ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 210 (2022). С. 55–65
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-210-55-65

УДК 517.956.6

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

© 2022 г. Б. Ж. КАДИРКУЛОВ, Г. А. КАЮМОВА

Аннотация. В работе рассмотрены вопросы однозначной разрешимости нелокальной задачи для нелокального аналога смешанного параболо-гиперболического уравнения с обобщенным оператором Римана—Лиувилля и с инволюцией относительно пространственной переменной. Установлен критерий единственности решения и определены достаточные условия на данные для однозначной разрешимости поставленной задачи. При помощи метода разделения переменных построено решение в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. Установлена устойчивость решения рассматриваемой задачи по нелокальному условию.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, уравнение с инволюцией, нелокальная задача, нелокальное дифференциальное уравнение, условия склеивания, оператор Хилфера, функция Миттаг-Леффлера, ряд Фурье.

NONLOCAL PROBLEM FOR A FRACTIONAL-ORDER MIXED-TYPE EQUATION WITH INVOLUTION

© 2022 B. Zh. KADIRKULOV, G. A. KAYUMOVA

Abstract. In this paper, we examine the unique solvability of a nonlocal problem for a nonlocal analog of a mixed parabolic-hyperbolic equation with a generalized Riemann–Liouville operator and involution with respect to the space variable. A criterion for the uniqueness of the solution is established and sufficient conditions for the unique solvability of the problem are determined. By the method of separation of variables, a solution is constructed in the form of an absolutely and uniformly convergent series with respect to eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problem. The stability of the solution of the problem under consideration under a nonlocal condition is established.

Keywords and phrases: mixed-type equation, equation with involution, nonlocal problem, nonlocal differential equation, gluing conditions, Hilfer operator, Mittag-Leffler function, Fourier series.

AMS Subject Classification: 34K37, 35A09, 35M12

1. Введение и постановка задачи. Пусть $\Omega = \{(x,t) : -1 < x < 1, \ -a < t < b\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap (t > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (t < 0)$, где a, b — положительные действительные числа. В этой области для уравнения смешанного типа вида

$$\begin{cases} D^{\alpha,\gamma}u(x,t) - u_{xx}(x,t) + \varepsilon u_{xx}(-x,t), & t > 0, \\ u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + \varepsilon u_{xx}(-x,t), & t < 0 \end{cases} \tag{1}$$

рассмотрим следующую нелокальную задачу.

Задача A. Найти функцию $u(x,t)$ класса

$$t^{1-\gamma}D^{\alpha,\gamma}u, \quad t^{1-\gamma}\frac{\partial^k u}{\partial x^k} \in C(\overline{\Omega}_1), \quad \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \in C(\overline{\Omega}_2), \quad u_{tt} \in C(\Omega_2), \quad u_{xx} \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2), \tag{2}$$

где $k=\overline{0,1}$, которая удовлетворяет уравнению (1) в области $\Omega_1\cup\Omega_2$, краевым условиям

$$u(-1,t)=0,\quad u(1,t)=0,\quad t\in[-a,0]\cup(0,b], \tag{3}$$

$$u(x,-a)=u(x,b)+\varphi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{4}$$

а также условиям склеивания

$$\lim_{t\to+0}J_{0+}^{1-\gamma}u(x,t)=\lim_{t\to-0}u(x,t),\quad \lim_{t\to+0}J_{0+}^{1-\alpha}\frac{d}{dt}J_{0+}^{1-\gamma}u(x,t)=\lim_{t\to-0}u_t(x,t). \tag{5}$$

Здесь $\varphi(x)$ — заданная достаточно гладкая функция, $D^{\alpha,\gamma}$, $0<\alpha\leqslant\gamma\leqslant 1$ — обобщенный оператор дробного дифференцирования, определение которого приведено ниже.

Для функции $\varphi(t)$, заданной на (a,b), $-\infty<a<b<\infty$, выражение

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x(x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt,\quad x\in(a,b)$$

называется дробным интегралом Римана—Лиувилля порядка $\alpha>0$ (см. [10, с. 25]); здесь $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера.

Пусть $n-1<\alpha\leqslant n$, $n\in\mathbb{N}$. Операторы дробного интегро-дифференцирования Римана—Лиувилля и Герасимова—Капуто функции $\varphi(t)$ порядка α определяются соответственно по формулам

$$D_{a+}^{\alpha}\varphi(x)=\frac{d^n}{dx^n}I_{a+}^{n-\alpha}\varphi(x),\quad x\in(a,b),$$

$${}_*D_{a+}^{\alpha}\varphi(x)=I_{a+}^{n-\alpha}\varphi^{(n)}(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_a^x\frac{\varphi^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}$$

