ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 12–28
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-12-28

УДК 514.763

АЛГЕБРЫ ЛИ ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ ПЯТИМЕРНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ. V. АЛГЕБРЫ ЛИ ПРОЕКТИВНЫХ И АФФИННЫХ ДВИЖЕНИЙ h-ПРОСТРАНСТВ H_{221} ТИПА $\{221\}$

© 2022 г. **А. В. АМИНОВА, Д. Р. ХАКИМОВ**

Аннотация. Работа посвящена имеющей многочисленные геометрические и физические приложения проблеме исследования многомерных псевдоримановых многообразий, допускающих алгебры Ли инфинитезимальных проективных (в частности, аффинных) преобразований, более широкие, чем алгебры Ли инфинитезимальных гомотетий. Настоящая статья является завершающей частью работы. Первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *212.* — С. 10–29. Вторая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *213.* — С. 10–37. Третья часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *214.* — С. 3–20. Четвертая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *215.* — С. 18–31.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, пятимерное псевдориманово многообразие, h-пространство, система дифференциальных уравнений с частными производными, негомотетическое проективное движение, уравнение Киллинга, проективная алгебра Ли.

LIE ALGEBRAS OF PROJECTIVE MOTIONS OF FIVE-DIMENSIONAL PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES. V. LIE ALGEBRAS OF PROJECTIVE AND AFFINE MOTIONS OF h-SPACES H_{221} OF TYPE $\{221\}$

© 2022 **A. V. AMINOVA, D. R. KHAKIMOV**

Abstract. This work is devoted to the problem of studying multidimensional pseudo-Riemannian manifolds that admit Lie algebras of infinitesimal projective (in particular, affine) transformations, wider than Lie algebras of infinitesimal homotheties. Such manifolds have numerous geometric and physical applications. This paper is the final part of the work. The first part: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2022. — *212.* — P. 10–29. The second part: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2022. — *xxx.* — P. 10–37. The third part: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2022. — *xxx.* — P. 3–20. The fourth part: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2022. — *xxx.* — P. 18–31.

Keywords and phrases: differential geometry, five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, h-space, system of partial differential equations, nonhomothetical projective motion, Killing equation, projective Lie algebra.

AMS Subject Classification: 53Z05

5. Алгебры Ли проективных и аффинных движений h-пространств H_{221} типа $\{221\}$

Для того чтобы инфинитезимальное проективное преобразование $x^{i'} = x^i + \xi^i \delta t$ было проективным движением псевдориманова пространства (M^5, g), необходимо и достаточно выполнение уравнения Эйзенхарта (**??**):

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}$$

и обобщенного уравнения Киллинга (**??**):

$$L_X g_{ij} \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = h_{ij},$$

где φ — определяющая функция проективного движения. Если она постоянна, то проективное движение является аффинным. При $h_{ij} = \nu g_{ij}$ аффинное движение сводится к гомотетии, а при $h_{ij} = 0$ является изометрическим движением.

Согласно теореме **??** в канонической карте (x, U) метрика g h-пространства H_{221}, билинейная форма h типа $\{221\}$ и функция φ имеют вид

$$\begin{aligned} g = e_1(f_2-f_1)^2(f_3-f_1)\left(2A dx^1 dx^2 - A^2\left(\frac{2}{f_2-f_1}+\frac{1}{f_3-f_1}\right)(dx^2)^2\right) + \\ + e_2(f_1-f_2)^2(f_3-f_2)\left(2B dx^3 dx^4 - B^2\left(\frac{2}{f_1-f_2}+\frac{1}{f_3-f_2}\right)(dx^4)^2\right) + \\ + e_3(f_1-f_3)^2(f_2-f_3)^2(dx^5)^2, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} h = 2\varphi g + \\ + e_1(f_2-f_1)^2(f_3-f_1)\left(f_1\left(2A dx^1 dx^2 - A^2\left(\frac{2}{f_2-f_1}+\frac{1}{f_3-f_1}\right)(dx^2)^2\right) + A^2(dx^2)^2\right) + \\ + e_2(f_1-f_2)^2(f_3-f_2)\left(f_2\left(2B dx^3 dx^4 - B^2\left(\frac{2}{f_1-f_2}+\frac{1}{f_3-f_2}\right)(dx^4)^2\right) + B^2(dx^4)^2\right) + \\ + e_3(f_1-f_3)^2(f_2-f_3)^2 f_3\,(dx^5)^2, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\varphi = f_1 + f_2 + \frac{1}{2}f_3,$$

где

$$\begin{gathered} f_1 = \varepsilon_1 x^2 + (1-\varepsilon_1)c_1, \quad f_2 = \varepsilon_2 x^4 + (1-\varepsilon_2)c_2, \quad f_3 = f_3(x^5), \\ A = \varepsilon_1\left(x^1 + \tau(x^2)\right) + 1 - \varepsilon_1, \quad B = \varepsilon_2\left(x^3 + \omega(x^4)\right) + 1 - \varepsilon_2; \end{gathered}$$

ε_1, ε_2 принимают независимо значения 0 или 1, $e_1, e_2, e_3 = \pm 1$, c_1 и c_2 — постоянные, $\tau = \tau(x^2)$ — функция x^2, $\omega = \omega(x^4)$ — функция x^4.

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ будем обозначать h-пространство H_{221} символом $H_{221,1}$, при $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$ — символом $H_{221,2}$, а при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ — символом $H_{221,3}$. Случай $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$ приводится к случаю $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$ переобозначением переменных и далее не рассматривается. Таким образом, всякое h-пространство H_{221} является либо $H_{221,1}$, либо $H_{221,2}$, либо, наконец, $H_{221,3}$.

В случае постоянной функции $f_3 = p$ будем пользоваться заменой $f_i \to f_i + p$ и сдвигом $x^2 \to x^2 + \mathrm{const}$, $x^4 \to x^4 + \mathrm{const}$, не меняющих вида метрики (5.1), для того чтобы привести f_3 к нулю: $f_3 = 0$, что далее предполагается выполненным.

Для получения максимальной проективной алгебры Ли в h-пространстве H_{221} нужно найти общее решение уравнения Эйзенхарта. Это было сделано в разделе **??**, где установлены необходимые и достаточные условия существования негомотетического проективного движения (любого допустимого типа) в H_{221} (теорема **??**). Показано, что общее решение уравнения Эйзенхарта имеет вид $c_1 h + 2c_2 g$, где g и h определены формулами (5.1), (5.2), а c_1 и c_2 — произвольные постоянные; как следствие доказано, что если h-пространство типа $\{221\}$ непостоянной кривизны допускает r-мерную негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит

$(r-1)$-мерную гомотетическую подалгебру H_{r-1}; аффинная подалгебра сводится к гомотетиям или изометриям (теоремы **??** и **??**).

В данном разделе будут определены все h-пространства H_{221} непостоянной кривизны, допускающие негомотетические проективные движения, и сами эти движения. Решение этой задачи сводится к интегрированию обобщенных уравнений Киллинга

$$L_X g_{ij} \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = a_1 h_{ij} + 2a_2 g_{ij}, \tag{5.3}$$

где a_1, a_2 — постоянные, и существенно упрощается благодаря использованию условий интегрируемости (5.9) уравнений (5.3), включающих тензор кривизны, и теоремам 5.1 и 5.2.

В разделе 5.1 устанавливаются необходимые и достаточные условия в канонических (натуральных) координатах, при которых H_{221} является пространством постоянной кривизны (теорема 5.1), что позволяет исключить из рассмотрения пространства постоянной кривизны S^5, допускающие максимальную 35-мерную проективную алгебру Ли, строение которой известно (см. [13, гл. 4]).

В разделе 5.2 формулируются общие свойства проективных векторных полей в пространствах H_{221} (теорема 5.2).

Непосредственному интегрированию обобщенных уравнений Киллинга (5.3) в пространствах H_{221} непостоянной кривизны посвящен раздел 5.3, а в 5.4 исследуются гомотетии и изометрии указанных пространств.

Классификация h-пространств H_{221} непостоянной кривизны по (негомотетическим) алгебрам Ли инфинитезимальных проективных и аффинных преобразований дается в 5.5 (теорема 5.3), где перечислены все проективно-подвижные метрики и указываются размерности, базисные элементы и структурные уравнения действующих в них максимальных проективных алгебр Ли.

5.1. Условия постоянства кривизны h-пространств типа $\{221\}$ в канонической карте.

Теорема 5.1. *H-пространство H_{221} типа $\{221\}$ является пространством постоянной кривизны, если и только если выполнены следующие условия:*

(i) *для h-пространства $H_{221,1}$ $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1)$:*

$$f_3' = \tau' = \omega' = 0; \tag{5.4}$$

(ii) *для h-пространства $H_{221,2}$ $(\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = 0)$:*

$$f_3' = \tau' = 0; \tag{5.5}$$

(iii) *для h-пространства $H_{221,3}$ $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0)$:*

$$f_3' = 0. \tag{5.6}$$

При этом $K = 0$, т.е. всякое h-пространство H_{221} типа $\{221\}$ постоянной кривизны является плоским.

