}_X)$ — полным. Пусть существуют такие $K\in\mathcal{L}(M,E)_+$, $B\in\mathcal{L}(E,M)_+$, что спектральный радиус ϱ оператора $BK\in\mathcal{L}(M,M)_+$ удовлетворяет неравенству $\varrho(BK)<1$ и выполнены следующие предположения:*

(**1.1**) *отображение $\Psi:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ является замкнутым K-регулярным;*

(**1.2**) *отображение $\Phi:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ является B-липшицевым.*

Тогда для любого $u_0\in\mathcal{X}$ существует решение $x=\xi\in\mathcal{X}$ уравнения (1), *удовлетворяющее неравенству*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}\big(\xi,u_0\big)\leqslant K(I-BK)^{-1}\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Phi(u_0),\,\Psi(u_0)\big). \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из оценки спектрального радиуса $\varrho(BK)<1$ следует существование линейного ограниченного оператора $(I-BK)^{-1}:M\to M$ и его представление в виде

$(I-BK)^{-1}=I+BK+(BK)^2+\dots$ (см., например, [15, с. 116]). Так как $BK\in\mathcal{L}(M,M)_+$ то при любом $n=0,1,2,\dots$ выполнено

$$(I-BK)^{-1}\geqslant I+BK+\ldots+(BK)^n.$$

Для произвольного $u_0\in X$ построим итерационную последовательность $\{x_n\}\subset\mathcal{X}$ следующим образом.

Положим $x_0=u_0$, определим $\Psi(x_0)$ и $\Phi(x_0)$. В силу предположения (**1.1**) существует такой $x_1\in\mathcal{X}$, что

$$\Psi(x_1)=\Phi(x_0),\ \ \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_1,x_0)\leqslant K\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Phi(x_0),\,\Psi(x_0)\big)=K\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Phi(u_0),\,\Psi(u_0)\big).$$

Определим $\Phi(x_1)$. Вследствие предположения (**1.2**) выполнено неравенство

$$\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Phi(x_1),\,\Phi(x_0)\big)\leqslant B\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_1,x_0).$$

Далее, снова в силу предположения (**1.1**) существует такой $x_2\in\mathcal{X}$, что

$$\Psi(x_2)=\Phi(x_1),\quad \mathcal{P}_X(x_2,x_1)\leqslant K\mathcal{P}_Y\big(\Phi(x_1),\,\Psi(x_1)\big).$$

Отсюда, учитывая предыдущие выкладки, получаем

$$\mathcal{P}_X(x_2,x_1)\leqslant K\rho_Y\big(\Phi(x_1),\,\Phi(x_0)\big)\leqslant KB\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_1,x_0)\leqslant KBK\mathcal{P}_Y\big(\Phi(u_0),\,\Psi(u_0)\big).$$

Повторяя подобные рассуждения, на каждом n-ом шаге ($n=1,2,\dots$) будем определять элемент $x_n\in\mathcal{X}$, удовлетворяющий соотношениям:

$$\Psi(x_n)=\Phi(x_{n-1}),\quad \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n,x_{n-1})\leqslant K(BK)^{n-1}\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Phi(u_0),\,\Psi(u_0)\big).$$

Построенная последовательность является фундаментальной в $\mathcal{X}$. Действительно, из оценки $\varrho(BK)<1$ следует сходимость $\|(BK)^n\|_{\mathcal{L}(M,M)}\to 0$ при $n\to\infty$; таким образом

$$\begin{aligned}\forall\, j=1,2,\dots\quad \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_{n+j},x_n)\leqslant K(BK)^n\big(I+\ldots+(BK)^{j-1}\big)\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Phi(u_0),\,\Psi(u_0)\big)\leqslant&\\ \leqslant K(BK)^n(I-BK)^{-1}\rho_Y\big(\Phi(u_0),\,\Psi(u_0)\big)\to 0 \ \text{ при } \ n\to\infty.&\end{aligned}$$

Вследствие полноты $\mathcal{X}$ последовательность $\{x_n\}$ сходится. Пусть $x_n\to\xi$. Покажем, что $\xi\in\mathcal{X}$ есть искомое решение уравнения (1).

