ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 241 (2025). С. 18–29
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-241-18-29

УДК 517.977.5

ПОЗИЦИОННЫЙ ПРИНЦИП МИНИМУМА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ И ЕГО РАСШИРЕНИЯ

© 2025 г. **В. А. ДЫХТА**

Аннотация. Необходимое условие глобальной оптимальности — позиционный принцип минимума (F-ПМ), установленный для задач со свободным правым концом траекторий, обобщается на гладкую задачу с терминальными ограничениями типа равенства. Для этого применяется абстрактный метод опорных мажорант, который конкретизируется для задачи управления на уровне модифицированной функции Лагранжа с квадратичным штрафом. Но соответствующая безусловная экстремальная задача не требует решения: если исследуемый процесс оптимален в исходной задаче управления, то спуск с него в безусловной задаче на допустимую траекторию с помощью F-ПМ невозможен (при любом выборе множителя Лагранжа и штрафного параметра). Нарушение этого необходимого условия сопровождается предъявлением улучшающего процесса (который может оказаться скользящим режимом). Конструктивную основу F-ПМ составляет метод спуска с управлениями в форме обратной связи. Применение этого метода естественно и в известных методах Кротова и Понтрягина, в которых минимизируются соответственно модифицированные лагранжианы Кротова и бипозиционные лагранжианы. В результате такого расширения области применения метода позиционного спуска получены позиционные версии методов Кротова и Понтрягина, которые значительно эффективнее традиционных.

Ключевые слова: необходимые и достаточные условия, позиционные управления, экстремали, функции Кротова.

FEEDBACK MINIMUM PRINCIPLE FOR OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH TERMINAL CONDITIONS AND ITS EXTENSIONS

© 2025 **V. A. DYKHTA**

Abstract. The nonlocal necessary optimality condition, the so-called feedback minimum principle (F-PM) obtained in previous publications of the author for free endpoint problems, is generalized for problems with terminal constraints. The proof of the new necessary condition is based on abstract methods of support majorants and modified Lagrange functions (MLF) with a quadratic penalty. But the corresponding unconstrained problem does not necessarily have to be solved. If the reference process is optimal, then there is no descent for the MLF from it using F-PM. If this necessary optimality is violated, then we obtain an improved admissible process. The constructive basis of the feedback minimum principle is the descent method with feedback strategies. However, it is natural to use this descent method for minimizing the modified Lagrangian in the well-known Krotov and Pontryagin optimality conditions. As a result of such an extension of the F-PM descent method, we obtain feedback versions of the Krotov and Pontryagin methods, which are significantly more efficient than the traditional methods.

Keywords and phrases: necessary and sufficient optimality conditions, feedback controls, extremals, Krotov functions.

AMS Subject Classification: 49L99, 49K15

ISSN 0233–6723

1. Введение. Статья посвящена методам решения задач оптимального управления с использованием позиционных управлений. Хотя эта цель сформулирована довольно широко, мы не будем касаться методов построения оптимального синтеза и современной теории Гамильтона—Якоби (см. [12, 17–19]). Рассматриваемые в работе задачи управления с терминальными ограничениями ставятся в классе программных управлений, но преследуемые теоретические цели — необходимые и достаточные условия оптимальности — достигаются единообразным методом позиционного спуска относительно того или иного модифицированного лагранжиана задачи.

Исходным толчком к расширенному применению позиционных управлений послужила серия работ по так называемому позиционному принципу минимума (см. [2–7]) для задач со свободным правым концом траекторий. Это необходимое условие глобальной оптимальности (точнее, множество родственных условий; см. [5]) существенно усиливает принцип максимума Понтрягина для гладких задач и типа Кларка для негладких (см. [6]), даже в элементарном варианте с конструкциями классического принципа максимума (далее этот вариант называется универсальным позиционным принципом минимума). Во всех этих условиях ключевую роль играет позиционное управление спуска. Сложности распространения позиционного принципа на задачи с терминальными ограничениями описаны в п. 2, а способ их преодоления — в п. 3 данной статьи.

Чтобы расширить класс задач с терминальными ограничениями, допускающих позиционное варьирование управления, возникла идея апробировать его на известных методах Кротова и Понтрягина, которые в традиционной форме охватывают задачи с ограничениями. Идея оказалась плодотворной: позиционные версии этих методов оказались значительно конструктивнее и эффективнее исходных.

Например, существенно расширился класс задач, для которых существует позиционная функция Кротова простой структуры — линейной или линейно-квадратичной, — причем без обязательного требования нормальности исследуемой экстремали. Между тем хорошо известны результаты Кларка и Винтера (см. [11, 26, 27]) о существовании локальной функции Кротова (и проверочной функции Каратеодори; см. [20, 21]) только для нормальных экстремалей; однако для глобальной оптимальности, которой мы придерживаемся, локальные функции не работают (см. по этому вопросу обзоры в [20, 23]). Столь же простые бипозиционные функции вида $S(x,\psi) = \langle \psi, x\rangle$ (см. [8]) оказались эффективными в позиционном принципе Понтрягина. Все эти факты подтверждены нетривиальными примерами.

В данной статье будет рассмотрен только позиционный метод Кротова с соответствующими примерами (см. пп. 6, 7). На одном из них будет иллюстрирован и позиционный метод Понтрягина (см. п. 8).

2. О позиционном принципе минимума и его распространении на задачи с терминальными ограничениями. В пп. 2–5 данной работы рассматривается следующая задача (P):

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{2}$$

$$g_i\big(x(t_1)\big) = 0, \quad i = \overline{1,k}, \tag{3}$$

$$J[\sigma] = g_0\big(x(t_1)\big) \to \inf .$$

Здесь через σ обозначены пары функций (x, u) с управлениями из класса $\mathcal{U} := L_\infty(T,U)$, U — компактное множество в $\mathbb{R}^m$, вектор-функция $f(t,x,u)$ непрерывна, гладкая по x, и удовлетворяет условию подлинейного роста, все функции $g_i(x)$ тоже гладкие.

Через Σ обозначим множество всех пар σ, удовлетворяющих системе (1), (2), а через $D \subset \Sigma$ — множество допустимых пар (процессов) задачи (P).

