УДК 517.911, 517.968
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-450-458

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЯДРА ОПЕРАТОРА, АППРОКСИМИРУЮЩЕГО ОБРАТНЫЙ ОПЕРАТОР ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО B-ПОТЕНЦИАЛА РИССА

© **Э. Л. Шишкина**

В статье рассматривается ядро, предел обобщенной свертки с которым реализует обратный оператор для гиперболического потенциала Рисса, порожденного многомерным обобщенным сдвигом. Для такого ядра получено представление в виде интеграла, содержащего функцию Аппеля F_4.
Ключевые слова: расстояние Лоренца, преобразование Фурье–Бесселя, B-потенциал Рисса, функция Аппеля.

Введение

Одним из наиболее полезных и хорошо изученных уравнений математической физики является гиперболическое уравнение вида

$$\Box = 0, \qquad \Box = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Это уравнение является частным случаем как уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу

$$B_{\gamma_1} - \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = 0,$$

где $\gamma_1 > 0$,

$$B_{\gamma_1} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\gamma}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} \tag{1}$$

— сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, так и обобщенного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу или, следуя терминологии И. А. Киприянова, B-гиперболического уравнения

$$\Box_\gamma = 0,$$

$$\Box_\gamma = B_{\gamma_1} - \sum_{i=2}^{n} B_{\gamma_i}, \quad \gamma_i > 0, \quad i = 1, ..., n.$$

В связи с развитием дробного интегро-дифференциального исчисления особый интерес представляет изучение дробных степеней операторов $\Box$ и $\Box_\gamma$. Отрицательная дробная степень волнового оператора $\Box$ называется *гиперболическим потенциалом Рисса* (см. [1] стр. 406, [2]). Такие потенциалы изучались в работах [1]–[6] с использованием преобразования Фурье. Отрицательная дробная степень оператора $\Box_\gamma$, называемая *гиперболическим B-потенциалом Рисса*, была рассмотрена в [7].

Дробные степени операторов, содержащих сингулярный дифференциальный оператор Бесселя (1) обычно изучаются в образах преобразования Фурье–Бесселя (см. [8]–[10]). Так в работах [11]–[16] с помощью этого подхода были изучены эллиптические B-потенциалы Рисса, которые являются отрицательными степенями оператора $\triangle_\gamma=\sum\limits_{k=1}^{n}B_{\gamma_k}$. Однако существует и прямой подход, при котором дробные степени этого оператора строятся в явном интегральном виде, аналогично дробным интегралам Римана–Лиувилля (см. [17]–[18]). Более абстрактный подход к построению подобных операторов разработан в связи с теорией дифференциальных уравнений и функций гипербесселевого типа, а также обобщенных операторов преобразования (см. [19], [20]).

1. Основные определения

Положим

$$\mathbb{R}_n^+=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}_n,\ \ x_1>0,...,x_n>0\}.$$

Пусть $\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_n)$ – мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел и $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$.

Следуя И. А. Киприянову, функцию определенную на $\mathbb{R}_n^+$ будем называть четной по x_i, если она может быть продолжена на $\mathbb{R}_n$ четным образом по переменной x_i с сохранением класса принадлежности функции.

Через $S_{ev}=S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ будем обозначать часть класса функций Шварца, состоящее из четных по каждой из своих переменных функций, определенных на $\mathbb{R}_n^+$.

Преобразование Фурье–Бесселя имеет вид (см. [8]):

$$F_B[\varphi](\xi)=\widehat{\varphi}(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}_n^+}\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)\,\varphi(x)\,x^\gamma\,dx,\qquad x^\gamma=\prod_{i=1}^{n}x_i^{\gamma_i}.$$

Здесь $\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)=\prod\limits_{j=1}^{n}j_{\frac{\gamma_j-1}{2}}(x_j\xi_j)$, а функция $j_\nu(t)$ связана с функцией Бесселя первого рода $J_\nu(t)$ соотношением

$$j_\nu(t)=2^\nu\,\Gamma(\nu+1)\,\frac{J_\nu(t)}{t^\nu}\,. \tag{2}$$

Для функций из S_{ev} преобразование F_B обратимо и обратное преобразование имеет вид

$$F_B^{-1}[\widehat{f}](x)=f(x)=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\;F_B[\widehat{f}](x).$$

