REFERENCES

1. *Pokorny Y.V., Penkin O.M.* Differential Equations on Geometric Graphs // M: Physmathlit, 2005, 272 pp.
2. *Wermer J.* Potential Theory // Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1974, 136 pp.
3. *Oshchepkova S.N., Penkin O.M.* The mean-value theorem for elliptic operators on stratified sets. // Mathematical Notes, 2007. V. 81. № 3. P. 365–372.
4. *Besedina S.V.* Large Harnack's inequality on stratify set // Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2004. № 1. P. 77–81.

Received 23 January 2016.

Savasteev Denis Vladimirovich, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Post-graduate Student, Department of Operational Equation Studies and Functional Analysis, e-mail: savasteev@gmail.com

УДК 517.983
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-116-121

# ОБ ОБРАТИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ СОБОЛЕВА–БЕСОВА

© **В. М. Тюрин**

Изучается одновременная обратимость (корректность) линейных дифференциальных операторов в частных производных в функциональных пространствах типа Бесова.
*Ключевые слова:* пространства Соболева–Бесова; корректность; функциональные пространства.

Обозначения. Пусть $X$ — произвольное банахово пространство; $L^p = L^p(\mathbb{R}^n, X)$ — пространство Лебега сильно измеримых (по Бохнеру) функций $u : \mathbb{R}^n \to X$ $(p > 1, n \in \mathbb{N})$ с нормой $||u||_{10}$; $M^p = M^p(\mathbb{R}^n, X)$ — пространство Степанова сильно измеримых функций $u : \mathbb{R}^n \to X$, с конечной нормой

$$||u||_{20} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left( \int\limits_{K(x)} ||u(x)||^p dx \right)^{1/p},$$

$K(x)$ — единичный куб в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ [1](с. 78), [2](с. 165), $||\cdot||$ — норма в $X$; $C = C(\mathbb{R}^n, X)$ — пространство непрерывных ограниченных функций $u : \mathbb{R}^n \to X$ с нормой равной $||u||_C = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} ||u(x)||$; $W^m_{1p} = W^m_{1p}(\mathbb{R}^n, X)$ — пространство Соболева функций $u \in L^p$, имеющих обобщенные производные $D^\alpha u \in L^p$ $(|\alpha| \le m)$, при этом норма

$$||u||_{1m} = \sum_{|\alpha| \le m} ||D^\alpha u||_{10} < \infty,$$

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $m \in \mathbb{Z}_+$, [3](с. 60), [4](с. 37). Пространства Бесова $B^{ts}_{1pk} = B^{ts}_{1pk}(\mathbb{R}^n, X)$ функций $u \in L^p$ зададим формулой

$$||u||_{B^{ts}_{1pk}} = ||u||_{10} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{t} \sum_{|\alpha| \le m} \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{\left|\left| \sum\limits_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} C^{j-1}_{k-1} \triangle(y-x) D^\alpha u\big(x + (j-1)(y-x)\big) \right|\right|^p}{|x-y|^{n+p\gamma}} dxdy \right)^{1/p} = \quad (1)$$

$$= ||u||_{10} + \langle u \rangle^{ts}_{1pk} < \infty.$$

Введем пространства Бесова–Степанова $B^{ts}_{2pk} = B^{ts}_{2pk}(\mathbb{R}^n, X)$, состоящие из функций $u \in M^p$, норма которых находится по формуле

$$||u||_{B^{ts}_{2pk}} = ||u||_{20} + \langle u \rangle^{ts}_{2pk} < \infty. \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) $s = m + \gamma$, $0 < \gamma < 1$, $t \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $C^{j-1}_{k-1}$ — биномиальные коэффициенты. В частности, пространства $B^{1s}_{1p}$ имеют норму

$$||u||_{B^{1s}_{1p}} = ||u||_{10} + \sum_{|\alpha| \le m} \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{\big|\big|\triangle(y-x) D^\alpha u(x)\big)\big|\big|^p}{|x-y|^{n+p\gamma}} dxdy \right)^{1/p},$$

а пространства $B^{1\gamma}_{1p}$ — норму

$$||u||_{B^{1\gamma}_{1p}} = ||u||_{1p} + \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{||u(x) - u(y)||^p}{|x-y|^{n+p\gamma}} dxdy \right)^{1/p} = ||u||_{1p} + \langle u \rangle^{1\gamma}_{1p}.$$

Норма пространств $B^{1s}_{2p}$ это

$$||u||_{B^{1s}_{2p}} = ||u||_{20} + \sum_{|\alpha| \le m} \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{\big|\big|\triangle(y-x) D^\alpha u(x)\big)\big|\big|^p}{|x-y|^{n+p\gamma}} dxdy \right)^{1/p} < \infty.$$

Пространство $B^{1\gamma}_{2p}$ имеет норму $||u||_{2p} + \langle u \rangle^{1\gamma}_{1p}$.