В дополнение к сказанному во введении о позиционном принципе минимума (F-ПМ) уточним, что он доказан для различных вариантов задачи (P_0) без терминальных ограничений (3) с использованием опорных мажорант функционала — слабо убывающих (u-стабильных; см. [12]) функций, являющихся решениями неравенства Гамильтона—Якоби

$$\varphi_t(t,x) + \min_{u\in U} \varphi_x(t,x)\cdot f(t,x,u) \leqslant 0, \quad \varphi(t_1,x) = g_0(x) - g_0\big(\bar{x}(t_1)\big). \tag{4}$$

Для гладких задач (которые мы и будем рассматривать) решения неравенства (4) считаются липшицевыми, гладкими по x функциями, образующими пространство $\mathcal{F}$.

Если выбрано некоторое решение $\varphi(t,x) \in \mathcal{F}$ неравенства (4), то находим соответствующее экстремальное отображение

$$U_\varphi(t,x) = \operatorname*{Argmin}_{u\in U} \varphi_x(t,x)\cdot f(t,x,u) \tag{5}$$

и множество $\mathcal{V}_\varphi$ его селекторов $v(t,x)$ — позиционных управлений потенциального спуска (в общем случае разрывных). Решением системы (1) с таким управлением (т.е. при $u = v(t,x)$) считается пучок движений Красовского—Субботина $\mathcal{X}(v)$ (см. [12]), дополненный решениями Каратеодори, если таковые существуют.

В этих обозначениях соответствующий F-ПМ (зависящий от φ) можно сформулировать в виде следующего условия:

Условие $\mathbf{N}(\varphi)$. Если процесс $\bar\sigma = (\bar x, \bar u)$ оптимален в задаче (P_0), то траектория $\bar x$ оптимальна в следующей φ-присоединенной задаче:

$$g_0\big(x(t_1)\big) \to \min, \quad x(\cdot) \in \mathcal{X}(v), \quad v \in \mathcal{V}_\varphi.$$

Среди всех возможных мажорант наиболее привлекательной для массового применения и универсальной является квазилинейная мажоранта

$$\varphi^\psi(t,x) = g_0(x) - g_0\big(\bar x(t)\big) + \Big(\psi(t) - \nabla g_0\big(\bar x(t)\big)\Big)\cdot\big(x - \bar x(t)\big) + r(t). \tag{6}$$

Здесь $\psi(\cdot)$ — котраектория процесса $\bar\sigma$, т.е. решение сопряженной системы

$$\dot\psi = -H_x\big(t, \bar x(t), \psi, \bar u(t)\big), \quad \psi(t_1) = g_{0x}\big(\bar x(t_1)\big),$$

где $H(t,x,\psi,u) = \psi\cdot f(t,x,u)$, а «поправка» $r(t)$ обеспечивает слабое убывание функции (6).

Данная мажоранта формируется в рамках конструкций принципа максимума Понтрягина, но, как указывалось во введении, соответствующий ей F-ПМ — условие $\mathbf{N}(\psi) := \mathbf{N}(\varphi^\psi)$ — существенно усиливает принцип Понтрягина и его обобщения (см. [6, 11, 21].

Распространение F-ПМ на задачу (P) оказалось нетривиальным. Схема такого распространения представлена в [9] с использованием метода модифицированной функции Лагранжа с квадратичным штрафом. Однако её практическое применение для аналитического исследования модельных примеров весьма проблематично из-за необходимости совершать сингулярные предельные переходы, обусловленные разрывностью позиционных управлений спуска. Поэтому в данной статье предлагается использовать совершенно новый, альтернативный подход, свободный от указанных трудностей.

3. Опорные мажоранты экстремальных задач и улучшение допустимой точки. В некотором пространстве $\mathcal{Z}$ рассмотрим задачу (A):

$$f(z) \to \min, \quad z \in D \subset \mathcal{Z},$$

где f — конечная функция на $\mathcal{Z}$.

Функцию $\Phi(z)$, определенную на $\mathcal{Z}$, назовем *опорной сверху к f в точке $\bar z \in \mathcal{Z}$*, или *опорной мажорантой f в точке $\bar z$*, если $\Phi(\bar z) = f(\bar z)$ и

$$f(z) - f(\bar z) \leqslant \Phi(z) - \Phi(\bar z), \quad z \in \mathcal{Z}.$$

Под задачей *улучшения точки* $\bar z$ в задаче (A) понимается нахождение точки $z_* \in D$ со свойством $f(z_*) < f(\bar z)$. (Понятно, что при этом $\bar z$ не должна быть решением (A).)

Предложение 1. *Любая точка $z_* \in D$, удовлетворяющая неравенству $\Phi(z_*) < \Phi(\bar z)$, является решением задачи улучшения точки $\bar z$ в задаче (A).*

Введем в рассмотрение следующую задачу (MA):

$$\Phi(z) \to \min, \quad z \in \mathcal{Z}.$$

Тогда предложение 1 рекомендует заменить задачу улучшения $\bar{z}$ в задаче (A) (т.е. спуска из $\bar{z}$ по f) задачей спуска из $\bar{z}$ по мажоранте Φ без явного учета ограничения $z \in D$. Конечно, в каждой конкретной реализации данного подхода разрешимость новой задачи спуска на допустимом множестве D требует обоснования. Но если он оказался возможным, то улучшаемая точка не оптимальна в исходной задаче (она «бракуется»). Важно подчеркнуть, что при этом не требуется решать задачу (MA).

В гладких конечномерных задачах модифицированные функции Лагранжа (МФЛ) и штрафные функции порождают опорные мажоранты, для которых полное обоснование требует привлечения общей теории локального минимума (см. [15] для МФЛ) или штрафов со срезками целевой функции (см. [1]), т.е. первое слагаемое берется в виде $\bar{f}_+(z) := \max\{f(\bar{z}), f(z)\}$.

4. Позиционный принцип минимума для задачи (P)**.** Для доказательства F-ПМ будет использоваться МФЛ

$$M_{\lambda\gamma}(x) = g_0(x) + \lambda' g(x) + \frac{\gamma}{2}|g(x)|^2, \tag{7}$$

где λ — множитель Лагранжа, $g = (g_1, \dots, g_k)$, $\gamma > 0$ — параметр штрафа и $|\cdot|$ — евклидова норма.