Многомерный оператор Пуассона имеет вид (см. [8])

$$\mathcal{P}_x^\gamma f(x)=C(\gamma)\int\limits_0^\pi...\int\limits_0^\pi f(x_1\cos\alpha_1,...,x_n\cos\alpha_n)\prod_{j=1}^{n}\sin^{\gamma_j-1}\alpha_j\,d\alpha_j,$$

$$C(\gamma)=\pi^{-n/2}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_j-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_j}{2}\right)}.$$

Гиперболический B-потенциал Рисса имеет вид

$$(I_B^\alpha f)(x)=\int\limits_{K^+}[y_1^2-y_2^2-...-y_n^2]^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}(T^yf)(x)y^\gamma dy,\quad y^\gamma=\prod_{i=1}^{n}y_i^{\gamma_i}, \tag{3}$$

где $K^{+}=\{y\in\mathbb{R}_n^+ : y_1^2\geq y_2^2+...+y_n^2\}$. Порядок потенциала α удовлетворяет наравенствам $n+|\gamma|-2<\alpha<n+|\gamma|$. В (3) $(T^y f)(x)=(T_{x_1}^{y_1}...T_{x_n}^{y_n}f)(x)$ — многомерный обобщенный сдвиг, каждый из обобщенных сдвигов $T_{x_i}^{y_i}$ определен при $i=1,...,n$ выражением (см. [21], [22])

$$(T_{x_i}^{y_i}f)(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\int\limits_0^\pi f(x_1,...,x_{i-1},\sqrt{x_i^2+\tau_i^2-2x_iy_i\cos\varphi_i},x_{i+1},...,x_n)\ \sin^{\gamma_i-1}\varphi_i\,d\varphi_i.$$

Пусть

$$w_{\alpha,\varepsilon}(\xi)=\tau^{-1}\,|\xi_1^2-|\xi'|^2|^{\frac{\alpha}{2}}\,e^{-\varepsilon\xi_1-\varepsilon|\xi'|},\qquad \tau=\begin{cases} e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}, & \xi_1^2>|\xi'|;\\ 1, & \xi_1^2<|\xi'|.\end{cases}$$

Обратный к потенциалу $h(x)=(I_B^\alpha f)(x)$ оператор строится в виде

$$((I_B^\alpha)^{-1}h)(x)=\lim_{\varepsilon\to0}((I_B^\alpha)_\varepsilon^{-1}h)(x),$$

где

$$((I_B^\alpha)_\varepsilon^{-1}h)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_n^+}T_x^t(G_{\alpha,\varepsilon}(x))\,h(t)\,t^\gamma dt,$$

$$G_{\alpha,\varepsilon}(x)=F_B^{-1}[w_{\alpha,\varepsilon}](x)=$$

$$=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^n\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}_n^+}\tau^{-1}\,|\xi_1^2-|\xi'|^2|^{\frac{\alpha}{2}}\,e^{-\varepsilon\xi_1-\varepsilon|\xi'|}\,\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\xi^\gamma\,d\xi=$$

$$=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^n\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}F_B[w_{\alpha,\varepsilon}](x),\tag{4}$$

$\tau=e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}$ при $\xi_1^2>|\xi'|$ и $\tau=1$ при $\xi_1^2<|\xi'|$.

В следующем пункте получим представление ядра $G_{\alpha,\varepsilon}(x)$ оператора $(I_B^\alpha)_\varepsilon^{-1}$ через интеграл, содержащий функцию Аппеля $F_4(a,b,c_1,c_2;x,y)$ (см. [23], с. 658), которая при $|x|^{1/2}+|y|^{1/2}<1$ имеет вид:

$$F_4(a,b,c_1,c_2;x,y)=\sum_{m,n=0}^\infty\frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{(c_1)_m(c_2)_n\,m!\,n!}\,x^my^n,\tag{5}$$

