ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 215 (2022). С. 58–67
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-215-58-67

УДК 519.175.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПОМЕЧЕННЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ГРАФОВ

© 2022 г. **В. А. ВОБЛЫЙ**

Аннотация. Асимптотически перечислены помеченные геодезические k-циклические кактусы. Получена асимптотика для числа помеченных связных геодезических унициклических, бициклических и трициклических n-вершинных графов. Доказано, что при равномерном распределении вероятностей вероятность того, что случайный помеченный связный унициклический, бициклический и трициклический граф является геодезическим графом, асимптотически равна 1/2, 3/20 и 1/30, соответственно. Найдена также вероятность того, что случайный помеченный связный k-циклический граф является геодезическим кактусом. Кроме того, доказано, что почти все помеченные связные геодезические трициклические графы являются кактусами.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, геодезический граф, кактус, k-циклический граф, асимптотика, случайный граф.

ASYMPTOTICAL ENUMERATION OF SOME LABELED GEODETIC GRAPHS

© 2022 **V. A. VOBLYI**

Abstract. We asymptotically enumerate labeled geodetic k-cyclic cacti and obtain asymptotics for the numbers of labeled connected geodetic unicyclic, bicyclic, and tricyclic n-vertex graphs. We prove that under the uniform probability distribution, the probabilities that a random labeled connected unicyclic, bicyclic, or tricyclic graph is a geodetic graph are asymptotically equal to 1/2, 3/20, and 1/30, respectively. In addition, we prove that almost all labeled connected geodetic tricyclic graphs are cacti.

Keywords and phrases: enumeration, labeled graph, geodetic graph, cactus, k-cyclic graph, asymptotics, random graph.

AMS Subject Classification: 05C30

1. Введение.

Определение 1 (см. [12, с. 55]). *Цикломатическим числом* (*циклическим рангом*) связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом ребер графа и числом его вершин.

Определение 2. *k-Циклический граф* — это граф с цикломатическим числом, равным k.

Определение 3 (см. [17]). *Геодезическим* графом называется связный граф, у которого любая пара вершин связана единственной кратчайшей цепью (геодезической).

Определение 4. Для связного графа *точкой сочленения* называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей ребрами граф становится несвязным.

Определение 5 (см. [12, с. 41]). *Блок* — это связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения.

Определение 6 (см. [13, с. 93]). *Кактусом* называется связный граф, в котором нет ребер, лежащих более чем на одном простом цикле. Все блоки кактуса — ребра или простые циклы.

Определение 7 (см. [15]). Класс графов называется *блочно-устойчивым*, если граф принадлежит этому классу тогда и только тогда, когда каждый блок графа принадлежит этому классу.

Геодезические графы используются при проектировании топологической структуры компьютерных сетей (см. [14]). В [1] перечислены помеченные связные геодезические планарные графы, а в [2] — помеченные связные геодезические графы с малым цикломатическим числом. В [8] найдено число помеченных геодезических k-циклических кактусов.

В статье асимптотически перечислены помеченные геодезические k-циклическиt кактусы. Найдена асимптотика для числа помеченных геодезических унициклических, бициклических и трициклических графов. Доказано, что при равномерном распределении вероятностей вероятности того, что случайный помеченный связный унициклический, бициклический и трициклический граф является геодезическим графом, асимптотически равны 1/2, 3/20 и 1/20, соответственно. Найдена также вероятность того, что случайный помеченный связный k-циклический граф является геодезическим кактусом. Кроме того, доказано, что почти все помеченные связные геодезические трициклические графы являются кактусами.

2. Асимптотическое перечисление графов.

Лемма 1 (см. [3]). *Введем обозначения*

$$p_q(z) = \sum_{i=0}^{q} c_i z^i, \quad A_n(m,q) = [z^{-1}]\frac{p_q(z)e^{nz}z^{-n}}{(1-z)^m},$$

где $[z^{-1}]$ — *оператор формального вычета* (см. [9, с. 25]. *При фиксированных* m, q *и* $n \to \infty$ *имеет место асимптотика*

$$A_n(m,q) \sim \frac{\sqrt{\pi}p_q(1)n^{n+m/2}}{n!2^{m/2}\Gamma((m+1)/2)}. \tag{1}$$