Свойства функции (7) и соответствующего итерационного метода решения задачи на условный экстремум $g_0(x) \to \min$, $g(x) = 0$ описаны в замечательной статье Поляка [16]. В частности, там доказано, что при независимых градиентах ограничений в точке $\bar{x}$ стандартной квадратичной достаточности для локального минимума, в безусловной задаче $M_{\bar{\lambda}\gamma}(x) \to \min$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x}$ остается точкой строгого локального минимума (при $\bar{\lambda}$ — из условия критичности $\bar{x}$, и достаточно больших γ). Это свойство важно для построения численных методов, но нас интересует опорность функции $M_{\lambda\gamma}$.

Для обоснования этого свойства, следуя [16], перепишем её в следующем виде:

$$M_{\lambda\gamma}(x) = f(x) + \frac{\gamma}{2}|g(x) + r|^2 + \nu,$$

где $r = \lambda/\gamma$, $\nu = -\lambda^2/2\gamma = -\gamma/2 \cdot r^2$. Отсюда получаем равенство

$$M_{\lambda\gamma}(x) - M_{\lambda\gamma}(\bar{x}) = f(x) - f(\bar{x}) + \frac{\gamma}{2}\Big(|g(x+r)|^2 - |r|^2\Big).$$

Если при некоторых x_*, λ, γ левая часть этого равенства оказалась < 0, то и правая часть будет < 0, что дает неравенство

$$f(x_*) - f(\bar{x}) < \frac{\gamma}{2}\big(|r| + |g(x_* + r)|\big)\big(|r| - |g(x_* + r)|\big).$$

Но если дополнительно оказалось, что x_* допустима, то она решает задачу улучшения. Отсюда и из приведенных соотношений следует опорность $M_{\lambda\gamma}$ в точке $\bar{x}$.

Теперь мы можем применить схему п. 3 к задаче (P), взяв в качестве Φ функцию $M_{\lambda\gamma}$, и обратившись к семейству задач $(P_{\lambda\gamma})$ без терминальных ограничений:

$$M_{\lambda\gamma}\big(x(t_1)\big) \to \min, \quad \sigma \in \Sigma. \tag{8}$$

Для фиксированной задачи $(P_{\lambda\gamma})$ можно применить F-ПМ с квазилинейной мажорантой, т.е. условие $\mathbf{N}(\psi)$ из п. 2 (при этом в роли g_0 выступает функция $M_{\lambda\gamma}$). Для этого вводятся: котраектория $\eta(t)$ процесса $\bar{\sigma}$ задачи (8), её возмущение

$$p(t,x) := \nabla_x \varphi^\eta(t,x) = \eta(t) + \nabla M_{\lambda\gamma}(x) - \nabla M_{\lambda\gamma}\big(\bar{x}(t)\big)$$

(см. формулы (5), (6)); η-экстремальное отображение

$$U_\eta(t,x) = \operatorname*{Argmin}_{u \in U} p(t,x) \cdot f(t,x,u), \quad (t,x) \in T \times \mathbb{R}^n;$$

множество его селекторов $\mathcal{V}_\eta$ и движений Красовского—Субботина $\mathcal{X}(v)$, $v \in \mathcal{V}_\eta$. (Зависимость этих объектов от $(\lambda\gamma)$ опущена.)

Обозначим через E_η объединение всех пучков движений по $v \in \mathcal{V}_\eta$, а через $E^T_{\lambda\gamma}$ — множество всех движений, удовлетворяющих терминальным ограничениям (3) (это множество может содержать траектории овыпукленной задачи (coP)).

Теорема 1. *Если $\bar\sigma = (\bar x, \bar u)$ — оптимальный процесс в задаче (P), то при любом выборе $\lambda \in \mathbb{R}^k$ и $\gamma > 0$ выполняется неравенство*

$$g_0\big(\bar x(t_1)\big) \leqslant g_0\big(x(t_1)\big) \quad \forall x \in E^T_{\lambda\gamma}.$$

Смысл теоремы ясен: в её предположениях спуск с $\bar\sigma$ на допустимую траекторию овыпукленной задачи (coP) с помощью позиционного принципа минимума невозможен ($\bar\sigma$ «не бракуется»). В контрпозитивном случае, когда указанный спуск окажется возможным, процесс $\bar\sigma$ не оптимален, а полученная траектория спуска $x^*(\cdot)$ задает допустимый процесс в задаче (coP) (на его тестировании в общем случае не будем останавливаться).

Заметим, что теорема не требует от $\bar\sigma$ быть решением задачи (8).

Относительно стратегии выбора параметров λ, γ: λ может наследоваться из принципа максимума, а γ — следовать рекомендациям статьи [16].

5. Примеры.

Пример 1. $\dot x = u$, $x(0) = 0$, $x(1) = 0$, $|u| \leqslant 1$,

$$J[\sigma] = \int_0^1 \big[x^2 + (u^2 - 1)^2\big]\,dt \to \inf.$$

Это знаменитый пример Больца с ограниченным управлением, в котором $\bar\sigma = 0$ — допустимая пара. Она не оптимальна в силу принципа максимума Понтрягина, но этот критерий не даёт улучшенной пары.

Введем штрафной лагранжиан $J[\sigma] + \lambda x(1) + \frac{\gamma}{2}x^2(1)$ и применим к нему и $\bar\sigma$ теорему 1. Легко убедиться, что $\eta \equiv \lambda$, а экстремальное отображение $U_\eta(x)$ находится из следующей задачи:

$$(\lambda + 2\gamma x u)u + (u^2 - 1)^2 \to \min, \quad |u| \leqslant 1.$$

Мы достигнем (в пределе) минимума каждого слагаемого данной функции, если положим $\lambda = 0$ и выберем селектор

$$v(x) = \begin{cases} -1, & x > 0, \\ +1, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Его ломаные Эйлера равномерно сходятся к движению $x^* \equiv 0$ — траектории скользящего режима с обобщенным управлением $\frac12\delta_{+1} + \frac12\delta_{-1}$. Очевидно, что это глобально оптимальное решение расширенной версии примера Больца.