а при $|x|^{1/2}+|y|^{1/2}\geq1$ функция $F_4(a,b;c_1,c_2;x,y)$ понимается как аналитическое продолжение, которое определяется формулами из [24]. В (5) выражение $(x)_n$ — символ Похгаммера:

$$(x)_n=\prod_{k=1}^n(x+k-1).$$

2. Интегральное представление ядра оператора, аппроксимирующего обратный оператор для гиперболического B-потенциала Рисса

Т е о р е м а. *Преобразование Фурье–Бесселя функции*

$$w_{\alpha,\varepsilon}(\xi)=\tau^{-1}\,|\xi_1^2-|\xi'|^2|^{\frac{\alpha}{2}}\,e^{-\varepsilon\xi_1-\varepsilon|\xi'|},\qquad \tau=\begin{cases} e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}, & \xi_1^2>|\xi'|;\\ 1, & \xi_1^2<|\xi'|,\end{cases}$$

имеет вид

$$F_B[e_{\alpha,\varepsilon}](x)=\frac{\Gamma(n+|\gamma|+\alpha)\prod\limits_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-2}\varepsilon^{n+|\gamma|+\alpha}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-1}{2}\right)}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty e^{\frac{\alpha\pi i}{2}\theta(1-r)}(1-r^2)^{\frac{\alpha}{2}}\frac{r^{n+|\gamma'|-2}}{(1+r)^{n+|\gamma|+\alpha}}\times$$

$$\times F_4\left(\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2},\frac{n+|\gamma|+\alpha+1}{2};\frac{\gamma_1+1}{2},\frac{n+|\gamma'|-1}{2};-\frac{x_1^2}{(\varepsilon(1+r))^2},-\frac{(r|x'|)^2}{(\varepsilon(1+r))^2}\right)dr,$$

где $\theta(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0;\\ 0, & t<0,\end{cases}$ *— функция Хевисайда, а* $F_4(a,b,c_1,c_2;x,y)$ *— функция Аппеля, определенная формулой* (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g_{\alpha,\varepsilon}(x)=F_B[\tau^{-1}\,|\xi_1^2-|\xi'|^2|^{\frac{\alpha}{2}}\,e^{-\varepsilon\xi_1-\varepsilon|\xi'|}](\xi)$. Представим функцию $g_{\alpha,\varepsilon}(x)$ в виде суммы:

$$g_{\alpha,\varepsilon}(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_n^+}\tau^{-1}\,|\xi_1^2-|\xi'|^2|^{\frac{\alpha}{2}}\,e^{-\varepsilon\xi_1-\varepsilon|\xi'|}\,\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\xi^\gamma\,d\xi=$$

$$=e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}}\int\limits_{\xi_1^2>|\xi'|^2}|\xi_1^2-|\xi'|^2|^{\frac{\alpha}{2}}\,e^{-\varepsilon\xi_1-\varepsilon|\xi'|}\,\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\xi^\gamma\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{\xi_1^2<|\xi'|^2}|\xi_1^2-|\xi'|^2|^{\frac{\alpha}{2}}\,e^{-\varepsilon\xi_1-\varepsilon|\xi'|}\,\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\xi^\gamma\,d\xi=J_1(x)+J_2(x).$$

Рассмотрим интеграл $J_1(x)$. Имеем

$$J_1(x)=e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}}\int\limits_{\xi_1^2>|\xi'|^2}(\xi_1^2-|\xi'|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\,e^{-\varepsilon\xi_1-\varepsilon|\xi'|}\,\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\xi^\gamma\,d\xi=$$

$$=e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}}\int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon\xi_1}\,j_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1)\xi_1^{\alpha+\gamma_1}d\xi_1\times$$

$$\times\int\limits_{\xi_1^2>|\xi'|^2}\left(1-\frac{|\xi'|^2}{\xi_1^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}e^{-\varepsilon|\xi'|}\,\mathbf{j}_\gamma(x',\xi')(\xi')^{\gamma'}\,d\xi'.$$