Доказательство. Необходимое и достаточное условие постоянства кривизны псевдориманова пространства с метрикой g и тензором римановой кривизны R^i_{jkl} определяется равенством

$$R^i_{jkl} = K\left(\delta^i_k g_{jl} - \delta^i_l g_{jk}\right), \tag{5.7}$$

где K — постоянная кривизна, в частности, $R^1_{324} = R^3_{124} = 0$.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что из коэффициентов связности h-метрики (5.1) в канонических координатах не равны нулю только следующие:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\varepsilon_1}{A}, \quad \Gamma^1_{12} = \varepsilon_1 \frac{3f_1 - f_2 - 2f_3}{(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)}, \quad \Gamma^1_{14} = \frac{\varepsilon_2}{f_2 - f_1}, \quad \Gamma^1_{15} = \frac{1}{2}\frac{f_3'}{f_3 - f_1},$$
$$\Gamma^1_{22} = \frac{\varepsilon_1 A(3f_1 - 2f_2 - f_3)}{(f_1 - f_3)(f_2 - f_1)^2}, \quad \Gamma^1_{24} = \frac{\varepsilon_2 A}{(f_2 - f_1)^2}, \quad \Gamma^1_{25} = \frac{1}{2}\frac{f_3' A}{(f_3 - f_1)^2},$$
$$\Gamma^1_{34} = \frac{e_1 e_2 \varepsilon_1 B(f_2 - f_3)}{(f_1 - f_2)(f_3 - f_1)A}, \quad \Gamma^1_{44} = \frac{e_1 e_2 \varepsilon_1 B^2(f_1 - 2f_2 + f_3)}{(f_2 - f_1)^2(f_3 - f_1)A},$$

$$\Gamma^1_{55}=\frac{e_1e_3\varepsilon_1(f_2-f_3)^2}{(f_2-f_1)^2A},\quad \Gamma^2_{22}=\frac{\varepsilon_1\tau'}{A},\quad \Gamma^2_{24}=\frac{\varepsilon_2}{f_2-f_1},\quad \Gamma^2_{25}=\frac{1}{2}\frac{f_3'}{f_3-f_1},$$
$$\Gamma^3_{12}=\frac{e_1e_2\varepsilon_2A(f_1-f_3)}{(f_2-f_1)(f_3-f_2)B},\quad \Gamma^3_{22}=\frac{e_1e_2\varepsilon_2A^2(2f_1-f_2-f_3)}{(f_2-f_1)^2(f_2-f_3)B},\quad \Gamma^3_{23}=\frac{\varepsilon_1}{f_1-f_2},$$
$$\Gamma^3_{24}=\frac{\varepsilon_1B}{(f_2-f_1)^2},\quad \Gamma^3_{33}=\frac{\varepsilon_2}{B},\quad \Gamma^3_{34}=\frac{\varepsilon_2(f_1-3f_2+2f_3)}{(f_2-f_1)(f_3-f_2)},\quad \Gamma^3_{35}=\frac{1}{2}\frac{f_3'}{f_3-f_2},$$
$$\Gamma^3_{44}=\frac{\varepsilon_2B(2f_1-3f_2+f_3)}{(f_3-f_2)(f_2-f_1)^2},\quad \Gamma^3_{45}=\frac{1}{2}\frac{f_3'B}{(f_3-f_2)^2},\quad \Gamma^3_{55}=\frac{e_2e_3\varepsilon_2(f_1-f_3)^2}{(f_2-f_1)^2B},$$
$$\Gamma^4_{24}=\frac{\varepsilon_1}{f_1-f_2},\quad \Gamma^4_{44}=\frac{\varepsilon_2\omega'}{B},\quad \Gamma^4_{45}=\frac{1}{2}\frac{f_3'}{f_3-f_2},\quad \Gamma^5_{12}=-\frac{1}{2}\frac{e_1e_3f_3'A(f_1-f_2)^2}{(f_3-f_2)^2(f_3-f_1)^2},$$
$$\Gamma^5_{22}=\frac{e_1e_3f_3'A^2(f_2-f_1)}{(f_3-f_2)^2(f_3-f_1)^2},\quad \Gamma^5_{25}=\frac{\varepsilon_1}{f_1-f_3},\quad \Gamma^5_{34}=-\frac{1}{2}\frac{e_2e_3f_3'B(f_1-f_2)^2}{(f_3-f_2)^2(f_3-f_1)^2},$$
$$\Gamma^5_{44}=\frac{e_2e_3f_3'B^2(f_1-f_2)}{(f_3-f_2)^2(f_3-f_1)^2},\quad \Gamma^5_{45}=\frac{\varepsilon_2}{f_2-f_3},\quad \Gamma^5_{55}=\frac{f_3'(f_1+f_2-2f_3)}{(f_1-f_3)(f_3-f_2)},$$

а не равные нулю компоненты тензора кривизны определяются равенствами:

$$R^1_{112}=-R^2_{212}=\frac{\varepsilon_1\tau'}{A^2}+\frac{e_1e_3f_3'^2A(f_1-f_2)^2}{4(f_1-f_3)^3(f_2-f_3)^2},$$
$$R^1_{212}=\frac{(3f_1-f_2-2f_3)}{(f_1-f_3)}\left(\frac{\varepsilon_1\tau'}{(f_1-f_2)A}+\frac{e_1e_3f_3'^2(f_1-f_2)A^2}{4(f_1-f_3)^3(f_2-f_3)^2}\right),$$
$$R^1_{314}=R^1_{413}=R^2_{324}=R^2_{423}=\frac{e_2e_3f_3'^2B(f_2-f_1)^2}{4(f_1-f_3)^3(f_3-f_2)^2},$$
$$R^1_{324}=R^1_{423}=\frac{e_2e_3f_3'^2AB(f_1-f_2)^2}{4(f_1-f_3)^4(f_2-f_3)^2}-\frac{\varepsilon_1\tau'e_1e_2(f_2-f_3)B}{(f_1-f_2)(f_1-f_3)A^2},$$
$$R^1_{414}=R^2_{424}=\frac{\varepsilon_2\omega'}{(f_2-f_1)B}+\frac{e_2e_3f_3'^2B^2(f_2-f_1)}{2(f_1-f_3)^3(f_2-f_3)^2},$$
$$R^1_{424}=\frac{\varepsilon_2\omega'A}{B(f_1-f_2)^2}+\frac{e_1e_2\varepsilon_1\tau'(f_1-2f_2-f_3)B^2}{(f_1-f_2)^2(f_1-f_3)A^2}+\frac{e_2e_3f_3'^2B^2A(f_1-f_2)}{2(f_1-f_3)^4(f_2-f_3)^2},$$
$$R^1_{515}=R^2_{525}=\frac{f_3''}{2(f_1-f_3)}+\frac{f_3'^2(2f_1+3f_2-5f_3)}{4(f_1-f_3)^2(f_2-f_3)},$$
$$R^1_{525}=-\frac{f_3''A}{2(f_1-f_3)^2}-\frac{f_3'^2A(2f_1-2f_2-3f_3)}{2(f_2-f_3)(f_1-f_3)^3}-\frac{e_1e_3\varepsilon_1\tau'(f_2-f_3)^2}{(f_1-f_2)^2A^2},$$
$$R^3_{123}=R^3_{213}=R^4_{124}=R^4_{214}=\frac{e_1e_3f_3'^2A(f_1-f_2)^2}{4(f_3-f_2)^3(f_3-f_1)^2},$$
$$R^3_{124}=R^3_{214}=\frac{e_1e_3f_3'^2AB(f_1-f_2)^2}{4(f_1-f_3)^2(f_2-f_3)^4}+\frac{e_1e_2\varepsilon_2\omega'(f_1-f_3)A}{(f_1-f_2)(f_2-f_3)B^2},$$
$$R^3_{223}=-R^4_{224}=-\frac{e_1e_2\varepsilon_1\tau'}{(f_1-f_2)A}-\frac{e_1e_3f_3'^2(f_1-f_2)A^2}{2(f_1-f_3)^2(f_2-f_3)^3},$$
$$R^3_{224}=-\frac{\varepsilon_1\tau'B}{(f_1-f_2)^2A}+\frac{e_1e_2\varepsilon_2\omega'(2f_1-f_2-f_3)A^2}{(f_1-f_2)^2(f_2-f_3)B^2}-\frac{e_2e_3f_3'^2A^2B(f_1-f_2)}{2(f_1-f_3)^2(f_2-f_3)^4},$$
$$R^3_{334}=-R^4_{434}=\frac{\varepsilon_2\omega'}{B^2}+\frac{e_2e_3f_3'^2B(f_1-f_2)^2}{4(f_2-f_3)^3(f_1-f_3)^2},$$
$$R^3_{434}=\frac{\varepsilon_2\omega'(f_1-3f_2+2f_3)}{B(f_1-f_2)(f_2-f_3)}+\frac{e_2e_3f_3'^2B^2(f_1-3f_2+2f_3)(f_1-f_2)}{4(f_1-f_3)^2(f_2-f_3)^4},$$

$$R^3_{535} = R^4_{545} = \frac{f_3''}{2(f_2 - f_3)} + \frac{f_3'^2(3f_1 + 2f_2 - 5f_3)}{4(f_1 - f_3)(f_2 - f_3)^2},$$

$$R^3_{545} = -\frac{f_3'' B}{2(f_2 - f_3)^2} - \frac{e_2 e_3 \varepsilon_2 \omega'(f_1 - f_3)^2}{B(f_1 - f_2)^2} + \frac{f_3'^2 B(2f_1 + f_2 - 3f_3)}{2(f_1 - f_3)(f_2 - f_3)^3},$$

$$R^5_{125} = R^5_{215} = \frac{f_3'' A e_1 e_3 (f_1 - f_2)^2}{2(f_2 - f_3)^2(f_1 - f_3)^2} + \frac{f_3'^2 e_3 A (f_1 - f_2)^2 (2f_1 + 3f_2 - 5f_3)}{4(f_1 - f_3)^3(f_2 - f_3)^3},$$

$$R^5_{225} = \frac{f_3'' A^2 e_1 e_3 (f_1 - f_2)}{(f_2 - f_3)^2(f_1 - f_3)^2} - \frac{\varepsilon_1 \tau'}{A(f_1 - f_3)} + \frac{f_3'^2 e_1 e_3 A^2 (f_1 - f_2)(f_2 - 5f_3 + 4f_1)(f_1 + f_2 - 2f_3)}{4(f_1 - f_3)^4(f_2 - f_3)^3},$$

$$R^5_{345} = R^5_{435} = \frac{f_3'' B e_2 e_3 (f_1 - f_2)^2}{2(f_2 - f_3)^2(f_1 - f_3)^2} + \frac{e_2 e_3 f_3'^2 B (f_1 - f_2)^2 (3f_1 + 2f_2 - 5f_3)}{4(f_1 - f_3)^3(f_2 - f_3)^3},$$

$$R^5_{445} = \frac{f_3'' B^2 e_2 e_3 (f_2 - f_1)}{(f_2 - f_3)^2(f_1 - f_3)^2} - \frac{\varepsilon_2 \omega'}{(f_2 - f_3)B} - \frac{e_2 e_3 f_3'^2 (f_1 + f_2 - 2f_3)(4f_2 - 5f_3 + f_1)(f_1 - f_2) B^2}{4(f_1 - f_3)^3(f_2 - f_3)^4}.$$