Пример 2. $\dot x_1 = (t-1)u$, $\dot x_2 = x_1(u-1)$, $x(0) = (0,0)$, $x_1(2) = 0$, $|u| \leqslant 1$, $J = x_2(2) \to \min$.

Выпишем условия ПМ:

$$\dot\psi_1 = -\psi_2(u-1), \quad \psi_1(2) = \lambda, \quad \dot\psi_2 = 0, \quad \psi_2(2) = \lambda_0,$$
$$(\lambda_0, \lambda) \neq 0, \quad \lambda_0 \in \{0, 1\}, \quad \big(\psi_1(t-1) + \psi_2 x_1\big)u \to \min, \quad |u| \leqslant 1,$$

при терминальной функции Лагранжа

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 x_2 + \lambda x_1.$$

Будем исследовать процесс $\bar\sigma$ с $\bar u \equiv 1$, $\bar x_1(t) = t^2/2 - t$, $\bar x_2 \equiv 0$, $J[\bar\sigma] = 0$, для которого $\lambda_0 = 1$, а условие минимума

$$\Big(\lambda(t-1) + \frac{t^2}{2} - t\Big)u \to \min, \quad |u| \leqslant 1,$$

выполняется для $\bar u$ только при $\lambda = 0$, причем строго на интервале $(0, 2)$.

Применим к $\bar\sigma$ F-ПМ с целевым лагранжианом

$$M_\gamma(x) = x_2(2) + \frac{\gamma}{2}x_1^2(2)$$

при множителе $\lambda = 0$ в соответствии с теорией. Тогда

$$\begin{gathered} \dot\eta_1 = -\eta_2(u-1), \quad \dot\eta_2 = 0, \quad \eta_1(2) = \gamma\bar x_1(2) = 0, \quad \eta_2 \equiv 1, \\ p(t,x) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\gamma x_1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma x_1\\1\end{pmatrix}, \\ U_\eta: \quad (\gamma x_1(t-1) + x_1)u \to \min, \quad |u| \leqslant 1. \end{gathered} \tag{9}$$

В окрестности начальной точки многозначности $x_1(0) = 0$ можем выбрать $v(x_1) = -1\big|O_+(0)$ (отличное от $\bar u$); тогда вдоль движения $x_1(t;v) = -t^2/2 + t$ функция переключения (см. (9))

$$g\big(t, x_1(t;v)\big) = t\left(1 - \frac{t}{2}\right)\big(1+\gamma t\big) > 0 \quad \forall\, t \in (0,1).$$

Поэтому управление $v = -1$ не имеет переключений, и можно положить

$$u^0 \equiv -1, \quad x_1^0(t) = t - \frac{t^2}{2}, \quad x_2^0 = \frac{t^3}{3} - t^2.$$

Для этого допустимого процесса σ^0 $J[\sigma^0] = -4/3 < 0 = J[\bar\sigma]$ и, следовательно, процесс $\bar\sigma$ не оптимален.

Примечательно, что процесс спуска σ^0 оказался строгой экстремалью Понтрягина на интервале $(0,2)$, но известные достаточные условия (позиционные версии Кротова и Понтрягина) не позволили установить его оптимальность. Повторное применение к σ^0 F-ПМ не привело к его улучшению — вновь выдало σ^0. Интересен конечный вердикт о минимали примера.

Опыт применения теоремы 1 к тестовым примерам с особенностями внушает сдержанный оптимизм. Определенные перспективы повышения эффективности данного F-ПМ связаны с алгоритмизацией выбора λ, γ на его итерации.

6. О традиционном методе Кротова и его обобщениях. Из методических соображений удобнее рассмотреть эту тему для задачи (P_C) с общим терминальным ограничением $x(t_1) \in C$, где C — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Остальные предположения на задачу (P) остаются в силе.

Обозначим через Φ_+ множество всех функций $\varphi : T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ класса $\mathcal{F}$, удовлетворяющих неравенству

$$R[\varphi](t,x,u) := \varphi_t(t,x) + \varphi_x(t,x) \cdot f(t,x,u) \geqslant 0 \quad \forall (t,x,u) \in T \times \mathbb{R}^n \times U, \tag{10}$$

или эквивалентному неравенству Гамильтона—Якоби

$$P[\varphi](t,x) := \varphi_t(t,x) + \min_{u\in U} \varphi_x(t,x) \cdot f(t,x,u) \geqslant 0 \quad \forall (t,x) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{11}$$

Обратим внимание, что функции из Φ_+ сильно возрастающие, т.е. их суперпозиция $\varphi\big(t, x(t)\big)$ не убывает на отрезке T вдоль любой траектории системы (1), (2). Из этого свойства элементарно выводится оценка снизу для функционала:

$$J[\sigma] \geqslant \eta(\varphi) + \varphi(t_0, x_0) \quad \forall \sigma \in \Sigma, \tag{12}$$

где

$$\eta(\varphi) = \inf\big\{g_0(x) - \varphi(t_1,x) \mid x \in C,\ \varphi(t_1,x) \geqslant \varphi(t_0,x_0)\big\}. \tag{13}$$

Поэтому, если Ω — любое множество функций из Φ_+, то из (12) следует оценка

$$\inf J(P_C) \geqslant \sup_{\varphi\in\Omega} [\eta(\varphi) + \varphi(t_0,x_0)] =: V(\Omega). \tag{14}$$

Результатом анализа этих оценок является следующая теорема.

Теорема 2.

(a) *Для оптимальности процесса $\bar\sigma$ в задаче (P_C) достаточно выполнение равенства*

$$J[\bar\sigma] = V(\Omega).$$

(b) *Пусть множество $f(t,x,U)$ выпукло на $T\times\mathbb{R}^n$. Тогда существует такое множество гладких функций $\Omega\subset\Phi_+$, что*

$$\min J(P_C)=V(\Omega).$$

Теорема 2 ослабляет критерий из работы [10] (неравенство Гамильтона—Якоби (11) рассматривается здесь без краевого условия). Её доказательство использует результаты Винтера [24] и Кларка с Ноур [22] о гладкой и негладкой двойственности в нелинейных задачах оптимального управления.