Во внутреннем интеграле произведем замену переменных $\frac{\xi'}{\xi_1}=y$, а затем перейдем к сферическим координатам $y{=}r\sigma$, $|y|{=}r$, $\sigma{=}(\sigma_1,...,\sigma_{n-1})$, получим

$$J_1(x)=e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}}\int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon\xi_1}\,j_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1)\xi_1^{n-1+\alpha+|\gamma|}d\xi_1\times$$

$$\times \int\limits_{1>|y|} (1-|y|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\, e^{-\varepsilon\xi_1|y|}\, \mathbf{j}_\gamma(x',\xi_1 y) y^{\gamma'}\, dy =$$

$$= e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}} \int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon\xi_1}\, j_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1)\xi_1^{n-1+\alpha+|\gamma|} d\xi_1 \int\limits_0^1 (1-r^2)^{\frac{\alpha}{2}} r^{n-2+|\gamma'|}\, e^{-\varepsilon\xi_1 r} dr \times$$

$$\times \int\limits_{S^+_{n-2}} \mathbf{j}_\gamma(x',\xi_1 r\sigma)\, \sigma^{\gamma'}\, dS.$$

Найдем

$$\int\limits_{S^+_{n-2}} \mathbf{j}_\gamma(x',\xi_1 r\sigma)\, \sigma^{\gamma'}\, dS = \int\limits_{S^+_{n-2}} \mathcal{P}^{\gamma'}_\sigma (e^{-i\langle x',\xi_1 r\sigma\rangle})\, \sigma^{\gamma'}\, dS.$$

Используя формулу «интеграла по сфере от весовой плоской волны» (см. [25]) вида

$$\int\limits_{S^+_1(n)} \mathcal{P}^\gamma_\xi f(\langle\xi,x\rangle) x^\gamma d\omega_x = \frac{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}2^{n-1}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \int\limits_{-1}^1 f(|\xi|p)(1-p^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} :\, dp,$$

получим

$$\int\limits_{S^+_{n-2}} \mathbf{j}_\gamma(x',\xi_1 r\sigma)\, \sigma^{\gamma'}\, dS = \frac{\prod\limits_{i=2}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}2^{n-2}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-2}{2}\right)} \int\limits_{-1}^1 e^{-ir\xi_1|x'|p}(1-p^2)^{\frac{n+|\gamma'|-4}{2}} dp.$$

Последний интеграл найдем по формуле 2.3.5.3 из [26], с. 260, будем иметь

$$\int\limits_{S^+_{n-2}} \mathbf{j}_\gamma(x',\xi_1 r\sigma)\, \sigma^{\gamma'}\, dS = \frac{\prod\limits_{i=2}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-2}(r\xi_1|x'|/2)^{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}}\, J_{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}(r\xi_1|x'|).$$

Тогда

$$J_1(x) = e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}} \frac{\prod\limits_{i=2}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{\frac{n-|\gamma'|-1}{2}}|x'|^{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}} \int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon\xi_1}\, j_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1)\xi_1^{\frac{n+|\gamma|+\gamma_1+1}{2}+\alpha} d\xi_1 \times$$

$$\times \int\limits_0^1 (1-r^2)^{\frac{\alpha}{2}} r^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}}\, e^{-\varepsilon\xi_1 r}\, J_{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}(r\xi_1|x'|) dr.$$

Во внешнем интеграле перейдем к функции $J_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1)$ по формуле (2) и поменяем местами порядок интегрирования, получим

$$J_1(x) = e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}} \frac{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{\frac{n-|\gamma|}{2}} x_1^{\frac{\gamma_1-1}{2}} |x'|^{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}} \int\limits_0^1 (1-r^2)^{\frac{\alpha}{2}} r^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}} dr \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty \xi_1^{\frac{n+|\gamma|}{2}+\alpha+1}\, e^{-\varepsilon\xi_1(1+r)} J_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1)\, J_{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}(r\xi_1|x'|) d\xi_1.$$

Для вычисления внутреннего интеграла применим формулу 2.12.38.2 из [23], тогда

$$J_1(x)=e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}}\,\frac{\Gamma(n+|\gamma|+\alpha)\prod\limits_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-2}\varepsilon^{n+|\gamma|+\alpha}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-1}{2}\right)}\int\limits_0^1(1-r^2)^{\frac{\alpha}{2}}\frac{r^{n+|\gamma'|-2}}{(1+r)^{n+|\gamma|+\alpha}}\times$$

$$\times F_4\left(\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2},\frac{n+|\gamma|+\alpha+1}{2};\frac{\gamma_1+1}{2},\frac{n+|\gamma'|-1}{2};-\frac{x_1^2}{(\varepsilon(1+r))^2},-\frac{(r|x'|)^2}{(\varepsilon(1+r))^2}\right)dr$$