Лемма 2. *Введем обозначения*

$$p_q(z) = \sum_{i=0}^{q} c_i z^i, \quad B_n(m,q) = [z^{-1}]\frac{p_q(z)e^{nz}z^{-n}}{(1+z)^m}.$$

При фиксированных m, q *и* $n \to \infty$ *верна асимптотика*

$$B_n(m,q) \sim \frac{p_q(1)n^n}{n!2^m}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $U(a,b,z)$, $M(a,b,z)$ — вырожденные гипергеометрическаие функциии Трикоми. В [4] найдено разложение

$$\frac{e^{nz}}{(1-z)^m} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{n^{p+m}}{p!}U(m,m+p+1,n)z^p.$$

Следовательно, получим

$$B_n(m,q) = [z^{-1}]\sum_{i=0}^{q}\frac{c_i z^i e^{nz}z^{-n}}{(1+z)^m} = \sum_{i=0}^{q} c_i [z^{-1}]\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-n)^{p+m}}{p!}U(m,m+p+1,-n)(-z)^p z^{i-n} =$$

$$= \sum_{i=0}^{q} c_i (-1)^m \frac{n^{n+m-i-1}}{(n-i-1)!}U(m,n+m-i,-n).$$

В силу формулы связи (см. [16, с. 325]) имеем

$$\frac{1}{\Gamma(b)}M(a,b,z)=\frac{e^{\mp a\pi i}}{\Gamma(b-a)}U(a,b,z)+\frac{e^{\pm(b-a)\pi i}}{\Gamma(a)}e^{z}U(b-a,b,e^{\pm\pi i}z).$$

При $b-a=m$, $b=n+m-i$, $a=b-m=n-i$, $z=n$ найдем

$$U(m,n+m-i,-n)=\frac{(-1)^m\Gamma(n-i)}{\Gamma(n+m-i)}e^{-n}M(n-i,n+m-i,n)- \\ -\frac{(-1)^{n-i+m}\Gamma(n-i)}{\Gamma(m)}e^{-n}U(n-i,n+m-i,n). \quad (3)$$

Используем асимптотику для функций Куммера $M(a,b,z)$ и $U(a,b,z)$ (см. [13]). Пусть $\alpha=a/z$, $\beta=b/z$, $\mu=(b-a)/z$,

$$t_0=\frac{1}{2}(\beta+1-\sqrt{(\beta+1)^2-4\mu},\quad \tau=\frac{t_0}{\mu},$$

$$A=\mu(\tau-\ln\tau-1)-\alpha\ln(1-\mu\tau),\quad f_0=\sqrt{\frac{\mu}{\beta t_0^2-2\mu t_0+\mu}},\quad p_0=(1-t_0)f_0.$$

Тогда при $z\to\infty$ имеем асимптотику

$$M(a,b,z)\sim e^{z}\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}z^{a-b}e^{-zA}f_0,\quad U(a,b+1,z)\sim z^{-a}e^{zA}p_0.$$

Для $M(n-i,n+m-i,n)$ при фиксированных m, i и $n\to\infty$ получим

$$\alpha=1-\frac{i}{n}\sim 1,\quad \beta=1+\frac{m-i}{n},\quad \mu=\frac{m}{n}\sim 1,\quad t_0\sim\frac{\mu}{\beta+1}\sim\frac{m}{2n},\quad \tau\sim\frac{1}{2},$$

$$f_0\sim\sqrt{\frac{\frac{m}{n}}{\frac{m^2}{4n^2}-\frac{m^2}{n^2}+\frac{m}{n}}}\sim\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3m}{4n}}}\sim 1+\frac{3m}{8n}\sim 1,$$

$$A\sim\frac{m}{n}\left(-\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}\right)-\left(1-\frac{i}{n}\right)\ln\left(1-\frac{m}{2n}\right)\sim-\frac{m}{2n}+\frac{m}{n}\ln 2+\frac{m}{2n}=\frac{m}{n}\ln 2.$$

Так как при фиксированных c, d и $z\to\infty$ имеем

$$\frac{\Gamma(z+c)}{\Gamma(z+d)}\sim z^{c-d},$$

то

$$M(a,b,z)=M(n-i,n+m-i,n)\sim e^{n}\frac{\Gamma(n+m-i)}{\Gamma(n-i)}n^{-m}\frac{1}{2^m}\sim\frac{e^n}{2^m}.$$

