

13. *Treshchyov V.S.* Korrektnaya razreshimost' sistem operatornyh uravnenij s vektornymi nakryvayushchimi otobrazheniyami // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2015. T. 20. Vyp. 5. S. 1487–1489.
14. *Mordukhovich B.S., Wang B.* Restrictive metric regularity and generalized differential calculus in Banach spaces // Maths. Math. Science. 50. 2004. P. 2650–2683.
15. *Krejn S.G.* Funkcional'nyj analiz. M., 1972. 544 s.

Received 16 December 2015.

Pluzhnikova Elena Aleksandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department, e-mail: pluznikova_elena@mail.ru

УДК 517.444

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-95-108

КОМПОЗИЦИОННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© Е. В. Рыжкова, С. М. Ситник

Теория операторов преобразования – это один из наиболее разработанных методов для изучения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Широко известны приложения этого метода к обратным задачам, теории рассеяния, спектральной теории, нелинейным дифференциальным уравнениям и построению солитонов, обобщенным аналитическим функциям, сингулярным краевым задачам, теории дробного интегродифференцирования, вложениям некоторых функциональных пространств. В данной обзорной работе описаны основные классы операторов преобразования в современной теории, а также изложен общий способ построения операторов преобразования в виде суперпозиции интегральных преобразований.

Ключевые слова: операторы преобразования; обратные задачи; операторы Сони́на и Пуассона; операторы Ве́куа; дробное интегродифференцирование; дробное преобразование Фурье.

1. Введение

Теория операторов преобразования (ОП) — это важный раздел современной математики, включающий разделы теории дифференциальных уравнений, включая обыкновенные, линейные в частных производных и нелинейные, теории действительных и комплексных функций, функционального анализа, теории специальных функций, некоторых разделов современной алгебры и геометрии, математической физики.

Необходимость теории операторов преобразования доказана большим числом ее приложений. Методы операторов преобразования применяются в теории обратных задач, определяя обобщенное преобразование Фурье, спектральную функцию и решения знаменитого уравнения Левитана; в теории рассеяния через операторы преобразования выписывается не менее

знаменитое уравнение Марченко; в спектральной теории получаются известные формулы следов и асимптотика спектральной функции; оценки ядер операторов преобразования отвечают за устойчивость обратных задач и задач рассеяния; в теории нелинейных дифференциальных уравнений метод Лакса использует операторы преобразования для доказательства существования решений и построения солитонов. Определенными разновидностями операторов преобразования являются части теорий обобщенных аналитических функций, операторов обобщенного сдвига и обобщенных операторных сверток, метод преобразования Дарбу. В теории уравнений с частными производными методы операторов преобразования применяются для построения явных выражений для решений возмущенных задач через решения невозмущенных, изучении сингулярных и вырождающихся краевых задач, псевдодифференциальных операторов, задач для решений с существенными особенностями на части границы или во внутренних точках, оценки скорости убывания решений некоторых эллиптических и ультраэллиптических уравнений. Теория операторов преобразования позволяет дать новую классификацию специальных функций и интегральных операторов со специальными функциями в ядрах, в т. ч. различных операторов дробного интегродифференцирования. В теории функций найдены приложения операторов преобразования к вложениям функциональных пространств и обобщению операторов Харди, расширению теории Пэли–Винера, построению различных конструкций обобщенного сдвига и основанным на них обобщенных вариантов гармонического анализа. Методы теории операторов преобразования с успехом применяются во многих прикладных задачах: оценках решений Йоста и квантовой теории рассеяния, обратных задачах, исследовании системы Дирака и других матричных систем дифференциальных уравнений, операторных и дифференциально–операторных уравнениях, различных интегральных уравнениях, в том числе со специальными функциями в ядрах, теории вероятностей и случайных процессов, линейном стохастическом оценивании, фильтрации, стохастических случайных уравнениях, обратных задачах геофизики и трансзвуковой газодинамики. Кроме уже известных для метода Лакса и преобразований Дарбу все время увеличивается число приложений ОП к нелинейным дифференциальным уравнениям и исследованию солитонов.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть дана пара операторов (A, B) . Оператор T называется *оператором преобразования* (ОП, transmutation), если выполняется соотношение

$$T A = B T. \quad (1)$$

Соотношение (1) называется иначе *сплетающим свойством*, тогда говорят, что ОП T *сплетает* операторы A и B (intertwining operator). Для превращения (1) в строгое определение необходимо задать пространства или множества функций, на которых действуют операторы A , B , и, следовательно, T . Иногда в определение ОП закладывают и требование обратимости, что является желательным, но не обязательным свойством. При этом операторы, которые сплетаются непрерывным и обратимым в заданных пространствах ОП, часто называются в русской терминологии подобными. В конкретных реализациях чаще всего, но не обязательно, операторы A и B обычно являются дифференциальными, T — линейный оператор на стандартных пространствах для дифференцируемых функций.

Ясно, что понятие ОП является прямым и далеко идущим обобщением понятия подобия матриц из линейной алгебры. Но ОП *не сводятся к подобным (или эквивалентным) операторам*, т. к. сплетаемые операторы как правило являются неограниченными в естественных пространствах, к тому же обратный к ОП не обязан существовать, действовать в том же пространстве или быть ограниченным. Так что спектры операторов, сплетаемых ОП, как правило не совпадают. Кроме того, сами ОП могут быть неограниченными. Так бывает, например, в теории преобразований Дарбу, предметом которой является нахождение дифференциальных операторов преобразования (подстановок или замен) между парой дифференциальных

же операторов; таким образом, в этом случае все три рассматриваемых оператора являются неограниченными в естественных пространствах. При этом теория преобразований Дарбу как соответствующий раздел теории дифференциальных уравнений также вписывается в общую схему теории операторов преобразования при ее расширенном понимании. Парой операторов, для которых ищется ОП, не обязаны быть только дифференциальные. В теории ОП встречаются задачи для следующих разнообразных типов операторов: интегральных, интегро-дифференциальных, дифференциально-разностных (например, типа Дункла), дифференциальных или интегро-дифференциальных бесконечного порядка (например, в вопросах, связанных с леммой Шура о дополняемости), общих линейных в фиксированных функциональных пространствах, псевдодифференциальных и операторно-дифференциальных (абстрактных дифференциальных).