Аналогично найдем $J_2(x)$:

$$J_2(x)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{\frac{n-|\gamma|}{2}}x_1^{\frac{\gamma_1-1}{2}}|x'|^{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}}\times$$

$$\times\int\limits_1^\infty\left(1-r^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}r^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}}dr\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty\xi_1^{\frac{n+|\gamma|}{2}+\alpha+1}e^{-\varepsilon\xi_1(1+r)}J_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1)\,J_{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}(r\xi_1|x'|)\,d\xi_1=$$

$$=\frac{\Gamma(n+|\gamma|+\alpha)\prod\limits_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-2}\varepsilon^{n+|\gamma|+\alpha}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-1}{2}\right)}\int\limits_1^\infty\left(1-r^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\frac{r^{n+|\gamma'|-2}}{(1+r)^{n+|\gamma|+\alpha}}\times$$

$$\times F_4\left(\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2},\frac{n+|\gamma|+\alpha+1}{2};\frac{\gamma_1+1}{2},\frac{n+|\gamma'|-1}{2};-\frac{x_1^2}{(\varepsilon(1+r))^2},-\frac{(r|x'|)^2}{(\varepsilon(1+r))^2}\right)dr.$$

Складывая $J_1(x)$ и $J_2(x)$ получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. *Из* (4) *следует, что интересующая нас функция* $G_{\alpha,\varepsilon}(x)$ *имеет интегральное представление*

$$G_{\alpha,\varepsilon}(x)=\frac{2^{2-|\gamma|}}{\Gamma\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\right)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\,\frac{\Gamma(n+|\gamma|+\alpha)}{\varepsilon^{n+|\gamma|+\alpha}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-1}{2}\right)}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty e^{\frac{\alpha\pi i}{2}\theta(1-r)}(1-r^2)^{\frac{\alpha}{2}}\frac{r^{n+|\gamma'|-2}}{(1+r)^{n+|\gamma|+\alpha}}\times$$

$$\times F_4\left(\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2},\frac{n+|\gamma|+\alpha+1}{2};\frac{\gamma_1+1}{2},\frac{n+|\gamma'|-1}{2};-\frac{x_1^2}{(\varepsilon(1+r))^2},-\frac{(r|x'|)^2}{(\varepsilon(1+r))^2}\right)dr.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 687 с.

2. *Ногин В.А., Сухинин Е.В.* Обращение и описание гиперболических потенциалов с L_p-плотностями // Докл. РАН. 1993. Т. 329. № 5. С. 550–552.

3. *Riesz M.* L'intégrale de Riemann-Liouville et le probléme de Cauchy // Acta Math. 1949. V. 81. № 1-2. P. 1–223.

4. *Ногин В.А., Сухинин Е.В.* Обращение и описание гиперболических потенциалов с L_p -плотностями. Депонирована в ВИНИТИ. Москва. 1992. № 2512–92. 50 с.

5. *Ногин В.А., Сухинин Е.В.* Дробные степени оператора Клейна-Гордона-Фока в L_p -пространствах // ДАН, 1995. Т. 341. № 2. С. 166–168.

6. *Киприянов И. А., Иванов Л. А.* Потенциалы Рисса на пространствах Лоренца // Матем. сб. 1986. Т. 130 (172). № 4 (8). С. 465–474.

7. *Шишкина Э.Л.* Ограниченность B -гиперболического потенциала // Тезисы докладов международной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – V» (г. Ростов-на-Дону, 2015 г.). С. 147–148.

8. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997. 200 с.

9. *Киприянов И.А.* Преобразование Фурье-Бесселя и дробные степени дифференциальных операторов // ДАН 2000. Т. 373. № 1. С. 17–20.

10. *Roschupkin S. , Lyakhov L. N.* A Priori Estimates for Solutions of Singular B -Elliptic Pseudodifferential Equations with Bessel Operators // Journal of Mathematical sciences. 2014. V. 196. № 4. P. 563–571.