Из условия $R^1_{324} = 0$ для h-пространств $H_{221,1}$ и $H_{221,2}$ постоянной кривизны имеем

$$e_1(x^2 - x^4)^3(x^1 + \tau(x^2))^3 f_3'^2 - 4e_3(x^2 - f_3)^3(x^4 - f_3)^3\tau' = 0;$$

отсюда, дифференцируя по x^1, найдем $f_3' = \tau' = 0$. При этом все компоненты тензора кривизны h-пространства $H_{221,2}$ постоянной кривизны обращаются в нуль, что доказывает теорему в данном случае.

Приравняв нулю R^3_{124}, для h-пространства $H_{221,1}$ постоянной кривизны получим

$$e_2(x^2 - x^4)^3(x^3 + \omega(x^4))^3 f_3'^2 + 4e_3(x^2 - f_3)^3(x^4 - f_3)^3\omega' = 0;$$

отсюда ввиду равенства $f_3' = 0$ следует $\omega' = 0$. Это доказывает необходимость условия (5.4); его достаточность легко проверяется, при этом тензор кривизны обращается в нуль, т.е. $K = 0$.

Наконец, для h-пространства $H_{221,3}$ постоянной кривизны из условия $R^1_{324} = 0$ следует $f_3' = 0$, после этого все компоненты тензора кривизны обращаются в нуль. □

5.2. Свойства проективных векторных полей в h-пространствах типа $\{221\}$.

Теорема 5.2. *Если инфинитезимальное преобразование $x^{i'} = x^i + \xi^i \delta t$ является проективным движением в h-пространстве H_{221} типа $\{221\}$ непостоянной кривизны, то в канонической карте компоненты*

$$\xi^1 = \xi^1(x^1, x^2), \quad \xi^2 = \xi^2(x^2), \quad \xi^3 = \xi^3(x^3, x^4), \quad \xi^4 = \xi^4(x^4), \quad \xi^5 = \xi^5(x^5)$$

векторного поля ξ^i, задающего проективное движение, зависят только от указанных переменных.

Доказательство. Рассмотрим в канонической карте (x, U) обобщенные уравнения Киллинга (5.3):

$$L_X g_{ij} \equiv \xi^s \partial_s g_{ij} + g_{is}\partial_j \xi^s + g_{sj}\partial_i \xi^s = a_1 h_{ij} + 2a_2 g_{ij} \tag{5.8}$$

вместе с условиями их интегрируемости (см. [13, с. 230]):

$$L_X R^i_{jkl} \equiv \xi^s \partial_s R^i_{jkl} - R^s_{jkl}\partial_s \xi^i + R^i_{skl}\partial_j \xi^s + R^i_{jsl}\partial_k \xi^s + R^i_{jks}\partial_l \xi^s = \delta^i_l \varphi_{,jk} - \delta^i_k \varphi_{,jl}, \tag{5.9}$$

где R^i_{jkl} — компоненты тензора кривизны метрики g_{ij}, а φ — определяющая функция проективного движения $X = \xi^s \partial_s$.

Из (5.8) при $(ij) = (11)$, (33) найдем $\partial_1 \xi^2 = \partial_3 \xi^4 = 0$.

Рассмотрим h-пространства $H_{221,1}$. Используя выражение для компонент тензора кривизны, где $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, из (5.9) при $(ijkl) = (2213)$, (2334) получим

$$(R^2_{212} - R^3_{213})\partial_3 \xi^2 = (R^2_{324} - R^3_{334})\partial_3 \xi^2 = 0.$$

Если $\partial_3 \xi^2 \neq 0$, то выполняются равенства

$$\begin{gathered} e_1(x^1 + \tau(x^2))^3(x^2 - x^4)^3 f_3'^2 - 4e_3(x^2 - f_3)^3(x^4 - f_3)^3\tau'(x^2) = 0, \\ e_2(x^2 - x^4)^3(x^3 + \omega(x^4))^3 f_3'^2 + 4e_3(x^2 - f_3)^3(x^4 - f_3)^3\omega'(x^4) = 0. \end{gathered} \tag{5.10}$$

Дифференцируя первое равенство по x^1, получим $f_3' = 0$, после этого из (5.10) найдем $\tau' = \omega' = 0$, и $H_{221,1}$ по теореме 5.1 имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению. Поэтому $\partial_3\xi^2 = 0$, и из (5.8) при $(ij) = (13)$ выводим $\partial_1\xi^4 = 0$.

Учитывая в каждом случае найденные ранее соотношения, из (5.9) при $(ijkl) = (2214)$, (2434) найдем

$$(R^2_{212} - R^4_{214})\partial_4\xi^2 = (R^4_{443} - R^2_{423})\partial_4\xi^2 = 0;$$

отсюда при $\partial_4\xi^2 \neq 0$ следует (5.10), поэтому $\partial_4\xi^2 = 0$, и из (5.8) при $(ij) = (14)$ получим $\partial_1\xi^3 = 0$.

Уравнение (5.9) при $(ijkl) = (2215)$, (2445) дает

$$(R^2_{212} - R^5_{215})\partial_5\xi^2 = (R^2_{442} - R^5_{445})\partial_5\xi^2 = 0,$$

что при $\partial_5\xi^2 \neq 0$ влечет равенства

$$e_1(x^1 + \tau(x^2))^3(x^2 - x^4)^2((x^2 - f_3)(x^4 - f_3)f_3''+ \\ + (x^2 + 2x^4 - 3f_3)f_3'^2) + 2e_3(x^2 - f_3)^3(x^4 - f_3)^3\tau'(x^2) = 0, \quad (5.11)$$

$$e_2(x^3 + \omega(x^4))^3(x^2 - x^4)^2(4(x^2 - f_3)(x^4 - f_3)^2 f_3''+ \\ + (3x^4 + x^2 - 4f^3)(2x^4 + x^2 - 3f^3)f_3'^2) + 4e_3(x^2 - f_3)^4(x^4 - f_3)^3\omega'(x^4) = 0.$$

Дифференцируя первое равенство трижды по x^1, затем по x^2 и x^4, найдем сначала $f_3' = 0$, затем $\tau' = 0$ и, из второго равенства, $\omega' = 0$, т. е. выполняется (5.4), и $H_{221,1}$ имеет постоянную кривизну. Поэтому $\partial_5\xi^2 = 0$, и из (5.8) с $(ij) = (15)$, $\partial_1\xi^5 = 0$.

Из (5.9) при $(ijkl) = (1125)$, (1445) получим

$$(R^1_{121} - R^5_{125})\partial_5\xi^1 = (R^1_{441} - R^5_{445})\partial_5\xi^1 = 0;$$

отсюда при $\partial_5\xi^1 \neq 0$ следует (5.11), поэтому $\partial_5\xi^1 = 0$, и, в силу (5.8) с $(ij) = (25)$, $\partial_2\xi^5 = 0$.

Записав уравнение (5.9) при $(ijkl) = (1123)$, (1334), получим

$$(R^1_{121} - R^3_{123})\partial_3\xi^1 = (R^1_{314} - R^3_{334})\partial_3\xi^1 = 0.$$

Если $\partial_3\xi^1 \neq 0$, то выполняется (5.10), что, как мы видели, означает постоянство кривизны пространства $H_{221,1}$. Поэтому $\partial_3\xi^1 = 0$, и из (5.8) с $(ij) = (23)$ получаем $\partial_2\xi^4 = 0$.

Положив $(ijkl) = (1124), (1434)$ в (5.9), будем иметь

$$(R^1_{121} - R^4_{124})\partial_4\xi^1 = (R^1_{431} - R^4_{434})\partial_4\xi^1 = 0.$$

При $\partial_4\xi^1 \neq 0$ отсюда вытекает (5.10); следовательно, $\partial_4\xi^1 = 0$. После этого из (5.8) при $(ij) = (24)$ находим $\partial_2\xi^3 = 0$.