(см. [10, с. 27, 34]). При $\alpha=n\in\mathbb{N}$ эти производные сводятся к производным целого порядка (см. [10, с. 27, 34]):

$$D_{a+}^{n}\varphi(x)={}_*D_{a+}^{n}\varphi(x)=\frac{d^n\varphi}{dx^n}.$$

Обобщенная производная Римана—Лиувилля дробного порядка α, $n-1<\alpha\leqslant n$, $n\in\mathbb{N}$, и типа β, $0\leqslant\beta\leqslant 1$ (также альтернативное называние — дробная производная Хилфера) функции $\varphi(t)$ определяется по формуле

$$D_{a+}^{\alpha,\beta}\varphi(x)=I_{a+}^{\beta(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha)}\varphi(x)$$

(см. [10, с. 35]). Отсюда следует, что при $\beta=0$ дробная производная Хилфера совпадает с оператором Римана—Лиувилля ($D_{a+}^{\alpha,0}=D_{a+}^{\alpha}$), а в случае $\beta=1$ получим дробную производную Герасимова—Капуто, т.е. $D_{a+}^{\alpha,1}={}_*D_{a+}^{\alpha}$. Таким образом, оператор $D^{\alpha,\gamma}$ является непрерывной интерполяцией известных операторов дифференцирования Римана—Лиувилля и Герасимова—Капуто дробного порядка.

Далее для удобства записи мы воспользуемся другим обозначением дробной производной Хилфера, т.е. $D^{\alpha,\gamma}=D_{a+}^{\alpha,\beta}$, где $\gamma=\alpha+\beta n-\alpha\beta$ и $\alpha\leqslant\gamma\leqslant n$.

Оператор $D^{\alpha,\gamma}$ был введен и исследован Р. Хилфером в [11]. Применяя интегральные преобразования Фурье, Лапласа и Меллина, он исследовал задачу Коши для уравнения диффузии с обобщенным оператором $D^{\alpha,\gamma}$, решение которого представлено через H-функции Фокса. В [12] в специальном функциональном пространстве исследованы свойства оператора Хилфера и разработан операционный метод решения дробных дифференциальных уравнений в этом пространстве. Развивая эти результаты, авторы работы [18] предложили операционный метод решения дробных дифференциальных уравнений, содержащий конечную линейную комбинацию операторов Хилфера.

Что касается уравнений в частных производных с операторами дробного порядка, отметим работы [5,6,13,27]. В [21] для уравнения диффузии дробного порядка с оператором Хилфера изучены вопросы разрешимости прямых и обратных задач, а в [25] исследована нелокальная задача для нелинейного уравнения смешанного типа, содержащего дробную производную Хилфера. Отметим также работу [26], где для уравнения в частных производных с обобщенными операторами Римана—Лиувилля исследуется нелокальная задача, аналогичная задаче настоящей работы.

Отметим, что по построению различных моделей практических задач с применением дробного исчисления изложены в [17, 22]. Более подробную информацию, а также библиографию, касающиеся дробной производной Хилфера, о ее свойствах можно найти в монографии [20], где систематически изложена теория дробного интегро-дифференцирования, в том числе о дробной производной Хилфера.

Нелокальные задачи возникают при изучении различных проблем математической биологии, прогнозировании почвенной влаги, проблем физики, плазмы, и в этом направлении существенные результаты получены К. Б. Сабитовым и его учениками (см. [3,4,19]). Заметим, что нелокальные условия типа (3) имеют место при моделировании задач обтекания профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной (см. [19]).

Понятие нелокального дифференциального уравнения появилось в математике сравнительно недавно. Среди нелокальных дифференциальных уравнений особое место занимают уравнения, в которых отклонение аргументов имеет инволютивный характер. Отметим, что отображение I принято называть *инволюцией*, если $I^2 = E$, где E — тождественное отображение.

Дифференциальные уравнения с инволюцией исследовались в работах многих авторов (см. [7–9, 24]). В этом направлении следует отметить работу А. В. Линькова [2], где для аналогов параболического, гиперболического и эллиптического уравнения с инволюцией исследованы краевые и начально-краевые задачи. В [16] исследуются краевые задачи для дробного уравнения Гельмгольца с оператором Герасимова—Капуто и с инволюцией, а в [23] — обратные задачи для дробного параболического уравнения с инволюцией. Отметим также работу [15], где изучаются обратные задачи для вырожденного параболического уравнения дробного порядка с инволюцией.

Все перечисленные работы в основном относятся к нелокальным уравнениям второго порядка. Что касается нелокальных уравнений смешанного типа с производными целого или дробного порядков, то такие уравнения, а также краевые задачи для них ранее не изучались.

В данной работе установлен критерий единственности решения одной задачи для нелокального аналога смешанного параболо-гиперболического уравнения дробного порядка с инволюцией относительно пространственной переменой. При этом решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи и установлена устойчивость решения рассматриваемой задачи по нелокальному условию.