Отметим, что норма (1) эквивалентна норме пространства Соболева–Бесова [5](с. 228)

$$||u||_{1m} + \langle u \rangle^{ts}_{1pk}.$$

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $P_i : B^{ts}_{ipk} \to B^{t\gamma}_{ip}$ $(i = 1, 2)$ в частных производных

$$P_i u = \sum_{|\alpha| \le m} A\alpha D^\alpha u, \quad A\alpha \in C(\mathbb{R}^n, End\, X).$$

Оператор $P_i : B^{ts}_{ipk} \to B^{t\gamma}_{ip}$ назовем обратимым (корректным), если существует такая положительная постоянная $k_i$, не зависящая от функции $u$, что имеет место неравенство

$$||u||_{B^{ts}_{ipk}} \le k_i ||P_i u||_{B^{t\gamma}_{ip}} \quad (3)$$

для любой функции $u \in B^{ts}_{ipk}$.

Пусть $\varphi_{_T}(x,\xi):\mathbb{R}^n \to [0,1]$ — гладкая финитная функция с носителем в шаре $B(\xi,2T) < \mathbb{R}^n$ такая, что $\varphi_{_T}(x,\xi) = 1$ при $x \in B(\xi,T)$ и $|D^\alpha \varphi_{_T}| \le b_0 T^{-1}$ ($b_0$ не зависит от параметра $T > max(n,2)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \neq 0$).

Л е м м а 1. Для любой функции $u \in B^{1\gamma}_{1p}$ справедливо неравенство

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{||\varphi_{_T}(x\xi)u(x) - \varphi_{_T}u(y,\xi)u(y)||^p}{|x-y|^{n+p\gamma}}dxdy\right)^{1/p} \le$$

$$\le a\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{||u(x)-u(y)||^p}{|x-y|^{n+p\gamma}}dxdy\right)^{1/p} + aT^{-1}||u||_{10}.$$

Положительная постоянная $a$ не зависит от $u, T, \xi$.

Л е м м а 2. Пусть $u \in B^{ts}_{1pk}$. Тогда имеет место следующая оценка

$$S_{_T} = \sum_{k=1}^{t}\sum_{|\alpha|\le m}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{\left|\left|\sum\limits_{j=1}^{k} \begin{matrix}(-1)^{j+1}C^{j-1}_{k-1}\triangle(y-x)\varphi_{_T}\big(x+(j-1)(y-x)\big)\times \\ \times Pu\big(x+(j-1)(y-x)\big)\end{matrix}\right|\right|^p}{|y-x|^{n+p\gamma}}dxdy\right)^{1/p} \le \tag{4}$$

$$\le b_1 T^{-\gamma}||Pu||_{10} + b_2\langle Pu\rangle^{1\gamma}_{1p}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В интеграле (4) сделаем замену переменных $x = (1-j)z_j + jw_j$, $y = (2-j)z_j + (j-1)w_j$, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(z_j,w_j)} = a(j) \neq 0$. Получим, используя лемму 1.

$$S_{_T} = a(j)\sum_{k=1}^{t}\sum_{|\alpha|\le m}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{||\varphi_{_T}(z_j)Pu(z_j) - \varphi_{_T}(w_j)Pu(w_j)||^p}{|x-y|^{n+p\gamma}}dxdy\right)^{1/p} \le \tag{5}$$

$$\le b_1 T^{-\gamma}||Pu||_{10} + b_2\langle Pu\rangle^{1\gamma}_{10}.$$

Постоянные $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ не зависят от функции $u$ и $T$. Лемма доказана.

Т е о р е м а 1. *Оператор* $P_1 : B^{ts}_{1pk} \to B^{1\gamma}_{1p}$ *корректен, если и только если корректен оператор* $P_1 : B^{1s}_{1p} \to B^{1\gamma}_{1p}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что оператор $P_1 : B^{ts}_{1pk} \to B^{1\gamma}_{1p}$ корректен, а оператор $P_1 : B^{1s}_{1p} \to B^{1\gamma}_{1p}$ не является таковым. Тогда можно указать такую последовательность функций $u_\nu \in B^{1s}_{1p}$, что

$$\lim_{\nu\to\infty}||P_1 u_\nu||_{B^{1\gamma}_{1p}} = 0, \quad \lim_{\nu\to\infty}||u_\nu||_{B^{1s}_{1p}} = 1.$$