Возможность, чтобы исходная и преобразованная функции принадлежали различным пространствам, что принято подчеркивать использованием различных обозначений для переменных, позволяет включить в общую схему ОП все классические интегральные преобразования: Фурье, Лапласа (на самом деле Петцвала), Меллина, Ханкеля, Вейерштрасса, Конторовича-Лебедева, Фока, Обрешкова, Станковича и другие. В общую схему ОП также включаются конечные интегральные преобразования Г.А. Гринберга.

В квантовой физике при рассмотрении уравнения Шредингера и задач теории рассеяния встречается специальный класс ОП — волновые операторы.

Коммутирующие операторы любой природы также подходят под определение ОП. Наиболее близко к духу и задачам теории ОП относится изучение операторов, коммутирующих с производными. Сами ОП в этом случае зачастую представляются формальными рядами, псевдо-дифференциальными операторами или дифференциальными операторами бесконечного порядка. Описание коммутантов напрямую связано с описанием всего семейства ОП для заданной пары по его единственному представителю. В этом классе задач фундаментальные приложения нашла теория операторных сверток, особенно свертки Берга-Димовски. Начинают находить приложения в теории ОП и результаты для коммутирующих дифференциальных операторов, восходящие к классическим работам Бечнела и Чонди (J.L. Burchnall, T.W. Chaundy). Теория ОП также связана с вопросами факторизации дифференциальных операторов.

Как же обычно используются операторы преобразования? Пусть, например, мы изучаем некоторый достаточно сложно устроенный оператор A . При этом нужные свойства уже известны для модельного более простого оператора B . Тогда, если существует ОП (1), то часто удастся перенести свойства модельного оператора B и на A . Такова в нескольких словах примерная схема типичного использования ОП в конкретных задачах.

В частности, если рассматривается уравнение $Au = f$ с оператором A , то применяя к нему ОП T со сплетающим свойством (1), получаем уравнение с оператором B вида $Bv = g$, где обозначено $v = Tu$, $g = Tf$. Поэтому, если второе уравнение с оператором B является более простым, и для него уже известны формулы для решений, то мы получаем и представления для решений первого уравнения $u = T^{-1}v$. Разумеется, при этом обратный оператор преобразования должен существовать и действовать в рассматриваемых пространствах, а для получения явных представлений решений должно быть получено и явное представление этого обратного оператора. Таково одно из основных применений техники ОП в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Изложению теории ОП и их приложениям посвящены полностью или частично монографии [1]–[19]. Особенно выделим замечательные книги Роберта Кэррола на английском языке [1]–[3]. Отметим также достаточно подробные обзоры одного из авторов по современной теории ОП [21]–[22].

Сделаем одно терминологическое замечание. В западной литературе принят для ОП тер-

мин «transmutation», восходящий к Ж. Дельсарту. Как отмечает Р. Кэрролл, похожий термин «transformation» при этом закрепляется за классическими интегральными преобразованиями Фурье, Лапласа, Меллина и другими подобными им. Кроме того, термин «transmutation» имеет в романских языках дополнительный оттенок «волшебного превращения», что довольно точно характеризует действие ОП. Приведем точную цитату из [3]: «Such operators are often called transformation operators by the Russian school (Levitan, Naimark, Marchenko et. al.), but transformation seems too broad a term, and, since some of the machinery seems «magical», at times, we have followed Lions and Delsarte in using the word transmutation».

Кратко перечислим основные классы известных ОП, ограничившись случаем, когда сплетаются пары дифференциальных операторов.

1. Операторы Штурма–Лиувилля. В этом случае

$$Ay(x) = y''(x) + q(x)y(x), By(x) = y''(x), \quad (2)$$

функция $q(x)$ обычно называется потенциалом. Требование обратимости естественным образом приводит к поиску ОП в виде интегрального оператора T :

$$(Tf)(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)f(t) dt, \quad (3)$$

причем ядро $K(x, t)$ в общем случае может быть распределением (например, $K(x, t) = \delta(x - t) + G(x, t)$, G — гладкая функция). В формуле (3) $a(x)$, $b(x)$ — некоторые функции $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Обычно выбирают ОП одного из простейших видов

$$(Tf)(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)f(t) dt, \quad (Tf)(x) = f(x) + \int_x^\infty K(x, t)f(t) dt,$$

(«по Б.Я. Левину» или «по В.Я. Повзнеру»). После уточнения класса рассматриваемых функций существование ядер такого ОП доказывается методом последовательных приближений для уравнения Вольтерра.

2. Операторы Векуа–Эрдейи–Лаундеса. Это частный случай ОП (2), которые получаются при выборе постоянного потенциала. При этом возникает важный класс ОП, осуществляющих сдвиг по спектральному параметру.

О п р е д е л е н и е 2. Обобщенным оператором преобразования Векуа – Эрдейи – Лаундеса (ВЭЛ) называется сплетающий оператор для пары $(A + \lambda_1, A + \lambda_2)$, где A – некоторый базовый оператор, λ_1, λ_2 – комплексные числа.

Иными словами

$$T(A + \lambda_1) = (A + \lambda_2)T. \quad (4)$$

ОП ВЭЛ были по разным поводам введены и изучены в работах И.Н. Векуа, А. Эрдейи и Дж. С. Лаундеса, см. [22]–[20]. В их работах рассматривались такие базовые дифференциальные операторы:

$$A = D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad A = B_\nu = D^2 + \frac{2\nu + 1}{x}D, \quad A = x^\beta B_\nu. \quad (5)$$

Первый ОП ВЭЛ был построен Ильей Несторовичем Векуа в виде

$$J_\lambda f(x) = f(x) - \int_0^x t \frac{J_1(\lambda \sqrt{x^2 - t^2})}{\sqrt{x^2 - t^2}} f(t) dt, \quad J_\lambda(D^2 + \lambda) = D^2 J_\lambda, \quad (6)$$

где $J_1(\cdot)$ — функция Бесселя. Такой ОП может быть использован, например, для представления решений телеграфного уравнения через решения волнового. В этом проявляется основная роль, которую ОП ВЭЛ играют в теории дифференциальных уравнений в частных производных—они осуществляют сдвиг по спектральному параметру. Поэтому с их помощью получаются представления решений для задач «с лямбда» через решения задач «без лямбда», многочисленные примеры можно найти в энциклопедической монографии [20] и ссылках в ней (см. особенно главу 8). И.Н.Векуа использовал эти операторы для представления решений задач теории упругости.