2. Существование и единственность решение задачи. Для решения задачи применим спектральный метод. Решения задачи A ищем в виде $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$. Подставляя это выражение в уравнение (1) и краевые условия (3), получим следующую спектральную задачу:

$$X''(x) - \varepsilon X''(-x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(-1) = 0, \quad X(1) = 0.$$

Как следует из результатов [23], рассматриваемая задача является самосопряженной, имеет счетное число собственных значений вида

$$\lambda_{1k} = (1+\varepsilon)k^2\pi^2, \quad \lambda_{2k} = (1-\varepsilon)\left(k - \frac{1}{2}\right)^2\pi^2, \quad |\varepsilon| < 1, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

а соответствующими собственными функциями являются

$$X_{1k}(x) = \sin k\pi x, \quad X_{2k}(x) = \cos(k - 0,5)\pi x, \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{6}$$

более того, они образуют полную ортонормированную систему в $L_2(-1,1)$.

2.1. Единственность решения задачи A. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи A. Рассмотрим ледующие функции

$$u_{1k}(t) = \int_{-1}^{1} u(x,t)\sin k\pi x\,dx, \quad u_{2k}(t) = \int_{-1}^{1} u(x,t)\cos(k-0,5)\pi x\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Применяя оператор $D^{\alpha,\gamma}$ к обеим частям равенства (7) по t при $t \in (0,b)$, а также дифференцируя два раза по t при $t \in (-a,0)$ и учитывая уравнение (1) относительно функций $u_{1k}(t)$ и $u_{2k}(t)$, получим дифференциальные уравнения

$$D^{\alpha,\gamma}u_{ik}(t) + \lambda_{ik}u_{ik}(t) = 0, \quad t > 0, \tag{8}$$

$$u''_{ik}(t) + \lambda u_{ik}(t) = 0, \quad t < 0, \quad i = 1,2. \tag{9}$$

Общие решения уравнений (8) и (9) имеют вид

$$u_{ik}(t) = \begin{cases} A_{ik}t^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{ik}t^{\alpha}), & t > 0, \\ B_{ik}\sin\sqrt{\lambda_{ik}}t + L_{ik}\cos\sqrt{\lambda_{ik}}t, & t < 0, \end{cases} \tag{10}$$

где A_{ik}, B_{ik}, L_{ik}, $i = 1,2$, $k = 1,2,\ldots,$ — произвольные постоянные, а $E_{\alpha,\beta}(z)$ — функция Миттаг-Леффлера:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad z,\alpha,\beta \in C, \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0$$

(см. [1, с. 117]). Из (8), (9), учитывая условия (1), (4) и (5), получим, что функции $u_{1n}(t)$ и $u_{2n}(t)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\lim_{t\to+0}J_{0+}^{1-\gamma}u_{in}(t) = \lim_{t\to-0}u_{in}(t), \quad \lim_{t\to+0}J_{0+}^{1-\alpha}\left(\frac{d}{dt}J_{0+}^{1-\gamma}u_{in}(t)\right) = \lim_{t\to-0}\frac{du_{in}(t)}{dt}, \quad i = 1,2, \tag{11}$$

$$u_{ik}(-a) = u_{ik}(b) + \varphi_{ik}, \quad i = 1,2, \quad k = 1,2,\ldots, \tag{12}$$

где

$$\varphi_{ik} = \int_{-1}^{1}\varphi(x)X_{ik}(x)\,dx, \quad i = 1,2, \quad k = 1,2,\ldots$$

Далее, подчиняя функции (10) условиям (11), (12), для нахождения постоянных A_{ik}, B_{ik}, L_{ik}, $i = 1,2$, получим следующую систему уравнений:‘

$$\begin{cases} A_{ik} = L_{ik}, \quad -\lambda_{ik}A_{ik} = \sqrt{\lambda_{ik}}B_{ik}, \\ -B_{ik}\sin\sqrt{\lambda_{ik}}a + L_{ik}\cos\sqrt{\lambda_{ik}}a - A_{ik}b^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{ik}b^{\alpha}) = \varphi_{ik}. \end{cases} \tag{13}$$

Данная система алгебраических уравнений имеет единственное решение

$$L_{ik} = A_{ik}, \quad B_{ik} = -\sqrt{\lambda_{ik}}A_{ni}, \quad A_{ik} = \frac{\varphi_{ik}}{\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)}$$

при условии, что для всех $k = 1,2\ldots$ имеет место равенство

$$\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon) = \sqrt{\lambda_{ik}}\sin\sqrt{\lambda_{ik}}a + \cos\sqrt{\lambda_{ik}}a - b^{1-\gamma}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{ik}b^{\alpha}) \neq 0, \quad i = 1,2. \tag{14}$$

Подставляя найденные решения в (10), имеем

$$u_{ik}(t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_{ik}}{\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)}t^{1-\gamma}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{ik}t^{\alpha}), & t > 0, \\ \dfrac{\varphi_{ik}}{\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)}(\cos\sqrt{\lambda_{ik}}t - \sqrt{\lambda_{ik}}\sin\sqrt{\lambda_{ik}}t), & t \leqslant 0. \end{cases} \tag{15}$$

При выполнении условия (14) с помощью (15) легко доказать единственность решения рассматриваемой задачи. Действительно, пусть задача A имеет два разных решения $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ и пусть $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$. Тогда нетрудно проверить, что $u(x,y)$ является решением однородной задачи A $(\varphi(x) = 0)$. Поэтому достаточно доказать, что однородная задача A имеет только тривиальное решение.