11. *Ляхов Л.Н.* Обращение B -потенциалов Рисса // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 3. С. 466–469.

12. *Ляхов Л.Н.* Пространства B -потенциалов Рисса // Докл. АН СССР. 1994. Т. 334. № 3. С. 278–280.

13. *Ляхов Л.Н.* О символе интегрального оператора типа B -потенциала с однократной характеристикой // Докл. РАН. 1996. Т. 351. № 2. С. 164–168.

14. *Ляхов Л.Н. Шишкина Э.Л.* Обобщенные B -потенциалы Рисса смешанного типа // ДАН. 2006. Т. 406. № 3. С. 303–307.

15. *Ляхов Л.Н., Шишкина Э.Л.* Обращение общих B -потенциалов Рисса с однородной характеристикой в весовых пространствах // ДАН. 2009. Т. 426. № 4. С. 443–447.

16. *Lyakhov L.N., Shishkina E.L.* Inversion of general Riesz B -potentials // Analytic methods of analysis and differential equations: AMADE 2012 (Edited by M.V.Dubatovskaya, S.V.Rogosin), Cambridge Scientific Publishers, Cottenham, 2013. P. 115–126.

17. *Ситник С.М.* О явных реализациях дробных степеней дифференциального оператора Бесселя и их приложениях к дифференциальным уравнениям // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2010. Т. 12. № 2. С. 69–75.

18. *Ситник С.М.* Дробное интегродифференцирование для дифференциального оператора Бесселя // Материалы международного Российско-Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик-Эльбрус, 22-26 мая 2004. С. 163–167.

19. *Kiryakova V.* Generalized Fractional Calculus and Applications // Pitman Research Notes in Math. Series. Longman Sci. UK. 1994. № 301. 402 p.

20. *Dimovski I.H.* Convolutional Calculus // Kluwer Acad. Publ. Dordrecht. 1990. 196 p.

21. *Delsartes J.* Une extension nouvelle de la theorie de fonctions presque—periodiques de Bohr // Acta Mathematica. 1939. V. 69. P. 257–317.

22. *Левитан Б.М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи математических наук. 1951. Т. 6. Вып. 2 (42). С. 102–143.

23. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции 2-е изд., Т. 2. М.: Физматлит, 2003. 664 с.

24. *Exton H.* On the system of partial differential equations associated with Appell's function F_4 // J. Phys. A: Math. Gen. 28, 1995. P. 631–641.

25. *Ляхов Л.Н.* B -гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B -потенциальными ядрами. Липецк: ЛГПУ, 2007. 232 с.

26. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. 2-е изд. М.: Физматлит, 2002. Т. 1. 632 с.

Поступила в редакцию 11 марта 2016 г.

Шишкина Элина Леонидовна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического и прикладного анализа, e-mail: ilina_dico@mail.ru

UDC 517.911, 517.968
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-450-458

INTEGRAL REPRESENTATION OF APPROXIMATING INVERSE OPERATORS FOR HYPERBOLIC RIESZ B-POTENTIAL KERNEL

© E. L. Shishkina

The article deals with the special kernel. The limit of the generalized convolution with this kernel is the inverse operator for hyperbolic Riesz potential generated by multidimensional generalized translation. The integral representation containing Appel F_4 function was obtained for this kernel.

Key words: Lorenz distance, Fourier-Bessel transform, Riesz B-potential, Appel function.

REFERENCES

1. *Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.* Integrals and Fractional Derivatives and Some Their Applications. Minsk: Science and Engineering, 1987. 687 p.

2. *Nogin V.A., Sukhinin E.V.* Inversion and characterization of hyperbolic potentials in Lp-spaces // Russ. Acad. Sci., Dokl., Math., 1993. V. 329. № 5. P. 550–552.

3. *Riesz M.* L'intégrale de Riemann-Liouville et le probléme de Cauchy // Acta Math. 1949. V. 81. № 1-2. P. 1–223.

4. *Nogin V.A., Sukhinin E.V.* Inversion and characterization of hyperbolic potentials in Lp-spaces. Deponierted in VINITI, Moscow, 1992. № 2512-92. 50 p.