В частном случае, когда условие (a) теоремы 2 выполняется с одноэлементным множеством $V(\{\bar\varphi\})$, то $\bar\varphi$ называют *функцией Кротова* (кратко, K-функцией) процесса $\bar\sigma$. (Расхожее мнение о K-функции задачи в общем случае неверно.) Именно этот случай является традиционным для достаточных условий Кротова (см. [13, 14, 23]).

Однако в этом варианте инфимум в задаче (13) берется по более широкому множеству C (без неравенства монотонности для φ). Поэтому достаточные условия становятся более жесткими. Если при этом функцию Кротова исследуемого процесса $\bar\sigma=(\bar x,\bar u)$ считать *нормализованной* (т.е. в соответствующей задаче (13) инфимум равен нулю и достигается в точке $\bar x(t_1)$, а $R[\varphi](t,\bar x(t),\bar u(t))=0$ п. в. на T; см. [23]), то она совпадает с проверочной функцией Каратеодори (см. [20, 21, 25–27]). В то же время в изложенной модифицированной версии Кротова запас разрешающих функций существенно расширяется.

Тем не менее естествен вопрос: при каких условиях функция Кротова (или Каратеодори) существует? Следующая теорема 8.1 из обзора [20] «является кульминацией многолетних усилий по обоснованию метода (Каратеодори)».

Теорема 3. *Для оптимальности процесса $\bar\sigma$ в нормальной задаче (P_C) необходимо и достаточно существование липшицевой функции Каратеодори процесса $\bar\sigma$.*

Поясним, во-первых, что здесь речь идет о глобальной оптимальности (как и всюду в данной статье); между тем было очень много работ по сильному локальному минимуму. Во-вторых, нормальность задачи (P_C) означает, что $\bar\sigma$ и все оптимальные процессы задачи — нормальные экстремали принципа максимума (ПМ). Как известно, последнее свойство означает, что в условии трансверсальности для экстремали множитель Лагранжа (λ_0) по функционалу отличен от нуля, а в противном случае $\psi(t)\equiv 0$. Это вытекает из условия нетривиальности в (ПМ) — $\lambda_0+||\psi||_{C(T)}>0$, $\lambda_0\in\{0;1\}$. Наконец, в-третьих, в теореме K-функция предполагается липшицевой (без эпитета «локально») в силу предположений в постановке задачи — все траектории системы (1), (2) равномерно ограничены. Для липшицевых φ неравенства (10), (11) должны выполняться почти всюду по $(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n$. Очевидно, что в задачах со свободным правым концом (т.е. при $C=\mathbb{R}^n$) условия нормальности выполнены.

Отметим, что, как мы убедимся далее, для предлагаемой позиционной версии метода Кротова теорема 3 неверна в части необходимости и является слишком грубой в части достаточности.

7. Позиционный метод Кротова. Изложение проведем для задачи Больца (P_B) с функционалом

$$J[\sigma]=l\big(x(t_1)\big)+\int\limits_T F\big(t,x(t),u(t)\big)dt$$

и ограничением $x(t_1)\in C$, где функции l, F непрерывные и гладкие по x; другие ранее введенные предположения оставляем в силе.

Поскольку функционал J содержит интеграл, то условимся по-прежнему использовать запись $\varphi\in\Phi_+$, означающую, что функция $\theta(t,x,y)=\varphi(t,x)+y$ сильно возрастает относительно расширенной управляемой системы

$$\dot x=f(t,x,u),\quad \dot y=F(t,x,u),\quad x(t_0)=x_0,\quad y(t_0)=0,\quad u\in U.$$

Выберем неформальную схему изложения метода по шагам.

1. Фиксируем некоторую $\varphi \in \mathcal{F}$ и образуем *кротовский лагранжиан*

$$K^{\varphi}\big[x(\cdot), u(\cdot)\big] = J\big[x(\cdot), u(\cdot)\big] - \varphi\big(t, x(t)\big)\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_T \dot{\varphi}\big(t, x(t), u(t)\big)\, dt =$$

$$= l\big(x(t_1)\big) - \varphi\big(t_1, x(t_1)\big) + \int_T \big[\dot{\varphi}\big(t, x(t), u(t)\big) + F\big(t, x(t), u(t)\big)\big] dt + \varphi(t_0, x_0).$$

Очевидно, что $K^{\varphi} = J$ на множестве D.

2. Задача $K^{\varphi}[\sigma] \longrightarrow \inf$, $\sigma \in D$, «расщепляется» на две задачи:

(A) задачу минимизации интеграла в K^{φ}, т.е.

$$R^{\varphi}(t, x, u) \to \min, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \quad \forall t \in T;$$

(B) на задачу минимизации терминанта в K^{φ}, т.е.

$$G^{\varphi}(x) := l(x) - \varphi(t_1, x) \to \min, \quad x \in E^{\varphi},$$

где $E^{\varphi} = \{x \mid x \in C,\, \varphi(t_1, x) - \varphi(t_0, x_0) \geqslant 0\}$.

3. Задача (A), а точнее, задача $K^{\varphi} \to \min$, $\sigma \in D$, решается позиционно (по схеме GF-ПМ): ищется отображение

$$U_{\varphi}(t, x) = \operatorname*{Argmin}_{u \in U} \left[\varphi_x(t, x) \cdot f(t, x, u) + F(t, x, u)\right],$$

которое задаёт множество своих селекторов $\mathcal{V}_{\varphi}$ с позиционными стратегиями

$$v(t, x) \in U_{\varphi}(t, x)$$

и пучками движений $\mathcal{X}(v)\ \forall\, v \in \mathcal{V}_{\varphi}$ расширенной системы.