ОП ВЭЛ изучались также в [23], перечислим некоторые полученные там результаты. Вначале выделено семейство из восьми основных операторов ВЭЛ. Изучены факторизации этих операторов через более простые: Фурье, Ханкеля, дробные интегралы Римана–Лиувилля, Эрдейи–Кобера и другие [20]. Изучены полугрупповые свойства введенных операторов ВЭЛ по параметру. Описаны общие методы построения ОП ВЭЛ из уже известных. На этом пути получены новые операторы ВЭЛ, ядра которых выражаются через гипергеометрические функции Райта, Фокса, а также через гипергеометрические функции от нескольких переменных: Гумберта, Кампе де Ферье, Лауричеллы и др.

3. ОП Сонина–Пуассона–Дельсарта. Это известный класс ОП, сплетающих дифференциальный оператор Бесселя со второй производной:

$$T(B_\nu)f = (D^2)Tf, B_\nu = D^2 + \frac{2\nu + 1}{x}D, D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \nu \in \mathbb{C}. \quad (7)$$

О п р е д е л е н и е 3. ОП Пуассона называется выражение

$$P_\nu f = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)2^\nu x^{2\nu}} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} f(t) dt, \Re \nu > -\frac{1}{2}. \quad (8)$$

ОП Сонина называется выражение

$$S_\nu f = \frac{2^{\nu + \frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2} - \nu)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\nu - \frac{1}{2}} t^{2\nu + 1} f(t) dt, \Re \nu < \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Операторы (8)–(9) действуют как ОП по формулам

$$S_\nu B_\nu = D^2 S_\nu, P_\nu D^2 = B_\nu P_\nu. \quad (10)$$

Их можно доопределить на все значения $\nu \in \mathbb{C}$.

Идею изучения операторов подобных (8)–(9) высказывал еще Лиувиль, их реальное использование в контексте теории функций Бесселя начал Николай Яковлевич Сонин. Как ОП эти операторы были введены в работах Дельсарта и затем изучены в работах Дельсарта и Лионса [9]. Поэтому мы будем называть (8)–(9) ОП Сонина–Пуассона–Дельсарта (СПД). В нашей стране об операторах СПД в основном узнали из великолепно написанной статьи Б. М. Левитана [16].

Не будет преувеличением сказать, что операторы СПД (8)–(9) являются самыми знаменитыми объектами всей теории ОП, их изучению, приложениям и обобщениям посвящены сотни работ. Дельсартом на базе ОП СПД были введены фундаментальное понятие обобщенного сдвига и обобщенные ряды Тэйлора–Дельсарта [9]–[13].

Важным обобщением операторов Сонина–Пуассона–Дельсарта являются ОП для гипербесселевых функций. Теория таких функций была первоначально заложена в работах Куммера и Делерю. Полное исследование гипербесселевых функций, дифференциальных уравнений для них и соответствующих операторов преобразования было исчерпывающе проведено в работах

Ивана Димовски и его учеников. Соответствующие ОП заслуженно получили в литературе названия ОП Сони́на–Димовски и Пуассона–Димовски, они также изучались в работах ученицы Ивана Димовски — Виржинии Киряковой. В теории гипербесселевых функций, дифференциальных уравнений и операторов преобразования для них центральную роль играет знаменитое интегральное преобразование Обрешкова, введенное болгарским математиком Николя Обрешковым. Это преобразование, ядро которого выражается в общем случае через G -функцию Майера, является одновременным обобщением преобразований Лапласа, Меллина, синус- и косинус преобразований Фурье, Ханкеля, Майера и других классических интегральных преобразований. Различные формы гипербесселевых функций, дифференциальных уравнений и операторов преобразований для них, а также частные случаи преобразования Обрешкова многократно впоследствии переоткрывались, этот процесс продолжается и до настоящего времени. По мнению автора, преобразование Обрешкова, наряду с преобразованиями Фурье, Меллина и Лапласа относится к небольшому числу фундаментальных преобразований Анализа, из которых, как из кирпичиков, складываются многие другие преобразования, а также основанные на них конструкции и приложения. Аналогичную роль играет другое интегральное преобразование, введенное сербским математиком Б. Станковичем, ядро которого выражается функцией Фокса. Через преобразование Станковича, как выяснилось в последние годы, выражаются решения многих уравнений дробной диффузии и теплопроводности.

4. Обобщенные операторы СПД. В этом случае к оператору Бесселя добавляется произвольный потенциал

$$S_\nu(B_\nu - q(x)) = B_\nu S_\nu, B_\nu = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\nu(\nu+1)}{x} \frac{d}{dx}. \quad (11)$$

В результате получаются ОП, которые обобщают ранее рассмотренные для операторов Штурма–Лиувилля и Бесселя. Данный класс ОП изучался в работах [25], [30]–[31], о предшествующих работах харьковских математиков А.С. Сохина и В.В. Сташевской см. в обзорах [21]–[22].

5. Операторы Бушмана–Эрдейи.

О п р е д е л е н и е 4. Введем операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости по формулам

$$S_{0+}^{\nu,1} f = \frac{d}{dx} \int_0^x P_\nu\left(\frac{x}{t}\right) f(t) dt, \quad (12)$$

$$P_{0+}^{\nu,1} f = \int_0^x P_\nu\left(\frac{t}{x}\right) \frac{df(t)}{dt} dt, \quad (13)$$

$$S_-^{\nu,1} f = \int_x^\infty P_\nu\left(\frac{t}{x}\right) \left(-\frac{df(t)}{dt}\right) dt, \quad (14)$$

$$P_-^{\nu,1} f = \left(-\frac{d}{dx}\right) \int_x^\infty P_\nu\left(\frac{x}{t}\right) f(t) dt, \quad (15)$$

где $P_\nu(z) = P_\nu^0(z)$ — функция Лежандра.