5. *Nogin V.A., Sukhinin E.V.* Fractional powers of the Klein-Gordon-Fock operator in Lp-spaces // Russ. Acad. Sci., Dokl., Math., 1995. V. 51. № 2. P. 194–196.

6. *Kipriyanov I.A., Ivanov L.A.* Riesz potentials on Lorentz spaces // Math. Sb. 1986. V. 130 (172). № 4 (8). P. 465–474.

7. *Shishkina E.L.* Boundedness of B-hyperbolic potential // Abstracts of Five International Conference on Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis, 2015, Rostov-on-Don, RUSSIA. P. 147–148.

8. *Kipriyanov I.A.* Singular Elliptic Problems. Nauka, Moscow, 1997. 200 p.

9. *Kipriyanov I.A.* The Fourier-Bessel transform and fractional powers of differential operators // Dokl. Math., 2000. V. 62. № 1. P. 10–13.

10. *Roschupkin S., Lyakhov L.N.* A Priori Estimates for Solutions of Singular B-Elliptic Pseudodifferential Equations with Bessel Operators // Journal of Mathematical sciences.2014. V. 196. № 4. P. 563–571.

11. *Lyakhov L.N.* Inversion of Riesz B-potential // Sov. Math., Dokl., 1992. V. 44. № 3. P. 717–720.

12. *Lyakhov L.N.* Space of Riesz B-potential // Russ. Acad. Sci., Dokl., Math., 1994. V. 49. № 1. P. 83–87.

13. *Lyakhov L.N.* On the symbol of the integral operator of the B-potential type with a single characteristic // Dokl. Math. 1996. V. 54. № 3. 852–856.

14. *Lyakhov L.N., Shishkina E.L.* Generalized Riesz B-potentials of mixed type // Dokl. Math. 2006. V. 73. № 1. P. 42–45.

15. *Lyakhov L.N. Shishkina E.L.* Inversion of general Riesz B-potentials with homogeneous characteristic in weight classes of functions // Dokl. Math. 2009. V. 79. № 3. 377–381.

16. *Lyakhov L.N., Shishkina E.L.* Inversion of general Riesz B-potentials // Analytic methods of analysis and differential equations: AMADE 2012 (Edited by M.V.Dubatovskaya, S.V.Rogosin), Cambridge Scientific Publishers, Cottenham, 2013, P. 115–126.

17. *Sitnik S.M.* On explicit implementations of fractional powers of the Bessel differential operator and its applications to differential equations // Doklady Adygskoi (Cherkesskoi) Mezhdunarodnoi akademii nauk. 2010. V. 12. № 2. P. 69–75.

18. *Sitnik S.M.* Fractional integro-differentiation for the Bessel differential operator // Proceedings of the International Russian-Kazakh Symposium «Mixed-type equations and related problems of the analysis and informatics». Nalchik, Elbrus. 2004. P. 163–167.

19. *Kiryakova V.* Generalized Fractional Calculus and Applications // Pitman Research Notes in Math. Series. Longman Sci. UK. 1994. № 301. 402 p.

20. *Dimovski I.H.* Convolutional Calculus // Kluwer Acad. Publ. Dordrecht. 1990. 196 p.

21. *Delsartes J.* Une extension nouvelle de la theorie de fonctions presque-periodiques de Bohr // Acta Mathematica. 1939. V. 69. P. 257–317.

22. *Levitan B.M.* Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. Uspehi mat. nauk. 1951. V. 6. Issue 2 (42). P. 102–143.

23. *Prudnikov, A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integrals and Series. Special functions. 2-nd edition. V. 2. M.: FML, 2003. 664 p.

24. *Exton H.* On the system of partial differential equations associated with Appell's function F_4 // J. Phys. A: Math. Gen. 28, 1995. P. 631–641.

25. *Lyakhov L.N.* B-hypersingular integrals and their applications to description of Kipriyanov functional class and to integral equations with B-potential kernels. Lipetsk: LGPU, 2007. 232 p.

26. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integrals and Series. Elementary functions. 2-nd edition. M.: FML. 2002. V. 1. 632 p.

Received 11 March 2016

Shishkina Elina Leonidovna, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematical and Applied Analysis Department, e-mail: ilina_dico@mail.ru