Из соотношений

$$\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Psi(x_n),\,\Phi(\xi)\big)=\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Phi(x_{n-1}),\,\Phi(\xi)\big)\leqslant B\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_{n-1},\,\xi)$$

следует сходимость $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Psi(x_n),\,\Phi(\xi)\big)\to 0$ при $n\to\infty$. Таким образом, вследствие замкнутости отображения Ψ имеем $\Psi(\xi)=\Phi(\xi)$. Для доказательства теоремы остается заметить, что неравенство (5) следует из оценки

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n,x_0)\leqslant K\big(I+\ldots+(BK)^{n-1}\big)\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Phi(u_0),\,\Psi(u_0)\big)\leqslant K(I-BK)^{-1}\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Phi(u_0),\,\Psi(u_0)\big).$$

□

З а м е ч а н и е. В теореме 1 можно потребовать, чтобы банаховым было пространство E, а не M. В этом случае оценку (5) следует заменить на неравенство

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}\big(\xi,u_0\big)\leqslant(I-KB)^{-1}K\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Phi(u_0),\,\Psi(u_0)\big).$$

В доказательстве такого варианта теоремы 1 используется, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(KB)^n$ будет сходиться в банаховом пространстве E к оператору $(I-KB)^{-1}$, так как для спектрального радиуса оператора $KB\in\mathcal{L}(E,E)_+$ выполнено $\varrho(KB)=\varrho(BK)<1$.

Проиллюстрируем приложения теоремы 1 к исследованию разностных уравнений и бесконечных систем.

Пример 1. Пусть задана функция $\eta:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ (здесь $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел), удовлетворяющая условию $\eta(n+1)\neq\eta(n)$, $n\in\mathbb{N}$; далее, заданы измеримые существенно ограниченные функции $p_n, f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, такие, что числовые последовательности $\big\{\operatorname{vrai\,sup}_{t\in[0,1]}|f_{n+1}(t)-f_n(t)|\big\}$, $\big\{\operatorname{vrai\,sup}_{t\in[0,1]}|p_n(t)|\big\}$ ограничены, причем $q\doteq\sup_{n\in\mathbb{N}}\operatorname{vrai\,sup}_{t\in[0,1]}|p_n(t)|<1$.

Рассмотрим разностное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}x_i(i^{-1}t)=p_{\eta(n)}(t)\sin\big(x_{\eta(n)}(t)\big)+f_n(t),\quad t\in[0,1],\quad n\in\mathbb{N}. \tag{6}$$

Стандартно обозначим L_∞ — банахово пространство измеримых существенно ограниченных функций $x:[0,1]\to\mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_{L_\infty}=\operatorname{vrai\,sup}_{t\in[0,1]}|x(t)|$; m — банахово пространство ограниченных числовых последовательностей $r=(r_1,r_2,\ldots)$ с нормой $\|r\|_m=\sup_{n\in\mathbb{N}}|r_n|$, а m_+ — конус в m, содержащий последовательности с неотрицательными членами.

Определим пространство $\mathcal{X}$ функциональных последовательностей $x=(x_1,x_2,\ldots\}$ таких, что $x_n\in L_\infty$ при всех $n\in\mathbb{N}$ и $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|_{L_\infty}<\infty$, с векторнозначной метрикой $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}:\mathcal{X}^2\to m_+$, заданной соотношением

$$x=(x_1,x_2,\ldots\}\in\mathcal{X},\ u=(u_1,u_2,\ldots\}\in\mathcal{X}\ \mapsto\ \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,u)=\big(\|x_1-u_1\|_{L_\infty},\,\|x_2-u_2\|_{L_\infty},\,\ldots\big).$$

В качестве $\mathcal{Y}$ выберем пространство таких функциональных последовательностей $y=(y_1,y_2,\ldots)$, что $y_n\in L_\infty$ при всех $n\in\mathbb{N}$ и $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|y_{n+1}-y_n\|_{L_\infty}<\infty$, с векторнозначной метрикой $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}:\mathcal{Y}^2\to m_+$, равной

$$y=(y_1,y_2,\ldots\}\in\mathcal{Y},\ w=(w_1,w_2,\ldots\}\in\mathcal{Y}\ \mapsto$$
$$\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(y,w)=\big(\|\triangle_1y-\triangle_1w\|_{L_\infty},\,\|\triangle_2y-\triangle_2w\|_{L_\infty},\,\ldots\big),$$

здесь $\triangle_ny=y_n-y_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$, и $y_0=0$.