Эти ОП являются сплетающимися для пары

$$A = L_\nu = D^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2} = \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x}\right) \left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x}\right), B = D^2. \quad (16)$$

ОП Бушмана–Эрдейи подробно изучены в работах одного из авторов [26]–[29], см. также обзоры [21]–[22].

Операторы Бушмана–Эрдейи имеют многочисленные модификации. В [26]–[29] предложена удобная классификация их различных вариантов. Операторы Бушмана–Эрдейи первого

рода содержат ядра, выражающиеся через функции Лежандра первого рода. Их предельным случаем являются операторы нулевого порядка гладкости, играющие важную роль в различных приложениях. Операторы Бушмана–Эрдейи второго рода содержат ядра, выражающиеся через функции Лежандра второго рода. Комбинация операторов первого и второго родов приводит к операторам Бушмана–Эрдейи третьего рода. При специальном выборе параметров они сводятся к унитарным операторам преобразованиям.

Для введенных ОП могут быть явно подсчитаны их нормы в $L_2(0; \infty)$ и выведены условия унитарности в этом пространстве.

Т е о р е м а 1. Справедливы следующие формулы для норм операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости в L_2 :

$$\|{}_1S_{0+}^\nu\| = \|{}_1P_-^\nu\| = 1/\min(1, \sqrt{1 - \sin \pi\nu}), \quad (17)$$

$$\|{}_1P_{0+}^\nu\| = \|{}_1S_-^\nu\| = \max(1, \sqrt{1 - \sin \pi\nu}). \quad (18)$$

С л е д с т в и е 1. Нормы операторов (12) – (15) периодичны по ν с периодом 2, то есть $\|X^\nu\| = \|X^{\nu+2}\|$, где X^ν — любой из операторов (12) – (15).

С л е д с т в и е 2. Нормы операторов ${}_1S_{0+}^\nu$, ${}_1P_-^\nu$ не ограничены в совокупности по ν , каждая из этих норм не меньше 1. Если $\sin \pi\nu \leq 0$, то эти нормы равны 1. Указанные операторы неограничены в L_2 тогда и только тогда, когда $\sin \pi\nu = 1$ (или $\nu = 2k + 1/2$, $k \in \mathbb{Z}$).

С л е д с т в и е 3. Нормы операторов ${}_1P_{0+}^\nu$, ${}_1S_-^\nu$ ограничены в совокупности по ν , каждая из этих норм не больше $\sqrt{2}$. Все эти операторы ограничены в L_2 при всех ν . Если $\sin \pi\nu \geq 0$, то их L_2 – норма равна 1. Максимальное значение нормы, равное $\sqrt{2}$, достигается тогда и только тогда, когда $\sin \pi\nu = -1$ (или $\nu = 2k - 1/2$, $k \in \mathbb{Z}$).

Важнейшим свойством операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости является их унитарность при целых ν . Отметим, что при интерпретации L_ν как оператора углового момента в квантовой механике, параметр ν как раз и принимает целые неотрицательные значения. Унитарные операторы преобразования тесно связаны с унитарностью оператора рассеяния в задачах квантовой механики.

Т е о р е м а 2. Для унитарности в L_2 операторов (12) – (15) необходимо и достаточно, чтобы число ν было целым. В этом случае пары операторов $({}_1S_{0+}^\nu, {}_1P_-^\nu)$ и $({}_1S_-^\nu, {}_1P_{0+}^\nu)$ взаимно обратны.

Интересно рассмотреть частный случай, который вытекает из теоремы 2 при $\nu = 1$. На гладких функциях, для которых возможно занесения производной под знак интеграла и интегрирование по частям, получаем пару очень простых операторов

$$U_1 f = f(x) - \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy, \quad U_2 f = f(x) - \int_x^\infty \frac{f(y)}{y} dy, \quad (19)$$

связанных со знаменитыми операторами Харди

$$H_1 f = \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy, \quad H_2 f = \int_x^\infty \frac{f(y)}{y} dy. \quad (20)$$

Из наших результатов следует

С л е д с т в и е 4. Операторы (19) образуют пару взаимнообратных унитарных в $L_2(0, \infty)$ операторов. Они сплетаются как ОП $\frac{d^2}{dx^2}$ и $\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2}{x^2}$.

Как следует из (20), операторы Бушмана–Эрдейи могут рассматриваться как *обобщения операторов Харди*, а неравенства для их норм являются *определенными обобщениями неравенств Харди*, что позволяет взглянуть на этот класс операторов под новым интересным углом

зрения. Кроме того, можно показать, что операторы (19) являются преобразованиями Кэли от симметричных операторов $\pm 2i(xf(x))$ при соответствующем выборе областей определения. Их спектром является единичная окружность. В [26]–[27] эти вопросы рассмотрены и для пространств со степенным весом.

Результат об унитарности из последнего следствия 1 недавно рассматривался Куфнером, Перссоном и Малиграндой, давшими его элементарное доказательство и приложения. Теорема 2 обобщает их результат на бесконечное число пар операторов, а также позволяет выписать еще несколько пар унитарных в $L_2(0, \infty)$ операторов очень простого вида, которые являются частными случаями операторов Бушмана–Эрдейи при целых ν :

$$\begin{aligned} U_3 f &= f + \int_0^x f(y) \frac{dy}{y}, \quad U_4 f = f + \frac{1}{x} \int_x^\infty f(y) dy, \\ U_5 f &= f + 3x \int_0^x f(y) \frac{dy}{y^2}, \quad U_6 f = f - \frac{3}{x^2} \int_0^x y f(y) dy, \\ U_7 f &= f + \frac{3}{x^2} \int_x^\infty y f(y) dy, \quad U_8 f = f - 3x \int_x^\infty f(y) \frac{dy}{y^2}, \\ U_9 f &= f + \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{15x^2}{y^3} - \frac{3}{y} \right) f(y) dy, \\ U_{10} f &= f + \frac{1}{2} \int_x^\infty \left(\frac{15y^2}{x^3} - \frac{3}{x} \right) f(y) dy. \end{aligned}$$

