40. *Sitnik S.M.* Fractional integrodifferentiation for the Bessel differential operator // Equations of mixed type and related problems. Nalchik, 2004. P. 163–167.

41. *Kiselev E.A., Minin L.A., Novikov I. Ya., Sitnik S.M.* On Riesz constants for some systems of integer translations // Math. Notes. 2014. V. 96. № 2. P. 239–250.

42. *Zhuravlev M.V., Kiselev E.A., Minin L.A., Sitnik S.M.* Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Sciences, Springer. 2011. V. 173. № 2. P. 231–241.

43. *Zhuravlev M.V., Minin L.A., Sitnik S.M.* On numerical analysis of interpolation by integer translations of the Gaussian function // Scientific Bulletin of Belgorod State University. 2009. V. 13 (68). № 17/2. P. 89–99.

44. *Sitnik S.M., Timashov A.S., Uschakov S.N.* Finite dimensional approximations in problems of quadratic interpolation // Scientific Bulletin of Belgorod State University. 2015. V. 17 (214). № 40. P. 130–142.

45. *Karp D.B., Sitnik S.M.* Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric function // Journal of Approximation Theory. Elsevier, Amsterdam. 2009. V. 161. P. 337–352.

46. *Karp D.B., Sitnik S.M.* Log-convexity and log-concavity of hypergeometric–like functions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. Elsevier, Amsterdam. 2010. V. 364. P. 384–394.

Received 8 February 2016.

Ryzhkova Elena Valeryevna, Voronezh Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Mathematics and System Modelling Department, e-mail: dikareva_ev@mail.ru

Sitnik Sergei Michailovich, Voronezh Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematics and System Modelling Department, e-mail: mathsms@yandex.ru

УДК 517.956.225
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-108-116

ТЕОРЕМА ОБ УСТРАНИМОЙ ОСОБЕННОСТИ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НА ДВУМЕРНОМ СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

© Д. В. Савастеев

В статье доказывается теорема об устранимой особенности для гармонической функции на двумерном стратифицированном множестве. Показывается, что гармоническая и ограниченная функция, определенная на двумерном стратифицированном множестве, за исключением нульмерных стратов, может быть продолжена на все стратифицированное множество с сохранением гармоничности. Эта теорема играет важную роль при доказательстве разрешимости задачи Дирихле для уравнения Лапласа на стратифицированном множестве и реализации метода Пуанкаре–Перрона на стратифицированном множестве. Для доказательства используются аналоги теоремы о дивергенции и неравенства Харнака на стратифицированном множестве. В статье приведены основные сведения из теории дифференциальных уравнений на стратифицированных множествах, которые необходимы для формулировки и доказательства результата.

Ключевые слова: стратифицированное множество; теорема об устранимой особенности; гармоническая функция.

Введение

Теорема об устранимой особенности (или точнее, об устранимом множестве) является классическим результатом теории гармонических функций. Она утверждает, что если функция u – гармоническая и ограниченная в области $G \setminus E$, $E \subset G$, то при определенных условиях на множество E функцию u можно продолжить на все G с сохранением гармоничности. Необходимым и достаточным условием на множество E является условие так называемой нулевой емкости. Например, этим условием обладают все многообразия размерности $k \leq d-2$, где d – размерность пространства, или объединение конечного числа таких многообразий, пусть даже разной размерности. В двумерном случае это означает, что любое объединение конечного числа точек является устранимым множеством.

В случае так называемых стратифицированных множеств теорема об устранимой особенности оказывается чрезвычайно полезна. Она играет важную роль при доказательстве разрешимости задачи Дирихле для уравнения Лапласа на стратифицированном множестве. Связано это с тем, что метод Пуанкаре–Перрона на стратифицированном множестве удается реализовать не на всем множестве. На оставшейся части множества допускается наличие особенностей. При этом оставшаяся часть множества являет собой объединение конечного числа многообразий размерности $k \leq n-2$, где n – размерность стратифицированного множества. А значит, возникает естественная гипотеза о том, что все это множество является устранимым. Доказательству этой гипотезы для двумерного случая посвящена настоящая статья.

1. Основные понятия

В этом параграфе мы приведем основные понятия теории стратифицированных множеств. Мы ограничимся лишь кратким описанием. Подробные определения см. в [1].