Для $U(n-i,n+m-i,n)$ при фиксированных m, i и $n\to\infty$ найдем

$$\alpha=1-\frac{i}{n}\sim 1,\quad \beta=1+\frac{m-i-1}{n}\sim 1,\quad \mu=\frac{m-1}{n},\quad t_0\sim\frac{\mu}{\beta+1}\sim\frac{m-1}{2n},\quad \tau\sim\frac{1}{2},$$

$$p_0\sim\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\sqrt{\frac{\frac{m-1}{n}}{\frac{(m-1)^2}{4n^2}-\frac{(m-1)^2}{n^2}+\frac{m-1}{n}}}\sim\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3(m-1)}{4n}}}\sim 1+\frac{3(m-1)}{8n}\sim 1,$$

$$A\sim\frac{(m-1)}{n}\left(-\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}\right)-\left(1-\frac{i}{n}\right)\ln\left(1-\frac{(m-1)}{2n}\right)\sim\frac{m-1}{n}\ln 2,$$

$$U(a,b+1,z)=U(n-i,n+m-i,n)\sim z^{-a}e^{zA}p_0\sim n^{i-n}2^{m-1}.$$

Подставляя асимптотику для $M(n-i,n+m-i,n)$, $U(n-i,n+m-i,n)$ в (3), применяя формулу Стирлинга для факториала и учитывая, что $(n+k)!/n!\sim n^k$ при фиксированном k и $n\to\infty$, получим

$$U(m,n+m-i,-n) \sim \frac{(-1)^m}{n^m} e^{-n}\frac{e^n}{2^m} - \frac{(-1)^{n-i+m}\Gamma(n-i)}{\Gamma(m)n!} n! e^{-n} 2^{m-1} n^{i-n} \sim$$
$$\sim \frac{(-1)^m}{n^m 2^m} - \frac{(-1)^{n-i+m}}{(m-1)!} n^{-i}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{-n}2^{m-1}n^{i-n} \sim$$
$$\sim \frac{(-1)^m}{n^m 2^m} - \frac{(-1)^{n-i+m}}{(m-1)!}\sqrt{2\pi n} e^{-2n} 2^{m-1} \sim \frac{(-1)^m}{n^m 2^m}.$$

Следовательно, имеем

$$B_n(m,q) \sim \sum_{i=0}^{q} c_i (-1)^m \frac{n^{n+m-i-1} n!}{(n-i-1)!}\frac{(-1)^m}{n! n^m 2^m} \sim \frac{p_q(1) n^n}{n! 2^m}. \qquad \square$$

Теорема 1. *Для числа $GC(n,k)$ помеченных геодезических k-циклических кактусов с n вершинами при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула*

$$GC(n,k) \sim \frac{\sqrt{\pi} n^{n+(3k-4)/2}}{2^{5k/2} k! \Gamma((k+1)/2)}. \tag{4}$$

Доказательство. В [8] получено выражение

$$GC(n,k) = \frac{(n-1)!}{nk!}[z^{-1}]e^{nz}\left(\frac{nz^2}{2(1-z^2)}\right)^k z^{-n} = \frac{n! n^{k-2}}{k! 2^k}[z^{-1}]e^z \frac{z^{2k}}{(1-z^2)^k} z^{-n}.$$

Разложим последнюю дробь на элементарные дроби (см. [10, с. 41]):

$$\frac{1}{(1-z^2)^k} = \frac{A_1}{(1-z)} + \frac{A_2}{(1-z)^2} + \dots + \frac{A_k}{(1-z)^k} + \frac{B_1}{(1+z)} + \frac{B_2}{(1+z)^2} + \dots + \frac{B_k}{(1+z)^k}. \tag{5}$$

После умножения обеих частей равенства (5) на $(1-z^2)^k$, сокращения множителей в дробях и подстановки $z = 1$ получим $A_k = 1/2^k$. С помощью формул (1) и (2) найдем асимптотику при фиксированном k и $n \to \infty$:

$$GC(n,k) \sim \frac{n! n^{k-2}}{k! 2^k}\left[\frac{A_1\sqrt{\pi} n^{n+1/2}}{n! 2^{1/2}\Gamma(1)} + \dots + \frac{A_k \sqrt{\pi} n^{n+k/2}}{n! 2^{k/2}\Gamma((k+1)/2)} + \frac{B_1 n^n}{n! 2} + \dots + \frac{B_k n^n}{n! 2^k}\right] \sim$$
$$\sim \frac{n^{k-2}}{k! 2^k}\frac{A_k\sqrt{\pi} n^{n+k/2}}{2^{k/2}\Gamma((k+1)/2)} = \frac{\sqrt{\pi} n^{n+(3k-4)/2}}{2^{5k/2} k! \Gamma((k+1)/2)}. \qquad \square$$