Пусть $u(x,y)$ — решение однородной задачи A в области Ω и выполняется условие (14). Так как $\varphi(x)=0$, имеем $\varphi_{ik}=0$, $i=1,2$, и из формул (7) и (15) следует, что

$$\int\limits_0^1 t^{1-\gamma}u(x,t)X_{ik}(x)\,dx=0,\quad t\in[0,b],\quad i=1,2,\quad k=1,2,\dots,$$

$$\int\limits_0^1 u(x,t)X_{ik}(x)\,dx=0,\quad t\in[-a,0],\quad i=1,2,\quad k=1,2,\dots$$

Далее, учитывая полноту системы (6) в пространстве $L_2(-1,1)$, заключаем, что $u(x,t)=0$ почти всюду на $[-1,1]$ при любом $t\in[-a,b]$. Поскольку $t^{1-\gamma}u(x,t)\in C(\bar\Omega_1)$, $u(x,t)\in C(\overline{\Omega}_2)$, то $t^{1-\gamma}u(x,t)\equiv 0$ в $\overline{\Omega}$, т.е. задача A в рассматриваемой классе имеет единственное решение. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если существует решение задачи A, то оно единственно только и только тогда, когда выполнены условия* (14) *при всех* $k=1,2,\dots$.

Теперь рассмотрим случай, когда нарушается условие (14), т.е. $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)=0$ при некоторых a, b, ε, $i=i_0$ и $k=m$. Тогда однородная задача A (где $\varphi(x)\equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$V_{i_0m}(x,t)=v_{i_0m}(t)X_{i_0m}(x), \tag{16}$$

где

$$v_{i_0m}(t)=\begin{cases} t^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{i_0m}t^\alpha), & t>0,\\ \cos\lambda_{i_0m}t-\sqrt{\lambda_{i_0m}}\sin\lambda_{i_0m}t, & t<0.\end{cases}$$

Представим выражение $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)$ в виде

$$\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)=\sqrt{1+\lambda_{ik}}\sin(\lambda_{ik}a+\rho_{ik})-b^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{ik}b^\alpha), \tag{17}$$

где $\rho_{ik}=\arcsin(1/\sqrt{1+\lambda_{ik}})$ и $\rho_{ik}\to 0$ при $k\to+\infty$. Отсюда видно, что выражение $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)$ обращается в нуль только в том случае, когда

$$\lambda_{ik}a=(-1)^k\arcsin\frac{b^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{ik}b^\alpha)}{\sqrt{1+\lambda_{ik}}}+\pi n-\rho_{ik},\quad n=1,2,\dots.$$

Поскольку $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)$ является знаменателем дроби, то при достаточно больших k выражение $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)$ может стать достаточно малым, т.е. возникает проблема малых знаменателей. Поэтому для обоснования существования решения данной задачи необходимо показать существование таких чисел a, b и ε, что при достаточно больших k выражение $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)$ отделено от нуля.

Лемма 1. *Пусть b — любое положительное действительное число, а числа a и ε таковы, что $\sqrt{1\pm\varepsilon}\cdot a$ — рациональное число. Тогда при больших значениях k существует такая положительная постоянная M_i, $i=1,2$, что справедлива оценка*

$$|\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)|\geqslant M_i>0. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $i=1$ и $\sqrt{1+\varepsilon}\cdot a=p\in\mathbb{N}$. Тогда при всех k и $b>0$ из (14) имеем

$$|\Delta_{1k}(a,b,\varepsilon)|\geqslant|\pm 1-b^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{1k}b^\alpha)|\geqslant$$
$$\geqslant|1-b^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{1k}b^\alpha)|\geqslant 1-b^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{1k}b^\alpha).$$

Здесь и далее использованы следующие свойства функции Миттаг-Леффлера:

(i) при $\alpha,\beta\in(0,1]$, $\alpha\leqslant\beta$ функция $E_{\alpha,\beta}(-z)$ вполне монотонна на $(0,\infty)$ (см. [10, с. 280]);

(ii) если $\alpha\in(0,2)$, β — вещественная постоянная и $\arg z=\pi$, то имеет место неравенство

$$|E_{\alpha,\beta}(z)|\leqslant\frac{M}{1+|z|},$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от z (см. [1, с. 136]).