1.1. Стратифицированное множество

Под стратифицированным множеством будем понимать тройку

$$(\Omega, \Sigma, \partial\Omega).$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – связное ограниченное множество с индуцированной из $\mathbb{R}^d$ топологией и метрикой. Σ – разбиение Ω на конечное число многообразий различной размерности. Каждое такое многообразие мы будем называть стратом и обозначать σ_{kj}. В обозначении: k – размерность страта ($k=0,\dots,K$), j – порядковый номер ($j=1,\dots,J(k)$). Мы также допускаем использование σ_k для обозначения произвольного страта размерности k. Множество $\partial\sigma_k = \bar{\sigma}_k \setminus \sigma_k$ мы будем называть границей страта. Требования на гладкость стратов и их границы мы приведем позже.

Для разбиения Σ предполагается выполнение следующих условий:

1. никакие два страта не пересекаются, $\sigma_{kj} \cap \sigma_{mi} = \emptyset$;

2. граница каждого страта представима в виде объединения некоторых других стратов из Σ, $\partial\sigma_{kj} = \bigcup_{mi} \sigma_{mi}$.

Если $\sigma_k \subset \partial\sigma_m$, то будем называть σ_k гранью σ_m, говорить, что σ_m примыкает к σ_k, и записывать $\sigma_k \prec \sigma_m$. Из свойств 1 и 2 следует, что любая грань одного страта и любая грань другого либо не пересекаются, либо совпадают. Если страт не является ничьей гранью, то такой страт мы называем свободным. Любой страт максимальной размерности является свободным. Размерностью стратифицированного множества будем называть максимальную размерность его стратов. Заметим, что размерность стратифицированного множества вообще говоря не совпадает с размерностью пространства $\mathbb{R}^d$.

Далее, $\partial\Omega$ из тройки – это подмножество Ω. Предполагается выполнение следующих условий:

1. $\partial\Omega$ представимо в виде объединения некоторого числа стратов из Σ, $\partial\Omega = \bigcup_{mi} \sigma_{mi}$;
2. $\partial\Omega$ замкнуто;
3. множество $\Omega_0 = \Omega \setminus \partial\Omega$ – связное, и $\bar{\Omega}_0 = \Omega$.

Множество $\partial\Omega$ мы будем называть границей стратифицированного множества.

Приведем теперь условия на гладкость стратов.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $M_k \subset \mathbb{R}^d$ – произвольное k-мерное многообразие. Будем называть M_k плоским, если существует такое линейное многообразие $L_k \subset \mathbb{R}^d$ размерности k, что $M_k \subset L_k$.

Итак, будем предполагать, что каждый внутренний страт σ_k (т.е. такой, что $\sigma_k \in \Omega_0$) является плоским. А каждый граничный страт – кусочно-гладкий. На этом определение стратифицированного множества окончено.

Так как под стратифицированным множеством мы понимаем тройку, то изменение хотя бы одного элемента тройки порождает новое стратифицированное множество. Например, при фиксированном Ω можно по разному выбрать разбиение Σ. Аналогично, при фиксированных Ω и Σ можно по разному выбрать границу $\partial\Omega$.

Всюду далее для краткости мы будем использовать символ Ω для обозначения стратифицированного множества. При этом мы предполагаем, что с Ω ассоциировано некоторое разбиение Σ и граница $\partial\Omega$.

1.2. Стратифицированное подмножество

Пусть G – область в $\mathbb{R}^d$ с кусочно-гладкой границей. Если $G \cap \Omega_0$ – связное, то положим $\Omega' = \bar{G} \cap \Omega$. Будем рассматривать Ω' как самостоятельное стратифицированное множество. Его стратами будут пересечения G и ∂G со стратами Ω. В качестве границы можно выбрать

$$\partial\Omega' = (\partial G \cap \Omega) \cup (G \cap \partial\Omega).$$

О п р е д е л е н и е 2. Мы будем называть Ω' стратифицированным подмножеством множества Ω.

Чаще всего мы будем рассматривать случай, когда множество G является шаром в $\mathbb{R}^d$.

О п р е д е л е н и е 3. Будем называть радиус допустимым, если соответствующий шар с центром в точке x пересекает только те страты, для которых x является граничной точкой.

О п р е д е л е н и е 4. Стратифицированное множество, образованное пересечением с шаром допустимого радиуса, будем называть стратифицированным шаром. Пересечение стратифицированного множества со сферой будем называть – стратифицированной сферой.