Следствие 1. *Для числа $G(n,1)$ помеченных связных геодезических унициклических графов с n вершинами при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула*

$$G(n,1) \sim \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}} n^{n-1/2}. \tag{6}$$

Доказательство. Так как все унициклические графы являются унициклическими кактусами, то формула (6) получается как следствие формулы (4) при $k = 1$. $\square$

Следствие 2. *Для числа $G(n,2)$ помеченных связных геодезических бициклических графов с n вершинами при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула*

$$G(n,2) \sim \frac{1}{32} n^{n+1}. \tag{7}$$

Доказательство. Поскольку не существуют геодезические бициклические блоки (см. [2]), то все геодезические бициклические графы являются бициклическими кактусами. Поэтому требуемое утверждение получается как следствие формулы (4) при $k = 2$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $U(a,b,z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми. Тогда при фиксированных целых числах a, l и $b \to \infty$ имеем асимптотику*

$$U(a,b+l,b) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{(2b)^{a/2}\Gamma(\frac{a+1}{2})}. \tag{8}$$

Лемма 3 доказана в [5] при $l \leqslant 0$ и в [7] при $l \geqslant 0$.

Теорема 2. *Для числа $G(n,3)$ помеченных связных геодезических трициклических графов с n вершинами при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула*

$$G(n,3) \sim \frac{1}{768}\sqrt{\frac{\pi}{2}}n^{n+5/2}\,. \tag{9}$$

Доказательство. Для числа $S(n,k)$ помеченных связных k-циклических графов с n вершинами в [5] получена формула

$$S(n,k) = \frac{(n-1)!}{nk!}[z^{-1}]e^{nz}Y_k\Big(n1!B_1'(z),\ n2!B_2'(z),\ \dots,\ nk!B_k'(z)\Big)z^{-n}, \tag{10}$$

где $B_k(z)$ — экспоненциальная производящая функция для числа помеченных k-циклических блоков, а $Y_k(x_1,\dots,x_k)$ — многочлены разбиений (многочлены Белла). Для этих многочленов известно выражение (см. [11, с. 173])

$$Y_k(x_1,\dots,x_k) = \sum_{\pi(k)} \frac{k!}{m_1!\dots m_k!}\left(\frac{x_1}{1!}\right)^{m_1}\dots\left(\frac{x_k}{k!}\right)^{m_k},$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi(k)$ числа k, т.е. по всем неотрицательным решениям $(m_1,m_2,\dots,m_k)$ уравнения $m_1+2m_2+\dots+km_k = k$, $m_i \geqslant 0$, $i = 1,\dots,k$.

Формула (10) верна не только для всего класса связных графов, но и для блочно-устойчивого его подкласса (см. [6]). В частности, формула (10) верна для класса геодезических графов (см. [6]).

В [2] из (10) получены выражения

$$G(n,3) = \frac{(n-1)!}{6}[z^{-1}]e^{nz}\left(\frac{n^2z^6}{8(1-z^2)^3} + \frac{z^3+2z^6}{(1-z^3)^5}\right)z^{-n}, \tag{11}$$

$$G(n,3) = \frac{n!}{24}\left(\sum_{i=0}^{[(n-7)/2]}\frac{(i+2)(i+1)n^{n-2i-6}}{4(n-2i-7)!} + \sum_{i=0}^{[(n-4)/3]}\frac{(3i+4)n^{n-3i-5}}{(n-3i-4)!}\binom{i+3}{3}\right).$$

Введем обозначения

$$S_1(n) = \frac{(n-1)!}{6}[z^{-1}]e^{nz}\frac{n^2z^6}{8(1-z^2)^3}, \quad S_2(n) = \frac{n!}{24}\sum_{i=0}^{[(n-4)/3]}\frac{(3i+4)n^{n-3i-5}}{(n-3i-4)!}\binom{i+3}{3}.$$

В выражении (11) первое слагаемое соответствует унициклическим блокам, а второе — трициклическим блокам. Поэтому $S_1(n)$ равно числу трициклических кактусов, и по теореме 1

$$S_1(n) \sim \frac{1}{768}\sqrt{\frac{\pi}{2}}n^{n+5/2} \quad \text{при } n \to \infty. \tag{12}$$