Пусть выбран борелевский селектор $\bar{v}(t, x) \in \mathcal{V}_{\varphi}$: расширенная система имеет решение Каратеодори $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ на T с управлением $\bar{u}(t) = \bar{v}\big(t, \bar{x}(t)\big)$ классаЁ$\mathcal{U}$. Теперь мы имеем некоторую пару $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in \Sigma$. Положим

$$R^{\varphi}\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big) = \mu(t) \quad \text{на } T.$$

Если $\mu(t) = 0$ п.в. на T, то $\varphi \in \Phi_+$ и пара $(\bar{x}, \bar{u})$ — решение задачи (A).

Если же $\mu(t) \neq 0$, то перейдем к «нормированной» функции

$$\varphi^1(t, x) = \varphi(t, x) - \int_{t_0}^{t} \mu(s) ds \, \in \Phi_+,$$

для которой

$$R^{\varphi^1}\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big) = 0 \quad \text{п.в. на } T,$$

т.е. $(\bar{x}, \bar{u})$ — решение задачи (A), но для нормированной φ^1.

Важно, что нормировка не меняет экстремального отображения, т.е. $U_{\varphi} = U_{\varphi^1}$.

4. Решаем терминальную задачу (B) с нормированной φ^1 (это общий случай):

$$G^{\varphi^1}(x) = l(x) - \varphi^1(t_1, x) \to \min, \quad x \in E^{\varphi^1}$$

(с неравенством $\varphi^1(t_1, x) - \varphi^1(t_0, x_0) \geqslant 0$).

Если $\min G^{\varphi^1}(x) = 0$ и достигается при $\bar{x}(t_1)$, то пара $(\bar{x}, \bar{u})$ глобально оптимальна, причем

$$J\big[\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)\big] = \varphi^1(t_0, x_0) \quad \big(= \min(P_B)\big).$$

Если же $\min G^{\varphi^1}(x) = m \neq 0$, то вывод об оптимальности $\bar{\sigma}$ остается, но для «лаконичной» формулы значения задачи делаем вторую нормировку, полагая $\varphi^2(t, x) = \varphi^1(t, x) + m$. Тогда

$$\min(P_B) = \varphi^2(t_0, x_0),$$

что совпадает с ответом для нормализованных K-функций.

Таким образом, в терминальной задаче (B) проверяется достижение минимума в точке $\bar{x}(t_1)$. Если оно нарушено, то φ не разрешающая.

На общий случай разрывной стратегии описанная схема распространяется с естественными изменениями.

Замечания 1. 1. При решении задач первую нормировку (при $\mu(t) \neq 0$) делать желательно: она элементарна, но позволяет сместить окончательный ответ на конечномерную задачу B) — проверке на минимум в ней подлежит известная точка $\bar{x}(t_1)$.

2. В задачах (A), (B) минимумы по x естественно брать по некоторому априорно заданному множеству достижимых состояний $Q(t) \supseteq R(t)$ (=множеству достижимости или управляемости).

Пример 3 (пример из [25] с нарушением условия нормальности)**.** $\dot{x}_1 = u,\ \dot{x}_2 = 2x_1u,\ x(0) = (0,0)$, $x_2(1) = 0$, $|u| \leqslant 1$, $J = x_1(1) \to \min$. По утверждению автора в этом примере $\bar{x} \equiv 0$ — единственная допустимая и, следовательно, оптимальная траектория. Но липшицевой K-функции не существует. Здесь терминальная функция Лагранжа $l = \lambda_0 x_1 + \lambda x_2$ и условия ПМ имеют вид

$$\dot{\psi}_1 = -2u,\ \psi_1(1) = \lambda_0, \quad \psi_2 \equiv \lambda \in \mathbb{R}, \quad \big(\psi_1(t) + \lambda x_1\big)u \to \min .$$

Отсюда для $\bar{x} \equiv 0$ получаем $\lambda_0 u \to \min \implies \lambda_0 = 0$, так как все постоянные управления генерируют $\bar{x}$. Имеем бесчисленное множество анормальных экстремалей.

Заметим, что функция $w = x_2 - x_1^2$ — первый интеграл управляемой системы и, следовательно, $\dot{w}(x) \equiv 0$, так что w сильно монотонна в любом смысле; возьмем $\varphi = w$. Тогда $R^{\varphi}(x,u) = \dot{w}(x) \equiv 0$ и поэтому её минимум существует для любого $\big(x(\cdot), u(\cdot)\big) \in D$, $G^{\varphi}(x) = x_1 - x_2 + x_1^2$ имеет минимум в точке $\bar{x}_1 = 0$ на множестве E^{φ}: $x_2 = 0$, $x_2 = x_1^2$. Следовательно, все пары $\big(\bar{x}, u(\cdot) \in \mathcal{U}\big)$ оптимальны. Таким образом, гладкая нелинейная $\varphi = w$ оказалась глобально разрешающей функцией Кротова для указанных пар.

Интересно, что $\bar{x} \equiv 0$ — не единственная оптимальная траектория, причем устанавливается это с линейной K-функцией $\varphi(t,x) = \langle \psi(t), x\rangle$. Действительно, возьмем $\varphi(t,x) = x_1 + \lambda x_2$ при $\lambda_0 = 1$. Тогда

$$\min_{|u| \leqslant 1} \dot{\varphi}(t,x,u) = -|1 + 2\lambda x_1| \quad \big(= P(x)\big)$$

(см. (11)). Эта вогнутая функция достигает минимума по x_1 на границе множеств достижимости и управляемости уравнения

$$\dot{x}_1 = u, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1(1) = 0 \ (\text{так как } \min_D J = 0), \quad |u| \leqslant 1,$$

т.е. на отрезках прямых $x_1^1 = t$, $x_1^2 = 1 - t$ ($x_1^3 = 0$ дает уже найденные экстремали с $\bar{x}$).

Пересечение x_1^1, x_1^2 образуют допустимую траекторию $x^0(t)$ (см. рис. 1) с релейным управлением $u^0(t) = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1]}$ (χ_A — характеристическая функция множества A). Пара $\big(x^0(t), u^0(t)\big)$ глобально оптимальна вместе с $\sigma^* = -\sigma^0$.

Замечание 1. Использование вогнутости $P(x)$ рационально. Но его можно заменить явным использованием экстремальной стратегии $v(x_1) = -\operatorname{sign}(1 + 2\lambda x_1)$ с подбором множителя λ из финального условия $x_1(1) = 0$. Оказывается, что $\lambda = -1$.