Уравнение (5.9) при $(ijkl) = (4125)$, (4225), (4435) дает

$$(R^4_{124} - R^5_{125})\partial_5\xi^4 = (R^4_{224} - R^5_{225})\partial_5\xi^4 = (R^4_{434} - R^5_{435})\partial_5\xi^4 = 0.$$

Отсюда при $\partial_5\xi^4 \neq 0$ найдем

$$2(x^2 - f_3)(x^4 - f_3)f_3'' + 3(x^2 + x^4 - 2f_3)f_3'^2 = 0, \quad (5.12)$$

$$e_1(x^1 + \tau(x^2))^3(x^2 - x^4)^2(4(x^2 - f_3)^2(x^4 - f_3)f_3''+ \\ + (x^4 + 3x^2 - 4f^3)(x^4 + 2x^2 - 3f^3)f_3'^2) + 4e_3(x^2 - f_3)^3(x^4 - f_3)^4\tau'(x^2) = 0,$$

$$e_2(x^2 - x^4)^2(x^3 + \omega(x^4))^3((x^2 - f_3)(x^4 - f_3)f_3''+ \\ + (x^4 + 2x^2 - 3f^3)f_3'^2) + 2e_3(x^2 - f_3)^3(x^4 - f_3)^3\omega'(x^4) = 0.$$

Из первого равенства выводим $f_3' = 0$; тогда, в силу второго и третьего равенств, $\tau' = \omega' = 0$, и $H_{221,1}$ имеет постоянную кривизну. Поэтому $\partial_5\xi^4 = 0$, и из (5.8) при $(ij) = (35)$ получим $\partial_3\xi^5 = 0$.

Из (5.9) при $(ijkl) = (3125)$, (3225), (3345) имеем

$$(R^3_{123} - R^5_{125})\partial_5\xi^3 = (R^3_{223} - R^5_{225})\partial_5\xi^3 = (R^3_{343} - R^5_{345})\partial_5\xi^3 = 0.$$

При $\partial_5\xi^3 \neq 0$ отсюда следуют равенства (5.12), поэтому $\partial_5\xi^3 = 0$ и уравнение (5.8) при $(ij) = (45)$ дает $\partial_4\xi^5 = 0$, что завершает доказательство теоремы 5.2 для h-пространства $H_{221,1}$.

Для h-пространств $H_{221,2}$ и $H_{221,3}$ теорема 5.2 доказывается аналогично. □

5.3. Интегрирование обобщенных уравнений Киллинга в h-пространствах типа $\{221\}$.

5.3.1. Ввиду теоремы 5.2 часть уравнений Киллинга (5.8) обращаются в тождество, остальные, при $(ij) = (12)$, (22), (34), (44),(55), приводятся к следующему виду:

$$\partial_1\xi^1 + \frac{d\xi^2}{dx^2} + \frac{\varepsilon_1}{A}\xi^1 + \varepsilon_1\left(\frac{\tau'}{A} - \frac{2}{f_2 - f_1} - \frac{1}{f_3 - f_1}\right)\xi^2 + \\ + \frac{2\varepsilon_2}{f_2 - f_1}\xi^4 + \frac{f_3'}{f_3 - f_1}\xi^5 = a_1(3f_1 + 2f_2 + f_3) + 2a_2, \quad (5.13)$$

$$\partial_2\xi^1 - A\left(\frac{2}{f_2 - f_1} + \frac{1}{f_3 - f_1}\right)\frac{d\xi^2}{dx^2} - \varepsilon_1\left(\frac{2}{f_2 - f_1} + \frac{1}{f_3 - f_1}\right)\xi^1 + \\ + \varepsilon_1\left(A\left(\frac{1}{(f_2 - f_1)^2} + \frac{2}{(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)}\right) - \left(\frac{2}{f_2 - f_1} + \frac{1}{f_3 - f_1}\right)\tau'\right)\xi^2 - \\ - \varepsilon_2 A\left(\frac{1}{(f_2 - f_1)^2} + \frac{1}{(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)}\right)\xi^4 - \frac{Af_3'}{(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)}\xi^5 = \\ = \frac{1}{2}a_1 A\left(1 - (3f_1 + 2f_2 + f_3)\left(\frac{2}{f_2 - f_1} + \frac{1}{f_3 - f_1}\right)\right) - a_2 A\left(\frac{2}{f_2 - f_1} + \frac{1}{f_3 - f_1}\right), \quad (5.14)$$

$$\partial_3\xi^3 + \frac{d\xi^4}{dx^4} + \frac{2\varepsilon_1}{f_1 - f_2}\xi^2 + \frac{\varepsilon_2}{B}\xi^3 + \varepsilon_2\left(\frac{\omega'}{B} - \frac{2}{f_1 - f_2} - \frac{1}{f_3 - f_2} +\right)\xi^4 + \frac{f_3'}{f_3 - f_2}\xi^5 = \\ = a_1(2f_1 + 3f_2 + f_3) + 2a_2, \quad (5.15)$$

$$\partial_4\xi^3 - B\left(\frac{2}{f_1 - f_2} + \frac{1}{f_3 - f_2}\right)\frac{d\xi^4}{dx^4} - \varepsilon_1 B\left(\frac{1}{(f_1 - f_2)^2} + \frac{1}{(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)}\right)\xi^2 - \\ - \varepsilon_2\left(\frac{2}{f_1 - f_2} + \frac{1}{f_3 - f_2}\right)\xi^3 + \varepsilon_2\Bigg(B\left(\frac{1}{(f_1 - f_2)^2} + \frac{2}{(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)}\right) - \\ - \left(\frac{2}{f_1 - f_2} + \frac{1}{f_3 - f_2}\right)\omega'\Bigg)\xi^4 - \frac{Bf_3'}{(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)}\xi^5 - \\ = \frac{1}{2}a_1 B\left(1 - (2f_1 + 3f_2 + f_3)\left(\frac{2}{f_1 - f_2} + \frac{1}{f_3 - f_2}\right)\right) - a_2 B\left(\frac{2}{f_1 - f_2} + \frac{1}{f_3 - f_2}\right), \quad (5.16)$$

$$\frac{d\xi^5}{dx^5} + \frac{\varepsilon_1}{f_1 - f_3}\xi^2 + \frac{\varepsilon_2}{f_2 - f_3}\xi^4 - \left(\frac{f_3'}{f_1 - f_3} + \frac{f_3'}{f_2 - f_3}\right)\xi^5 = a_1(f_1 + f_2 + f_3) + a_2. \quad (5.17)$$

Используя теорему 5.2, проинтегрируем уравнения Киллинга для h-пространств $H_{221,1}$, положив $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. Дифференцируя уравнение (5.13) по x^4, после несложных преобразований получим равенство

$$a_1(x^4 - x^2)^2 - \xi^2 + \xi^4 - (\xi^4)'(x^4 - x^2) = 0; \quad (5.18)$$

взяв производную по x^4 и затем по x^2, найдем $\xi^{4''} = 2a_1$, откуда следует

$$\xi^4 = a_1(x^4)^2 + a_3x^4 + a_4, \quad (5.19)$$

и из (5.18) получаем

$$\xi^2 = a_1(x^2)^2 + a_3x^2 + a_4, \quad (5.20)$$

где a_3, a_4 — постоянные.

Возьмем производную по x^5 от (5.13), умножим на $(f_3-f_1)^2$ и, выписывая коэффициенты при первой и нулевой степенях переменной x^2, получим сначала

$$f_3'\frac{d\xi^5}{dx^5}+f_3{}''\xi^5=(2a_1f_3+a_3)f_3',$$

затем

$$\xi^5f_3'=a_1f_3^2+a_3f_3+a_4. \tag{5.21}$$

После этого из (5.17) следует уравнение

$$\frac{d\xi^5}{dx^5}=-a_1f_3+a_2-2a_3. \tag{5.22}$$

Из (5.21) и (5.22) при $f_3'\neq 0$ имеем

$$\frac{f_3{}''}{f_3'{}^2}=\frac{3a_1f_3-a_2+3a_3}{a_1f_3^2+a_3f_3+a_4}; \tag{5.23}$$

при $f_3'=0$, полагая $f_3=0$ (см. замечание выше), получим $a_4=0$.

Дифференцируя (5.14) дважды по x^1, найдем

$$\partial_{112}\xi^1-\left(\frac{2}{f_2-f_1}+\frac{1}{f_3-f_1}\right)\partial_{11}\xi^1=0; \tag{5.24}$$

отсюда дифференцированием по x^4 выводим $\partial_{11}\xi^1=0$. Положим $\xi^1=\mu(x^2)A+\nu(x^2)$; подставив это в уравнение (5.13), найдем функции $\mu(x^2)$ и $\nu(x^2)$; в итоге

$$\xi^1=-(a_1x^2-a_2+2a_3)(x^1+\tau(x^2))-\xi^2\tau'. \tag{5.25}$$

Так же из (5.15), (5.16) имеем

$$\xi^3=-(a_1x^4-a_2+2a_3)(x^3+\omega(x^4))-\xi^4\omega'. \tag{5.26}$$

Если внести найденные выражения в (5.14) и (5.16), то получим уравнения

$$(a_1(x^2)^2+a_3x^2+a_4)\tau''+\left(3a_1x^2-a_2+3a_3\right)\tau'=0, \tag{5.27}$$

$$(a_1(x^4)^2+a_3x^4+a_4)\omega''+\left(3a_1x^4-a_2+3a_3\right)\omega'=0, \tag{5.28}$$

где $a_4=0$ в случае $f_3=0$.

5.3.2. Обратимся к пространству $H_{221,2}$ ($\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=0$, $f_1=x^2$, $f_2=c_2=\mathrm{const}$, $B=1$).