1.3. Дифференциальный оператор

Рассмотрим функцию $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Положим $C_\sigma(\Omega_0)$ – пространство функций на Ω_0 таких, что

$$\forall \sigma_k \in \Omega_0 : \; u_k \in C(\sigma_k),$$

где u_k – сужение u на σ_k. Положим $C^2_\sigma(\Omega_0)$ – пространство функций u на Ω таких, что

$$\forall \sigma_k \in \Omega_0 : \; u_k \in C^2(\sigma_k),$$

а градиент ∇u_k непрерывен вплоть до каждой $(k-1)$-мерной грани страта σ_k. Заметим, что от функций $u \in C^2_\sigma(\Omega_0)$ не требуется непрерывности целиком на Ω_0. Поэтому в конечном итоге мы будем рассматривать класс $C(\Omega) \cap C^2_\sigma(\Omega_0)$.

Пусть x – точка k-мерного страта σ_k, который является гранью некоторого $(k+1)$-мерного страта σ_{k+1}. Обозначим через ν_i – набор нормалей в точке x по направлению примыкающего страта σ_{k+1}. Т.к. страт σ_{k+1} может примыкать к σ_k более одного раза с разных сторон, то таких нормалей может быть несколько.

О п р е д е л е н и е 5. Каждую нормаль ν_i по всем примыкающим σ_{k+1} будем называть примыкающим направлением в точке x.

Введем на каждом страте $\sigma_k \in \Omega_0$ следующий дифференциальный оператор

$$\begin{aligned} &\Delta_p u = \Delta u, && \text{при } k=2, \\ &\Delta_p u = \sum_{\nu_i} \frac{\partial u}{\partial \nu_i}, && \text{при } k=1, \\ &\Delta_p u = 0, && \text{при } k=0. \end{aligned}$$

Этот оператор является аналогом оператора Лапласа на стратифицированном множестве (см. подробнее в [1]). Функцию $u \in C(\Omega) \cap C^2_\sigma(\Omega_0)$, для которой

$$\Delta_p u = 0$$

на Ω_0, будем называть гармонической.

Введем на каждом свободном страте 2-мерную меру, порожденную пространством $\mathbb{R}^d$. Эту меру мы будем обозначать μ. Тогда для любого подмножества $G \in \Omega_0$ его мера будет равна сумме мер пересечений с каждым свободным стратом

$$\mu(G) = \sum_j \mu(G \cap \sigma_{2j}).$$

Аналогично введем поверхностную меру для поверхности S как сумму длин одномерных пересечений S с каждым свободным стратом. Эту меру будем обозначать μ_s. В случае, когда S – сфера допустимого радиуса r, поверхностную меру будем обозначать s_r.

Имеет место следующая теорема (см. доказательство в [1]).

Т е о р е м а 1. Пусть Ω – двумерное стратифицированное множество, а $u \in C^2_\sigma(\Omega_0)$. Пусть G – область в $\mathbb{R}^d$, не пересекающая границу $\partial\Omega$ и все нульмерные страты. Тогда

$$\int\limits_{G \cap \Omega_0} \Delta_p u \, d\mu = \int\limits_{\partial G \cap \Omega_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\mu_s,$$

где $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ – производная функции u по внешней нормали.

Также нам понадобится неравенство Харнака (см. доказательство в [4]).

Т е о р е м а 2. Пусть Ω – двумерное стратифицированное множество, а $u \in C^2_\sigma(\Omega_0)$. Пусть H – подкомпакт в Ω_0, не содержащий нульмерные страты. Тогда существует такая константа $C > 0$, что для любой гармонической функции u на Ω_0 выполняется неравенство

$$\sup_H u < C \inf_H u.$$

2. Теорема об устранимой особенности

В классическом случае теорема об устранимой особенности обычно доказывается (см. например в [2]) при помощи разрешимости задачи Дирихле в шаре для уравнения Лапласа. Для случая стратифицированного множества разрешимость в шаре в общем виде не доказана. Наоборот, как было отмечено выше, мы хотим использовать теорему об устранимой особенности для получения разрешимости. Поэтому доказательство теоремы об устранимой особенности полностью отличается от его классического аналога.

Рассмотрим двумерное стратифицированное множество Ω. Для формулировки теоремы об устранимой особенности нам понадобится ограничение на структуру стратифицированного множества.

О п р е д е л е н и е 6. Будем называть стратифицированное множество Ω усиленно прочным, если для любого нульмерного страта X существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой окрестности U в Ω радиуса меньше ε и с центром в точке X множество $U \setminus X$ связное.