Из свойства полной монотонности функции Миттаг-Леффлера вытекает существование такого натурального числа $k_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $k > k_0$ имеет место неравенство

$$1 - b^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{1k} b^{\alpha}) \geqslant N_1 > 0;$$

следовательно, $\Delta_{1k}(a, b, \varepsilon) \geqslant N_1 > 0$. Пусть теперь

$$\sqrt{1+\varepsilon} \cdot a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},$$

где $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$. Разделим kp на q с остатком:

$$kp = sq + r, \quad s, r \in \mathbb{N}_0, \quad 0 \leqslant r \leqslant q - 1.$$

Тогда из (17) получим

$$|\Delta_{1k}(a, b, \varepsilon)| = \left| \sqrt{1+\lambda_{1k}} (-1)^s \sin\left(\frac{\pi r}{q} + \rho_{ik}\right) - b^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{1k} b^{\alpha}) \right|.$$

Если $r = 0$, то этот случай сводится к уже рассмотренному выше случаю.

Пусть $r > 0$. Поскольку $\rho_{1k} \to 0$ при $k \to +\infty$, то существует такая постоянная $k_1 > 0$, что при всех $k > k_1$ имеет место неравенство

$$\rho_{1k} < \frac{\pi}{2q}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\Delta_{1k}(a, b)| \geqslant \left| \sqrt{1+\lambda_{1k}} \sin\left(\frac{\pi r}{q} + \rho_{ik}\right) - b^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{1k} b^{\alpha}) \right| \geqslant \\ \geqslant \sqrt{1+\lambda_{ik}} \left| \sin\left(\frac{\pi r}{q} + \rho_{ik}\right) \right| - b^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{1k} b^{\alpha}) > \\ > \lambda_{1k} \left| \sin\left(\frac{\pi(q-1)}{q} + \frac{\pi}{2q}\right) \right| - 1 = k\pi \sin\frac{\pi}{2q} - 1 \geqslant kN_2 \geqslant N_2 > 0 \end{aligned}$$

при

$$k > \max\{k_0, k_1, k_2\}, \quad k_2 \geqslant \frac{1}{\pi \sin\frac{\pi}{2q} - N_2}, \quad 0 < N_2 < \pi \sin\frac{\pi}{2q}$$

и при любом $b > 0$. Случай $i = 2$ доказывается аналогично. Лемма доказана. □

Замечание 1. Множество пар (a, ε) чисел a и ε, удовлетворяющее одновременно условиям (18), не пусто. Например, если выбрать числа a и ε в виде

$$a = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}} \cdot r_3, \quad \varepsilon = \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 + r_2^2},$$

где $r_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, 2, 3$, $r_1 \neq r_2$, то пара (a, ε) удовлетворяет условию (18).

Отметим, что идея доказательства леммы 1 заимствована из [19].

2.2. Существование решение задачи A. Перейдем к доказательству существования решения задачи A. Из (14) и из свойств функции Миттаг-Леффлера, приведенных выше, легко получить доказательство следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (14) *и* (18). *Тогда выполняются следующие неравенства*:

$$|t^{1-\gamma} u_{1k}(t)| \leqslant M_1 |\varphi_{1k}|, \quad |t^{1-\gamma} u_{2k}(t)| \leqslant M_2 |\varphi_{2k}|, \quad t \in [0, b],$$

$$|t^{1-\gamma} D^{\alpha,\gamma} u_{1k}(t)| \leqslant M_3 k^2 |\varphi_{1k}|, \quad |t^{1-\gamma} D^{\alpha,\gamma} u_{2k}(t)| \leqslant M_4 \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 |\varphi_{2k}|, \quad t \in [0, b],$$

$$\left| \frac{d^s u_{1k}(t)}{dt^s} \right| \leqslant D_{1s} k^{s+1} |\varphi_{1k}|, \quad \left| \frac{d^s u_{2k}(t)}{dt^s} \right| \leqslant D_{2s} \left(k - \frac{1}{2}\right)^{s+1} |\varphi_{2k}|, \quad t \in [-a, 0],$$

где M_i, $i = \overline{1,4}$, D_{1s}, D_{2s}, $s = \overline{0,2}$, — положительные постоянные.

Так как система (6) полна и образует базис в $L_2(-1,1)$, то решение задачи A можем искать в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_{1k}(t)\sin(k\pi x)+u_{2k}(t)\cos\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x\right)\right), \tag{19}$$

где $u_{1k}(t)$ и $u_{2k}(t)$ — неизвестные функции.

Подставляя функцию (19) в уравнение (1) и удовлетворяя условиям (3)–(5), для искомых функций получим задачу (8), (9), (11), (12), решения которой имеют вид (15).