При положительных слагаемых a_i имеем

$$\sum_{i=0}^{[(n-4)/3]} a_{3i} = a_0 + a_3 + \dots \leqslant a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots \leqslant \sum_{i=0}^{n-4} a_i.$$

Так как все слагаемые в сумме для $S_2(n)$ положительны, получим

$$S_2(n) = \frac{n!}{24}\sum_{i=0}^{[(n-4)/3]}\frac{(3i+4)(i+3)(i+2)(i+1)n^{n-3i-5}}{6(n-3i-4)!} =$$

$$= \frac{n!}{24}\sum_{i=0}^{[(n-4)/3]}\frac{(3i+4)(3i+9)(3i+6)(3i+3)n^{n-3i-5}}{162(n-3i-4)!} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n!}{3888}\sum_{i=0}^{n-4}\frac{(i+4)(i+3)(i+6)(i+9)n^{n-i-5}}{(n-i-4)!} = M(n).$$

В соответствии с разложением

$$(i+4)(i+3)(i+6)(i+9) =$$
$$= (i+4)(i+3)(i+2)(i+1) + 12(i+3)(i+2)(i+1) + 64(i+2)(i+1) + 184(i+1) + 240$$

разобьем $M(n)$ на 5 слагаемых:

$$M(n) = M_1(n) + M_2(n) + M_3(n) + M_4(n) + M_5(n).$$

С помощью выражений для символа Похгаммера $(a)_i$

$$(a)_i = \frac{\Gamma(a+i)}{\Gamma(a)} = (-1)^i\frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a-i)}$$

найдем

$$M_1(n) = \sum_{i=0}^{n-4}\frac{(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)n^{n-i-5}}{(n-i-4)!} = n^{n-5}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+4)!}{i!\Gamma(n-3-i)}\left(\frac{1}{n}\right)^i =$$

$$= n^{n-5}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{(i+4)!\Gamma(4-n+i)}{i!\Gamma(n-3)\Gamma(4-n)}\left(\frac{1}{n}\right)^i = \frac{n^{n-5}}{(n-4)!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Gamma(5+i)\Gamma(5)(4-n)_i}{\Gamma(5)i!}\left(-\frac{1}{n}\right)^i =$$

$$= \frac{24n^{n-5}}{(n-4)!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(5)_i(4-n)_i}{i!}\left(-\frac{1}{n}\right)^i = \frac{24n^{n-5}}{(n-4)!}\ {}_2F_0\left(5,\ 4-n;\ -;\ -\frac{1}{n}\right),$$

где ${}_2F_0(a,b;-;z)$ — обобщенная гипергеометрическая функция. Аналогично получим

$$M_2(n) = 12\sum_{i=0}^{n-4}\frac{(i+3)(i+2)(i+1)n^{n-i-5}}{(n-i-4)!} = 12n^{n-5}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+3)!}{i!\Gamma(n-3-i)}\left(\frac{1}{n}\right)^i =$$

$$= 12n^{n-5}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{\Gamma(4+i)\Gamma(4)\Gamma(4-n+i)}{i!\Gamma(4)\Gamma(n-3)\Gamma(4-n)}\left(\frac{1}{n}\right)^i = 72\frac{n^{n-5}}{(n-4)!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(4)_i(4-n)_i}{i!}\left(-\frac{1}{n}\right)^i =$$

$$= \frac{72n^{n-5}}{(n-4)!}\ {}_2F_0\left(4,\ 4-n;\ -;\ -\frac{1}{n}\right),$$

$$M_3(n) = 64\sum_{i=0}^{n-4}\frac{(i+2)(i+1)n^{n-i-5}}{(n-i-4)!} = 64n^{n-5}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+2)!}{i!\Gamma(n-3-i)}\left(\frac{1}{n}\right)^i =$$

$$= 64n^{n-5}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{\Gamma(3+i)\Gamma(3)\Gamma(4-n+i)}{i!\Gamma(3)\Gamma(n-3)\Gamma(4-n)}\left(\frac{1}{n}\right)^i = \frac{128n^{n-5}}{(n-4)!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(3)_i(4-n)_i}{i!}\left(-\frac{1}{n}\right)^i =$$