Дифференцируя (5.15) по x^2, найдем

$$\xi^2=(a_1x^2+a_3)(x^2-c_2),\quad a_3=\mathrm{const}\,.$$

Из (5.16), (5.15), (5.15) и (5.16) соответственно получаем

$$\partial_{43}\xi^3=0,\quad \xi^4{}''=0,\quad \partial_{44}\xi^3=\partial_{33}\xi^3=0.$$

В итоге

$$\xi^3=a_4x^3+a_5x^4+a_6,\quad \xi^4=a_7x^4+a_8,$$

где $a_4,\dots,a_8$ — постоянные. Дифференцируя (5.15) по x^5, получим

$$\xi^5f_3'=(a_1f_3+a_9)(f_3-c_2),$$

где постоянная a_9 равна нулю при $f_3=0$. Из (5.15) имеем

$$a_9=3a_1c_2+2a_2-2a_3-a_4-a_7.$$

Дифференцирование (5.16) по x^2 дает

$$a_7=(a_1+a_5)f_3+a_1c_2+a_2-a_3-a_5c_2;$$

отсюда следует

$$a_5=-a_1,\quad a_7=2a_1c_2+a_2-a_3.$$

Взяв производную от (5.16) по x^5, получим

$$a_4=a_1c_2+a_2-2a_3,\quad a_3=a_1c_2+\frac{1}{2}a_2;$$

далее,

$$\begin{aligned} &\xi^2=\left(a_1(x^2+c_2)+\frac{1}{2}a_2\right)(x^2-c_2), && \xi^3=-a_1(c_2x^3+x^4)+a_6,\\ &\xi^4=\left(a_1c_2+\frac{1}{2}a_2\right)x^4+a_8, && \xi^5f_3'=\left(a_1(f_3+c_2)+\frac{1}{2}a_2\right)(f_3-c_2). \end{aligned} \tag{5.29}$$

При $f_3'\neq 0$ из уравнения (5.24) дифференцированием по x^5 выводим $\partial_{11}\xi^1=0$. Положим

$$\xi^1=\mu(x^2)A+\nu(x^2);$$

подставив это в (5.13), найдем функции $\mu=-a_1x^2$, $\nu=-\xi^2\tau'$ и

$$\xi^1=-a_1x^2(x^1+\tau)-\xi^2\tau'. \tag{5.30}$$

Затем из (5.14), (5.17) имеем

$$(x^2-c_2)(2a_1(x^2+c_2)+a_2)\tau''+(6a_1x^2+a_2)\tau'=0, \tag{5.31}$$

$$f_3''=\frac{6a_1f_3+a_2}{2a_1(f_3^2-c_2^2)+a_2(f_3-c_2)}f_3'^2. \tag{5.32}$$

В случае $f_3=0$ из (5.15), (5.16) и (5.17) найдем

$$\begin{aligned} &\xi^2=a_1x^2(x^2-c_2), && \xi^3=(a_1c_2+a_2)x^3-a_1x^4+a_6,\\ &\xi^4=(2a_1c_2+a_2)x^4+a_8, && \xi^5=(2a_1c_2+a_2)x^5+a_{10},\quad a_{10}=\mathrm{const}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Интегрируя уравнение

$$\partial_{111}\xi^1=\frac{1}{x^1+\tau(x^2)}\partial_{11}\xi^1,$$

полученное дифференцированием (5.13) дважды по x^1, найдем

$$\xi^1=\frac{\rho(x^2)}{2(x^1+\tau)}+\mu(x^2)(x^1+\tau)+\nu(x^2);$$

подставив в (5.13), получим

$$\mu=-a_1x^2+2a_1c_2+a_2,\quad \nu=-\xi^2\tau'.$$

После этого из (5.14) следует уравнение $\rho\tau'=0$; отсюда $\rho=0$, ибо при $\tau'=0$ выполняется (5.5), и по теореме 5.1 пространство $H_{221,2}$ имеет постоянную кривизну. Имеем

$$\xi^1=(a_1(2c_2-x^2)+a_2)(x^1+\tau)-\xi^2\tau', \tag{5.34}$$

$$a_1x^2(x^2-c_2)\tau''=(3a_1(c_2-x^2)+a_2)\tau'. \tag{5.35}$$

5.3.3. Интегрируя уравнения Киллинга для пространства $H_{221,3}$ непостоянной кривизны ($\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$, $A=B=1$, $f_1=c_1, f_2=c_2$, $f_3\neq\mathrm{const}$), получим

$$\begin{aligned} &\xi^1=(a_1(c_1+2c_2)+a_2)\,x^1-a_1x^2+a_3, && \xi^2=(a_1(2c_1+c_2)+a_2)\,x^2+a_4,\\ &\xi^3=(a_1(2c_1+c_2)+a_2)\,x^3-a_1x^4+a_5, && \xi^4=(a_1(c_1+2c_2)+a_2)\,x^4+a_6, \end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned} &\xi^5\frac{df_3}{dx^5}=a_1(f_3-c_1)(f_3-c_2),\\ &\frac{d\xi^5}{dx^5}=a_1\left(2(c_1+c_2)-f_3\right)+a_2.\\ &\frac{a_1f_3''}{f_3'^2}=\frac{3a_1(f_3-c_1-c_2)-a_2}{(f_3-c_1)(f_3-c_2)}. \end{aligned} \tag{5.37}$$

5.4. Инфинитезимальные гомотетии и изометрии в h-пространствах типа $\{221\}$. В разделе **??** доказано, что максимальная проективная алгебра Ли P_r в h-пространстве H_{221} непостоянной кривизны, допускающем негомотетическое проективное движение, обладает подалгеброй H_{r-1} инфинитезимальных гомотетий. Поэтому базис в P_r может быть получен добавлением к базису в H_{r-1} негомотетического проективного движения $X = \xi^i \partial_i$, определяемого приведенными выше формулами, где $a_1 = 1$. Рассмотрим, как это делается для всех возможных случаев.

H-пространства $H_{221,1}$ непостоянной кривизны. Полагая $a_1 = 1$ в (5.23), (5.27), (5.28) и вводя обозначения $a_2 \equiv 3a$, $a_3 \equiv b$, $a_4 \equiv c$, получим

$$f_3'' = 3\frac{f_3 - a + b}{f_3^2 + bf_3 + c} f_3'^2, \tag{5.38}$$

$$((x^2)^2 + bx^2 + c)\tau'' + 3(x^2 - a + b)\tau' = 0, \tag{5.39}$$

$$((x^4)^2 + bx^4 + c)\omega'' + 3(x^4 - a + b)\omega' = 0. \tag{5.40}$$

Если векторное поле X задает гомотетии, то в подходящей карте его координаты ξ^i удовлетворяют соотношениям (5.19), (5.20), (5.21), (5.25), (5.26), где $a_1 = 0$, и выполняются равенства

$$(a_3 f_3 + a_4) f_3'' - 3\left(-\frac{a_2}{6} + a_3\right) f_3'^2 = 0, \tag{5.41}$$

$$(a_3 x^2 + a_4)\tau'' + 3\left(-\frac{a_2}{6} + a_3\right)\tau' = 0, \tag{5.42}$$

$$(a_3 x^4 + a_4)\omega'' + 3\left(-\frac{a_2}{6} + a_3\right)\omega' = 0, \tag{5.43}$$

где $a_4 = 0$ в случае $f_3 = 0$. При $f_3' \neq 0$ из (5.38) и (5.41) имеем

$$c \neq a(b - a), \quad a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

либо

$$c = a(b - a), \quad a_2 = 0, \quad a_4 = aa_3.$$

В обоих случаях $a_2 = 0$, следовательно, гомотетии сводятся к изометриям.

Положив $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ в (5.19), (5.20), (5.21), (5.25), (5.26), убедимся, что изометрии в случае $c \neq a(b - a)$ отсутствуют.

В случае $c = a(b-a)$ к негомотетическому проективному движению присоединяется изометрия ($a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = a$). Интегрирование уравнений (5.38)—(5.40) после замены $f_3 \to f_3 + a$ и переноса начала координат, не меняющих вида метрики, дает

$$f_3 = \frac{C_0}{\sqrt{|x^5|}}, \quad \tau = \frac{C_1}{x^{2^2}}, \quad \omega = \frac{C_2}{x^{4^2}}, \tag{5.44}$$

где $C_0 \neq 0$, C_1, C_2 — здесь и далее постоянные.

При $f_3 = 0$ выполняются уравнения (5.39), (5.40), (5.42), (5.43), где $c = a_4 = 0$. Из (5.39) и (5.42) выводим $a_2 = aa_3 = 0$. В случае $a = 0$ имеются изометрия ($a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 0$) и трансляция ∂_5; τ и ω определяются формулами (5.44).

В случае $a_3 = 0$ имеется трансляция ∂_5,

$$\begin{aligned} \tau &= C_1\left(1 + \frac{3a - b}{x^2}\right)\left(1 + \frac{b}{x^2}\right)\left(\frac{x^2}{x^2 + b}\right)^{3a/b}, \\ \omega &= C_2\left(1 + \frac{3a - b}{x^4}\right)\left(1 + \frac{b}{x^4}\right)\left(\frac{x^4}{x^4 + b}\right)^{3a/b}. \end{aligned} \tag{5.45}$$

H-пространства $H_{221,2}$ непостоянной кривизны. При $f_3' \neq 0$ положим $a_1 = 1$, $a_2 \equiv 6a$; тогда уравнения (5.31) и (5.32) примут вид

$$(x^{2^2} + 3a(x^2 - c_2) - c_2^2)\tau'' + 3(x^2 + a)\tau' = 0, \tag{5.46}$$

$$\frac{f_3''}{f_3'^2} = \frac{3}{2}\frac{f_3 + a}{f_3^2 + 3a(f_3 - c_2) - c_2^2}. \tag{5.47}$$

Приравняв a_1 нулю в (5.32) и сравнив с (5.47), получим $a_2 = 0$, следовательно, гомотетии отсутствуют, а изометрии задаются формулами (5.29), (5.30) при $a_1 = a_2 = 0$.