Пример 4. Пример с бесчисленным множеством экстремалей построен В. Ф. Кротовым (см. [13, с. 55-57]): $\dot{x} = u$, $x(-1) = x(1) = 0$, $|u| \leqslant 1$,

$$J = -\int_T tx^2 dt \to \min .$$

Применим позиционный формализм Кротова. Зададимся линейно-квадратичной функцией

$$\varphi(t,x) = \psi(t)x + \frac{1}{2}S(t)x^2, \quad S(\cdot) \in AC,$$

и образуем кротовский лагранжиан

$$K^{\varphi}\big[x(\cdot), u(\cdot)\big] = J\big[x(\cdot), u(\cdot)\big] - \varphi\big(t, x(t)\big)\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_T \dot{\varphi}\big(t, x(t), u(t)\big)\, dt = \int_T \Big(\psi(t)u(t) + S(t)x(t)u(t)\Big)\, dt,$$

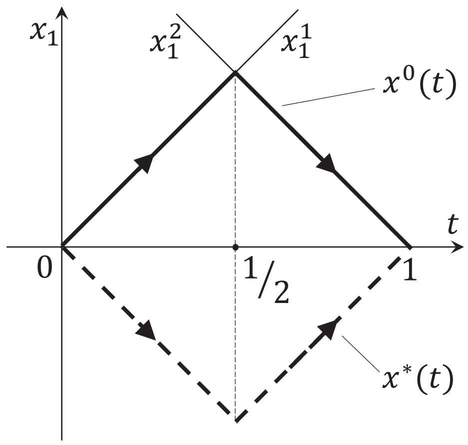

Рис. 1. Схема образования траектории $x^0(t)$ (в нижней полуплоскости — $x^*(t)$).

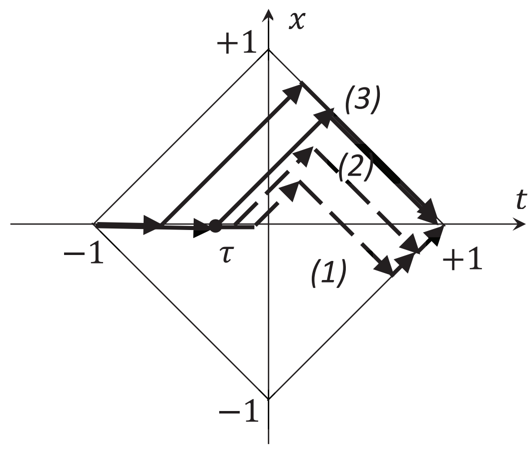

Рис. 2. Схема первого семейства экстремалей в примере 4; второе симметрично относительно оси времени.

если положить $S(t) = c - t^2$, $c \in \mathbb{R}$ — параметр, чтобы исключить x^2 в K^φ. В итоге получим задачу

$$K^\varphi[\sigma] = \int\limits_T \Big(\psi(t)u + (c - t^2)xu\Big)dt \to \min, \quad \sigma \in D, \tag{15}$$

причем $K^\varphi = J$ на множестве D, и интегрант в (15) — это в точности $\dot\varphi(t, x, u)$. Отсюда получаем

$$\min_{|u|\leqslant 1} \dot\varphi(t, x, u) = -|\psi(t) + (c - t^2)x|.$$

Это вогнутая функция от x, задающая экстремальную стратегию, и минимум которой по x достигается на границах множеств достижимости и управляемости системы

$$\dot x = u, \quad |u| \leqslant 1$$

с началом в $(\tau, 0)$ и концом $(1, 0)$. Здесь τ — правый конец отрезка $[-1, \tau]$ с $x = 0$, с которого начинаются все экстремали (это следует из ПМ, см. рис. 2).

Полученный вывод, который задает структуру оптимального процесса σ^0 с траекторией x^0 в верхней полуплоскости $x \geqslant 0$ и симметричное решение σ^* с $x^* = -x^0$. Эти процессы определены с точностью до конкретизации параметров $\tau \in (-1, 0)$, $c \in \mathbb{R}$ из вспомогательной задачи минимизации. Остальные (не оптимальные) экстремали отсеиваются полученным выводом.

8. На пути к позиционному методу Понтрягина. Идею метода поясним на альтернативном решении примера Кротова (пример 4). Предварительно отметим, что в решении примера 4 использовалась линейно-квадратичная функция Кротова, котраектория которой $\psi(t)$ так и не была конкретизирована. По существу это была билинейно-квадратичная, бипозиционная функция S (см. [8]), а лагранжиан K^φ совпал с бипозиционным лагранжианом $\mathcal{K}_S$. Отметив это, убедимся, что для решения примера достаточно билинейной функции $S(x, \psi) = \langle \psi, x \rangle$.

Из ПМ имеем: $H = \psi u - tx^2$,

$$\dot\psi = 2tx, \quad \psi(-1),\ \psi(1) \text{ свободны}, \tag{16}$$

$$\mathcal{R}_S := \dot S(x, \psi) = 2tx^2 + \psi u - 2tx^2 = \psi u,$$

$$\min_{|u|\leqslant 1} \mathcal{R}_S = -\psi \quad (\text{не зависит от } x), \quad w(\psi) = -\operatorname{sign} \psi \tag{17}$$

— экстремальная копозиционная стратегия. Хотя экстремальная стратегия $w(\psi)$ копозиционная, движения с нею в канонической системе не разделяются, принципиальных трудностей это не создает.

Начинаем реализовывать стратегию (17) в обратном времени. Чтобы выполнить ограничение $x(1) = 0$, в полуокрестности $O_-(1)$ должны выполняться условия

$$\psi(1) > 0, \quad w(\psi) = -1 \quad \Longrightarrow \quad x(t) = 1 - t,$$

согласованные с (17). Тогда из (16) находим

$$\psi(t) = \psi(1) + t^2 - \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{3} > 0, \quad t \in O_-(1).$$

Но в некоторый момент τ' необходимо переключение управления $w(\psi)$, чтобы прийти в точку $x(\tau) = 0$ (напомним, что все экстремали имеют начальный отрезок времени $[-1, \tau]$, причем $x(t) = u(t) = 0\big|_{[-1,\tau]}$). Поэтому $x(t) = t - \tau$, $u(t) = +1$ при $t > \tau$, а точнее, при $t \in [\tau, \tau']$, для сопряжения с движением $x(t) = 1 - t$ в конце периода управления.