Таким образом, решения задачи можно представить в виде (19), где функции $u_{ik}(t)$, $i=1,2$, определяются по формулам (15). Остаётся доказать правомерность всех этих действий. Для этого формально из (19), заменяя x на $-x$ и применяя почленное дифференцирование, составим ряды

$$u(-x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-u_{1k}(t)\sin(k\pi x)+u_{2k}(t)\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x\right), \tag{20}$$

$$u_x(\pm x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\pm k\pi u_{1k}(t)\cos(k\pi x)-\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi u_{2k}(t)\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x\right), \tag{21}$$

$$u_{xx}(\pm x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(\mp(k\pi)^2u_{1k}(t)\sin(k\pi x)-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2u_{2k}(t)\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x),\quad t>0, \tag{22}$$

$$t^{1-\gamma}D^{\alpha,\gamma}u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(t^{1-\gamma}D^{\alpha,\gamma}u_{1k}(t)\sin(k\pi x)+t^{1-\gamma}D^{\alpha,\gamma}u_{2k}(t)\cos\frac{(k-1)\pi x}{2}\right),\quad t>0, \tag{23}$$

$$u_{tt}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(u''_{1k}(t)\sin(k\pi x)+u''_{2k}(t)\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x\right),\quad t<0, \tag{24}$$

$$u_{xx}(\pm x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mp(k\pi)^2u_{1k}(t)\sin(k\pi x)-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2u_{2k}(t)\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x\right),\quad t<0. \tag{25}$$

Учитывая леммы 1 и 2, нетрудно видеть, что ряды (19)–(25) мажорируются рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^3|\varphi_{1k}|+\left(k-\frac{1}{2}\right)^3|\varphi_{2k}|\right). \tag{26}$$

Исследуем сходимость ряда (26). Предположим, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi(x)\in C^4[-1,1],\quad \varphi^{(s)}(-1)=0,\quad \varphi^{(s)}(1)=0,\quad s=0,2. \tag{27}$$

Тогда ряд (26) оценивается сходящимся рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}|\varphi_{1k}^{(4)}|+\frac{1}{k-1/2}|\varphi_{2k}^{(4)}|\right),$$

где

$$\varphi_{1k}=\frac{1}{(\pi k)^4}\varphi_{1k}^{(4)},\qquad \varphi_{1k}^{(4)}=\int_{-1}^{1}\varphi^{(4)}(x)\sin k\pi x\,dx,$$

$$\varphi_{2k}=\frac{1}{(\pi(k-1/2))^4}\varphi_{2k}^{(4)},\quad \varphi_{2k}^{(4)}=\int_{-1}^{1}\varphi^{(4)}(x)\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x\,dx.$$

Отсюда в силу признака Вейерштрасса вытекает абсолютная и равномерная сходимость рядов (19)–(21) в замкнутой области $\overline{\Omega}$, а рядов (22)–(25) соответственно в областях $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$. Поэтому функция $u(x,t)$, определенная рядом (19), принадлежит классу (2), а также удовлетворяет условиям (3)–(5). Непосредственным вычислением можно показать, что функция $u(x,t)$, определенная рядом (19), удовлетворяет и уравнению (1).

Пусть теперь $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)=0$ при некоторых a, ε, $i=i_0$ и $k=k_1,\ldots,k_s$, $1\leqslant k_1<k_1<\ldots<k_s$, $s\in\mathbb{N}$. Тогда для разрешимости системы (13) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия ортогональности

$$\varphi_{i_0k}=\int\limits_0^1\varphi(x)X_{i_0k}\,dx=0,\quad k=k_1,\ldots,k_s. \tag{28}$$

В этом случае решение задачи определяется в виде суммы рядов

$$u(x,t)=\left[\sum_{k=1}^{k_1-1}+\sum_{k=k_1+1}^{k_2-1}+\ldots+\sum_{k=k_s+1}^{\infty}\right]+\sum_{i=1}^{2}u_{ik}X_{ik}(x)+\\+\sum_{m}\sum_{i\neq i_0}u_{im}X_{im}(x)+\sum_{m}\sum_{i=i_0}P_{i_0m}V_{i_0m}(x,t) \tag{29}$$

где $m=k_1,\ldots,k_s$, P_{i_0m} — произвольные постоянные, функции $V_{i_0m}(x,t)$ определяются из формулы (16).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям* (27). *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1. *Задача A в области Ω однозначно разрешима только тогда, когда выполняются условия* (14) *и* (18); *при этом решение определяется рядом* (19).
2. *Если для некоторых a, b, ε, $i=i_0$ и $k=k_1,\ldots,k_s$ выполняется условие $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)=0$, то задача A разрешима только в том случае, если выполняются условия ортогональности* (28); *при этом решение определяется рядом* (29).

Замечание 2. В случае $\alpha=1$, $\beta=0$ или $\alpha=1$, $\beta=1$ и при $\varepsilon=0$ утверждения данной теоремы совпадают с [19, теорема 2].

3. Устойчивость решение задачи A.