В случае $f_3 = 0$ из (5.35) при $a_1 = 1, a_2 \equiv a$ получим

$$x^2(x^2 - c_2)\tau'' = (3(c_2 - x^2) + a)\tau'. \tag{5.48}$$

Сравнив (5.35) при $a_1 = 0$ с (5.48) и учтя неравенство $\tau' \neq 0$, найдем $a_2 = 0$. Поэтому гомотетии сводятся к изометриям (5.33), (5.34), где $a_1 = a_2 = 0$. Интеграция (5.48) с учетом допустимого сдвига $x^1 \to x^1 + \mathrm{const}$ дает

$$\tau = C_1 \left(1 + \frac{a + c_2}{x^2}\right)\left(1 - \frac{c_2}{x^2}\right)^{1 + a/c_2}. \tag{5.49}$$

H-пространства $H_{221,3}$ непостоянной кривизны. Положив $a_1 = 1$, $a_2 \equiv 3a$ в (5.37), получим

$$\frac{f_3''}{f_3'^2} = 3\frac{f_3 - c_1 - c_2 - a}{(f_3 - c_1)(f_3 - c_2)}.$$

При $a_1 = 0$ из (5.37) ввиду неравенства $f_3' \neq 0$ следует $a_2 = 0$, т.е. гомотетии отсутствуют, а изометрии определяются формулами (5.36) при $a_1 = a_2 = 0$.

Найдя во всех случаях генераторы изометрий, получим следующий результат.

5.5. Классификация h-пространств типа $\{221\}$ по алгебрам Ли проективных и аффинных движений.

Теорема 5.3. *Если пятимерное h-пространство H_{221} типа* $\{221\}$ (см. (5.1)) *непостоянной кривизны допускает негомотетическое проективное движение, то это пространство и действующая в нем максимальная проективная алгебра Ли P определяются указанными далее формулами, где $\underset{n}{E}$ — неаффинное проективное движение, $\underset{г}{E}$ — неизометрическая инфинитезимальная гомотетия, $\underset{u}{E}$ — инфинитезимальная изометрия.*

I. *H-пространства $H_{221,1}$ непостоянной кривизны* ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $f_3'^2 + \tau'^2 + \omega'^2 \neq 0$).

I.A. *Функции f_3, τ и ω являются решениями уравнений* (5.38), (5.39) *и* (5.40), *где a, b, c — постоянные, связанные условием $a - b(c - b) \neq 0$; $f_3' \neq 0$. Размерность проективной алгебры Ли* $\dim P = 1$. *Алгебра P натянута на проективное векторное поле*

$$\begin{aligned}\underset{n}{E}_1 = &\left\{(3a - 2b - x^2)(x^1 + \tau) - \left(x^{2^2} + bx^2 + c\right)\tau'\right\}\partial_1 + \left(x^{2^2} + bx^2 + c\right)\partial_2 + \\ &+ \left\{(3a - 2b - x^4)(x^3 + \omega) - \left(x^{4^2} + bx^4 + c\right)\omega'\right\}\partial_3 + (x^{4^2} + bx^4 + c)\partial_4 + \\ &+ \frac{f_3^2 + bf_3 + c}{f_3'}\partial_5.\end{aligned}$$

I.B. *Функции f_3, τ и ω имеют вид* (5.44), $f_3' \neq 0$. *Размерность проективной алгебры Ли* $\dim P = 2$. *Базис в P включает проективное векторное поле*

$$\underset{n}{E}_1 = -x^2(x^1 + \tau)\partial_1 + x^{2^2}\partial_2 - x^4(x^3 + \omega)\partial_3 + x^{4^2}\partial_4 - 2x^5 f_3\partial_5$$

и инфинитезимальную изометрию

$$\underset{u}{E}_2 = -2x^1\partial_1 + x^2\partial_2 - 2x^3\partial_3 + x^4\partial_4 - 2x^5\partial_5.$$

Структурное уравнение имеет вид

$$[E_2, E_1] = E_1.$$

I.C. *Функции* τ *и* ω *задаются равенствами* (5.45), $f_3 = 0$. *Размерность проективной алгебры Ли* $\dim P = 2$. *Базис в* P *состоит из проективного движения*

$$\underset{n}{E}_1 = \Big\{(3a-2b-x^2)(x^1+\tau) - x^2(x^2+b)\tau'\Big\}\partial_1 + x^2(x^2+b)\partial_2 + \\ + \Big\{(3a-2b-x^4)(x^3+\omega) - x^4(x^4+b)\omega'\Big\}\partial_3 + x^4(x^4+b)\partial_4 + \\ + (3a-2b)x^5\partial_5.$$

и трансляции $\underset{u}{E}_2 = \partial_5$;

$$[E_2, E_1] = (3a-2b)E_2.$$

II. H-*пространства* $H_{221,2}$ *непостоянной кривизны* ($\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$, $f_2 = c_2 = \mathrm{const}$, ${f_3'}^2 + {\tau'}^2 \neq 0$).

II.A. *Непостоянная функция* f_3 *задается уравнением* (5.47),

$$\tau = C_1(x^2+3a)(x^2-c_2)^{-c_2/(3a+2c_2)}(x^2+3a+c_2)^{-(3a+c_2)/(3a+2c_2)},$$

где a — *постоянная. Размерность проективной алгебры Ли* $\dim P = 3$. *Алгебра Ли* P *натянута на проективное векторное поле*

$$\underset{n}{E}_1 = \Big\{-x^2(x^1+\tau) - (x^2+3a+c_2)(x^2-c_2)\tau'\Big\}\partial_1 + (x^2+3a+c_2)(x^2-c_2)\partial_2 - \\ - (c_2x^3+x^4)\partial_3 + (3a+c_2)x^4\partial_4 + \frac{(f_3+3a+c_2)(f_3-c_2)}{f_3'}\partial_5$$

и две трансляции $\underset{u}{E}_2 = \partial_3$, $\underset{u}{E}_3 = \partial_4$. *Структурные уравнения*:

$$[E_1, E_2] = c_2E_2, \quad [E_1, E_3] = E_2 - (3a+c_2)E_3, \quad [E_2, E_3] = 0.$$

II.B. *Постоянная функция* $f_3 = 0$, τ *определяется равенством* (5.49), *где* a — *постоянная. Размерность проективной алгебры Ли* $\dim P = 4$. *Базис в* P *включает проективное векторное поле*

$$\underset{n}{E}_1 = \Big\{(a+2c_2-x^2)(x^1+\tau) - x^2(x^2-c_2)\tau'\Big\}\partial_1 + x^2(x^2-c_2)\partial_2 + \\ + \big((a+c_2)x^3 - x^4\big)\partial_3 + (a+2c_2)x^4\partial_4 + (a+2c_2)x^5\partial_5$$

и три трансляции $\underset{u}{E}_2 = \partial_3$, $\underset{u}{E}_3 = \partial_4$ *и* $\underset{u}{E}_4 = \partial_5$,

$$[E_2, E_1] = (a+c_2)E_2, \quad [E_3, E_1] = -E_2 + (a+2c_2)E_3, \quad [E_4, E_1] = (a+2c_2)E_4;$$

остальные скобки Ли равны нулю.

III. H-*пространства* $H_{221,3}$ *непостоянной кривизны* ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $A = B = 1$, $f_1 = c_1$ *и* $f_2 = c_2$ — *постоянные*, $f_3' \neq 0$). *Функция* f_3 *является решением уравнения*

$$\frac{f_3''}{{f_3'}^2} = 3\frac{f_3 - c_1 - c_2 - a}{(f_3-c_1)(f_3-c_2)},$$

где a — *постоянная. Размерность проективной алгебры Ли* $\dim P = 5$. *Алгебра Ли* P *натянута на проективное движение*

$$\underset{n}{E}_1 = \big((3a+c_1+2c_2)x^1 - x^2\big)\partial_1 + (3a+2c_1+c_2)x^2\partial_2 + \\ + \big((3a+2c_1+c_2)x^3 - x^4\big)\partial_3 + (3a+c_1+2c_2)x^4\partial_4 + \frac{(f_3-c_1)(f_3-c_2)}{f_3'}\partial_5$$

и пять трансляций $\underset{u}{E}_2 = \partial_1$, $\underset{u}{E}_3 = \partial_2$, $\underset{u}{E}_4 = \partial_3$ *и* $\underset{u}{E}_5 = \partial_4$. *Структурные уравнения алгебры Ли* P *имеют вид*

$$[E_2, E_1] = (3a+c_1+2c_2)E_2, \quad [E_3, E_1] = -E_2 + (3a+2c_1+c_2)E_3, \\ [E_4, E_1] = (3a+2c_1+c_2)E_4, \quad [E_5, E_1] = -E_4 + (3a+c_1+2c_2)E_5;$$