Покажем, что уравнение (6) имеет решение $x\in\mathcal{X}$. Это уравнение записывается в виде (1), где отображения $\Psi,\Phi:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ определены равенствами:

$$\Psi(x)=\big(\Psi_1(x),\,\Psi_2(x),\,\ldots\big),\quad (\Psi_n(x))(t)=\sum_{i=1}^{n}x_i(i^{-1}t),$$

$$\Phi(x)=\big(\Phi_1(x),\,\Phi_2(x),\,\ldots\big),\quad (\Phi_n(x))(t)=p_{\eta(n)}(t)\sin\big(x_{\eta(n)}(t)\big)+f_n(t).$$

Отображение Ψ является регулярным с коэффициентом $K=I\in\mathcal{L}(m,m)_+$ — тождественным оператором, отображение Φ является липшицевым с коэффициентом $B\in\mathcal{L}(m,m)_+$ — оператором, определяемым бесконечной матрицей

$$B=(b_{nm})_{n,m\in\mathbb{N}},\quad b_{nm}=\begin{cases} q, & \text{если } n=1,\ m=\eta(1),\\ 0, & \text{если } n=1,\ m\neq\eta(1),\\ q, & \text{если } m=\eta(n) \text{ или } m=\eta(n-1),\ n\geq 2,\\ 0, & \text{если } m\neq\eta(n) \text{ и } m\neq\eta(n-1),\ n\geq 2.\end{cases}$$

Матрица BK совпадает с матрицей B и $\varrho(BK)=q<1$. Таким образом, в силу теоремы 1, уравнение (6) разрешимо в пространстве $\mathcal{X}$.

Положим $u_0 = 0 \doteq (0, 0, \ldots)$, тогда

$$\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Phi(0),\, \Psi(0)\big) = \big(\|f_1\|_{L_\infty},\, \|f_2 - f_1\|_{L_\infty},\, \|f_3 - f_2\|_{L_\infty},\, \ldots\big).$$

Согласно теореме 1 существует решение $x = \xi \in \mathcal{X}$ уравнения (6), удовлетворяющее неравенству

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}\big(\xi, 0\big)^T \leqslant (I - B)^{-1}\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Phi(0),\, \Psi(0)\big)^T,$$

здесь $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}\big(\xi, 0\big) = \big(\|\xi_1\|_{L_\infty},\, \|\xi_2\|_{L_\infty},\, \|\xi_3\|_{L_\infty},\, \ldots\big)$, индекс T обозначает транспонирование.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.

2. *Арутюнов А.В.* Устойчивость точек совпадения и многозначные накрывающие отображения в метрических пространствах // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427. № 5. С. 583–585.

3. *Арутюнов А.В.* Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Математические заметки. 2009. Т. 86. Вып 2. С. 163–169.

4. *Арутюнов А.В.* Точки совпадения двух отображений // Функциональный анализ и его приложения. 2014. Т. 48. № 1. С. 89–93.

5. *Арутюнов А.В., Гельман Б.Д.* О структуре множества точек совпадения // Математический сборник. 2015. Т. 206. № 3. С. 35–56.

6. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. № 3. P. 1026–1044.

7. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.

8. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439–455.

9. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 31–56.

10. *Плужникова Е.А.* О точках совпадения векторных отображений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 6. С. 3144–3149.

11. *Жуковский Е.С., Забродский И.А., Шиндяпин А.И.* О периодических решениях неявных разностных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1142–1146.

12. *Жуковский Е.С., Мунембе Ж.П.* О возмущениях многозначных векторно накрывающих отображений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1146–1150.

13. *Трещёв В.С.* Корректная разрешимость систем операторных уравнений с векторными накрывающими отображениями // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1487–1489.

14. *Mordukhovich B.S., Wang B.* Restrictive metric regularity and generalized differential calculus in Banach spaces // Maths. Math. Science. 50. 2004. P. 2650–2683.

15. *Крейн С.Г.* Функциональный анализ. М., 1972. 544 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Автор благодарит профессора А.В. Арутюнова за замечания, критику, советы. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-31-51047).

Поступила в редакцию 16 декабря 2015 г.

Плужникова Елена Александровна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа, e-mail: pluznikova_elena@mail.ru

UDC 517
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-88-95

COVERING MAPPINGS IN THE SPACES WITH VECTOR-VALUED METRICS

© E. A. Pluzhnikova

The concepts of covering mapping and of metric regularity are extended to mappings in the spaces with vector-valued metrics (such a «metric» is understood as a function with the standard metric's properties which values are elements of a cone in a linear normed space). The theorem on points of coincidence of a covering and a Lipschitz continuous (with respect to a vector-valued metric) mappings is formulated and proved. This statement is an analog of the theorem about coincidence points due to A.V. Arutyunov. Some applications of the obtained results are illustrated on the example of studying one class of difference equations in the space of measurable essentially bounded functions.
Key words: coincidence points of covering mappings; covering mappings; metrically regular mappings; spaces with vector-valued metrics; iterations.

ACKNOWLEDGEMENTS: The author is grateful to professor A.V. Arutyunov for the remarks, critique, and advices. The present work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 15-31-51047).