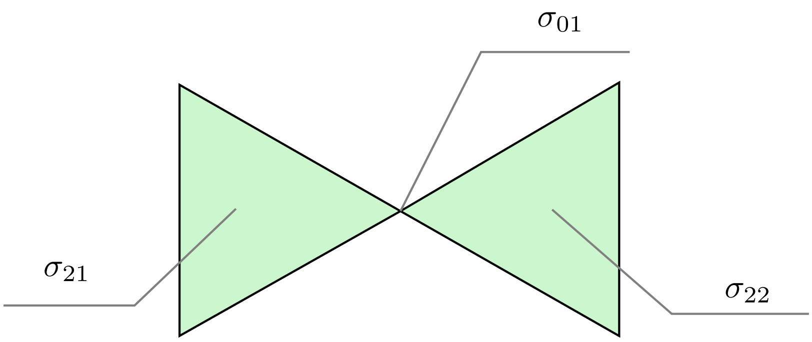

Рис. 1: Пример нарушения прочности множества

Требование усиленной прочности существенно используется в доказательстве (см. замечание 1). Кроме того, это требование обусловлено не только формальными, но и физическими соображениями. Рассмотрим, например, систему из двух треугольников, как на рис. 1. Пусть эта система находится в тепловом равновесии. Тогда функция температуры будет гармонической на каждом треугольнике. Очевидно, что тепловой обмен между двумя этими треугольниками невозможен, т. к. зона контакта между ними имеет нулевую площадь. Т. е. по сути эти два треугольника являются независимыми. Требование непрерывности на общей вершине сделало бы задачу переопределенной.

Л е м м а 1. Пусть Ω – двумерное усиленно прочное стратифицированное множество. Тогда все свободные страты имеют размерность 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нульмерный страт не может быть свободным, т.к. в противном случае он будет обособленным, что противоречит свяхности Ω. Предположим, что есть свободные одномерные страты. Рассмотрим множество I всех таких одномерных стратов и их вершин. Если к I не примыкает ни один двумерный страт, то I является компонентой связности Ω, что противоречит связности Ω.

Рассмотрим точку X – нульмерный страт, к которому примыкают хотя бы один двумерный страт σ_2 и хотя бы один свободный одномерный страт σ_1. Тогда пересечение проколотой окрестности $U \setminus \{X\}$ с Ω будет несвязным. Что противоречит усиленной прочности Ω. $\square$

Т е о р е м а 3. [об устранимой особенности] Пусть Ω – двумерное усиленно прочное стратифицированное множество. Пусть функция u определена во всех точках Ω_0, за исключением быть может нульмерных стратов, ограниченная и гармоническая во всех точках определения. Тогда ее можно доопределить на всем Ω_0 так, что u будет гармонической на всем Ω_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения оператора $\Delta_p u$ следует, что для доказательства теоремы достаточно показать только возможность продолжения функции u по непрерывности на все нульмерные страты. Мы разобьем доказательство на две леммы.

Л е м м а 2. Пусть $S_r(X)$ – семейство сфер допустимых радиусов с центром в точке X. Существует такая константа $C(X)$, что для любой сферы допустимого радиуса $S_r(X)$

$$\frac{1}{r\,\omega}\int\limits_{S_r(X)} u\,ds_r = C(X),$$

где ds_r – элемент площади сферы S_r, а ω – площадь единичной стратифицированной сферы для точки X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим шаровой слой $B(R,r)$, образованный двумя сферам радиусов R и r. Т. к. $B(R,r)$ лежит на ненулевом расстоянии от точки X и не содержит никаких других особых точек, то функция u принадлежит классу $C(B(R,r)\cap C^2_\sigma(B(R,r))$. Тогда выполняется теорема о дивергенции – поток поля $p\nabla u$ через $\partial B(R,r)$ равен нулю. Так как граница $\partial B(R,r)$ состоит из двух стратифицированных сфер, то существует такая константа $C'(X)$, что

$$\int\limits_{S_r(X)} p\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds_r = C'(X).$$

Далее имеет место формула (см. в [3])

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r\,\omega}\int\limits_{S_r(X)} u\,ds_r\right) = \frac{1}{r\,\omega}\int\limits_{S_r(X)} p\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds_r.$$

Подставляя в нее значение потока и интегрируя по r, получим

$$\frac{1}{r\,\omega}\int\limits_{S_r(X)} u\,ds_r = \frac{1}{\omega}C'(X)\cdot\ln(r) + C(X).$$

Так как функция u по условию теоремы ограниченная, то левая часть равенства ограниченная. Так как $\ln(r)$ неограниченно убывает, то равенство будет выполняться только при $C'(X)=0$. Следовательно

$$\frac{1}{r\,\omega}\int\limits_{S_r(X)} u\,ds_r = C(X).$$

Лемма доказана. $\square$

Теперь мы хотим показать, что предел функции u в точке x существует и равен $C(X)$. Тогда, доопределив $u(X)=C(X)$, получим непрерывную в точке X функцию.