остальные скобки Ли равны нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аминова А. В.* Группы проективных преобразований некоторых полей тяготения// Гравит. теория относит. — 1970. — № 7. — С. 127–131.
2. *Аминова А. В.* О полях тяготения, допускающих группы проективных движений// Докл. АН СССР. — 1971. — *197*, № 4. — С. 807–809.
3. *Аминова А. В.* Проективные группы в полях тяготения. I// Гравит. теория относит. — 1971. — № 8. — С. 3—13.
4. *Аминова А. В.* Проективные группы в полях тяготения. II// Гравит. теория относит. — 1971. — № 8. — С. 14–20.
5. *Аминова А. В.* О бесконечно малых преобразованиях, сохраняющих траектории пробных тел/ Препринт ИТФ АН УССР 71-85Р. — Киев, 1971.
6. *Аминова А. В.* Проективно-групповые свойства некоторых римановых пространств// Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР. — 1974. — *6*. — С. 295–316.
7. *Аминова А. В.* Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности// Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР. — 1974. — *6*. — С. 317–346.
8. *Аминова А. В.* Проективные группы в пространствах-временах, допускающих два постоянных векторных поля// Гравит. теория относит. — 1976. — № 10. — С. 9–22.
9. *Аминова А. В.* Об интегрировании ковариантного дифференциального уравнения первого порядка и геодезическом отображении римановых пространств произвольной сигнатуры и размерности// Изв. вузов. Мат. — 1988. — № 1. — С. 3–13.
10. *Аминова А. В.* Группы преобразований римановых многообразий// Итоги науки техн. Сер. Пробл. геом. ВИНИТИ. — 1990. — *22*. — С. 97–165.
11. *Аминова А. В.* Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими// Усп. мат. наук. — 1993. — *48*, № 2 (290). — С. 107–164.
12. *Аминова А. В.* Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий// Усп. мат. наук. — 1995. — *50*, № 1. — С. 69–142.
13. *Аминова А. В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. — М.: Янус-К, 2003.
14. *Аминова А. В.* Проективные симметрии и законы сохранения в K-пространствах, определяемых полями тяготения// Изв. вузов. Физика. — 2008. — *51*, № 4. — С. 30–37.
15. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Проективно-геометрическая теория систем дифференциальных уравнений второго порядка: теоремы выпрямления и симметрии// Мат. сб. — 2010. — *201*, № 5. — С. 3–13.
16. *Аминова А. В.* Проективные симметрии гравитационных полей. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018.
17. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Проективная геометрия систем дифференциальных уравнений второго порядка// Мат. сб. — 2006. — *197*, № 7. — С. 3–28.
18. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Пространства с проективной связностью Картана и групповой анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2009. — *123*. — С. 58–80.
19. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств специального вида// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 5. — С. 97–102.
20. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. I. H-пространства типа $\{32\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2018. — № 4. — С. 21–31.
21. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. II. H-пространства типа $\{41\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 1. — С. 45–55.
22. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. III. H-пространства типа $\{5\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 1. — С. 56—66.
23. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* H-пространства (H_{41}, g) типа $\{41\}$: проективно-групповые свойства// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 4. — С. 4–12.
24. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Проективно-групповые свойства h-пространств типа $\{221\}$// Изв. вузов. Мат. — 2019. — № 10. — С. 87–93.

25. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Проективно-групповые свойства h-пространств H_5 типа $\{5\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2020. — № 1. — С. 4–11.
26. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О свойствах проективных алгебр Ли жестких h-пространств H_{32} типа $\{32\}$// Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2020. — *162*, № 2. — С. 111–119.
27. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Алгебры Ли проективных движений пятимерных h-пространств H_{221} типа $\{221\}$// Изв. вузов. Мат. — 2021. — № 12. — С. 9–22.
28. *Буданов К. М., Султанов А. Я.* Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения Вейля второго порядка со связностью полного лифта// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 12. — С. 3—13.
29. *Гладуш В. Д.* Пятимерная общая теория относительности и теория Калуцы—-Клейна// Теор. мат. физ. — 2003. — *136*, № 3. — С. 480—495.
30. *Голиков В. И.* О геодезическом отображении полей тяготения общего вида// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1963. — № 12. — С. 97–129.
31. *Егоров И. П.* Движения в пространствах аффинной связности. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965.
32. *Жукова Л. И.* Римановы пространства с проективной группой// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124*. — С. 13—18.
33. *Жукова Л. И.* Проективные преобразования в римановых пространствах (изотропный случай)// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124*. — С. 19–25.
34. *Жукова Л. И.* О группах проективных преобразований некоторых римановых пространств// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124*. — С. 26–30.
35. *Жукова Л. И.* Римановы пространства, допускающие проективные преобразования// Изв. вузов. Мат. — 1973. — № 6. — С. 37–41.
36. *Киселев А. С.* Космологическая проблема в пятимерном пространстве-времени// Ярослав. пед. вестн. Сер. Физ.-мат. естеств. науки. — 2010. — № 1. — С. 64–67.
37. *Киселев А. С., Кречет В. Г.* Космологическая проблема в пятимерном пространстве Римана—Вейля с идеальной жидкостью// Ярослав. пед. вестн. Сер. Физ.-мат. естеств. науки. — 2011. — *3*, № 1. — С. 37–41.
38. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1-2. — М.: Наука, 1981.
39. *Кречет В. Г., Левкоева М. В., Садовников Д. В.* Геометрическая теория электромагнитного поля в пятимерном аффинно-метрическом пространстве// Вестн. РУДН. Сер. Физ. — 2001. — *1*, № 9. — С. 33—37.
40. *Кручкович Г. И.* Уравнения полуприводимости и геодезическое соответствие пространств Лоренца// Тр. Всесоюз. заоч. энергетич. ин-та. — 1963. — № 24. — С. 74–87.
41. *Кручкович Г. И.* О пространствах $V(K)$ и их геодезических отображениях// Тр. Всесоюз. заоч. энергетич. ин-та. — 1967. — № 33. — С. 3—18.
42. *Петров А. З.* О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики// Уч. зап. Казан. ун-та. — 1949. — *109*, № 3. — С. 7–36.
43. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. — Факториал, 1998.
44. *Ртеулишвили Г. Л.* Сферически-симметричный линейный элемент и векторы Киллинга в пятимерном пространстве// Теор. мат. физ. — 1995. — *102*, № 3. — С. 345—351.
45. *Ртеулишвили Г. Л.* Обобщенные векторы Киллинга в пятимерном лоренцевом пространстве// Теор. мат. физ. — 1997. — *112*, № 2. — С. 249—253.
46. *Синюков Н. С.* О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства// Докл. АН СССР. — 1954. — *98*, № 1. — С. 21—23.
47. *Синюков Н. С.* Нормальные геодезические отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1956. — *111*, № 4. — С. 266—267.
48. *Синюков Н. С.* Эквидистантные римановы пространства// Научн. ежегод. Одесса. — 1957. — С. 133—135.
49. *Синюков Н. С.* Об одном инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1961. — *137*, № 6. — С. 1312–1314.
50. *Синюков Н. С.* Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1963. — *151*, № 4. — С. 781–782.
51. *Синюков Н. С.* К теории геодезического отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1966. — *169*, № 4. — С. 770—772.
52. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.

53. *Солодовников А. С.* Проективные преобразования римановых пространств// Усп. мат. наук. — 1956. — *11.* — С. 45–116.
54. *Солодовников А. С.* Пространства с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1956. — *108*, № 2. — С. 201–203.
55. *Солодовников А. С.* Геодезические классы пространств $V(K)$// Докл. АН СССР. — 1956. — *111*, № 1. — С. 33–36.
56. *Солодовников А. С.* Пространства с общими геодезическими// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1961. — № 2. — С. 43–102.
57. *Трунев А. П.* Фундаментальные взаимодействия в теории Калуцы—Клейна// Науч. ж. Кубан. гос. агр. ун-та. — 2011. — *71*, № 7. — С. 1–26.
58. *Шарафутдинов В. А.* Введение в дифференциальную топологию и риманову геометрию. — Новосибирск:: ИПЦ НГУ, 2018.
59. *Широков П. А.* Тензорное исчисление. — Казань: Изд-во КГУ, 1961.
60. *Широков П. А.* Избранные труды по геометрии. — Казань: Изд-во КГУ, 1966.
61. *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований. — М.: ИЛ, 1947.
62. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. — М.: ИЛ, 1948.
63. *Abe O.* Gravitational-wave propagation in the five-dimensional Kaluza–Klein space-time// Nuovo Cim. B. — 1994. — *109*, № 6. — P. 659—673.
64. *Aminova A. V.* On geodesic mappings of Riemannian spaces// Tensor. — 1987. — *46.* — P. 179–186.
65. *Aminova A. V.* Group-invariant methods in the theory of projective mappings of space-time manifolds// Tensor, N.S. — 1993. — *54.* — P. 91–100.
66. *Aminova A. V.* Groups of transformations of pseudo-Riemannian manifolds in theoretical and mathematical physics// в кн.: In Memoriam N. I. Lobatschevskii. Vol. 3, part 2. — Изд-во Казан. ун-та: Казань, 1995. — С. 79–103.
67. *Aminova A. V.* Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds// J. Math. Sci. — 2003. — *113*, № 3. — P. 367–470.
68. *Aminova A. V., Aminov N. A.-M.* Geometric theory of differential systems: Linearization criterion for systems of second-order ordinary differential equations with a 4-dimensional solvable symmetry group of the Lie–Petrov type VI.1// J. Math. Sci. — 2009. — *158*, № 2. — P. 163–183.
69. *Anchordoqui L. A., Birman G. S.* Metric tensors for homogeneous, isotropic, five-dimensional pseudo-Riemannian models// Rev. Colomb. Mat. — 1998. — *32.* — P. 73–79.
70. *Becerril R., Matos T.* Bonnor solution in five-dimensional gravity// Phys. Rev. D. — 1990. — *41*, № 6. — P. 1895–1896.
71. *Beltrami E.* Teoria fondamentale degli spazii di curvature costante// Ann. Mat. — 1868. — № 2. — P. 232–255.
72. *Bleyer U., Leibscher D. E., Polnarev A. G.* Mixed metric perturbation in Kaluza–Klein cosmologies// Astron. Nachr. — 1990. — *311*, № 3. — P. 151–154.
73. *Bleyer U., Leibscher D. E., Polnarev A. G.* Mixed metric perturbations in Kaluza–Klein cosmologies// Nuovo Cim. B. — 1991. — *106*, № 2. — P. 107–122.
74. *Bokhari A. H., Qadir A.* Symmetries of static, spherically symmetric space-times// J. Math. Phys. — 1987. — *28.* — P. 1019–1022.
75. *Calvaruso G., Marinosci R. A.* Homogeneous geodesics in five-dimensional generalized symmetric spaces// Balkan J. Geom. Appl. — 2003. — *8*, № 1. — P. 1–19.
76. *Coley A. A., Tupper B. O. J.* Special conformal Killing vector space-times and symmetry inheritance// J. Math. Phys. — 1989. — *30.* — P. 2616–2625.
77. *Dacko P.* Five dimensional almost para-cosymplectic manifolds with contact Ricci potential/ `arXiv: 1308.6429 [math.DG]`.
78. *Dini U.* Sopra una problema che si presenta nella teoria generale delle rapprezentazioni geografiche di una superficie su di un'altra// Ann. Mat. — 1869. — *3*, № 7. — P. 269–293.
79. *Dumitrescu T. T., Festuccia G., Seiberg N.* Exploring curved superspace/ `arXiv: 1205.1115v2 [hep.th]`.
80. *Fialowski A., Penkava M.* The moduli space of complex five-dimensional Lie algebras// J. Algebra. — 2016. — *458.* — P. 422—444.
81. *Fubini G.* Sui gruppi trasformazioni geodetiche// Mem. Acc. Torino. Cl. Fif. Mat. Nat. — 1903. — *53*, № 2. — P. 261–313.