$$= \frac{128n^{n-5}}{(n-4)!}\ {}_2F_0\left(3,\ 4-n;\ -;\ -\frac{1}{n}\right),$$

$$M_4(n) = 184\sum_{i=0}^{n-4}\frac{(i+1)n^{n-i-5}}{(n-i-4)!} = 184n^{n-5}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+1)!}{i!\Gamma(n-3-i)}\left(\frac{1}{n}\right)^i =$$
$$= 184n^{n-5}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{\Gamma(2+i)\Gamma(2)\Gamma(4-n+i)}{i!\Gamma(2)\Gamma(n-3)\Gamma(4-n)}\left(\frac{1}{n}\right)^i = \frac{184n^{n-5}}{(n-4)!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2)_i(4-n)_i}{i!}\left(-\frac{1}{n}\right)^i =$$
$$= \frac{184n^{n-5}}{(n-4)!}\ {}_2F_0\left(2,\ 4-n;\ -;\ -\frac{1}{n}\right),$$

$$M_5(n) = 240\sum_{i=0}^{n-4}\frac{n^{n-i-5}}{(n-i-4)!} = 240n^{n-5}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i!}{i!\Gamma(n-3-i)}\left(\frac{1}{n}\right)^i =$$
$$= 240n^{n-5}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{\Gamma(1+i)\Gamma(1)\Gamma(4-n+i)}{i!\Gamma(1)\Gamma(n-3)\Gamma(4-n)}\left(\frac{1}{n}\right)^i = 240\frac{24n^{n-5}}{(n-4)!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(1)_i(4-n)_i}{i!}\left(-\frac{1}{n}\right)^i =$$
$$= \frac{240n^{n-5}}{(n-4)!}\ {}_2F_0\left(1,\ 4-n;\ -;\ -\frac{1}{n}\right).$$

Используя соотношение

$$U(a,b,z) = z^{-a}{}_2F_0\left(a,\ a-b+1;\ -;\ -\frac{1}{z}\right)$$

между функциями ${}_2F_0(a,b;-;z)$ и $U(a,b,z)$ (см. [16, с. 328, 13.6.21]), получим:

$$ {}_2F_0\left(5,\ 4-n;\ -;\ -\frac{1}{n}\right) = n^5U(5,n+2,n), \quad {}_2F_0\left(4,\ 4-n;\ -;\ -\frac{1}{n}\right) = n^4U(4,n+1,n),$$
$$ {}_2F_0\left(3,\ 4-n;\ -;\ -\frac{1}{n}\right) = n^3U(3,n,n), \quad {}_2F_0\left(2,\ 4-n;\ -;\ -\frac{1}{n}\right) = n^2U(2,n-1,n),$$
$$ {}_2F_0\left(1,\ 4-n;\ -;\ -\frac{1}{n}\right) = nU(1,n-2,n).$$

Таким образом,

$$M(n) = M_1(n) + M_2(n) + M_3(n) + M_4(n) + M_5(n) =$$
$$= \frac{24n^n}{(n-4)!}U(5,n+2,n) + \frac{72n^{n-1}}{(n-4)!}U(4,n+1,n) + \frac{128n^{n-2}}{(n-4)!}U(3,n,n) +$$
$$+ \frac{184n^{n-3}}{(n-4)!}U(2,n-1,n) + \frac{240n^{n-4}}{(n-4)!}U(1,n-2,n).$$

Учитывая, что $n!/(n-k)! \sim n^k$ при фиксированном k и $n\to\infty$, с помощью формулы (8) получим следующую асимптотику при $n\to\infty$:

$$S_2(n) = \frac{n!}{3888}M(n) \sim \frac{24n!n^n}{3888(n-4)!}\frac{\sqrt{\pi}}{(2n)^{5/2}\Gamma(3)} + \frac{72n!n^{n-1}}{3888(n-4)!}\frac{\sqrt{\pi}}{(2n)^2\Gamma(5/2)} +$$
$$+ \frac{128n!n^{n-2}}{3888(n-4)!}\frac{\sqrt{\pi}}{(2n)^{3/2}\Gamma(4/2)} + \frac{184n!n^{n-3}}{3888(n-4)!}\frac{\sqrt{\pi}}{(2n)^1\Gamma(3/2)} + \frac{240n!n^{n-4}}{3888(n-4)!}\frac{\sqrt{\pi}}{(2n)^{1/2}\Gamma(2/2)} \sim$$
$$\sim c_1n^{n+3/2} + c_2n^{n+1} + c_3n^{n+1/2} + c_4n^n + c_5n^{n-1/2} \sim Cn^{n+3/2}.$$