Так как $\varphi_{_T}u$ удовлетворяет уравнению

$$P_1(\varphi_{_T}u) = \varphi_{_T}P_1u + Q(u,\varphi_{_T}) \tag{6}$$

и $\varphi_{_T}u \in B^{ts}_{1pk}$, то из (6) имеем

$$\begin{gathered} ||\varphi_{_T}u_\nu||_{B^{ts}_{1pk}} \le k_1||\varphi_{_T}P_1u_\nu||_{B^{1\gamma}_{1p}} + k_2||Q(u_\nu,\varphi_{_T})||_{B^{1\gamma}_{1p}}, \\ ||Q(u_\nu,\varphi_{_T})||_{B^{1\gamma}_{1p}} \le a_1T^{-1}||u_\nu||_{1m} + a_2T^{-1}\langle u_\nu\rangle^{1\gamma}_{1p}. \end{gathered} \tag{7}$$

Постоянные $a_1>0$, $a_2>0$ не зависят от $u,T$ и $\xi$. Из (7) следует

$$\lim_{T\to\infty}||Q(u_\nu,\varphi_T)||_{B^{1\gamma}_{1p}}=0. \tag{8}$$

С помощью (4) и (5) оценим разность $||\varphi_T P_1 u_\nu||_{B^{t\gamma}_{1p}}-||P_1 u_\nu||_{B^{t\gamma}_{1p}}$:

$$\begin{gathered}\left|\,||\varphi_T P_1 u_\nu||_{B^{t\gamma}_{1p}}-||P_1 u_\nu||_{B^{t\gamma}_{1p}}\right|\le||\varphi_T P_1 u_\nu-P_1 u_\nu||_{10}+\\ +\sum_{k=1}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{\left|\left|\sum\limits_{j=1}^{k}\begin{matrix}(-1)^{j+1}C_{k-1}^{j-1}\triangle(y-x)(\varphi_T P_1 u_\nu-P_1 u_\nu)\times\\ \times\big(x+(j-1)(y-x)\big)\end{matrix}\right|\right|^p}{|y-x|^{n+p\gamma}}dxdy\right)^{1/p}\le\\ \le||\varphi_T P_1 u_\nu-P_1 u_\nu||_{10}+b_3T^{-\gamma}||P_1 u_\nu||_{10}+b_4\langle P_1 u_\nu\rangle^{1\gamma}_{10}.\end{gathered} \tag{9}$$

Константы $b_3>0$, $b_4>0$ не зависят от $u$ и $T$. Так как $\lim\limits_{\nu\to\infty}||\varphi_T P_1 u_\nu||_{10}=||P_1 u_\nu||_{10}$, то из (9) следует

$$\lim_{T\to\infty}||\varphi_T P_1 u_\nu||_{B^{1\gamma}_{1p}}=||P_1 u_\nu||_{B^{1\gamma}_{1p}}. \tag{10}$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\lim_{T\to\infty}||\varphi_T u_\nu||_{B^{1s}_{1p}}=||u_\nu||_{B^{1s}_{1p}}. \tag{11}$$

С учетом (8) – (11) имеем

$$\begin{gathered}1=||u_\nu||_{B^{1s}_{1p}}=\lim_{T\to\infty}||\varphi_T u_\nu||_{B^{1s}_{1p}}\le k_1\lim_{T\to\infty}||\varphi_T P_1 u_\nu||_{B^{1\gamma}_{1p}}+\\ +k_1\lim_{T\to\infty}||Q(u_\nu,\varphi_T)||_{B^{1\gamma}_{1p}}\le k_1||P_1 u_\nu||_{B^{1\gamma}_{1p}},\quad \text{т.е.}\\ 1\le k_1b_2||P_1 u_\nu||_{B^{1\gamma}_{1p}}.\end{gathered}$$

Последнее неравенство противоречиво, а значит, оператор $P_1:B^{1s}_{1p}\to B^{1\gamma}_{1p}$ корректен.

Предположим, что оператор $P_1:B^{1s}_{1p}\to B^{1\gamma}_{1p}$ корректен:

$$||u||_{B^{1s}_{1p}}\le k_1||P_1 u||_{B^{1\gamma}_{1p}}, \tag{12}$$

постоянная $k_1>0$ не зависит от функции $u\in B^{1s}_{1p}$. В силу неравенства (12), применяя оператор $P_1$ к функции $\varphi_T u$, получим

$$||\varphi_T u||_{B^{1s}_{1p}}\le k_1||\varphi_T P_1 u||_{B^{1\gamma}_{1p}}+k_1||Q(u,\varphi_T)||_{B^{1\gamma}_{1p}} \tag{13}$$

Возьмем элемент $u\in B^{ts}_{1pk}$ и оценим его норму:

$$||\varphi_T u||_{B^{ts}_{1pk}}\le a_1||\varphi_T u||_{B^{1s}_{1p}}, \tag{14}$$

$a_1$ не зависит от $u$ и $T$. Неравенства (13), (14) приводят к оценке

$$||\varphi_T u||_{B^{ts}_{1pk}}\le a_1k_1||\varphi_T P_1 u||_{B^{1\gamma}_{1p}}+a_1k_1||Q(u,\varphi_T)||_{B^{1\gamma}_{1p}}. \tag{15}$$