82. *Fukui T.* The motion of a test particle in the Kaluza–Klein-type of gravitational theory with variable mass// Astrophys. Space Sci. — 1988. — *141*, № 2. — P. 407–413.
83. *Fulton T., Rohrlich F., Witten L.* Conformal invariance in physics// Rev. Mod. Phys. — 1962. — *34*, № 3. — P. 442–557.
84. *Gall L., Mohaupt T.* J. High Energy Phys. — 2018. — *2018*. — 53.
85. *Geroch R.* Limits of space-times// Commun. Math. Phys. — 1969. — *13*. — P. 180–193.
86. *Gezer A.* On infinitesimal conformal transformations of the tangent bundles with the synectic lift of a Riemannian metric// Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). — 2009. — *119*, № 3. — P. 345—350.
87. *Gross D. J., Perry M. J.* Magnetic monopoles in Kaluza–Klein theories// Nucl. Phys. — 1983. — *B226*. — P. 29–48.
88. *Guendelman E. I.* Kaluza–Klein–Casimir cosmology with decoupled heavy modes// Phys. Lett. B. — 1988. — *201*, № 1. — P. 39–41.
89. *Hall G. S., Rebouas M. J., Santos J., Teixeixa A. F. F.* On the algebraic structure of second order symmetric tensors in 5-dimensionai space-times// Gen. Rel. Gravit. — 1996. — *8*, № 9. — P. 1107–1113.
90. *Hicks J. W.* Algebraic properties of Killing vectors for Lorentz metrics in four dimensions// All Graduate Plan B and other Reports. — 2011. — *102*. — P. 1–90.
91. *Ho Choon-Lin, Ng Kin-Wang* Wilson line breaking and vacuum stability in Kaluza–Klein cosmology// Phys. Rev. D. — 1991. — *43*, № 10. — P. 3107–3111.
92. *Jadczyk A.* START in a five–dimensional conformal domain/ `arXiv: 1111.5540v2 [math-ph]`.
93. *Kiselev A. S., Krechet V. G.* Static distributions of matter in the five-dimensional Riemann—Weyl space// Russ. Phys. J. — 2012. — *55*, № 4. — P. 417—425.
94. *Knebelman M. S.* Homothetic mappings of Riemann spaces// Proc. Am. Math. Soc. — 1958. — *9*, № 6. — P. 927–928.
95. *Kokarev S. S.* Phantom scalar fields in five–dimensional Kaluza–Klein theory// Russ. Phys. J. — 1996. — *39*, № 2. — P. 146–152.
96. *Kollár J.* Einstein metrics on five-dimensional Seifert bundles// J. Geom. Anal. — 2005. — *15*, № 3. — P. 445–476.
97. *Königs M. G.* Sur les géodésiques a intégrales quadratiques// in: *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces. Vol. IV. — Chelsea Publ., 1972. — P. 368—404.
98. *Kovacs D.* The geodesic equation in five-dimensional relativity theory of Kaluza–Klein// Gen. Rel. Gravit. — 1984. — *16*, № 7. — P. 645–655.
99. *Kowalski O.* Classification of generalized symmetric Riemannian spaces of dimension $n \leqslant 5$// Rozpravy CSAV, Rada MPV. — 1975. — № 85. — P. 1–61.
100. *Kramer D. Stephani H., MacCallum M., Herlt E.* Exact Solutions of Einstein's Field Equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980.
101. *Ladke L. S., Jaiswal V. K., Hiwarkar R. A.* Five-dimensional exact solutions of Bianchi type-I space-time in $f(R,T)$ theory of gravity// Int. J. Innov. Res. Sci. Eng. Techn. — 2014. — *3*, № 8. — P. 15332–15342.
102. *Levi-Civita T.* Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche// Ann. Mat. — 1896. — *24*, № 2. — P. 255–300.
103. *Macedo P. G.* New proposal for a five-dimensional unified theory of classical fields of Kaluza–Klein type/ `arXiv: gr-qc/0101121`.
104. *Magazev A. A.* Casimir functions for five-dimensional Lie groups with a non–semi-Hausdorff space of orbits// Russ. Phys. J. — 2003. — *46*, № 9. — P. 912—920.
105. *Mankoc-Borstnik N., Pavsi M.* A systematic examination of five-dimensional Kaluza–Klein theory with sources consisting of point particles or strings// Nuovo Cim. — 1988. — *99A*, № 4. — P. 489–507.
106. *Marinosci R. A.* Classification of five-dimensional generalized pointwise symmetric Riemannian spaces// Geom. Dedic. — 1995. — *57*. — P. 11–53.
107. *Mikesh J.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacky University, 2019.
108. *Mikesh J., Stepanova E.* A five-dimensional Riemannian manifold with an irreducible $SO(3)$-structure as a model of abstract statistical manifold// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2014. — *45*. — P. 111—128.
109. *Mohanty G., Mahanta K. L., Bishi B. K.* Five dimensional cosmological models in Lyra geometry with time dependent displacement field// Astrophys. Space Sci. — 2007. — *310*. — P. 273—276.
110. *Paiva F. M., Rebouca M. J., Teixeira A. F. F.* Limits of space–times in five dimensions and their relation to the Segre types// J. Math. Phys. — 1997. — *38*. — P. 4228–4236.

111. *Pan Yiwen* Rigid supersymmetry on five-dimensional Riemannian manifolds and contact geometry/ `arXiv:1308.1567v4 [hep.th].`
112. *Pini A., Rodriguez-Gomez D., Schmudea J.* Rigid supersymmetry from conformal supergravity in five dimensions/ `arXiv:1504.04340v3 [het-th].`
113. *Rcheulishvili G.* Spherically symmetric line element and Killing vectors in five-dimensional space. — Miramare-Trieste: Preprint ICTP, IC/92/108, 1992.
114. *Rcheulishvili G. L.* The curvature and the algebra of Killing vectors in five-dimensional space// J. Math. Phys. — 1992. — *33.* — P. 1103–1108.
115. *Rcheulishvili G. L.* Conformal Killing vectors in five-dimensional space/ `arXiv:gr-qc/9312004v1.`
116. *Rebouças M. J., Santos J., Teixeira A. F. F.* Classification of energy momentum tensors in $n > 5$ dimensional space-times: A review// Brazil. J. Phys. — 2004. — *34*, № 2A. — P. 535–543.
117. *Rodroguez-Vallarte M. C., Salgado G.* Five-dimensional indecomposable contact Lie algebras as double extensions// J. Geom. Phys. — 2016. — *100.* — P. 20—32.
118. *Santos J., Rebouças M. J., Teixeira A. F. F.* Classification of second order symmetric tensors in five-dimensional Kaluza—Klein-type theories// J. Math. Phys. — 1995. — *36.* — P. 3074–3084.
119. *Schur F.* Über den Zusammenhang der Räume konstanter Krümmungsmasses mit den projectiven Räumen// Math. Ann. — 1886. — *27.* — P. 537–567.
120. *Starks S. A., Kosheleva O., Kreinovich V.* Kaluza–Klein 5D ideas made fully geometric/ `arXiv:0506218v1 [physics.class-ph].`
121. *Varaksin O. L., Klishevich V. V.* Integration of Dirac equation in Riemannian spaces with five-dimensional group of motions// Russ. Phys. J. — 1997. — *40*, № 8. — P. 727—731.
122. *Wesson P. S.* A physical interpretation of Kaluza–Klein cosmology// Astrophys. J. — 1992. — *394*, № 1. — P. 19—24.
123. *Wesson P. S.* The properties of matter in Kaluza–Klein cosmology// Mod. Phys. Lett. A. — 1992. — *7*, № 11. — P. 921–926.
124. *Witten E.* Search for a realistic Kaluza–Klein theory// Nucl. Phys. B. — 1981. — *186.* — P. 412–428.
125. *Yano K.* On harmonic and Killing vectors// Ann. Math. — 1952. — *55.* — P. 38—45.
126. *Zeghib A.* On discrete projective transformation groups of Riemannian manifolds// Adv. Math. — 2016. — *297.* — P. 26—53.

Аминова Ася Васильевна
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: `asya.aminova@kpfu.ru`

Хакимов Джамолиддин Рахмонович
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: `dzhamoliddink@mail.ru`