Л е м м а 3. Предел функции u в точке X равен $C(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Рассмотрим все возможные последовательности точек x_i: $x_i\in\Omega_0\setminus\{X\}$, $x_i\to X$. Так как функция u ограниченная, то все частичные пределы $u(x_i)$ ограниченные. Рассмотрим инфимум и супремум всех частичных пределов функции $u(x_i)$, обозначим их m и M соответственно. Мы хотим показать, что $m=M=C(X)$.

У т в е р ж д е н и е 1. $C(X)=m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что расстояние от каждого x_i до X меньше, чем половина допустимого радиуса в точке X. Построим систему шаров допустимого радиуса B_i с центрами в точке X и радиусами R_i

$$R_i = 2 \cdot \operatorname{dist}(x_i, X).$$

Так как все шары имеют один и тот же центр, а их радиусы все допустимые, то каждый шар можно отобразить с помощью гомотетии на некоторый шар B' допустимого радиуса с центром в точке X. Тогда все точки x_i перейдут в некоторые точки x_i'. По построению существует такой подкомпакт $H \subset B'$, который не содержит точку X, и все x_i' лежат в H.

Построим систему функций u_i' на B'

$$u_i'(x') = u(x) - \inf_{B_i} u,$$

где x пробегает все множество B_i, а x' – образ точки $x \in B_i$ при отображении $B_i \to B'$. Тогда все u_i' будут гармонические и неотрицательные на B'. По построению $u_i'(x_i') \to 0$. Тогда по неравенству Харнака функции u_i' сходятся равномерно к нулю на множестве H. Выбирая теперь на H некоторую сферу S' с центром в точке X, получим, что среднее значение функций u_i' на S' стремится к нулю.

Так как отображение $B_i \to B'$ являлось гомотетией с центром в точке X, то прообразами S' будут некоторые сферы допустимого радиуса S_i. При этом среднее значение функции по сфере при отображении $B_i \to B'$ не меняется

$$\frac{1}{r\,\omega}\int\limits_{S'} u_i'\, ds_r = \frac{1}{r\,\omega}\int\limits_{S_i} u\, ds_r - \frac{1}{r\,\omega}\int\limits_{S_i} \inf_{B_i} u\, ds_r.$$

Левая часть равенства стремится к нулю. Первое слагаемое правой части равно $C(X)$ при любом i. Второе слагаемое

$$-\frac{1}{r\,\omega}\int\limits_{S_i} \inf_{B_i} u\, ds_r = -\inf_{B_i} u \cdot \frac{1}{r\,\omega}\int\limits_{S_i} ds_r = -\inf_{B_i} u \to -m.$$

Следовательно

$$C(X) = m.$$

□

У т в е р ж д е н и е 2. $C(X) = M$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства достаточно перейти к функции $-u$. Эта функция также будет гармонической и ограниченной, среднее значение по сферам для нее будет равно $-C(X)$, а инфимум по всем частичным пределам будет равен $-M$. □

Итак, мы показали, что $m = M = C(X)$. Это означает, что предел функции u в точке X существует и равен $C(X)$. Лемма, а вместе с ней и теорема, доказаны. □

З а м е ч а н и е 1. Требование усиленной прочности существенно.

В самом деле, пусть Ω – стратифицированное множество, составленное из двух треугольников на плоскости, которые примыкают друг к другу только по одной общей вершине (обозначим ее через X). Положим на одном треугольнике $u \equiv 0$, а на другом $u \equiv 1$. Тогда

$$u \in C(\Omega \setminus \{X\}) \cap C^2_\sigma(\Omega \setminus \{X\}).$$

Выберем $\partial\Omega = \emptyset$. Тогда функция u будет гармонической всюду, кроме точки X, и ограниченной. Однако доопределить ее даже по непрерывности в точке X не удается.

З а м е ч а н и е 2. Для выбранного метода доказательства ограничение на размерность стратифицированного множества существенно.