6. Унитарные обобщения ОП СПД. В работах [26]–[29], следуя идеям В.В. Катрахова, также были построены обобщения ОП СПД, которые являются унитарными в $L_2(0, \infty)$ для всех значений параметра ν , и также сплетают пару (16). Они имеют вид

$$\begin{aligned} S_U^\nu f &= \cos \frac{\pi\nu}{2} \left(-\frac{d}{dx} \right) \int_x^\infty P_\nu \left(\frac{x}{y} \right) f(y) dy + \\ &+ \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi\nu}{2} \left(\int_0^x (x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{x}{y} \right) f(y) dy - \right. \\ &\quad \left. - \int_x^\infty (y^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{x}{y} \right) f(y) dy \right), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} P_U^\nu f &= \cos \frac{\pi\nu}{2} \left(\int_0^x P_\nu \left(\frac{y}{x} \right) \left(\frac{d}{dy} \right) f(y) dy - \right. \\ &- \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi\nu}{2} \left(\int_0^x (x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{y}{x} \right) f(y) dy - \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_x^\infty (y^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{y}{x} \right) f(y) dy \right) \right), \end{aligned} \quad (22)$$

где P_ν — функция Лежандра первого рода, Q_ν^1 — функция Лежандра второго рода, Q_ν^1 — функция Лежандра второго рода на разрезе.

Для приведенной пары унитарных ОП предлагаются названия «преобразования Сонина–Катрахова» и «Пуассона–Катрахова», в честь Валерия Вячеславовича Катрахова, начавшего их изучение.

2. Основные результаты

Перечисленные во введении классы ОП строились каждый своими методами. Поэтому возникла необходимость в разработке общей схемы построения ОП. Такая схема — метод факторизации или композиции — излагается в настоящей работе. Он основан на представлении ОП

в виде композиции интегральных преобразований и является дальнейшим развитием и обобщением результатов, полученных ранее в [32]–[34]. Факторизационный метод дает алгоритмы не только для построения множества новых ОП, но содержит как частные случаи известные ОП СПД, Векуа–Эрдейи–Лаундеса, Бушмана–Эрдейи, унитарные ОП (21)–(22), обобщенные операторы Эрдейи–Кобера, а также введенные Р. Кэрролом [1]–[3] классы эллиптических, гиперболических и параболических ОП и их обобщения.

Общая схема композиционного метода следующая. На вход подается пара операторов произвольного вида A, B , а также связанные с ними обобщенные преобразования Фурье $F(A), F(B)$, которые обратимы и действуют по формулам

$$F(A)A = g(t)F(A), F^{-1}(B)g(t) = BF^{-1}(B), \quad (23)$$

где t — двойственная переменная. На выходе получаем пару ОП, сплетающих A, B .

Т е о р е м а 3. Определим пару взаимно обратных операторов по формулам

$$S = F^{-1}(B) \frac{1}{w(t)} F(A), P = F^{-1}(A) w(t) F(B) \quad (24)$$

с произвольной весовой функцией $w(t)$. Тогда они являются ОП, которые формально удовлетворяют сплетающим соотношениям $SA = BS, PB = AP$.

Несложное доказательство получается прямой подстановкой. Основную трудность представляет вычисление введенных композиций в явном интегральном виде. Строгие доказательства должны включать описания классов допустимых функций и функциональных пространств. Поэтому мы приведем окончательные формулы для нескольких полученных ОП, опуская громоздкие вычисления.

На практике чаще всего используются интегральные преобразования Фурье, синус и косинус преобразования, а также преобразование Ханкеля, которые мы определим так:

$$\begin{aligned} (Ff)(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp(-ity) f(y) dy, \\ (F_c f)(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(ty) f(y) dy, \\ (F_s f)(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(ty) f(y) dy, \\ (H_\nu f)(t) &= \frac{1}{t^\nu} \int_0^\infty J_\nu(ty) f(y) dy. \end{aligned}$$

При введенных нормировках все эти преобразования унитарны в $L_2(0, \infty)$ и совпадают с обратными. В дальнейшем сделаем самый очевидный выбор в (23): $g(t) = -t^2$.

Рассмотрим несколько примеров применения композиционного метода построения ОП.

П р и м е р 1. Пусть $A = B_\nu, B = \frac{d^2}{dx^2}, F(A) = H_\nu, F(B) = F_c, w(t) = t^\alpha$. Тогда при некоторых ограничениях на параметры получаем унитарные ОП (21)–(18), которые одновременно обобщают ОП СПД, Бушмана–Эрдейи и Эрдейи–Кобера.

П р и м е р 2. Пусть $A = B_\nu, B = B_\mu, F(A) = H_\nu, F(B) = H_\mu, w(t) = t^\alpha$. Тогда получаются операторы сдвига по параметру $T_{\nu,\mu}^{(\alpha)}$, ядра которых выражаются через гипергеометрические функции. Самым интересным из них представляется ОП при выборе $\alpha = 0$

$$(T_{\nu,\mu}^{(0)} f)(x) = \frac{2^{1-(\nu-\mu)}}{\Gamma(\nu-\mu)} \int_x^\infty y (y^2 - x^2)^{\nu-\mu-1} f(y) dy, \quad (25)$$

который не зависит от самих значений ν, μ , а только от величины «спуска» по параметрам $\nu - \mu$. Это оператор типа Эрдейи–Кобера, открытый А. Эрдейи [20]. Другой подход к построению подобных операторов сдвига по параметру, это искать их в виде произведения операторов

типа Сонина и Пуассона $T_{\nu,\mu} = P_\mu S_\nu$, последние можно опять строить композиционным методом, причем с разными весовыми функциями.

П р и м е р 3. При значениях $\nu = \mu$ из предыдущего примера получается семейство операторов, коммутирующих с оператором Бесселя, ядра которых выражаются через функции Лежандра первого и второго родов.

П р и м е р 4. Пусть выбрано $A = B_\mu, B = B_\nu - \lambda^2, w(t) = t^\mu (t^2 + \lambda^2)^{-\frac{\mu}{2}}$,

$$F(A) = F(B) = \frac{1}{t^\nu} \int_0^\infty y^{\nu+1} J_\nu \left(y \sqrt{t^2 + \lambda^2} \right) f(y) dy. \quad (26)$$

Тогда по формулам (24) получаем ОП типа Векуа–Эрдейи–Лаундеса вида

$$Sf = \lambda^{1+\nu-\mu} \int_0^\infty y (y^2 - x^2)^{\frac{\nu-\mu-1}{2}} J_{\nu-\mu-1} \left(\lambda \sqrt{y^2 - x^2} \right) f(y) dy. \quad (27)$$

Это в точности ОП, введенный Лаундесом [20], он также зависит только от величины сдвига по параметрам. Отметим, что на основе композиционного метода можно изложить всю теорию ОП Векуа–Эрдейи–Лаундеса, при этом роль обобщенного преобразования Ханкеля играет выражение (26).