С учетом, что $\lim\limits_{T\to\infty} ||\varphi_T u||_{B^{ts}_{1pk}} = ||u_\nu||_{B^{ts}_{1pk}}$, согласно (15) получим в пределе при $T\to\infty$

$$||u||_{B^{ts}_{1pk}} = a_1 k_1 ||P_1 u||_{B^{1\gamma}_{1p}}.$$

Оператор $P_1 : B^{ts}_{1pk} \to B^{1\gamma}_{1p}$ корректен. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Оператор* $P_2 : B^{ts}_{2pk} \to B^{1\gamma}_{2p}$ *корректен тогда и только тогда, когда корректен оператор* $P_2 : B^{1s}_{2p} \to B^{1\gamma}_{2p}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. аналогично теореме 1. Вместо леммы 1 применяется неравенство

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{K(x)\times K(y)} \frac{||\varphi_T(x,\xi)u(x)-\varphi_T u(y,\xi)u(y)||^p}{|y-x|^{n+p\gamma}}dxdy\right)^{1/p} \le$$

$$\le a_2 \sup_{x,y\in\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{K(x)\times K(y)} \frac{||u(x)-u(y)||^p}{|x-y|^{n+p\gamma}}dxdy\right)^{1/p} +$$

$$+ a_3 T^{-1} \sup_{|x-\xi|\le 4T}\left(\int\limits_{K(x)} ||u(x)||^p dx\right)^{1/p}$$

Постоянные $a_2>0$, $a_3>0$ не зависят от $u, T$ и $\xi$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миссера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970. 456 с.

2. *Левитан Б.М., Жиков В.В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978, 204 с.

3. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 3-е изд., доп. и перераб. М.: Наука, 1988, 336 с.

4. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы М. Тейлор. М.: Мир, 1985, 472 с.

5. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980, 664 с.

Поступила в редакцию 7 декабря 2015 г.

Тюрин Василий Михайлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: tuvm@stu.lipetsk.ru

UDC 517.983
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-116-121

## ABOUT INVERTIBILITY OF LINEAR DIFFERENTIAL OPERATORS IN SOME SPACES OF THE SOBOLEV-BESOV FUNCTIONS

© V. M. Tyurin

The simultaneous invertibility (well-posedness) of linear differential operators with partial derivatives in the Besov type functional spaces is studied.
*Key words:* Sobolev–Besov spaces; well-posedness; functional spaces.

REFERENCES

1. *Missera H., SHeffer H.* Linejnye differencial'nye uravneniya i funkcional'nye prostranstva. M.: Mir, 1970. 456 s.
2. *Levitan B.M., ZHikov V.V.* Pochti periodicheskie funkcii i differencial'nye uravneniya. M.: Izd-vo MGU, 1978, 204 s.
3. *Sobolev S.L.* Nekotorye primeneniya funkcional'nogo analiza v matematicheskoj fizike. 3-e izd., dop. i pererab. M.: Nauka, 1988, 336 s.
4. *Tejlor M.* Psevdodifferencial'nye operatory M. Tejlor. M.: Mir, 1985, 472 s.
5. *Tribel' H.* Teoriya interpolyacii, funkcional'nye prostranstva, differencial'nye operatory. M.: Mir, 1980, 664 s.

Received 7 December 2015.

Tyurin Vasily Mikhaylovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, e-mail: tuvm@stu.lipetsk.ru

УДК 519.85:612.821-056.2
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-121-130

## МЕТОДОЛОГИЯ ОЦЕНИВАНИЯ КАЧЕСТВА ЖИЗНИ, СВЯЗАННОГО СО ЗДОРОВЬЕМ

© И. А. Финогенко, М. П. Дьякович, А. А. Блохин

Статья посвящена применению методов когнитивного анализа и анализа иерархий для исследования такого сложного объекта, как связанное со здоровьем качество жизни населения. Взаимосвязанные концепты когнитивной карты используются для построения иерархической модели качества жизни и формирования матриц парных сравнений – основы всех вычислительных процедур метода анализа иерархий для преобразования качественной информации об исследуемом объекте в количественную – весовые коэффициенты всех его характеристик. Метод анализа иерархий и когнитивный анализ имеют самостоятельное значение, но, как показано, в сочетании они хорошо дополняют друг друга и становятся новым инструментом исследования сложных и плохо формализуемых объекта с большим набором взаимодействующих разнородных субъективных и объективных факторов. Основным результатом работы является описание методики исследования связанного со здоровьем качества жизни с комбинированным использованием когнитивных карт и основных процедур метода анализа иерархий.
*Ключевые слова:* связанное со здоровьем качество жизни; численное ранжирование; когнитивная карта; метод анализа иерархий.