В двумерном случае все особенности изолированные. Это значит, что каждый нульмерный страт можно окружить сферой допустимого радиуса так, что все точки сферы будут на ненулевом расстоянии от всех нульмерных стратов, в которых функция имеет особенность. Этот факт обеспечивает нам возможность применения теоремы 1. Уже в трехмерном случае особенности могут быть на одномерных стратах. И любая сфера допустимого радиуса в точке одномерного страта будет пересекать его же. Поэтому применение теоремы 1 становится недопустимым.

Кроме того, мы использовали неравенство Харнака, а оно тоже доказано только для двумерного случая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах // М.: Физматлит, 2005. 272 с.

2. *Уэрмер Дж.* Теория потенциала // М.: Мир, 1980. 136 с.

3. *Ощепкова С.Н., Пенкин О.М.* Теорема о среднем для эллиптического оператора на стратифицированном множестве // Матем. заметки, 2007. Т. 81. Вып. 3. С. 417–426.

4. *Беседина С.В.* Неравенство Харнака для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве // Вестник Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2004. № 1. С. 77–81.

Поступила в редакцию 23 января 2016 г.

Савастеев Денис Владимирович, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа и операторных уравнений, e-mail: savasteev@gmail.com

UDC 517.956.225
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-108-116

THE REMOVABLE SINGULARITY THEOREM FOR HARMONIC FUNCTION ON A TWO-DIMENSIONAL STRATIFIED SET

© **D. V. Savasteev**

We prove the removable singularity theorem for harmonic function on a two-dimensional stratified set. It is shown that harmonic and bounded function defined on the two-dimensional stratified set, except the zero-dimensional strata, is harmonic extendable over all stratified set. This theorem plays an important role in the proof of the solvability of the Dirichlet problem for the Laplace equation on stratified set and in the implement of Poincar?-Perron method on a stratified set. In proof we use analogues of divergence theorem and Harnack's inequality on a stratified set. We provide basic information from the theory of differential equations on the stratified sets, which are necessary for the formulation and proof of main result.

Key words: stratified set; removable singularity theorem; harmonic function.

REFERENCES

1. *Pokorny Y.V., Penkin O.M.* Differential Equations on Geometric Graphs // M: Physmathlit, 2005, 272 pp.
2. *Wermer J.* Potential Theory // Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1974, 136 pp.
3. *Oshchepkova S.N., Penkin O.M.* The mean-value theorem for elliptic operators on stratified sets. // Mathematical Notes, 2007. V. 81. № 3. P. 365–372.
4. *Besedina S.V.* Large Harnack's inequality on stratify set // Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2004. № 1. P. 77–81.

Received 23 January 2016.

Savasteev Denis Vladimirovich, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Post-graduate Student, Department of Operational Equation Studies and Functional Analysis, e-mail: savasteev@gmail.com

УДК 517.983
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-116-121

ОБ ОБРАТИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ СОБОЛЕВА–БЕСОВА

© **В. М. Тюрин**

Изучается одновременная обратимость (корректность) линейных дифференциальных операторов в частных производных в функциональных пространствах типа Бесова.
Ключевые слова: пространства Соболева–Бесова; корректность; функциональные пространства.

Обозначения. Пусть X — произвольное банахово пространство; $L^p = L^p(\mathbb{R}^n, X)$ — пространство Лебега сильно измеримых (по Бохнеру) функций $u:\mathbb{R}^n \to X$ $(p>1, n\in\mathbb{N})$ с нормой $||u||_{10}$; $M^p = M^p(\mathbb{R}^n, X)$ — пространство Степанова сильно измеримых функций $u:\mathbb{R}^n \to X$, с конечной нормой

$$||u||_{20} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{K(x)} ||u(x)||^p dx\right)^{1/p},$$

$K(x)$ — единичный куб в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $x\in\mathbb{R}^n$ [1](с. 78), [2](с. 165), $||\cdot||$ — норма в X; $C = C(\mathbb{R}^n, X)$ — пространство непрерывных ограниченных функций $u:\mathbb{R}^n\to X$ с нормой равной $||u||_C = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} ||u(x)||$; $W^m_{1p} = W^m_{1p}(\mathbb{R}^n, X)$ — пространство Соболева функций $u\in L^p$, имеющих обобщенные производные $D^\alpha u \in L^p$ $(|\alpha|\le m)$, при этом норма

$$||u||_{1m} = \sum_{|\alpha|\le m} ||D^\alpha u||_{10} < \infty,$$