Обобщая классификацию Р. Кэррола, мы назвали ОП для оператора Бесселя из приведенных примеров B –гиперболическими. В работах [32]–[34] также рассмотрено применение композиционного метода к построению B –эллиптических ОП со свойством $TB_\nu = -D^2T$ и B –параболических ОП со свойством $TB_\nu = DT$.

В указанном методе может быть использован и оператор квадратичного преобразования Фурье (КПФ, дробное преобразование Фурье, преобразование Фурье–Френеля), см. [36]–[37]. Это важное интегральное преобразование недостаточно широко известно (пока), оно возникло из предложения Френеля заменить стандартные плоские волны с линейными аргументами в экспонентах на более общие волны с квадратичными аргументами в экспонентах, что позволило полностью объяснить парадоксы со спектральными линиями при дифракции Фраунгофера. Математически операторы КПФ являются дробными степенями F^α обычного преобразования Фурье, достраивая его до полугруппы по параметру α , они были определены Н. Винером и А. Вейлем. В теории всплесков, в которой принято каждую формулу считать новой и называть по-новому давно известные вещи, КПФ называется преобразованием Габора. Изложенный выше композиционный метод позволяет с помощью этого преобразования строить ОП для одномерного оператора Шредингера из квантовой механики. При этом может быть использовано и более общее квадратичное преобразование Ханкеля (КПХ) [38].

Построены также достаточно сложные классы ОП, которые получаются по данной схеме с использованием дробных степеней оператора Бесселя, введенных автором в явном интегральном виде в [39]–[40].

Также отметим, что метод ОП и полученные с его помощью оценки ядер операторов преобразования находят приложения в задачах о разложении функций или сигналов по функциям Гаусса, то есть квадратичным экспонентам, см. [41]–[44]. При оценках специальных функций, входящих в ядра ОП, применяются общие методы теории неравенств, в т. ч. из работ [45]–[46].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carroll R. Transmutation and Operator Differential Equations. North Holland, 1979.
2. Carroll R. Transmutation, Scattering Theory and Special Functions. North Holland, 1982.
3. Carroll R. Transmutation Theory and Applications. North Holland, 1986.
4. Фазе Д.К., Нагнибида Н.И. Проблема эквивалентности обыкновенных дифференциальных операторов. Новосибирск: Наука, 1977.
5. Gilbert R. Constructive Methods for Elliptic Equations. Springer Lecture Notes Math. 365, 1974.
6. Carroll R.W., Showalter R.E. Singular and Degenerate Cauchy problems. N.Y.: Academic Press, 1976.

7. *Carroll R.* Topics in Soliton Theory. North Holland, 1991.
8. *Gilbert R.* Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations. N.Y.: Academic Press, 1969.
9. *Lions J.L.* Equations differentielles operationnelles et problèmes aux limites. Springer, 1961.
10. *Марченко В.А.* Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля. Киев: Наукова Думка, 1972.
11. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1977.
12. *Левитан Б.М.* Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. М.: Гостехиздат, 1950.
13. *Левитан Б.М.* Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения. М.: ГИФМЛ, 1962.
14. *Левитан Б.М.* Теория операторов обобщенного сдвига. М.: Наука, 1973.
15. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984.
16. *Левитан Б.М.* Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. 1951. Т. 6. Вып. 2. С. 102–143.
17. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука–Физматлит, 1997.
18. *Фаддеев Л.Д.* Обратная задача квантовой теории рассеяния // УМН. 1959. Т. 14. №4. С. 57–119.
19. *Хромов А.П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2004. №10. С. 3–163.
20. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
21. *Ситник С.М.* Операторы преобразования и их приложения // Исследования по современному анализу и математическому моделированию. Владикавказ: Владикавказский научный центр РАН и РСО–А, 2008. С. 226–293.
22. *Sitnik S.M.* Transmutations and Applications: a survey // arXiv: 1012.37412012. 2012. 141 P.
23. *Ляховецкий Г.В., Ситник С.М.* Операторы преобразования Векуа–Эрдейи–Лаундеса // Препринт института автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН. Владивосток: ДВО РАН, 1994. 24 с.
24. *Ситник С.М.* Построение операторов преобразования Векуа–Эрдейи–Лаундеса // Тезисы докладов международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвященной 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа. Новосибирск: НГУ, 2007. С. 469–470.
25. *Катрахов В.В., Ситник С.М.* Оценки решений Йоста одномерного уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом // Доклады РАН. 1995. Т. 340. №1. С. 18–20.
26. *Ситник С.М.* Унитарность и ограниченность операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости. Препринт ИАПУ ДВО РАН. Владивосток, 1990. 45 С.
27. *Ситник С.М.* Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана–Эрдейи // ДАН СССР. 1991. Т. 320. №6. С.1326–1330.
28. *Ситник С.М.* Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи, их классификация, основные свойства и приложения // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2015. № 11 (208). Вып. 39. С. 60–76.
29. *Sitnik S.M.* Buschman–Erdelyi transmutations, classification and applications. In the book: Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations: Amade 2012. (Edited by M.V. Dubatovskaya, S.V. Rogosin), Cambridge Scientific Publishers, Cottenham, Cambridge, 2013. P. 171–201.
30. *Ситник С.М.* О представлении в интегральном виде решений одного дифференциального уравнения с особенностями в коэффициентах // Владикавказский математический журнал. 2010. Т. 12. Вып. 4. С. 73–78.
31. *Катрахов В.В., Ситник С.М.* Краевая задача для стационарного уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом // Доклады Академии наук СССР. 1984. Т. 278. №4. С. 797–799.
32. *Катрахов В.В., Ситник С.М.* Метод факторизации в теории операторов преобразования // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. Мемориальный сборник памяти Бориса Алексеевича Бубнова. Новосибирск, 1990. С. 104–122.
33. *Катрахов В.В., Ситник С.М.* Композиционный метод построения В–эллиптических, В–гиперболических и В–параболических операторов преобразования // Доклады РАН. 1994. Т. 337. № 3. С. 307–311.
34. *Ситник С.М.* Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений. Вестник Самарского Государственного Университета (СамГУ) — Естественнонаучная серия. 2008. № 8/1 (67). С. 237–248.
35. *Sitnik S.M.* Some problems in the modern theory of transmutations // Spectral theory and differential equations (STDE - 2012). International conference in honor of Vladimir A. Marchenko's 90th birthday. August 20–24, 2012, Kharkiv, Ukraine. B.Verkin Institute for low temperature and engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, V.Karazin Kharkiv National University. Book of abstracts. Kharkiv, 2012. P. 101–102.
36. *Ozaktas H., Zalevsky Z., Kutay M.* The Fractional Fourier Transform: with Applications in Optics and Signal Processing. Wiley, 2001.
37. *Осипов В.Ф., Абджандадзе З.Л.* Преобразование Фурье–Френеля и некоторые его приложения. Санкт–Петербург: С.-Петербург. гос. ун–т., 2000.
38. *Карп Д.Б., Ситник С.М.* Дробное преобразование Ханкеля и его приложения в математической фи-