Установим устойчивость решения задачи A по ее нелокальному условию (4). Пусть

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})}=\|t^{1-\gamma}u(x,t)\|_{C(\bar\Omega_1)}+\|u(x,t)\|_{C(\bar\Omega_2)},$$
$$\|u(x,t)\|_{L_2(\Omega)}=\|t^{1-\gamma}u(x,t)\|_{L_2(\Omega_1)}+\|u(x,t)\|_{L_2(\Omega_2)},$$

где

$$\|v(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})}=\max_{\overline{\Omega}}|v(x,t)|,\quad \|\varphi(x)\|_{C[-1,1]}=\max_{[-1,1]}|\varphi(x)|,$$
$$\|v(x,t)\|_{L_2(\Omega)}=\left(\iint\limits_{\Omega}|v(x,t)|^2\,dx\,dt\right)^{1/2},\quad \|\varphi(x)\|_{L_2(-1,1)}=\left(\int\limits_0^1|\varphi(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда для решения задачи A имеют место оценки*

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})}\leqslant C\|\varphi''(x)\|_{C[-1,1]}, \tag{30}$$
$$\|u(x,t)\|_{L_2(\Omega)}\leqslant C\|\varphi'(x)\|_{L_2(-1,1)}, \tag{31}$$

где $C>0$ — постоянная, не зависящая от $\varphi(x)$.

Доказательство. Пусть (x,t) — произвольная точка области $\overline{\Omega}_2$. Тогда из (19) следует, что

$$|u(x,t)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(|u_{1k}|+|u_{2k}|).$$

Отсюда, учитывая представления

$$\varphi_{k1} = -\frac{1}{(\pi k)^2}\varphi_{k1}^{(2)}, \qquad \varphi_{k1}^{(2)} = \int\limits_{-1}^{1} \varphi''(x) \sin k\pi x\, dx,$$

$$\varphi_{k2} = -\frac{1}{(k-1/2)^2\pi^2}\varphi_{k2}^{(2)}, \quad \varphi_{k2}^{(2)} = \int\limits_{-1}^{1} \varphi''(x) \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x\, dx,$$

на основании леммы 2 получим

$$|u(x,t)| \leqslant C_1 \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\left|\varphi_{1k}^{(2)}\right| + \frac{1}{(k-1/2)}\left|\varphi_{2k}^{(2)}\right|\right), \quad C_1 = \frac{\max\{D_{10}, D_{20}\}}{\pi^2}.$$

Далее, применяя неравенства Коши—Шварца и Бесселя, имеем

$$|u(x,t)| \leqslant C_1\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_{1k}^{(2)}\right|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1/2)^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_{2k}^{(2)}\right|^2\right)^{1/2}\right) \leqslant$$
$$\leqslant C_1\|\varphi''(x)\|_{L(-1,1)}\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1/2)^2}\right)^{1/2}\right) \leqslant C\|\varphi''(x)\|_{L(-1,1)},$$

которая и доказывает оценку (30) в случае $(x,t) \in \overline{\Omega}_2$. Таким же образом в случае $(x,t) \in \overline{\Omega}_1$ получим оценку

$$\|t^{1-\gamma}u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega}_1)} \leqslant C\|\varphi''(x)\|_{C[-1,1]}.$$

Отсюда вытекает оценка (30).

Теперь докажем оценку (31). Так как

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_2)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}(u_{in}(t)X_{in}(x)), \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}(u_{ik}(t)X_{ik}(x))\right)_{L_2(\Omega_2)},$$

а система (6) ортонормирована в $L_2(-1,1)$, то из (19), используя равенство Парсеваля, лемму 2, соотношения

$$\varphi_{1k} = \frac{1}{\pi k}\varphi_{1k}^{(1)}, \qquad \varphi_{1k}^{(1)} = \int\limits_{-1}^{1} \varphi'(x) \cos k\pi x\, dx,$$

$$\varphi_{2k} = -\frac{1}{(k-1/2)\pi}\varphi_{2k}^{(1)}, \quad \varphi_{2k}^{(1)} = \int\limits_{-1}^{1} \varphi'(x) \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x\, dx$$

и неравенство Бесселя, получим

$$\|u(x,t)\|_{L_2(\Omega_2)} \leqslant C\|\varphi'(x)\|_{L_2(-1,1)}.$$

Аналогично находим оценку

$$\|(t^{1-\gamma}u(x,t)\|_{L_2(\Omega_1)} \leqslant C\|\varphi'(x)\|_{L_2(-1,1)}.$$