Понятно, что $\tau' = \frac{1}{2}(\tau + 1)$, и в целом получены допустимые пары $\sigma^0 = \sigma^0(\tau)$, зависящие от параметра τ. Оптимальный процесс $\sigma^{00} = \sigma^0(\tau^0)$ получается дополнительной минимизацией функции $I(\tau) := J[\sigma^0(\tau)]$ при $\tau \in (-1, 0)$.

В силу симметрии также оптимальным будет процесс $\sigma^* = -\sigma^{00}$. Выводы в целом совпали с полученными в примере 4, но в последнем было двупараметрическое семейство процессов для поиска оптимального.

9. Заключение. В работе доказан позиционный принцип минимума для задач оптимального управления с терминальными ограничениями типа равенства. Это необходимое условие допускает обобщение на задачи с более общими ограничениями, но для этого нужно привлекать конструктивный вариант F-ПМ для негладких задач со свободным правым концом.

Кроме того, в статье предложен и обоснован позиционный метод Кротова, существенно расширяющий область применимости и эффективности традиционного формализма. Этот метод имеет интересные (и нетривиальные) обобщения, например, на задачи с ограничениями на оба конца траектории. Этот случай требует оперирования бипозиционными функциями типа Ляпунова—Кротова $V(t, x; t_0, x_0)$ и $V(t, x; t_1, x_1)$. Теория Гамильтона—Якоби для таких задач не работает, а понятие позиционного управления требует формализации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ащепков Л. Т., Константинов Г. Н.* Эффект «срезки» в задачах нелинейного программирования// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1976. — *16*, № 4. — С. 1047–1051.
2. *Дыхта В. А.* Вариационные необходимые условия оптимальности с позиционными управлениями спуска в задачах оптимального управления// Докл. РАН. — 2015. — *462*, № 6. — С. 653–656.
3. *Дыхта В. А.* Слабо монотонные решения неравенства Гамильтона—Якоби и условия оптимальности с позиционными управлениями// Автомат. телемех. — 2014. — *5*. — С. 31–49.
4. *Дыхта В. А.* Позиционные усиления принципа максимума и достаточные условия оптимальности// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2015. — *21*, № 2. — С. 73–86.
5. *Дыхта В. А.* О множестве необходимых условий оптимальности с позиционными управлениями, порожденном слабо убывающими решениями неравенства Гамильтона—Якоби// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2022. — *28*, № 3. — С. 83–93.
6. *Дыхта В. А.* Позиционный принцип минимума: вариационное усиление понятий экстремальности в оптимальном управлении// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2022. — *41*. — С. 19–39.
7. *Дыхта В. А.* Методы повышения эффективности позиционного принципа минимума в задачах оптимального управления// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — *224*. — С. 54–64.
8. *Дыхта В. А.* Нестандартная двойственность и нелокальные необходимые условия оптимальности в невыпуклых задачах оптимального управления// Автомат. телемех. — 2014. — *11*. — С. 19–37.
9. *Дыхта В. А.* Позиционный принцип минимума для квазиоптимальных процессов в задачах управления с терминальными ограничениями// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2017. — *19*. — С. 113–128.
10. *Дыхта В. А.* Неравенства Гамильтона—Якоби в оптимальном управлении: гладкая двойственность и улучшение// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2010. — *15*, № 1. — С. 405–426.
11. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. — М.: Наука, 1988.
12. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Физматлит, 1974.

13. *Кротов В. Ф., Букреев В. З., Гурман В. И.* Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. — М.: Машиностроение, 1969.
14. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973.
15. *Левитин Е. С., Милютин А. А., Осмоловский Н. П.* Теория условий высших порядков в гладких задачах на экстремум с ограничениями// в кн.: Теоретические и прикладные вопросы оптимального управления (Завалищин С. Т., Толстоногов А. А., ред.). — Новосибирск: Наука, 1985. — С. 4–39.
16. *Поляк Б. Т., Третьяков Н. В.* Метод штрафных оценок для задач на условный экстремум// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1973. — *13*, № 1. — С. 34–46.
17. *Субботин А. И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. — М.-Ижевск: Ин-т компьют. иссл., 2003.
18. *Субботина Н. Н., Колпакова Е. А., Токманцев Т. Б., Шагалова Л. Г.* Метод характеристик для уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана. — Екатеринбург: Ин-т мат. мех. им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 2013.
19. *Bardi M., Cappuzzo-Dolcetta I.* Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. — Boston: Birkhäuser, 1997.
20. *Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R.* Qualitative properties of trajectories of control systems: A survey// J. Dyn. Control Syst. — 1995. — *1*, № 1. — P. 1–48.
21. *Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R.* Nonsmooth Analysis and Control Theory. — N.Y.: Springer-Verlag, 1998.
22. *Clarke F. H., Nour C.* Nonconvex duality in optimal control// SIAM J. Control Optim. — 2005. — *43*. — P. 2036–2048.
23. *Krotov V. F.* Global Methods in Optimal Control Theory. — N.Y.: Marcel Dekker, 1996.
24. *Vinter R. B.* Convex duality and nonlinear optimal control// SIAM J. Control Optim. — 1993. — *31*. — P. 518–538.
25. *Vinter R. B.* Dynamic programming for optimal control problems with terminal constraints// Lect. Notes Math. — 1985. — *1119*. — P. 190–202.
26. *Vinter R. B.* Optimal Control. — Boston: Birkhäuser, 2000.
27. *Vinter R. B.* Weakest conditions for existence of Lipschitz continous Krotov functions in optimal control theory// SIAM J. Control Optim. — 1983. — *21*, № 2. — P. 215–234.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Дыхта Владимир Александрович (Dykhta Vladimir Aleksandrovich)
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск;
Иркутский государственный университет
(V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia;
Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: `dykhta@gmail.com`