зике // Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. 1994, Владивосток. 24 с.

39. Ситник С.М. О явных реализациях дробных степеней дифференциального оператора Бесселя и их приложениях к дифференциальным уравнениям // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2010. Т. 12. № 2. С. 69–75.

40. Ситник С.М. Дробное интегрирование для дифференциального оператора Бесселя // Материалы международного Российско-Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик. 2004. С. 163–167.

41. Киселев Е.А., Минин Л.А., Новиков И.Я., Ситник С.М. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов // Математические заметки. 2014. Т. 96. Вып. 2. С. 239–250.

42. Zhuravlev M.V., Kiselev E.A., Minin L.A., Sitnik S.M. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Sciences, Springer. 2011. V. 173. № 2. P. 231–241.

43. Минин Л.А., Журавлев М.В., Ситник С.М. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2009. № 13 (68). Вып. 17/2. С. 89–99.

44. Ситник С.М., Тымашов А.С., Ушаков С.Н. Метод конечномерных приближений в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2015. № 17 (214). Вып. 40. С. 130–142.

45. Karp D.B., Sitnik S.M. Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric function // Journal of Approximation Theory. Elsevier, Amsterdam. 2009. V. 161. P. 337–352.

46. Karp D.B., Sitnik S.M. Log-convexity and log-concavity of hypergeometric-like functions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. Elsevier, Amsterdam. 2010. V. 364. P. 384–394.

Поступила в редакцию 8 февраля 2016 г.

Рыжкова Елена Валерьевна, Воронежский институт Министерства внутренних дел России, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат педагогических, доцент кафедры математики и моделирования систем, e-mail: dikareva_ev@mail.ru

Ситник Сергей Михайлович, Воронежский институт Министерства внутренних дел России, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и моделирования систем, e-mail: mathsms@yandex.ru

UDC 517.444

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-95-108

A COMPOSITION METHOD FOR CONSTRUCTING TRANSMUTATIONS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS

© E. V. Ryzhkova, S. M. Sitnik

The paper is devoted to transmutation theory for ordinary and partial differential operators. It has many applications to inverse problems, spectral theory, nonlinear and soliton problems, singular equations, generalized analytic functions, singular boundary-value problems, fractional integrals and function spaces embedding. In this survey paper the most important classes of transmutations in modern theory is introduced and the new method is proposed to find transmutations via integral transform compositions.

Key words: transmutations; inverse problems; Sonine and Poisson operators; Vekua operators; fractional integrodifferentiation; fractional Fourier transform.