REFERENCES

1. *Arutyunov A.V.* Nakryvayushchie otobrazheniya v metricheskih prostranstvah i nepodvizhnye tochki // Doklady Akademii nauk. 2007. T. 416. № 2. S. 151–155.
2. *Arutyunov A.V.* Ustojchivost' tochek sovpadeniya i mnogoznachnye nakryvayushchie otobrazheniya v metricheskih prostranstvah // Doklady Akademii nauk. 2009. T. 427. № 5. S. 583–585.
3. *Arutyunov A.V.* Ustojchivost' tochek sovpadeniya i svojstva nakryvayushchih otobrazhenij // Matematicheskie zametki. 2009. T. 86. Vyp 2. S. 163–169.
4. *Arutyunov A.V.* Tochki sovpadeniya dvuh otobrazhenij // Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya. 2014. T. 48. № 1. S. 89–93.
5. *Arutyunov A.V., Gel'man B.D.* O strukture mnozhestva tochek sovpadeniya // Matematicheskij sbornik. 2015. T. 206. № 3. S. 35–56.
6. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. № 3. P. 1026–1044.
7. *Arutyunov A.V., ZHukovskij E.S., ZHukovskij S.E.* O korrektnosti differencial'nyh uravnenij, ne razreshennyh otnositel'no proizvodnoj // Differencial'nye uravneniya. 2011. T. 47. № 11. S. 1523–1537.
8. *ZHukovskij E.S., Pluzhnikova E.A.* Nakryvayushchie otobrazheniya v proizvedenii metricheskih prostranstv i kraevye zadachi dlya differencial'nyh uravnenij, ne razreshennyh otnositel'no proizvodnoj // Differencial'nye uravneniya. 2013. T. 49. № 4. S. 439–455.
9. *ZHukovskij E.S., Pluzhnikova E.A.* Ob upravlenii ob"ektami, dvizhenie kotoryh opisyvaetsya neyavnymi nelinejnymi differencial'nymi uravneniyami // Avtomatika i telemekhanika. 2015. № 1. S. 31–56.
10. *Pluzhnikova E.A.* O tochkah sovpadeniya vektornyh otobrazhenij // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2013. T. 18. Vyp. 6. S. 3144–3149.
11. *ZHukovskij E.S., Zabrodskij I.A., SHindyapin A.I.* O periodicheskih resheniyah neyavnyh raznostnyh uravnenij // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2015. T. 20. Vyp. 5. S. 1142–1146.
12. *ZHukovskij E.S., Munembe ZH.P.* O vozmushcheniyah mnogoznachnyh vektorno nakryvayushchih otobrazhenij // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2015. T. 20. Vyp. 5. S. 1146–1150.

13. *Treshchyov V.S.* Korrektnaya razreshimost' sistem operatornyh uravnenij s vektornymi nakryvayushchimi otobrazheniyami // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2015. T. 20. Vyp. 5. S. 1487–1489.

14. *Mordukhovich B.S., Wang B.* Restrictive metric regularity and generalized differential calculus in Banach spaces // Maths. Math. Science. 50. 2004. P. 2650–2683.

15. *Krejn S.G.* Funkcional'nyj analiz. M., 1972. 544 s.

Received 16 December 2015.

Pluzhnikova Elena Aleksandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department, e-mail: pluznikova_elena@mail.ru

УДК 517.444
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-95-108

КОМПОЗИЦИОННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© **Е. В. Рыжкова, С. М. Ситник**

Теория операторов преобразования – это один из наиболее разработанных методов для изучения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Широко известны приложения этого метода к обратным задачам, теории рассеяния, спектральной теории, нелинейным дифференциальным уравнениям и построению солитонов, обобщенным аналитическим функциям, сингулярным краевым задачам, теории дробного интегродифференцирования, вложениям некоторых функциональных пространств. В данной обзорной работе описаны основные классы операторов преобразования в современной теории, а также изложен общий способ построения операторов преобразования в виде суперпозиции интегральных преобразований.
Ключевые слова: операторы преобразования; обратные задачи; операторы Сонина и Пуассона; операторы Векуа; дробное интегродифференцирование; дробное преобразование Фурье.

1. Введение

Теория операторов преобразования (ОП) — это важный раздел современной математики, включающий разделы теории дифференциальных уравнений, включая обыкновенные, линейные в частных производных и нелинейные, теории действительных и комплексных функций, функционального анализа, теории специальных функций, некоторых разделов современной алгебры и геометрии, математической физики.

Необходимость теории операторов преобразования доказана большим числом ее приложений. Методы операторов преобразования применяются в теории обратных задач, определяя обобщенное преобразование Фурье, спектральную функцию и решения знаменитого уравнения Левитана; в теории рассеяния через операторы преобразования выписывается не менее