Из последних оценок вытекает оценка (31). Следовательно, решение (19) задачи A непрерывно зависит от функции $\varphi(x)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — М.: Наука, 1966.
2. *Линьков А. В.* Обоснование метода Фурье для краевых задач с инволютивным отклонением// Вестн. Самар. ун-та. — 1999. — *12*, № 2. — С. 60–66.
3. *Сабитов К. Б., Гущина В. А.* Задача А. А. Дезина для неоднородного уравнения Лаврентьева—Бицадзе// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 3. — С. 37–50.
4. *Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В.* К вопросу о корректности обратных задач для неоднородного уравнения Гельмгольца// Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2018. — *22*, № 2. — С. 269–292.
5. *Исломов Б. И., Абдуллаев О. Х.* Задачи типа Геллерстедта для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа с операторами Капуто и Эрдейли—Кобера дробного порядка// Изв. вузов. Мат. — 2020. — № 10. — С. 33–46.
6. *Agarwal P., Abdullaev O. Kh.* A nonlocal problem with integral gluing condition for a third-order loaded equation with parabolic-hyperbolic operator involving fractional derivatives// Math. Meth. Appl. Sci. — 2020. — *43*, № 6. — P. 3716–3726.
7. *Al-Salti N., Kerbal S., Kirane M.* Initial-boundary value problems for a time-fractional differential equation with involution perturbation// Math. Model. Nat. Phenom. — 2019. — *14*, № 3. — P. 1–15.
8. *Ashyralyev A., Sarsenbi A.* Well-posedness of a parabolic equation with involution// Num. Funct. Anal. Optim. — 2017. — *38*, № 10. — P. 1295–1304.
9. *Cabada A, Tojo F. A. F.* On linear differential equations and systems with reflection// Appl. Math. Comput. — 2017. — *305*. — P. 84–102.
10. *Tenreiro Machado J. A. (ed.).* Handbook of Fractional Calculus with Applications. — Berlin–Boston: De Gruyter, 2019.
11. *Hilfer R. (ed.).* Applications of Fractional Calculus in Physics. — Singapore: World Scientific, 2000.
12. *Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Z.* Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2009. — *12*, № 3. — P. 299–318.
13. *Karimov E., Mamchuev M., Ruzhansky M.* Non-local initial problem for second order time-fractional and space-singular equation// Hokkaido Math. J. — 2020. — *49*. — P. 349–361.
14. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006.
15. *Kirane M., Sadybekov M. A., Sarsenbi A. A.* On an inverse problem of reconstructing a subdiffusion process from nonlocal data// Math. Meth. Appl. Sci. — 2019. — *42*, № 6. — P. 2043–2052.
16. *Kirane M., Turmetov B. Kh., Torebek B. T.* A nonlocal fractional Helmholtz equation// Fract. Differ. Calc. — 2017. — *7*, № 2. — P. 225–234.
17. *Kumar D., Baleanu D.* Editorial: Fractional calculus and its applications in physics// Front. Phys. — 2019. — *7*. — 81.
18. *Kim Myong-Ha, Ri Guk-Chol, O Hyong-Chol* Operational method for solving multi-term fractional differential equations with the generalized fractional derivatives// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2014. — *17*, № 1. — P. 79–95.
19. *Сабитов К. Б.* Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области// Мат. заметки. — 2011. — *89*, № 4. — С. 596–602.
20. *Sandev T., Tomovski Z.* Fractional Equations and Models: Theory and Applications. — Switzerland: Springer Nature, 2019.
21. *Salakhitdinov M. S., Karimov E. T.* Direct and inverse source problems for two-term time-fractional diffusion equation with Hilfer derivative// Uzbek. Math. J. — 2017. — *4*. — P. 140–149.
22. *Sun H., Chang A., Zhang Y., Chen W.* A review on variable-order fractional differential equations: mathematical foundations, physical models, numerical methods and applications// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2019. — *22*. — P. 27–59.
23. *Torebek B. T., Tapdigoglu R.* Some inverse problems for the nonlocal heat equation with Caputo fractional derivative// Math. Meth. Appl. Sci. — 2017. — *40*. — P. 6468–6479.
24. *Turmetov B. Kh, Torebek B. T.* On a class of fractional elliptic problems with an involution perturbation// AIP Conf. Proc. — 2016. — *1759*. — 020070.

25. *Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J.* Boundary-value problem for weak nonlinear partial differential equations of mixed type with fractional Hilfer operator// Axioms. — 2020. — *9*, № 2. — 68.
26. *Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J.* Nonlocal problem for a mixed type fourth-order differential equation with Hilfer fractional operator// Ural Math. J. — 2020. — *6*, № 1. — P. 153–167.
27. *Yuldashev T. K., Karimov E.* Inverse problem for a mixed type integro-differential equation with fractional-order Caputo operators and spectral parameters// Axioms. — 2020. — *9*. — 121.

Кадиркулов Бахтиёр Жалилович
Ташкентский государственный университет востоковедения, Ташкент, Узбекистан
E-mail: kadirkulovbj@gmail.com

Каюмова Гавхар Абдушукуровна
Каршинский инженерно-экономический институт, Карши, Узбекистан
E-mail: gavhar88@mail.ru