REFERENCES

1. *Carroll R.* Transmutation and Operator Differential Equations. North Holland, 1979.
2. *Carroll R.* Transmutation, Scattering Theory and Special Functions. North Holland, 1982.
3. *Carroll R.* Transmutation Theory and Applications. North Holland, 1986.
4. *Fage D.K., Nagnibida N.I.* Problem of equivalence of ordinary differential operators. Novosibirsk: Nauka, 1977.
5. *Gilbert R.* Constructive Methods for Elliptic Equations. Springer Lecture Notes Math. 365, 1974.
6. *Carroll R.W., Showalter R.E.* Singular and Degenerate Cauchy problems. N.Y.: Academic Press, 1976.
7. *Carroll R.* Topics in Soliton Theory. North Holland, 1991.
8. *Gilbert R.* Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations. N.Y.: Academic Press, 1969.
9. *Lions J.L.* Equations differentielles operationnelles et problèmes aux limites. Springer, 1961.
10. *Marchenko V.A.* Spectral theory of Sturm - Liouville operators. Kiev: Naukova Dumka, 1972.
11. *Marchenko V.A.* Sturm - Liouville operators and their applications. Kiev: Naukova Dumka, 1977.
12. *Levitan B.M.* Eigenvalues expansion for differential equations of the second order. M., 1950.
13. *Levitan B.M.* Generalized translations and applications. M., 1962.
14. *Levitan B.M.* Theory of generalized translation operators. M.: Nauka, 1973.
15. *Levitan B.M.* Inverse Sturm - Liouville problems. M.: Nauka, 1984.
16. *Levitan B.M.* Bessel function expansions in Fourier series and integrals // UMN. 1951. V. 6. № 2. P. 102–143.
17. *Kipriyanov I.A.* Singular elliptical boundary-value problems. M.: Nauka, 1997.
18. *Faddeev L.D.* Inverse quantum scattering problem // UMN. 1959. V. 14. № 4. P. 57–119.
19. *Hromov A.P.* Finite dimensional perturbations of Volterra operators // Sovremennaya matematika. Fundamentalnye napravleniya. 2004. № 10. P. 3–163.
20. *Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.* Integrals and derivatives of fractional orders and some their applications. Minsk, 1987.
21. *Sitnik S.M.* Transmutations and applications // Issledovaniya po sovremennomu analizu i matematicheskomu modelirovaniyu. Vladikavkaz, 2008. P. 226–293.
22. *Sitnik S.M.* Transmutations and Applications: a survey // arXiv: 1012.37412012. 2012. 141 P.
23. *Lyahovetskii G.V., Sitnik S.M.* Vekua-Erdelyi-Lowndes transmutations // Preprint. Vladivostok, 1994. 24 P.
24. *Sitnik S.M.* Construction of Vekua-Erdelyi-Lowndes transmutations // Materials of Int. Conf. dedicated to 100 years of acad. I.N. Vekua. Novosibirsk, 2007. P. 469–470.
25. *Katrahov V.V., Sitnik S.M.* Estimates of Jost solutions to one dimensional Schrodinger equation // Doklady RAN. 1995. V. 340. № 1. P. 18–20.
26. *Sitnik S.M.* Unitarity and boundedness of Buschman-Erdelyi operators. Preprint. Vladivostok, 1990. 45 P.
27. *Sitnik S.M.* Factorization and norm estimates in weighted Lebesgue spaces of Buschman-Erdelyi transmutations // DAN SSSR. 1991. V. 320. № 6. P.1326–1330.
28. *Sitnik S.M.* Buschman-Erdelyi transmutations, classification and applications // Scientific Bulletin of Belgorod State University. 2015. V. 11 (208). № 39. P. 60–76.
29. *Sitnik S.M.* Buschman-Erdelyi transmutations, classification and applications. In the book: Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations: Amade 2012. (Edited by M.V. Dubatovskaya, S.V. Rogosin), Cambridge Scientific Publishers, Cottenham, Cambridge, 2013. P. 171–201.
30. *Sitnik S.M.* Integral form of solutions of a differential equation with singular coefficients // Vladikavkaz Math. J. 2010. V. 12. № 4. P. 73–78.
31. *Katrahov V.V., Sitnik S.M.* Boundary-value problem for stationary Schrodinger equation with singular potential // DAN SSSR. 1984. V. 278. № 4. P. 797–799.
32. *Katrahov V.V., Sitnik S.M.* Factorization method in transmutation theory // Non-classical and mixed type equations. Novosibirsk, 1990. P. 104–122.
33. *Katrahov V.V., Sitnik S.M.* Composition method for B-elliptic, B-hyperbolic and B-Parabolic transmutations // Doklady RAN. 1994. V. 337. № 3. P. 307–311.
34. *Sitnik S.M.* Factorization method for transmutations in the theory of differential equations // Vestnik of Samara State University. 2008. V. 8/1 (67). P. 237–248.
35. *Sitnik S.M.* Some problems in the modern theory of transmutations // Spectral theory and differential equations (STDE – 2012). International conference in honor of Vladimir A. Marchenko's 90th birthday. August 20–24, 2012, Kharkiv, Ukraine. B.Verkin Institute for low temperature and engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, V.Karazin Kharkiv National University. Book of abstracts. Kharkiv, 2012. P. 101–102.
36. *Ozaktas H., Zalevsky Z., Kutay M.* The Fractional Fourier Transform: with Applications in Optics and Signal Processing. Wiley, 2001.
37. *Osipov V.F., Abzhandadze Z.L.* Fourier-Frenel transform and some of its applications. S.-Peter., 2000.
38. *Karp D.B., Sitnik S.M.* A?iaia Fractional Hankel transform and its applications in mathematical physics // Preprint. 1994. Vladivostok, 24 p.
39. *Sitnik S.M.* On explicit realizations of fractional powers of Bessel operator // Doklady Adygskoi International Academy of Sciences. 2010. V. 12. № 2. P. 69–75.

40. *Sitnik S.M.* Fractional integrodifferentiation for the Bessel differential operator // Equations of mixed type and related problems. Nalchik, 2004. P. 163–167.
41. *Kiselev E.A., Minin L.A., Novikov I. Ya., Sitnik S.M.* On Riesz constants for some systems of integer translations // Math. Notes. 2014. V. 96. № 2. P. 239–250.
42. *Zhuravlev M.V., Kiselev E.A., Minin L.A., Sitnik S.M.* Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Sciences, Springer. 2011. V. 173. № 2. P. 231–241.
43. *Zhuravlev M.V., Minin L.A., Sitnik S.M.* On numerical analysis of interpolation by integer translations of the Gaussian function // Scientific Bulletin of Belgorod State University. 2009. V. 13 (68). № 17/2. P. 89–99.
44. *Sitnik S.M., Timashov A.S., Uschakov S.N.* Finite dimensional approximations in problems of quadratic interpolation // Scientific Bulletin of Belgorod State University. 2015. V. 17 (214). № 40. P. 130–142.
45. *Karp D.B., Sitnik S.M.* Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric function // Journal of Approximation Theory. Elsevier, Amsterdam. 2009. V. 161. P. 337–352.
46. *Karp D.B., Sitnik S.M.* Log-convexity and log-concavity of hypergeometric-like functions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. Elsevier, Amsterdam. 2010. V. 364. P. 384–394.

Received 8 February 2016.

Ryzhkova Elena Valeryevna, Voronezh Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Mathematics and System Modelling Department, e-mail: dikareva_ev@mail.ru

Sitnik Sergei Michailovich, Voronezh Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematics and System Modelling Department, e-mail: mathsms@yandex.ru

УДК 517.956.225

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-108-116

ТЕОРЕМА ОБ УСТРАНИМОЙ ОСОБЕННОСТИ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НА ДВУМЕРНОМ СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

© Д. В. Савастеев

В статье доказывается теорема об устранимой особенности для гармонической функции на двумерном стратифицированном множестве. Показывается, что гармоническая и ограниченная функция, определенная на двумерном стратифицированном множестве, за исключением нульмерных стратов, может быть продолжена на все стратифицированное множество с сохранением гармоничности. Эта теорема играет важную роль при доказательстве разрешимости задачи Дирихле для уравнения Лапласа на стратифицированном множестве и реализации метода Пуанкаре–Перрона на стратифицированном множестве. Для доказательства используются аналоги теоремы о дивергенции и неравенства Харнака на стратифицированном множестве. В статье приведены основные сведения из теории дифференциальных уравнений на стратифицированных множествах, которые необходимы для формулировки и доказательства результата.

Ключевые слова: стратифицированное множество; теорема об устранимой особенности; гармоническая функция.