Теперь имеем

$$G(n,3) = S_1(n) + S_2(n),$$

где

$$S_1(n) \sim \frac{1}{768}\sqrt{\frac{\pi}{2}}n^{n+5/2}, \quad S_2(n) \leqslant Cn^{n+3/2};$$

так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_2(n)}{S_1(n)}=0,$$

то

$$G(n,3)\sim\frac{1}{768}\sqrt{\frac{\pi}{2}}n^{n+5/2}.\qquad\square$$

Так как при $n\to\infty$ асимптотика для числа помеченных связных геодезических трициклических графов (9) совпадает с асимптотикой для числа помеченных геодезических трициклических кактусов (12), то получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Почти все помеченные связные геодезические трициклические графы являются кактусами.*

Гипотеза 1. Для числа $G(n,k)$ помеченных связных геодезических k-циклических графов с n вершинами при фиксированном k и $n\to\infty$ верна асимптотика

$$G(n,k)\sim c(k)n^{n+(3k-4)/2},$$

где $c(k)$ — константа, зависящая от k, но не зависящая от n.

В частности,

$$c(1)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad c(2)=\frac{1}{32},\quad c(3)=\frac{1}{768}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Таким образом, гипотеза верна для $1\leqslant k\leqslant 3$.

3. Вероятность.

Зададим на множестве помеченных связных k-циклических графов с n вершинами равномерное распределение вероятностей.

Следствие 4. *Пусть $P_1(n)$ — вероятность того, что случайный помеченный связный унициклический граф с n вершинами является геодезическим графом. Тогда при $n\to\infty$ верна асимптотическая формула*

$$P_1(n)\sim\frac{1}{2}.$$

Доказательство. Пусть $f(n,n+k)$ — число помеченных связных графов с n вершинами и $n+k$ ребрами. Э. Райт нашел асимптотику при $n\to\infty$ и $0\leqslant k=o(n^{1/3})$ (см. [19]):

$$f(n,n+k)\sim f_k n^{n+(3k-1)/2},\quad f_0=\left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2},\quad f_k=\frac{\sqrt{\pi}3^k(k-1)!d_k}{2^{(5k-1)/2}\Gamma((3k/2)},\quad k\geqslant 1,$$

где d_k — коэффициенты Райта:

$$d_1=d_2=\frac{5}{36},\quad d_{k+1}=d_k+\sum_{s=1}^{k-1}\frac{d_s d_{k-s}}{(k+1)\binom{k}{s}},\quad k\geqslant 2.$$

Следовательно, с помощью формулы (6) получим при $n\to\infty$

$$P_1(n)=\frac{G(n,1)}{f(n,n)}\sim\frac{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}n^{n-1/2}}{\sqrt{\frac{\pi}{8}}n^{n-1/2}}=\frac{1}{2}.\qquad\square$$

Следствие 5. *Пусть $P_2(n)$ — вероятность того, что случайный помеченный связный бициклический граф с n вершинами является геодезическим графом. Тогда при $n\to\infty$ верна асимптотическая формула*

$$P_2(n)\sim\frac{3}{20}.$$

Доказательство. Э. Райт в [19] нашел асимптотику

$$f(n, n+1) \sim \frac{5}{24} n^{n+1}, \quad n \to \infty.$$

Следовательно, с учетом формулы (7) получим при $n \to \infty$

$$P_2(n) = \frac{G(n,2)}{f(n,n+1)} \sim \frac{\frac{1}{32} n^{n+1}}{\frac{5}{24} n^{n+1}} = \frac{3}{20}. \qquad \square$$

Следствие 6. *Пусть $P_3(n)$ — вероятность того, что случайный помеченный связный трициклический граф с n вершинами является геодезическим графом. Тогда при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула*

$$P_3(n) \sim \frac{1}{30}.$$

Доказательство. С помощью асимптотики Э. Райта (см. [19])

$$f(n, n+2) \sim \frac{5}{128} \sqrt{\frac{\pi}{2}} n^{n+5/2}, \quad n \to \infty,$$

и формулы (9) имеем

$$P_3(n) = \frac{G(n,3)}{f(n,n+2)} \sim \frac{\frac{1}{768} \sqrt{\frac{\pi}{2}} n^{n+5/2}}{\frac{5}{128} \sqrt{\frac{\pi}{2}} n^{n+5/2}} = \frac{1}{30}. \qquad \square$$

Следствие 7. *Пусть $\bar{P}_k(n)$ — вероятность того, что случайный помеченный связный k-циклический граф с n вершинами является геодезическим кактусом, а d_k — коэффициенты Райта. Тогда при фиксированном k и $n \to \infty$ верна асимптотическая формула*

$$\bar{P}_k(n) \sim \frac{\Gamma(\frac{3k-3}{2})}{8\Gamma(\frac{k+1}{2}) 3^{k-1} k!(k-2)! d_{k-1}} \ \textit{при } k \geqslant 2, \quad \bar{P}_1(n) \sim \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Применяя опять асимптотику Райта из [19] и формулу (4), получим при фиксированном $k \geqslant 2$ и $n \to \infty$

$$\bar{P}_k(n) \sim \frac{GC(n,k)}{f(n,n+k-1)} \sim \frac{\sqrt{\pi} n^{n+(3k-4)/2}}{2^{5k/2} k! \Gamma(\frac{k+1}{2}) f_k n^{n+(3k-4)/2}} = \frac{\Gamma(\frac{3k-3}{2})}{8\Gamma(\frac{k+1}{2}) 3^{k-1} k!(k-2)! d_{k-1}}.$$

Так как при $k = 1$ все связные унициклические графы являются кактусами, то из следствия 4 имеем $\bar{P}_1(n) \sim 1/2$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воблый В. А.* Перечисление помеченных геодезических планарных графов// Мат. заметки. — 2015. — *97*, № 3. — С. 336–341.
2. *Воблый В. А.* Перечисление помеченных геодезических графов с малым цикломатическим числом// Мат. заметки. — 2017. — *101*, № 5. — С. 684–689.
3. *Воблый В. А.* Асимптотическое перечисление помеченных последовательно-параллельных тетрациклических графов// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2020. — *187*. — С. 31–35.
4. *Воблый В. А.* Перечисление помеченных последовательно-параллельных трициклических графов// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2020. — *177*. — С. 132–136.
5. *Воблый В. А.* О перечислении помеченных связных графов с заданными числами вершин и ребер// Дискр. анал. иссл. опер. — 2016. — *23*, № 2. — С. 5–20.
6. *Воблый В. А.* Второе соотношение Риддела и следствия из него// Дискр. анал. иссл. опер. — 2019. — *26*, № 1. — С. 20–32.
7. *Воблый В. А.* Об асимптотическое перечислении помеченных последовательно-параллельных k-циклических графов// Дискр. анал. иссл. опер. — 2022. — *29*, № 4. — С. 5–14.

8. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных геодезических k-циклических кактусов// Мат. XVIII Междунар. конф. «Проблемы теоретической кибернетики». — Пенза, 2017. — С. 56–57.
9. *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика. — М.: Наука, 1990.
10. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. — М.: Наука, 1989.
11. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества. — Наука, 1982.
12. *Харари Ф.* Теория графов. — М.: Мир, 1973.
13. *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов. — М.: Мир, 1977.
14. *Frasser C. E.* k-Geodetic graphs and their application to the topological design of computer networks// Proc. Argentinian Workshop on Theoretical Computer Science, 28 JAIIO-WAIT'99, 1999. — P. 187–203.
15. *Mc Diarmid C., Scott A.* Random graphs from a block stable class// Eur. J. Combin. — 2016. — *58.* — P. 96–106.
16. NIST Handbook of Mathematical Functions. — New York: Cambridge Univ. Press, 2010.
17. *Stemple J. G., Watkins M. E.* On planar geodetic graphs// J. Combin. Theory. — 1968. — *4.* — P. 101–117.
18. *Temme N. M., Veling E. J. M.* Asymptotic expansions of Kummer hypergeometric functions with three parameters a, b and z/ `arXiv: 2202.12857v3 [math.CA].`
19. *Wright E. M.* The number of connected sparsely edged graphs// J. Graph Theory. — 1977. — *1*, № 4. — P. 317–330.

Воблый Виталий Антониевич
Всероссийский институт научной и технической информации
Российской академии наук, Москва
E-mail: `vitvobl@yandex.ru`